DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

ESPACIOS DE MEDIDAS VECTORIALES

PABLO GREGORI HUERTA

UNIVERSITAT DE VALENCIA
Servei de Publicacions
2004

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a Valencia el día 04 de Juliol de 2001 davant un tribunal format per:

- D. José Luis Blasco Olcina
- D. Joaquín Motos Izquierdo
- D. Francisco J. Freniche Ibáñez
- D. Jesús Bastero Eleizalde
- D. Joan Cerdà Martín

Va ser dirigida per:
D. Óscar Blasco De La Cruz

©Copyright: Servei de Publicacions
Pablo Gregori Huerta

Depòsit legal:
I.S.B.N.:84-370-6059-1
Edita: Universitat de València
Servei de Publicacions
C/ Artes Gráficas, 13 bajo
46010 València
Spain
Telèfon: 963864115

Universitat de València — Facultat de Ciències Matemàtiques

Departamento de Análisis Matemático

ESPACIOS DE MEDIDAS VECTORIALES

TESIS DOCTORAL
presentada por

Pablo Gregori Huerta

Dirigida por el Dr.
D. Óscar Blasco de la Cruz

Valencia, 2001

ÓSCAR BLASCO DE LA CRUZ, Profesor del Departamento de Análisis Matemático de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia,

CERTIFICA: Que la presente memoria "ESPACIOS DE MEDIDAS VECTORIALES" ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Análisis Matemático de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia por PABLO GREGORI HUERTA y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presentamos ante la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia la referida Tesis Doctoral, firmando el presente certificado.

En Burjassot, a 26 de marzo de 2001

Fdo. Óscar Blasco

Esta memoria ha sido realizada bajo la dirección y ayuda del Dr. D. Óscar Blasco de la Cruz, a quien tengo que darle las gracias, sobre todo, por su amistad, habiéndome tratado como a un igual, con respeto y consideración. Esto me da la oportunidad de expresar mi admiración por él tanto en lo profesional como en lo personal, siendo modelo para mí a lo largo de estos años.

Darles las gracias a José M. Calabuig, Paco Villarroya y Carlos Ivorra, quienes más de una tarde se han quedado para "echarme una mano".

No quiero terminar sin dedicársela también a los míos, que siempre están ahí, incondicionalmente.

Valencia, Abril de 2001

Índice General

Introducción

Si bien la teoría de medidas vectoriales fue tema de estudio y tuvo su máximo auge entre los analistas de las décadas de los 60 y 70 —bien como una continuación natural y necesaria de la teoría de la medida (ver [Dinc]), bien como por las importantes interrelaciones con los espacios de Banach (ver [DiUh])—desde entonces y hasta nuestros días han aparecido distintos resultados y conexiones nuevas de la teoría con otras áreas.

Esta memoria tiene como objetivo fundamental el estudio de espacios de medidas vectoriales dentro del contexto general de aquellas medidas definidas por medio de un retículo de Banach. Así pues, los retículos de Banach llamados espacios de Köthe, o espacios de funciones de Banach, ocupan un lugar central en el desarrollo de la teoría de estas medidas vectoriales. Por otra parte, los espacios de funciones de Banach con valores vectoriales, también llamados espacios de Köthe-Bochner, comparten protagonismo con los anteriores puesto que, si bien no se incorporan en un primer término para construir el concepto de variación de una medida vectorial, son éstos los que se verán involucrados en las cuestiones que resuelven los espacios de medidas introducidos: la dualidad de estos espacios de funciones vectoriales, teoremas de representación de los operadores lineales y continuos que tienen como espacio de partida uno de éstos, y como espacio de llegada un espacio de Banach arbitrario, el estudio de ciertos ideales de operadores (también con dominio un espacio de Köthe-Bochner), el estudio de ciertos espacios de funciones armónicas vectoriales,...

Entre los casos particulares de espacios de funciones vectoriales importantes y conocidos disponemos de los espacios de Lebesgue-Bochner $L^p(\mu, X)$, los espacios de Orlicz-Bochner $L^\Phi(\mu, X)$, los espacios de Lorentz-Bochner $L^{p,q}(\mu, X)$, e incluso los espacios menos conocidos pero interesantes como son los espacios de Musielak-Orlicz-Bochner $L^M(\mu, X)$ (también llamados espacios de Orlicz generalizados). Entre estos últimos podemos localizar los espacios de Nakano vectoriales $L^{p(\cdot)}(\mu, X)$ que, aunque precisan de la teoría general de la familia de los espacios de Musielak-Orlicz para disponer de una norma, tienen una motivación directa desde los espacios de Lebesgue (el exponente p que aparece en la norma de una función se sustituye por una función medible $p(\cdot)$).

Por distintas razones, los resultados que ya se conocían se van extendiendo a situaciones más y más generales, dando la impresión de que el contexto de espacios de Köthe-Bochner proporciona un marco suficientemente amplio para cubrir a la mayor parte de ellos.

Pasado

Para comprender mejor la motivación que ha dado como fruto este trabajo, y lo que supone su aportación al área de estudio de las medidas vectoriales, se hace necesaria una introducción cronológica de la evolución (siempre centrada únicamente en el ámbito que se pretende cubrir) de la definición de ciertos espacios de medidas, vectoriales o no.

Remitiendo al lector a la parte de preliminares donde se definen la medidas vectoriales, destacamos en un primer momento los conceptos de variación total y semivariación total de una medida F. Son dos nuevas funciones de conjunto, definidas para cada medible A (es decir, $A \in \Sigma$) como

$$|F|(A) := \sup_{\pi \in D_A} \sum_{B \in \pi} \|F(B)\|_X$$
$$\|F\|(A) := \sup_{\pi \in D_A} \| \sum_{B \in \pi} \alpha_B F(B)\|_X$$

donde D_A representa el conjunto de particiones de A en una cantidad finita de medibles, y α_B son escalares con la condición $|\alpha_B| \leq 1$ para cada $B \in \pi$.

Es evidente que $\|F(A)\|_X \leq \|F\|(A) \leq |F|(A)$ para cada $A \in \Sigma$, así como las relaciones

$$\|F\|(A) = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^* F|(A)$$

donde $x^* \in X^*$ y la medida escalar $x^* F$ es la composición de F con el funcional x^*, y

$$\sup_{B \subset A} \|F(B)\|_X \leq \|F\|(A) \leq 4 \sup_{B \subset A} \|F(B)\|_X$$

donde $B \in \Sigma$. Aunque se trata de dos funciones de conjunto con sus propiedades (ver [Dinc]), se suele llamar a las cantidades $|F|(\Omega)$ y $\|F\|(\Omega)$, variación total y semivariación total de F, y se les denota por $|F|$ y $\|F\|$ respectivamente. Otro concepto vinculado a las medidas vectoriales es el de la μ-continuidad, es decir, la propiedad de que

$$\lim_{\mu(A) \to 0} \|F(A)\|_X = 0.$$

Las medidas de semivariación finita proporcionan una primera incursión en el terreno de los operadores lineales y continuos. En efecto, si $F : \Sigma \to X$ es tal que $\|F\|(\Omega) < \infty$, el operador T_F dado por

$$T_F(\sum_{A \in \pi} \alpha_A \chi_A) = \sum_{A \in \pi} \alpha_A F(A)$$

para cada función simple es lineal en el conjunto de las funciones simples. La definición de $\|F\|(\Omega)$ expresa en sí misma la acotación del operador T_F en el conjunto de las funciones simples acotadas dotado de la norma supremo. La extensión por densidad lleva a probar la relación unívoca y lineal que existe entre el espacio de las medidas de semivariación acotada y $L(B(\Sigma), X)$, donde $B(\Sigma)$ es el conjunto de las funciones que son límite uniforme de sucesiones de funciones simples con la norma supremo. Asimismo, si se considera el espacio L^∞ en lugar de $B(\Sigma)$ (es decir, se identifican las funciones que coinciden casi por todas partes y la norma es el supremo esencial), entonces la identificación ocurre entre el espacio de las medidas de semivariación finita, que además se anulan sobre los conjuntos μ-nulos, y $L(L^\infty(\mu), X)$.

El primer grado de generalización de estos conceptos viene dado por Leader en [68], donde aparece el espacio V^p de medidas p-integrables. Aunque se realiza en el caso escalar, exponemos la p-variación y la p-semivariación de medidas con valores vectoriales. stas son dos nuevas funciones de conjunto dadas por

$$|F|_p(A) := \sup_{\pi \in D_A} \left(\sum_{B \in \pi} \frac{\|F(B)\|_X^p}{\mu(B)^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|F\|_p(A) := \sup_{\|x^*\| \le 1} \left(\sup_{\pi \in D_A} \frac{|x^* F(B)|^p}{\mu(B)^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

para cada medible A y $1 \le p < \infty$, y

$$\|F\|_\infty(A) = \sup_{\|x^*\| \le 1} \sup_{B \subset A} \frac{|x^* F(B)|}{\mu(B)} = \sup_{B \subset A} \frac{\|F(B)\|_X}{\mu(B)} = |F|_\infty(A)$$

Lo cierto es que aunque las expresiones anteriormente escritas son las que han gozado de mayor popularidad, éstas se pueden reescribir como

$$|F|_p(A) := \sup\{ \sum_{B \in \pi} |\alpha_B| \, \|F(B)\|_X : \ \pi \in D_A, \ \| \sum_{B \in \pi} \alpha_B \chi_B \|_{L^{p'}} \le 1 \}$$

$$\|F\|_p(A) := \sup\{ \| \sum_{B \in \pi} \alpha_B F(B) \|_X : \ \pi \in D_A, \ \| \sum_{B \in \pi} \alpha_B \chi_B \|_{L^{p'}} \le 1 \}.$$

De nuevo, a las cantidades $|F|_p(\Omega)$ y $\|F\|_p(\Omega)$ se les llama p-variación total y p-semivariación total de F, y se les denota por $|F|_p$ y $\|F\|_p$, respectivamente. Los espacios de medidas que se definen a partir de estas variaciones son $V^p(\mu, X)$, de las medidas de p-variación finita, y $\mathcal{V}^p(\mu, X)$, de las medidas de p-semivariación finita (en $V^p(\mu, X)$ se consideran sólo medidas μ-continuas, hecho superfluo para $p > 1$ pero que se impondrá para $p = 1$), siempre tratando con medidas que se anulan sobre los medibles μ-nulos. Los resultados que se alcanzan en el terreno de la representación de operadores son los siguientes:

- $\mathcal{V}^{p'}(\mu, X) = L(L^p(\mu), X)$ para $1 \le p < \infty$ (ver [18, 100])
- $V^p(\mu, X)$ puede identificarse con la subclase de los operadores de Dinculeanu $\mathcal{D}(L^{p'}(\mu), X)$ (ver [Dinc, p. 259]) o bien con la de los operadores p-sumantes positivos $\Pi^{p,+}(L^{p'}(\mu), X)$ (ver [10]) o la de los cono absolutamente sumantes $\Pi^{1,+}(L^{p'}(\mu), X)$ (ver [111]).
- $[L^p(X)]^* = V^{p'}(X^*)$ para $1 \le p < \infty$.

La propiedad de Radon-Nikodým, (RNP), sobre los espacios de Banach adquiere nuevas caracterizaciones:

- X^* tiene la (RNP) si y sólo si $[L^p(X)]^* = L^{p'}(X^*)$ para algún $1 \leq p < \infty$.
- X tiene la (RNP) si y sólo si $V^p(X) = L^p(X)$ para algún $1 \leq p \leq \infty$.

El hecho de relacionar los operadores p-sumantes positivos con los espacios de medidas $V^p(X)$ tiene una motivación en la isometría existente entre el conjunto de los operadores absolutamente sumantes de $C(K)$ (para K espacio compacto Hausdorff) en X y el conjunto de las medidas de Borel regulares de variación total acotada (ver [DiUh, p. 162]).

Los resultados descritos hacen de los espacios de medidas vectoriales que se usan una herramienta adecuada. El motivo de potenciar las expresiones de p-variación y p-semivariación que se han enunciado en primer lugar, es hacer de éstos unos espacios con identidad propia, ya que la segunda expresión es una evidente traslación de la norma de un operador lineal a la notación de las medidas.

Más adelante, J. J. Uhl toma como espacios de funciones de referencia la familia de los espacios de Orlicz en [114, 115, 116]. Esta nueva familia viene parametrizada por unas funciones especiales, llamadas funciones de Young (de las cuales la función $\Phi(t) = t^p$ es un ejemplo para $1 \leq p < \infty$). Se dice que una función medible f pertenece a la clase de Orlicz $L^\Phi(\mu, X)$ si

$$\int_\Omega \Phi(\|f(w)\|_X) d\mu(w) < \infty$$

([97, 62, 108] son referencias adecuadas para el estudio de estos espacios).

La ampliación del concepto de p-variación que realiza Uhl requiere un pequeño análisis del concepto. La expresión dada para la p-variación se puede escribir, trivialmente, como

$$|F|_p = \sup_{\pi \in D_\Omega} \| \sum_{A \in \pi} \frac{F(A)}{\mu(A)} \chi_A \|_{L^p(X)},$$

es decir, como supremo en las particiones π de Ω de la norma en el espacio $L^p(X)$ de la función simple

$$\sum_{A \in \pi} \frac{F(A)}{\mu(A)} \chi_A.$$

Así, Uhl define en [115] que una medida vectorial F tiene Φ-variación finita cuando

$$\sup_{\pi \in D_\Omega} \sum_{A \in \pi} \Phi(\frac{\|F(A)\|_X}{\mu(A)}) \mu(A) < \infty.$$

El autor no llama a esta expresión Φ-variación de la medida F, sino que trabaja con el espacio de medidas a través de las normas que existen en los espacios de funciones de Orlicz, a saber, la norma de Luxemburg y la norma de Orlicz. Tanto en [115] como en [114], el autor define el espacio de medidas de Orlicz $V^\Phi(\mu, X)$, de las medidas de Φ-variación acotada (que se anulan sobre los conjuntos μ-nulos y son μ-continuas); estudia su estructura dotándolo de las dos normas mencionadas, demuestra la inclusión isométrica que existe entre el espacio de funciones y el de las medidas, obtiene un nuevo teorema de Radon-Nikodým, y estudia las correspondencias que hay entre espacios de operadores lineales y continuos con dominio en espacios de Orlicz vectoriales y espacios de medidas (entre las cuales aparece un teorema de dualidad de espacios de funciones vectoriales de Orlicz y otro acerca de la reflexividad de estos espacios). También se generaliza el concepto de clase de operadores de Dinculeanu al contexto de los espacios de Orlicz, con la consiguiente isometría, paralela al caso Lebesgue.

Dicho de otro modo, comprueba que los nuevos espacios de medidas vectoriales siguen manteniendo las mismas relaciones con los espacios de funciones (escalares y vectoriales), que los espacios de operadores lineales de un espacio de Orlicz en un Banach arbitrario se corresponden —de manera similar al caso L^p— con los nuevos espacios de medidas definidos, al igual que la propiedad de Radon-Nikodým adquiere nuevas equivalencias.

En [42] se realiza un trabajo de recopilación sobre esta clase de espacios de medidas vectoriales. En primer lugar se hace una introducción a los espacios de funciones de Orlicz vectoriales. Posteriormente se define de manera alternativa la Φ-variación. En efecto se toman las expresiones

$$|F|_\Phi(A) := \sup\{\sum_{B\in\pi} |\alpha_B|\, \|F(B)\|_X :\ \pi \in D_A,\ \|\sum_{B\in\pi} \alpha_B \chi_B\|_{L^\Psi} \le 1\}$$
$$\|F\|_\Phi(A) := \sup\{\|\sum_{B\in\pi} \alpha_B F(B)\|_X :\ \pi \in D_A,\ \|\sum_{B\in\pi} \alpha_B \chi_B\|_{L^\Psi} \le 1\}.$$

para la Φ-variación y la Φ-semivariación, respectivamente. La función Ψ que aparece guarda una relación de complementariedad con la Φ tal y como la guardan los exponentes conjugados en los espacios de Lebesgue. La norma que se toma de las funciones simples es la norma de Luxemburg.

Con estas expresiones se prueba el mismo tipo de teoremas que aparecen en [115], sobre los operadores, la dualidad, la clase de Dinculeanu, el teorema de Radon-Nikodým, etc... Queda pendiente la idea de ir más allá en este tipo de consideraciones.

El siguiente salto en la generalización, después de los casos de Lebesgue y Orlicz, se produce en 1968 por N. E. Gretsky. En un momento en que W. A. J. Luxemburg ha desarrollado la teoría de los espacios de funciones de Banach en [75] —teniendo esto una continuación en las notas [78] por W. A. J. Luxemburg y A. C. Zaanen y [77] por W. A. J. Luxemburg— esta familia de espacios se presenta como contexto suficientemente general para dar cabida a lo que anteriormente se había limitado a los espacios L^p y luego extendido a los L^Φ. Con esta idea, N. E. Gretsky realiza su tesis doctoral, gran parte de la cual aparece publicada como [Gret], y de la que vamos a indicar parte de sus logros.

En primer lugar da una definición de E-variación para medidas con valores en un espacio dual X^*, donde E es un espacio de funciones de Banach con la llamada propiedad (J). La propiedad (J) es satisfecha por E cuando

$$\|\sum_{A\in\pi} \frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)} \chi_A\|_E \le \|f\|_E$$

para toda partición π y toda función f de E. Así, la E-variación de una medida F con valores en X^* es

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\pi} \| \sum_{A\in\pi} \frac{\langle x, F(A)\rangle}{\mu(A)} \chi_A \|_E.$$

El espacio de las medidas X^*-valoradas F de manera que cada medida escalar xF (composición de F con la actuación de x por dualidad) es numerablemente aditiva y μ-continua para cada $x \in X$, y con E-variación finita juega un papel importante en la teoría de representación integral de operadores lineales. De hecho resulta ser isomorfo al espacio $L(X, E)$ mediante la correspondencia

$$xF(A) = \int_A Tx(w)d\mu(w), \qquad Tx = \frac{d(xF)}{d\mu}.$$

Por otro lado define la E'-variación (donde E' es el espacio asociado a E) para medidas X-valoradas donde de nuevo se impone la propiedad (J), esta vez sobre E'. Si F es la medida, entonces

$$\sup_{\|x^*\|\leq 1} \sup_{\pi} \| \sum_{A\in\pi} \frac{\langle F(A), x^*\rangle}{\mu(A)} \chi_A \|_{E'}.$$

es su E'-variación. Ahora se considera el espacio de las medidas X-valoradas de manera que se anulan sobre los conjuntos μ-nulos y con E'-variación finita. Este espacio resulta ser normado e isomorfo a $L(E_b, X)$, donde E_b es la clausura en E del conjunto de las funciones simples. La relación medida-operador resulta ser

$$Tf = \int_\Omega f dF, \qquad F(A) = T(\chi_A),$$

donde la integral es la integral de Bartle ([4]).

Finalmente se caracteriza el espacio dual E^* en términos de medidas de E'-variación finita y otro conjunto de medidas (las llamadas puramente finitamente aditivas, y de las que no hablaremos), mientras que el espacio dual $(E_b)^*$ viene identificado por el espacio de medidas reales ν tales que

$$\sup\{| \int_\Omega f d\nu | : \ \|f\|_E \leq 1, \ f \text{ simple } \}.$$

Finalmente llegamos al trabajo que precede a esta memoria, al menos en cuanto a la intencionalidad de generalizar los espacios de medidas definidos hasta entonces. Se trata de [GrUh], de N. E. Gretsky y J. J. Uhl y publicado 1972.

En él se trabaja de nuevo con los espacios de funciones de Banach con la restricción de la propiedad (J). Se observa perfectamente cómo la idea ya comentada en la p-variación y la Φ-variación, de tomar supremos en las normas de funciones simples es, de nuevo, la clave de la nueva E-variación. En efecto, define para $F : \Sigma \to Z$ y $\|\cdot\|_E$ una norma funcional la E-variación de F como

$$\sup_{\pi} \| \sum_{A\in\pi} \frac{F(A)}{\mu(A)} \chi_A \|_{E(Z)} = \sup_{\pi} \| \sum_{A\in\pi} \frac{\|F(A)\|_Z}{\mu(A)} \chi_A \|_E$$

Como se puede ver, los espacios de funciones de Banach son reemplazados por los espacios, más generales, de funciones de Banach vectoriales, llamados también espacios de Köthe-Bochner. Una función medible f, con valores en un espacio de Banach X, pertenece al espacio $E(X)$ si la función positiva $\|f\|_X$ pertenece al espacio E. Además $\|f\|_{E(X)} = \| \|f\|_X \|_E$. En estos espacios también son importantes subespacios como la clausura del conjunto de las funciones simples, la clausura del conjunto de las funciones acotadas y el subespacio de las funciones con norma absolutamente continua (ver en el interior de la tesis). Una referencia sobre este tipo de espacios y sus propiedades es [88].

En todo este contexto se definen dos espacios de medidas con valores en el espacio $L(X,Y)$, donde X e Y son espacios de Banach arbitrarios. En primer lugar, $U_{E'}(L(X,Y))$, formado por aquellas medidas F de manera que

- Se anulan sobre los conjuntos μ-nulos.
- Son finitamente aditivas.
- La función de conjunto $\|y^*F\|_{X^*}$ cumple $\rho_{E'}(\|y^*F\|_{X^*}) < \infty$ para cada $y^* \in Y^*$.
- $\|F\|_{U_{E'}} = \sup_{\|y^*\| \leq 1} \rho_{E'}(\|y^*F\|_{X^*})$.

En segundo lugar toma un subespacio del anterior, denotado por $W_{E'}(L(X,Y))$, formado por aquellas medidas F tales que

- Son μ-continuas.
- Son contablemente aditivas.
- La medida X^*-valuada y^*F cumple $\rho_{E'}(y^*F) < \infty$ para cada $y^* \in Y^*$.
- $\|F\|_{W_{E'}} = \sup_{\|y^*\| \leq 1} \rho_{E'}(y^*F)$.

Los teoremas que se prueban sobre operadores lineales y continuos son:

- $L(E(X)_b, Y) = U_{E'}(X,Y)$.
- $L(E(X)_a, Y) = W_{E'}(X,Y)$ si $E_a = E_b$.

$E(X)_a$ y $E(X)_b$ son los subespacios de las funciones con norma absolutamente continua, y la clausura del conjunto de las funciones simples. La relación medida-operador es

$$F(A)(x) = T(x\chi_A)$$

para cada medible A y $x \in X$.

Por último, el espacio que denota por $V_{E'}(X)$, formado por las medidas F contablemente aditivas y μ-continuas con $\rho_{E'}(F) < \infty$, proporciona el corolario:

- $[E(X)_a]^* = V_{E'}(X^*)$ si $E_a = E_b$.
- Si $E_a = E_b$, entonces $X \in (RNP)$ sii $[E(X)_a]^* = E'(X^*)$.

Por otro lado, cabe mencionar el importante trabajo desarrollado por la escuela rusa, principalmente por A. V. Bukhvalov en [20], que también ha abordado las cuestiones de representación de operadores lineales y dualidad en retículos vectoriales con trabajos de un alto grado de abstracción y alcance usando, por ejemplo, funciones vectoriales débil* medibles para representar los duales de los espacios de funciones vectoriales.

En suma, los resultados obtenidos en el campo de las medidas vectoriales han sido aplicados a la obtención de teoremas de representación de operadores lineales y continuos, de nuevos teoremas de Radon-Nikodým, de caracterizaciones de la reflexividad de distintos tipos de espacios de funciones, etc. También se han establecido conexiones con las funciones armónicas mediante el uso de espacios de Hardy.

El espacio de funciones armónicas vectoriales de Hardy $h^p(\mathbb{D}, X)$ está formado por las funciones armónicas u definidas en el disco unidad complejo $\mathbb{D}$ y con valores en el espacio X de manera que las funciones restricción u_r, definidas en el toro como $u_r(t) := u(re^{it})$, verifican la acotación $\sup_r \|u_r\|_{L^p(X)} < \infty$.

Cuando X es el cuerpo de los escalares, el espacio de funciones L^p se sumerge de forma isométrica en el espacio h^p mediante la integral de Poisson

$$P[f](re^{it}) = P_r * f(t)$$

para $1 < p \leq \infty$ (usando la desigualdad de Young para convoluciones, más propiedades de límites para la topología débil*). Por otro lado, cada función de h^p genera una red de funciones $(u_r)_r$ de L^p. Ésta posee una subsucesión convergente a una cierta función de L^p para la topología débil*, de modo que la función u resulta ser la integral de Poisson de dicho límite.

En el caso vectorial podemos encontrar un estudio del comportamiento en la frontera de las funciones armónicas de estos espacios de Hardy en [26] y [49]. El resultado es la equivalencia de las afirmaciones:

- Toda función $u \in h^p(\mathbb{D}, X)$ tiene límite radial casi por todas partes, es decir, existe $\lim_{r\to 1} u(re^{it}) = f(t)$ para casi todo $t \in \mathbb{T}$.
- $h^p(\mathbb{D}, X) = \{P[f] : f \in L^p(\mathbb{T}, X)\}$.
- $X \in (RNP)$

Cabe mencionar que en espacios de funciones p-Pettis integrables (el análogo al espacio $L^p(X)$, pero con una versión de integrabilidad más débil que la integrabilidad Bochner, llamada integrabilidad Pettis) definidas en el toro, para $1 \leq p < \infty$ y X infinito-dimensional, existen funciones medibles y p-Pettis integrables de manera que su integral de Poisson (armónica vectorial en el disco) no converge radialmente en ningún punto del toro, aunque converge en la norma del espacio de las funciones p-Pettis integrables a la función inicial (ver [41]).

La conexión entre medidas vectoriales de p-variación finita y funciones armónicas se puede ver en [8], donde se encuentra (Thm. 2.1.) que

- $h^p(\mathbb{D}, X) = V^p(X)$ para $1 < p \leq \infty$.

La identificación entre ambos espacios se produce a través de la extensión de la integral de Poisson a las medidas vectoriales. En [7] se relacionan los espacios de Hardy vectoriales $h^p(\mathbb{D}, X)$ con la clase de Dinculeanu de operadores de $L^{p'}$ en X. La integral de Poisson toma su expresión más general al aplicarse sobre operadores lineales y continuos arbitrarios. Puede consultarse [87] como referencia completa sobre los espacios $h^p(\mathbb{D}, X)$.

Antes de comentar el caso más general, la extensión al contexto de espacios de Orlicz puede verse en [109, 12], donde $h^\Phi(\mathbb{D}, X)$ está formado por las funciones armónicas vectoriales u tales que

$$\sup_{r\in[0,1)} \int_{\mathbb{T}} \Phi(\|u_r(t)\|_X)dt < \infty$$

con la norma $\|u\|_{h^\Phi(X)} = \sup_r \|u_r\|_{L^\Phi(X)}$, y donde Φ es función de Young. El resultado fundamental es la identificación isométrica $h^\Phi(\mathbb{D}, X) = V^\Phi(X)$, mientras que se obtiene otra caracterización de la (RNP), a saber, la identificación $h^\Phi(\mathbb{D}, X) = L^\Phi(X)$ para Φ función de Young.

Para el caso más general se puede consultar [107]. Allí se define el espacio de Hardy $h^E(X)$ tal y como se presenta en esta memoria con la salvedad de suponer sobre E la hipótesis de espacio invariante por reordenamiento maximal (ver [72]). Se prueba una isometría entre $h^E(X)$ y el espacio de los operadores cono absolutamente sumantes, generalizando la existente para el caso $E = L^p$ dada por O. Blasco en [6].

Presente

La generalidad conseguida hasta ahora es enorme dado que los espacios de funciones de Banach gozan de un ámbito de aplicación extenso. Las hipótesis adicionales que se imponen sobre estos espacios de funciones van en detrimento de la generalidad que se pretende. Tanto en [Gret] como en [GrUh], las hipótesis que se asumen sobre el espacio de funciones de Banach son dos. En primer lugar la propiedad de Fatou débil, denotada por (WFP), y consistente en:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq f_n \uparrow f \\ \sup_n \|f_n\|_E < \infty \end{array}\right\} \text{ implica } \|f\|_E < \infty.$$

En este trabajo vamos a considerar la propiedad de Fatou fuerte, denotada por (SFP), y consistente en:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq f_n \uparrow f \\ \sup_n \|f_n\|_E < \infty \end{array}\right\} \text{ implica } \|f\|_E = \lim_n \|f_n\|_E.$$

Evidentemente, la (SFP) es más restrictiva que la (WFP) (haciendo honor a su nombre) con lo que parece menos deseable si se desea alcanzar la mayor generalidad posible. Sin embargo, la diferencia entre ambas se traduce, únicamente, en lo siguiente: A partir del espacio de funciones E se puede definir su espacio asociado E' y, más aún, el asociado de éste, E''. Bajo la hipótesis de

(WFP), los espacios Ey E'' están formados por las mismas funciones, pero son isomorfos. Existe una constante $0 < \gamma \leq 1$ tal que

$$\gamma \|f\|_E \leq \|f\|_{E''} \leq \|f\|_E$$

para cada f. Pues bien, la (SFP) es una hipótesis que caracteriza la isometría entre ambos. Asumiendo entonces la (SFP) se simplifican las pruebas de los resultados en los que se manipule el espacio E'', además de que se conseguirán verdaderas isometrías a raíz de ésta que ya existe. Por tanto, si se desea leer la memoria con la hipótesis (WFP) en mente, se debe tener en cuenta que, sólo en aquellos resultados que hablen de isometrías entre espacios, hay que examinar el papel que en ellos juega el espacio E'' con la posibilidad, en su caso, de que la isometría mencionada se convierta en un isomorfismo donde aparezca la constante γ antes mencionada.

La segunda propiedad restrictiva es la propiedad (J). Es cierto que esta propiedad se mantiene en la mayoría de espacios conocidos, como son los de Lebesgue y los de Orlicz. De hecho, las p-variaciones y las Φ-variaciones que se han expuesto anteriormente han tenido, en alguna de sus formulaciones equivalentes, una expresión como la de la última E-variación (es decir, como supremo de normas de ciertas funciones simples).

En la exposición de la teoría general no asumiremos la hipótesis de la propiedad (J). La razón es la intención de encontrar un contexto más general que el ya hallado en los trabajos que hemos mencionado anteriormente. Se muestra en la parte final de la memoria una familia de espacios de funciones de Banach entre los cuales se encuentran algunos que no satisfacen la propiedad (J). Se tomará uno de ellos como ejemplo para resolver las cuestiones concernientes a los operadores y a la dualidad que la teoría actual no puede cubrir. De hecho, se pone de manifiesto para tal ejemplo que la definición del espacio de medidas mediante la forma descrita en [GrUh] no puede relajar la hipótesis de la propiedad (J). En efecto, se mostrará el fenómeno patológico de tomar una familia de funciones de la bola unidad de dicho espacio, de manera que una vez considerada como familia de medidas —mediante el paso estándar por la integral de Bochner indefinida—, ésta no formará un conjunto acotado del espacio de medidas.

Además de tratar de obtener los teoremas de representación de los operadores lineales y continuos en función de estos espacios de medidas, y de describir los espacios duales de espacios de Köthe-Bochner $E(X)$ donde E no satisface necesariamente la propiedad (J), otros tópicos a tratar en esta memoria son: (1) la extensión de la clase de operadores de Dinculeanu a este nuevo contexto, (2) la representación y caracterización en términos de medidas vectoriales de operadores cono absolutamente sumantes, (3) la definición y caracterización de nuevos espacios de funciones armónicas vectoriales que engloban a los conocidos $h^p(\mathbb{D}, X)$ de Hardy-Lebesgue ([7]), $h^\Phi(\mathbb{D}, X)$ de Hardy-Orlicz ([109, 27]) y $h^E(X)$ con E invariante por reordenamiento y maximal ([107]).

Los espacios de funciones de Banach con la propiedad de ser invariante por reordenamiento tienen una gran importancia en la teoría de interpolación de operadores (ver [BeSh]). Esta propiedad, consistente en que dos funciones f y

g que tienen la misma función de distribución, es decir,

$$\mu(\{w \in \Omega : \ |f(w)| \geq \lambda\}) = \mu(\{w \in \Omega : \ |g(w)| \geq \lambda\}), \qquad \forall \lambda > 0$$

tienen entonces igual norma, es aún más restrictiva que la propiedad (J). Dedicamos una parte de la teoría que desarrollamos a esta subclase de espacios por tratarse de espacios que aparecen con mucha frecuencia en la literatura (los espacios de Lebesgue y los de Orlicz siguen siendo de este tipo, así como los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, tan vinculados a la teoría de interpolación). De hecho, el concepto de la (E, ∞)-variación que se define, motivado por una similitud con los espacios de Lebesgue-Marcinkiewicz, va a tener como contexto natural este tipo de espacios, y va a encontrar una interesante relación con los también llamados espacios de Lorentz Λ y M asociados a todo espacio invariante por reordenamiento.

Por último hacemos una reseña sobre los espacios de Köthe de funciones vectoriales. Los espacios de Köthe-Bochner están siendo objeto de estudio en las últimas décadas, principalmente en su vertiente geométrica, destacando los trabajos de A. Kamińska [Kam] (sobre nociones como son el tipo y cotipo de Rademacher, la p-convexidad y q-concavidad, y la p-estimación superior y q-estimación inferior) y de J. Cerdà, H. Hudzik y M. Mastyło [30] (sobre propiedades locales, como puntos LUR, puntos expuestos y fuertemente expuestos, puntos "smooth", puntos locamente uniformemente monótonos), además de [63, 64, 57, 53, 54, 70, 103, 104, 28, 29, 33] y otros, siendo [45] un trabajo pionero. Trabajos recientes relativos al estudio de compacidades en estos espacios son [34, 39, 94, 95], mientras que en [48] se da una respuesta a la pregunta originada en [22] acerca de cómo una propiedad que comparten un espacio de funciones de Banach E y un espacio de Banach arbitrario X pasa al espacio de Köthe-Bochner formado por ellos $E(X)$, y viceversa. Otro trabajo en esta línea es [23]

Un paseo por la tesis

Después de este repaso de carácter general pasamos a describir brevemente el contenido y resultados más relevantes de la memoria.

Está estructurada en 4 capítulos. El primero, de carácter introductorio, contiene la serie de definiciones, notaciones y resultados previos para tratar de hacer, en lo posible, un trabajo autocontenido. El marco de trabajo es un espacio de medida positiva finito y completo (Ω, Σ, μ) donde Σ es una σ-álgebra, aunque la mayor parte de asuntos tratados tienen vigencia en espacios de medida σ-finitos.

Los preliminares sobre funciones, operadores y medidas se centran en exhibir cómo la integral de Bochner sirve como herramienta para definir los espacios de funciones de Lebesgue-Bochner $L^p(\mu, X)$. La conocida dualidad entre los espacios de Lebesgue escalares y la integral de Bochner convierten a los espacios de funciones de Lebesgue-Bochner en subconjuntos de espacios de operadores lineales y continuos. Se motiva la definición de la clase de operadores de

Dinculeanu, así como la de los operadores p-sumantes y p-sumantes positivos, o la de los operadores cono absolutamente sumantes. Por medio de la integral de Bochner, cada espacio de funciones de Lebesgue-Bochner se sumerge dentro de una de estas clases de operadores, cuyo dominio siempre es el espacio de Lebesgue de funciones escalares con exponente conjugado. La dualidad de los espacios de Lebesgue-Bochner no se resuleve y se da entrada a las medidas vectoriales. La p-variación y la p-semivariación de las medidas vectoriales sirven para organizar a éstas en distintos espacios de Banach llamados espacios de medidas vectoriales de Lebesgue, que vienen parametrizados por el exponente $1 \leq p \leq \infty$ y que, por propiedades de la integral de Bochner contienen de manera isométrica al espacio de funciones de igual exponente. Los espacios de medidas vectoriales de Lebesgue contienen medidas de variación total finita, y éstas quedan caracterizadas por la propiedad de que la medida variación total se pueda representar siempre por una función del espacio de Lebesgue escalar. Finalmente se comenta que el espacio de medidas vectoriales de Lebesgue resuelva la dualidad del espacio de funciones de Lebesgue-Bochner.

La propiedad de Radon-Nikodým, consistente en la validez del famoso teorema de Radon-Nikodým para medidas vectoriales, guarda equivalencia con el teorema de Riesz en contexto también vectorial. Si se formula como la igualdad $V^1(\mu, X) = L^1(\mu, X)$, una pronta reformulación del teorema de Radon-Nikodým consiste en la igualdad $V^p(\mu, X) = L^p(\mu, X)$ para algún $1 \leq p \leq \infty$, que se puede reescribir, en virtud de la dualidad antes mencionada, como $L^p(X)^* = L^{p'}(X^*)$ para algún $1 \leq p < \infty$.

La noción de tipo y cotipo de Rademacher se introduce para resolver en la parte final de la memoria el cálculo de estos valores para una familia de espacios de funciones vectoriales.

Las funciones armónicas se han organizado en los llamados espacios de Hardy h^p, resultando ser una traslación de los espacios de Lebesgue al contexto de las funciones armónicas. En efecto, por medio de la integral de Poisson, cada función de un espacio de Lebesgue se transforma en una función armónica con un tipo de acotación. Definido entonces el espacio de Hardy de exponente p como el formado por las funciones armónicas de manera que se cumple la acotación mencionada, se descubre que toda función armónica de dicho espacio surge como integral de Poisson de una función del espacio de Lebesgue ($1 < p \leq \infty$). En el caso vectorial, los espacios de Hardy de funciones armónicas vectoriales están compuestos por funciones del espacio de Lebesgue-Bochner (vía la integral de Poisson), pero aparecen otros elementos cuando el espacio vectorial (donde toma valores la función) no satisface la propiedad de Radon-Nikodým. La solución es ampliar el concepto al espacio de medidas vectoriales de Lebesgue, con el cual se consigue la identificación: Toda medida vectorial define una función armónica vectorial y, recíprocamente, cada función armónica surge como integral de Poisson (esta vez) de una medida. Este trabajo se desarrolla en el ámbito de los espacios de Lebesgue en [8] y en los de Orlicz en [27].

Los espacios de funciones de Banach son los verdaderos protagonistas de la memoria, pues van a parametrizar la gran familia de espacios de medidas vectoriales. Existe una amplia bibliografía sobre este tipo de espacios, como son [75] y las notas escritas por W. A. J. Luxemburg [77] y éste junto con A. C. Zaanen [78]. En la memoria se exponen las principales propiedades, siendo dos referencias de apoyo [BeSh] y el resumen que aparece en [Gret]. Los espacios invariantes por reordenamiento proporcionan un contexto apropiado en el que detenerse. La definición de estos espacios es intuitiva y general, y tienen cabida en la teoría de interpolación de operadores. Por ello se les dedica parte del desarrollo de la teoría de las medidas vectoriales. Los espacios de Lorentz Λ y M aparecen de manera natural cuando se trata de definir una variación general de tipo débil. Los espacios de funciones vectoriales de Banach, también llamados espacios de Köthe-Bochner, serán protagonistas como dominios de los operadores lineales y continuos que vienen representados por las medidas vectoriales objeto de nuestro estudio.

En el capítulo segundo se introduce el concepto de E-variación, donde E representa el espacio de funciones de Banach, y se define el espacio de medidas de E-variación finita $V_E(X)$. Así se llama E-variación de una medida finitamente aditiva F con valores en X a la cantidad (definición 2.1)

$$|F|_E := \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \, \|F(A)\| : \quad \pi \in D_\Omega, \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A\|_{E'} \leq 1\},$$

donde E' es el espacio asociado a E y D_Ω representa el conjunto de particiones finitas de Ω mientras que $V_E(X)$ denota el espacio de dichas medidas F de manera que son absolutamente continuas respecto de la medida μ y $|F|_E < \infty$.

Tras comprobar que las medidas de este espacio son de variación total finita, se comprueba que la expresión

$$\sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \, |F|(A) : \quad \pi \in D_\Omega, \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A\|_{E'} \leq 1\},$$

coincide con $|F|_E$ (lema 2.5), lo cual facilita la caracterización (proposición 2.6)

- $F \in V_E(X)$ sii $|F|(\cdot) = \int_{(\cdot)} \varphi d\mu$ para alguna función no negativa $\varphi \in E$.

Como consecuencia se obtiene la inclusión isométrica (teorema 2.7)

- $E(X) \subset V_E(X)$

para E y X arbitrarios, mientras que

- $E(X) = V_E(X)$ sii $X \in (RNP)$

resulta ser otra forma de caracterizar la propiedad de Radon-Nikodým (teorema 2.7).

La E-semivariación que se define a continuación consiste en la traslación al campo de las medidas de la situación de los operadores lineales y continuos con dominio en un espacio de funciones de Banach. En efecto se define para F medida finitamente aditiva la cantidad (definición 2.9)

$$\|F\|_E := \sup\{\|\sum_{A\in\pi} \alpha_A F(A)\|_X : \quad \pi \in D_\Omega, \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A\|_{E'} \leq 1\},$$

que se dice E-semivariación de F, y se toma el espacio $\mathcal{V}_E(X)$ de las medidas μ-continuas y con $\|F\|_E < \infty$. Esta definición no tiene un interés particular cuando la norma considerada es la descrita, pues con la notación $T_F(\chi_A) = F(A)$ para $A \in \Sigma$, se enmascara el espacio $L(E'_b, X)$ en $\mathcal{V}_E(X)$. Sin embargo, la caracterización de $\mathcal{V}_E(X)$ como el espacio formado por las medidas F de manera que

- F es μ-continua.
- $x^*F \in V_E(\mathbb{K})$ para cada $x^* \in X^*$.
- $\|F\|_E = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^*F|_E$.

confiere al espacio de medidas una identidad propia (proposición 2.13).

Este espacio de medidas representa al de los operadores lineales y continuos con dos limitaciones. Una es que el dominio del operador que se trata de representar no puede exceder a la clausura del conjunto de las funciones simples. Otra es que al ser las medidas μ-continuas, los operadores representados por ellas deben corresponder en ese aspecto, apareciendo el concepto de norma absolutamente continua (E_a reúne a las funciones con norma absolutamente continua). Así se tiene (proposición 2.11)

- $\mathcal{V}_{E'}(X) \subset L(E_b, X)$ isométricamente.
- $\mathcal{V}_{E'}(X) = L(E_b, X)$ si $E_a = E_b$.

En cuanto a la relación entre el espacio $V_E(X)$ y las distintas clases de operadores con dominio en E', aparecen de manera sistemática la nueva clase de Dinculeanu $\mathcal{D}(E', X)$ y la clásica de los operadores cono absolutamente sumantes $\Pi^{1,+}(E', X)$, con los resultados (proposición 2.17 y teorema 2.20)

- $V_{E'}(X) \subset \mathcal{D}(E_b, X)$ isométricamente.
- $V_{E'}(X) = \mathcal{D}(E_b, X)$ si $E_a = E_b$.
- $V_{E'}(X) \subset \Pi^{1,+}(E_b, X)$ isométricamente.
- $V_{E'}(X) = \Pi^{1,+}(E_b, X)$ si $E_a = E_b$.

El resultado de la dualidad de los espacios de Köthe-Bochner queda reflejado en el resultado (teorema 2.21)

- $V_{E'}(X^*) \subset [E(X)_b]^*$ isométricamente.
- $V_{E'}(X^*) = [E(X)_b]^*$ si $E_a = E_b$.

Así, una nueva caracterización de la propiedad de Radon-Nikodým es la igualdad

$$E(X)^* = E'(X^*)$$

para E con norma absolutamente continua (corolario 2.23).

La abstracción máxima se tiene al considerar la $E[X;Y,Z]$-semivariación, pues engloba todos los casos previos. Para cada pareja de espacios Y y Z de manera que X se puede considerar como un subespacio de $L(Y,Z)$, se define la $E[X;Y,Z]$-variación (definición 2.24) como

$$\|F\|_{E[X;Y,Z]} = \sup\{\| \sum_{A\in\pi} F(A)(y_A)\|_Z : \ \pi \in D_\Omega, \ \| \sum_{A\in\pi} y_A\chi_A\|_{E'(Y)} \leq 1\}.$$

Esta expresión puede coincidir para distintas parejas Y,Z. Con los casos triviales de $Y=\mathbb{K}$ y $Z=X$, o bien, $Y=X^*$ y $Z=\mathbb{K}$ se recupera la E-semivariación y la E-variación, respectivamente. Sin embargo, cuando $X=L(Y,Z)$ en un caso no trivial de Y y Z, la $E[L(Y,Z);Y,Z]$-variación es intermedia entre las anteriores, y proporciona un nuevo espacio de medidas, útil para representar operadores más generales, ya con dominio en espacios de Köthe-Bochner. El resultado alcanzado en este caso, y de gran similitud con el alcanzado en [GrUh] es (teorema 2.27)

- $\mathcal{V}_{E'[X,Y]}(L(X,Y)) \subset L(E(X)_b, Y)$ isométricamente.
- $\mathcal{V}_{E'[X,Y]}(L(X,Y)) = L(E(X)_b, Y)$ si y sólo si $E_a = E_b$.

donde $\mathcal{V}_{E'[X,Y]}(L(X,Y))$ es el conjunto de las medidas F con valores en $L(X,Y)$ que son μ-continuas y con $\|F\|_{E[L(X,Y);X,Y]} < \infty$.

En el contexto de las funciones armónicas se trabaja con espacios invariantes por traslaciones (definición 2.28), o bien espacios homogéneos (ver [59]). Se hace necesario partir del espacio de funciones armónicas de Hardy débil, al que podemos llamar $h^E_w(X)$

$$h^E_w(X) = \{u : \mathbb{D} \to X : \ x^*u \in h^E(\mathbb{K}) \ \forall x^* \in X^*\}.$$

El resultado crucial es la extensión de la situación en el caso Lebesgue, a saber, la isometría (teorema 2.39)

- $h^E_w(X) = L(E', X)$

mediante el uso de la integral de Poisson de operadores, y con la hipótesis $E'_a = E'$. El resultado concerniente al espacio de Hardy $h^E(X)$ resulta ser la isometría (teorema 2.40)

- $h^E(X) = \mathcal{D}(E', X)$.

Los corolarios inmediatos de todo el desarrollo anterior son (corolario 2.41)

- $h^E(X) = V_E(X)$.
- $h^E(X) = \Pi^{1,+}(E', X)$.
- $h^E(X) = E(X)$ sii $X \in (RNP)$.
- $E'(X)^* = h^E(X^*)$.

En todos estos resultados se asume que $E'_a = E'$.

Si se restringe la familia de espacios de funciones de Banach a aquellos que satisfacen la propiedad (J) se comprueba la expresión equivalente de la E-variación que dio lugar a [Gret, GrUh]. La nueva consideración que se toma en los espacios invariantes por reordenamiento, la (E, ∞)-variación, viene motivada de forma similar a la que define a los espacios de Lebesgue débiles $L^{p,\infty}$.

Se dice que una medida F finitamente aditiva tiene (E, ∞)-variación finita si

$$|F|(A) \leq C\|\chi_A\|_E$$

para todo $A \in \Sigma$ de medida finita y con $C > 0$ independiente de A. Esta definición, que se puede dar en espacios generales, tiene una expresión elegante en los espacios invariantes por reordenamiento. En efecto, se tiene la igualdad (proposición 3.8)

- $V_{E,\infty}(X) = V_{M(E)}(X)$.

Así se recuperan los espacios de medidas de $M(E)$-variación acotada, de igual manera que el espacio $L^{p,\infty}$ es el espacio de Lorentz $M(L^p)$.

Como aplicación del desarrollo de la teoría a los espacios invariantes por reordenamiento se presenta la familia de los espacios de medidas vectoriales de Lorentz $V^{p,q}(X)$. Se le dota de un origen independiente de la teoría vía los módulos de continuidad de las medidas (definición 3.27)

$$\omega_F(t) = \sup_{\mu(A)\leq t} |F|(A) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{\omega}_F(t) = \sup_{\mu(A)\leq t} \|F(A)\|$$

para encontrar los resultados típicos. Al final se prueba que los espacios dados se corresponden, en efecto, con los de E-variación finita, donde $E = L^{p,q}$ (proposición 3.37). Los resultados se recogen en [16]

Otros espacios de medidas vectoriales que se ajustan a este apartado son los de Orlicz, estudiados en [114, 115, 116]. Se muestra la coincidencia entre los espacios $V^\Phi(X)$ allí definidos y los $V_E(X)$ cuando $E = L^\Phi$ es el espacio de Orlicz de funciones. Los corolarios que se enumeran son entonces ya conocidos y aparecen en las referencias citadas.

Por último, en el capítulo cuarto se presenta la familia de espacios de Musielak-Orlicz (también llamados de Orlicz generalizados). Por contener como casos concretos a todos los espacios de Lebesgue y Orlicz, y por tener miembros que no satisfacen la propiedad (J), estos espacios representan, en cierto modo, los límites de la E-variación que se definía en [GrUh]. Una primera consideración consiste en probar que una subclase de esta familia de espacios se puede ubicar dentro del contexto de los espacios de funciones de Banach, no siendo cierto el caso general (proposición 4.16). Así pues, la teoría obtenida hasta entonces es aplicable a parte de la familia de espacios de Musielak-Orlicz.

Se destaca un espacio concreto para comprobar cómo la hipótesis de la propiedad (J) es imprescindible en una definición de E-variación basada en el supremo de normas de funciones simples como la de [GrUh]. En efecto, si se define el espacio $V_{L^M}(\mathbb{K}) = V_{L^M}$ de las medidas escalares μ-continuas F de manera que el funcional

$$\sup_{\pi \in D_\Omega} \| \sum_{A \in \pi} \frac{F(A)}{\mu(A)} \chi_A \|_{L^M}$$

es finito, no sólo se pierde la típica inclusión isométrica $L^M \subset V_{L^M}$ del espacio de funciones en el espacio de medidas mediante la integral Bochner indefinida, sino que además se pierde la posibilidad de tener al menos una inclusión continua (proposición 4.18).

El ejemplo utilizado es un espacio de la clase de espacios de Nakano, subclase dentro de la de los espacios de Musielak-Orlicz.

La familia de espacios de Musielak-Orlicz viene parametrizada por una función $M : \Omega \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ de manera que es función de Young para cada $t \in [0, \infty)$ (ver espacios de Orlicz y definición 4.1). La clase de Musielak-Orlicz corresponde con las funciones medibles tales que

$$i_M(f) = \int_\Omega M(w, |f(w)|) d\mu(w) < \infty.$$

El espacio de funciones L^M se define de forma similar al de Orlicz, con la norma de Luxemburg

$$\|f\|_M = \inf\{k > 0 \ : \ i_M(f/k) \leq 1\}, \qquad f \in \mathcal{M},$$

($\mathcal{M}$ es el conjunto de las funciones medibles) quedando

$$L^M = \{f \in \mathcal{M} \ : \ \|f\|_M < \infty\}.$$

La referencia básica para el estudio de estos espacios es [Mus]. Como se indicaba, dentro de esta familia de espacios cabe destacar una subfamilia, la de los llamados espacios de Nakano. Estos se caracterizan por tener una función M de tipo potencial, es decir, $M(w, t) = t^{p(w)}$ con $p(\cdot) : \Omega \to [1, \infty)$. Por la simplicidad de su formulación, podrían verse motivados directamente desde los espacios de Lebesgue L^p. Sin embargo, la forma de dotarlos de una norma pasa por su consideración como espacio de Musielak-Orlicz.

El estudio del tipo y cotipo de Rademacher de cada uno de los espacios de Musielak-Orlicz se ha realizado en [56] para el caso de espacio de medida no atómico, y en [Kat] para el caso de sucesiones. Se han definido condiciones sobre la función de Musielak-Orlicz M (llamadas Δ^q y Δ^{*p} para el caso no atómico, o δ^q y δ^{*p} para el caso atómico) que han caracterizado el cotipo q y el tipo p en dichos espacios. Estas condiciones, particularizadas a los espacios de Nakano, han dejado el asunto completo en el caso no atómico, con el resultado

- $L^{p(\cdot)}$ tiene cotipo $2 \leq q < \infty$ si y sólo si $p(w) \leq q$ cpp. en Ω.
- $L^{p(\cdot)}$ tiene tipo $1 < p \leq 2$ si y sólo si $p(w) \geq p$ cpp. en Ω y $p(\cdot)$ es acotada.

En el caso atómico, y denotando por $\ell(\{p_n\})$ el espacio de Nakano de sucesiones, se resuelve en [Kat]

- Si $\ell(\{p_n\})$ tiene cotipo $q \geq 2$ entonces $\limsup_n p_n \leq q$.
- Si $\limsup_n p_n < q$ para algún $q \geq 2$, entonces $\ell(\{p_n\})$ tiene cotipo q.
- Sea $p_n > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\ell(\{p_n\})$ tiene tipo $p \geq 1$ entonces $p \leq \liminf_n p_n$ y $\sup_n p_n < \infty$.
- Si $1 < p_n < \liminf_n p_n$ y $\sup_n p_n < \infty$ entonces $\ell(\{p_n\})$ tiene tipo p.

Como se puede observar, queda por resolver cuándo el espacio de Nakano $\ell(\{p_n\})$ posee el cotipo $q = \limsup_n p_n$ y cúando posee el tipo $p = \liminf_n p_n$.

Se finaliza esta memoria caracterizando el tipo y el cotipo de Rademacher para los espacios de sucesiones de Nakano vectoriales $\ell(\{p_n, X_n\})$ —trabajo que constituye [15]—, afinando el resultado de [Kat]. En primer lugar se consigue la equivalencia (teorema 4.35)

- $\ell(\{p_n, X_n\})$ tiene cotipo q.
- X_n tiene cotipo q para cada $n = 1, 2, \ldots$ con $\sup_n C_q(X_n) < \infty$, y existe $0 < C < 1$ tal que $\sum_{p_n > q} C^{\frac{1}{p_n - q}} < \infty$.

para $2 \leq q < \infty$. En segundo lugar equivalen (teorema 4.37)

- $\ell(\{p_n, X_n\})$ tiene tipo p.
- X_n tiene tipo p para $n = 1, 2, \ldots$ con $\sup_n T_p(X_n) < \infty$, $(p_n)_n$ es acotada, y existe $0 < C < 1$ tal que $\sum_{p_n < p} C^{\frac{1}{p - p_n}} < \infty$.

para $1 < p \leq 2$ ($C_q(X_n)$ y $T_p(X_n)$ son las mejores constantes que aparecen en la definición del cotipo q y del tipo p, respectivamente, sobre los espacios X_n).

Capítulo I

Preliminares

En este capítulo se toma un espacio de medida (Ω, Σ, μ) positivo, finito y completo donde Σ es una σ-álgebra de conjuntos. Hacemos un breve recorrido sobre los tópicos que más van a aparecer en la memoria con el fin de contener en ella la mayor parte de referencias y ser autocontenido en la medida de lo posible.

1.1 Sobre funciones medibles, operadores y medidas vectoriales

El primer tema a tratar son las funciones vectoriales, es decir, funciones que toman valores en un espacio de Banach arbitrario.

Definición 1.1 *Sea X un espacio de Banach y $f : \Omega \to X$ una función. Se dice que:*

- *f se dice simple si existen vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y conjuntos medibles $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Sigma$ tales que*

$$f = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{A_k},$$

  donde χ_{A_k} es la función característica del medible A_k, es decir, aquella que toma el valor 1 para los $w \in A_k$ y 0 para el resto.

- *f se dice medible (o fuertemente medible) si existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples con valores en X de modo que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f(w) - s_n(w)\|_X = 0$$

  para casi todo $w \in \Omega$.

- *f es débilmente medible si la función escalar x^*f dada por*

$$x^*f(w) = \langle x^*, f(w)\rangle, \qquad w \in \Omega,$$

es medible para todo $x^* \in X^*$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ es la actuación de la dualidad).

- *f es integrable (o integrable Bochner) si existe una sucesión de funciones simples con valores en X de modo que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|f(w) - s_n(w)\|_X d\mu(w) = 0. \qquad (*)$$

Si $s = \sum_{n=1}^N x_i\chi_{A_i}$ es una función simple, entonces la integral de s es

$$\int_\Omega s d\mu = \sum_{n=1}^N x_i\mu(A_i).$$

Se define la integral (de Bochner) de f mediante

$$\int_\Omega f d\mu := \lim_{n\to\infty}\int_\Omega s_n d\mu.$$

Nota 1.2 *Las definiciones 'simple', 'medible', 'casi todo $w \in \Omega$' e 'integrable' pueden ir acompañadas del prefijo 'μ-' siempre que se desee poner de manifiesto el espacio de medida respecto del que se cumple la propiedad.*

Respecto a la integrabilidad, si f es una función integrable, es sencillo comprobar que la definición de su integral es independiente de la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ que cumple $(*)$.

El conjunto de las funciones medibles sirve como cantera para todo espacio de funciones que se define. Por ello mostramos el siguiente criterio de medibilidad.

Teorema 1.3 (Teorema de medibilidad de Pettis)
Una función vectorial $f : \Omega \to X$ es medible si y sólo si:

- *f es μ-esencialmente separadamente valuada, es decir, existe $A \in \Sigma$ con $\mu(A) = 0$ tal que $f(\Omega \setminus A)$ forma un conjunto separable de X.*
- *f es débilmente medible.*

Un ejemplo de función no medible es la función $f : [0,1] \to \ell^\infty$ tal que $f(t) = \{e^{int}\}_{n=1}^\infty$.

Las propiedades básicas más sobresalientes de la integral Bochner de funciones vectoriales hacen de ella una herramienta muy importante en el curso posterior. Para cada función vectorial $f : \Omega \to X$, la notación $\|f\|_X$ se emplea para la función no negativa tal que $\|f\|_X(w) := \|f(w)\|_X$.

Proposición 1.4 *La integral Bochner cumple las siguientes propiedades:*
(1) Una caracterización para la integrabilidad Bochner:

- *Una función medible $f : \Omega \to X$ es integrable Bochner si y sólo si $\int_\Omega \|f\|_X d\mu < \infty$.*

(2) Si f es una función integrable Bochner, entonces:

- $\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A f d\mu = 0$.
- $\| \int_A f d\mu\|_X \leq \int_A \|f\|_X d\mu$ *para todo $A \in \Sigma$ (desigualdad de Minkowski integral).*
- $\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$ *si se toma $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.*
- *Para cada $A \in \Sigma$ se tiene que*

$$\sup_{\pi \in D_A} \sum_{B \in \pi} \| \int_B f d\mu\|_X = \int_A \|f\|_X d\mu,$$

donde D_A representa el conjunto de particiones de A en una cantidad finita de medibles de medida positiva y finita.

(3) Si X e Y son espacios de Banach, $T : X \to Y$ es un operador lineal y cerrado, y tanto $f : \Omega \to X$ como $T \circ f : \Omega \to Y$ son funciones μ-integrables Bochner, entonces

$$T\left(\int_A f d\mu\right) = \int_A T \circ f \; d\mu$$

para todo $A \in \Sigma$ (Teorema de Hille).
(4) Sea f integrable Bochner en $[0,1]$ respecto a la medida de Lebesgue. Entonces, para casi todo $s \in [0,1]$, se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\|_X dt = 0.$$

Por consiguiente

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f(t) dt = f(s).$$

Una prueba de estos resultados se encuentra en [DiUh, pp. 46-49].

Recordamos las definiciones de los espacios de Lebesgue-Bochner, parametrizados por el exponente $p \in [1, \infty]$.

$L^p(\Omega, \Sigma, \mu, X)$, abreviado por $L^p(\mu, X)$ o bien $L^p(X)$, es el espacio de (clases de equivalencia, módulo la igualdad en casi todo punto, de) funciones medibles f para las cuales el funcional $\|f\|_p$ es finito, donde

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

si $1 \leq p < \infty$ y

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}\|f\|_X.$$

La densidad del conjunto de las funciones simples se tiene en todos los espacios de Lebesgue-Bochner de exponente finito, independientemente de la medida μ. Sin embargo, la densidad en $L^\infty(X)$ se tiene únicamente para todo X finito dimensional si μ es finita y no atómica, y en ningún caso si μ es infinita.

En este punto cabe mencionar la notación de exponentes conjugados, tan recurrentes en la teoría de los espacios de Lebesgue. Se dice que q es el exponente conjugado de $p \in [1, \infty]$ (o que p y q son exponentes conjugados) si se cumple la relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

donde $\frac{1}{\infty} = 0$. La relación de ser conjugado es simétrica, y si $p \in [1, \infty]$ se suele denotar su conjugado por p'.

Otros espacios de funciones vectoriales que aparecerán más adelante son los de Orlicz-Bochner, que vienen parametrizados por una familia de funciones especiales (las funciones de Young) y los de Musielak-Orlicz-Bochner, una extensión de los anteriores y que contendrán un ejemplo útil al propósito de este trabajo. Se va a trabajar con una familia de espacios de funciones realmente extensa, a saber, la familia de espacios de funciones de Banach con valores vectoriales (también llamados espacios de Köthe-Bochner).

Otro tópico que se aborda es el relativo a diversos tipos de operadores lineales y continuos entre espacios de Banach, especialmente operadores cuyo espacio inicial es un espacio de funciones como los que acabamos de comentar. Para ello introducimos los conceptos básicos en la siguiente definición.

Definición 1.5 *Sean X e Y dos espacios de Banach arbitrarios, con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ respectivamente.*

- *Un operador $T : X \to Y$ lineal se dice continuo si*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y \ : \ \|x\|_X \leq 1\}$$

es finito. Al conjunto formado por los operadores lineales y continuos de X en Y se le denota por $L(X, Y)$, y la norma $\|\cdot\|$ le da estructura de espacio de Banach.

- *Sean Y un espacio de Banach y $p, p' \in [1, \infty]$ exponentes conjugados, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. La clase de Dinculeanu $\mathcal{D}(L^{p'}, Y)$ es la formada por los operadores $T : L^{p'} \to Y$ lineales de manera que*

$$|||T|||_p = \sup\{\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k| \, \|T(\chi_{A_k})\|_Y \ : \ N \in \mathbb{N}, \ \|\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{A_k}\|_{L^{p'}} \leq 1\}$$

es finito. Es evidente que $\|T\| \leq |||T|||_p$, y por tanto se tiene el contenido $\mathcal{D}(L^{p'}, Y) \subset L(L^{p'}, Y)$.

- *Un operador $T : X \to Y$ se dice p-sumante si*

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \|T(x_n)\|_Y^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\sum_{k=1}^{N} |\langle x^*, x_n \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para alguna constante $C > 0$ independiente tanto de $N \in \mathbb{N}$ como de la familia $x_1, x_2, \ldots, x_N \in X$ escogida. El espacio de los operadores p-sumantes de X en Y se denota por $\Pi^p(X,Y)$, y la norma, denotada por $\|T\|_{\Pi^p}$ se corresponde con el ínfimo de las constantes $C > 0$ que verifican las desigualdad anterior ([DJT, p. 31]).

Nota 1.6 *Si el espacio X es, además, un retículo, el operador T se dirá p-sumante positivo si la desigualdad anterior se sigue para familias arbitrarias de elementos positivos del retículo X. El espacio se denotará por $\Pi^{p,+}(X,Y)$ y la norma, correspondiente también al ínfimo de dichas constantes, se escribe $\|T\|_{\Pi^{p,+}}$ ([9]).*

O. Blasco prueba en [9] que las distintas clases $\Pi^{r,+}(L^p, X)$ con r entre 1 y p' (ambos incluidos) son todas coincidentes entre sí, además de con $\Pi^{1,+}(L^p, X)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Esta última clase de operadores, introducida en [111], es la de los operadores cono absolutamente sumantes de L^p en X.

Definición 1.7 ([111, p. 244]) *Un operador $T : X \to Y$, donde X es un retículo de Banach e Y un espacio de Banach, se dice cono absolutamente sumante (c.a.s.) si*

$$\sum_{k=1}^{N} \|T(x_n)\|_Y \leq C \sup_{\|x^*\|\leq 1} \sum_{k=1}^{N} |\langle x^*, x_n \rangle|$$

para alguna constante $C > 0$ independiente tanto de $N \in \mathbb{N}$ como de la familia $x_1, x_2, \ldots, x_N \geq 0$ escogida del cono positivo de X. El espacio de los operadores cono absolutamente sumantes de X en Y se denota por $\Pi^1_+(X,Y)$, y la norma, denotada por $\|T\|_{\Pi^{1,+}}$ se corresponde con el ínfimo de las constantes $C > 0$ que verifican las desigualdad anterior.

Dicho de otro modo, T manda sucesiones sumables $(x_n)_n$ de elementos del cono positivo de X a sucesiones $(Tx_n)_n$ absolutamente sumables en Y.

Si $(x_n)_{n=1}^N$ pertenece al cono positivo de X, la igualdad

$$\sup_{\|x^*\|\leq 1} \sum_{k=1}^{N} |\langle x^*, x_n \rangle| = \|\sum_{k=1}^{N} x_n\|$$

es cierta, pudiéndose entonces reemplazar la norma anteriormente citada de un operador c.a.s. T por

$$\|T\|_{\Pi^{1,+}} = \sup\{\sum_{k=1}^{N} \|T(x_n)\|_Y \ : \ N \in \mathbb{N},\ x_1, x_2, \ldots, x_N \geq 0,\ \|\sum_{k=1}^{N} x_n\| \leq 1\}.$$

Una caracterización de los operadores c.a.s. es la siguiente.

Lema 1.8 *Sea X un retículo de Banach, Y un espacio de Banach y T un operador lineal de X en Y. Entonces son equivalentes:*

- $T \in \Pi^{1,+}(X,Y)$.
- *Existe* $x^* \in X^*$ *positivo tal que* $\|Tx\|_Y \leq \langle x^*, |x| \rangle$ *para todo* $x \in X$.

  Además se puede tomar el elemento x^* *de manera que* $\|x^*\| = \|T\|_{\Pi^{1,+}}$.

En el contexto de los espacios de Lebesgue-Bochner, cada función $f \in L^p(X)$ da lugar a un operador $J_p(f) : L^{p'} \to X$ mediante el uso de la integral de Bochner, con la definición

$$J_p(f)(g) = \int_\Omega f g d\mu.$$

La linealidad de la integral de Bochner implica la del operador, mientras que la desigualdad de Minkowski integral (consecuencia del último punto de la proposición 1.4) y la conocida desigualdad de Hölder implican la continuidad. La densidad del conjunto de funciones simples en $L^p(X)$ conduce a la compacidad de dichos operadores (ya que los hace límites de operadores de rango finito). No es difícil probar que $\||J_p(f)\||_p = \|f\|_p$, lo que muestra el contenido isométrico $L^p(X) \subset \mathcal{D}(L^{p'}, X)$ vía el operador J_p.

La dualidad de un espacio de Lebesgue-Bochner queda abierta, dado que la esperada relación

$$L^p(X)^* = L^{p'}(X^*) \text{ para } 1 \leq p < \infty$$

no es válida en ciertos casos.

Las cuestiones tratadas en el contexto anterior pueden extenderse al contexto de funciones de Orlicz-Bochner con resultados similares (p. 102).

La introducción de las medidas vectoriales en este punto viene motivada, entre otras cosas, por la resolución del problema de la descripción del espacio dual de $L^p(X)$, que queda incompleta con el uso del espacio $L^{p'}(X^*)$. El motivo será evidente dado el fuerte paralelismo que existe entre medidas y operadores, y es un espacio de operadores el que se quiere caracterizar en este caso.

Definición 1.9 *Sea* X *un espacio de Banach (real o complejo) y* $F : \Sigma \to X$ *una función de conjunto. Se dice que:*

- F *es finitamente aditiva si*

  $$F(A \cup B) = F(A) + F(B)$$

  para cualquier par de conjuntos medibles disjuntos entre sí, A *y* B.

- F *es numerablemente aditiva si*

  $$F(\cup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty F(A_n)$$

  para cualquier sucesión de conjuntos μ*-medibles y disjuntos dos a dos* $\{A_n\}_{n=1}^\infty$.

- *F es débilmente numerablemente aditiva si la función de conjunto escalar x^*F dada por la relación*

$$x^*F(A) = \langle x^*, F(A) \rangle$$

es numerablemente aditiva para todo elemento $x^* \in X^*$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la actuación de la dualidad X-X^*).

- *F se dice 'medida finitamente aditiva' si es función de conjunto finitamente aditiva.*

- *F se dice 'medida vectorial' o simplemente 'medida' si es función de conjunto numerablemente aditiva.*

- *F se dice absolutamente continua respecto de μ, o μ-continua (denotado por $F \ll \mu$) si*
$$\lim_{\mu(A) \to 0} \|F(A)\|_X = 0$$

Por otro lado, para cada medida finitamente aditiva, es posible definir las funciones de conjunto no negativas:

- *Variación total de F, denotada por $|F|$ y definida por*

$$|F|(A) = \sup\{\sum_{B \in \pi} \|F(B)\|_X \ : \ \pi \in D_A\}$$

para cada $A \in \Sigma$, y donde D_A representa el conjunto de todas las particiones de A en una cantidad finita de μ-medibles.

- *Semivariación total de F, denotada por $\|F\|$ y definida por*

$$\|F\|(A) = \sup\{|x^*F|(A) \ : \ \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}$$

para cada $A \in \Sigma$.

Se suele llamar variación total de F al valor $|F|(\Omega)$ y semivariación total de F a $\|F\|(\Omega)$ que se suelen denotar, por economía de notación, por $|F|$ y $\|F\|$.

Obsérvese que para toda medida finitamente aditiva son equivalentes las propiedades de ser μ-continua y numerablemente aditiva. Si F es μ-continua y $(A_n)_n$ es una sucesión de medibles disjuntos,

$$\|F(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) - \sum_{n=1}^{N-1} F(A_n)\|_X = \|F(\cup_{n=N}^{\infty} A_n)\|_X$$

tiende a 0 cuando $N \to \infty$. La prueba del recíproco es algo más complicada por lo que remitimos al lector a [DiUh, p. 11, Thm. 4].

Nota 1.10 *Los conceptos de variación y semivariación de la definición previa están sujetos a una observación. Éstos se suelen utilizar tal y como ahí se presentan, pero existe una definición abstracta, recogida en [Dinc, p. 51], de gran interés para este trabajo pues constituye la base de la generalización que pretende. Si F es medida finitamente aditiva y se considera el espacio de Banach X como subespacio del espacio de operadores lineales y continuos de un espacio de Banach en un espacio normado, $L(Y,Z)$, con la norma de los operadores, se puede definir una función de conjunto semivariación de F (dependiente de Y y Z) dada por*

$$*\|F\|(A) = \sup\{\| \sum_{B\in\pi} F(B)(y_B)\|_Z \ : \ \pi \in D_A, \ \|y_B\|_Y \leq 1\}$$

para cada $A \in \Sigma$.

Se puede probar que esta función de conjunto coincide con las dadas en la definición previa en las situaciones $X \subset X^{**} = L(X^*, \mathbb{K})$ y $X \subset L(\mathbb{K}, X)$, respectivamente, y que para cada $A \in \Sigma$

$$\|F\|(A) \leq *\|F\|(A) \leq |F|(A)$$

sea cual sea la elección de los espacios Y y Z. La notación elegida en esta nota no es estándar, pero necesaria al mencionar esta semivariación dependiente, que se distinguirá de la usual en caso de posible confusión.

Un caso concreto en el que se aprovecha la abstracción de esta semivariación se tiene cuando la medida toma valores en un espacio de operadores lineales y continuos, es decir, cuando $X = L(Y,Z)$ en un caso no trivial. Entonces la semivariación abstracta, además de recuperar los conceptos de la definición previa, añade un nuevo matiz que permite conseguir nuevos resultados, como se verá en el capítulo 2.

Nota 1.11 *El concepto de semivariación indicado tiene una versión paralela cuando se trabaja sobre funciones. Para cada función $f : [0,1] \to X$ se puede considerar la tupla $\mathcal{B} = (B; X, Y, Z)$ formado por tres espacios de Banach X, Y y Z, y una aplicación bilineal y continua $B : X \times Y \to Z$, normalmente con $\|B\| \leq 1$. Por un lado están la variación y semivariación de la función f, definidas por*

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(f) &= \sup_{d\in D} \sum_{k=1}^{|d|} \|[f(t_k) - f(t_{k-1})]\|_X \\
\mathrm{semivar}(f) &= \sup_{d\in D} \| \sum_{k=1}^{|d|} \varepsilon_k [f(t_k) - f(t_{k-1})]\|_X \\
&= \sup_{\substack{d\in D \\ \|x^*\|\leq 1}} \sum_{k=1}^{|d|} |\langle f(t_k) - f(t_{k-1}), x^*\rangle|
\end{aligned}$$

donde D representa el conjunto de particiones $d = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ del intervalo $[0,1]$ y $|d|$ representa el tamaño de la partición d (es decir, *su número de intervalos). Por otro lado está entonces la ($\mathcal{B}$)-semivariación, definido como*

$$(\mathcal{B})\mathrm{var}(f) := \sup_{\substack{d\in D \\ \|y_k\|\leq 1 \\ 1\leq k\leq |d|}} \|\sum_{k=1}^{|d|} B(f(t_k) - f(t_{k-1}), y_k)\|_Z$$

Se observa inmediatamente que, mediante la aplicación bilineal B, cada vector del espacio X se puede considerar como un elemento de $L(Y, Z)$ (por ejemplo, $x(y) = B(x, y)$).

Por otro lado, una función $f : [0, 1] \to X$ se dice regulada cuando es límite uniforme de funciones simples (o equivalentemente cuando tiene discontinuidades, a lo sumo, de primera especie), y ($\mathcal{B}$)-regulada cuando la función $t \mapsto B(f(t), y)$ es regulada para todo $y \in Y$.

Este tipo de variaciones se considera sobre funciones con valores en espacios de operadores lineales $L(X)$, que hacen de núcleos integrales en ciertos problemas de ecuaciones integrales de Volterra Stieltjes ([51]). En estos casos se considera $\mathcal{B} = (B; L(X), X, X)$ con la aplicación bilineal trivial $B(T, x) = Tx$, y los conceptos de ($\mathcal{B}$)-semivariación finita y de función ($\mathcal{B}$)-regulada dan información sobre los operadores integrales.

En este contexto, L. Barbanti encuentra en [2] que si X es uniformemente convexo, entonces toda función f de ($\mathcal{B}$)-semivariación finita es ($\mathcal{B}$)-regulada. O. Blasco y J. M. Calabuig prueban junto al autor en [17] que la noción geométrica de X que provoca la relación entre los conceptos dados y que, de hecho, la caracteriza es no contener copia de c_0. En otras palabras, X no contiene copia de c_0 si y sólo si toda función f de ($\mathcal{B}$)-semivariación finita es ($\mathcal{B}$)-regulada.

Como se indica en la nota 1.10, se puede probar que

$$\|F\|(A) = \sup\{\|\sum_{B\in\pi} \varepsilon_B F(B)\|_X \ : \ \pi \in D_A, \ |\varepsilon_B| \leq 1 \quad \forall B \in \pi\}$$

y más aún, que

$$\sup\{\|F(B)\|_X \ : \ B \subset A\} \leq \|F\|(A) \leq 4 \sup\{\|F(B)\|_X \ : \ B \subset A\}$$

para cada medible A (ver [DiUh, p. 4]).

Unos resultados acerca de la aditividad de las medidas vectoriales son los siguientes.

Proposición 1.12 *Sea F una medida finitamente aditiva.*

- *F es numerablemente aditiva si y sólo si F es débilmente numerablemente aditiva.*
- *Si F es numerablemente aditiva (i.e., Σ es un σ-anillo), entonces F es absolutamente continua respecto de μ si y sólo si F se anula sobre los μ-medibles de medida nula.*

Asimismo, tras las definiciones de variación y semivariación que aparecen en 1.9, otros conceptos relacionados con éstos son ya clásicos. Se trata de la p-variación y p-semivariación. Vamos a presentar en forma de definición las versiones más conocidas (que se encuentran en la referencia como expresiones alternativas a la definición que en ella se da).

Definición 1.13 ([Dinc, p. 249]) *Sean X un espacio de Banach, $F : \Sigma \to X$ una medida finitamente aditiva y $p \in [1, \infty]$. Entonces se definen las funciones de conjunto p-variación y p-semivariación de F como*

$$|F|_p(A) = \sup\{\sum_{B\in\pi} \left(\frac{\|F(B)\|_X^p}{\mu(B)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \ : \ \pi \in D_A\}$$

$$\begin{aligned}\|F\|_p(A) &= \sup\{|x^*F|_p(A) \ : \ \|x^*\|_{X^*} \le 1\} \\ &= \sup\{\|\sum_{B\in\pi} \alpha_B F(B)\|_X \ : \ \pi \in D_A, \ \|\sum_{B\in\pi} \alpha_B \chi_B\|_{L^{p'}} \le 1\}\end{aligned}$$

para $1 \le p < \infty$, y

$$\begin{aligned}|F|_\infty(A) &= \sup\{\frac{\|F(B)\|_X}{\mu(B)} \ : \ B \subset A, \ B \in \Sigma\} \\ \|F\|_\infty(A) &= \sup\{\frac{|x^*F(B)|}{\mu(B)} \ : \ \|x^*\|_{X^*} \le 1, \ B \subset A, \ B \in \Sigma\}.\end{aligned}$$

para cada $A \in \Sigma$, respectivamente.

Se suelen denotar por $|F|_p$ y $\|F\|_p$, respectivamente, las cantidades $|F|_p(\Omega)$ y $\|F\|_p(\Omega)$, que por abuso de lenguaje se dicen p-variación y p-semivariación de F.

Se ve de inmediato en la definición que $\|F\|_\infty = |F|_\infty$.

Remitimos al lector a la nota 1.10 para la introducción de la siguiente definición.

Definición 1.14 ([Dinc, p. 246]) *Sean X un espacio de Banach, $F : \Sigma \to X$ una medida finitamente aditiva, $p \in [1, \infty]$ y p' el exponente conjugado de p.*

Se considera X como copia isométrica dentro de cierto espacio de operadores $L(Y, Z)$, donde Y y Z son espacios de Banach (es decir, $F(A) \in L(Y, Z)$ para cada medible A).

Se definen, a partir de F, las funciones de conjunto p-variación y p-semivariación de F (dependiente de los espacios Y y Z), dadas por

$$\begin{aligned}|F|_p(A) &= \sup\{\sum_{B\in\pi} |\alpha_B| \ \|F(B)\|_X \ : \ \pi \in D_A, \ \|\sum_{B\in\pi} \alpha_B \chi_B\|_{L^{p'}} \le 1\} \ y \\ * \, \|F\|_p(A) &= \sup\{\|\sum_{B\in\pi} F(B)(y_B)\|_Z \ : \ \pi \in D_A, \ \|\sum_{B\in\pi} y_B \chi_B\|_{L^{p'}(Y)} \le 1\},\end{aligned}$$

respectivamente, para cada $A \in \Sigma$.

Las cantidades $|F|_p(\Omega)$ y $*\|F\|_p(\Omega)$ tienen una consideración especial y se les llama, por abuso de lenguaje, p-variación y p-semivariación de F relativa a los espacios Y y Z, respectivamente.

Nota 1.15 *Se puede adivinar por la notación usada que la p-variación es independiente de los espacios Y y Z, y que coincide con la definida con anterioridad. La p-semivariación merece la misma observación que se hace en la nota 1.10, con los mismos resultados (obviamente añadiendo el prefijo 'p-'). Esta definición, con su abstracción, es el germen de la generalización que se pretende en este trabajo, y que se desarrolla en el capítulo 2.*

Se puede observar un gran parecido entre la variación total y la 1-variación (lo mismo para semivariaciones). Lo cierto es que coinciden, como funciones de conjunto, para cada medida F finitamente aditiva que se anule sobre los conjuntos de medida μ-nula (por ejemplo, cualquier medida μ-continua, ver [Dinc, p. 242]). También es fácil comprobar que una medida finitamente aditiva F que cumple $\|F\|_p < \infty$ para algún exponente $1 < p \leq \infty$ es, automáticamente, μ-continua y, por tanto, numerablemente aditiva.

Al igual que los espacios de funciones vectoriales de Lebesgue, las medidas vectoriales se organizan en los espacios $V^p(X)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Así se dirá que una medida finitamente aditiva F pertenece al espacio de medidas vectoriales de Lebesgue $V^p(X)$ si $F \ll \mu$ y $|F|_p < \infty$. La expresión $\|F\|_{V^p(X)} = |F|_p$ es una norma bajo la cual $V^p(X)$ es un espacio de Banach.

Tomando la p-semivariación como norma, se dice que una medida finitamente aditiva F pertenece al espacio de medidas vectoriales $\mathcal{V}^p(X)$ si $F \ll \mu$ y $\|F\|_p < \infty$. En este caso la expresión $\|F\|_{\mathcal{V}^p(X)} = \|F\|_p$ hace de $\mathcal{V}^p(X)$ un espacio de Banach.

La relación de inclusión que existe entre los espacios de Lebesgue cuando μ es finita se traslada al campo de los nuevos espacios de medidas, resultando además el siguiente esquema.

$$\begin{array}{cccc}
\mathcal{V}^\infty(X) \subset & \mathcal{V}^p(X) \subset & \mathcal{V}^q(X) \subset & \mathcal{V}^1(X) \\
\cup & \cup & \cup & \cup \\
V^\infty(X) \subset & V^p(X) \subset & V^q(X) \subset & V^1(X)
\end{array}$$

para $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Dado que toda medida del espacio $V^p(X)$ es de variación total finita, se puede probar sin gran dificultad que

$$|F|_p(A) = \sup\{\sum_{B\in\pi} |\alpha_B|\,|F|(B) \ : \ \pi \in D_A,\ \|\sum_{B\in\pi} \alpha_B \chi_B\|_{L^{p'}} \leq 1\}$$

para cada $A \in \Sigma$ y $F \in V^p(X)$ donde $1 < p \leq \infty$. Esta igualdad nos permite pensar en la medida positiva $|F|(\cdot)$ como elemento del espacio de medidas escalares V^p, puesto que la μ-continuidad de F y $|F|$ son equivalentes siempre que $|F|$ sea finita. Así, el teorema de Radon-Nikodým se puede aplicar, culminando el siguiente resultado.

Proposición 1.16 *Sean X un espacio de Banach, $F : \Sigma \to X$ una medida vectorial y $1 < p \leq \infty$. Entonces son equivalentes:*

- *$F \in V^p(X)$.*
- *Existe una función no negativa $\varphi \in L^p$ tal que*

$$|F|(A) = \int_A \varphi d\mu$$

para cada $A \in \Sigma$.

Además, se cumple que $\|\varphi\|_{L^p} = \|F\|_{V^p(X)}$.

Esta equivalencia nos indica una interesante alternativa para la definición de los espacios de medidas $V^p(X)$.

Después de la exposición que se ha desarrollado sobre medidas vectoriales podemos volver atrás y releer la proposición 1.4 (en su segundo apartado). Así, para cada función integrable f, las propiedades de la integral Bochner allí descritas nos dicen que la función de conjunto finitamente aditiva

$$\begin{aligned} F_f : \Sigma &\to X \\ A &\mapsto \int_A f d\mu \end{aligned}$$

es además numerablemente aditiva, μ-continua, y de variación total finita. Más aún , la medida $|F_f|$ viene representada por

$$\begin{aligned} |F_f| : \Sigma &\to X \\ A &\mapsto \int_A \|f\|_X d\mu. \end{aligned}$$

Con esta observación y la proposición 1.16 tenemos que para cada p, el operador $\lambda_p : L^p(X) \to V^p(X)$ dado por $\lambda_p(f) = F_f$ es una isometría en la imagen. La posibilidad de que λ_p sea una isometría biyectiva (es decir, que toda medida de $V^p(X)$ sea la integral indefinida de alguna función de $L^p(X)$) es un asunto muy estudiado y resuelto con el uso de la propiedad de Radon-Nikodým, que se mencionará más adelante (p. 14).

La forma en la que una medida vectorial define un operador y viceversa es muy sencilla, dependiendo del espacio de Banach donde la medida toma sus valores y de los espacios inicial y final del operador en cuestión. De forma general, como se expresa en la definición 1.14, si una medida F toma valores en un espacio de Banach X que se puede considerar como subespacio de un espacio de operadores entre dos espacios de Banach, $L(Y, Z)$, se puede definir un operador T_F tal que

$$T_F(\sum_{k=1}^{N} y_k \chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^{N} F(A_k)(y_k)$$

para cada función simple con coeficientes en Y.

El caso recíproco es algo más delicado, pues para dar una medida a través de un operador $T : Y \to Z$ parece necesario que su espacio inicial deba albergar funciones μ-medibles vectoriales. De hecho, la relación esperada es

$$F(A)(u) = T(u\chi_A)$$

para cada u en cierto espacio de Banach y $A \in \Sigma$. Un resultado al respecto es el siguiente.

Proposición 1.17 *Sea X un espacio de Banach, y p y p' exponentes conjugados con $1 < p \leq \infty$. Entonces*

- $\mathcal{V}^p(X) = L(L^{p'}, X)$ *([100])*
- $V^{p'}(X) = \mathcal{D}(L^{p'}, X)$

En este caso el espacio inicial es $L^{p'}$ y las identificaciones entre operador y medida son

$$G_T(A) = T(\chi_A)$$
$$T_G(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k G(A_k)$$

según se tenga dado a priori el operador o la medida, respectivamente.

Por último, la dualidad de los espacios de Lebesgue-Bochner queda resuelta como sigue.

Proposición 1.18 *Sea X un espacio de Banach y $1 < p \leq \infty$. Entonces $[L^p(X)]^* = V^{p'}(X^*)$.*

Aquí la relación medida-operador viene dada por

$$\langle x, G_T(A)\rangle = T(x\chi_A)$$
$$T_G(\sum_{k=1}^{N} x_k \chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^{N} \langle x_k, F(A_k)\rangle$$

alternativamente.

Todas estas relaciones entre medidas, funciones y operadores, que han trascendido a contextos de espacios de Orlicz y otros más generales se van a seguir viendo a lo largo del trabajo. Se tratará de establecer una generalización de la p-variación y p-semivariación para involucrar, de este modo, a una mayor cantidad de espacios de funciones vectoriales, y a espacios de operadores vinculados a éstos.

1.2 Sobre las nociones geométricas de (RNP) y tipo y cotipo de Rademacher

Cuando (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita y X un espacio de Banach arbitrario, la proposición 1.4 dice que toda función $f \in L^1(X)$ define de forma natural una medida vectorial F_f dada por

$$F_f(A) = \int_A f d\mu, \qquad A \in \Sigma,$$

que es μ-continua y de variación total finita, dándose la igualdad $|F_f|(\Omega) = \|f\|_1$. En el caso de $X = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, ese razonamiento es reversible, resultando que toda medida compleja (por tanto con variación total finita) funciona como la integral (de la forma citada) de una función: es el conocido teorema de Radon-Nikodým. La propiedad de Radon-Nikodým viene entonces motivada.

Definición 1.19 ([DiUh], p. 61) *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito. Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodým respecto del espacio de medida (Ω, Σ, μ) si se cumple el teorema de Radon-Nikodým en X, es decir, si toda medida finitamente aditiva μ-continua $F : \Sigma \to X$ de variación acotada admite una función $f_F : \Omega \to X$ integrable Bochner ($f_F \in L^1(X)$) de manera que*

$$F(A) = \int_A f_F d\mu$$

para cualquier μ-medible A.

Se dirá, simplemente, que X tiene la propiedad de Radon-Nikodým si tiene la propiedad de Radon-Nikodým respecto de cualquier espacio de medida finita. Se utilizará la abreviatura (RNP) para la propiedad e incluso la notación $X \in (RNP)$ para indicar que el espacio X la satisface.

Aunque la (RNP) parece involucrar de cierto modo al espacio de medida, hay caracterizaciones de ésta en términos de dentabilidad que aclaran la naturaleza geométrica de la propiedad, y que la hace independiente el espacio de medida utilizado.

En [DiUh, pp. 59-96] se presentan conjuntamente el teorema de Radon-Nikodým en un espacio de Banach X y el teorema de representación de Riesz (también referido al espacio X). Se observa la relación que guardan ambos teoremas y se desarrollan nuevos teoremas de Radon-Nikodým para medidas vectoriales como fruto de esa conexión. Una equivalencia de la (RNP) resulta de gran utilidad.

Proposición 1.20 ([DiUh], p. 63) *Sea X un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito. Entonces X tiene la (RNP) respecto de (Ω, Σ, μ) si y sólo si todo operador $T \in L(L^1, X)$ es representable, es decir, admite una función $g_T \in L^\infty(X)$ de manera que*

$$T(f) = \int_\Omega f g_T d\mu$$

para toda $f \in L^1$.

Otra caracterización de la (RNP) viene de mano de las medidas de p-variación acotada, tal y como se mencionó en la sección anterior. En efecto, si X es un espacio de Banach y $1 < p \leq \infty$. Entonces

$$L^p(X) = V^p(X) \text{ si y sólo si } X \in (RNP).$$

Como corolario, una nueva equivalencia se deduce de ésta y de 1.18,

$$[L^{p'}(X)]^* = L^p(X^*) \text{ si y sólo si } X^* \in (RNP).$$

Estas equivalencias amplían su vigencia a espacios de funciones de Orlicz vectoriales en [115], y a la familia de espacios de funciones de Banach vectoriales en [GrUh]. El grado de generalización alcanzado en este último trabajo es enorme y sólo podremos hacer unos comentarios al respecto de las hipótesis que se asumen para tales espacios de funciones.

Para profundizar en los conceptos que se relacionan a continuación se remite al lector a [DJT], donde se exponen con profundo detalle.

La teoría de tipo y cotipo refleja la relación existente entre geometría y probabilidad en espacios de Banach. A. Beck establece en [5] relaciones entre la geometría intrínseca de un espacio de Banach y la validez de la Ley Fuerte de los Grandes Números para variables aleatorias que toman valores en el espacio.

Aunque la formulación explícita de estos conceptos se culmina en los años 70 con los trabajos [65, 50, 84, 85, 86] y [101], Orlicz da indicaciones para el cálculo del cotipo de los espacios L^p en [98] y [99] en los años 30, y Nordlander calcula en 1972 el tipo de los espacios L^p y llega a que los espacios de Hilbert tienen cotipo 2 en [92].

Definición 1.21 *La n-ésima función de Rademacher, $r_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, se define mediante la relación*

$$r_n(t) = \text{sign}(\text{sen}(2^n \pi t)).$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Es conveniente en ocasiones tratar la función constante 1 como la 0-ésima función de Rademacher, r_0.

Un espacio de Banach X tiene tipo (de Rademacher) p si existe una constante $C > 0$ de manera que, para cada $N \in \mathbb{N}$ y cualquier familia $x_1, x_2, \ldots, x_N$ de elementos de X, se tiene la desigualdad

$$\left(\int_0^1 \| \sum_{k=1}^N r_k(t) x_k \|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\sum_{k=1}^N \|x_k\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Denotamos con $T_p(X)$ al ínfimo de las constantes que satisfacen la anterior desigualdad.

Un espacio de Banach X tiene cotipo (de Rademacher) q si existe una constante $C > 0$ de manera que, para cada $N \in \mathbb{N}$ y cualquier familia x_1 ,x_2, $\ldots$, x_N de elementos de X, se tiene la desigualdad

$$\left(\sum_{k=1}^N \|x_k\|_X^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \| \sum_{k=1}^N r_k(t) x_k \|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Denotamos con $C_q(X)$ al ínfimo de las constantes que satisfacen la anterior desigualdad.

Las desigualdades de Kahane ([DJT, p. 211])

$$\left(\int_0^1 \|\sum_{k=1}^N r_k(t)x_k\|_X^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{p,q}\left(\int_0^1 \|\sum_{k=1}^N r_k(t)x_k\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

(para $0 < p, q < \infty$ y $K_{p,q} > 0$ constante dependiente de p y q pero independiente de la familia de vectores $x_1, \ldots, x_N \in X$) nos permiten sustituir, en las definiciones de tipo y cotipo, la expresión

$$\left(\int_0^1 \|\sum_{k=1}^N r_k(t)x_k\|_X^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

por

$$\left(\int_0^1 \|\sum_{k=1}^N r_k(t)x_k\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

con $0 < p < \infty$, con cargo a una modificación en las constantes. Éste es un recurso útil en las pruebas relativas a estos conceptos. Además tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.22 *En el presente contexto se tiene:*
(1) Propiedades elementales de las definiciones:

- *Únicamente el espacio de Banach trivial $X = \{0\}$ puede tener tipo $p > 2$ o cotipo $q < 2$.*

- *Todo espacio de Banach X tiene tipo p para cualquier $0 < p \leq 1$. Todo espacio de Banach X tiene cotipo ∞. Además $T_1(X) = C_\infty(X) = 1$.*

Esto explica que se suela incluir en las definiciones de tipo y cotipo las condiciones $1 \leq p \leq 2$ y $2 \leq q \leq \infty$, respectivamente.

- *Si X tiene tipo $p > 1$, entonces también tiene tipo $\widetilde{p}$ para todo $1 \leq \widetilde{p} \leq p$. Además $T_{\widetilde{p}}(X) \leq T_p(X)$.*

- *Si X tiene cotipo $q < \infty$, entonces también tiene cotipo $\widetilde{q}$ para todo $q \leq \widetilde{q} \leq \infty$. Además $C_{\widetilde{q}}(X) \leq C_q(X)$.*

(2) Otros resultados posteriores:

- *Si H es un espacio de Hilbert, entonces H tiene tipo y cotipo 2. Además $T_2(H) = C_2(H) = 1$*

- *Todo espacio de Banach X tiene el mismo tipo y cotipo que su bidual X^{**}.*

- *Si un espacio de Banach X tiene tipo p, su dual X^* tiene cotipo p', y $C_{p'}(X^*) \leq T_p(X)$.*

Las dos últimas propiedades implican que si X^* es un dual con tipo p, entonces X tiene cotipo p'. La pregunta natural es ¿X tiene cotipo q implica que X^* tiene tipo q'? Y la respuesta es no (ℓ^1 tiene cotipo 2, pero su dual ℓ^∞ no tiene ningún tipo no trivial).

El estudio de los espacios que tienen algún tipo no trivial (es decir, tipo $p > 1$) motiva la definición de dos conceptos nuevos: la K-convexidad y la B-convexidad, equivalentes a la postre. Estos conceptos se refuerzan entre sí para lograr el objetivo de la caracterización de los espacios de tipo no trivial.

Un espacio de Banach X se dice K-convexo si el operador R^X dado por

$$R^X f(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(\cdot) \left(\int_0^1 r_n(t) f(t) dt \right)$$

resulta ser una proyección lineal y continua de $L^2([0,1], X)$ en sí mismo.

Un espacio de Banach X se dice B-convexo si existe $\delta > 0$ y un entero $n \geq 2$ tal que para cualquier familia $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ se puede elegir $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k=1}^n \subset \{-1,1\}^n$ de manera que

$$\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \| \leq (1-\delta) \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|.$$

La equivalencia entre las dos definiciones es fructífera, y se obtiene, por un lado, que un espacio de Banach X es B-convexo si y sólo si lo es su dual X^* ([DJT, p. 263]), y por otro, que si X es un espacio K-convexo, entonces X tiene cotipo q si y sólo si X^* tiene tipo q' ([DJT, p. 276]).

De este modo, la K-convexidad (o B-convexidad) es la clave para que el cotipo de Rademacher goce de la misma propiedad que posee el tipo (a saber, transmitirse al dual como cotipo mediante el exponente conjugado). Además, como se indicaba antes, se tiene que un espacio de Banach X es K-convexo si y sólo si tiene tipo p para algún $p > 1$ ([DJT, p. 260])

Los últimos conceptos geométricos de los que haremos uso son relativos a retículos de Banach.

Sea X un retículo de Banach y $p \in [1, \infty)$. Se dice que X es p-convexo si existe una constante $C > 0$ de modo que, para cada familia arbitraria de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ con $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\| (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \|_X \leq C (\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_X^p)^{\frac{1}{p}}$$

Se dice que X es p-cóncavo si la desigualdad anterior se cumple en la otra dirección.

Remitimos al lector interesado a [72, pp. 40-100], donde se realiza una revisión extensa sobre estos y otros conceptos geométricos en retículos de Banach.

1.3 Sobre funciones armónicas

La conexión entre medidas vectoriales y funciones armónicas viene también avalada por el contexto de los espacios de Lebesgue ([110, 1, 61, 37]), Lebesgue-

Bochner ([8]) y Orlicz-Bochner ([27]).

El espacio de medida se particulariza al toro $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = 1\}$ (identificable con el intervalo $[-\pi, \pi)$) con la σ-álgebra de los borelianos y la medida de Lebesgue dt (normalizada), y las funciones armónicas están definidas sobre el disco unidad (abierto) del plano complejo, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < 1\}$.

Sea X un espacio de Banach arbitrario. Una función vectorial $u : \mathbb{D} \to X$ se dice armónica si es de clase $C^2(\mathbb{D}, X)$ y cumple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = 0$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Se denota por $\mathcal{H}ar(\mathbb{D}, X)$ el conjunto de todas las funciones armónicas vectoriales. Referencias de consulta sobre este tema son [47, 49, 61].

Para cada función armónica u definida en $\mathbb{D}$ se toma la notación $u_r : \mathbb{T} \to X$ para la función dada por

$$u_r(t) = u(re^{it})$$

para cada $r \in [0, 1)$, y se suele decir que u_r es la función u evaluada a nivel r. El ejemplo de función armónica real definida en $\mathbb{D}$ por excelencia es la función de Poisson

$$P(z) = \Re(\tfrac{1+z}{1-z}).$$

Usando la notación anterior, $P_r : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es la función P a nivel r

$$P_r(t) = P(re^{it}),$$

definida para cada $r \in [0, 1)$, en $[-\pi, \pi)$. Ésta tiene como expresiones más usuales

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}. \end{aligned}$$

La función P_r es positiva, par y cumple

$$\|P_r\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1$$

para todo $r \in [0, 1)$. Una propiedad algo menos directa, pero de gran interés es

$$\lim_{r \to 1} \int_{|t| > \delta} P_r(t)dt = 1$$

para cada $\delta > 0$. Referencias acerca del núcleo de Poisson son [110, 37, 1].

Se dice que una función $u : \mathbb{D} \to X$ es débilmente armónica si cada función $x^*u : \mathbb{D} \to \mathbb{K}$ (dada por $x^*u(z) = \langle u(z), x^* \rangle$) es armónica (real o compleja). Se puede probar que una función es armónica si y sólo si es débilmente armónica (ver [27]).

Sea P_z definida, para cada $z \in \mathbb{D}$, como $P_z(t) = P(ze^{-it})$. Con esta notación, podemos demostrar que la función $\mathcal{P}_\infty : \mathbb{D} \to \mathcal{C}(\mathbb{T})$ es armónica vectorial. Bastará con probar que es débilmente armónica. Si $\mu \in \mathcal{C}(\mathbb{T})^* = M(\mathbb{T})$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{P}_\infty(z), \mu \rangle &= \int_{\mathbb{T}} P(ze^{-it}) d\mu(t) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |z|^{|n|} e^{in(\theta - t)} \Big) d\mu(t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |z|^{|n|} e^{in\theta} \int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu(t) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{\mu}(n) z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{\mu}(-n) z^n .
\end{aligned}$$

Dado que $|\hat{\mu}(n)| \leq |\mu|_1$ (la variación total de μ), las series que han aparecido nos aseguran que la función $z \mapsto \langle \mathcal{P}_\infty(z), \mu \rangle$ es armónica, y por tanto se tiene lo anunciado anteriormente.

Por otra parte, si $u : \mathbb{D} \to X$ es función armónica y $T : X \to Y$ es operador lineal y continuo, entonces la composición $T \circ u$ es función armónica.

Con este resultado se puede afirmar que la función $\mathcal{P}_p : \mathbb{D} \to L^p(\mathbb{T})$ definida como la anterior, es decir, $\mathcal{P}_p(z) = P_z$, es también armónica, pues se trata de la composición $i_p \circ \mathcal{P}_\infty$, donde $i_p : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ es el operador inclusión, que es lineal y continuo.

Para cada función continua vectorial $f \in C(\mathbb{T}, X)$ se define la llamada integral de Poisson de f como

$$P[f](z) = \int_{\mathbb{T}} P_z(t) f(t) dt,$$

definida para $z \in \mathbb{D}$. Se puede escribir de otro modo

$$\begin{aligned}
P[f](re^{i\theta}) &= \int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - t) f(t) dt \\
&= P_r * f(t)
\end{aligned}$$

donde $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$.

Esta nueva función resuelve el problema de contorno (llamado problema de Dirichlet) en su versión vectorial: Si $f \in C(\mathbb{T}, X)$ entonces existe una función armónica en $\mathbb{D}$ que se extiende al disco cerrado de manera continua y coincide con f en $\mathbb{T}$.

La propiedad del valor medio que caracteriza a las funciones armónicas reales también se mantiene en el contexto vectorial, es decir, es equivalente para una función $u : \mathbb{D} \to X$ ser armónica en $\mathbb{D}$ y cumplir la relación

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}} u(z + re^{it}) dt$$

para cada $z \in \mathbb{D}$ y cada $r > 0$ tal que el disco cerrado $\overline{D}(z, r)$ está contenido en $\mathbb{D}$.

En general, para cada función $f \in L^1(\mathbb{T}, X)$, la función $u = P[f]$ es armónica, y si $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, la desigualdad de Young para convoluciones se transforma en la acotación

$$\|P[f]_r\|_p \leq \|f\|_p$$

para todo $r \in [0, 1)$ y $1 \leq p \leq \infty$. Excepto en el caso $p = \infty$, se puede probar, mediante uso de la densidad del conjunto de las funciones continuas, que se tiene

$$\lim_{r \to 0} \|P[f]_r - f\|_p = 0. \qquad (*)$$

El espacio $h^p(\mathbb{D}, X)$, llamado de Hardy-Lebesgue-Bochner, es el formado por las funciones armónicas $u : \mathbb{D} \to X$ tales que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|u_r\|_p < \infty.$$

Éste es un espacio de Banach considerado con la norma

$$\|u\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} \|u_r\|_p < \infty$$

que, en virtud de la desigualdad de Young y la convergencia $(*)$, contiene isométricamente al espacio $L^p(\mathbb{T}, X)$ para cada $1 \leq p < \infty$, vía la integral de Poisson.

La pregunta natural que surge a raíz de lo visto es: ¿Son biyectivos $L^p(\mathbb{T}, X)$ y $h^p(\mathbb{D}, X)$ vía la integral de Poisson? O dicho con otras palabras, ¿toda función de $h^p(\mathbb{D}, X)$ es la integral de Poisson de alguna función de $L^p(\mathbb{T}, X)$?

La respuesta es afirmativa en el caso $X = \mathbb{K}$ (ver [110]) y condicionada en el caso general. En efecto, se puede consultar en [26] que para $1 < p \leq \infty$, las siguiente afirmaciones son equivalentes:

- Toda función $u \in h^p(\mathbb{D}, X)$ tiene límite radial casi por todas partes, es decir, existe $\lim_{r \to 1} u(re^{it}) = f(t)$ para casi todo $t \in \mathbb{T}$.
- $h^p(\mathbb{D}, X) = \{P[f] : f \in L^p(\mathbb{T}, X)\}$.
- $X \in (RNP)$

Pruebas alternativas a las equivalencias descritas pueden encontrarse en [49] y en [13]. En este último trabajo se prueba la equivalencia de la propiedad de Radon-Nikodým y de la llamada propiedad de Fatou que, en el contexto de funciones armónicas, afirma que cada función armónica vectorial acotada admite un límite radial (casi por todas partes) a una función acotada.

El caso $p = 1$ está resuelto con la integral de Poisson de medidas regulares de variación acotada. Si F es una medida de variación total acotada, entonces

$$P_r * F(t) = \int_{\mathbb{T}} P_r(t - \theta) dF(\theta)$$

define, para cada $t \in \mathbb{T}$ y $r \in [0,1)$, una función armónica, denotada por $P[F]$, de manera que

$$\|P[F]\|_1 = |F|_1.$$

Nótese que $P_r * F(t)$, que se ha escrito en forma de integral, no es más que la imagen por el operador inducido por la medida F, $T_F : L^1 \to X$, de la función integrable $P_r(t - \cdot)$.

Se tiene, de hecho, la isometría $h^1(\mathbb{D}, X) = M(\mathbb{T}, X)$, vía la integral de Poisson, donde $M(\mathbb{T}, X)$ denota el conjunto de las medidas vectoriales regulares de variación total finita.

Un razonamiento que se aplica repetidamente en las pruebas de las isometrías existentes entre los espacios de Hardy-Lebesgue-Bochner y los de Lebesgue-Bochner correspondientes (sobre todo en la prueba de la sobreyección) pasa por el uso de convergencias en la topología débil* de los espacios de Lebesgue-Bochner. En efecto, las funciones armónicas u de $h^p(\mathbb{D}, X)$ forman redes $(u_r)_r$ acotadas en los espacios de Lebesgue-Bochner. El teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki es aplicable y da resultados satisfactorios. Éstos se van a aprovechar en los contextos más amplios posibles para conseguir nuevos teoremas de representación de funciones armónicas como integrales de Poisson de funciones (o medidas) vectoriales.

1.4 Sobre espacios de funciones de Banach

Los espacios de funciones de Banach han sido estudiados ampliamente, siendo referencias fundamentales [75, 78, 77, 79, 80]. A estos espacios se les ha llamado también espacios de Riesz o de Köthe-Toeplitz e incluyen a una gran parte de los espacios conocidos. De este modo, éste parece ser un contexto suficientemente amplio para generalizar un concepto que se había vinculado en un principio a los espacios de Lebesgue y se había extendido más adelante a los espacios de Orlicz.

El presente trabajo guarda estrecha relación con la publicación de N. E. Gretsky [Gret], en la que los espacios de funciones de Banach son protagonistas de su estudio.

Una referencia moderna sobre espacios de funciones de Banach es [BeSh]. El conjunto de axiomas que definen un tal espacio de funciones varía ligeramente de unos autores a otros, de manera que en nuestro caso no coinciden exactamente las definiciones de [Gret] y [BeSh]. A pesar de ello, el desarrollo posterior del trabajo de Gretsky, a saber, los teoremas de representación de operadores, viene condicionado por hipótesis adicionales (la propiedad (J) y la propiedad (I)). Trataremos de aclarar en cada punto la posible pérdida de generalidad que aquí se cometa respecto de [Gret]

El espacio de medida base (Ω, Σ, μ) se toma σ-finito, $\mathcal{M}$ denota el conjunto de funciones μ-medibles definidas en Ω y con valores en $[-\infty, \infty]$ ó $\mathbb{C}$, mientras que $\mathcal{M}^+$ y $\mathcal{M}_0$ representan los subconjuntos de $\mathcal{M}$ de las funciones no negativas y finitas casi por todas partes, respectivamente.

Definición 1.23 ([BeSh, p. 2]) *Una aplicación* $\rho : \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$ *se dice norma funcional de Banach (o simplemente norma funcional) si, para todo* $f, g, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de* $\mathcal{M}^+$*, para toda constante* $a \geq 0$*, y para todo* A*, subconjunto* μ*-medible de* Ω*, se cumplen las siguientes propiedades:*

- (P1) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ $\mu -$ c.p.p.;
  $\rho(af) = a\rho(f)$;
  $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$.
- (P2) $g \leq f$ $\mu-$c.p.p. *implica* $\rho(g) \leq \rho(f)$.
- (P3) $f_n \uparrow f$ $\mu-$c.p.p. *implica* $\rho(f_n) \uparrow \rho(f)$.
- (P4) $\mu(A) < \infty$ *implica* $\rho(\chi_A) < \infty$.
- (P5) $\mu(A) < \infty$ *implica* $\int_A f d\mu \leq C_A \rho(f)$ *para alguna constante* C_A, $0 < C_A < \infty$*, que depende de* A *y* ρ*, pero independiente de* f.

Se define, para cada norma funcional ρ*, el espacio* $E = E(\rho)$ *como el de las funciones de* $\mathcal{M}$ *para las cuales* $\rho(|f|) < \infty$*, y se le llama espacio de funciones de Banach. Para cada* $f \in E$ *escribimos* $\|f\|_E = \rho(|f|)$.

La hipótesis (P3), conocida como propiedad de Fatou (o propiedad de Fatou fuerte, denotada por (SFP) de modo abreviado), es algo más restrictiva que la propiedad de Fatou débil, denotada por (WFP), y que afirma que $\rho(f) < \infty$ siempre que se tengan $f \in \mathcal{M}^+$ y $f_n \in \mathcal{M}^+$, $n = 1, 2, \ldots$ de manera que $f_n \uparrow f$ y $\sup_n \rho(f_n) < \infty$.

La (WFP) es la propiedad que se asume sobre la norma funcional en [Gret] y en posteriores trabajos como son [GrUh, 115, 67], y así goza de una mayor generalidad. Otra propiedad remarcable de una norma funcional es la propiedad de Riesz-Fisher, denotada por (RFP). Esta se satisface por una norma funcional ρ cuando $\rho(\sum_{n=1}^{\infty} f_n) < \infty$ siempre que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sucesión de funciones de $\mathcal{M}^+$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(f_n) < \infty$.

Se tienen las implicaciones $(SFP) \Rightarrow (WFP) \Rightarrow (RFP)$, siendo además (RFP) una propiedad necesaria y suficiente para que el espacio de funciones de Banach correspondiente sea completo.

Más adelante, cuando se trate el tema del espacio biasociado, se comentará la posible pérdida de generalidad que se comete al exigir sobre la norma funcional la propiedad (SFP) (ver p. 24).

A continuación se cita una serie de propiedades de esta familia de espacios.

Teorema 1.24 ([BeSh, p. 6]) *Sea* $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espacio de funciones de Banach tal y como se describe en la definición previa. Entonces* $(E, \|\cdot\|_E)$ *es un espacio de Banach y las siguientes propiedades se cumplen para cada* $f, g, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de* $\mathcal{M}$ *y cada subconjunto medible* A *de* Ω*:*

- *(La propiedad de retículo)*

  Si $|g| \leq |f|$ μ*-c.p.p. y* $f \in E$*, entonces* $g \in E$ *y* $\|g\|_E \leq \|f\|_E$*; en particular, una función medible* f *pertenece a* E *si y sólo si* $|f|$ *pertenece a* E*, y en ese caso* f *y* $|f|$ *tienen la misma norma en* E.

- *(La propiedad de Fatou)*

  Supongamos que $f_n \in E, f_n \geq 0, (n = 1, 2, \ldots)$, *y* $f_n \uparrow f$ μ*-c.p.p. Si* $f \in E$, *entonces* $\|f_n\|_E \uparrow \|f\|_E$, *mientras que si* $f \notin E$, *entonces* $\|f_n\|_E \uparrow \infty$.

- *(Lema de Fatou)*

  Si $f_n \in E, (n = 1, 2, \ldots), f_n \to f$ μ*-c.p.p., y* $\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_E < \infty$, *entonces* $f \in E$ *y*

  $$\|f\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_E.$$

- *Toda función simple pertenece a* E.

- *A cada conjunto* A *de medida finita corresponde una constante* C_A *cumpliendo* $0 < C_A < \infty$ *tal que*

  $$\int_A |f| d\mu \leq C_A \|f\|_E$$

  para toda función $f \in E$.

- *Si* $f_n \to f$ *en* E, *entonces* $f_n \to f$ *en medida sobre los conjuntos de medida finita; en particular hay alguna subsucesión de* $\{f_n\}$ *que converge puntualmente* μ*-c.p.p. a* f.

- *Sean* E_1 *y* E_2 *espacios de funciones de Banach sobre el mismo espacio de medida. Si* $E_1 \subset E_2$, *entonces se tiene* $E_1 \hookrightarrow E_2$*; equivalentemente,*

  $$\|f\|_{E_2} \leq C\|f\|_{E_1}, \qquad (f \in E_1),$$

  para alguna constante independiente de f.

- *Como corolario de lo anterior, si dos espacios de funciones de Banach contienen las mismas funciones, entonces sus normas son equivalentes.*

- *Si* $\mu(\Omega) < \infty$, *entonces se tiene que* $L^\infty \hookrightarrow E \hookrightarrow L^1$.

Está implícito en la definición 1.23 que, para cada $A \in \Sigma$ de medida finita, el funcional $f \mapsto \int_\Omega f\chi_A d\mu$ es un elemento de E^*, el dual topológico de E. Si se define un funcional, ρ', sobre las funciones de $\mathcal{M}^+$ mediante la relación

$$\rho'(g) = \sup\{\textstyle\int_\Omega fg d\mu : f \in \mathcal{M}^+,\ \rho(f) \leq 1\}, \qquad g \in \mathcal{M}^+,$$

resulta que se tiene una nueva norma funcional asociada a la norma funcional ρ. Al espacio de funciones de Banach $E(\rho')$ se le llama espacio asociado a E, y se le referirá como E'. Además se sigue que E' viene caracterizado por poseer todas las funciones medibles escalares g tales que $fg \in L^1$ para cualquier $f \in E$. La desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \|f\|_E \|g\|_{E'}, \qquad f \in E,\ g \in E'$$

es inmediata.

La situación $E_1 \subset E_2$ implica $E'_2 \subset E'_1$. Además, si $C > 0$ es la constante de la desigualdad de normas (como aparece en el teorema anterior), entonces $\|f\|_{E'_1} \leq C\|f\|_{E'_2}$ para cada $f \in E'_2$. La prueba es inmediata de las expresiones de las normas asociadas.

Si se piensa en E' como espacio de funciones de Banach y en su asociado $(E')'$, denotado por E'' (y llamado biasociado de E), la desigualdad anterior muestra que $\|f\|_{E''} \leq \|f\|_E$ para toda función f de E.

En este punto mencionamos el resultado de G. G. Lorentz [73, 74] y W. A. J. Luxemburg [75, 76], que afirma que una norma ρ que tiene la propiedad (RFP) tiene, además, la (WFP) si y sólo si existe una constante γ con $0 < \gamma \leq 1$ tal que $\gamma\rho \leq \rho'' \leq \rho$. Como caso particular, $\rho = \rho''$ si y sólo si ρ tiene la (SFP).

Se observa de esto que si la norma funcional ρ se toma con la propiedad de Riesz-Fisher (RFP), las hipótesis sobre ρ de (WFP) y (SFP) equivalen, respectivamente, a las relaciones E isomorfo a E'' y E isométrico a E''.

El espacio E', asociado a un espacio de funciones de Banach E, es isométricamente isomorfo a un subespacio de E^*. Además es cerrado y la (SFP) sobre la norma ρ de E implica que E' es normante, mientras que la (WFP) sólo nos da la relación

$$\gamma\|f\|_E \leq \sup\{\textstyle\int_\Omega fg d\mu \ : \ \|g\|_{E'} \leq 1\} \leq \|f\|_E$$

para cada $f \in E$.

Recordamos que un subespacio vectorial cerrado B de un espacio X^* (dual de un espacio de Banach X) se dice normante cuando

$$\|f\|_X = \sup\{|b(f)| : b \in B, \|b\|_{X^*} \leq 1\}$$

para cada $f \in E$. Es decir, B es normante si contiene suficientes funcionales para reproducir la norma de cada elemento de E.

Una cuestión de interés estriba en conocer, a partir de la inclusión trivial $E' \subset E^*$, en qué casos se da la igualdad. Los espacios L^1 y L^∞ son asociados entre sí, pero mientras es cierto que $(L^1)^* = L^\infty$, no lo es en absoluto la relación recíproca.

En los próximos comentarios $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ denota una sucesión arbitraria de conjuntos μ-medibles de Ω. Escribiremos $A_n \to \varnothing$ si las funciones características χ_{A_n} convergen a 0 puntualmente μ-c.p.p.; si además la sucesión $\{A_n\}$ es decreciente, escribiremos $A_n \downarrow \varnothing$. No es difícil ver que $A_n \to \varnothing$ si y sólo si el límite superior

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{m=1}^\infty \cup_{m=n}^\infty A_n$$

de la sucesión $\{A_n\}$ es un conjunto de μ-medida nula.

Definición 1.25 *Se dice que una función f de un espacio de funciones de Banach E tiene norma absolutamente continua en E si $\|f\chi_{A_n}\|_E \to 0$ para toda sucesión $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ cumpliendo $A_n \to \varnothing$. El conjunto de todas las funciones de E que tienen norma absolutamente continua se denota por E_a. Si $E = E_a$, entonces se dice que el propio espacio E tiene norma absolutamente continua.*

Por otro lado, se denota con E_b *la clausura en* E *del conjunto de las funciones simples.*

Diversas caracterizaciones para que una función f de un espacio de funciones de Banach E tenga norma absolutamente continua son:

- $\|f\chi_{A_n}\| \downarrow 0$ para toda sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumpliendo $A_n \downarrow \varnothing$.
- $\|f_n\| \downarrow 0$ para cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones μ-medibles que satisfacen $|f| \geq f_n \downarrow 0$ μ-c.p.p.
- Siempre que $f_n, (n = 1, 2, \ldots)$, y g sean funciones μ-medibles que cumplan $|f_n| \leq |f|$ μ-c.p.p. y $f_n \to g$ μ-c.p.p., entonces $\|f_n - g\| \to 0$.

Mientras tanto, una condición necesaria es:

- Si f tiene norma absolutamente continua, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\mu(A) < \delta$ implica $\|f\chi_A\| < \varepsilon$.

Ejemplos 1.26 *Para* $1 \leq p < \infty$*, se tiene que* $L^p(\Omega, \mu)$ *tiene norma absolutamente continua. Si* (Ω, μ) *es no atómico, entonces* $(L^\infty)_a = \{0\}$*. Sin embargo, si* (Ω, μ) *es completamente atómico, como es el caso de* $\mathbb{N}$*, entonces* $(\ell^\infty)_a = c_0$

Es obvio que el subespacio E_a, cumple la siguiente propiedad:

$$f \in E_a \text{ y } |g| \leq |f| \ \mu\text{-c.p.p.} \qquad \Longrightarrow \qquad g \in E_a. \qquad (*)$$

Además, si $0 \leq f_n \uparrow f$ μ-c.p.p. y $f \in E_a$, entonces $\|f - f_n\| \downarrow 0$.

Por su parte, el subespacio E_b coincide con la clausura en E del conjunto de las funciones acotadas y soportadas sobre conjuntos de medida finita, y se puede probar que también cumple la propiedad (*) y la relación

$$E_a \subset E_b \subset E.$$

La igualdad de subespacios E_a y E_b viene caracterizada por la condición:

- χ_A tiene norma absolutamente continua para todo medible A de medida finita.

La dualidad de los espacios de funciones de Banach y la ubicación del espacio asociado quedan reflejadas en el resultado:

- $E^* = E'$ si y sólo si $E = E_a$.

De ahí se deduce que un espacio de funciones de Banach E es reflexivo si y sólo si E y su asociado E' tienen norma absolutamente continua.

Los resultados que conciernen a la separabilidad son los siguientes:

- Un espacio de funciones de Banach E es separable si y sólo si tiene norma absolutamente continua y su medida subyacente es separable.

- Supongamos que $E_a = E_b$. Entonces E_a es separable si y sólo si μ es separable
- Si el espacio E^*, dual de un espacio de funciones de Banach E, es separable, entonces E es reflexivo.

Recordamos que una medida μ se dice separable [44, p. 168] si el espacio métrico $(\mathcal{A}, d)$ es separable, donde $\mathcal{A}$ es la colección de todos los subconjuntos de Ω de medida finita (identificando aquellos que difieran en un conjunto μ-nulo) y d es la distancia

$$d(A,B) = \int_\Omega |\chi_A - \chi_B| d\mu, \qquad (A, B \in \mathcal{A}).$$

1.5 Sobre espacios invariantes por reordenamiento

Los espacios de funciones de Banach cubren una gran parte de los espacios de funciones que se suelen utilizar, como son los de Lebesgue y los de Orlicz. Sin embargo, estos espacios tan ampliamente usados tienen otra propiedad más. Si pensamos en sucesiones o en funciones simples, en la mayoría de espacios que imaginamos, las normas de los elementos no dependen más que de los valores que toman y de la medida del soporte donde se toma cada valor. Esta propiedad se va a formalizar con el nombre de espacios invariantes por reordenamiento.

Como en los apartados anteriores, (Ω, Σ, μ) representa un espacio de medida σ-finito.

Definición 1.27 ([BeSh, p. 36]) *Para cada función $f \in \mathcal{M}_0$, se define la función de distribución μ_f como*

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{w \in \Omega : |f(w)| > \lambda\}), \qquad \lambda > 0.$$

Se observa que μ_f es función no creciente, que depende únicamente del valor de la función $|f|$, y que puede tomar el valor $+\infty$.

Se dice que dos funciones $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mu)$ y $g \in \mathcal{M}_0(\Omega', \nu)$ se llaman equimedibles si tienen la misma función de distribución, es decir, si $\mu_f(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ para cada $\lambda \geq 0$.

Si denotamos con f, g y f_n para $n = 1, 2, \ldots$ funciones medibles respecto a (Ω, Σ, μ) y finitas en casi todo punto, entonces:

- La función μ_f es no negativa, decreciente y continua por la derecha en $(0, \infty)$.
- Si $|g| \leq |f|$ en casi todo punto, entonces $\mu_g \leq \mu_f$.
- $\mu_{af}(\lambda) = \mu_f(\frac{f}{|a|})$ para cualquier escalar a no nulo.
- $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$, para $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

- Si $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ para casi todo punto, entonces $\mu_f \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_{f_n}$. En particular, si $|f_n| \uparrow |f|$ entonces $\mu_{f_n} \uparrow \mu_f$.

Para cada función f como en la definición 1.27 se define su reordenada decreciente f^* como la "inversa por la derecha" de μ_f, esto es,

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : \mu_f(\lambda) \leq t\}, \qquad t > 0.$$

Se usa el convenio $\inf \varnothing = \infty$. Si μ_f es continua y estrictamente decreciente, f^* resulta ser la función inversa de μ_f. Hablando sin rigor, se puede afirmar que f^* será constante donde μ_f sea discontinua, y f^* observará una discontinuidad de salto donde μ_f sea constante.

La importancia de la función f^* es la de ser equimedible a f, teniendo en cuenta que $((0,\infty), m)$ es el espacio de medida para f^* (m es la medida de Lebesgue). Es decir, que $\mu_f = m_{f^*}$.

Si denotamos con f, g y f_n para $n = 1, 2, \ldots$ funciones medibles respecto a (Ω, Σ, μ) y finitas en casi todo punto, entonces:

- La función f^* es no negativa, decreciente y continua por la derecha en $(0, \infty)$.
- Si $|g| \leq |f|$ en casi todo punto, entonces $g^* \leq f^*$.
- $(af)^* = |a| f^*$ para cualquier escalar a no nulo.
- $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$, para $t_1, t_2 > 0$.
- Si $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ para casi todo punto, entonces $f^* \leq \liminf_{n\to\infty} f_n^*$. En particular, si $|f_n| \uparrow |f|$ c.t.p. entonces $f_n^* \uparrow f^*$.
- $f^*(\mu_f(\lambda)) \leq \lambda$ para todo $\lambda > 0$ tal que $\mu_f(\lambda) < \infty$.
- $\mu_f(f^*(t)) \leq t$ para todo $t > 0$ tal que $f^*(t) < \infty$.
- f y f^* son equimedibles.
- $(|f|^p)^* = (f^*)^p$, para $0 < p < \infty$.

La naturaleza de esta función proporciona los siguientes resultados:

- Si g es una función simple no negativa y A un medible arbitrario de Ω, entonces
$$\int_A g\,d\mu \leq \int_0^{\mu(A)} g^*(s)\,ds.$$
- (Desigualdad de Hardy) Si f y g son funciones de $\mathcal{M}_0$, entonces
$$\int_\Omega |fg|\,d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s) g^*(s)\,ds.$$

- Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito y sin átomos. Sea $f \in \mathcal{M}_0$ y sea t cualquier número tal que $0 \leq t \leq \mu(\Omega)$. Entonces existe un medible E_t con $\mu(E_t) = t$ tal que
$$\int_{E_t} |f| d\mu = \int_0^t f^*(s) ds.$$
Además, los conjuntos E_t se pueden escoger de manera creciente respecto de t, es decir,
$$0 \leq s \leq t \leq \mu(\Omega) \quad \text{implica} \quad E_s \subset E_t.$$

La desigualdad de Hardy, cuando g es una función característica de un medible A, se reduce a
$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f| d\mu \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$
para toda $f \in \mathcal{M}_0$. Tenemos entonces una función que, para cada $t > 0$, mayora los promedios de $|f|$ sobre medibles de medida t. Así viene motivada la siguiente definición.

Definición 1.28 ([BeSh, p. 52], Segunda reordenada) *Sea f una función medible como en la definición 1.27. Se define la segunda reordenada de f, denotada por f^{**}, con la expresión*
$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds \qquad t > 0.$$

Sean f, g y f_n para $n = 1, 2, \ldots$ funciones medibles respecto a (Ω, Σ, μ) y finitas en casi todo punto. Unas propiedades básicas de esta función son:

- La función f^{**} es no negativa, decreciente y continua en $(0, \infty)$.
- $f^{**} \equiv 0$ si y sólo si $f = 0$ en c.t.p.
- $f^* \leq f^{**}$
- Si $|g| \leq |f|$ en casi todo punto, entonces $g^{**} \leq f^{**}$.
- $(af)^{**} = |a| f^{**}$ para cualquier escalar a no nulo.
- $(f + g)^{**}(t_1 + t_2) \leq f^{**}(t_1) + g^{**}(t_2)$, para $t_1, t_2 > 0$.
- Si $|f_n| \uparrow |f|$ c.t.p. entonces $f_n^{**} \uparrow f^{**}$.

Definición 1.29 ([BeSh, p. 59], Espacio invariante por reordenamiento) *Sea ρ una norma funcional en un espacio de medida σ-finito (Ω, Σ, μ). Entonces se dice que ρ es invariante por reordenamiento si $\rho(f) = \rho(g)$ para todo par de funciones equimedibles f y g de $\mathcal{M}_0^+$. En ese caso, al espacio de funciones de Banach $E = E(\rho)$ generado por ρ se le llama espacio invariante por reordenamiento.*

Nota 1.30 *En espacios de medida que contienen parte atómica y parte no atómica, o en los que contienen únicamente átomos, pero de diversas medidas, el concepto de espacio invariante por reordenamiento tiene poca significación práctica. Muchos de los resultados que siguen en esta parte no se cumplen para espacios invariantes por reordenamiento definidos sobre tales espacios de medida.*

Definición 1.31 *Llamaremos a un espacio de medida σ-finito (Ω, Σ, μ) 'resonante' si es de uno de los dos tipos siguientes:*

- *No atómico.*

- *Puramente atómico, con átomos de igual medida.*

Cabe mencionar que esta definición se corresponde, en realidad, con una caracterización de tales espacios de medida (ver [BeSh, p. 45]).

En espacios de medida resonantes, los espacios invariantes por reordenamiento forman una familia cerrada para la asociatividad. Esto es, si E es un espacio de funciones de Banach definido sobre un espacio de medida resonante, entonces E es invariante por reordenamiento si y sólo si el asociado E' también lo es.

Sea π un elemento de D_Ω, es decir, una colección de medibles disjuntos cuya medida es finita y no nula. Para cada función medible f se define la función simple promedio sobre π (también llamada función proyección de f sobre π, o esperanza condicional de f en π) como

$$E_\pi(f) = \sum_{A \in \pi} \frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)} \chi_A.$$

Se dice que una norma funcional ρ tiene la propiedad (J) si $\rho(|E_\pi(f)|) \leq \rho(|f|)$ para cualquier partición π (ver [Gret, p. 7]).

La propiedad (J) es muy importante para los trabajos [Gret, GrUh] a la hora de fundamentar los resultados de los teoremas de representación de operadores en términos de medidas.

Se puede encontrar en [BeSh, p. 61] una prueba de que todos los espacios invariantes por reordenamiento definidos sobre espacios de medida resonantes satisfacen la propiedad (J). Además, podemos probar este útil resultado.

Lema 1.32 *Sean E un espacio invariante por reordenamiento y $f \in E$ una función. Entonces*

$$\|f\|_E = \sup\{\|E_\pi(f)\|_E \ : \ \pi \in D_\Omega\}$$

Prueba: Una desigualdad viene dada por la referencia recién citada, mientras que la otra es consecuencia de la desigualdad de Hölder, y de que E' también sea invariante por reordenamiento, ya que

$$\begin{aligned}
\|f\|_E &= \sup\{\textstyle\int_\Omega fgd\mu \ : \ \|g\|_{E'} \leq 1\} \\
&= \sup\{\textstyle\int_\Omega f(\sum_{A\in\pi} \alpha_A\chi_A)d\mu \ : \ \pi \in D, \ \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A\chi_A\|_{E'} \leq 1\} \\
&= \sup\{\textstyle\sum_{A\in\pi}\alpha_A(\int_A fd\mu) \ : \ \pi \in D, \ \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A\chi_A\|_{E'} \leq 1\} \\
&= \sup\{\textstyle\int_\Omega E_\pi(f)(\sum_{A\in\pi} \alpha_A\chi_A)d\mu \ : \ \pi \in D, \ \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A\chi_A\|_{E'} \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|E_\pi(f)\|_E \ : \ \pi \in D_\Omega\}
\end{aligned}$$

□

Nota 1.33 *Es fácil ver que el lema previo es válido para cualquier espacio de funciones de Banach con la (SFP) y que satisfaga la propiedad (J). Si en lugar de la (SFP) se le supone, a la norma de E, la (WFP), entonces se puede afirmar que la expresión, para cada f de E,*

$$\|f\|_{*E} = \sup\{\|E_\pi(f)\|_E \ : \ \pi \in D_\Omega\}$$

es una norma equivalente a $\|\cdot\|_E$.

Si (Ω, μ) es un espacio de medida σ-finito arbitrario, toda norma funcional invariante por reordenamiento definida sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ que da origen a un espacio de funciones E, induce de la forma siguiente

$$\|f\|_{\overline{E}} = \|f^*\|_E \qquad f \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$$

una norma funcional invariante por reordenamiento que da lugar a un espacio de funciones $\overline{E}$ definido sobre (Ω, μ).

El proceso inverso no siempre es cierto, y se resume en el siguiente teorema.

Teorema 1.34 (Teorema de representación de Luxemburg) *Sea E un espacio de funciones invariante por reordenamiento definido sobre un espacio de medida resonante (Ω, μ). Entonces existe una norma invariante por reordenamiento (que genera un espacio $\overline{E}$) definida sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ de tal modo que*

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\overline{E}} \qquad f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+, m).$$

La unicidad de la norma que define el espacio $\overline{E}$ viene garantizada si la medida μ es no atómica e infinita, aunque para el caso de medida finita también hay unicidad si se reemplaza $\mathbb{R}^+$ por $[0, \mu(\Omega))$ (igualmente para el caso discreto con los cambios apropiados).

La siguiente definición se restringe, por tanto, a los espacios de funciones definidos sobre espacios de medida resonantes, pues hace uso del teorema de representación de Luxemburg.

Definición 1.35 *Se define el operador E_t definido sobre $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+, m)$, y se le llama operador dilatación, para cada $t > 0$ como*

$$E_t(f)(s) = f(ts), \qquad s > 0.$$

Se define la función h_E para cada $t > 0$ como la norma de $E_{\frac{1}{t}}$ tomado como operador de $\overline{E}$ en $\overline{E}$, es decir

$$h_E(t) = \|E_{\frac{1}{t}}\|, \qquad t > 0.$$

Los índices de Boyd son:

$$\underline{\alpha}_E = \sup_{0<t<1} \frac{\log h_E(t)}{\log t} \qquad \overline{\alpha}_E = \sup_{1<t<\infty} \frac{\log h_E(t)}{\log t}.$$

En el caso de medida finita, el operador dilatación se define como

$$E_t(f)(s) = \begin{cases} f(ts), & 0 \leq s \leq \min(1, \frac{1}{t})\mu(\Omega) \\ 0, & \min(1, \frac{1}{t})\mu(\Omega) \leq s \leq \mu(\Omega), \end{cases}$$

mientras que los índices de Boyd se pueden definir como

$$\underline{\alpha}_E = \lim_{t\to 0} \frac{\log h_E(t)}{\log t} \qquad \overline{\alpha}_E = \lim_{t\to\infty} \frac{\log h_E(t)}{\log t}.$$

Los índices de Boyd tienen unas propiedades interesantes, pero el hecho relevante que nos interesa por su aplicación es el relativo a la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood.

El operador maximal de Hardy-Littlewood que se define a continuación es un ejemplo para destacar la verdadera utilidad de las técnicas de interpolación de tipo débil. En nuestro trabajo lo vamos a utilizar para un objetivo muy concreto, cuando se establezcan relaciones entre medidas vectoriales y funciones escalares.

Definición 1.36 (Maximal de Hardy-Littlewood) *Para cada función escalar f localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, se define la función maximal de Hardy-Littlewood Mf como*

$$(Mf)(w) = \sup_{w\in Q} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(w)| d\mu(w)$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a w y μ es la medida de Lebesgue. El operador $M : f \mapsto Mf$ se dice operador maximal de Hardy-Littlewood.

La aplicación que se va a requerir, en el tema de medidas definidas sobre espacios invariantes por reordenamiento, es la acotación de este operador, resultado que viene recogido en el teorema de Lorentz-Shimogaki.

Teorema 1.37 (Teorema de Lorentz-Shimogaki) *Sea E un espacio invariante por reordenamiento definido sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces el operador maximal de Hardy-Littlewood M es acotado en E si y sólo si el índice de Boyd $\overline{\alpha}_E < 1$.*

Los próximos resultados van encaminados al estudio de los subespacios E_a y E_b de los espacios de funciones invariante por reordenamiento. Se verá que la relación

$$E_a \subset E_b \subset E$$

tiene pocos grados de libertad cuando se trabaja con esta clase de espacios.

En un espacio de funciones de Banach invariante por reordenamiento E, definido sobre un espacio de medida resonante (Ω, Σ, μ), se puede definir la función fundamental de E, denotada por φ_E y dada por

$$\varphi_E(t) = \|\chi_A\|_E.$$

para cada valor finito de t que pertenece al rango de μ, donde A es cualquier subconjunto de Ω con $\mu(A) = t$.

Si se involucra el espacio asociado de E, se puede probar la relación

$$\varphi_E(t)\varphi_{E'}(t) = t$$

para cada valor de t en el rango de μ. Una desigualdad viene dada por la de Hölder, y es válida por tanto en cualquier espacio de funciones de Banach, mientras que la otra es consecuencia de la propiedad (J), satisfecha, entre otros, por los espacios invariantes por reordenamiento.

Unas propiedades que cumple toda función fundamental φ_E son:

- φ_E es creciente.
- $\varphi_E(t) = 0$ sii $t = 0$.
- $\frac{\varphi_E(t)}{t}$ es decreciente.
- φ_E es continua, salvo quizás en el origen.

A una función que cumple los tres primeros puntos se le dice cuasicóncava.

El resultado que recoge el estudio de los subespacios E_a y E_b en los espacios invariantes por reordenamiento es el siguiente.

Teorema 1.38 ([BeSh, pp. 67-68]) *Sea E es un espacio invariante por reordenamiento definido sobre un espacio de medida resonante (Ω, Σ, μ). Entonces:*

- *Si (Ω, Σ, μ) es puramente atómico, formado por una cantidad a lo sumo numerable de átomos de igual medida, entonces se tiene que:*
  - $E_a = E_b$.
  - $(E_b)^* = E'$.
  - E_b *es separable.*
- *Si (Ω, Σ, μ) es σ-finito y sin átomos, entonces se tiene que:*
  1. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*
     - $\lim_{t \to 0^+} \varphi_E(t) = 0$.

– $E_a = E_b$.
– $(E_b)^* = E'$.

Si, además, μ es separable, las anteriores condiciones equivalen también a

– E_b *es separable.*

2. *Si* $\lim_{t\to 0^+} \varphi_E(t) > 0$ *entonces* $E_a = \{0\}$.

En adelante se utilizará la notación $\varphi_E(0^+) := \lim_{t\to 0^+} \varphi_E(t)$.

1.5.1 Los espacios de Lorentz Λ y M

En los espacios invariantes por reordenamiento definidos sobre espacios de medida resonante se puede encontrar siempre una norma equivalente, también invariante por reordenamiento, y de manera que su función fundamental es cóncava. La concavidad es una necesidad técnica de cara a la definición de dos espacios particulares, unívocamente determinados por dicha función.

En efecto, para una función fundamental puede existir una variedad de espacios que la tenga como función fundamental propia. Los espacios de Lorentz, que ahora introducimos, asociados a cada función fundamental tienen la particularidad de "encajonar" al resto de espacios que comparte dicha función fundamental.

Definición 1.39 ([BeSh, p. 71], Los espacios de Lorentz $\Lambda(E)$ y $M(E)$) *Sea E un espacio invariante por reordenamiento definido sobre un espacio de medida resonante, y φ_E la función fundamental de E, elegida cóncava (renormando E si es necesario). Sea I el intervalo $(0, \mu(\Omega)]$ o bien $(0, \infty)$ según estemos tratando con medida finita o infinita, respectivamente. El espacio de Lorentz $M(E)$ se define como el que contiene todas las funciones medibles finitas μ-casi por todas partes f tales que*

$$\|f\|_{M(E)} = \sup_{t\in I} f^{**}(t)\varphi_E(t)$$

es finito. El espacio de Lorentz $\Lambda(E)$ se define como el que contiene todas las funciones medibles finitas μ-casi por todas partes f tales que

$$\|f\|_{\Lambda(E)} = \int_I f^*(t)d\varphi_E(t)$$

es finito.

Nótese que por ser φ_E creciente, la integral está bien definida. Además, por ser no negativa y cóncava, φ_E se puede escribir como integral de una función, pongamos ϕ, definida en I. Así la integral de Riemann-Stieltjes se puede escribir

$$\|f\|_{\Lambda(E)} = \|f\|_\infty \varphi_E(0^+) + \int_I f^*(t)\phi(t)dt.$$

El resultado principal se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 1.40 ([BeSh, p. 72]) *Si E es un espacio invariante por reordenamiento definido sobre un espacio de medida resonante, con función fundamental φ_E cóncava, entonces los espacios de Lorentz $\Lambda(E)$ y $M(E)$ son espacios de funciones de Banach invariantes por reordenamiento, y tienen como función fundamental φ_E. Más aún,*

$$\Lambda(E) \subset E \subset M(E).$$

Es decir, $\Lambda(E)$ y $M(E)$ son, respectivamente, el menor y el mayor de los espacios invariantes por reordenamiento con función fundamental φ_E.

Para el estudio de la parte absolutamente continua y de la clausura de las simples de estos espacios de Lorentz, exponemos dos lemas sencillos pero de gran utilidad.

Lema 1.41 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{K}$ y $\alpha > 0$. Denotemos $A = \{w \in \Omega : |f(w)| > \alpha\}$. Entonces*

- $\mu_{f\chi_A}(\lambda) = \begin{cases} \mu_f(\alpha) & 0 < \lambda < \alpha \\ \mu_f(\lambda) & \lambda \geq \alpha \end{cases}$
- $(f\chi_A)^*(t) = \begin{cases} f^*(t) & 0 < t < \mu_f(\alpha) \\ 0 & t \geq \mu_f(\alpha) \end{cases}$
- $(f\chi_A)^{**}(t) = \begin{cases} f^{**}(t) & 0 < t < \mu_f(\alpha) \\ \frac{\mu_f(\alpha)}{t} f^{**}(\mu_f(\alpha)) & t \geq \mu_f(\alpha) \end{cases}$

Además, si B es un medible cualquiera de manera que $\mu(B) \leq \mu(A)$, entonces

$$\mu_{f\chi_B} \leq \mu_{f\chi_A}, \qquad (f\chi_B)^* \leq (f\chi_A)^* \quad \text{y} \quad (f\chi_B)^{**} \leq (f\chi_A)^{**}$$

Prueba: Para probar la parte correspondiente a la función de distribución basta darse cuenta de que si $0 < \lambda < \alpha$,

$$\{w \in \Omega : |(f\chi_A)(w)| > \lambda\} = \{w \in \Omega : |f(w)| > \alpha\},$$

y si $\alpha \leq \lambda$,

$$\{w \in \Omega : |(f\chi_A)(w)| > \lambda\} = \{w \in \Omega : |f(w)| > \lambda\}.$$

Las otras funciones salen de forma inmediata a partir de la función de distribución.

La segunda parte del lema es inmediata: Por un lado, la desigualdad trivial $|f\chi_B| \leq |f|$ produce la desigualdad $\mu_{f\chi_B} \leq \mu_f$, que se puede leer como $\mu_{f\chi_B}(\lambda) \leq \mu_{f\chi_A}(\lambda)$ para $\lambda \geq \alpha$. En el caso $0 < \lambda < \alpha$ se puede razonar que

$$\mu_{f\chi_B}(\lambda) \leq \mu(B) \leq \mu(A) = \mu_{f\chi_A}(\lambda)$$

y el lema queda probado. □

Lema 1.42 *Sea f un función escalar no acotada y $(A_n)_n$ una sucesión de medibles decreciente a $\varnothing$, con $\mu(A_n) > 0$ para $n = 1, 2, \ldots$. Entonces existe una sucesión $(\lambda_k)_k$ de números no negativos estrictamente creciente a $+\infty$, y una subsucesión $(A_{n_k})_k$ de $(A_n)_n$ de manera que, si denotamos $B_k = \{w : |f(w)| > \lambda_k\}$, entonces*

$$\mu(A_{n_k}) > \mu(B_k) > \mu(A_{n_{k+1}}) > \mu(B_{k+1})$$

y

$$\|f\chi_{A_{n_{k+1}}}\|_{\Lambda(E)} \leq \|f\chi_{B_k}\|_{\Lambda(E)}$$

para k=1,2,....

Al ser f no acotada se tiene que

$$\lambda \to +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_f(\lambda) \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f^*(\mu_f(\lambda)) \to +\infty$$

Entonces para $A_{n_1} = A_1$, existe un $\lambda_1 > 0$ de manera que $\mu_f(\lambda_1) < \mu(A_{n_1})$. Por la condición sobre la sucesión $(A_n)_n$, podemos encontrar un A_{n_2} de manera que $\mu(A_{n_2}) < \mu_f(\lambda_1)$ y buscar entonces el valor de λ_2. Mediante este proceso se encuentran ambas sucesiones de manera natural. La desigualdad de normas es trivial por la relación que guardan $A_{n_{k+1}}$ y B_k, y por el lema previo. $\square$

Si trabajamos con una norma funcional para la cual $\varphi(0^+) > 0$, el estudio de la parte absolutamente continua es trivial de 1.38. En el otro caso se tiene lo siguiente.

Proposición 1.43 *Sea E un espacio invariante por reordenamiento definido sobre un espacio de medida resonante, de manera que $\varphi_E(0^+) = 0$, y $M(E)$ y $\Lambda(E)$ los espacios de Lorentz asociados. Entonces:*

- $\Lambda(E)_a = \Lambda(E)$
- $M(E)_a = \{f \in M(E) : \lim_{t \to 0} f^{**}(t)\varphi_E(t) = 0\}$

Prueba: (I) Para cada función f de $\Lambda(E)$

$$\|f\|_{\Lambda(E)} = \int_I f^*(t)\phi(t)dt < \infty,$$

donde ϕ es la función decreciente y no negativa que cumple

$$\varphi_E(t) = \int_0^t \phi(s)ds.$$

Sea $f \in \Lambda(E)$ y $(A_n)_n$ una sucesión de medibles decreciente a $\varnothing$. Si f es acotada, entonces

$$\|f\chi_{A_n}\|_{\Lambda(E)} \leq \|f\|_\infty \|\chi_{A_n}\|_{\Lambda(E)} = \|f\|_\infty \varphi_E(\mu(A_n)),$$

lo cual tiende a 0 cuando n tiende a ∞. Si f no es acotada, usamos el lema previo (incluida su notación) para escribir

$$\|f\chi_{A_{n_{k+1}}}\|_{\Lambda(E)} \leq \|f\chi_{B_k}\|_{\Lambda(E)} = \int_I (f\chi_{B_k})^*(s)\phi(s)ds = \int_0^{\mu(B_k)} f^*(s)\phi(s)ds.$$

Haciendo $k \to \infty$, por el teorema de la convergencia dominada, la expresión tiende a 0, de lo que se deduce que $f \in \Lambda(E)_a$.

(II) Sea $f \in M(E)_a$, e intentemos probar la condición del límite. Para ello distinguimos tres casos:

(1) f no acotada.

(2) f acotada y $\mu(\{w : |f(w)| = \|f\|_\infty\}) = 0$.

(3) f acotada y $\mu(\{w : |f(w)| = \|f\|_\infty\}) > 0$.

Según el caso tomamos la sucesión de medibles $(A_n)_n$, decreciente a $\varnothing$,

(1) $A_n = \{w : |f(w)| > n\}$.

(2) $A_n = \{w : |f(w)| > \lambda_n\}$ donde $\lambda_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$.

(3) $(A_n)_n$ es cualquier sucesión de medibles decreciente a $\varnothing$ contenida en el conjunto $\{w : |f(w)| = \|f\|_\infty\}$.

En todos los casos, y aplicando el lema 1.41,

$$\begin{aligned}
\|f\chi_{A_n}\|_{M(E)} &= \sup_{t>0}(f\chi_{A_n})^{**}(t)\varphi_E(t) \\
&= \max\left\{\sup_{0<t<\mu(A_n)} f^{**}(t)\varphi_E(t), \sup_{t\geq\mu(A_n)} f^{**}(\mu(A_n))\frac{\mu(A_n)}{t}\varphi_E(t)\right\} \\
&= \sup_{0<t\leq\mu(A_n)} f^{**}(t)\varphi_E(t)
\end{aligned}$$

Dado que $\|f\chi_{A_n}\|_{M(E)}$ tiende a 0 por la condición sobre f, entonces es obvio que $\lim_{t\to 0} f^{**}(t)\varphi_E(t) = 0$.

Recíprocamente, si f es una función de $M(E)$ que cumple la condición del límite, sea $(A_n)_n$ una sucesión arbitraria de medibles decreciente a $\varnothing$. En caso de ser f acotada

$$\|f\chi_{A_n}\|_{M(E)} \leq \|f\|_\infty \|\chi_{A_n}\|_{M(E)} = \|f\|_\infty \varphi_E(\mu(A_n))$$

que tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Cuando f es no acotada, le aplicamos el lema 1.42 con la sucesión $(A_n)_n$, encontrando los conjuntos $(B_k)_k$ de modo que

$$\|f\chi_{A_{n_{k+1}}}\|_{M(E)} \leq \|f\chi_{B_k}\|_{M(E)} = \sup_{0<t\leq\mu(B_k)} f^{**}(t)\varphi_E(t)$$

y por tanto $\|f\chi_{A_n}\|_{M(E)}$ tiende a 0 y $f \in M(E)_a$. $\square$

Corolario 1.44 *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Se tiene que:*

- $\Lambda(E)_a = \Lambda(E)$ *sii* $\varphi_E(0^+) = 0$.
- *El conjunto de funciones simples es denso en* $M(E)$ *si* $\varphi_{E'}(0^+) > 0$.

Prueba: La primera afirmación es consecuencia de 1.38 y la proposición anterior, puesto que $\varphi_{\Lambda(E)} = \varphi_E$.

Sea f una función cualquiera de $M(E)$. Para empezar, dado que f^{**} no es idénticamente infinita, tenemos que

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^t f^*(s)ds = 0.$$

Con esto y la hipótesis,

$$\lim_{t\to 0^+} f^{**}(t)\varphi_E(t) = \lim_{t\to 0^+} \left(\int_0^t f^*(s)ds\right) \frac{1}{\varphi_{E'}(t)} = 0$$

y por tanto $f \in M(E)_a \subset M(E)_b$. □

Ahora se procede a presentar una característica del espacio de Lorentz $\Lambda(E)$ que lo hace sumamente manejable a la hora de tratar los operadores lineales y continuos.

Lema 1.45 *Sea E un espacio invariante por reordenamiento y*

$$s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k} = \sum_{k=1}^n \beta_k \chi_{B_k}$$

una función simple no negativa expresada de dos formas: una donde los coeficientes α_k son positivos y ordenados de manera decreciente, y los medibles A_k son disjuntos dos a dos; y otra donde los β_k son positivos, y los medibles B_k forma unan familia creciente.

Entonces se tiene que

$$\|s\|_{\Lambda(E)} = \sum_{k=1}^n \beta_k \|\chi_{B_k}\|_{\Lambda(E)}$$

y además, para cada medida F finitamente aditiva y para cada operador T lineal de $\Lambda(E)$ en un espacio X,

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k F(A_k) = \sum_{k=1}^n \beta_k F(B_k), \qquad T(\sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}) = T(\sum_{k=1}^n \beta_k \chi_{B_k}).$$

Prueba: Si la función simple s viene expresada de las dos formas descritas, es fácil comprobar que se tiene la relación $\beta_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$ y $\beta_n = \alpha_n$, mientras que $B_k = \cup_{j=1}^k A_j$. Una vez vista esta observación basta con reescribir $\sum_k \beta_k F(B_k)$ y $T(\sum_k \beta_k \chi_{B_k})$ usando la aditividad de F y T. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\|\sum_{k=1}^{n} \beta_k \chi_{B_k}\|_{\Lambda(E)} &= \int_0^\infty (\sum_{k=1}^{n} \beta_k \chi_{B_k})^*(s) d\varphi_E(s) \\
&= \int_0^\infty (\sum_{k=1}^{n} \beta_k \chi_{(0,\mu(B_k))})(s) d\varphi_E(s) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \beta_k \int_0^{\mu(B_k)} d\varphi_E(s) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \beta_k \|\chi_{B_k}\|_{\Lambda(E)}.
\end{aligned}$$

□

Esta propiedad que posee el espacio $\Lambda(E)$ es muy ventajosa para probar la acotación de operadores con dominio en dicho espacio, como se recoge en el siguiente lema.

Lema 1.46 *Sea E un espacio invariante por reordenamiento y X un espacio de Banach arbitrario. Sea T un operador lineal definido en el conjunto de funciones simples y con valores en X para el cual existe una constante $C > 0$ de manera que $\|T(\chi_A)\|_X \leq C\|\chi_A\|_E$ para todo $A \in \Sigma$. Entonces $T : \Lambda(E)_b \to X$ es continuo sobre $\Lambda(E)_b$.*

El siguiente resultado muestra la relación que existe entre espacios de Lorentz de espacios invariantes por reordenamiento asociados.

Proposición 1.47 *Sea E un espacio invariante por reordenamiento definido sobre un espacio de medida resonante, y E' su asociado. Entonces $[\Lambda(E)_b]' = M(E')$.*

Prueba: (I) Sea $f \in M(E')$ y $T_f : \Lambda(E) \to \mathbb{R}$ el operador lineal $T_f(g) = \int_\Omega fgd\mu$ para $g \in \Lambda(E)$. Si A es un medible de medida finita t,

$$\begin{aligned}
T_f(\chi_A) = \int_A fd\mu \leq \int_0^t f^*(s)ds = tf^{**}(t) = f^{**}(t)\varphi_{E'}(t)\varphi_E(t) \leq \\
\leq \|f\|_{M(E')}\|\chi_A\|_E.
\end{aligned}$$

Aplicando el lema anterior deducimos que $f \in [\Lambda(E)_b]'$.

(II) Sea $f \in [\Lambda(E)_b]'$. Entonces para cada $A \in \Sigma$ de medida finita, $|\int_A fd\mu| \leq C\|\chi_A\|_E$, por lo que $\int_0^{\mu(A)} f^*(s)ds \leq C\|\chi_A\|_E$. Para cada $t > 0$ elegimos A medible con $\mu(A) = t$. Tenemos entonces que $f^{**}(t)\varphi_{E'}(t) \leq C$, y por tanto que $\|f\|_{M(E')} \leq C$.

Es fácil ver que se trata de una isometría. □

Corolario 1.48 *Sea E un espacio invariante por reordenamiento definido sobre un espacio de medida resonante, y E' su asociado. Entonces:*

- $M(E)' = \Lambda(E')_b$.
- $M(E)^* = \Lambda(E')_b$ *si* $\varphi_{E'}(0^+) > 0$.
- $\Lambda(E)^* = M(E')$ *si* $\varphi_E(0^+) = 0$.
- $\Lambda(E)^* = M(E^*)$ *si E tiene norma absolutamente continua.*

Por último mencionamos que dentro de la familia de espacios invariantes por reordenamiento, dos espacios de Lorentz merecen ser comentados. Éstos son $L^1 \cap L^\infty$ y $L^1 + L^\infty$, y su particularidad viene expresada en la siguiente proposición.

Proposición 1.49 *Sea E un espacio arbitrario de funciones de Banach invariante por reordenamiento definido sobre un espacio de medida resonante. Entonces*

$$L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E \hookrightarrow L^1 + L^\infty.$$

Más aún, la norma en E se puede reemplazar por un múltiplo constante de sí misma de manera que las inclusiones continuas descritas tengan norma 1. Además

$$\Lambda(L^1 \cap L^\infty) = L^1 \cap L^\infty = M(L^1 \cap L^\infty)$$

y

$$\Lambda(L^1 + L^\infty) = L^1 + L^\infty = M(L^1 + L^\infty).$$

1.6 Sobre espacios de funciones de Köthe-Bochner

Si bien los espacios de funciones de Banach (también llamados espacios de Riesz o espacios de Köthe) son los protagonistas en la formulación de las variaciones de medidas vectoriales, y dentro de éstos merecen una especial atención aquellos que son invariantes por reordenamiento, los verdaderos sujetos de este estudio son los espacios de funciones Banach con valores vectoriales, llamados espacios de Köthe-Bochner.

Uno de nuestros objetivos es describir en términos de medidas vectoriales los operadores lineales y continuos que tienen como espacio de salida los espacios de Köthe-Bochner, y como llegada un espacio de Banach arbitrario. Con esa intención exponemos las definiciones y propiedades básicas de estos espacios, así como otras propiedades relacionadas con el desarrollo posterior del trabajo. Una referencia sobre este tipo de espacios de funciones vectoriales es [88].

Definición 1.50 *Sea E un espacio de funciones de Banach (como en 1.4) y X un espacio de Banach arbitrario.*

Para cada función $f : \Omega \to X$, se denota por $\|f\|_X : \Omega \to [0, \infty]$ la función

$$\|f\|_X(w) = \|f(w)\|_X.$$

El espacio de Köthe-Bochner se define por

$$E(X) = \{f : \Omega \to X \ : \ f \, medible, \ \|f\|_X \in E\}.$$

En estos espacios también vamos a destacar los importantes subespacios de la "parte absolutamente continua" y "clausura de las simples", que denotaremos por $E(X)_a$ y $E(X)_b$. Es decir, $E(X)_a$ estará compuesto por las funciones medibles f de $E(X)$ de manera que $\|f\chi_{A_n}\|_{E(X)} \xrightarrow{n} 0$ para cualquier sucesión $A_n \xrightarrow{n} \varnothing$ (ver p. 24). Por su parte se entenderá por $E(X)_b$ la clausura del conjunto de las funciones simples vectoriales.

Se puede comprobar fácilmente la relación $E(X)_a = E_a(X)$. Sin embargo en el otro caso se puede ver que $E(X)_b \subset E_b(X)$, siendo la igualdad entre ambos falsa, por ejemplo, si $E = L^\infty(m, [0,1])$ y X cualquier espacio de dimensión infinita.

Sin embargo,

Lema 1.51 *Si E es un espacio de funciones de Banach con norma absolutamente continua y X es un Banach, entonces el conjunto de funciones simples es denso en el espacio de Kthe- Bochner $E(X)$.*

Prueba: En efecto, el teorema de Egoroff nos proporciona para cada $\delta > 0$ una sucesión de funciones simples vectoriales $(s_n)_n$ de manera que $\|s_n\|_X \leq \|f\|_X$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además $s_n \to f$ uniformemente en cierto medible $\Omega \setminus A$ donde A es tal que $\mu(A) \leq \delta$. La desigualdad

$$\|f - s_n\|_{E(X)} \leq \|(f - s_n)\chi_A\|_{E(X)} + 2\|f\|_{E(X)}\|\chi_A\|_E$$

muestra que podemos encontrar una función simple tan cercana a f para la norma de $E(X)$ como se desee (véase el papel crucial de la relación $E = E_a$). $\square$

La propiedad (J), definida en principio para espacios de funciones escalares, también puede verse extendida a espacios de funciones vectoriales, dándose además el caso de ser satisfecha por los espacios de Köthe-Bochner $E(X)$ siempre que E sea invariante por reordenamiento (o bien posea la propiedad (J) en sí mismo). La prueba es consecuencia del caso escalar y de la desigualdad integral de Minkowski. También resulta del caso escalar la igualdad

$$\|f\|_{E(X)} = \sup\{\|E_\pi(\|f(\cdot)\|_X)\|_E \ : \ \pi \in D_\Omega\}$$

para toda $f \in E(X)$, con las mismas observaciones que en ese caso se hacían (ver p. 29).

Los espacios de Köthe-Bochner están siendo objeto de estudio en la última década, principalmente en su vertiente geométrica, destacando los trabajos de A. Kamińska [Kam] (sobre nociones como son el tipo y cotipo de Rademacher, la

p-convexidad y q-concavidad, y la p-estimación superior y q-estimación inferior) y de J. Cerdà, H. Hudzik y M. Mastyło [30] (sobre propiedades locales, como puntos LUR, puntos expuestos y fuertemente expuestos, puntos "smooth", puntos locamente uniformemente monótonos), además de [63, 64, 57, 53, 54, 70, 103, 104, 28, 29, 33] y otros, siendo [45] un trabajo pionero. Trabajos recientes relativos al estudio de compacidades en estos espacios son [34, 39, 94, 95], mientras que en [48] se da una respuesta a la pregunta originada en [22] acerca de cómo una propiedad que comparten un espacio de funciones de Banach E y un espacio de Banach arbitrario X pasa al espacio de Köthe-Bochner formado por ellos $E(X)$, y viceversa. Otro trabajo en esta línea es [23]

Como se muestra en la proposición 1.17, las medidas vectoriales han servido para describir operadores lineales y continuos desde un espacio de Lebesgue a otro espacio de Banach. Con la generalización de la p-variación dada por N. E. Gretsky en [Gret], operadores lineales y continuos con espacio de partida un espacio de funciones de Banach han sido descritos en términos de medidas. En [GrUh] se trata con espacios de operadores lineales y continuos con espacio de partida un espacio de Köthe-Bochner y llegada un espacio de Banach arbitrario, obteniendo, como caso particular, la descripción del dual de estos espacios en función de las medidas. Así pues, se obtienen teoremas en los que los operadores lineales y continuos desde un espacio de Köthe-Bochner en un espacio de Banach se representan mediante integrales (de Bartle) de medidas vectoriales cuya ρ-variación es finita. Se obtienen isomorfismos que se convierten en isometrías cuando la norma del espacio de funciones de Banach correspondiente satisface la (SFP).

En la escuela rusa destacan los trabajos de A. V. Bukhvalov [19, 20, 21, 24] y el de A. V. Bukhvalov y G. Ja. Lozanowskiĭ [25].

De entre la gran cantidad de resultados que existen en la literatura actual sobre la geometría de espacios de Köthe-Bochner, extraemos, en uno sólo, dos teoremas de [Kam], básico para la prueba del cálculo explícito que se realiza en esta memoria del tipo y cotipo de Rademacher de una familia de espacios de sucesiones: los espacios de sucesiones de Nakanos vectoriales (ver p. 119).

Teorema 1.52 ([Kam]) *Sea $E(X)$ un espacio de Köthe-Bochner, y sea $q \geq 2$. Si E es q-cóncavo y X tiene cotipo q, entonces $E(X)$ tiene cotipo q.*

Sea $E(X)$ un espacio de Köthe-Bochner, y sea $1 \leq p \leq 2$. Si E es p-convexo y r-cóncavo para algún $r < \infty$, y X tiene tipo p, entonces $E(X)$ tiene tipo p.

Capítulo II

Medidas de E-variación finita

2.1 Introducción a la E-variación

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva finito y completo, y X un espacio de Banach arbitrario. Consideremos una función de conjunto $F : \Sigma \to X$ finitamente aditiva. Remitimos al lector a las páginas 7 y 10 para recordar los conceptos de variación total y p-variación de una medida vectorial.

Es obvio que la expresión

$$\sup\{\sum_{A\in\pi} \left(\frac{\|F(A)\|_X^p}{\mu(A)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \ : \ \pi \in D_\Omega\}$$

equivale a

$$\sup\{\| \sum_{A\in\pi} \frac{\|F(A)\|_X}{\mu(A)}\chi_A\|_p : \ \pi \in D_\Omega\} \qquad (*)$$

y logra expresar la p-variación de la medida F como supremo de normas en el espacio L^p de funciones simples relacionadas con F (a cada una de estas funciones simples se le suele llamar función proyección de F sobre la partición π). Los espacios de funciones de Orlicz L^Φ podían dar lugar, de forma similar al caso Lebesgue, a una Φ-variación, y ello se desarrolla en [115]. La definición de Φ-variación que presenta en dicho trabajo ya contiene la filosofía de la proyección de las medidas en funciones simples, aunque no utiliza una expresión paralela a (*) para normar el espacio de medidas, sino que usa las normas de Luxemburg y Orlicz, propias de este tipo de espacios de funciones. Sin embargo, una breve comprobación demuestra que la norma de Luxemburg allí descrita se corresponde, exactamente, con la adaptación de la definición (*) al caso Orlicz.

Esta idea es, sin duda, el punto de partida de una generalización que vendría de la mano de N. E. Gretsky en [Gret] y continuaría pocos años más tarde en el artículo de N. E. Gretsky y J. J. Uhl [GrUh].

J. J. Uhl contina en [115] con teoremas de representación de operadores con dominio en un espacio de Orlicz de funciones vectoriales, dualidad de éstos, y otros relativos a la (RNP), etc. (para una consulta sobre espacios de Orlicz se puede acudir al artículo de W. Orlicz [97] o a [66, 62] entre otros).

En la tesis de licenciatura [42] se hace un repaso a la teoría de los espacios de Orlicz y a las medidas vectoriales de Φ-variación finita, describiendo las relaciones entre espacios de medidas y operadores lineales y continuos (como en [115]) e incluyendo la clase de operadores de Dinculeanu ([116]). Además se prueba la equivalencia entre la Φ-variación dada en [115] y la expresión (inspirada en la definición 1.14 o bien en la norma de Orlicz existente en esta clase de espacios)

$$\sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \|F(A)\|_X \ : \ \pi \in D_\Omega, \ \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A\|_{L^\Psi} \leq 1\},$$

donde Ψ es función complementaria de Φ en cierto sentido (no entramos ahora en la teoría de espacios de Orlicz).

Un año después de la aparición del artículo de J. J. Uhl [115], aparece en "Memoirs of the American Mathematical Society" un trabajo de N.E. Gretsky titulado "Representation theorems on Banach function spaces" [Gret], que constituye el grueso de su tesis doctoral. En este trabajo se presenta una introducción sobre los espacios de funciones de Banach, mientras que los problemas considerados son la obtención de representaciones integrales para operadores lineales y continuos que parten: (1) de un espacio de Banach arbitrario y llegan a un espacio de funciones de Banach, o (2) de un espacio de funciones de Banach a un espacio de Banach arbitrario. Con este fin, Gretsky introduce los conceptos de: (1) ρ-variación acotada para medidas vectoriales con valores en un espacio dual, y (2) ρ'-variación acotada para medidas vectoriales. Con ellos puede describir en términos de medidas los espacios duales de espacios de funciones de Banach escalares, mientras que para la representación de operadores lineales y continuos debe restringir la familia de espacios de funciones de Banach a una subfamilia, determinada por una condición de acotación uniforme de promedios.

La nueva variación, que toma como referencia un espacio de funciones de Banach con la citada propiedad de acotación uniforme (ver capítulo 1), toma la forma

$$|F|_\rho = \sup\{\rho(\sum_{A\in\pi} \frac{\|F(A)\|_X}{\mu(A)} \chi_A) : \ \pi \in D_\Omega\}$$

donde $\rho(\cdot)$ representa la norma en el espacio de funciones. Ésta mantiene la apariencia de supremo de las normas de funciones simples en el espacio correspondiente. Las cuestiones relativas a la representación de operadores lineales y continuos como integrales de medidas, la dualidad de espacios de funciones de Banach con valores vectoriales (Köthe-Bochner), nuevas equivalencias de la (RNP), etc., mantienen vigencia ([Gret, GrUh, 67]), probando que su teoría contiene una generalización correcta de los conceptos clásicos.

Más adelante, N. E. Gretsky y J. J. Uhl continan el trabajo en [GrUh] donde, además de completar teoremas de representación, caracterizan el espacio dual de muchos espacios de funciones de Banach vectoriales, cosa que aplican para caracterizar espacios cuyos duales sean también espacios de funciones de Banach vectoriales.

El éxito de esta generalización radica en la propiedad (J) que se asume sobre los espacios de funciones de Banach (ver p. 29).

En nuestro caso, E denotará siempre un espacio de funciones de Banach definido sobre el espacio de medida positiva finito y completo (Ω, Σ, μ), tal y como se define en 1.23, que satisface la propiedad de Fatou fuerte (SFP).

Tras esta introducción, la definición que se propone para la variación de una medida vectorial en espacios de funciones de Banach arbitrarios es la siguiente.

Definición 2.1 *Sea E un espacio de funciones de Banach arbitrario definido sobre (Ω, Σ, μ) y X un espacio de Banach cualquiera. Para cada medida $F : \Sigma \to X$ finitamente aditiva definimos la E-variación como*

$$|F|_E := \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \, \|F(A)\| : \quad \pi \in D_\Omega, \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A \|_{E'} \leq 1\},$$

donde E' es el espacio asociado a E y D_Ω representa el conjunto de particiones finitas de Ω. Se dirá que una medida F tiene E-variación acotada (o finita) si $|F|_E < \infty$. Definimos el conjunto $V_E(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ como el de las medidas $F : \Sigma \to X$ finitamente aditivas, absolutamente continuas respecto de la medida μ y de E-variación acotada. Se denotará por $V_E(\mu, X)$ o bien $V_E(X)$ para abreviar cuando no haya lugar a confusión, y le llamaremos espacio de medidas de E-variación finita.

Cuando un espacio de funciones de Banach satisface la propiedad (J), esta variación coincide exactamente con la dada en [Gret, GrUh] (ver p. 72).

2.2 Propiedades básicas

Un lema previo recoge propiedades inmediatas de la definición.

Lema 2.2 *En las condiciones de la definición previa se tiene que:*
(1) *Sean $F \in V_E(X)$ y $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$ una función simple. Entonces*

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j| \, \|F(A_j)\| \leq |F|_E \|s\|_{E'}.$$

(2) *Sea $F \in V_E(X)$. Entonces F tiene variación total finita.*
(3) *Si E' tiene norma absolutamente continua y F es una medida con $|F|_E < \infty$, entonces F es μ-continua.*
(4) *Si $E_1 \subset E_2$, entonces $V_{E_1}(X) \subset V_{E_2}(X)$.*

Prueba: (1) es inmediato de la definición usando la función simple $\frac{1}{\|s\|_{E'}} s$.

(2) Sea A un conjunto medible, y $\{A_j\}_{j=1}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) una partición arbitraria de A. Entonces por (1),

$$\sum_{j=1}^n \|F(A_j)\| \leq |F|_E \, \|\sum_{j=1}^n \chi_{A_j}\|_{E'} = |F|_E \, \|\chi_A\|_{E'} < \infty.$$

Con lo cual tenemos la estimación $|F|(A) \leq |F|_E \|\chi_A\|_{E'}$.

(3) Sea A un conjunto medible cualquiera. Aplicando la parte (1) con la función simple χ_A, tenemos la desigualdad

$$\|F(A)\|_X \leq |F|_E \, \|\chi_A\|_{E'}.$$

La hipótesis sobre E' equivale a la condición de límite

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \|\chi_A\|_{E'} = 0,$$

por lo que

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \|F(A)\|_X = 0$$

y por tanto $F \ll \mu$.

(4) La relación de contenido entre dos espacios de Banach incide en una desigualdad de normas (ver teorema 1.24), que se invierte en los respectivos asociados (p. 24). Así, existe una constante $C > 0$ de manera que $\|f\|_{E_1'} \leq C\|f\|_{E_2'}$ para cada función f. Usando una función simple arbitraria s como en la parte (1) tenemos

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j| \, \|F(A_j)\|_X \leq |F|_{E_1} \|s\|_{E_1'} \leq C|F|_{E_1} \|s\|_{E_2'}.$$

Por tanto $|F|_{E_2} \leq C|F|_{E_1}$. □

Ejemplos 2.3 *Los ejemplos de espacios de medidas que se acogen a esta definición son los conocidos $V^p(X)$ y $V^\Phi(X)$ para $p \in [1, \infty]$ y Φ función de Young.*

Proposición 2.4 $(V_E(X), |\cdot|_E)$ *es un espacio de Banach.*

Prueba: Las propiedades de norma para $|\cdot|_E$ son fácilmente comprobables. Para ver que la completitud tomamos una sucesión de Cauchy arbitraria $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ en $V_E(X)$. Para cada $A \in \Sigma$ tenemos que $\{F_n(A)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach X, y por tanto convergente, pues

$$\|F_n(A) - F_m(A)\|_X \leq \|\chi_A\|_{E'} |F_n - F_m|_E.$$

Entonces podemos definir la función de conjunto finitamente aditiva F como límite puntual $F(A) := \lim_n F_n(A)$, que resulta ser numerablemente aditiva y μ-continua (ver [DiUh, p. 24]).

Para probar la convergencia observamos primero que si $s = \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A$ es una función simple con $\|s\|_{E'} \le 1$, entonces

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\, \|F_m(A) - F(A)\|_X = 0.$$

Procedemos ahora por reducción al absurdo y suponemos que existe un $\varepsilon_0 > 0$ de manera que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un $n_k \ge k$ y una función simple $s_k = \sum_{A_k\in\pi_k} \alpha_{A_k}\chi_{A_k}$ tales que

$$\varepsilon_0 < \sum_{A_k\in\pi_k} |\alpha_{A_k}|\, \|F_{n_k}(A_k) - F(A_k)\|_X.$$

Si se toma $k = n(\frac{\varepsilon_0}{2})$, procedente de aplicar la definición de sucesión de Cauchy a $\{F_n\}_n$ con $\frac{\varepsilon_0}{2} > 0$, encontramos un $n_k \ge k$ y una función simple $s = \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A$ concreta con $\|s\|_{E'} \le 1$ y satisfaciendo las desigualdades

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &< \sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\, \|F_{n_1}(A) - F(A)\|_X \\ &\le \sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\, \|F_{n_1}(A) - F_m(A)\|_X + \sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\, \|F_m(A) - F(A)\|_X \end{aligned}$$

para cualquier $m \ge n(\frac{\varepsilon_0}{2})$

$$\begin{aligned} &\le |F_{n_1} - F_m|_E + \sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\, \|F_m(A) - F(A)\|_X \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} + \sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\, \|F_m(A) - F(A)\|_X. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\, \|F_m(A) - F(A)\|_X > \frac{\varepsilon_0}{2}$$

para todo $m \ge n(\frac{\varepsilon_0}{2})$, lo cual contradice la observación hecha anteriormente. Así, $F_n \to F$ en $V_E(X)$ y $F \in V_E(X)$ pues

$$|F|_E \le |F - F_n|_E + |F_n|_E < \infty.$$

□

El lema 2.2 nos dice que si F es una medida vectorial de $V_E(X)$, entonces la medida variación total de F es también una medida finita y μ-continua como F. Se plantea el cálculo de la E-variación de la medida positiva $|F|$, siendo la respuesta sencilla y satisfactoria, obteniéndose además resultados que servirán para probar relaciones entre espacios de medidas y de operadores o de funciones. La idea de involucrar a la medida variación total aparece en [Blsc] y [12] en contextos de espacios de medidas de p-variación y Φ-variación finita, respectivamente. En efecto, la prueba del siguiente lema es similar a la de [Blsc, p. 5].

Lema 2.5 *Para $F \in V_E(X)$ tenemos que*

$$|F|_E = \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\, |F|(A) : \quad \pi \in D, \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A\|_{E'} \leq 1\}.$$

Un corolario importante de esa reescritura de la norma en $V_E(X)$ es

Proposición 2.6 *Son equivalentes:*

- *$F \in V_E(X)$,*
- *Existe $\varphi \geq 0$, $\varphi \in E$ tal que*

$$|F|(A) = \int_A \varphi d\mu, \qquad A \in \Sigma.$$

Además $\|\varphi\|_E = |F|_E$.

Prueba: Si $F \in V_E(X)$, la función de conjunto $|F|$ es finita y μ-continua. Por tanto existe una función $\varphi \in L^1$ que será no negativa y que representa a $|F|$ en la forma que expresa el enunciado (teorema de Radon-Nikodým). Además, como E se toma con la (SFP),

$$\|\varphi\|_E = \sup\{\textstyle\int_\Omega \varphi\psi d\mu : \quad \|\psi\|_{E'} \leq 1\}.$$

Aproximando el supremo con funciones simples y aplicando la relación entre φ y $|F|$ se tiene que

$$\|\varphi\|_E = \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\, |F|(A) : \quad \pi \in D, \ \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A\|_{E'} \leq 1\} = |F|_E.$$

Nótese que la supresión de la (SFP) implicaría la relación $|F|_E = \|\varphi\|_{E''}$, es decir, la existencia de un γ con $0 < \gamma \leq 1$ tal que $\gamma\|\varphi\|_E \leq |F|_E \leq \|\varphi\|_E$.

Si φ es como se describe en el enunciado, entonces se obtiene fácilmente que F es medida de $V_E(X)$. □

Esta sencilla proposición nos enseña una nueva forma de definir los espacios $V_E(X)$. Una medida $F : \Sigma \to X$ pertenece a $V_E(X)$ cuando es μ-continua y la medida positiva $|F| : \Sigma \to [0, \infty]$ es, tal y como se expresa en la proposición, una función del espacio de funciones de Banach E.

Como se observa en la proposición 1.4, las funciones vectoriales integrables Bochner dan, de forma natural, lugar a unas medidas vectoriales que gozan de buenas propiedades como son las de ser μ-continuas y tener variación total finita. Esta proposición se puede rescribir de la siguiente forma: Sea $\lambda_1 : L^1(X) \to V^1(X)$ el operador que asigna a cada función vectorial integrable f la medida vectorial F_f (para la notación ver p. 2). Entonces λ_1 es un operador lineal y continuo. De hecho, la proposición 1.4 afirma que λ_1 es una isometría de $L^1(X)$ en su imagen, $\lambda_1(L^1(X))$.

Usando esta misma notación se ha probado, en el caso Lebesgue, que la aplicación $\lambda_p : L^p(X) \to V^p(X)$ para $1 \leq p \leq \infty$ es también una isometría en la imagen, y en el caso Orlicz que $\lambda_\Phi : L^\Phi(X) \to V^\Phi(X)$ para Φ función de Young es, a su vez, isometría en la imagen ([115, 42]).

La cuestión de si el operador es una isometría biyectiva o no, en cada uno de los casos, se ha resuelto con la propiedad de Radon-Nikodým (RNP) (ver p. 14). En el caso general se tiene el mismo resultado, recogido en la siguiente proposición.

Teorema 2.7 *Sea $E(X)$ un espacio de Köthe-Bochner. Sea la aplicación*

$$\begin{array}{rl} \lambda_E : E(X) \to & V_E(X) \\ f \mapsto & F_f \end{array}$$

donde se sigue la notación de la proposición 1.4. Entonces:

- *λ_E es una isometría lineal, es decir, $E(X) \subset V_E(X)$ isométricamente.*
- *λ_E es biyectiva, es decir, $E(X) = V_E(X)$, si y sólo si $X \in (RNP)$.*

Prueba: Si f es integrable Bochner y $F_f(\cdot) = \int_{(\cdot)} f d\mu$, entonces $|F_f|(\cdot) = \int_{(\cdot)} \|f\|_X d\mu$. Dado que $\|f\|_X \in E$, 2.6 nos da que $F_f \in V_E(X)$, y además $|F_f|_E = \| \|f\|_X \|_E = \|f\|_{E(X)}$.

Supongamos ahora que $X \in (RNP)$. Cualquier medida $F \in V_E(X)$ es μ-continua y de variación total acotada sobre los medibles de medida finita, por lo que existirá $f \in L^1(X)$ tal que $F(A) = \int_A f d\mu$. La proposición 2.6 implica que $f \in E(X)$, dado que $|F|(\cdot) = \int_{(\cdot)} \|f\|_X d\mu$.

Recíprocamente, si λ_E es biyectiva, veamos que todo operador $T : L^1 \to X$ lineal y continuo es representable por una función $g \in L^\infty(X)$ (hecho que caracteriza que $X \in (RNP)$).

Para esto tomaremos como espacio de medida el intervalo $[0, 1]$ con la medida de Lebesgue. Sea entonces $T : L^1 \to X$ operador lineal y continuo. Definimos la medida $G : \Sigma \to X$ por $G(A) := T(\chi_A)$ para cada medible A. Dado que $\|G(A)\|_X \leq \|T\| m(A)$, G es evidentemente μ-continua, y de hecho pertence al espacio $V^\infty(X)$ por cumplir

$$\|G\|_{V^\infty(X)} = \sup_A \frac{\|G(A)\|_X}{m(A)} \leq \|T\| < \infty.$$

Por la inclusión $V^\infty(X) = V_{L^\infty}(X) \subset V_E(X)$ y la isometría biyectiva $V_E(X) = E(X)$, tenemos una función $g \in E(X) \subset L^1(X)$ de manera que $G(A) = \int_A g d\mu$ para todo medible A. Usando el teorema de diferenciación de Lebesgue,

$$\|g(t)\|_X = \left\| \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(s) ds \right\|_X = \lim_{h \to 0} \frac{\|G([t, t+h])\|_X}{h} \leq \|T\|$$

para casi todo $t \in [0, 1]$. Así, $g \in L^\infty(X)$ y $T(\varphi) = \int_\Omega \varphi g d\mu$ para toda $\varphi \in L^1$, con lo que $X \in (RNP)$. $\square$

Quedan como corolarios de este resultado los concernientes a casos concretos de espacios de Köthe-Bochner clásicos.

Corolario 2.8 *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y Φ una función de Young, correspondiente, respectivamente, a los espacios de Lebesgue-Bochner y Orlicz-Bochner. Entonces:*

- $L^p(X) = V^p(X)$ *si y sólo si* $X \in (RNP)$ *y*
- $L^\Phi(X) = V^\Phi(X)$ *si y sólo si* $X \in (RNP)$,

donde la igualdad viene dada por la isometría definida anteriormente, particularizada a cada caso.

2.3 E-semivariación y su conexión con los operadores lineales y continuos

En este punto atendemos al clásico concepto de semivariación de una medida vectorial, y a su extensión, la p-semivariación. Este contexto es el más apropiado para relacionar las medidas vectoriales con operadores lineales y continuos.

Definición 2.9 ([GrUh]) *En la situación de la definición 2.1, para cada $F : \Sigma \to X$ medida finitamente aditiva definimos la E-semivariación como*

$$\|F\|_E := \sup\{\| \sum_{A\in\pi} \alpha_A F(A)\|_X : \quad \pi \in D_\Omega, \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A\|_{E'} \leq 1\}.$$

Se dirá que una medida F tiene E-semivariación acotada (o finita) si $\|F\|_E < \infty$. Definimos entonces el conjunto $\mathcal{V}_E(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ como el de las medidas $F : \Sigma \to X$ finitamente aditivas, absolutamente continuas respecto de la medida μ y de E-semivariación acotada. Se denotará por $\mathcal{V}_E(X)$ para abreviar cuando sea posible y se le llama espacio de medidas de E-semivariación finita.

La completitud del nuevo espacio de medidas se puede comprobar de manera similar a 2.4.

Proposición 2.10 $(\mathcal{V}_E(X), \|\cdot\|_E)$ *es un espacio de Banach.*

La inclusión $V_E(X) \subset \mathcal{V}_E(X)$ —para cada E espacio de funciones de Banach E y X Banach arbitrario—es trivial de la definición por la desigualdad triangular de la norma de X.

Sea $\mathcal{M}(\Omega, X)$ el conjunto de medidas $F : \Sigma \to X$ finitamente aditivas, S el conjunto de funciones simples y $\mathcal{L}(S, X)$ el conjunto de operadores lineales de S en X. Sea el operador $\Lambda : \mathcal{M}(\Omega, X) \to \mathcal{L}(S, X)$, de manera que para cada medida F, el operador $\Lambda(F) = T_F$ acta mediante la relación: $T_F(\chi_A) = F(A)$ para todo $A \in \Sigma$, y queda extendido por linealidad a S. Esta relación se observa biunívoca, y es el marco general para la próxima proposición.

Proposición 2.11 *Sea E es un espacio de funciones de Banach y X un espacio de Banach. Entonces*

- $\mathcal{V}_{E'}(X) \subset L(E_b, X)$ *isométricamente.*
- $\mathcal{V}_{E'}(X) = L(E_b, X)$ *si* $E_a = E_b$.

Prueba: La isometría entre estos espacios es una restricción, tanto en dominio como en imagen, del operador Λ antes mencionado.

(I) Por la densidad de las funciones simples en E_b, si $F \in \mathcal{V}_E(X)$

$$\|T_F\| = \sup\{\| \sum_{A\in\pi} \alpha_A F(A)\|_X : \pi \in D_\Omega,\ \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A\|_E \leq 1\} = \|F\|_{E'}$$

y por tanto T_F está en $L(E_b, X)$.

(II) Sea T un operador de $L(E_b, X)$. Es claro que la función de conjunto F_T, antiimagen por Λ de T, es aquella que cumple $F_T(A) = T(\chi_A)$ para todo $A \in \Sigma$, que es, además, finitamente aditiva y por (I) cumple que $\|F_T\|_{E'} = \|T\|$.

La condición $E_a = E_b$ es la que implica que F_T es μ-continua (y por tanto numerablemente aditiva), pues

$$\|F_T(A)\| \leq \|T\|\ \|\chi_A\|_E$$

para todo $A \in \Sigma$. □

El isomorfismo $L(X, Y^*) = (X\widehat{\otimes}_\pi Y)^*$ que existe para espacios de Banach arbitrarios X, Y nos proporciona el siguiente corolario.

Corolario 2.12 *Sea E es un espacio de funciones de Banach y X un espacio de Banach. Entonces*

- $\mathcal{V}_{E'}(X^*) \subset (E_b\widehat{\otimes}_\pi X)^*$ *isométricamente.*
- $\mathcal{V}_{E'}(X^*) = (E_b\widehat{\otimes}_\pi X)^*$ *si $E_a = E_b$.*

Como se puede observar en la prueba de la proposición anterior (y como se comenta en [GrUh, p. 266]), la relación entre medidas y operadores es un simple cambio de contexto, ya que la E-semivariación de una medida F es exactamente (incluso en su apariencia) la norma del operador lineal asociado. Por tanto, si se desea obtener un espacio de medidas vectoriales que describa el espacio de operadores correspondiente, pero que tenga una identidad independiente de éste, se debe obtener una nueva expresión de la norma. Ésta resulta ser la esperada (de los contextos clásicos), manteniendo su validez en contextos más generales.

Proposición 2.13 *Sea F medida con valores en un espacio de Banach X. Entonces*

$$\|F\|_E = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*F|_E,$$

donde $x* \in X^*$ y x^*F es la medida escalar resultante de componer F con el funcional x^*. En consecuencia, se podría redefinir el espacio $\mathcal{V}_E(X)$ como aquel formado por las medidas finitamente aditivas que son μ-continuas y con la condición $|x^*F|_E < \infty$ para cada $x^* \in X^*$.

Prueba: Sean $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \leq 1$ y $s = \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A$ una función simple con $\|s\|_{E'} \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\ |x^*F(A)| &= \sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\ |\langle F(A), x^*\rangle| \\
&= \sum_{A\in\pi} |\langle \alpha_A F(A), x^*\rangle| = \\
&= \sum_{A\in\pi} \langle \varepsilon_A \alpha_A F(A), x^*\rangle \\
&= \langle \sum_{A\in\pi} \varepsilon_A \alpha_A F(A), x^*\rangle \\
&\leq \| \sum_{A\in\pi} \varepsilon_A \alpha_A F(A)\| \leq \|F\|_E,
\end{aligned}$$

donde ε_A son signos (o nmeros complejos de módulo 1) convenientes. Por lo tanto $\|F\|_E \geq \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*F|_E$.

Para la otra desigualdad podemos suponer que $\|F\|_E < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Entonces existe una función simple $s = \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A$ con $\|s\|_{E'} \leq 1$ de manera que

$$\| \sum_{A\in\pi} \alpha_A F(A)\| \leq \|F\|_E - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para el vector $\sum_{A\in\pi} \alpha_A F(A) \in X$ y $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $x^* \in X^*$ de la bola unidad tal que

$$|\langle \sum_{A\in\pi} \alpha_A F(A), x^*\rangle| \geq \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A F(A)\| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es inmediato de ahí que $|x^*F|_E \geq \|F\|_E - \varepsilon$, y la conclusión de la prueba. En el caso que $\|F\|_E = \infty$, se prueba fácilmente que también es ∞ el supremo en cuestión. $\square$

2.4 E-variación y su conexión con los operadores. Dualidad de los espacios de Köthe-Bochner

El propósito de este apartado es poner de manifiesto las relaciones entre espacios de medidas y de operadores lineales y continuos (vistas en el apartado anterior con el uso de la E-semivariación) en el caso de trabajar con las medidas de E-variación finita.

Para este fin debemos extender primero el concepto de clase de Dinculeanu que existe en el contexto de los espacios de Lebesgue (p. 4) o de Orlicz ([42, 116]) al contexto general de los espacios de funciones de Banach. Otra clase de operadores que ha dado resultados en torno a los espacios de medidas vectoriales y de funciones armónicas vectoriales es la de los operadores cono absolutamente sumantes (también llamados operadores positivamente absolutamente sumantes).

Dado que toda medida vectorial de E-variación acotada es de E-semivariación acotada, el operador T_F asociado a una medida F de $V_E(X)$ es lineal y continuo (ver proposición 2.11). El lema que sigue nos caracteriza, mediante una propiedad de acotación, aquellos operadores lineales y continuos de un espacio de funciones de Banach en un espacio de Banach arbitrario, tales que están asociados a medidas de E-variación acotada.

Proposición 2.14 *Sean E un espacio de funciones Banach y X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

- $F \in V_E(X)$.
- $T_F \in L(E'_b, X)$ *y existe* $\varphi \geq 0$, $\varphi \in E$ *tal que*

$$\|T_F(\phi)\|_X \leq \int_\Omega |\phi|\varphi d\mu$$

para toda $\phi \in E'_b$.

Además, se podría escoger φ *con* $\|\varphi\|_E = \|F\|_E$

Prueba: Si $F \in V_E(X)$ podemos hacer uso de la proposición 2.6 para obtener la función $0 \leq \varphi \in E$. Sea $s = \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A$ una función simple con $\|s\|_{E'} \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|T_F(s)\|_X &= \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A F(A)\|_X \\
&\leq \sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\ |F|(A) \\
&= \int_\Omega (\sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\chi_A)\varphi d\mu \\
&= \int_\Omega |s|\ \varphi d\mu.
\end{aligned}$$

La densidad de las funciones simples en E'_b prueba lo deseado.

Recíprocamente, si F es una medida finitamente aditiva con valores en X y $A \in \Sigma$, la hipótesis da

$$\|F(A)\|_X \leq \int_A \varphi d\mu,$$

lo cual nos conduce, en primer lugar, a que $F \ll \mu$, puesto que φ es integrable y la integral de Lebesgue es absolutamente continua. En segundo lugar, se deduce también que $|F|(A) \leq \int_A \varphi d\mu$, e inmediatamente que $|F|_E \leq \|\varphi\|_E$ por lo que $F \in V_E(X)$. □

El operador $J_p : L^p(X) \to L(L^{p'}, X)$ que se mencionaba en la página 6 encuentra una ampliación a los espacios de funciones de Banach. Ahora tenemos un operador $J_E : E(X) \to L(E', X)$ para cada espacio E de manera que si $f \in E(X)$, entonces el operador dado por

$$J_E(f)(g) = \int_\Omega fg d\mu \qquad g \in E'$$

es lineal y continuo. Para ahondar en la estructura de dicho operador precisamos de la extensión del concepto de la clase de Dinculeanu (ver p. 4).

Definición 2.15 (La clase de Dinculeanu) *Sea E un espacio de funciones de Banach y X un espacio arbitrario. Se define la clase de Dinculeanu $\mathcal{D}(E_b', X)$ a la formada por los operadores lineales T de E_b' en X de manera que*

$$|||T|||_E = \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \, \|T(\chi_A)\|_X \ : \ \pi \in D_\Omega, \ \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A \|_{E'} \leq 1\}$$

es finito. Se tomará $|||\cdot|||_E$ como norma en este espacio.

Nótese la restricción que sufre el espacio inicial en la clase de Dinculeanu, dado que la expresión de la norma se reduce al supremo en el conjunto de funciones simples. La desigualdad $\|T\| \leq |||T|||_E$ es trivial, por lo que $\mathcal{D}(E_b', X) \subset L(E_b', X)$.

Una vez introducida la clase de Dinculeanu para espacios de funciones de Banach se va a probar cómo el espacio de Kothe-Böchner $E(X)$ se introduce de manera isométrica en $\mathcal{D}(E_b', X)$ mediante el operador J_E.

Proposición 2.16 *Sea E un espacio de funciones de Banach y X un espacio de Banach arbitrario. Entonces $E(X) \subset \mathcal{D}(E_b', X)$ de manera isométrica vía el operador J_E.*

Prueba: Para cada $f \in E(X)$, sea $s = \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A$ una función simple con $\|s\|_{E'} \leq 1$. Entonces debemos considerar la cantidad

$$\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \, \| \int_A f d\mu \|_X .$$

Partiendo los medibles $A \in \pi$ de manera adecuada, y pensando en el concepto de la variación total, no es difícil darse cuenta de que

$$\begin{aligned} |||J_E(f)|||_E &= \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \int_A \|f\|_X d\mu \ : \ \pi \in D_\Omega, \ \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A \|_{E'} \leq 1\} \\ &= \sup\{\int_\Omega (\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \chi_A) \|f\|_X d\mu \ : \ \pi \in D_\Omega, \ \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A \|_{E'} \leq 1\} \\ &= \|f\|_{E(X)}. \end{aligned}$$

Con lo cual queda probada la afirmación. □

En [12], O. Blasco caracteriza los operadores de la clase de Dinculeanu $\mathcal{D}(L^p, X)$ como aquellos que cumplen una desigualdad como la planteada en 2.14, donde los operadores ocupan el lugar de las medidas. Aquí vamos a obtener la caracterización similar, de los operadores de la clase de Dinculeanu $\mathcal{D}(E_b, X)$, como consecuencia de una relación previa entre el espacio de medidas y la clase de Dinculeanu.

Proposición 2.17 *Sean E un espacio de funciones Banach y X un espacio de Banach. Entonces:*

- $V_{E'}(X) \subset \mathcal{D}(E_b, X)$ *isométricamente.*
- $V_{E'}(X) = \mathcal{D}(E_b, X)$ *si* $E_a = E_b$.

Prueba: La primera parte es trivial de la expresión de las normas en ambos espacios. La segunda parte se prueba como la proposición 2.11. □

Como corolario obtenemos una caracterización de los operadores de la clase de Dinculeanu para ciertos espacios E.

Corolario 2.18 *Sean E un espacio de funciones Banach tal que $E_a = E_b$, y X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

- $T \in \mathcal{D}(E_b, X)$.
- $T \in L(E_b, X)$ *y existe* $\varphi \geq 0$, $\varphi \in E'$ *tal que*

$$\|T(\phi)\|_X \leq \int_\Omega |\phi|\varphi d\mu$$

para toda $\phi \in E_b$.

Ahora vamos a tratar con el subespacio de $L(E, X)$ de los operadores cono absolutamente sumantes (ver definición en p. 5). O. Blasco usa esta clase de operadores en [6] para encontrar una descripción del espacio de funciones armónicas vectoriales $h^p_X(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Escribimos el siguiente resultado, comentado en los preliminares, pues va a ser usado como referencia.

Proposición 2.19 ([111, p. 244]) *Sean E un retículo de Banach y X un espacio de Banach. Sea $T \in L(E, X)$. Entonces equivalen:*

- $T \in \Pi^{1,+}(E, X)$.
- *Existe* $e^* \in E^*$ *positivo de manera que*

$$\|Te\|_X \leq \langle e^*, |e|\rangle$$

para todo $e \in E$.

Además, se puede tomar e^* *con* $\|e^*\|_{E^*} = \|T\|_{\Pi^{1,+}}$.

Pasamos ahora a establecer la conexión entre los operadores cono absolutamente sumantes y las medidas de E-variación finita.

Teorema 2.20 *Sea E es un espacio de funciones de Banach y X un espacio de Banach. Entonces*

- $V_{E'}(X) \subset \Pi^{1,+}(E_b, X)$ *isométricamente.*
- $V_{E'}(X) = \Pi^{1,+}(E_b, X)$ *si* $E_a = E_b$.

Prueba: El operador que a cada medida F asocia un operador T_F es el de 2.11.

Si usamos conjuntamente 2.14 y 2.19, tenemos que $F \in V_{E'}(X)$ si y sólo si el operador T_F cumple una acotación del tipo

$$\|T_F(e)\|_X \leq \int_\Omega \varphi|e|d\mu := \langle\varphi, |e|\rangle, \qquad \forall e \in E$$

para cierta función φ no negativa de E'. Esta desigualdad implica (y caracteriza si $E_a = E_b$, pues todo elemento de E^* sería de E') que T_F es cono absolutamente sumante.

Así pues, sólo queda ver la relación de normas. Por un lado, si $F \in V_{E'}(X)$ y $e_1, \ldots, e_n$ son elementos no negativos del retículo E tales que $\| \sum_{k=1}^n e_k\|_E \leq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \|T_F(e_k)\|_X \leq \langle\varphi, \sum_{k=1}^n e_k\rangle \leq \|\varphi\|_{E'}.$$

Por tanto $\|T_F\|_{\Pi^{1,+}} \leq |F|_E$. Por otro lado, dado que $T_F \in \Pi^{1,+}(E_b, X)$ existe $e^* \in E^*$ positivo con $\|e^*\|_{E^*} = \|T\|_{\Pi^{1,+}}$ tal que

$$\|F(A)\|_X = \|T_F(\chi_A)\|_X \leq \langle e^*, \chi_A\rangle$$

para todo $A \in \Sigma$. Con ello se deduce que

$$\begin{aligned} |F|_E &\leq \sup\{\langle e^*, \sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\chi_A\rangle \ : \ \pi \in D_\Omega, \ \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A\chi_A\|_E \leq 1\} \\ &\leq \|e^*\|_{E'} \\ &= \|T_F\|_{\Pi^{1,+}} \end{aligned}$$

y se consigue la inclusión isométrica. Si $E_a = E_b$ y $T \in \Pi^{1,+}(E_b, X)$, por la proposición 2.19 y dado que la hipótesis implica $(E_b)^* = E'$ ([BeSh, p. 20]),

$$\|Te\|_X \leq \langle|e|, e^*\rangle = \int_\Omega |e|\varphi d\mu, \qquad e \in E_b,$$

con $\varphi \in E'$. La función de conjunto F_T dada por $F_T(A) = T(\chi_A)$ para $A \in \Sigma$ cumple la propiedad de 2.14 y, por tanto, $F_T \in V_{E'}(X)$, con lo cual queda probada la isometría biyectiva, pues $F = F_{T_F}$. $\square$

Es fácil comprobar la inclusión $\Pi^{1,+}(E_b, X) \subset \mathcal{D}(E_b, X)$ mediante la definición de las normas. La igualdad de ambos es trivial bajo la hipótesis $E_a = E_b$, puesto que ambos coincidirían con $V_{E'}(X)$.

Uno de los objetivos principales del estudio de los espacios de medidas vectoriales es su capacidad de describir el espacio dual de espacios de funciones vectoriales, como ha sucedido en los casos clásicos. En este apartado pretendemos describir el espacio dual $E(X)^*$ de un espacio de Köthe-Bochner en términos de medidas vectoriales de E'-variación acotada. Esta descripción se ha hecho de manera excelente en este mismo contexto por N. E. Gretsky y J. J. Uhl en

[GrUh], donde se imponía una hipótesis sobre la norma en el espacio de funciones de Banach, a saber, la propiedad (J) (ver p. 29). Esta restricción se hacía necesaria por la definición que hacen de la E-variación ([Gret, GrUh]). También se ha ocupado de este tema la escuela rusa, usando espacios de funciones medibles con valores vectoriales abstractos. El trabajo más destacable es [20], de A. V. Buhkvalov, siendo [19, 21, 22, 23, 24] y [25] otros trabajos de mención en esta línea.

Como se va a ver en la prueba del primer resultado de dualidad, el espacio de funciones que podemos atrapar está limitado a $E(X)_b$. No se trata de una limitación fuerte, dado que en la mayoría de supuestos se requiere la densidad del conjunto de funciones simples.

Teorema 2.21 *Sean E un espacio de funciones de Banach, X un espacio de Banach y $E(X)$ el correspondiente espacio de Köthe-Bochner. Entonces*

- $V_{E'}(X^*) \subset [E(X)_b]^*$ *isométricamente.*
- $V_{E'}(X^*) = [E(X)_b]^*$ *si* $E_a = E_b$.

Prueba: El operador $\Lambda : V_{E'}(X^*) \to [E(X)_b]^*$ acta como sigue: Para cada F medida, $\Lambda(F) = T_F$ se comporta mediante la relación

$$T_F(x\chi_A) = \langle x, F(A)\rangle$$

para todo $x \in X$ y $A \in \Sigma$. Extendiendo por linealidad podemos definir T_F en todo el conjunto de funciones simples, y por densidad se puede alcanzar a todo $E(X)_b$.

Veamos primero que $V_{E'}(X)$ está isométricamente incluido en $[E(X)_b]^*$, sin hipótesis alguna sobre E. La siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}\|T_F\| &= \sup\{|\sum_{A\in\pi}\langle x_A, F(A)\rangle| : \pi \in D,\ \|\sum_{A\in\pi} x_A\chi_A\|_{E(X)} \le 1\} = \\ &= \sup\{\sum_{A\in\pi}|\langle x_A, F(A)\rangle| : \pi \in D,\ \|\sum_{A\in\pi} x_A\chi_A\|_{E(X)} \le 1\} = \\ &= \sup\{\sum_{A\in\pi}|\alpha_A|\ \|F(A)\|_{X^*} : \pi \in D,\ \|\sum_{A\in\pi}\alpha_A\chi_A\|_E \le 1\}\end{aligned}$$

viene justificada, en la primera igualdad, porque se pueden retocar los x_A (con signos o complejos de módulo 1) de manera que $\langle x_A, F(A)\rangle$ resulta positivo. Para la segunda igualdad se aproxima la norma $\|F(A)\|_{X^*}$ con vectores x_A de norma 1 apropiados.

Para probar la biyección, sea $\phi \in [E(X)_b]^*$ un elemento arbitrario. Sea $F_\phi : \Sigma \to X^*$ una función de conjunto definida como

$$\langle x, F_\phi(A)\rangle = \phi(x\chi_A)$$

para cada $x \in X$ y para cada $A \in \Sigma$. Es claro que F_ϕ es la antiimagen por Λ de ϕ, que es finitamente aditiva y que, por lo visto anteriormente, $\|F_\phi\|_{E'} = \|\phi\|$.

Si $E_a = E_b$, es fácil ver de la desigualdad

$$\|F_\phi(A)\|_{X^*} \leq \|\phi\|\|\chi_A\|_E$$

que se tiene para todo $A \in \Sigma$, que F_ϕ es numerablemente aditiva y μ-continua, con lo que $F_\phi \in V_{E'}(X^*)$ y Λ es isometría biyectiva. $\square$

Corolarios inmediatos al resultado general son los siguientes:

Corolario 2.22 *Sea $E(X)$ un espacio de Köthe-Bochner de manera que E tiene norma absolutamente continua. Entonces $E(X)^* = V_{E'}(X^*)$.*

Corolario 2.23 *Sea $E(X)$ un espacio de Köthe-Bochner de manera que E tiene norma absolutamente continua. Entonces $E(X)^* = E'(X^*)$ si y sólo si $X^* \in (RNP)$.*

Se remite al lector a la página 40 donde se indica que la continuidad absoluta de la norma en un espacio de funciones de Banach induce la densidad del conjunto de funciones simples en el espacio de Köthe-Bochner correspondiente.

2.5 $E[X; Y, Z]$-semivariación

El concepto de $E[X; Y, Z]$-semivariación engloba en uno solo a los conceptos vistos de E-variación y de E-semivariación (si consideramos Y y Z como parámetros que dan lugar a distintas semivariaciones). Se puede encontrar la definición de este concepto (reducido al contexto de los espacios de Lebesgue) en el capítulo de preliminares (p. 10). Ahora se generaliza para obtener diversos resultados generales.

Definición 2.24 *Se considera un espacio de funciones de Banach E y un espacio de Banach X, que se pueda considerar como contenido isométricamente en el espacio $L(Y, Z)$, donde Y y Z son espacios de Banach.*

Sea $F : \Sigma \to X$ una función de conjunto finitamente aditiva. Se define la $E[X; Y, Z]$-variación de F como la cantidad

$$\|F\|_{E[X;Y,Z]} = \sup\{\| \sum_{A\in\pi} F(A)(y_A)\|_Z : \ \pi \in D_\Omega, \ \| \sum_{A\in\pi} y_A\chi_A\|_{E'(Y)} \leq 1\}.$$

Se puede abreviar con $\|F\|_{E[Y,Z]}$ cuando el espacio X sea el de los operadores lineales y continuos $L(Y, Z)$ con la norma de operadores.

Es fácil ver que $|F|_E = \|F\|_{E[X;X^*,\mathbb{K}]}$ y que $\|F\|_E = \|F\|_{E[X;\mathbb{K},X]}$. De hecho, si Y y Z son como en la definición previa, entonces

$$\|F\|_E \leq \|F\|_{E[X;Y,Z]} \leq |F|_E.$$

Se observa de esta manera que la definición de la $E[X; Y, Z]$ es un conjunto de definiciones (tantas como pares de espacios (Y, Z) para los cuales X sea subespacio de $L(Y, Z)$). Tenemos ahora el correspondiente espacio de medidas vectoriales.

Definición 2.25 *Sea E un espacio de funciones de Banach y X un espacio de Banach de manera que se puede considerar como subespacio del espacio $L(Y,Z)$, donde Y y Z son espacios de Banach.*

Se define el espacio $\mathcal{V}_{E[X;Y,Z]}(\Omega,\Sigma,\mu,X)$ como el conjunto de las medidas finitamente aditivas y μ-continuas de manera que $\|F\|_{E[X;Y,Z]} < \infty$.

Se puede abreviar la notación con $\mathcal{V}_{E[Y,Z]}(X)$ cuando $X = L(Y,Z)$.

Uno de los primeros objetivos para trabajar con este espacio es el cálculo de una expresión alternativa para la norma, que viene recogida en el siguiente lema.

Lema 2.26 *Sean X, Y y Z espacios de Banach de manera que se puede considerar X como subespacio de $L(Y,Z)$, y E un espacio de funciones de Banach. Sea $F : \Sigma \to X$ una medida finitamente aditiva y μ-continua. Entonces se tiene que*

$$\|F\|_{E[X;Y,Z]} = \sup_{\|z^*\|\leq 1} |z^*F|_E$$

donde $z^* \in Z^*$ y la medida z^*F es aquella que toma valores en Y^* verificando $z^*F(A)(y) = \langle F(A)(y), z^*\rangle$ para cada $A \in \Sigma$ e $y \in Y$.

Prueba: Las siguientes igualdades se cumplen de manera elemental

$$\begin{aligned}
\|F\|_{E[X;Y,Z]} &= \sup\{\|\sum_{A\in\pi} F(A)(y_A)\|_Z : \pi \in D,\ \|\sum_{A\in\pi} y_A\chi_A\|_{E'(Y)} \leq 1\} \\
&= \sup\{|\langle\sum_{A\in\pi} F(A)(y_A), z^*\rangle| : \pi \in D,\ \|\sum_{A\in\pi} y_A\chi_A\|_{E'(Y)} \leq 1,\ \|z^*\| \leq 1\} \\
&= \sup\{|\sum_{A\in\pi} \langle y_A, z^*F(A)\rangle| : \pi \in D,\ \|\sum_{A\in\pi} y_A\chi_A\|_{E'(Y)} \leq 1,\ \|z^*\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\,\|z^*F(A)\| : \pi \in D,\ \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A\chi_A\|_{E'} \leq 1,\ \|z^*\| \leq 1\} \\
&= \sup_{\|z^*\|\leq 1} |z^*F|_E.
\end{aligned}$$

□

Con esta nuevo tipo de variación de una medida vectorial presentamos un resultado de medidas y operadores similar a los ya demostrados, pero que los integra a todos, dada la gran generalidad del concepto.

Teorema 2.27 *Sean E un espacio de funciones de Banach, X e Y espacios de Banach y $E(X)$ el correspondiente espacio de funciones vectoriales de Banach. Entonces*

- $\mathcal{V}_{E'[X,Y]}(L(X,Y)) \subset L(E(X)_b, Y)$ *isométricamente.*
- $\mathcal{V}_{E'[X,Y]}(L(X,Y)) = L(E(X)_b, Y)$ *si $E_a = E_b$.*

Prueba: Definimos el operador $\Lambda : V_{E'(X,Y)}(L(X,Y)) \to L(E(X)_b, Y)$ como sigue: Para cada F medida, $\Lambda(F) = T_F$ se comporta mediante la relación

$$T_F(x\chi_A) = F(A)(x)$$

para todo $x \in X$ y $A \in \Sigma$. Extendiendo por linealidad podemos definir T_F en todo el conjunto de funciones simples, y por densidad puede alcanzar a todo $E(X)_b$ como un operador lineal y continuo.

(I) La siguiente igualdad es directa

$$\|T_F\| = \sup\{\| \sum_{A\in\pi} F(A)(x_A)\|_Y : \pi \in D,\ \| \sum_{A\in\pi} x_A\chi_A\|_{E(X)} \leq 1\} =$$
$$= \|F\|_{E'[L(X,Y);X,Y]}.$$

Por tanto la primera afirmación del teorema es obvia.

(II) Sea $T \in L(E(X)_b, Y)$ un elemento arbitrario. Sea $F_T : \Sigma \to L(X,Y)$ una función de conjunto definida como

$$F_T(A)(X) = T(x\chi_A)$$

para cada $x \in X$ y para cada $A \in \Sigma$. Es claro que F_T es la antiimagen por Λ de T, que es finitamente aditiva y que, por (I), $\|F_T\|_{E'} = \|T\|$.

Si $E_a = E_b$, la desigualdad

$$\|F_T(A)\|_{L(X,Y)} \leq \|T\|\|\chi_A\|_E, \qquad A \in \Sigma$$

implica que F_T es μ-continua, con lo que $F_T \in V_{E'[X,Y]}(L(X,Y))$ y Λ es una isometría.

$\square$

Es fácil comprobar que los resultados 2.11 y 2.21 se obtienen como casos concretos de éste.

Como se indica en [GrUh], la definición del espacio $\mathcal{V}_{E[X,Y]}(L(X,Y))$ para tratar de resolver la representación de los operadores de $E'(X)_b$ en Y pasa por la consideración de tomar como norma propia del espacio $\mathcal{V}_{E[X,Y]}(L(X,Y))$ la expuesta en el lema 2.26, ya que otra cosa sería pasar de medidas a operadores sin más cambios que los notacionales.

2.6 Conexión con funciones armónicas

Como se indicaba en los preliminares, el espacio de medida base en este apartado es $(\mathbb{T}, \mathcal{B}, dt)$, donde $\mathbb{T}$ se puede identificar con el intervalo $[-\pi, \pi)$, $\mathcal{B}$ representa la σ-álgebra de los borelianos de $\mathbb{T}$ y dt representa la medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{T}$.

Las funciones armónicas vectoriales están definidas en el disco $\mathbb{D}$ (identificable con $[0,1) \times [-\pi, \pi)$). Así, la notación para elementos de $\mathbb{D}$ será $z = re^{it}$ con $r \in [0,1)$ y $t \in [-\pi, \pi)$ mientras que los elementos de $\mathbb{T}$ se denotarán indistintamente por t ó e^{it} con $t \in [-\pi, \pi)$.

El objetivo de este apartado es generalizar los resultados conseguidos en [Blsc] y [27], que afectaban a los espacios de Hardy-Lebesgue-Bochner y Hardy-Orlicz-Bochner, respectivamente, a la familia de espacios que pasaremos a definir, $h_E(\mathbb{D}, X)$ de Hardy-Köthe-Bochner.

La clase de espacios de funciones de Banach que se va a considerar en este apartado es la de los espacios que aparecen en la siguiente definición.

Definición 2.28 *Se dice que un espacio de funciones de Banach E definido sobre $(\mathbb{T}, \mathcal{B}, dt)$ es invariante por traslación si*

$$\|f\|_E = \|f_\theta\|_E$$

para todo $\theta \in \mathbb{T}$ y $f \in E$, y donde f_θ representa la función tal que $f_\theta(t) = f(t-\theta)$ para $t \in \mathbb{T}$.

Esta clase de espacios contiene a la de los espacios invariantes por reordenamiento, pues en este caso sólo se exige que $\|f\|_E = \|g\|_E$, no para toda función g equimedible con f, sino para unas cuantas de ellas (de hecho las f_θ). Es fácil ver de la expresión de la norma en E', que si E es un espacio invariante por traslación, entonces E' también lo es.

Veamos una versión de la desigualdad de Young para convoluciones ajustable a esta familia de espacios.

Lema 2.29 (Desigualdad de Young) *Sea E un espacio invariante por traslaciones. Entonces para cada $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $g \in E(X)$ se tiene que $f * g \in E(X)$. Además*

$$\|f * g\|_{E(X)} \leq \|f\|_1 \|g\|_{E(X)}.$$

Prueba: Vamos a evaluar $\|f * g\|_{E''(X)}$, que coincide con $\|f * g\|_{E(X)}$ por la (SFP). Sea $h \in E'$ arbitraria con $\|h\|_{E'} \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}} \|(f * g)(t)\|_X |h(t)| dt \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} |f(\theta)| \, \|g(t-\theta)\|_X d\theta \right] |h(t)| dt \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} |h(t)| \, \|g(t-\theta)\|_X dt \right] |f(\theta)| d\theta \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \|h\|_{E'} \|g_\theta\|_{E(X)} |f(\theta)| d\theta \\
\leq\ & \|f\|_1 \|g\|_{E(X)}.
\end{aligned}$$

Por tanto $\|f * g\|_{E(X)} \leq \|f\|_1 \|g\|_{E(X)}$. □

Nota 2.30 *Existen versiones mucho más generales de la desigualdad de Young para convoluciones ([14]). Por ejemplo, si $u : X \times Y \to Z$ es una aplicación bilineal y continua donde X, Y, Z son espacios de Banach, $f \in L^1(\mathbb{T}, X)$ y $g \in E(Y)$, la función convolución de f y g a través de u, denotada por $f *_u g$ y definida por*

$$f *_u g(t) = \int_{\mathbb{T}} u(f(\theta), g(\theta - t)) d\theta$$

pertenece a $E(Z)$ y $\|f *_u g\|_{E(Z)} \leq \|u\| \, \|f\|_{L^1(X)} \|g\|_{E(Y)}$.

Por otra parte, nótese una vez más que la supresión de la (SFP) produciría la aparición de una constante en la desigualdad conseguida en el lema, debido a que la norma que se acota es la del espacio $E''(X)$, que es equivalente a la de $E(X)$ (en virtud a la hipótesis de la (WFP)).

El núcleo de Poisson juega un papel central en la situación actual, de igual manera que en los casos clásicos. El siguiente lema es elemental.

Lema 2.31 *Sea E un espacio invariante por traslaciones y X un espacio de Banach. Si $u : \mathbb{D} \to E$ es una función armónica y $T : E \to X$ es un operador lineal y continuo, entonces la composición $T \circ u : \mathbb{D} \to X$ es armónica vectorial.*

Como consecuencia de este lema vamos a obtener una forma de generar funciones armónicas vectoriales a partir de una dada y operadores lineales y continuos. En efecto, si para cada espacio invariante por traslaciones E, sea $\mathcal{P}_E : \mathbb{D} \to E$ la función dada por $\mathcal{P}_E(z) = P_z$ (véase p. 19 para la notación). La función está bien definida, pues $\mathcal{P}_E = i_E \circ \mathcal{P}_\infty$, donde $i_E : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to E$ es el operador inclusión, que es lineal y continuo. A su vez es armónica por el mismo motivo. La siguiente definición viene, entonces, motivada.

Definición 2.32 *Si $T \in L(E, X)$, llamamos $P[T] = T \circ \mathcal{P}_E$. Entonces $P[T]$ es la función definida en $\mathbb{D}$ tal que*

$$P[T](z) = T(P_r(t - \cdot))$$

para $z = re^{it} \in \mathbb{D}$.

No es difícil ver que para cada $f \in E(X)$, la función $P[f]$ coincide con $P[T_f]$ donde $T_f : E' \to X$ es el operador dado por

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{T}} f(t)\varphi(t)dt$$

para todo $\varphi \in E'$. Para cada medida $F \in V_E(X)$, la función $P[F]$ se define como $P[T_F]$ donde $T_F : E'_b \to X$ es el operador lineal y continuo dado por $T_F(\chi_A) = F(A)$ y extendido por linealidad y por densidad a E'_b (nótese que el operador i_E antes mencionado tiene su imagen contenida en E_b, con lo cual no hay ningn problema de definición en el caso de las medidas).

Es entonces un corolario de lo anterior que tanto $P[f]$ como $P[F]$ son funciones armónicas para cada $f \in E(X)$ y $F \in V_E(X)$ (de hecho para $F \in \mathcal{V}_E(X)$).

Si se adopta la notación $E_c = \overline{\mathcal{C}(\mathbb{T})}^E$, podemos escribir el siguiente lema.

Lema 2.33 *Sea E un espacio de funciones de Banach. Entonces $E_a \subset E_c \subset E_b$.*

Prueba: La densidad del conjunto de funciones simples en E_a es consecuencia de la conocida relación $E_a \subset E_b$. Veamos entonces que $E_a \subset E_c$. Para ello tomamos una función cualquiera $f \in E_a$ positiva y un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Encontramos $s \in E$ simple tal que $\|f - s\|_E \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Para cada $A \in \mathcal{B}$ se tiene, por la desigualdad triangular que, $\|s\chi_A\|_E \leq \frac{\varepsilon}{4} + \|f\chi_A\|_E$. Por otro lado, si $A \in \mathcal{B}$ es de medida suficientemente pequeña, digamos $\delta > 0$, entonces $\|f\chi_A\|_E \leq \frac{\varepsilon}{8}$. Por teorema de Lusin sabemos que hay una función $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ de manera que si $A = \{t \in \mathbb{T} : g(t) \neq s(t)\}$, entonces

$\lambda(A) < \delta$ para el δ dado, y además $\|g\|_\infty \leq \|s\|_\infty$ (con lo que $\|s-g\|_E \leq 2\|s\|_E$). Con todo esto

$$\|f-g\|_E = \|f-s\|_E + \|s-g\|_E \leq \frac{\varepsilon}{4} + \|(s-g)\chi_A\|_E \leq \frac{\varepsilon}{4} + 2\|s\chi_A\|_E \leq$$
$$\leq \frac{3\varepsilon}{4} + 2\|f\chi_A\|_E \leq \varepsilon.$$

La prueba para una función arbitraria de E_a es trivial usando la típica descomposición en parte positiva y negativa, y después en parte real e imaginaria (para el caso complejo). Así la inclusión $E_a \subset E_c$ queda probada, ya que E_a es un subespacio cerrado de E.

Por otro lado, la inclusión $E_c \subset E_b$ es inmediata de la inclusión $L^\infty \subset E$ (y por tanto de la desigualdad de normas que ello conlleva) y de la densidad de las funciones simples en $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ para la norma supremo. $\square$

Así pues, en espacios con norma absolutamente continua los tres subespacios coinciden con el espacio total y, por tanto, entre sí. Se denota por $E(X)_c$ la versión vectorial de E_c, es decir, $E(X)_c = \overline{\mathcal{C}(\mathbb{T}, X)}^E$.

Para cada función f definida en $\mathbb{T}$ y cada $\theta \in \mathbb{T}$ se define la función f_θ definida en $\mathbb{T}$ dada por $f_\theta(t) = f(t-\theta)$ para $t \in \mathbb{T}$. Veamos un resultado sobre esta función f_θ.

Lema 2.34 *Sea E un espacio de funciones de Banach y X un espacio de Banach arbitrario. La aplicación $\Lambda_f : \mathbb{T} \to E(X)$ dada por $\Lambda_f(\theta) = f_\theta$ es continua en los siguientes casos:*

- *Para cualquier $f \in E(X)$ si E tiene norma absolutamente continua.*
- *Para cualquier $f \in E(X)_c$ (sin hipótesis sobre E).*

Prueba: Usamos el hecho de que $E = E''$ para poder usar la expresión de la norma $\|f\|_E = \sup\{\int_\Omega fgd\mu : \|g\|_{E'} \leq 1\}$. De esta expresión es obvio, realizando un cambio de variable, que $\|f_\theta - f_{\theta_0}\|_{E(X)} = \|f_{\theta-\theta_0} - f_0\|_{E(X)}$. Así que bastará con probar la continuidad de Λ_f en $\theta = 0$.

(I) Si $E_a = E$ tenemos que $E(X)_a = E(X)_b = E(X)$ (lema 1.51), y así cada función de $E(X)$ es aproximable por funciones simples y tiene norma absolutamente continua. Sea $f \in E(X)$ cualquiera. Para $\varepsilon > 0$ arbitrario sea s una función simple vectorial con $\|f-s\|_{E(X)} < \frac{\varepsilon}{3}$. Sea $s = \sum_{n=1}^N x_n \chi_{A_n}$ la función simple donde A_n se pueden tomar intervalos disjuntos. La desigualdad triangular de la norma en X nos proporciona la desigualdad

$$\|s - s_\theta\|_{E(X)} \leq \|(\|s\|_X + \|s_\theta\|_X)\chi_{\{s \neq s_\theta\}}\|_E$$

Para cada $\theta \leq \min_n \mu(A_n)$ podemos decir que $\mu(\{s \neq s_\theta\}) \leq 2N\theta$. Usando la continuidad absoluta de la norma, encontramos un $\delta > 0$ de manera que si $|\theta| < \delta$ entonces podemos concluir que $\|s - s_\theta\|_{E(X)} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, y queda concluida esta parte.

(II) Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, X)$. Entonces para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que si $|s-t| < \delta$ entonces $\|f(s) - f(t)\|_X < \frac{\varepsilon}{\|\chi_{\mathbb{T}}\|_E}$. Tomamos h arbitraria de la bola unidad de E'. Si $|\theta| < \delta$, por la desigualdad de Hölder

$$\int_{\mathbb{T}} \|f(t-\theta) - f(t)\|_X |h(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{\|\chi_{\mathbb{T}}\|_E} \int_{\mathbb{T}} |h(t)| d\lambda(t) \leq \varepsilon,$$

por lo que se puede afirmar que $\|f_\theta - f_0\|_{E(X)} < \varepsilon$, y así se tiene la continuidad de Λ_f para cada f continua.

Si $f \in E(X)_c$ y $\varepsilon > 0$ es arbitrario, por lo anterior encontramos que existen $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, X)$, $\delta > 0$ de tal manera que $\|f - g\|_{E(X)} = \|f_\theta - g_\theta\|_{E(X)} < \frac{\varepsilon}{3}$ y $\|g_\theta - g\|_{E(X)} < \frac{\varepsilon}{3}$ para $|\theta| < \delta$, con lo cual,

$$\|f_\theta - f\|_{E(X)} \leq \|f_\theta - g_\theta\|_{E(X)} + \|g_\theta - g\|_{E(X)} + \|g - f\|_{E(X)} < \varepsilon.$$

$\square$

Con todo lo anterior se puede establecer el siguiente resultado.

Corolario 2.35 *Sea E un espacio invariante por traslación y X un espacio de Banach. Si $f \in E(X)$ entonces*

- $P[f]$ *es armónica vectorial.*
- $\|P[f]_r\|_{E(X)} \leq \|f\|_{E(X)}$ *para cada $r \in [0, 1)$.*
- $\lim_{r \nearrow 1} \|P[f]_r - f\|_{E(X)} = 0$ *en los siguientes casos:*
  - *Para toda $f \in E(X)_c$.*
  - *Para toda $f \in E(X)$ si $E = E_a$*

Prueba: La primera parte es consecuencia de la definición 2.32, mientras que la segunda se deduce de la desigualdad de Young para convoluciones (lema 2.29). La tercera se prueba con ayuda del resultado anterior.

Sea f una función de las descritas en los casos del tercer punto, y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Para este ε tenemos que:

- Por el lema previo, existe $\delta > 0$ de manera que $\sup_{|\theta| \leq \delta} \|f_\theta - f\|_{E(X)} < \frac{\varepsilon}{2}$.
- Por la propiedad del ncleo de Poisson, para ese $\delta > 0$ existe $r_0 \in [0, 1)$ tal que si $r \geq r_0$ entonces

$$\int_{|\theta| > \delta} P_r(\theta) d\theta < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{E(X)}}.$$

Sea $h \in E'$ arbitraria con $\|h\|_{E'} \leq 1$. Podemos escribir las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}} \|P_r * f(t) - f(t)\|_X |h(t)| dt \\
&\quad \leq \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} P_r(\theta) \|f(t-\theta) - f(t)\|_X d\theta \right] |h(t)| dt \\
&\quad = \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} |h(t)| \, \|f_\theta(t) - f(t)\|_X dt \right] P_r(\theta) d\theta \\
&\quad \leq \int_{\mathbb{T}} \|f_\theta - f\|_{E(X)} P_r(\theta) d\theta \\
&\quad = \int_{|\theta| \geq \delta} \|f_\theta - f\|_{E(X)} P_r(\theta) d\theta + \int_{|\theta| < \delta} \|f_\theta - f\|_{E(X)} P_r(\theta) d\theta \\
&\quad \leq 2\|f\|_{E(X)} \int_{|\theta| \geq \delta} P_r(\theta) d\theta + \frac{\varepsilon}{2} \int_{|\theta| < \delta} P_r(\theta) d\theta \\
&\quad < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dada la arbitrariedad de la función $h \in E'$, podemos decir que para cualquier $\varepsilon > 0$ encontramos $r_0 \in [0, 1)$ de manera que para $r \geq r_0$, $\|P_r * f - f\|_E < \varepsilon$, lo que prueba el resultado. □

Ahora introducimos el espacio de Hardy vectorial. Para un estudio de las funciones armónicas vectoriales remitimos al lector a [47] mientras que [49, 26, Blsc] son referencias sobre los espacios de Hardy-Lebesgue vectoriales y [109, 27] trata sobre los espacios de Hardy-Orlicz vectoriales.

Definición 2.36 *Sea E un espacio de funciones de Banach invariante por traslaciones y X un espacio de Banach. Se define, en el conjunto de funciones armónicas del disco unidad, el espacio de Hardy-Köthe-Bochner $h^E(\mathbb{D}, X)$ (abreviado como espacio de Hardy $h^E(X)$).*

Para $u : \mathbb{D} \to X$ armónica vectorial y $r \in [0, 1)$ se define la función $u_r : \mathbb{T} \to X$ como $u_r(t) = u(re^{it})$. Así

$$h^E(\mathbb{D}, X) = \{u : \mathbb{D} \to X \text{ armón.}, \sup_{r \in [0,1)} \|u_r\|_{E(X)} < \infty\}$$

En él se toma como norma el funcional $\|u\|_{E(X)} = \sup_{r \in [0,1)} \|u_r\|_{E(X)}$.

En primer lugar se procede a resolver la situación del espacio de Hardy-Köthe en el caso escalar, de mayor facilidad y para su aplicación posterior.

Teorema 2.37 *Sea E un espacio invariante por traslaciones de manera que su asociado, E', tiene norma absolutamente continua. Entonces $E = h^E(\mathbb{K})$ es una isometría dada por la integral de Poisson.*

Prueba: La prueba es trasladable desde el caso clásico, pues bajo las hipótesis del enunciado se tiene que E' es separable.

Si $f \in E$, se tiene que $P[f]$ es una función armónica escalar de manera que $\|P[f]_r\|_E \leq \|f\|_E$ por la desigualdad de Young. Si $u \in h^E(\mathbb{K})$ es armónica, la red $(u_r)_{r\in[0,1)}$ está contenida en una bola del espacio E, que se puede identificar con $(E')^*$ —pues $E = E'' = (E')'$, y dado que E' tiene norma absolutamente continua, entonces su dual y asociado coinciden—. Además E' es separable, por lo cual la bola del espacio $(E')^*$ es metrizable y compacta para la topología débil*, y por tanto se puede encontrar una subsucesión $r_n \nearrow 1$ de manera que u_{r_n} converge en la topología débil-* de $(E')^*$ (es decir, de E). Así, existe una función $g \in E$ tal que

$$\int_{\mathbb{T}} g(\theta)h(\theta)d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} u_{r_n}(\theta)h(\theta)d\theta$$

para cualquier función $h \in E'$. Sea $z = re^{it}$. Tomando como función h la función $P_r(t-\cdot)$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} g(\theta)P_r(t-\theta)d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} u_{r_n}(\theta)P_r(t-\theta)d\theta.$$

Esta igualdad se puede reescribir como $P[g](z) = \lim_n P[u_{r_n}](z)$. Al ser u_{r_n} una función continua en $\mathbb{T}$ (pues es la restricción de una función armónica), la unicidad del problema de Dirichlet nos permite escribir la relación $P[u_{r_n}](z) = u(r_n z)$, y por tanto, la continuidad de u implica que $P[g](z) = u(z)$ para cada $z \in \mathbb{D}$. Finalmente, dado que g es el límite débil-* de la sucesión $(u_{r_n})_n$, se tiene que $\|g\|_E \leq \liminf_n \|u_{r_n}\|_E \leq \|u\|_E$. Y esto se traduce en la isometría biyectiva entre E y $h^E(\mathbb{K})$. $\square$

Nuestro próximo objetivo es encontrar las relaciones existentes entre espacios de funciones, medidas, operadores y funciones armónicas indexadas por espacios de funciones invariantes por reordenamiento. Dado que las relaciones entre funciones, medidas y operadores ya se han establecido, vamos a obtener el resultado más general posible para de él deducir los otros resultados

Todos los resultados alcanzados en el caso de Hardy-Lebesgue han sido abordados de dos maneras distintas. Por una parte se consigue realizar las pruebas para el rango de exponentes $1 < p \leq \infty$, mientras que el caso $p = 1$ requiere de una consideración especial. Aquí se va a abordar el caso general, remitiendo al lector a [Blsc] para el caso extremo $p = 1$.

Para empezar vamos a recurrir al llamado espacio de Hardy-Köthe-Bochner débil.

Definición 2.38 *Sea E un espacio de funciones invariante por traslaciones y X un espacio de Banach. Se define, en el conjunto de funciones armónicas del disco unidad, el espacio de Hardy-Köthe-Bochner débil $h^E_w(\mathbb{D}, X)$ (abreviado como espacio de Hardy débil $h^E_w(X)$).*

$$h^E_w(\mathbb{D}, X) = \{u : \mathbb{D} \to X : \ x^*u \in h^E(\mathbb{K}) \ \forall x^* \in X^*\}$$

En él se toma como norma el funcional $\|u\|_{w,E(X)} = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|x^*u\|_E$.

La primera observación es la inclusión continua $h^E(X) \subset h^E_w(X)$. Por un lado, toda función armónica es débilmente armónica. Además, para cada $x^* \in X^*$, $u \in h^E(X)$ y $r \in [0,1)$ se tiene la igualdad de funciones $(x^*u)_r = x^*u_r$. Como $|x^*u_r(t)| \leq \|x^*\|\|u_r(t)\|_X$ se tiene que $\|(x^*u)_r\|_E \leq \|x^*\|\|u_r\|_{E(X)}$, y en consecuencia $\|u\|_{w,E(X)} \leq \|u\|_{E(X)}$.

Veamos cómo, bajo cierta hipótesis, el espacio de funciones armónicas de Hardy-Köthe-Bochner débil es isométrico al espacio de operadores lineales y continuos.

Teorema 2.39 *Sea E un espacio invariante por traslaciones y X un espacio de Banach arbitrario. Supóngase que E' tiene norma absolutamente continua. Entonces $P[\ ] : L(E', X) \to h^E_w(X)$ es una isometría biyectiva.*

Prueba: Es inmediato de la definición que el operador $P[\ ]$ es lineal. Sea $T \in L(E', X)$. Veamos que para cada $x^* \in X^*$ se tiene que $x^*P[T] = P[x^*T]$.

En efecto si $re^{it} \in \mathbb{D}$, entonces

$$\begin{aligned} x^*P[T](re^{it}) &= \langle P[T](re^{it}), x^*\rangle \\ &= \langle T(P_r(t-\cdot)), x^*\rangle \\ &= (x^*T)(P_r(t-\cdot)) \\ &= P[x^*T](re^{it}). \end{aligned}$$

El funcional x^*T pertenece esta vez a $(E')^*$, que por la hipótesis coincide con $E'' = E$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \|P[T]\|_{w,E(X)} &= \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|x^*P[T]\|_E \\ &= \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|P[x^*T]\|_E \\ &= \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|x^*T\|_E \\ &= \|T\|, \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad es consecuencia de aplicar la isometría $E = h^E$ (vía la integral de Poisson demostrada en 2.37).

Veamos la sobreyectividad. Sea $u : \mathbb{D} \to X$ una función de $h^E_w(X)$. Para cada $x^* \in X^*$ se tiene que $x^*u \in h^E(\mathbb{K})$, por tanto le corresponde una función $f_{x^*} \in E$ (de nuevo usamos la isometría del caso real) de manera que, para cada $re^{it} \in \mathbb{D}$

$$x^*u(re^{it}) = \int_{\mathbb{T}} f_{x^*}(s)P_r(t-s)ds.$$

Sea entonces $T : E' \to X^{**}$ definido para cada $\psi \in E'$ y cada $x^* \in X^*$ como

$$\langle x^*, T(\psi)\rangle = \int_{\mathbb{T}} f_{x^*}(t)\psi(t)dt.$$

Cabe decir que dado que $P[\ ] : E \to h^E$ es una isometría lineal, entonces $(P[\ ])^{-1} : h^E \to E$ es también isometría lineal, por lo cual la aplicación $x^* \mapsto f_{x^*}$

resulta ser composición de dos lineales y, por tanto, lineal. Esto justifica que el elemento $T(\psi)$ es lineal sobre X^* para cada $\psi \in E'$. Para ver que pertenece a X^{**}, y que además $T \in L(E', X^{**})$, tenemos que

$$|\langle x^*, T(\psi)\rangle| \leq \|f_{x^*}\|_E \|\psi\|_{E'} = \|x^* u\|_E \|\psi\|_{E'} \leq \|x^*\| \|u\|_{w,E(X)} \|\psi\|_{E'}.$$

De hecho se obtiene que $\|T\| \leq \|u\|_{w,E(X)}$. Para ver que $u = P[T]$, sea $re^{it} \in \mathbb{D}$ y $x^* \in X^*$.

$$\begin{aligned}
\langle x^*, P[T](re^{it})\rangle &= \langle x^*, T(P_r(t - \cdot))\rangle \\
&= \int_{\mathbb{T}} f_{x^*}(s) P_r(t-s) ds \\
&= P[f_{x^*}](re^{it}) \\
&= x^* u(re^{it}) \\
&= \langle u(re^{it}), x^*\rangle.
\end{aligned}$$

Lo único que resta por probar es que T toma valores en X. Al tener E' la norma absolutamente continua, disponemos de la convergencia $P_r * f \to f$ en E' cuando $r \nearrow 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
T(\psi) &= \lim_{r \nearrow 1} T(P_r * \psi) \\
&= \lim_{r \nearrow 1} T(\int_{\mathbb{T}} P_r(\cdot - s)\psi(s) ds) \\
&= \lim_{r \nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} T(P_r(\cdot - s))\psi(s) ds \\
&= \lim_{r \nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} T(P_r(s - \cdot))\psi(s) ds \\
&= \lim_{r \nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} P[T]_r(s)\psi(s) ds \\
&= \lim_{r \nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} u_r(s)\psi(s) ds \in X.
\end{aligned}$$

Se ha aplicado el teorema de Hille (p. 3) a la función $P_r(\cdot - s)$ por ser integrable Bochner respecto de la medida $\psi(s)\, ds$ (la desigualdad de Hölder, por ejemplo, lo garantiza). Al final, dado que $u_r \in E(X)$ y $\psi \in E'$, la integral está bien definida como un elemento de X. □

Resuelto el problema del espacio de funciones armónicas de Hardy-Köthe-Bochner débil, pasamos a establecer el próximo resultado sobre el espacio de Hardy fuerte. El resultado anterior nos indica que la integral de Poisson establece una isometría entre todos los operadores lineales y continuos de E' en X y el espacio $h^E_w(X)$. Como subespacio que es $h^E(X)$, con una norma propia, de $h^E_w(X)$, la búsqueda de su imagen isométrica vía la integral de Poisson estará ubicada dentro de $L(E', X)$, y será un subespacio que goce de una norma propia, no la inducida por el espacio. El resultado es el siguiente.

Teorema 2.40 *Sea E un espacio invariante por traslaciones y X un espacio de Banach arbitrario. Supóngase que E' tiene norma absolutamente continua. Entonces $P[\ ] : \mathcal{D}(E', X) \to h^E(X)$ es una isometría biyectiva.*

Prueba: Sea $T \in \mathcal{D}(E', X) \subset L(E', X)$. Entonces sabemos que $P[T] \in h^E_w(X)$ y $\|P[T]\|_{w,E(X)} = \|T\|$. Veamos que $P[T] \in h^E(X)$ y $\|P[T]\|_{E(X)} = |||T|||_E$.

Para empezar, el corolario 2.18, nos da la existencia de una función $\varphi \in E$ no negativa tal que $\|T\psi\|_X \leq \int_{\mathbb{T}} \varphi(t)|\psi(t)|dt$ para cada $\psi \in E'$, y con $\|\varphi\|_E = |||T|||_E$. Sea $re^{it} \in \mathbb{D}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|P[T](re^{it})\|_X &= \|T(P_r(t - \cdot))\|_X \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \varphi(s)|P_r(t-s)|ds \\
&= P[\varphi](re^{it})
\end{aligned}$$

Dado que $\varphi \in E$, podemos asegurar de la desigualdad escrita que $P[T] \in h^E(X)$ puesto que $\|P[T]\|_{E(X)} \leq \|P[\varphi]\|_E = \|\varphi\|_E = |||T|||_E$. Así tenemos que $P[\ ]$ es inclusión continua.

Sea ahora $u \in h^E(X) \subset h^E_w(X)$. Entonces $u = P[T]$ para un cierto operador T de $L(E', X)$. Para evaluar $|||T|||_E$, sea $s = \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A$ una función simple de la bola unidad de E'. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\, \|T(\chi_A)\|_X &= \lim_{r\nearrow 1} \sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\, \|T(P_r * \chi_A)\|_X \\
&= \lim_{r\nearrow 1} \sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\, \|T(\int_A P_r(\cdot - s)ds)\|_X \\
&\leq \sup_{r\in[0,1)} \sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \int_A \|T(P_r(\cdot - s))\|_X ds \\
&= \sup_{r\in[0,1)} \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\chi_A(s) \right) \|T(P_r(\cdot - s))\|_X ds \\
&\leq \sup_{r\in[0,1)} \| \|P[T]_r\|_X \|_E \\
&= \sup_{r\in[0,1)} \|P[T]_r\|_{E(X)} \\
&= \|P[T]\|_{E(X)}.
\end{aligned}$$

Se ha vuelto a usar la hipótesis sobre E' en la convergencia indicada por el límite usado, el teorema de Hille para introducir el operador T en la integral, la desigualdad de Minkowski integral y la desigualdad de Hölder. Tenemos, pues, que $u = P[T]$ con $T \in \mathcal{D}(E', X)$ y $|||T|||_E \leq \|u\|_{E(X)}$. Uniendo este hecho al anterior, $P[\ ]$ sale isometría biyectiva y el resultado queda probado. $\square$

Como consecuencia de este teorema y de resultados previos obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 2.41 *Sea E un espacio invariante por traslaciones y X un espacio de Banach arbitrario. Supóngase que E' tiene norma absolutamente continua. Entonces:*

- $E(X) \subset h^E(X)$ *de manera isométrica vía la integral de Poisson.*
- $E(X) = h^E(X)$ *si y sólo si* $X \in (RNP)$.
- $V_E(X) = h^E(X)$.
- $\Pi^{1,+}(E', X) = h^E(X)$.
- $[E'(X)]^* = h^E(X^*)$

Capítulo III

Espacios de medidas vectoriales sobre espacios invariantes por reordenamiento

Los espacios invariantes por reordenamiento tienen una motivación clara a partir de los espacios clásicos, pues en ellos se observa de manera inmediata que la norma de una función (o sucesión) depende de los valores que ella toma y de la medida de los conjuntos sobre los que toma dichos valores. Otra propiedad que se cumple en la gran parte de los espacios de funciones clásicos es la propiedad (J). En efecto, si f es una función de $L^\infty(\mu, X)$, para cualquier partición π de Ω, la desigualdad

$$\| \sum_{A \in \pi} \frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)} \chi_A \|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

es trivial. Se puede probar, aunque menos trivialmente, que la situación se repite en el resto de espacios de Lebesgue-Bochner ([DiUh, pp. 67, 123]), y que continua manteniendo vigencia en la familia de espacios de Orlicz-Bochner ([115, Thm. I.9 & Thm. II.4]). Más aún, cuando se estudian los espacios de funciones de Banach que son invariantes por reordenamiento se prueba que todos ellos satisfacen la desigualdad previa ([BeSh, p. 61]). La propiedad (J) —definida por ejemplo en [Gret, p. 7] y resaltada aquí en la página 29— es, por tanto, más general que la de ser invariante por reordenamiento.

La primera sección de este capítulo tiene como objetivo poner de manifiesto que el concepto de E-variación que se ha definido en esta memoria generaliza al concepto de E-variación presentado por N. E. Gretsky y J. J. Uhl en [GrUh]. En la referencia citada, la E-variación se define para cada espacio de funciones de Banach E cuya norma ρ cumple las propiedades:

- $\rho(f) \geq 0$, y $\rho(f) = 0$ si y sólo si $f = 0$

- $\rho(af) = a\rho(f)$ para $a \geq 0$.
- $\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$
- $f \leq g$ implica $\rho(f) \leq \rho(g)$

donde $f, g \in \mathcal{M}^+$.

Además se le pide a la norma ρ la propiedad de Fatou débil, (WFP), y la propiedad (J). En nuestro caso, aunque hemos le hemos exigido a la norma la propiedad de Fatou fuerte, (SFP) —y en principio parece que perdemos el grado de generalidad pretendido—, no precisamos de la propiedad (J). El proceso de generalización pretendido culmina con éxito en el momento en que se prueba la equivalencia de conceptos para todo espacio de funciones al que se le exija la propiedad (J), ya que en el capítulo siguiente se trabaja con un espacio de funciones para el cual la E-variación clásica queda inaplicable, mientras que la presente puede plantearse y se obtienen resultados concretos.

En la segunda sección, una observación hecha sobre las medidas que tienen E-variación finita nos genera la definición de dos nuevos espacios relacionados. Se define el concepto de (E, ∞)-variación y, si bien en un caso general no se perfila una aplicación de éste, en el caso de los espacios invariantes por reordenamiento se obtiene que coincide con la $M(E)$-variación, donde $M(E)$ es uno de los espacios de Lorentz asociado al espacio E.

En la tercera sección se hace un estudio de los espacios de medidas de Lorentz $V^{p,q}(\mu, X)$. Un repaso sobre los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ y sus precursores, los espacios de Lebesgue-Marcinkiewicz $L^{p,\infty}$, nos permiten situar a los espacios de medidas en el contexto presente. Aunque se tiene la posibilidad de definir el espacio de medidas de Lorentz $V^{p,q}(\mu, X)$ como el espacio de las medidas de E-variación finita, donde $E = L^{p,q}$, se va a apostar por una definición alternativa —en función de los llamados módulos de continuidad de las medidas—, que también se puede extender a la clase de los espacios invariantes por reordenamiento.

Por último, en la cuarta sección se hace una exposición sobre los espacios de medidas de Orlicz $V^{\Phi}(\mu, X)$. Estos espacios de medidas se introdujeron en [114, 115] donde, aunque no se menciona explícitamente la propiedad (J), ésta juega un lugar clave. De hecho, estos trabajos forman, presumiblemente, el germen de la idea que culminaría en [Gret].

3.1 E-variación en espacios invariantes por reordenamiento

La expresión de la E-variación de una medida vectorial F requiere de la evaluación de las expresiones

$$\sum_{A \in \pi} |\alpha_A| \, \|F(A)\|_X$$

para cada función simple $s = \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A$ de la bola unidad de E'. Este proceso puede considerarse algo complejo, ya que requiere del conocimiento del espacio E', asociado a E.

El conocimiento de los casos clásicos nos provee de una expresión que busca su generalización en [Gret]. En efecto, la p-variación de una medida vectorial F se puede escribir como

$$|F|_p = \sup_{\pi\in D_\Omega} \left(\sum_{A\in\pi} \frac{\|F(A)\|_X^p}{\mu(A)^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Esta expresión no es más que

$$|F|_p = \sup_{\pi\in D_\Omega} \| \sum_{A\in\pi} \frac{F(A)}{\mu(A)} \chi_A \|_{L^p(\mu,X)}.$$

El paso siguiente involucra a los espacios de Orlicz, una familia de espacios que generaliza a la de los espacios de Lebesgue. En este caso, y como se verá en la sección 3.4.2, la denominada Φ-variación se define, de forma algo indirecta, en [115] como

$$|F|_\Phi = \sup_{\pi\in D_\Omega} \| \sum_{A\in\pi} \frac{F(A)}{\mu(A)} \chi_A \|_{L^\Phi(\mu,X)}.$$

Lo cierto es que se define primero un funcional $I_\Phi(F)$ para cada medida, dado por

$$I_\Phi(F) = \sup_{\pi\in D_\Omega} \sum_{A\in\pi} \Phi\left(\frac{\|F(A)\|_X}{\mu(A)} \right) \mu(A)$$

que no es una norma, pero que contiene la idea de las particiones. La norma viene dada por

$$|F|_\Phi = \inf\{k > 0 : \ I_\Phi(F/k) \leq 1\},$$

que se llama norma de Luxemburg y da la Φ-variación.

La generalización de este concepto se debe a N. E. Gretsky en [Gret]. La E-variación que se presenta alcanza a todo espacio de funciones de Banach E al que se le exige la propiedad (J).

En los casos vistos, la E-variación se puede calcular tomando supremos de normas de funciones simples, pero esta vez sin salir del espacio de partida E. La generalización de las anteriores variaciones se materializa en [Gret, GrUh].

Definición 3.1 ([GrUh, p. 267]) *Sean E un espacio de funciones de Banach y X un espacio de Banach arbitrario. Sea $F : \Sigma \to X$ una medida finitamente aditiva. Para cada π partición finita de Ω se define la función proyección de F en π, denotada con $E_\pi(F)$, a la función simple vectorial*

$$\sum_{A\in\pi} \frac{F(A)}{\mu(A)} \chi_A.$$

Se define entonces la $*E$-variación como

$$|F|_{*E} = \sup_{\pi \in D_\Omega} \|E_\pi(F)\|_{E(X)}.$$

donde D_Ω es el conjunto de las particiones finitas de Ω.

Se puede ver en [Dinc, p. 249] que la E-variación coincide con la $*E$-variación en el caso de $E = L^p$, y en [116, 42] que coinciden en el caso $E = L^\Phi$. Vamos a ver a continuación, de forma más general, que cuando el espacio E en cuestión es un espacio invariante por reordenamiento, se tiene la igualdad entre E-variación y $*E$-variación, y remitimos al lector a la sección 4.1 para encontrar un ejemplo de espacio E (no invariante por reordenamiento) donde ambas variaciones difieren (de hecho, una de ellas no es aplicable).

Proposición 3.2 *Sean E un espacio de funciones de Banach, X un espacio de Banach arbitrario y F una medida vectorial con valores en X. Entonces:*

- $|F|_E \leq |F|_{*E}$
- *Si además E es invariante por reordenamiento, entonces* $|F|_E = |F|_{*E}$.

Prueba: (I) Escribimos los dos supremos

$$|F|_E = \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\|F(A)\|_X \ : \ \pi \in D_{,\Omega} \ \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A\chi_A\|_{E'} \leq 1\},$$
$$|F|_{*E} = \sup\{\|\sum_{A\in\pi} \tfrac{\|F(A)\|_X}{\mu(A)}\chi_A\|_E \ : \ \pi \in D_\Omega\}.$$

Es inmediato que si $\pi \in D_\Omega$ y $s = \sum_{A\in\pi} \alpha_A\chi_A$ con $\|s\|_{E'} \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\|F(A)\|_X &= \int_\Omega (\sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\chi_A)(\sum_{A\in\pi} \tfrac{\|F(A)\|_X}{\mu(A)}\chi_A)d\mu \\ &\leq \|\sum_{A\in\pi} \tfrac{\|F(A)\|_X}{\mu(A)}\chi_A\|_E \\ &\leq |F|_{*E}.\end{aligned}$$

Con lo que queda probada la primera parte.

(II) Si ahora E (y por tanto E') es invariante por reordenamiento, vamos a ver la coincidencia de ambos supremos. Tomamos $\pi \in D_\Omega$, y entonces

$$\begin{aligned}\|\sum_{A\in\pi} \tfrac{\|F(A)\|_X}{\mu(A)}\chi_A\|_E &= \sup\{\int_\Omega (\sum_{A\in\pi} \tfrac{\|F(A)\|_X}{\mu(A)}\chi_A)gd\mu \ : \ \|g\|_{E'} \leq 1\} \\ &= \sup\{\sum_{A\in\pi} (\tfrac{\int_A gd\mu}{\mu(A)})\|F(A)\|_X \ : \ \|g\|_{E'} \leq 1\} \\ &= \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A|\|F(A)\|_X \ : \ \|\sum_{A\in\pi} \alpha_A\chi_A\|_{E'} \leq 1\},\end{aligned}$$

donde, en el último paso se usa la desigualdad

$$\| \sum_{A \in \pi} (\frac{\int_A g d\mu}{\mu(A)}) \chi_A \|_{E'} \leq \|g\|_{E'} \leq 1$$

por ser E' invariante por reordenamiento. Esto prueba que $|F|_E = |F|_{*E}$. $\square$

Como se comentaba, la clave de la igualdad en la proposición anterior estriba en la propiedad (J) que todo espacio invariante por reordenamiento satisface (p. 40). Así, la proposición adquiere un talante más general si se reemplaza la condición sobre E de ser espacio invariante por reordenamiento por la propiedad (J).

Nota 3.3 *Es de destacar, para una mayor aclaración, que la igualdad de normas es consecuencia de la propiedad de Fatou fuerte, (SFP). Sin esa hipótesis se consigue una equivalencia entre $|\cdot|_E$ y $|\cdot|_{*E}$, dado que las normas en E y en E'' no coincidirían, sino que serían a su vez equivalentes.*

Por otra parte, una consecuencia de la igualdad de normas demostrada es la siguiente: Si E es un espacio invariante por reordenamiento (o bien satisface la propiedad (J)), entonces

$$\begin{aligned} |F|_E &= \sup_\pi \|E_\pi(F)\|_{E(X)} \\ &= \sup_\pi \| \, \|E_\pi(F)\|_X \|_E \\ &= \sup_\pi \|E_\pi(|F|)\|_E. \end{aligned}$$

El siguiente concepto de función maximal asociada a una medida tiene su contexto en el espacio de medida $([0,1], \mathcal{B}, m)$. A continuación se verá la relación de esta función maximal asociada a una medida vectorial, con la función maximal de Hardy-Littlewood (ver p. 31).

Definición 3.4 *Dada una medida F finitamente aditiva y de variación total acotada, definimos la llamada función maximal F^* asociada a F, dada por*

$$F^*(w) = \sup\{ \frac{|F|(A)}{\mu(A)} \ : \ A \ni w, A \ \textit{interv.} \ \}, \qquad w \in \Omega.$$

Esta función maximal sirve para volver a relacionar una clase de medidas con la correspondiente clase de funciones. Se puede ver en [Blsc] el caso $V^p(X)$-L^p. Aquí presentamos el caso general para espacios invariantes por reordenamiento, donde se intuye la limitación de un resultado de este tipo.

Proposición 3.5 *Sea E un espacio invariante por reordenamiento definido sobre $([0,1], \mathcal{B}, m)$, de manera que el índice de Boyd $\overline{\alpha_E} < 1$, y X un espacio de Banach. Entonces F es una medida de $V_E(X)$ si y sólo si F^* es una función de E.*

Prueba: Si $F \in V_E(X)$, por 2.6 tenemos la existencia de una función $\varphi \in E$ que representa a la medida variación total $|F|$ (además $\|f\|_E = |F|_E$). Entonces

$$F^*(w) = \sup\{\frac{|F|(A)}{m(A)} \ : \ A \ni w, A \text{ interv. } \} = M\varphi(w).$$

El teorema de Lorentz-Shimogaky (que precisa de la hipótesis sobre E) sobre la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood M, resuelve una implicación ([BeSh, p. 154]). Para la otra, suponiendo que F es una medida vectorial con $F^* \in E$, tenemos que la medida $|F|$ es finita (pues F^* es finita cpp.). Para cada intervalo A y cada $w \in A$ tenemos que

$$F^*(w) \geq \frac{|F|(A)}{m(A)}$$

En ese caso, $\int_A F^*(w)dm(w) \geq |F|(A)$, y si $s = \sum_{B\in\pi} \alpha_B \chi_B$ es una función simple donde la partición π está formada por intervalos B, disjuntos dos a dos, y $\|s\|_{E'} \leq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\pi} \alpha_B |F|(B) = \sum_{B\in\pi} \alpha_B \int_B F^*(w)dm(w) \\ = \int_\Omega (\sum_{B\in\pi} \alpha_B \chi_B) F^* dm \\ \leq \|F^*\|_E\end{aligned}$$

Dado que el conjunto de funciones simples soportadas sobre intervalos es denso se tiene el resultado. □

3.2 (E, ∞)-variación en espacios invariantes por reordenamiento

La motivación de este concepto abstracto es paralela a la que genera los espacios de Lebesgue-Marcinkiewicz a partir de los de Lebesgue, aunque esta vez con medidas. En esta sección se toma un espacio de funciones de Banach E invariante por reordenamiento arbitrario.

Sea una medida vectorial $F : \Sigma \to X$ con $|F|_E < \infty$. Una mirada al lema 2.2 y a la expresión alternativa de la norma $|F|_E$ dada en 2.5 nos da las acotaciones

$$\|F(A)\|_X \leq |F|_E \|\chi_A\|_{E'} \qquad |F|(A)_X \leq |F|_E \|\chi_A\|_{E'}$$

para cada medible $A \in \Sigma$. Tomándolas como punto de partida definimos los espacios de medida siguientes.

Definición 3.6 *Sea E un espacio de funciones de Banach cualquiera y sea X un espacio de Banach arbitrario. Dentro del conjunto de las medidas finitamente aditivas con valores en X y absolutamente continuas respecto de μ, se definen los* *espacios $V_{E,\infty}(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ y $\mathcal{V}_{E,\infty}(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ de Banach-Marczinkiewicz fuerte y débil, respectivamente, como aquellos que contienen las medidas anteriores que cumplan las desigualdades*

$$|F|(A)_X \leq C\|\chi_A\|_{E'}$$
$$\|F(A)\|_X \leq C'\|\chi_A\|_{E'}$$

para cualquier $A \in \Sigma$, y donde C y C' son constantes que dependen únicamente de E y de F) respectivamente. Se omitirá en la notación el espacio de medida si no hay confusión. Las normas a considerar en estos espacios son

$$\|F\|_{V_{E,\infty}(X)} = \sup_{\mu(E)>0} \frac{|F|(E)}{\|\chi_E\|_{E'}} \qquad \|F\|_{\mathcal{V}_{E,\infty}(X)} = \sup_{\mu(E)>0} \frac{\|F(E)\|}{\|\chi_E\|_{E'}}.$$

Proposición 3.7 *Los espacios $V_{E,\infty}(X)$ y $\mathcal{V}_{E,\infty}(X)$, dotados de las normas antes citadas, son espacios de Banach.*

Prueba: Probaremos un caso, siendo el otro similar. La condición de normas es de fácil comprobación. Si $\{F_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{V}_{E,\infty}(X)$, la condición de Cauchy hace que para cada $A \in \Sigma$ se tenga que $\{F_n(A)\}_n$ es de Cauchy en X y, por tanto, F_n converge puntualmente a una cierta función de conjunto que denotaremos por F. Es decir

$$F(A) := \lim_n F_n(A), \qquad A \in \Sigma.$$

Esta función de conjunto resulta ser medida finitamente aditiva (por propiedades del límite) y μ-continua (por corolario al teorema de Vitali-Hahn-Saks, [DiUh, p. 24]). La prueba de que F_n converge a F en norma es inmediata. Sea $\varepsilon > 0$. La condición de Cauchy da la existencia de un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de manera que si $n, m \geq n_\varepsilon$, entonces

$$\|F_n(A) - F_m(A)\|_X \leq \varepsilon\|\chi_A\|_{E'}$$

para todo medible A. Tomando límites en $m \to \infty$ obtenemos que

$$\|F_n(A) - F(A)\|_X \leq \varepsilon\|\chi_A\|_{E'}$$

para todo medible A y, por tanto, $\|F_n - F\|_{\mathcal{V}_{E,\infty}(X)} \leq \varepsilon$. $\square$

Las relaciones de inclusión

$$\begin{array}{ccc} V_E(X) & \subset & \mathcal{V}_E(X) \\ \cap & & \cap \\ V_{E,\infty}(X) & \subset & \mathcal{V}_{E,\infty}(X) \end{array}$$

son inmediatas de la definición. Por otro lado, veamos cómo los espacios de Lorentz asociados a E, es decir, $\Lambda(E)$ y $M(E)$, se convierten en los adecuados para asimilar esta familia de espacios de medidas vectoriales.

En el paso de medidas a operadores, una medida F de $\mathcal{V}_{E,\infty}(X)$ genera un operador que toma valores en un espacio de funciones escalares T_F de la forma

$$T_F(\chi_A) = F(A), \qquad A \in \Sigma.$$

Por linealidad se puede escribir

$$\|T_F(\sum_A \alpha_A \chi_A)\|_X = \| \sum_A \alpha_A F(A)\|_X$$

y obtener así la imagen de cada función simple. La acotación asociada al espacio de medidas de (E,∞)-variación acotada

$$\|F(A)\|_X \leq C\|\chi_A\|_{E'}$$

contribuye a formar la desigualdad

$$\|T_F(\sum_A \alpha_A \chi_A)\|_X = \| \sum_A \alpha_A F(A)\|_X \leq C \sum_A |\alpha_A| \, \|\chi_A\|_{E'}.$$

La desigualdad triangular aplicada supone una gran pérdida de información, excepto en el caso del espacio de Lorentz $\Lambda(E')$. Remitimos al lector a 1.45 y siguiente (p. 37) para que observe cómo en el espacio de Lorentz $\Lambda(E')$, la desigualdad triangular antes citada no supone ninguna pérdida.

Con esta observación, el siguiente resultado nos indica que el concepto de (E,∞)-variación no se aleja demasiado del concepto de E-variación, únicamente se corresponde con un cambio en el espacio que proporciona el tipo de variación (siempre que E sea invariante por reordenamiento).

Proposición 3.8 *Sea E un espacio invariante por reordenamiento y X un espacio de Banach arbitrario. Entonces se tienen las isometrías:*

- $\mathcal{V}_{E,\infty}(X) = \mathcal{V}_{M(E)}(X)$.
- $V_{E,\infty}(X) = V_{M(E)}(X)$.

Prueba: La clave de esta proposición es el lema 1.45.

Las sencillas estimaciones (procedentes de las expresiones, en forma de supremo, que definen $\|F\|_{M(E)}$ y $|F|_{M(E)}$)

$$\|F(A)\|_X \leq \|F\|_{M(E)}\|\chi_A\|_{E'} \qquad |F|(A) \leq |F|_{M(E)}\|\chi_A\|_{E'}$$

válidas para cada medible A, implican las desigualdades

$$\begin{aligned}\|F\|_{\mathcal{V}_{E,\infty}(X)} &\leq \|F\|_{M(E)}\\ \|F\|_{V_{E,\infty}(X)} &\leq |F|_{M(E)}.\end{aligned}$$

Para conseguir las igualdades es crucial la relación $[M(E)]' = \Lambda(E')_b$ (p. 39). Escribiendo las normas en sus expresiones más convenientes (ver p. 37),

$$\begin{aligned}\|F\|_{M(E)} &= \sup\{\| \sum_A \alpha_A F(A)\|_X \ : \ \| \sum_A \alpha_A \chi_A\|_{\Lambda(E')} \leq 1\}\\ &= \sup\{\| \sum_B \beta_B F(B)\|_X \ : \ \sum_B \beta_B \|\chi_B\|_{E'} \leq 1\}\\ &\leq \|F\|_{\mathcal{V}_{E,\infty}(X)}.\end{aligned}$$

De igual modo

$$\begin{aligned}
|F|_{M(E)} &= \sup\{\sum_A |\alpha_A||F|(A) \ : \ \|\sum_A \alpha_A \chi_A\|_{\Lambda(E')} \le 1\} \\
&= \sup\{\sum_B \beta_B |F|(B) \ : \ \sum_B \beta_B \|\chi_B\|_{E'} \le 1\} \\
&\le \|F\|_{V_{E,\infty}(X)}.
\end{aligned}$$

□

Una prueba alternativa de la proposición anterior, correspondiente al espacio $V_{E,\infty}(X)$, puede ser obtenida por medio de lo que se definirá más adelante como módulo de continuidad de una medida vectorial (p. 92).

El corolario que relaciona estos espacios de medida con los de operadores es inmediato.

Corolario 3.9 *Sea E un espacio invariante por reordenamiento y X un espacio de Banach arbitrario. Entonces se tienen los contenidos isométricos:*

- $\mathcal{V}_{E',\infty}(X) \subset L(\Lambda(E)_b, X)$.
- $V_{E',\infty}(X) \subset \Pi^{1,+}(\Lambda(E)_b, X)$.

que se convierten en igualdades si y sólo si $\varphi_E(0^+) = 0$.

Prueba: Ver proposición 2.11 y teorema 2.20. La igualdad es equivalente a la condición $\Lambda(E)_a = \Lambda(E)_b$, pero se ha visto en 1.44 que ésta equivale a $\varphi_E(0^+) = 0$. □

Del mismo modo que los espacios de Lorentz $\Lambda(E)$ y $M(E)$ asociados a un espacio invariante por reordenamiento E cumplían la propiedad de ser mínimo y máximo, respectivamente, compartiendo función fundamental φ_E, los espacios de medidas trasladan esta propiedad, formando el siguiente diagrama de inclusiones continuas

$$\begin{array}{ccccccc}
V_{\Lambda(E)}(X) & \subset & V_E(X) & \subset & V_{M(E)}(X) & = V_{E,\infty}(X) \\
\cap & & \cap & & \cap & \\
\mathcal{V}_{\Lambda(E)}(X) & \subset & \mathcal{V}_E(X) & \subset & \mathcal{V}_{M(E)}(X) & = \mathcal{V}_{E,\infty}(X)
\end{array}$$

Estos espacios de medidas vectoriales relacionados entre sí se podrían llamar espacios de medidas vectoriales de Lorentz relacionados con el espacio $V_E(X)$, pero dicha denominación se deja para los espacios de medidas que vienen a continuación, que basan su variación en funciones que pertenecen a los espacios de funciones de Lorentz $L^{p,q}$. Antes de entrar en ellos haremos una observación.

Los módulos de continuidad de una medida vectorial se definen más adelante (p. 92) por venir motivados para el estudio de los espacios de medidas de Lorentz. Sin embargo, éstos tienen cabida en esta sección y remitimos al lector a su definición (3.27, p. 92). La observación que se pretende hacer es relativa a las nuevas expresiones que se les puede dar a las normas de los espacios $\mathcal{V}_{E,\infty}(X)$ y $\mathcal{V}_{E,\infty}(X)$. En efecto, para un medible A de medida t,

$$\|F\|_{V_{E,\infty}(X)} = \sup_{\mu(E)>0} \frac{|F|(E)}{\|\chi_E\|_{E'}} = \sup_{t\in I} \frac{\omega_F(t)}{\varphi_{E'}(t)} = \|\frac{\omega_F}{\varphi_{E'}}\|_\infty$$

$$\|F\|_{\mathcal{V}_{E,\infty}(X)} = \sup_{\mu(E)>0} \frac{\|F(E)\|}{\|\chi_E\|_{E'}} = \sup_{t\in I} \frac{\widetilde{\omega}_F(t)}{\varphi_{E'}(t)} = \|\frac{\widetilde{\omega}_F}{\varphi_{E'}}\|_\infty.$$

Teniendo en cuenta que $\varphi_E(t)\varphi_{E'}(t) = t$, también se puede escribir

$$\|F\|_{V_{E,\infty}(X)} = \|\frac{\varphi_E(t)}{t}\omega_F(t)\|_\infty$$

$$\|F\|_{\mathcal{V}_{E,\infty}(X)} = \|\frac{\varphi_E(t)}{t}\widetilde{\omega}_F(t)\|_\infty,$$

lo cual sirve para comprobar lo acertado de la notación escogida para estos espacios.

3.3 Espacios de medidas vectoriales de Lorentz

Los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, introducidos por R. A. Hunt en [55, Hunt], vienen motivados por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz. El autor parte de éste para definir una familia graduada de espacios que se ajusta a dicho teorema y que, de hecho, le permite obtener un resultado (en la línea del citado) en el que relaja las hipótesis y refuerza las conclusiones. La familia de espacios de Lorentz incluye, por tanto, a los conocidos espacios de Lebesgue y a los espacios de Marcinkiewicz (o de Lebesgue débiles) en una teoría unificada y fructífera.

Damos una introducción sobre los espacios de funciones de Lorentz para introducir los correspondientes espacios de medidas vectoriales y probar los diversos resultados de representación de operadores lineales y continuos, dualidad.

3.3.1 Espacios de funciones de Marcinkiewicz y Lorentz escalares

Recordamos en primer lugar la notación de función de distribución $\mu_f(\lambda) = \mu(\{w \in \Omega : |f(w)| > \lambda\})$.

Si f es una cierta función escalar del espacio de Lebesgue L^p $(1 \le p < \infty)$ su norma viene dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(w)|^p d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Es fácil observar que para cada $\lambda > 0$

$$\|f\|_p^p \ge \int_{\{|f|>\lambda\}} |f(w)|^p d\mu(w) \ge \lambda^p \mu_f(\lambda).$$

Por tanto

$$\mu_f(\lambda) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\lambda} \right)^p .$$

Si $p = \infty$, es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \inf\{C > 0 : \ \mu_f(\lambda) = 0\} \\ &= \sup\{C > 0 : \ \mu_f(\lambda) > 0\}. \end{aligned}$$

De este modo quedan motivados unos nuevos espacios, relacionados con los espacios de Lebesgue y que los contienen. Son los llamados espacios de Lebesgue-Marcinkiewicz $L^{p,\infty}$ o L^p-débiles (weak-L^p).

Definición 3.10 *Sea $1 \leq p < \infty$. Se define el espacio de Marcinkiewicz de exponente p (también llamado L^p-débil, y denotado por $L^{p,\infty}$ o weakL^p), como el que reúne todas las funciones medibles escalares $f : \Omega \to \mathbb{K}$ para las cuales existe una constante $C > 0$ (dependiendo sólo de f y de p) tal que*

$$\mu(\{w \in \Omega : |f(w)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C}{\lambda} \right)^p$$

El funcional

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,\infty} &= \inf \left\{ C > 0 : \mu(\{w \in \Omega : |f(w)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C}{\lambda} \right)^p \right\} \\ &= \sup_{\lambda > 0} \lambda \ \mu(\{w \in \Omega : |f(w)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

define el espacio $L^{p,\infty}$, si bien no se trata de una norma. Éste se suele denotar también por $\|f\|_{weakL^p}$.

Por otro lado, el espacio de Marcinkiewicz de exponente infinito (denotado por $L^{\infty,\infty}$ o L^∞-débil), coincide con el espacio de Lebesgue L^∞ por la observación hecha anteriormente.

El contenido $L^p \subset L^{p,\infty}$ para $1 \leq p < \infty$ es trivial, tal y como se apuntaba en la motivación de esta clase de espacios. La igualdad

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \ \mu_f(\lambda)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t).$$

es sencilla de probar (ver [113, p. 191]). Con ella se demuestra de forma más sencilla la relación de inclusiones

$$L^q \subset L^{q,\infty} \subset L^p \subset L^{p,\infty}.$$

para $1 \leq p < q \leq \infty$, ya que

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \left(\int_\Omega |f(w)|^p d\mu(w) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^{\mu(\Omega)} f^*(t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^{\mu(\Omega)} [t^{\frac{1}{q}} f^*(t)]^p t^{-\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|f\|_{q,\infty} \left(\int_0^{\mu(\Omega)} t^{-\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\|f\|_{q,\infty}.
\end{aligned}$$

La expresión de las normas

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,\infty} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\
\|f\|_p &= \left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{p}{p} \int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

para $1 \leq p < \infty$ facilita la introducción de un segundo exponente que unifique a los espacios L^p y $L^{p,\infty}$ en una familia parametrizada ([Hunt, BeSh]).

Definición 3.11 (Espacio de funciones de Lorentz) *Sean* $0 < p, q \leq \infty$. *Se define el espacio de Lorentz de exponentes* p *y* q*, denotado por* $L^{p,q}$*, como aquel que reúne todas las funciones medibles escalares* $f : \Omega \to \mathbb{K}$ *para las cuales el funcional*

$$\|f\|^*_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left(\dfrac{q}{p} \displaystyle\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & (\ 0 < q < \infty) \\ \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & (q = \infty) \end{cases}$$

es finito. Se suele denotar también como $\|f\|^*_{p,q}$.

Se observa que el espacio $L^{\infty,q}$ para $0 < q < \infty$ se reduce a la función nula. Por otro lado $L^p = L^{p,p}$, mientras que $L^{p,\infty}$ es el espacio de Marcinkiewicz definido anteriormente.

Aunque la expresión $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$ no cumple, a priori, la desigualdad triangular (dado que si f, g son funciones, se tiene que solamente que $(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$ para $t_1, t_2 > 0$), se tiene un resultado parcial.

Proposición 3.12 ([BeSh, p. 218]) *Supóngase que* $1 \leq q \leq p < \infty$ *o bien* $p = q = \infty$. *Entonces* $(L^{p,q}, \|\cdot\|^*_{L^{p,q}})$ *es un espacio invariante por reordenamiento.*

La condición $1 \leq q \leq p < \infty$ es necesaria para probar que $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$ es una norma. La relación de inclusiones en la familia de los espacios de Lorentz tiene una primera resolución con la desigualdad

$$\|f\|^*_{p,q_2} \leq \|f\|^*_{p,q_1}$$

para cada f, la cual implica

$$L^{p,q_1} \subset L^{p,q_2}, \qquad 0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$$

para $0 < p \leq \infty$ y $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$. La desigualdad de normas antes citada es ajustada en el sentido que

$$\|\chi_A\|^*_{p,q} = \mu(A)^{\frac{1}{p}}$$

para $A \in \Sigma$ y $0 < p < \infty$, independientemente de $0 < q \leq \infty$ ([Hunt, p. 253]). Los espacios de Lorentz cuyo primer exponente difiere están relacionados en los siguientes casos:

- En espacios de medida finita:

$$L^{p,1} \subset L^p \subset L^{p,\infty} \subset L^{q,1} \subset L^q \subset L^{q,\infty}$$

  para $0 < q < p \leq \infty$.

- En espacios de medida donde $\mu(A) \geq 1$ para todo medible A tal que $\mu(A) > 0$ (tal y como ocurre en espacios de sucesiones): Denotando los espacios de Lorentz con la letra minúscula,

$$\ell^{p,1} \subset \ell^p \subset \ell^{p,\infty} \subset \ell^{q,1} \subset \ell^q \subset \ell^{q,\infty}$$

  para $0 < p < q \leq \infty$.

La desigualdad

$$\|f\|^*_{p,q} \leq \|f^{**}\|^*_{p,q} \leq p'\|f\|^*_{p,q},$$

válida para cada función medible f y para $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ (ver [BeSh, p. 219]), permite definir un segundo funcional en $L^{p,q}$ que sí satisface la desigualdad de Minkowski (de hecho es una norma)

$$\|f\|_{p,q} = \|f^{**}\|^*_{p,q}.$$

Con esta norma, $L^{p,q}$ es un espacio de funciones invariante por reordenamiento para $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ ([BeSh, p. 219]).

El espacio $L^{1,1}$ coincide con L^1 y se considera con la norma $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|^*_{1,1}$. El resto de espacios de la familia ($L^{1,q}$ con $1 < q \leq \infty$) queda sin posibilidad de ser normados (ver ejemplos de [Hunt, p. 260]).

Consideramos los aspectos relevantes de los espacios de Lorentz como espacios de funciones invariantes por reordenamiento. En primer lugar, es fácil ver que

$$\varphi_{L^{p,q}}(t) = t^{\frac{1}{p}}$$

es la función fundamental de $L^{p,q}$ para cualquier par de exponentes. Además, para $1 \leq p < \infty$ se tiene que $\Lambda(L^p) = L^{p,1}$ con la norma $\|\cdot\|^*_{p,1}$, y para $1 < p \leq \infty$ se sigue que $M(L^p) = L^{p,\infty}$ con la norma $\|\cdot\|_{p,\infty}$.

El conjunto de las funciones simples es denso en $L^{p,q}$ si $q \neq \infty$ ([Hunt, p. 258]). El resultado es independiente del espacio de medida, y la técnica usada para probarse se puede trasladar al caso de funciones vectoriales. Si $q = \infty$ y $1 \leq p < \infty$, el resultado de densidad es falso incluso en espacios de medida finita. Un ejemplo en $([0,1], dt)$ es la función $f(t) = f^*(t) = t^{-\frac{1}{p}}$, que no es aproximable en la norma de $L^{p,\infty}$ por funciones simples.

Con estas afirmaciones se puede resolver el cálculo de la parte absolutamente continua y de la clausura del conjunto de funciones acotadas, $(L^{p,q})_a$ y $(L^{p,q})_b$. Aplicando 1.38 y 1.43 se puede afirmar que:

- $(L^{p,q})_a = (L^{p,q})_b = L^{p,q}$ si $p = q = 1$ ó $1 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$.
- $(L^{p,\infty})_a = (L^{p,\infty})_b = \{f \in L^{p,\infty} : \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = 0\} \neq L^{p,\infty}$ si $1 < p < \infty$.
- $(L^\infty)_a = \{0\}$.

Los espacios $L^{p,1}$ para $1 \leq p < \infty$, por ser espacios Λ de otros espacios, tienen una norma muy especial (ver 1.45). La recordamos en la siguiente proposición.

Proposición 3.13 ([Hunt, 113]) *Si f es una función no negativa, ésta se puede escribir como suma de funciones no negativas f_i de manera que*

$$\|f\|^*_{p,1} = \sum_i \|f^*_i\|^*_{p,1}.$$

Como consecuencia de esto se puede hablar de acotación de operadores en estos espacios.

Proposición 3.14 ([Hunt, 113]) *Sea T un operador lineal que transforma funciones características χ_A (con $\mu(A) < \infty$) en vectores de un espacio de Banach X. Si se tiene la relación $\|T\chi_A\|_X \leq C\mu(A)^{\frac{1}{p}}$ para una constante $C > 0$ independiente del medible A, entonces T admite una extensión lineal única a un operador continuo de $L^{p,1}$ en X.*

El operador al que se hace mención en la proposición pertenecería, de hecho, a la clase de Dinculeanu $\mathcal{D}(L^{p,1}, X)$. Acabamos la exposición de esta familia de espacios con el cálculo del espacio asociado y dual.

La dualidad es atacada desde distintos puntos de vista. En [BeSh, p. 220] se calcula primero el espacio asociado (como espacio de funciones de Banach que es) resultando

Teorema 3.15 ([BeSh, p. 220]) *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida resonante y sean $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ (o bien $p = q = 1$ ó $p = q = \infty$). Entonces $(L^{p,q})' = L^{p',q'}$ con isomorfismo, donde los exponentes p, p' y q, q' son, respectivamente, conjugados.*

Como corolario de este teorema y de la coincidencia entre espacio dual y asociado (cuando se posee una norma absolutamente continua) se tiene

Corolario 3.16 ([BeSh, p. 221]) *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida resonante y sean $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ (o bien $p = q = 1$). Entonces $(L^{p,q})^* = L^{p',q'}$ es un isomorfismo.*

De manera directa, se prueba en [Hunt, p. 261]

Teorema 3.17 ([Hunt]) *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito. Entonces:*

- $(L^{p,1})^* = L^{p',\infty}$ *para* $1 \leq p < \infty$.
- $(L^{p,q})^* = L^{p',q'}$ *para* $1 < p, q < \infty$ *y, por tanto, estos espacios son reflexivos.*

El espacio de funciones vectoriales de Lorentz se forma como se expresa, de forma general, en la sección 1.6 y podría tomar el nombre de espacio de Lorentz-Bochner $L^{p,q}(\mu, X)$.

Definición 3.18 *Sea X un espacio de Banach y sean $1 \leq p, q \leq \infty$. Definimos el espacio de funciones vectoriales de Lorentz, denotado por $L^{p,q}(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ o $L^{p,q}(X)$, como el que reune las funciones $f : \Omega \to X$ fuertemente medibles y tales que la función no negativa $\|f\|_X$ pertenece al espacio de Lorentz de funciones escalares $L^{p,q}$. Se le puede llamar también espacio de Lorentz-Bochner.*

Proposición 3.19 *Sea $L^{p,q}(X)$ un espacio de funciones vectoriales de Lorentz. Entonces se tiene que:*

- $L^{p,q}(X)_a = L^{p,q}(X)_b = L^{p,q}(X)$ *si* $p = q = 1$ *ó* $1 < p < \infty$ *y* $1 \leq q < \infty$.
- $L^{p,\infty}(X)_b \subset L^{p,\infty}(X)_a = \{f \in L^{p,\infty} : \lim_{t \to 0^+} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = 0\} \neq L^{p,\infty}(X)$ *si* $1 < p < \infty$.
- $L^\infty(X)_a = \{0\}$.

Prueba: La primera parte de la proposición es consecuencia directa del caso escalar más la aplicación del lema 1.51. La segunda parte es trivial del caso escalar y las relaciones $L^{p,\infty}(X)_a = L^{p,\infty}{}_a(X)$ y $L^{p,\infty}(X)_b \subset L^{p,\infty}{}_b(X)$, comentadas en el caso general en la página 40. $\square$

La dualidad de estos espacios de funciones vectoriales, también llamados de Lorentz-Bochner, se estudia en la próxima subsección, puesto que se van a describir en términos de medidas vectoriales.

Antes de terminar este apartado indicamos la definición del espacio de Hardy-Lorentz-Bochner. Véase los preliminares para la notación.

Definición 3.20 *Sean $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y X un espacio de Banach. Se define el espacio de Hardy-Lorentz-Bochner $h^{p,q}(\mathbb{D}, X)$ como el formado por las funciones armónicas u, definidas en el disco $\mathbb{D}$ y con valores en X de manera que las restricciones a nivel r de u, es decir, las funciones u_r, están uniformemente acotadas en $L^{p,q}(X)$. Se toma como norma en este espacio la expresión $\|u\|_{L^{p,q}(X)} := \sup_{r \in [0,1)} \|u_r\|_{L^{p,q}(X)}$.*

3.3.2 Espacio de medidas de Lorentz $V^{p,q}(\mu, X)$

Los espacios de medidas vectoriales de Lorentz que vamos a definir se construyen de la forma explicada en el capítulo 2, ya que los espacios de Lorentz son espacios de funciones de Banach. Además, le serán aplicables los resultados aparecidos en la sección 3.1 por tratarse de espacios invariantes por reordenamiento.

Antes de pasar al espacio de medidas de Lorentz procederemos como en el caso de las funciones. Una observación previa nos va a motivar el estudio de los espacios de medida que, por razones que se entenderán más adelante, llamaremos espacio de medidas de Marcinkiewicz. Por tener un origen propio, trataremos estos espacios con técnicas específicas. Sin embargo, tal y como pasa en el caso de funciones, todo el estudio se puede recuperar por la teoría general, descrita en el capitulo 2, particularizada a los espacios de medidas vectoriales de Lorentz.

Espacios de medidas vectoriales de Marcinkiewicz

Recordamos de nuevo que una función escalar f pertenece al espacio de Lebesgue-Marcinkiewicz de funciones $L^{p,\infty}$, también llamado L^p-débil o weak L^p, si existe una constante positiva C tal que

$$\mu(\{w \in \Omega : |f(w)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C}{\lambda}\right)^p$$

para todo $\lambda > 0$. El ínfimo de tales constantes es la norma p-débil, denotada por $\|f\|_{weakL^p}$ o $\|f\|_{L^{p,\infty}}$, aunque hay otra norma equivalente (ver p. 83).

El origen de la definición de este nuevo espacio de medidas vectoriales, que contiene, para cada exponente p, al espacio de funciones de Lebesgue L^p, es la observación de que para cada valor de λ positivo se tiene

$$\lambda^p \mu(\{w \in \Omega : |f(w)| > \lambda\}) \leq \int_\Omega |f|^p d\mu = \|f\|^p_{L^p}.$$

Nos remitimos a la página 80 donde, a partir del espacio L^p y la expresión de su norma, se motivaba la aparición de un espacio de funciones que lo contenía. De manera análoga se puede trabajar con el espacio de medidas vectoriales de p-variación acotada $V^p(X)$. Sin embargo, en este caso cabrá precisar una diferencia que a estas alturas podría parecer despreciable. De esta manera encontraremos, a partir de $V^p(X)$, dos nuevos espacios de medidas vectoriales que lo contienen. Por ello conviene comentar la siguiente igualdad, para cada medida F de $V^p(X)$. Denotando por $|\cdot|_p$ la norma en $V^p(X)$,

$$|F|_p \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\pi \in D_\Omega} \left(\sum_{B \in \pi} \frac{\|F(B)\|^p}{\mu(B)^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\pi \in D_\Omega} \left(\sum_{B \in \pi} \frac{|F|(B)^p}{\mu(B)^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La igualdad escrita se puede obtener mediante la expresión de la p-variación que figura en la página 11.

Con esta observación, a partir de la definición de la p-variación de una medida vectorial F, se pueden obtener dos conclusiones para cada medible A.

$$\frac{\|F(A)\|^p}{\mu(A)^{p-1}} \leq \sup_{\pi \in D_\Omega} \sum_{B \in \pi} \frac{\|F(B)\|^p}{\mu(B)^{p-1}} = |F|_p^p$$

y

$$\frac{|F|(A)^p}{\mu(A)^{p-1}} \leq \sup_{\pi \in D_\Omega} \sum_{B \in \pi} \frac{|F|(B)^p}{\mu(B)^{p-1}} = |F|_p^p.$$

Por tanto, para F existirá una constante (por ejemplo, la propia p-variación de F) de tal modo que para cada medible arbitrario A, las desigualdades

$$\|F(A)\| \leq C\mu(A)^{\frac{1}{p'}}$$

y

$$|F|(A) \leq C\mu(A)^{\frac{1}{p'}}$$

se mantienen. Así surge la definición de dos espacios (que podrían ser eventualmente el mismo) que contienen al espacio $V^p(X)$.

Definición 3.21 (Espacios de medidas vectoriales de Marcinkiewicz) *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito, X un espacio de Banach y $1 < p \leq \infty$. Definimos, en el marco de las medidas con valores en X, los conjuntos $\mathcal{V}^{p,\infty}(\mu, X)$ y $V^{p,\infty}(\mu, X)$ (o abreviadamente $\mathcal{V}^{p,\infty}(X)$ y $V^{p,\infty}(X)$) como los formados por medidas F de manera que*

$$\|F(A)\| \leq C\mu(A)^{\frac{1}{p'}}$$

y

$$|F|(A) \leq C\mu(A)^{\frac{1}{p'}}$$

para todo $A \in \Sigma$, respectivamente. Vamos a considerar en estos espacios los funcionales

$$\|F\|_{\mathcal{V}^{p,\infty}(X)} = \sup_{A \in \Sigma} \frac{\|F(A)\|}{\mu(A)^{\frac{1}{p'}}} \qquad y \qquad \|F\|_{V^{p,\infty}(X)} = \sup_{A \in \Sigma} \frac{|F|(A)}{\mu(A)^{\frac{1}{p'}}}$$

usando la notación $\|\cdot\|_{p,\infty}$ cuando el contexto no sea ambiguo. El espacio de medidas vectoriales se dice de Marcinkiewicz o Lebesgue-Marcinkiewicz

Teorema 3.22 *$(\mathcal{V}^{p,\infty}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{V}^{p,\infty}(X)})$ y $(V^{p,\infty}(X), \|\cdot\|_{V^{p,\infty}(X)})$ son espacios de Banach para $1 < p \leq \infty$ y además se tienen las siguientes inclusiones:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}^p(X) & \subset & \mathcal{V}^{p,\infty}(X) \\ \cup & & \cup \\ V^p(X) & \subset & V^{p,\infty}(X) \end{array}$$

Prueba: Es inmediata la prueba de que ambas son normas en los espacios respectivos. Para ver que son completas, lo comprobamos con una, siendo la otra comprobación similar.

Sea $(F_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{V}^{p,\infty}(X)$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que para $n, m \geq n_0$

$$\|F_n - F_m\|_{p,\infty} < \varepsilon.$$

La sucesión $\{F_n(A)\}_n$ en X formada para cada medible A es convergente, pues

$$\|F_n(A) - F_m(A)\|_X < \varepsilon\mu(A)^{\frac{1}{p'}} \qquad (*)$$

para $n, m \geq n_0$, y por tanto es de Cauchy en el espacio completo X. Llamamos F a la medida límite puntual de las F_n, que es numerablemente aditiva y μ-continua por Vitali-Hahn-Saks ([DiUh]). Es sencillo ver que $F \in \mathcal{V}^{p,\infty}(X)$, pues

$$\frac{\|F(A)\|_X}{\mu(A)^{\frac{1}{p'}}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\|F_n(A)\|_X}{\mu(A)^{\frac{1}{p'}}} \leq \sup_n \|F_n\|_{p,\infty} < \infty.$$

La convergencia $F_n \to F$ en $\mathcal{V}^{p,\infty}(X)$ es igualmente sencilla. Si $\varepsilon > 0$, para el mismo n_0 de la condición de Cauchy, si $n \geq n_0$, tenemos que

$$\frac{\|F_n(A) - F(A)\|_X}{\mu(A)^{\frac{1}{p'}}} \leq \lim_{m\to\infty} \frac{\|F_n(A) - F_m(A)\|_X}{\mu(A)^{\frac{1}{p'}}} \leq \varepsilon.$$

La prueba de que $V^{p,\infty}(X)$ es cerrado en $\mathcal{V}^{p,\infty}(X)$ es similar.

La relación de inclusiones es inmediata de las definiciones. $\square$

Es fácil comprobar que si $1 < p \leq \infty$, la condición $\|F\|_{p,\infty} < \infty$ implica que F es μ-continua en ambos espacios de medidas. Por otro lado se tiene que

$$V^{\infty,\infty}(X) = \mathcal{V}^{\infty,\infty}(X) = V^{\infty}(X).$$

Una prueba similar a la de 2.13 conduce a la igualdad

$$\|F\|_{\mathcal{V}^{p,\infty}(X)} = \sup_{\|x^*\|_{X^*}\leq 1} \|x^*F\|_{V^{p,\infty}(\mathbb{K})}$$

para cada medida vectorial F.

Los espacios de medidas de Marcinkiewicz $\mathcal{V}^{p',\infty}(X)$ aparecen cuando tratamos de describir el conjunto de los operadores lineales y continuos del espacio de Lorentz $L^{p,1}$ en un espacio de Banach X.

Proposición 3.23 *Sea X un espacio de Banach, sea $1 \leq p < \infty$, y p' su exponente conjugado. Entonces $\mathcal{V}^{p',\infty}(X) = L(L^{p,1}, X)$.*

Prueba: La correspondencia entre medidas y operadores es la usual. Así, si F es medida de $\mathcal{V}^{p',\infty}(X)$, el operador T_F cumple que

$$\|T_F(\chi_A)\|_X = \|F(A)\|_X \leq C\mu(A)^{\frac{1}{p}}.$$

Por 3.14, T_F extiende por densidad a un operador lineal y continuo de $L^{p,1}$ en X, con $\|T_F\| \leq 4\|F\|_{p'\infty}$. La aparición de la constante 4 está justificada en la prueba de 3.14.

Si $T \in L(L^{p,1}, X)$, es claro que $T = T_F$ para aquella medida F que cumpla que $F(A) = T(\chi_A)$ para cada $A \in \Sigma$. Queda comprobar que tal medida existe y está en $\mathcal{V}^{p',\infty}(X)$. Lo único que requiere cuidado es probar que F es numerablemente aditiva, y ello se puede conseguir del hecho de ser finitamente aditiva (por linealidad de T) y μ-continua (por continuidad de T). La acotación $\|F\|_{p',\infty} \leq \|T\|$ es trivial, y nos conduce al isomorfismo anunciado. $\square$

Un corolario inmediato es el isomorfismo $\mathcal{V}^{p',\infty}(X^*) = (L^{p,1}\widehat{\otimes}_\pi X)^*$, debido al existente entre $(L^{p,1}\widehat{\otimes}_\pi X)^*$ y $L(L^{p,1}, X^*)$.

Si se compara esta proposición con su paralela del capítulo 2 se puede sospechar, con toda razón, que el espacio de medidas denotado por $\mathcal{V}^{p',\infty}(X)$ se corresponde con $\mathcal{V}_{E'}(X)$ donde $E = L^{p,1}$. Más adelante comprobaremos, entre otras relaciones, que $\mathcal{V}^{p,\infty}(X) = \mathcal{V}_E(X)$ con $E = L^{p,\infty}$, y que toda la serie de resultados que pasamos a tratar desde el punto de vista local (respecto a la definición dada de espacio de medida de Lebesgue-Marcinkiewicz) son corolarios de los resultados obtenidos en el capítulo 2.

Ahora caracterizamos las medidas vectoriales del espacio $V^{p,\infty}(X)$ mediante funciones escalares.

Proposición 3.24 *Sea X un espacio de Banach y $1 < p \leq \infty$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *$F \in V^{p,\infty}(X)$.*
- *Existe una función φ no negativa, con $\varphi \in L^{p,\infty}$ de tal modo que $|F|(A) = \int_A \varphi d\mu$ for all $A \in \Sigma$.*

Prueba: (I) Si $F \in V^{p,\infty}(X) \subset \mathcal{V}^{p,\infty}(X)$, entonces $|F|$ es medida finita y por tanto μ-continua (por serlo F). Así, el teorema de Radon-Nikodým nos aporta una función no negativa y localmente integrable φ tal que $|F|(A) = \int_A \varphi d\mu$ for all $A \in \Sigma$.

Si denotamos $A_\lambda = \{w \in \Omega : \varphi(w) > \lambda\}$,

$$\lambda\ \mu(A_\lambda) \leq \int_{A_\lambda} \varphi d\mu = |F|(A_\lambda) \leq \|F\|_{p,\infty}\mu(A)^{\frac{1}{p'}}.$$

Por lo tanto $\mu(A_\lambda) \leq \frac{\|F\|_{p,\infty}^p}{\lambda^p}$ y así $\|\varphi\|_{p,\infty} \leq \|F\|_{p,\infty}$.

(II) Recíprocamente, sea φ una función no negativa de $L^{p,\infty}$ de forma que $|F|(A) = \int_A \varphi d\mu$ para todo medible A. Veamos que $F \in V^{p',\infty}(X)$. Por la integrabilidad de φ tenemos que F es μ-continua (continuidad absoluta de la integral de Lebesgue). La naturaleza de φ implica que

$$\mu(\{w \in \Omega : \varphi > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \qquad (*)$$

para todo $\lambda > 0$. De ello se deduce fácilmente que $\varphi^*(t) \leq \frac{1}{C}t^{-\frac{1}{p}}$.

Sea ahora A un medible arbitrario de medida finita. Usando la desigualdad de Hardy (p. 27) se tiene que

$$|F|(A) = \int_A \varphi d\mu \leq \int_0^{\mu(A)} \varphi^*(t)dt \leq \int_0^{\mu(A)} \frac{1}{C} t^{-\frac{1}{p}} dt = \frac{p'}{C} \mu(A)^{\frac{1}{p'}}.$$

Por tanto $F \in V^{p,\infty}(X)$ y además $\|F\| \leq p'\|\varphi\|$. □

En este resultado no tratamos de probar la posible igualdad de normas entre medida vectorial y función representante de su variación total. La razón es que en el espacio $L^{p,\infty}$ no se ha usado la norma adecuada, que es la dada por la segunda reordenada (ver p. 83), sino la clásica del espacio de Lebesgue-Marcinkiewicz. Este resultado nos ha confirmado que $V^{p,\infty}(X)$ es el espacio $V_E(X)$ con $E = L^{p,\infty}$ (p. 53). El siguiente resultado abunda en ese hecho.

Proposición 3.25 *Sea X un espacio de Banach y $1 < p \leq \infty$. Entonces*

- $L^{p,\infty}(X) \subset V^{p,\infty}(X)$ *isométricamente.*
- $L^{p,\infty}(X) = V^{p,\infty}(X)$ *si y sólo si $X \in (RNP)$.*

Prueba: Si $f \in L^{p,\infty}(X)$ entonces la medida $F(\cdot) = \int_{(\cdot)} f d\mu$ pertenece a $V^{p,\infty}(X)$. Esto ocurre pues $|F|(\cdot) = \int_{\cdot} \|f\|_X d\mu$ (p. 2), y se puede aplicar 3.24 con $\varphi = \|f\|_X$.

Para probar la segunda parte, supongamos que $L^{p,\infty}(X) = V^{p,\infty}(X)$, y sea $T : L^1 \to X$ un operador lineal y continuo. Debemos concluir que T es representable (p. 14). La medida F_T dada por $F_T(A) = T(\chi_A)$ es de $V^\infty(X)$ y por tanto de $V^{p,\infty}(X)$. Así pues existe $f \in L^{p,\infty}(X)$ con la relación $F_T(A) = \int_A f d\mu$ para todo $A \in \Sigma$. Si $f \notin L^\infty(X)$ tendríamos que

$$n\mu(A_n) < \int_{A_n} \|f\|_X d\mu = |F|(A_n)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $A_n = \{w \in \Omega \ : \ \|f(w)\|_X > n\}$ tiene medida positiva. Ello implicaría $F \notin V^\infty(X)$, lo cual lleva a contradicción. Esto implica a que $T(\psi) = \int_\Omega \psi f d\mu$ para toda $\psi \in L^1$ y con $f \in L^\infty(X)$.

Recíprocamente, si $X \in (RNP)$ y $F \in V^{p,\infty}(X)$, al ser μ-continua tenemos una función vectorial $f \in L^1(X)$ tal que $F(\cdot) = \int_\cdot f d\mu$. La aplicación de 3.24 nos muestra que $f \in L^{p,\infty}(X)$. □

Las dos aplicaciones del espacio de medidas de Marcinkiewicz, al estudio de la dualidad y de los espacios de operadores cono absolutamente sumantes, vienen a continuación.

Teorema 3.26 *Sea X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Tenemos las siguientes isometrías:*

- $V^{p',\infty}(X^*) = [L^{p,1}(X)]^*$.
- $V^{p',\infty}(X) = \Pi^{1,+}(L^{p,1}, X)$.

Prueba: (I) Sea $F \in V^{p',\infty}(X^*)$ y T_F el operador dado por $T_F(x\chi_A) = \langle x, F(A)\rangle$ para cada $x \in X$ y A medible, extendido por linealidad al conjunto de las funciones simples vectoriales.

Sea ahora $s = \sum_{n=1}^N x_n \chi_{A_n}$ una función simple.

$$\begin{aligned}|T_F(s)| &= |\sum_{n=1}^N \langle x_n, F(A_n)\rangle| \leq \sum_{n=1}^N \|x_n\|_X\, |F|(A_n)\\ &= \|F\|_{p,\infty} \sum_{n=1}^N \|x_n\|_X \mu(A_n)^{\frac{1}{p}} \leq \|F\|_{p,\infty} \|s\|_{p,1}^*\end{aligned}$$

La densidad del conjunto de las funciones simples en $L^{p,1}(X)$ implica que T_F es un elemento del dual de $L^{p,1}(X)$ de norma acotada por $\|F\|_{p,\infty}$.

Para ver que se trata de una isometría biyectiva, sea $T \in [L^{p,1}(X)]^*$ arbitrario. Es claro que $T = T_F$ para la medida finitamente aditiva F, con valores en X^*, que asigna a cada medible A y cada $x \in X$ el valor $\langle x, F(A)\rangle = T(x\chi_A)$. Falta comprobar que tal F es una medida de $V^{p,\infty}(X)$. La desigualdad

$$\|F(A)\|_X = \|T(\chi_A)\|_X \leq \|T\| \mu(A)^{\frac{1}{p}}.$$

da como resultado que F es μ-continua y, por tanto, numerablemente aditiva. Por último

$$\begin{aligned}|F|(A) &= \sup_{(A_i)_i} \sum_i \|F(A_i)\|_{X^*} = \sup_{\substack{(A_i)_i\\ \|x_i\|\leq 1}} \sum_i |T(x_i\chi_{A_i})| =\\ &= \sup_{\substack{(A_i)_i\\ \|x_i\|\leq 1}} |T(\sum_i (x_i \chi_{A_i})| \leq \|T\|\, \|\chi_A\|_{p1} =\\ &= \|T\|\mu(A)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Así pues $F \in V^{p',\infty}(X^*)$, y la última desigualdad confirma la isometría.

(II) Sea ahora $F \in V^{p',\infty}(X)$ y T_F definida como es habitual. Para probar que T_F es un operador cono absolutamente sumante, sea $N \in \mathbb{N}$ arbitrario y $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ funciones no negativas de $L^{p,1}$.

La densidad del conjunto de las funciones simples en $L^{p,1}$ y la aplicación de 3.24 permiten poner

$$\|T_F(f)\|_X \leq \int_\Omega |f|\varphi d\mu.$$

donde φ viene de 3.24. Entonces

$$\sum_{n=1}^N \|T_F(\varphi_n)\|_X \leq \sum_{n=1}^N \int_\Omega \varphi_n \varphi d\mu = \int_\Omega (\sum_{n=1}^N \varphi_n)\varphi d\mu \leq \|F\|_{p',\infty} \|\sum_{n=1}^N \varphi_n\|_{p,1}.$$

Y así $\|T_F\|_{\Pi^{1,+}} \leq \|F\|_{p',\infty}$.

Para probar la biyección y la igualdad de normas, sea $T \in \Pi^{1,+}(L^{p,1}, X)$. La medida F asociada a T pertenece a $\mathcal{V}^{p',\infty}(X)$ (véase 3.23) pues T es lineal y continuo. Para finalizar, nótese que si $A \in \Sigma$ y $\pi = (A_n)_{n=1}^N$ es una partición de A en medibles de medida positiva,

$$\sum_{n=1}^N \|F_T(A_n)\|_X = \sum_{n=1}^N \|T(\chi_{A_n})\|_X \leq \|T\|_{\Pi^{1,+}} \| \sum_{n=1}^N \chi_{A_n} \|_{p1} = \|T\|_{\Pi^{1,+}} \ \mu(A)^{\frac{1}{p}}.$$

Por tanto $\|F_T\|_{p',\infty} \leq \|T\|_{\Pi^{1,+}}$ y queda probado el resultado. □

Espacios de medidas vectoriales de Lorentz

La manera sistemática de definir los espacios de medidas vectoriales de Lorentz se corresponde con tomar, de la teoría general de espacios de funciones de Banach, la situación particular $E = L^{p,q}$.

De este modo se consigue definir el espacio $V^{p,q}(X)$ con las características y conexiones con otros espacios relacionados (de funciones y de operadores) tal y como se describen el el capítulo 2.

Se propone un acercamiento a esta clase de espacios mediante un procedimiento diferente. Las medidas vectoriales se van a estructurar a través de una función llamada "módulo de continuidad de una medida vectorial". Este módulo viene motivado principalmente por la expresión de las normas de las medidas de los espacios de Marcinkiewicz.

Definición 3.27 (Módulos de continuidad de medidas vectoriales) *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito no atómico. Se define el intervalo I como*

$$I = \begin{cases} (0, \mu(\Omega)] & , \ \mu(\Omega) < \infty \\ (0, \infty) & , \ \mu(\Omega) = \infty \end{cases}$$

y para cada medida F las funciones ω_F, $\widetilde{\omega}_F : I \to [0, \infty]$ dadas por

$$\omega_F(t) = \sup_{\mu(A) \leq t} |F|(A) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{\omega}_F(t) = \sup_{\mu(A) \leq t} \|F(A)\|.$$

Teniendo en cuenta que la medida μ es no atómica, por un lado, y la desigualdad sobre la semivariación que aparece en la página 9, por otro, se puede poner

$$\omega_F(t) = \sup_{\mu(A)=t} |F|(A)$$

y

$$\frac{1}{4} \sup_{\mu(A)=t} \|F\|(A) \leq \widetilde{\omega}_F(t) \leq \sup_{\mu(A)=t} \|F\|(A)$$

para cada $t \in I$.

Proposición 3.28 *Sea F una medida vectorial. Entonces ω_F es una función no decreciente, continua y cóncava.*

Prueba: La monotonía es obvia. Veamos que para $0 < s < t < \mu(\Omega)$ y $0 < h < \mu(\Omega) - t$ se tiene que

$$\omega_F(s+h) - \omega_F(s) \geq \omega_F(t+h) - \omega_F(t). \qquad (*)$$

Dado $\varepsilon > 0$ existen medibles E_t, E_{t+h} y E_s para los cuales $\mu(E_t) = t, \mu(E_{t+h}) = t + h$ y $\mu(E_s) = s$ y con

$$\omega_F(t) - \mu(E_t) < \varepsilon, \quad \omega_F(t+h) - \mu(E_{t+h}) < \varepsilon, \quad \omega_F(s) - \mu(E_s) < \varepsilon$$

Sea A_h un medible con $\mu(A_h) = h$ y $A_h \subset E_{t+h} \setminus E_s$. Entonces

$$\begin{aligned} \omega_F(s+h) &\geq |F|(E_s \cup A_h) = |F|(E_s) + |F|(A_h) \\ &\geq \omega_F(s) - \varepsilon + |F|(A_h) + |F|(E_{t+h} \setminus A_h) - \omega_F(t) \\ &\geq \omega_F(s) - \varepsilon + |F|(E_{t+h}) - \omega_F(t) \\ &\geq \omega_F(s) - \varepsilon + \omega_F(t+h) - \varepsilon - \omega_F(t). \end{aligned}$$

Dado que la desigualdad es válida para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene la afirmación $(*)$. Así, para $s, t \in I$ se tiene que

$$|\omega_F(s) - \omega_F(t)| \leq \omega_F(|s-t|^+) - \omega_F(0^+)$$

donde $\omega_F(a^+) := \lim_{h\to 0^+} \omega_F(a+h)$ siempre existe por la monotonía de ω_F. Se deduce entonces que ω_F es uniformemente continua en I. De $(*)$ se tiene que

$$\omega_F(\frac{s+t}{2}) \geq \frac{\omega_F(s) + \omega_F(t)}{2}$$

para $s, t \in I$. Este hecho, junto a la continuidad, da la concavidad de ω_F. $\square$

Nota 3.29 *La condición de μ-continuidad para una medida vectorial F equivale a que $\lim_{t\to 0^+} \widetilde{\omega}_F(t) = 0$. Para medidas de variación total acotada, también es equivalente a que $\lim_{t\to 0^+} \omega_F(t) = 0$.*

El módulo de continuidad ω_F está relacionado con la variación total de la medida F. Las características del espacio de medida base (la no atomicidad) proporcionan el siguiente hecho.

Proposición 3.30 *Si $f \in L^1(X)$ y $F(\cdot) = \int_{(\cdot)} f d\mu$, entonces $f^{**}(t) = t\omega_F(t)$ para $t \in I$.*

Prueba: El resultado se obtiene del hecho de ser $|F|(\cdot) = \int_{(\cdot)} \|f\|_X d\mu$ y

$$\int_0^t f^*(s) ds = \sup_{\mu(A)\leq t} \int_A \|f\|_X d\mu.$$

$\square$

Una vez presentadas estas funciones, una revisión a los espacios de medidas de Marcinkiewicz nos permite escribir las normas de forma distinta.

Nota 3.31 *Sea $1 < p \leq \infty$. Una medida vectorial F pertenece al espacio $\mathcal{V}^{p,\infty}(X)$ si y sólo si existe alguna constante $C > 0$ tal que $\widetilde{\omega}_F(t) \leq Ct^{\frac{1}{p'}}$ para todo $t \in I$. De igual forma, una medida vectorial F pertenece al espacio $V^{p,\infty}(X)$ si y sólo si existe alguna constante $C > 0$ tal que $\omega_F(t) \leq Ct^{\frac{1}{p'}}$ para todo $t \in I$.*

De hecho podemos escribir las normas en dichos espacios de la forma

$$\|F\|_{\mathcal{V}^{p,\infty}(X)} = \sup_{t\in I} t^{-\frac{1}{p'}}\widetilde{\omega}_F(t) \qquad y \qquad \|F\|_{V^{p,\infty}(X)} = \sup_{t\in I} t^{-\frac{1}{p'}}\omega_F(t)$$

La proposición 3.30 y la última nota motivan la siguiente definición de espacios de medidas vectoriales de Lorentz.

Definición 3.32 *Sea X un espacio de Banach, $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$. Se definen los espacios de medidas vectoriales de Lorentz $\widetilde{\mathcal{V}}^{p,q}(X)$ y $V^{p,q}(X)$ como los espacios de medidas vectoriales tales que*

$$t^{-\frac{1}{p'}}\widetilde{\omega}_F(t) \in L^q(I, \frac{dt}{t})$$

y

$$t^{-\frac{1}{p'}}\omega_F(t) \in L^q(I, \frac{dt}{t})$$

respectivamente. Consideramos en ellos las normas

$$\|F\|_{\widetilde{\mathcal{V}}^{p,q}(X)} = \left(\int_I [t^{-\frac{1}{p'}}\widetilde{\omega}_F(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

y

$$\|F\|_{V^{p,q}(X)} = \left(\int_I [t^{-\frac{1}{p'}}\omega_F(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Por otra parte se define para la misma familia de exponentes p, q el espacio $\mathcal{V}^{p,q}(X)$ de las medidas vectoriales F de manera que $x^*F \in V^{p,q}(\mathbb{K})$ para todo $x^* \in X^*$. En él se considera la norma

$$\|F\|_{\mathcal{V}^{p,q}(X)} = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|x^*F\|_{V^{p,q}(\mathbb{K})}.$$

Se usará la notación $\|\cdot\|_{p,q}$ para la norma cuando el contexto elimine ambigüedades.

Las relaciones elementales que guardan estos espacios entre sí se recogen en la siguiente proposición.

Proposición 3.33 *Sea $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$. Entonces*

$$\begin{array}{ccccccc} V^{p,q}(X) & \subset & \widetilde{\mathcal{V}}^{p,q}(X) & \subset & \mathcal{V}^{p,q}(X) & & \\ \cap & & \cap & & \cap & & \\ V^{p,\infty}(X) & \subset & \widetilde{\mathcal{V}}^{p,\infty}(X) & = & \mathcal{V}^{p,\infty}(X) & \subset & V^1(X) \end{array}$$

Prueba: Las inclusiones horizontales son obvias. Para las verticales, dado que ω_F es no decreciente, tenemos que

$$t^{-\frac{1}{p'}}\omega_F(t) \leq C_1 \left(\int_t^{\mu(\Omega)} [s^{-\frac{1}{p'}}\omega_F(s)]^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} + C_2,$$

para ciertas constantes $C_1, C_2 > 0$. Una estimación similar se cumple para $\widetilde{\omega}_F$ y por tanto se concluye. $\square$

Ejemplos 3.34 *Sean* $1 < p, q < \infty$ *y* $X = L^{p,q}$. *Considérese la medida* $L^{p,q}$-*valuada* F *dada por* $F(A) = \chi_A$. *Entonces*

- $\omega_F(t) = +\infty$ *para cada* $t \in I$.
- $\widetilde{\omega}_F(t) = t^{\frac{1}{p}}$.
- *Si* $x^* = \phi \in X^* = L^{p',q'}$, *la medida composición* x^*F *es* $x^*F(A) = \int_A \phi d\mu$.

Por tanto

- $F \notin V^{r,s}(X)$ *para ningún* r, s.
- $F \in \widetilde{\mathcal{V}}^{r,s}(X)$ *sii* $1 \leq r \leq p'$ *y* $s = \infty$ *o bien* $1 \leq r < p'$ *y* $1 \leq s \leq \infty$.
- $F \in \mathcal{V}^{r,s}(X)$ *sii* $r = p'$ *y* $s \geq q'$ *o bien* $1 \leq r < p'$ *y* $1 \leq s \leq \infty$.

Así pues, F *proporciona muestras de que los espacios* $\widetilde{\mathcal{V}}^{p',q'}(X)$ *y* $\mathcal{V}^{p',q'}(X)$ *no coinciden generalmente, ni tampoco* $\widetilde{\mathcal{V}}^{p',\infty}(X)$ *y* $V^{p',\infty}(X)$.

La caracterización de las medidas de $V^{p,q}(X)$ a través de las funciones del espacio de Lorentz escalar, que viene a continuación, es una garantía de que la definición alternativa (mediante los módulos de continuidad de medidas) es consistente con la de la teoría del capítulo 2.

Lema 3.35 *Sean* $1 < p < \infty$ *y* $1 \leq q \leq \infty$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $F \in V^{p,q}(X)$.
- *Existe* $\varphi \geq 0$, $\varphi \in L^{p,q}$ *tal que* $|F|(A) = \int_A \varphi d\mu$ *para cada* $A \in \Sigma$.

Más aún, si φ *es una función cualquiera de forma que* $|F|(A) = \int_A \varphi d\mu$ *para cada* $A \in \Sigma$, *entonces* $\|F\|_{V^{p,q}(X)} = \|\varphi\|_{p,q}$.

Prueba: Sea $F \in V^{p,q}(X)$. Dado que $F \in V^{p,\infty}(X)$ podemos aplicar la proposición 3.24 y así encontrar una función no negativa φ de modo que $|F|(A) = \int_A \varphi d\mu$ para todo $A \in \Sigma$. Con esto y una mirada a 3.30, es inmediato el hecho $\|F\|_{p,q} = \|\varphi\|_{p,q}$. El recíproco es directo. $\square$

Con ayuda de este resultado obtenemos la inclusión isométrica del espacio de funciones vectoriales en las medidas, y una nueva caracterización de la propiedad de Radon-Nikodým.

Teorema 3.36 *Sea X un espacio de Banach y $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$. Entonces:*

- $L^{p,q}(X) \subset V^{p,q}(X)$.
- $L^{p,q}(X) = V^{p,q}(X)$ *si y sólo si* $X \in (RNP)$.

Prueba: La proposición 3.30 muestra que si $f \in L^{p,q}(X)$ entonces la medida $F(E) = \int_E f d\mu$ pertenece a $V^{p,q}(X)$ y puesto que $|F|(E) = \int_E \|f\| d\mu$, la norma $\|f\|_{p,q} = \|F\|_{p,q}$.

Para la segunda parte se puede usar el mismo tipo de argumentos que en la proposición 3.25 con la ayuda del lema 3.35 en lugar de 3.24 $\square$

Proposición 3.37 *Sea X un espacio de Banach arbitrario y sean $1 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$. Entonces se tiene que el espacio de medidas vectoriales de Lorentz $V^{p,q}(X)$ es isomorfo al espacio $V_{L^{p,q}}(X)$. Es decir, que*

$$|F|_{L^{p,q}} := \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \, \|F(A)\|_X : \quad \pi \in D_\Omega, \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A \|_{(L^{p,q})'} \leq 1\},$$

que es equivalente a

$$\sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \, \|F(A)\|_X : \quad \pi \in D_\Omega, \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A \|_{L^{p',q'}} \leq 1\},$$

es también equivalente a la norma $\|F\|_{V^{p,q}(X)}$ definida en 3.32.

Prueba: La equivalencia entre las dos primeras expresiones es consecuencia de la equivalencia de normas que tienen los espacios de Lorentz $L^{p',q'}$ y $(L^{p,q})'$. La equivalencia de ambas con $\|\cdot\|_{V^{p,q}(X)}$ se deduce de 3.35, pues cada medida F de $V^{p,q}(X)$ ve representada su variación total a través de una función no negativa φ del espacio $L^{p,q}$ de manera que $\|F\|_{V^{p,q}(X)} = \|\varphi\|_{p,q}$. Por tanto, teniendo en mente que en los supremos que aparecen se puede sustituir cada $\|F(A)\|_X$ por $|F|(A)$, basta con reemplazar entonces las variaciones por las integrales de φ y obtener que éstos coinciden con $\|\varphi\|_{p,q}$, o bien son equivalentes. $\square$

Por otra parte, dado que el espacio de funciones de Lorentz $L^{p,q}$ es un espacio invariante por reordenamiento, podemos escribir

$$|F|_{L^{p,q}} = \sup_{\pi\in D_\Omega} \| \sum_{A\in\pi} \frac{F(A)}{\mu(A)} \chi_A \|_{L^{p,q}(X)}.$$

Y por último, otra forma de evaluar la norma en el espacio de medidas de Lorentz es a través de los módulos de continuidad de las medidas,

$$\|F\|_{V^{p,q}(X)} = \| \frac{w_F(t)}{t} \|_{L^{p,q}}.$$

Se puede definir en este contexto un espacio de funciones armónicas.

Definición 3.38 *Se define para cada par de exponentes* p, q *el espacio* $h^{p,q}(\mathbb{D}, X)$ *de las funciones* u *definidas en* $\mathbb{D}$ *con valores en* X *que son armónicas y con la acotación*

$$\sup_{r\in[0,1)} \|u_r\|_{L^{p,q}(X)} < \infty.$$

Se toma como norma en el espacio $\|u\|_{L^{p,q}(X)} = \sup_{r\in[0,1)} \|u_r\|_{L^{p,q}(X)}$.

Todos los resultados del capítulo 2 son aplicables a este espacio de medidas vectoriales.

Corolario 3.39 *Sea* $1 < p < \infty$ *y* $1 \leq q \leq \infty$ *ó* $p = q = \infty$*, y* X *un espacio de Banach. Entonces:*

- $L^{p,q}(X) \subset V^{p,q}(X)$ *vía la integral de Bochner indefinida.*
- $L^{p,q}(X) = V^{p,q}(X)$ *si y sólo si* $X \in (RNP)$.

Si además $q > 1$

- $V^{p,q}(X^*) = [L^{p',q'}(X)]^*$.
- $V^{p,q}(X^*) = \Pi^{1,+}(L^{p',q'}, X)$.
- $V^{p,q}(X) = h^{p,q}(X)$.
- $L^{p,q}(X) \subset h^{p,q}(X)$ *vía la integral de Poisson.*
- $L^{p,q}(X) = h^{p,q}(X)$ *si y sólo si* $X \in (RNP)$.
- $h^{p',q'}(X^*) = [L^{p,q}(X)]^*$.

3.4 Espacios de medidas vectoriales de Orlicz

Los espacios de medidas de Orlicz aparecen por primera vez en [114]. En esta sección se hará una descripción de los resultados allí obtenidos y enfocados bajo otro punto de vista ([42]). De manera introductoria, se presenta una pequeña exposición sobre los espacios de funciones de Orlicz.

3.4.1 Los espacios de funciones de Orlicz $L^{\Phi}(\Omega, \mu)$

Esta clase de espacios fue definida por W. Orlicz en los años 30 ([97]) y también engloban, en su definición, a los espacios de funciones de Lebesgue. Referencias para su estudio son [62, 66, 108]. Los espacios de funciones de Orlicz, como se verá más adelante, son espacios invariantes por reordenamiento ([BeSh, p. 269]).

Definición 3.40 (Función de Young) *Sea* $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ *una función no decreciente y continua por la izquierda, con* $\phi(0) = 0$*, y ni idénticamente nula ni idénticamente infinita. A la función* Φ *dada por*

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)ds, \qquad t \geq 0$$

se le llama función de Young, y se dice que está generada por ϕ.

Definición 3.41 (Clase de Orlicz) *Sea Φ una función de Young. Se define el funcional i_Φ para cada función medible f como*

$$i_\Phi(f) = \int_\Omega \Phi(|f(w)|)d\mu(w).$$

La clase de Orlicz viene definida por

$$L_0^\Phi = \{f \in \mathcal{M} \ : \ i_\Phi(f) < \infty\}.$$

La clase de Orlicz siempre es un conjunto convexo, pero no necesariamente un espacio vectorial. Por ejemplo, si $\Phi = 0\chi_{[0,1]} + \infty\chi_{(1,\infty)}$, entonces la clase de Orlicz es la bola unidad de L^∞. Así pues, una norma funcional de Minkowski puede ser definida por la clase de Orlicz.

Definición 3.42 (Norma de Luxemburg. Espacio de Orlicz) *Sea Φ una función de Young y L_0^Φ la clase de Orlicz correspondiente.Se define la norma de Luxemburg como*

$$\|f\|_\Phi = \inf\{k > 0 : i_\Phi(f/k) \leq 1\}$$

para cada $f \in \mathcal{M}$. Se define el espacio de Orlicz como

$$L^\Phi = \{f \in \mathcal{M} \ : \ \|f\|_\Phi < \infty\}.$$

Nota 3.43 *Por ser Φ continua por la izquierda, una aplicación del teorema de la convergencia monótona nos muestra que el ínfimo que aparece en la norma de Luxemburg se alcanza y es, por tanto, un mínimo. Entonces es cierta la desigualdad*

$$i_\Phi(\frac{f}{\|f\|_\Phi}) \leq 1.$$

Esta pequeña introducción permite demostrar que la familia de los espacios de Orlicz está incluida en la familia de todos los espacios de funciones de Banach que son invariantes por reordenamiento.

Proposición 3.44 ([BeSh, p. 269]) *El espacio de Orlicz $(L^\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ es un espacio de funciones de Banach invariante por reordenamiento.*

Prueba: Empezando por probar las propiedades de la norma, es obvio que si $f \equiv 0$ entonces $i_\Phi(f/k) = 0$ para cualquier $k > 0$ y por tanto el ínfimo es 0. Recíprocamente, una función f de norma 0 cumple que $i_\Phi(f/k) \leq 1$ para cualquier $k > 0$, y ello sería contradictorio si f no fuese nula cpp. Si $\{w \in \Omega : \ |f(w)| > \varepsilon\}$ tiene medida positiva para algún $\varepsilon > 0$ (digamos μ_0), entonces

$$1 \geq i_\Phi(nf) > \int_{\{|f|>\varepsilon\}} \Phi(n\varepsilon)d\mu = \mu_0\Phi(n\varepsilon).$$

Dado que $\Phi(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$, basta con hacer $n \to \infty$ para llegar a contradicción. La igualdad $\|af\|_\Phi = a\|f\|_\Phi$ para $a > 0$ y $f \in L^\Phi$ es trivial.

Para probar la desigualdad triangular usamos la convexidad de la función Φ y la nota 3.43.

$$\begin{aligned}
&i_\Phi\left(\frac{f+g}{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)}\right)\\
&= \int_\Omega \Phi\left(\frac{\rho_\Phi(f)}{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)}\frac{f(w)}{\rho_\Phi(g)} + \frac{\rho_\Phi(g)}{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)}\frac{g(w)}{\rho_\Phi(g)}\right) d\mu(w)\\
&\leq \frac{\rho_\Phi(f)}{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)} i_\Phi(\frac{f}{\rho_\Phi(f)}) + \frac{\rho_\Phi(g)}{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)} i_\Phi(\frac{g}{\rho_\Phi(g)})\\
&\leq 1
\end{aligned}$$

para $f, g \in L^\Phi$. Por tanto $\|f+g\|_\Phi \leq \|f\|_\Phi + \|g\|_\Phi$. Con esto se tiene (P1).

(P2) es trivial por la monotonía de la integral.

La (SFP), vista como (P3) en la definición 1.23 se prueba pasando por el teorema de la convergencia monótona. Si $0 \leq f_n \uparrow f$, entonces $0 \leq \Phi(\frac{|f_n(\cdot)|}{k}) \uparrow \Phi(\frac{|f(\cdot)|}{k})$ por la monotonía de Φ. Aplicando el teorema de convergencia monótona en L^1, se tiene que $i_\Phi(f_n/k) \uparrow i_\Phi(f/k)$. Tomando $k = \sup_n \|f_n\|_\Phi$,

$$1 \geq i_\Phi(f_n/k) \uparrow i_\Phi(f/k)$$

y por tanto $\|f\|_\Phi \leq \sup_n \|f_n\|_\Phi$. La otra desigualdad es obvia y por tanto $\|f\|_\Phi = \lim_n \|f_n\|_\Phi$.

Sea A un medible de medida finita. Entonces

$$i_\Phi(\chi_A/k) = \mu(A)\Phi(1/k).$$

Φ es continua en 0 y $\Phi(0) = 0$. Así pues podemos encontrar $k > 0$ tal que $\Phi(1/k) \leq \frac{1}{\mu(A)}$, y por tanto $\|\chi_A\|_\Phi \leq k < \infty$ y tenemos (P4).

Para probar (P5) tomamos un medible A de medida finita y aplicamos la desigualdad de Jensen de manera que

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\int_A \frac{f(w)}{\|f\|_\Phi}\frac{d\mu(w)}{\mu(A)}\right) &\leq \int_A \Phi\left(\frac{f(w)}{\|f\|_\Phi}\right)\frac{d\mu(w)}{\mu(A)}\\
&\leq \frac{1}{\mu(A)} i_\Phi(\frac{f}{\|f\|_\Phi})\\
&\leq \frac{1}{\mu(A)}.
\end{aligned}$$

Por las características de Φ, esta tiene función inversa y por tanto

$$\int_A f d\mu \leq \frac{\Phi^{-1}(\frac{1}{\mu(A)})}{\frac{1}{\mu(A)}}\|f\|_\Phi,$$

con lo que $C_A = \frac{\Phi^{-1}(\frac{1}{\mu(A)})}{\frac{1}{\mu(A)}} > 0$ verifica (P5).

La propiedad de ser invariante por reordenamiento pasa por probar que $i_\Phi(f) = i_\Phi(g)$ para cada par de funciones equimedibles f, g. Bastaría, de hecho, probarlo para f y $g = f^*$. Sea entonces $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$ con $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots \alpha_n > 0$, de modo que su reordenada resulta $f^* = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{(m_{k-1}, m_k]}$ donde $m_0 = 0$ y $m_k = \sum_{j=1}^k \mu(A_k)$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Con ello

$$\int_\Omega \Phi(|f|)d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \Phi(\alpha_k)d\mu = \sum_{k=1}^n \Phi(\alpha_k)\mu(A_k).$$

$$\int_0^\infty \Phi(|f^*(s)|)ds = \sum_{k=1}^n \int_{m_{k-1}}^{m_k} \Phi(\alpha_k)ds = \sum_{k=1}^n \Phi(\alpha_k)\mu(A_k).$$

Finalmente, el teorema de la convergencia dominada resuelve el caso general. □

En el seno de estos espacios de funciones se puede definir otra norma. Es la conocida como norma de Orlicz, y guarda paralelismo con la norma definida sobre el espacio asociado a un espacio de funciones de Banach. Para introducirla, es necesario hablar de funciones de Young complementarias.

Definición 3.45 (Funciones complementarias) *Dos funciones de Young Φ y Ψ se dicen complementarias, si las funciones ϕ y ψ que las generan son inversas por la izquierda, es decir, cumplen*

$$\psi(u) = \inf\{v : \phi(u) \geq v\}.$$

El ejemplo más conocido de funciones complementarias son las que dan lugar a los exponentes conjugados de los espacios de funciones de Lebesgue, $\Phi(t) = \frac{t^p}{p}$ y $\Psi(t) = \frac{t^{p'}}{p'}$, con $1 < p < \infty$.

Lema 3.46 (Desigualdad de Young) *Si Φ y Ψ son funciones de Young complementarias, entonces*

$$\int_\Omega fgd\mu \leq i_\Phi(f) + i_\Psi(g)$$

para cada $f \in L^\Phi$ y $g \in L^\Psi$, habiendo igualdad si $f = \psi(g)$ ó $g = \phi(f)$ cpp. Así

$$\int_\Omega fgd\mu \leq 2\|f\|_\Phi \|g\|_\Psi$$

Una prueba se puede encontrar en [BeSh, p. 271]. Esta desigualdad implica que si Ψ y Φ son funciones de Young complementarias, entonces $L^\Phi \subset (L^\Psi)'$ y $L^\Psi \subset (L^\Phi)'$. Ahora se puede dar la definición de la norma de Orlicz,

$$\|f\|_\Phi^O = \sup\{\int_\Omega fgd\mu : i_\Psi(g) \leq 1\}.$$

Para cada función de Young Φ y cada $f \in L^\Phi$ se tiene que $\|f\|_\Phi \leq 1$ si y sólo si $i_\Phi(f) \leq 1$. En efecto, si $i_\Phi(f) \leq 1$, la definición de la norma de Luxemburg dice que $\|f\|_\Phi \leq 1$. Por otra parte, si $i_\Phi(f) > 1$, para cualquier sucesión

$\{k_n\}_n$ estrictamente decreciente a 1, se tiene que $i_\Phi(f/k_n) \uparrow i_\Phi(f) > 1$, y por tanto $i_\Phi(f/k_{n_0}) > 1$ para cierto $k_{n_0} > 1$. La comparación $\|f\|_\Phi > k_{n_0} > 1$ es inmediata, pues lo contrario implicaría $1 < i_\Phi(f/k_{n_0}) \le i_\Phi(f/\|f\|_\Phi) \le 1$, lo cual es contradictorio.

Con esta explicación se puede reescribir la norma de Orlicz como

$$\|f\|_\Phi^{\mathcal{O}} = \sup\{\int_\Omega fgd\mu : \|g\|_\Psi \le 1\},$$

donde se puede intuir que se trata de la norma como espacio asociado a L^Ψ. La equivalencia entre las normas de Luxemburg y Orlicz se prueba mediante la desigualdad

$$\|f\|_\Phi \le \|f\|_\Phi^{\mathcal{O}} \le 2\|f\|_\Phi,$$

cuya demostración puede encontrarse en [BeSh, p. 274] o [66, p. 154]. El corolario de esta equivalencia de normas es el siguiente.

Corolario 3.47 *Sean Φ y Ψ funciones de Young complementarias. Entonces $(L^\Phi, \|\cdot\|_\Phi)' = (L^\Psi, \|\cdot\|_\Psi^{\mathcal{O}})$.*

El resultado de dualidad correspondiente pasa por el conocimiento de la parte absolutamente continua de los espacios de Orlicz. La función fundamental será

$$\varphi_{L^\Phi}(t) = \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{t})}, \qquad t > 0,$$

ya que se calculó en 3.44. Por otra parte, una condición necesaria para la densidad del conjunto de funciones simples en L^Φ es la llamada condición Δ_2. Se dice que la función de Young cumple la condición Δ_2 (denotado por $\Phi \in \Delta_2$) si existen $C > 0$ y $t_0 > 0$ tales que

$$\Phi(2t) \le C\Phi(t) < \infty, \qquad t_0 \le t < \infty.$$

En efecto, esta condición nos permite comprobar que, para cada función no negativa f, la sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ que cumple $0 \ge s_n \uparrow f$ también converge a f en L^Φ. Entonces

Corolario 3.48 *Sean Φ y Ψ funciones de Young complementarias de manera que $\Phi \in \Delta_2$. Entonces $(L^\Phi, \|\cdot\|_\Phi)^* = (L^\Psi, \|\cdot\|_\Psi^{\mathcal{O}})$.*

Prueba: Si $t \to 0^+$, entonces $\Phi^{-1}(\frac{1}{t}) \to \infty$. Así la función fundamental permite aplicar 1.38 y tenemos $(L^\Phi)_a = (L^\Phi)_b$. La densidad de las funciones simples es consecuencia de la condición Δ_2, así que $(L^\Phi)_a = L^\Phi$. Por tanto asociado y dual coinciden (ver p. 25) y tiene el resultado. $\square$

Los espacios de Orlicz de funciones vectoriales son también llamados espacios de Orlicz-Bochner, es decir, formados por las funciones vectoriales $f : \Omega \to X$ de manera que la función $\|f\|_X$ pertenece al espacio de funciones de Orlicz. Estos espacios son objeto de estudio reciente en [96, 93, 69, 39, 60], cubriéndose aspectos de la geometría, compacidades y diferentes topologías.

En el contexto de las funciones armónicas vectoriales definidas en el disco podemos definir el espacio de funciones de Hardy-Orlicz-Bochner $h^\Phi(\mathbb{D}, X)$, dado que el espacio de funciones de Orlicz es invariante por traslaciones. Remitimos al lector a los preliminares sobre funciones armónicas para la notación.

Definición 3.49 *Se define el espacio $h^\Phi(\mathbb{D}, X)$ de las funciones u definidas en $\mathbb{D}$ con valores en X que son armónicas y con la acotación*

$$\sup_{r \in [0,1)} \|u_r\|_{L^\Phi(X)} < \infty.$$

Se toma como norma en el espacio $\|u\|_{L^\Phi(X)} = \sup_{r\in[0,1)} \|u_r\|_{L^\Phi(X)}$.

Los resultados que se pueden obtener sobre este espacio pasan por la particularización de lo obtenido en el capítulo 2.

3.4.2 Espacios de medidas de Orlicz $V^\Phi(\mu, X)$

Como se indicaba al inicio de la sección, los espacios de medidas vectoriales de Orlicz se introducen en [114, 115], siendo objeto de profundo estudio y exponiendo además teoremas de representación de operadores lineales y continuos en espacios de funciones vectoriales de Orlicz y un nuevo teorema de Radon-Nikodým en dicho contexto. El trabajo continúa en [116], donde el autor introduce la clase de operadores de Dinculeanu extendida al contexto de los espacios de Orlicz.

El contenido de este apartado se desarrolló principalmente en [42]. Allí se trabaja desde el punto de vista de las proyecciones de las medidas en particiones, y posteriormente se demuestra una equivalencia de normas.

Definición 3.50 ([115, p. 21]) *Sea Φ función de Young, X un espacio de Banach y F una medida sobre X. Se dice que F es de Φ-variación acotada si*

$$I_\Phi(F) := \sup_{\pi \in D_\Omega} \sum_\pi \Phi\left(\frac{\|F(E_n)\|}{\mu(E_n)}\right) \mu(E_n) < \infty.$$

Se demuestra que el supremo es, de hecho, un límite en el sentido de Moore-Smith (el conjunto de las particiones es un conjunto dirigido por la relación 'ser más fina que').

Si F es una medida finitamente aditiva y π es una partición, se define la medida 'proyección de F en π' como

$$\sum_{A\in\pi} \frac{F(A)}{\mu(A)} \mu(\cdot \cap A),$$

denotada por F_π.

Teorema 3.51 ([115, p. 24]) *Si F es una medida para la cual $I_\Phi(F)$ está bien definido, entonces*

- *$I_\Phi(F_\pi) \leq I_\Phi(F)$.*

- $I_\Phi(F) = \lim_\pi I_\Phi(F_\pi)$.

Inspirándose en los espacios de funciones de Orlicz se definen los espacios $A^\Phi(X)$ de medidas finitamente aditivas F tales que se anulan sobre los conjuntos μ-nulos y de manera que $I_\Phi(F/k) \leq 1$ para algún $k > 0$. En ellos considera la norma de Luxemburg

$$\|F\|_\Phi = \inf\{k > 0 : \ I_\Phi(F/k) \leq 1\}.$$

Éstos son espacios completos con dicha norma, y se destaca el subespacio de $A^\Phi(X)$ de las medidas μ-continuas, que se denota por $V^\Phi(X)$. Éste es cerrado en $A^\Phi(X)$ y, de hecho, es el llamado espacio de medidas de Orlicz.

Definición 3.52 ([115, p. 28]) *Se define $V^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu, X) = V^\Phi(X)$ como el espacio de las medidas vectoriales F que son μ-continuas y tales que $I_\Phi(F/k) \leq 1$ para algún $k > 0$, tomándose como norma el funcional*

$$\|F\|_\Phi = \inf\{k > 0 : \ I_\Phi(F/k) \leq 1\}.$$

Más adelante se define en [115] la norma de Orlicz, involucrando a la función de Young complementaria. Se prueban desigualdades de Hölder y la equivalencia entre ambas normas. En las siguiente secciones, Uhl prueba la inclusión isométrica de $L^\Phi(X)$ en $V^\Phi(X)$, una generalización del teorema de Radon-Nikodým, la clausura del conjunto de medidas simples en V^Φ, y los operadores lineales y continuos con dominio en la clausura del conjunto de las medidas simples en $V^\Phi(X)$.

Veamos una caracterización de los espacios de medidas, similar a las que vamos consiguiendo en los casos anteriores, en términos de funciones no negativas. Pero antes resaltamos una herramienta recogida en un lema.

Lema 3.53 ([12]) *Sea Φ una función de Young. Si definimos, para cada medida F, el funcional $I'_\Phi(F)$ como*

$$I'_\Phi(F) = \sup_{\pi \in D_\Omega} \sum_\pi \Phi\left(\frac{|F|(E_n)}{\mu(E_n)}\right) \mu(E_n),$$

entonces $I'_\Phi(F) = I_\Phi(F)$.

La prueba se basa en la convexidad y continuidad de la función de Young Φ. Con esto podemos pasar a la siguiente proposición.

Proposición 3.54 *Sea Φ una función de Young y X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *$F \in V^\Phi(X)$.*
- *Existe $\varphi \geq 0$, $\varphi \in L^\Phi$ tal que $|F|(A) = \int_A \varphi d\mu$ para cada $A \in \Sigma$.*

Más aún, si φ es una función cualquiera de forma que $|F|(A) = \int_A \varphi d\mu$ para cada $A \in \Sigma$, entonces $\|F\|_{V^\Phi(X)} = \|\varphi\|_\Phi$.

Prueba: Sea $F \in V^\Phi(X)$. Entonces F tiene variación total acotada, puesto que al ser Φ convexa no negativa,

$$t \leq K_1\Phi(t) + K_2 \qquad t > 0.$$

para ciertas constantes $K_1, K_2 > 0$. Entonces

$$\sum_{A\in\pi} \|F(A)\|_X \leq \sum_{A\in\pi} \Phi(\frac{\|F(A)\|}{\mu(A)})\mu(A) + \sum_{A\in\pi} \mu(A)$$

para cualquier partición π, y así $|F|(\Omega) \leq K_1 I_\Phi(F) + K_2\mu(\Omega)$. Si $I_\Phi(F) = \infty$, basta con repetir el razonamiento dividiendo por $k > 0$ de manera que $I_\Phi(F/k) < \infty$.

Como F es μ-continua, tenemos una función no negativa φ de manera que representa a la medida finita $|F|$. Ahora podemos aplicar la desigualdad de Jensen por la convexidad de Φ, y

$$\begin{aligned} I'_\Phi(F) &= \sup_\pi \sum_{A\in\pi} \Phi\left(\frac{|F|(A)}{\mu(A)}\right)\mu(A) \\ &= \sup_\pi \sum_{A\in\pi} \Phi\left(\frac{\int_A \varphi d\mu}{\mu(A)}\right)\mu(A) \\ &= \sup_\pi \sum_{A\in\pi} \int_A \Phi(\varphi) \\ &= i_\Phi(\varphi). \end{aligned}$$

De esto se obtiene $\|F\|_\Phi = \|\varphi\|_\Phi$, puesto que el funcional i_Φ es el correspondiente al espacio de funciones de Orlicz.

El recíproco es inmediato. □

Uno de los resultados que se conseguía en [42] era la expresión equivalente de la norma de Luxemburg $\|\cdot\|_\Phi$, que exponemos a continuación con el objetivo de probar que el espacio de medidas de Orlicz es el de las medidas de L^Φ-variación acotada, un caso concreto del dado en el capítulo 2.

Proposición 3.55 *Sea Φ una función de Young y X un espacio de Banach arbitrario. Entonces el espacio de medidas de Orlicz $V^\Phi(X)$ es isomorfo al espacio $V_{L^\Phi}(X)$*

Prueba: Es inmediato de los resultados previos, pues una medida F de $V^\Phi(X)$ cuya variación total venga representada por la función no negativa φ de L^Φ, cumplirá que

$$\begin{aligned} |F|_{L^\Phi} &= \sup_\pi \| \sum_{A\in\pi} \frac{|F|(A)}{\mu(A)}\chi_A\|_\Phi \\ &= \sup_\pi \| \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A \varphi d\mu}{\mu(A)}\chi_A\|_\Phi \\ &= \|\varphi\|_\Phi \end{aligned}$$

(para ello ver nota 3.3, 3.53 y 1.32). □

Nota 3.56 *Una vez más recordamos al lector que las igualdades de normas están sujetas a la propiedad de Fatou fuerte* (SFP)*. Es decir, que la relajación de dicha propiedad (suponiendo entonces la* (WFP)*) convertiría las igualdades en equivalencias.*

Tras la identificación de los espacios de medidas de Orlicz como participantes de esta gran familia de espacios de medidas con variación en un espacio de funciones de Banach, podemos afirmar una serie de corolarios obtenidos de aplicarles la teoría general mostrada en los capítulos 2 y 3, aunque gran parte de ellos ya han sido probados en [114, 115, 116, 12].

Corolario 3.57 *Sea* $L^{\Phi}(X)$ *un espacio de Orlicz-Bochner. Entonces se tiene:*

- $L^{\Phi}(X) \subset V^{\Phi}(X)$ *isométricamente.*
- $L^{\Phi}(X) = V^{\Phi}(X)$ *si y sólo si* $X \in (RNP)$*.*
- $F \in V^{\Phi}(X)$ *si y sólo si existe* $\varphi \in L^{\Phi}$ *no negativa tal que* $|F|(\cdot) = \int_{(\cdot)} \varphi d\mu$*.*
- $L^{\Phi}(X) \subset h^{\Phi}(X)$ *isométricamente.*

Por otra parte, si Φ *es función de Young satisfaciendo la condición* Δ_2*, y* Ψ *es su complementaria, entonces:*

- $L^{\Psi}(X) = h^{\Psi}(X)$ *si y sólo si* $X \in (RNP)$*.*
- $V^{\Psi}(X) = \mathcal{D}(L^{\Phi}, X)$*.*
- $V^{\Psi}(X) = \Pi^{1,+}(L^{\Phi}, X)$*.*
- $V^{\Psi}(X^*) = [L^{\Phi}(X)_b]^*$*.*
- $h^{\Psi}(X) = V^{\Psi}(X)$*.*

Capítulo IV

Espacios de medidas de Musielak-Orlicz

Este capítulo está dedicado a mostrar un espacio de medidas vectoriales concreto, el cual puede ser utilizado para obtener representaciones integrales de operadores lineales y continuos de un espacio de funciones de Banach concreto a un espacio de Banach arbitrario. El espacio que nos va a ocupar encaja en la teoría desarrollada en el capítulo 2, y es entonces susceptible al resto de consideraciones que en él se hacen, como son la dualidad de un espacio de Köthe-Bochner no considerado hasta ahora, y cuestiones acerca de ideales de operadores como son los cono absolutamente sumantes, o la clase de Dinculeanu.

El retículo de Banach que se va a considerar no satisface la propiedad (J), por lo que el enfoque presentado en [GrUh] es inaplicable y nada se puede resolver. La definición de E-variación planteada en 2.1 consigue ser la adecuada en este caso, probando entonces que es una extensión de la anterior (ver p. 74).

Así pues se procede a presentar la extensa familia de espacios de funciones de Musielak-Orlicz para mostrar, posteriormente, a un adecuado representante de ésta. Se hará un estudio de este espacio comprobándose, en primer lugar, que es un retículo tal y como se describe en los preliminares, y después se comprobará la exención de la propiedad (J) (y por tanto de ser invariante por reordenamiento). Por último, la consideración geométrica del tipo y cotipo de Rademacher en un cierto espacio de Musielak-Orlicz vectorial completará el tratamiento de este último capítulo de la memoria.

4.1 Los espacios de funciones de Musielak-Orlicz $L^M(\Omega, \mu)$

La familia de espacios que describimos a continuación también es referida por la literatura como 'espacios de Orlicz generalizados'. Efectivamente, la base conceptual reside en la consideración de una función de Young en un sentido generalizado. La referencia fundamental para el estudio de esta familia es [Mus], referencia a la que acudiremos en aquellos resultados cuyas pruebas no sean ilustrativas en nuestro cometido. (Ω, Σ, μ) denota un espacio de medida σ-finito y completo, y no dejaremos de considerar el caso $\Omega = \mathbb{N}$, dado que se hará un estudio sobre cierto espacio de sucesiones.

Definición 4.1 ([Mus, Def. 7.1], Función de Musielak-Orlicz) *Una función $M : \Omega \times [0, \infty) \to [0, \infty]$ se dice función de Musielak-Orlicz (o función de Young generalizada) si satisface las siguientes propiedades:*

- *Para todo $w \in \Omega$, la función $t \mapsto M(w, t)$ es una función de Young, tal y como viene definida en el capítulo anterior.*
- *Para todo $t \in [0, \infty)$, la función $w \mapsto M(w, t)$ es medible.*

Si $\Omega = \mathbb{N}$, la función de Young generalizada se puede escribir $M = (\Phi_n)_n$, donde Φ_n es función de Young para cada $n = 1, 2, \ldots$.

Una función de Young generalizada M se dirá localmente integrable si para cada $t > 0$ y $A \in \Sigma$ de medida finita se tiene que

$$\int_A M(w, t) d\mu(w) < \infty.$$

Definición 4.2 ([Mus, Def. 7.2], Clase y espacio de Musielak-Orlicz) *Sea M una función de Musielak-Orlicz. Se define el funcional i_M para cada función medible f como*

$$i_M(f) = \int_\Omega M(w, |f(w)|) d\mu(w).$$

La clase de Musielak-Orlicz viene dada entonces por

$$L_0^M = \{f \in \mathcal{M} \ : \ i_M(f) < \infty\}.$$

El espacio de Musielak-Orlicz es el conjunto

$$L^M = \{f \in \mathcal{M} \ : \ \|f\|_M < \infty\},$$

donde la norma $\|\cdot\|_M$ es la norma funcional de Minkowski, llamada norma de Luxemburg, dada por

$$\|f\|_M = \inf\{k > 0 \ : \ i_M(f/k) \leq 1\}, \qquad f \in \mathcal{M}.$$

Cuando $\mathcal{M}$ es el espacio de las sucesiones reales o complejas, se puede escribir $f = (\alpha_n)_n$, $M = (\Phi_n)_n$ y $i_M(f) = \sum_n \Phi_n(|\alpha_n|)$. Entonces se suelen denotar la clase y el espacio de sucesiones de Musielak-Orlicz como ℓ_0^M y ℓ^M.

A diferencia de los espacios de funciones de Orlicz, hay espacios de funciones de Musielak-Orlicz que no son espacios reinvariantes por reordenamiento. Más aún, los hay que tampoco satisfacen la propiedad (J). Veremos, por ello, un ejemplo de esta familia de espacios para ilustrar la problemática que surge en la definición de E-variación dada por autores como N.E. Gretsky y J.J. Uhl. Ahora continuamos con la descripción de los espacios de funciones.

Es interesante la relación de inclusión que existe en la familia de espacios de Musielak-Orlicz. Dado que los espacios de Orlicz, y por tanto los de Lebesgue, son espacios de esta gran familia, la presentación del siguiente resultado invita a la reflexión sobre porqué las relaciones de inclusión entre espacios de Lebesgue depende del espacio de medida. Para ello precisamos de una definición.

Definición 4.3 ([Mus, Def. 8.1]) *Sean M y N dos funciones de Musielak-Orlicz. Escribiremos $N \leq M$ si existen h función en Ω, no negativa, integrable, y K_1, K_2 constantes positivas, tales que para todo $t \geq 0$ y para casi todo $w \in \Omega$*

$$N(w,t) \leq K_1 M(w, K_2 t) + h(w).$$

Otra definición de interés es la siguiente.

Definición 4.4 ([Mus, Thm. 8.13]) *Sea M una función de Musielak-Orlicz.*

- *Si μ es sin átomos, se dice que M satisface la condición Δ_2 si existen: h función en Ω, no negativa, integrable; y K constante positiva, tales que para todo $t \geq 0$ y para casi todo $w \in \Omega$*

$$M(w,2t) \leq KM(w,t) + h(w).$$

- *Si $\Omega = \mathbb{N}$, $\mu(\{n\}) = 1$ para $n = 1, 2, \ldots$, se dice que $M = (\Phi_n)_n$ satisface la condición δ_2 si existen: $(a_n)_n$ sucesión de términos no negativos, con $\sum_n |a_n| < \infty$; y δ, K constantes positivas, tales que para todo $t \geq 0$ y para todo $n = 1, 2, \ldots$ se tiene que $\Phi_n(t) < \delta$ implica*

$$\Phi_n(2t) \leq K\Phi_n(t) + a_n.$$

Proposición 4.5 ([Mus, Thm. 8.5]) *Sean M y N funciones de Musielak-Orlicz. Entonces:*

- *Si $N \leq M$ se tiene que $L^M \subset L^N$. Además $\|\cdot\|_N \leq C\|\cdot\|_M$ para alguna $C > 0$.*
- *Si $L^M \subset L^N$ y la medida es sin átomos, entonces $N \leq M$.*

Para el caso de espacios de sucesiones el resultado es paralelo.

Proposición 4.6 ([Mus, Thm. 8.10]) *Sean $M = (\Phi_n)_n$ y $N = (\Psi_n)_n$ funciones de Musielak-Orlicz. Entonces $\ell^M \subset \ell^N$ si y sólo si, existen $\delta, K_1, K_2 > 0$ y una sucesión de términos no negativos $(a_n)_n$ con $\sum_n a_n < \infty$ tales que $\Phi_n(t) \leq \delta$ implica que*

$$\Psi_n(t) \leq K_1\Phi_n(K_2 t) + a_n$$

para $t \geq 0$ y $n = 1, 2, \ldots$.

Ahora vamos a hacer referencia a las funciones complementarias y al espacio dual topológico de espacios de Musielak-Orlicz.

Definición 4.7 ([Mus, Def. 13.1], F$^{\underline{\text{on}}}$ de Musielak-Orlicz restringida) *Diremos que una función de Musielak-Orlicz M es una función de Musielak-Orlicz restringida, si:*

- *M es convexa en la variable $t \geq 0$ para todo $w \in \Omega$.*
- $\lim_{t\to 0^+} \frac{M(w,t)}{t} = 0$ *para todo $w \in \Omega$.*
- $\lim_{t\to \infty} \frac{M(w,t)}{t} = \infty$ *para todo $w \in \Omega$.*

Proposición 4.8 ([Mus, Thm. 13.2]) *Sea M una función de Musielak-Orlicz restringida si y sólo si M cumple, para todo $w \in \Omega$, que*

$$M(w,t) = \int_0^t m(w,s)ds,$$

donde $m(w,s) > 0$ para $s > 0$, $m(w,s)$ es no decreciente y continua por la derecha como función de $s \geq 0$, $m(w,0) = 0$ y $\lim_{s\to\infty} m(w,s) = \infty$ para todo $w \in \Omega$. En este caso se dice que la función m genera la función M.

Definición 4.9 (Funciones de Musielak-Orlicz complementarias) *Se dice que dos funciones de Musielak-Orlicz restringidas M y N son complementarias si las funciones m y n que las generan son inversas por la derecha una de la otra, es decir,*

$$n(w,u) = \sup\{s : \; m(w,s) \leq u\}$$

para cada $w \in \Omega$ y $u > 0$.

Cabe decir que si una función de Musielak-Orlicz restringida M define por el proceso descrito a la función N, se puede probar que N es función de Musielak-Orlicz restringida ([Mus, Thm. 13.8]).

Proposición 4.10 ([Mus, Thm. 13.6], Desigualdad de Young) *Sean M y N funciones de Musielak-Orlicz restringidas complementarias. Entonces se satisface la desigualdad de Young*

$$st \leq M(w,s) + N(w,t), \qquad \alpha, \beta \geq 0, \quad w \in \Omega.$$

Además

$$N(w,t) = \sup_{s>0}(st - M(w,s)), \qquad M(w,s) = \sup_{t>0}(st - N(w,t)),$$

donde los supremos se alcanzan en $s_w = n(w,t)$ y $t_w = m(w,s)$, respectivamente.

Este resultado implica que $L^N \subset (L^M)'$. Al igual que en el caso de espacios de Orlicz, una segunda norma enriquece la teoría.

Definición 4.11 ([Mus, Thm. 13.11], Norma de Orlicz) *Sea M una función de Musielak-Orlicz restringida y localmente integrable, y N su complementaria. Se define para cada función de $\mathcal{M}$ la norma*

$$\|f\|_M^{\mathcal{O}} = \sup\{\textstyle\int_\Omega fg d\mu \; : \; i_N(g) \leq 1\}.$$

En este punto hay que decir que las condiciones

$$i_N(g) \leq 1, \qquad \|g\|_N \leq 1$$

son equivalentes (ver caso Orlicz).

Proposición 4.12 ([Mus, Thm. 13.11]) *En las condiciones de la definición previa,*

$$\|f\|_M \leq \|f\|_M^{\text{O}} \leq 2\|f\|_M$$

para toda $f \in L^M$.

Esto prueba que si M y N son funciones de Musielak-Orlicz restringidas complementarias, entonces:

- $(L^M, \|\cdot\|_M^{\text{O}}) = (L^N, \|\cdot\|_N)'$ es una isometría.
- $(L^M, \|\cdot\|_M) = (L^N, \|\cdot\|_N)'$ es un isomorfismo.

La desigualdad de Hölder tiene 3 variantes.

Corolario 4.13 ([Mus, Thm. 13.13]) *Sean M y N funciones de Musielak-Orlicz restringidas complementarias. Se tienen las siguientes versiones de la desigualdad de Hölder:*

$$\textstyle\int_\Omega |f|\,|g| d\mu \leq \begin{cases} 2\|f\|_M\|g\|_N \\ \|f\|_M^{\text{O}}\|g\|_N \\ \|f\|_M\|g\|_N^{\text{O}} \end{cases}$$

Corolario 4.14 *Sean M y N funciones de Musielak-Orlicz restringidas y complementarias. Entonces $(L^N, \|\cdot\|_N^{\text{O}})$ está isométricamente contenido en el dual topológico de $(L^M, \|\cdot\|_M)$.*

La condición Δ_2 también trae consigo la densidad del conjunto de las funciones simples ([Mus, Rmk. 8.15]). Con ello se puede probar el siguiente resultado de dualidad.

Teorema 4.15 ([Mus, Thm. 13.18]) *Sean M y N funciones de Musielak-Orlicz (restringidas) complementarias y localmente integrables. Supongamos que para cada $t_0 > 0$ existe un $c > 0$ para el cual $\frac{M(w,t)}{t} \geq c$ si $t \geq t_0$ y $w \in \Omega$. Más aún, supongamos que una de las siguientes dos condiciones se satisface:*

- *μ es sin átomos y M satisface la condición Δ_2.*
- *$\Omega = \{1, 2, \ldots\}$, $\mu(\{n\}) = 1$ para $n = 1, 2, \ldots$ y M satisface la condición δ_2.*

Entonces la forma de cada funcional lineal y continuo sobre $(L^M, \|\cdot\|_M)$ es

$$T(f) = \int_\Omega fg d\mu, \qquad f \in L^M,$$

con $g \in L^N$ y $\|T\| = \|g\|_N^{\text{O}}$. Es decir, se tiene la isometría

$$[(L^M, \|\cdot\|_M)]^* = (L^N, \|\cdot\|_N^{\text{O}}).$$

Una vez terminada esta presentación de los espacios de funciones de Musielak-Orlicz volvemos al contexto de los retículos de Banach, llamados espacios de funciones de Banach y definidos en 1.23. Una parte de la familia de espacios de Musielak-Orlicz se enmarca en este contexto.

Proposición 4.16 *Sea M una función de Musielak-Orlicz de manera que:*

- *Es convexa en la variable $t \geq 0$ para todo $w \in \Omega$.*
- *Para cada medible A de medida finita existe un $s > 0$ tal que $\int_A M(w,s)d\mu(w) < \infty$, y*
- *Existe un $t > 0$ tal que* $\operatorname{ess\,inf}_w M(w,t) > 0$.

Entonces el espacio de Musielak-Orlicz L^M es un espacio de funciones de Banach (considerado con la norma de Luxemburg).

En particular, si M es una función de Musielak-Orlicz restringida y localmente integrable, el espacio L^M es un espacio de funciones de Banach

Prueba: Las propiedades (P1) y (P2) de 1.23 son triviales. (P3) tiene una prueba idéntica al caso de los espacios de Orlicz, salvo por la notación (ver p. 98). (P4) es inmediata de la segunda hipótesis que se toma sobre M, pues una vez la integral ahí expresada es finita, para algún $k > 0$ (lo suficientemente grande) se tendrá $i_M(\chi_A/k) \leq 1$. Por último, (P5) se puede interpretar como la inclusión continua

$$L^M(A, \Sigma_A, \mu_A) \subset L^1(A, \Sigma_A, \mu_A)$$

donde Σ_A y μ_A son la σ-álgebra y la medida restringidas al medible A por intersecciones con éste. Entonces basta con echar una mirada a 4.5 y tratar de probar que $N \leq \widetilde{M}$ donde

$$N(w,t) = t\chi_A(w) \qquad \widetilde{M}(w,t) = M(w,t)\chi_A(w).$$

Este hecho es fácil de probar con la primera y tercera hipótesis asumida sobre M. Sea $\alpha = \operatorname{ess\,inf} M(w,s)$. La convexidad de cada $M(w,\cdot)$ implica que

$$M(w,t) \geq \frac{t}{s} M(w,s) \qquad t \geq s, \quad w \in \Omega.$$

Veamos que

$$t\chi_A(w) \leq \frac{s}{\alpha} M(w,t) + s\chi_A(w)$$

para casi todo $w \in \Omega$ y para todo $t \geq 0$. En efecto, para cada $0 \leq t \leq s$ la desigualdad es trivial en virtud del término $s\chi_A(w)$. Para $t > s$ la desigualdad vuelve a ser trivial, esta vez usando el otro término.

Por tanto la inclusión entre ambos espacios produce la desigualdad de normas

$$\|f\chi_A\|_1 \leq C\|f\chi_A\|_M \leq C\|f\|_M$$

que equivale a (P5). $\square$

En nuestro estudio sólo interesan espacios de funciones de Banach, por tanto sólo una parte de la gran familia de los espacios de Musielak-Orlicz. Veamos una condición suficiente para que el espacio L^M tenga norma absolutamente continua.

Lema 4.17 *Sea M una función de Musielak-Orlicz de manera que L^M es un espacio de funciones de Banach, y que satisface la condición Δ_2. Entonces $L^M_a = L^M_b = L^M$.*

Prueba: Basta ver que cada función χ_A pertenece a L^M_a. Para ello sea A arbitrario. Entonces

$$i_M(\frac{\chi_A}{\|\chi_A\|_M}) \leq 1.$$

Sea $B \subset A$ y $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ de manera que $2^{-k}\|\chi_A\|_M \leq \varepsilon < 2^{-k+1}\|\chi_A\|_M$. Con ello y usando la condición Δ_2 se puede escribir la cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} i_M(\frac{\chi_B}{\varepsilon}) &\leq i_M(\frac{2^k\chi_B}{\|\chi_A\|_M}) \\ &= \int_B M(w, \frac{2^k}{\|\chi_A\|_M})d\mu(w) \\ &\leq C^k \int_B M(w, \frac{1}{\|\chi_A\|_M})d\mu(w) + k\int_B h(w)d\mu(w). \end{aligned}$$

Por ser integrables las funciones que aparecen dentro de los respectivos integrandos, la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue nos permite deducir la existencia de un $\delta > 0$ de manera que si $\mu(B) < \delta$, entonces $i_M(\frac{\chi_B}{\varepsilon}) \leq 1$ y por tanto $\|\chi_B\|_M \leq \varepsilon$. $\square$

La presentación de esta familia de espacios de funciones tiene un objetivo muy concreto. El concepto de E-variación de una medida vectorial que se maneja en [Gret, GrUh] está ligado a espacios de funciones de Banach E con la propiedad de Fatou débil (WFP) y satisfaciendo la propiedad (J) (ver p. 29). En esta gran familia de espacios de funciones, que incluye a los espacios de Lebesgue y a los de Orlicz, todos ellos invariantes por reordenamiento y poseedores, por tanto, de la propiedad (J), también incluye espacios donde la propiedad (J) no se satisface. Uno de estos espacios va a centrar ahora nuestra atención. Veremos que, aparte de la propiedad (J), hay otras propiedades que lo distanciarán del resto de espacios de funciones invariantes por reordenamiento.

Proposición 4.18 *Sea $\Omega = (0,1)$, μ la medida de Lebesgue en Ω y Σ la σ-álgebra de los borelianos. Consideramos $M : (0,1)\times[0,\infty) \to [0,\infty)$ la función*

$$M(w,t) = t\chi_{(0,\frac{1}{2})}(w) + \frac{t^2}{2}\chi_{(\frac{1}{2},1)}(w).$$

El espacio L^M es un espacio de funciones de Banach, pero no es invariante por reordenamiento ni invariante por traslaciones ni posee la propiedad (J).

Prueba: El hecho de tratarse de un espacio de funciones de Banach es consecuencia del resultado anterior. Por otro lado, usando la definición de la norma de Luxemburg y del funcional i_M es fácil calcular que

$$\|f\|_M = \frac{1}{2}\left[\|f\chi_{(0,\frac{1}{2})}\|_1 + \sqrt{\|f\chi_{(0,\frac{1}{2})}\|_1^2 + 2\|f\chi_{(\frac{1}{2},1)}\|_2^2}\right].$$

Se tiene como consecuencia que

$$\begin{aligned}\|f\chi_{(0,\frac{1}{2})}\|_M &= \|f\chi_{(0,\frac{1}{2})}\|_1,\\ \|f\chi_{(\frac{1}{2},1)}\|_M &= \frac{\sqrt{2}}{2}\|f\chi_{(\frac{1}{2},1)}\|_2.\end{aligned}$$

Esto prueba de manera rotunda que L^M no es invariante por traslaciones (y por tanto ni por reordenamiento). Veamos que L^M no satisface la propiedad (J).

Para cada $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ consideramos la función $f_\alpha = \alpha\chi_{(\frac{1}{2}-\alpha,\frac{1}{2})}$ y la partición $\mathcal{E}_\alpha$ formada por el medible $(\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}+\alpha)$. Es fácil calcular

$$\|f_\alpha\|_M = 1, \qquad E_{\mathcal{E}_\alpha}(f_\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\chi_{(\frac{1}{2}-\alpha,\frac{1}{2}+\alpha)}$$

y por tanto

$$\|E_{\mathcal{E}_\alpha}(f_\alpha)\|_M = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4\alpha}}\right].$$

Es obvio que la desigualdad $\|E_{\mathcal{E}_\alpha}(f_\alpha)\|_M \leq \|f_\alpha\|_M$ no se puede tener para todo $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, y que L^M ni siquiera puede ser renormado de manera que satisfaga la propiedad (J). □

Calculamos ahora el espacio asociado al espacio de Musielak-Orlicz dado.

Proposición 4.19 *En las condiciones de la proposición anterior, sea la función* $N : (0,1) \times [0,\infty) \to [0,\infty]$ *dada por*

$$N(w,t) = [0\chi_{(0,1)}(t) + \infty\chi_{(1,\infty)}(t)]\chi_{(0,\frac{1}{2})}(w) + \frac{t^2}{2}\chi_{(\frac{1}{2},1)}(w).$$

Entonces el espacio de Musielak-Orlicz L^N *es isomorfo al asociado del espacio de la proposición anterior* L^M*.*

Prueba: En primer lugar, es fácil obtener de las definiciones que

$$\|f\|_N = \max\{\|f\chi_{(0,\frac{1}{2})}\|_\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\|f\chi_{(\frac{1}{2},1)}\|_2\}.$$

Sea $g \in L^N$. Usando que $(L^1)' = L^\infty$ y $(L^2)' = L^2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|g\|_N &= \max\{\|g\chi_{(0,\frac{1}{2})}\|_\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\|g\chi_{(\frac{1}{2},1)}\|_2\} \\
&\leq \|g\chi_{(0,\frac{1}{2})}\|_\infty + \|g\chi_{(\frac{1}{2},1)}\|_2 \\
&\leq \sup\{\int_0^1 fgd\mu \ : \ \|f\chi_{(0,\frac{1}{2})}\|_1 \leq 1, \ \|f\chi_{(\frac{1}{2},1)}\|_2 \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|f\|_M\|g\|_{(L^M)'} \ : \ \|f\chi_{(0,\frac{1}{2})}\|_1 \leq 1, \ \|f\chi_{(\frac{1}{2},1)}\|_2 \leq 1\} \\
&\leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}\|g\|_{(L^M)'}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $g \in (L^M)'$ se tiene que $g\chi_{(0,\frac{1}{2})} \in L^\infty$ y $g\chi_{(\frac{1}{2},1)} \in L^2$. Así, si $f \in L^M$ y $g \in (L^M)'$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 fgd\mu &= \int_0^{\frac{1}{2}} f\chi_{(0,\frac{1}{2})}g\chi_{(0,\frac{1}{2})}d\mu + \int_{\frac{1}{2}}^1 f\chi_{(\frac{1}{2},1)}g\chi_{(\frac{1}{2},1)}d\mu \\
&\leq \|f\chi_{(0,\frac{1}{2})}\|_1\|g\chi_{(0,\frac{1}{2})}\|_\infty + \|f\chi_{(\frac{1}{2},1)}\|_2\|g\chi_{(\frac{1}{2},1)}\|_2 \\
&\leq \|f\chi_{(0,\frac{1}{2})}\|_1\|g\|_N + \|f\chi_{(\frac{1}{2},1)}\|_2\sqrt{2}\|g\|_N \\
&\leq 2\|f\|_M\|g\|_N.
\end{aligned}$$

(Se han aplicado las desigualdades expuestas en la prueba de 4.18). Con ello llegamos a la desigualdad

$$\frac{1}{2}\|g\|_{M'} \leq \|g\|_N \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}\|g\|_{M'}$$

para cada función medible g, y por tanto L^N es isomorfo a $(L^M)'$. □

Los espacios de Musielak-Orlicz-Bochner o espacios de funciones vectoriales de Musielak-Orlicz $L^M(\mu, X)$ se definen de la manera habitual. Una función $f : \Omega \to X$ medible pertenece a $L^M(\mu, X)$ si la función no negativa $\|f\|_X$ pertenece a L^M.

4.2 Espacios de medidas de Musielak-Orlicz $V^M(\mu, X)$

El ejemplo de la sección anterior nos revela la importancia de la propiedad (J), exigida para definir una variación de medidas vectoriales basada en las proyecciones de dichas medidas. En ese caso, una definición como

$$\|F\|_{L^M} = \sup\{\|\sum_{A\in\pi} \tfrac{F(A)}{\mu(A)}\chi_A\|_{L^M} : \pi \in D\}$$

resulta absurda incluso en el caso escalar. El motivo es que si se toma una familia de funciones como $\{f_\alpha : \ \alpha \in (0, \frac{1}{2})\}$ (dada en la proposición 4.18), ésta resulta ser acotada pues está contenida en la bola unidad de L^M. Sin embargo la familia de medidas inducida de manera natural por la familia anterior,

$$\{\textstyle\int_{(\cdot)} f_\alpha d\mu : \ \alpha \in (0, \frac{1}{2})\},$$

formaría un conjunto no acotado para la L^M-variación. Este hecho se consideraría una patología, puesto que es deseable que el espacio de funciones de Banach se introduzca de manera isométrica en el espacio de medidas de la forma habitual.

La definición de L^M-variación que se propone

$$|F|_{L^M} := \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \, \|F(A)\| : \quad \pi \in D, \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A \|_{(L^M)'} \le 1\}$$

no tiene mayor problema que la identificación del espacio $(L^M)'$. Cuando M es una función de Musielak-Orlicz restringida, el espacio $(L^M)'$ no es más que L^{M^*} (donde M^* es la complementaria de M) salvo el isomorfismo que supone la elección de la norma de Luxemburg u Orlicz en dicho espacio). Así queda definido el espacio de medidas vectoriales de Musielak-Orlicz como sigue.

Definición 4.20 *Sea $L^M(\mu)$ un espacio de la familia de los espacios de funciones de Musielak-Orlicz, y X un espacio de Banach arbitrario. Se define el espacio de medidas vectoriales de Musielak-Orlicz, denotado por $V^M(\mu, X)$, como el formado por las medidas F finitamente aditivas con valores en X que son μ-continuas y de manera que*

$$|F|_M := \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \, \|F(A)\| : \quad \pi \in D, \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A \|_{(L^M)'} \le 1\} < \infty.$$

Es decir, $V^M(\mu, X) = V_E(\mu, X)$, el espacio de las medidas de E-variación finita cuando se considera la situación $E = L^M(\mu)$ con la norma de Luxemburg.

Todos los resultados del capítulo 2 son ciertos con la salvedad de que las isometrías expuestas sean isomorfismos dado que trabajamos con una variación equivalente.

Corolario 4.21 *Sea $L^M(X)$ un espacio de Musielak-Orlicz-Bochner, donde M es tal que L^M resulta un espacio de funciones de Banach (por ejemplo, si satisface las condiciones de 4.16). Entonces se tiene:*

- *$L^M(X) \subset V^M(X)$ isométricamente.*
- *$L^M(X) = V^M(X)$ si y sólo si $X \in (RNP)$.*
- *$F \in V^M(X)$ si y sólo si existe $\varphi \in L^M$ no negativa tal que $|F|(\cdot) = \int_{(\cdot)} \varphi d\mu$.*

Por otra parte, si M es función de Musielak-Orlicz restringida verificando las hipótesis del teorema 4.15, y M^* es su complementaria, entonces:

- *$V^{M^*}(X^*) = [L^M(X)_b]^*$.*
- *$V^{M^*}(X) = \Pi^{1,+}(L^M, X)$.*

4.3 Espacios de medidas vectoriales de Nakano

Existe una familia de espacios (dentro de la gran familia de todos los espacios de funciones de Musielak-Orlicz) que bien podían haber tenido un origen propio, a partir de los espacios de Lebesgue.

Inspirada en la norma de L^p, se podría haber dado la siguiente definición: Sea $p(\cdot) : \Omega \to [1, \infty)$ una función medible a la que llamaremos función exponente. Se consideran aquellas funciones medibles en Ω para las cuales la integral

$$\int_\Omega |f(w)|^{p(w)} d\mu(w)$$

es finita.

Es obvio que para la función exponente constante se recupera un espacio de Lebesgue, pero también es cierto que para funciones exponente arbitrarias, la integral no define de manera muy directa una norma. Sin embargo, a través de las funciones de Musielak-Orlicz y de la teoría de espacios de Musielak-Orlicz, poniendo

$$M(w, t) = t^{p(w)}$$

tenemos una manera de dar una norma en este espacio. Además podemos calcular su asociado de manera sencilla.

Definición 4.22 *Se define el espacio de funciones de Nakano correspondiente a una función exponente $p(\cdot) : \Omega \to [1, \infty)$ medible y finita cpp. como el espacio de Musielak-Orlicz correspondiente a la función de Musielak-Orlicz $M(w, t) = t^{p(w)}$.*

Se denotará por $L^{p(\cdot)}(\mu)$ cuando μ sea no atómica y $\ell(\{p_n\})$ cuando μ sea puramente atómica con átomos de igual medida.

Nota 4.23 *En la definición se ha tomado como función $M(w, t) = t^{p(w)}$, aunque no es la única. Veamos que la función $N(w, t) = \frac{t^{p(w)}}{p(w)}$ da lugar al mismo espacio de funciones. La utilidad de esta observación se verá más adelante, cuando se hable del espacio asociado.*

En efecto, basta con probar que $M \le N$ y $N \le M$ (ver definiciones en p. 109). Las obvias desigualdades

$$\frac{t^{p(w)}}{p(w)} \le t^{p(w)}$$

$$t^{p(w)} \le 2^{p(w)} \frac{t^{p(w)}}{p(w)}$$

para cada $t \ge 0$ y $w \in \Omega$ sirven para probar lo anunciado.

Un aspecto interesante de los espacios de funciones de Nakano es la caracterización de la inclusión entre dos de estos espacios en términos de la relación que guardan sus funciones exponente. La siguiente proposición se obtiene, tras las manipulaciones convenientes, de la caracterización 4.5.

Proposición 4.24 *Sea μ una medida σ-finita y sin átomos. Equivalen:*

- $L^{p(\cdot)}(\mu) \subset L^{q(\cdot)}(\mu)$.
- *Se cumple:*
  - $q \leq p$ *casi por todas partes.*
  - $\int_{q<p<\infty} C^{\frac{1}{\frac{1}{q(w)}-\frac{1}{p(w)}}} d\mu(w) < \infty$ *para cuna cierta constante* $0 < C < 1$.
  - $\int_{p=\infty} \frac{1}{q(w)} d\mu(w) < \infty$.

Este resultado invita a reflexionar sobre las inclusiones entre los espacios de Lebesgue de medida finita o infinita.

Otro aspecto de interés es el cálculo del espacio asociado a un espacio de Nakano.

Proposición 4.25 *Sea $p(\cdot) : \Omega \to (1, \infty)$ una función exponente, y $p'(\cdot)$ la función que cumple $p'(w) = p(w)'$ para cada $w \in \Omega$. Entonces $(L^{p(\cdot)})' = L^{p'(\cdot)}$.*

Prueba: Dado que se trata de espacios de Musielak-Orlicz, el cálculo del espacio asociado se transforma en el cálculo de la función de Musielak-Orlicz complementaria, siempre que ésta sea restringida. Después el resultado es inmediato (ver p. 111).

Si $M(w,t) = \frac{t^{p(w)}}{p(w)}$, es inmediato, tanto que M es función de Musielak-Orlicz restringida, como que su complementaria es $N(w,t) = \frac{t^{p(w)'}}{p(w)'}$, donde $p(w)'$ es el exponente asociado a $p(w)$ para cada $w \in \Omega$. □

Conociendo ya el espacio asociado de cada espacio de funciones de Nakano podemos escribir la $p(\cdot)$-variación de una medida vectorial y la definición del espacio de medidas vectoriales de Nakano.

Definición 4.26 *Sea $p(\cdot)$ una función exponente y X un espacio de Banach. Se define el espacio de medidas vectoriales de Nakano correspondiente a la función exponente $p(\cdot)$ como*

$$V_{L^{p(\cdot)}}(X) = \{F : F \ll \mu \ , \ |F|_{p(\cdot)} < \infty\},$$

donde

$$|F|_{p(\cdot)} = \sup\{\sum_{A\in\pi} |\alpha_A| \|F(A)\|_X \ : \ \pi \in D, \ \| \sum_{A\in\pi} \alpha_A \chi_A \|_{L^{p'(\cdot)}} \leq 1\},$$

y donde $p'(\cdot)$ es la función exponente tal que $p'(w) = p(w)'$, es decir, que asigna a cada w el exponente conjugado de $p(w)$.

Todos los resultados del capítulo 2 son aplicables a este espacio, con la salvedad de que la $p(\cdot)$-variación aquí expuesta es una cantidad no igual, pero equivalente, a la E-variación que se tendría al sustituir el espacio de funciones de Banach E por $L^{p(\cdot)}$.

Por último, nos centramos en un aspecto geométrico de los espacios de funciones de Nakano, tanto en medida no atómica (resuelto en [56]), como el caso de sucesiones (parcialmente resuelto en [Kat]): el tipo y cotipo de Rademacher.

4.3.1 Tipo y cotipo de Rademacher en espacios de Nakano vectoriales

En los preliminares se encuentran las definiciones de los conceptos que se va a manejar en esta sección. El caso de funciones escalares sobre espacios de medida no atómicos ha sido estudiado por Kaminska y Turett en [56]. En realidad se completa la cuestión relativa a los espacios de Musielak-Orlicz, siendo la concerniente a los espacios de Nakano una trivial consecuencia. El caso de sucesiones escalares se trabaja en [Kat], donde no se completa la respuesta para los espacios de sucesiones de Nakano.

Nuestro propósito es caracterizar el tipo y el cotipo de Rademacher de los espacios de sucesiones vectoriales de Nakano en términos, tanto de la función exponente como de los espacios de Banach en los que toman valores las sucesiones. De hecho, el espacio de sucesiones vectoriales de Nakano que se va a considerar no va a ser el generado a partir del espacio de sucesiones escalares y un sólo espacio de Banach, sino que se tomará una familia de espacios arbitrarios, como indica la siguiente definición.

Definición 4.27 *Sean* $\{p_n\}_n \subset [1, \infty)$ *una sucesión de exponentes y* $\{X_n\}_n$ *de espacios de Banach.*

- *Se define el espacio de sucesiones de Nakano* $\ell(\{p_n\})$ *como el espacio de Musielak-Orlicz de sucesiones correspondiente a la función de Musielak-Orlicz* $M(n, t) = t^{p_n}$*. Entonces está formado por las sucesiones* $(\alpha_n)_n$ *de escalares tales que*
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{|\alpha_n|}{k})^{p_n} \leq 1$$
para algún $k > 0$*. Se considera en él la norma de Luxemburg (ver [90, Mus]).*

- *Se define el espacio de sucesiones vectoriales de Nakano, denotado por* $\ell(\{p_n, X_n\})$ *(o bien por* $\oplus_{p_n} X_n$*), como el formado por las sucesiones* $(x_n)_n$ *(también denotadas por* $\sum_n x_n \otimes e_n$*, donde* e_n *es el* n*-ésimo vector de la base canónica para* $n = 1, 2, \ldots$*) de modo que* $x_n \in X_n$ *para cada* $n = 1, 2, \ldots$*, y la sucesión escalar* $(\|x_n\|_{X_n})_n$ *pertenece al espacio de sucesiones de Nakano* $\ell(\{p_n\})$*. La norma se define por*
$$\|(x_n)_n\|_{\ell(\{p_n, X_n\})} = \|(\|x_n\|_{X_n})_n\|_{\ell(\{p_n\})}.$$

Con el objetivo de calcular el tipo y cotipo de Rademacher en la familia de espacios de sucesiones de Musielak-Orlicz, E. Katirtzoglou adapta en [Kat] las condiciones Δ_q y Δ_p^* que A. Kamińska y B. Turett definen en [56] para el caso de espacios de funciones. En este último, la caracterización del tipo y cotipo de los espacios de funciones de Nakano (siempre en medida no atómica) es un sencillo corolario cuyo resultado es:

- $L^{p(\cdot)}$ tiene cotipo $2 \leq q < \infty$ si y sólo si $p(w) \leq q$ cpp. en Ω.

- $L^{p(\cdot)}$ tiene tipo $1 < p \leq 2$ si y sólo si $p(w) \geq p$ cpp. en Ω y $p(\cdot)$ es acotada.

Una vez adaptadas las condiciones Δ_q y Δ_p^* al contexto sucesional y resuelta la situación de los espacios de sucesiones de Musielak-Orlicz, el paso a espacios de sucesiones de Nakano queda casi completo. El resultado de [Kat] queda:

- Si $\ell(\{p_n\})$ tiene cotipo $q \geq 2$ entonces $\limsup_n p_n \leq q$.
- Si $\limsup_n p_n < q$ para algún $q \geq 2$, entonces $\ell(\{p_n\})$ tiene cotipo q.
- Sea $p_n > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\ell(\{p_n\})$ tiene tipo $p \geq 1$ entonces $p \leq \liminf_n p_n$ y $\sup_n p_n < \infty$.
- Si $1 < p < \liminf_n p_n$ y $\sup_n p_n < \infty$ entonces $\ell(\{p_n\})$ tiene tipo p.

Como se puede observar, queda por resolver cuándo el espacio de Nakano $\ell(\{p_n\})$ posee el cotipo $q = \limsup_n p_n$ y cúando posee el tipo $p = \liminf_n p_n$.

En esta sección abordamos el problema en el contexto más general posible para encontrar condiciones necesarias y suficientes. La solución pasará por el estudio de las relaciones de inclusion que existen entre los distintos espacios de Nakano vectoriales.

En primer lugar comprobamos que la condición δ_2 en los espacios de Nakano no es más que la acotación de la sucesión de los exponentes.

Lema 4.28 *Sea $\phi = (\phi_n)_n$ la función de Musielak-Orlicz dada por $\phi_n(x) = x^{p_n}$. Entonces ϕ tiene la condición δ_2 si y sólo si $(p_n)_n$ es acotada.*

Prueba: Si se cumple la condición δ_2, entonces existen $\delta, K > 0$ y $(c_n)_n \in \ell^1$ de términos no negativos tales que

$$2^{p_n} x^{p_n} \leq K x^{p_n} + c_n$$

para todo $0 < x \leq \delta^{\frac{1}{p_n}}$. Tomando $x = \delta^{\frac{1}{p_n}}$ se tiene que $2^{p_n}\delta \leq K\delta + c_n$, lo que implica que $(p_n)_n$ es acotada.

Para el recíproco basta con tomar $\delta = 1$, $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $K = 2^{\sup_n \{p_n\}}$. $\square$

Por otra parte incluimos en un lema sin prueba unos hechos elementales de los que haremos uso más adelante.

Lema 4.29 *Sea $(p_n)_n \subset [1, \infty)$ y sea $(X_n)_n$ una sucesión de espacios de Banach.*
a) La aplicación $x_n \mapsto x_n \otimes e_n$ es una inclusión isométrica de X_n en el espacio $\ell(\{p_n, X_n\})$ para $n = 1, 2, \ldots$.
b) Sea $x_n \in X_n$ un elemento fijo de norma 1 para cada $n \in \mathbb{N}$. La aplicación $(\alpha_n)_n \mapsto \sum_n \alpha_n x_n \otimes e_n$ es una inclusión isométrica de $\ell(\{p_n\})$ en $\ell(\{p_n, X_n\})$.

El siguiente resultado es esencialmente conocido (ver [90]), pero lo incluimos en versión vectorial y probado con la técnica abastecida por la teoría de los espacios de Musielak-Orlicz.

Teorema 4.30 *Sea $(p_n)_n, (q_n)_n \subset [1, \infty)$ y sean $(X_n)_n, (Y_n)_n$ dos familias de espacios de Banach. Entonces*

$$\ell(\{p_n, X_n\}) \subset \ell(\{q_n, Y_n\})$$

si y sólo si existe $0 < C < 1$ tal que

$$\sum_{p_n > q_n} C^{\frac{1}{\frac{1}{q_n} - \frac{1}{p_n}}} < \infty$$

y $i_n : X_n \to Y_n$ son inclusiones $n = 1, 2, \ldots$ con $\sup_n \|i_n\| < \infty$.

Prueba: Supongamos en primer lugar que $\ell(\{p_n, X_n\}) \subset \ell(\{q_n, Y_n\})$ de manera que el operador que da la inclusión tiene norma $A > 0$. El lema 4.29 nos da las inclusiones $i_n : X_n \to Y_n$, y $\|i_n\| \leq A$ para $n = 1, 2, \ldots$ También nos da la inclusión $\ell(\{p_n\}) \subset \ell(\{q_n\})$.

Ahora si $\ell(\{p_n\}) \subset \ell(\{q_n\})$, por teorema 4.5, existirán constantes $K_1, K_2, \delta > 0$ y $(a_n)_n \geq 0$ tales que $(a_n)_n \in \ell^1$ y verificando que

$$0 \leq x^{p_n} \leq \delta \Longrightarrow x^{q_n} \leq K_1 (K_2 x)^{p_n} + a_n$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $K_1 = K_2 = K > 1$ y $\delta = \frac{1}{K}$. Entonces

$$a_n \geq \max \left\{ x^{q_n} - K^{p_n + 1} x^{p_n} \ : \ 0 \leq x \leq K^{-\frac{1}{p_n}} \right\}$$

Denotemos $f_n(x) := x^{q_n} - K^{p_n+1} x^{p_n}$.

Para $n \in \mathbb{N}$ con $p_n \leq q_n$ la desigualdad resulta ser redundante, porque $f_n(x)$ es negativa en $]0, 1[$.

Para $n \in \mathbb{N}$ con $p_n > q_n$, es claro que $f_n(x)$ es no negativa en el intervalo $]0, \left(\frac{1}{K^{p_n+1}}\right)^{\frac{1}{p_n - q_n}}[$ y alcanza su máximo en $x_{\max,n} = \left(\frac{q_n}{p_n K^{p_n+1}}\right)^{\frac{1}{p_n - q_n}}$, el cual cumple que $0 < x_{\max,n} < K^{-\frac{1}{p_n}}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
a_n &\geq \max \left\{ f_n(x) \ : \ 0 \leq x \leq K^{-\frac{1}{p_n}} \right\} = f_n \left(\left(\frac{q_n}{p_n K^{p_n+1}} \right)^{\frac{1}{p_n - q_n}} \right) \\
&= \left(\frac{q_n}{p_n K^{p_n+1}} \right)^{\frac{q_n}{p_n - q_n}} \left(1 - \frac{q_n}{p_n} \right) \\
&= \left(\frac{q_n}{p_n} \right)^{\frac{q_n}{p_n - q_n}} \left(\frac{q_n^{\frac{1}{q_n} - \frac{1}{p_n}}}{K^{1 + \frac{1}{p_n}}} \right)^{\frac{1}{\frac{1}{q_n} - \frac{1}{p_n}}} \left(\frac{1}{q_n} - \frac{1}{p_n} \right).
\end{aligned}$$

Gracias al comportamiento de las funciones $x^{\frac{x}{1-x}}$ en $[0, 1]$ y $x^{\frac{1}{x}}$ en $[1, \infty)$ podemos afirmar que

$$e^{-1} \leq \left(\frac{q_n}{p_n} \right)^{\frac{q_n}{p_n - q_n}} \leq 1$$

y

$$\frac{1}{K^2} \leq \frac{q_n^{\frac{1}{q_n}-\frac{1}{p_n}}}{K^{1+\frac{1}{p_n}}} \leq \frac{q_n^{\frac{1}{q_n}}}{K} \leq \frac{e^{\frac{1}{e}}}{K}.$$

De ahí que podamos encontrar constantes C_1 and C_2 tales que

$$C_1\ C_2^{\frac{1}{\frac{1}{q_n}-\frac{1}{p_n}}}\left(\frac{1}{q_n}-\frac{1}{p_n}\right) \leq f_n(x_{\max,n}) \leq a_n.$$

Por tanto tenemos

$$\sum_{p_n>q_n} C_2^{\frac{1}{\frac{1}{q_n}-\frac{1}{p_n}}}\left(\frac{1}{q_n}-\frac{1}{p_n}\right) < \infty.$$

Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : p_n > q_n\}$ es finito no hay nada que probar. Si no, tomando $0 < C < C_2$ podemos afirmar que la serie $\sum_{p_n>q_n} C^{\frac{1}{\frac{1}{q_n}-\frac{1}{p_n}}}$ converge.

Para el recíproco, supongamos que la serie $\sum_{p_n>q_n} C^{\frac{1}{\frac{1}{q_n}-\frac{1}{p_n}}}$ converge para cierta constante $0 < C < 1$ y sea $(a_n)_n \in \ell(\{p_n\})$. Entonces existe $K_0 > 0$ tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\frac{|a_n|}{K})^{p_n} \leq 1$ for any $K \geq K_0$.

Para comprobar que $(a_n)_n \in \ell(\{q_n\})$ probaremos que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\frac{|a_n|}{T})^{q_n} < \infty$ para cualquier $T \geq \frac{K_0}{C}$.

Para tal fin, consideremos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : p_n > q_n, |a_n| \leq TC^{\frac{p_n}{p_n-q_n}}\}$$

y

$$B = \{n \in \mathbb{N} : p_n > q_n, |a_n| > TC^{\frac{p_n}{p_n-q_n}}\}$$

y ahora descompongamos la suma como sigue:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{|a_n|}{T}\right)^{q_n} = \sum_{p_n\leq q_n}\left(\frac{|a_n|}{T}\right)^{q_n} + \sum_{n\in A}\left(\frac{|a_n|}{T}\right)^{q_n} + \sum_{n\in B}\left(\frac{|a_n|}{T}\right)^{q_n}.$$

Nótese que

$$\sum_{p_n\leq q_n}\left(\frac{|a_n|}{T}\right)^{q_n} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{|a_n|}{T}\right)^{p_n} \leq 1,$$

$$\sum_{n\in A}\left(\frac{|a_n|}{T}\right)^{q_n} \leq \sum_{p_n>q_n} C^{\frac{1}{\frac{1}{q_n}-\frac{1}{p_n}}} < \infty$$

y

$$\begin{aligned}\sum_{n\in B}\left(\frac{|a_n|}{T}\right)^{q_n} &= \sum_{n\in B}\left(\frac{|a_n|}{T}\right)^{p_n}\left(\frac{|a_n|}{T}\right)^{q_n-p_n} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{|a_n|}{T}\right)^{p_n}\left(\frac{1}{C}\right)^{p_n} \leq \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{|a_n|}{CT}\right)^{p_n} \leq 1.\end{aligned}$$

Por tanto $\ell(\{p_n\}) \subset \ell(\{q_n\})$.

Finalmente, si las inclusiones $i_n : X_n \to Y_n$ están uniformemente acotadas, la aplicación $\sum_n x_n \otimes e_n \mapsto \sum_n i_n(x_n) \otimes e_n$ es una inclusión continua.

$$\begin{aligned}
&\|\sum_n i_n(x_n)\otimes e_n\|_{\ell(\{q_n,Y_n\})} = \\
&\quad = \|\sum_n \|i_n(x_n)\|_{Y_n} e_n\|_{\ell(\{q_n\})} \leq C'\|\sum_n \|i_n(x_n)\|_{Y_n} e_n\|_{\ell(\{p_n\})} \leq \\
&\quad \leq C'K\|\sum_n \|x_n\|_{X_n} e_n\|_{\ell(\{p_n\})} = C'K\|\sum_n x_n\otimes e_n\|_{\ell(\{p_n,X_n\})}
\end{aligned}$$

para ciertas constantes C' y K. □

Corolario 4.31 (ver [90] para el caso escalar) *Sean $(p_n)_n, (q_n)_n \subset [1,\infty)$ y sean $(X_n)_n, (Y_n)_n$ dos familias de espacios de Banach. Entonces $\ell(\{p_n, X_n\}) = \ell(\{q_n, Y_n\})$ si y sólo si $X_n = Y_n$ y existen constantes $0 < K, K' < \infty$ tales que*

$$K\|x_n\|_{X_n} \leq \|x_n\|_{Y_n} \leq K'\|x_n\|_{X_n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $(x_n)_n \in \ell(\{p_n, X_n\})$, y existe $0 < C < 1$ tal que

$$\sum_{p_n \neq q_n} C^{\frac{1}{\left|\frac{1}{q_n}-\frac{1}{p_n}\right|}} < \infty.$$

Corolario 4.32 *Sea $1 \leq p < \infty$, y sea $(p_n)_n \subset [1,\infty)$. Entonces:*

1. *$\ell(\{p_n\}) \subset \ell^p$ sii existe $0 < C < 1$ con $\sum_{p_n > p} C^{\frac{1}{p_n - p}} < \infty$.*
2. *$\ell^p \subset \ell(\{p_n\})$ sii existe $0 < C < 1$ con $\sum_{p_n < p} C^{\frac{1}{p - p_n}} < \infty$.*

El siguiente lema recoge una propiedad que tienen los espacios de Nakano que tienen un cierto cotipo finito q.

Lema 4.33 *Sea $2 \leq q < \infty$. Si $\ell(\{p_n, X_n\})$ tiene cotipo q entonces*

$$\inf_{\substack{\sum_k |a_k|=1 \\ (n_k)_k \subset \mathbb{N}}} \inf\{\lambda > 0 : \sum_k \left(\frac{|a_k|}{\lambda}\right)^{\frac{p_{n_k}}{q}} \leq 1\} > 0.$$

y X_n tiene cotipo q for all $n = 1, 2, \ldots$ con $\sup_n C_q(X_n) < \infty$.

Prueba: Es obvio del lema 4.29 que $\ell(\{p_n\})$ y X_n tienen ambos cotipo q para cada $n = 1, 2, \ldots$ Además $C_q(X_n)$ y $C_q(\ell(\{p_n\}))$ vienen acotados por $C_q(\ell(\{p_n, X_n\}))$ para $n = 1, 2, \ldots$

Sea $(p_{n_k})_k$ una subsucesión cualquiera de $(p_n)_n$ y $(\alpha_k)_k$ cualquier sucesión de números reales con $\sum_k |\alpha_k|^q = 1$. Aplicando la definición de cotipo con los vectores $x_k = \alpha_k \otimes e_{n_k}$ de $\ell(\{p_n\})$ tenemos

$$1 = \left(\sum_k |\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\int_0^1 \|\sum_k r_k(t)\alpha_k e_{n_k}\|dt \leq C\|\sum_k \alpha_k e_{n_k}\|.$$

De ahí
$$\frac{1}{C} \leq \| \sum_k \alpha_k e_{n_k} \| = \inf\{\lambda > 0 : \sum_k \left(\frac{|\alpha_k|}{\lambda} \right)^{p_{n_k}} \leq 1\}.$$

Tomando ahora el ínfimo sobre las subsucesiones n_k y las sucesiones α_k y denotando $a_k = |\alpha_k|^q$, $k = 1, 2, ...$ la prueba queda resuelta. $\square$

Para la demostración del teorema fundamental de este apartado necesitamos trabajar con una función de Musielak-Orlicz con cierta característica. La existencia de dicha función viene dada en [Kat] por la condición δ_q. En este caso describimos una tal función de forma explícita.

Lema 4.34 *Sea $(p_n)_n \subset [1, \infty)$ y $q \geq 2$. Entonces existe $0 < \delta < 1$ tal que siempre que $p_n > q$, la función*

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2x^q - x^{p_n} & , 0 \leq x \leq \delta \\ \varphi_n(\delta) + \varphi_n'(\delta^-)(x - \delta) & , x > \delta \end{cases}$$

es una función de Young y $\varphi_n(x^{\frac{1}{q}})$ is cóncava.

Además, si $\ell(\{p_n\}) \subset \ell^q$ y definimos

$$\phi_n(x) = \begin{cases} x^{p_n} & , p_n \leq q \\ \varphi_n(x) & , p_n > q \end{cases}$$

entonces $\ell^\phi = \ell(\{p_n\})$ (con normas equivalentes).

Prueba: Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n > q$. Es fácil comprobar que la función $2x^q - x^{p_n}$ es convexa en el intervalo $(0, x_n)$, donde $x_n = \left(\frac{2q(q-1)}{p_n(p_n-1)} \right)^{\frac{1}{p_n - q}}$, y que $0 < \delta = \inf_{q<t<\infty} \left(\frac{2q(q-1)}{t(t-1)} \right)^{\frac{1}{t-q}} < 1$. Por tanto si se define

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2x^q - x^{p_n} & , 0 \leq x \leq \delta \\ \varphi_n(\delta) + \varphi_n'(\delta^-)(x - \delta) & , x > \delta \end{cases}$$

entonces φ_n es una función de Young. Se observa además que $\varphi(x^{\frac{1}{q}})$ es cóncava.

Definamos ahora la función de Musielak-Orlicz $\phi = (\phi_n)$ mediante

$$\phi_n(x) = \begin{cases} x^{p_n} & , p_n \leq q \\ \varphi_n(x) & , p_n > q \end{cases}$$

Primero comprobaremos a través de 4.5 que $\ell^\phi \subset \ell(\{p_n\})$. Para $n \in \mathbb{N}$ de modo que $p_n \leq q$ la desigualdad es obvia. Para $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n > q$, $\phi_n(x) \leq \delta^q$ implica que $0 \leq x \leq \delta$ y entonces $\phi_n(x) = \varphi_n(x) = 2x^q - x^{p_n} \geq x^{p_n}$.

Finalmente, si suponemos $\ell(\{p_n\}) \subset \ell^q$ tenemos $\delta_0 < 1$, $K_1, K_2 > 0$ y $(a_n)_n$ de números no negativos con $(a_n)_n \in \ell^1$ y tales que si $x^{p_n} \leq \delta_0$,

$$x^q \leq K_1(K_2 x)^{p_n} + a_n.$$

Ahora 4.32 nos muestra que $(p_n)_n$ debe ser acotada. Sea δ' dada por $\delta' = \min\{\delta_0, \delta^{\max_n p_n}\}$, y nótese que si $p_n > q$ y $x^{p_n} \leq \delta'$ entonces

$$\phi_n(x) = 2x^q - x^{p_n} \leq 2x^q \leq (2K_1)(K_2x)^{p_n} + 2a_n.$$

Por lo tanto $\ell(\{p_n\}) \subset \ell^\phi$ y la prueba concluye. $\square$

Ahora estamos en codiciones de abordar el resultado principal, a saber, la caracterización del cotipo de un espacio de sucesiones vectoriales de Nakano en términos de la sucesión de exponentes que lo define, y los cotipos de la sucesión de espacios de Banach que lo componen.

Teorema 4.35 *Sean $2 \leq q < \infty$, $(p_n)_n \subset [1,\infty)$ y $(X_n)_n$ una familia de espacios de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\ell(\{p_n, X_n\})$ tiene cotipo q.

(2) X_n tiene cotipo q para cada $n = 1, 2, \ldots$ con $\sup_n C_q(X_n) < \infty$, y existe $0 < C < 1$ tal que $\sum_{p_n > q} C^{\frac{1}{p_n - q}} < \infty$.

Prueba: Supongamos en primer lugar que $\ell(\{p_n, X_n\})$ tiene cotipo q. El lema 4.29 nos da de nuevo que $\ell(\{p_n\})$ y X_n tienen ambos cotipo q y que $\sup_n C_q(X_n) < \infty$. Supongamos ahora que para cualquier $C > 0$ la serie $\sum_n C^{m_n} = +\infty$, donde $m_n = \frac{1}{\frac{p_n}{q} - 1}$ si $p_n > q$, y $m_n = +\infty$ whenever $p_n < q$.

Veamos que para cada $0 < \varepsilon < 1$ podemos encontrar una sucesión $(a_n)_n$ tal que

$$\sum_n |a_n| = 1 \quad \text{and} \quad \sum_n \left(\frac{|a_n|}{\varepsilon}\right)^{\frac{p_n}{q}} \leq 1.$$

Esto mostraría que

$$\inf_{\sum_k |a_k| = 1} \inf\{\lambda > 0 : \sum_k \left(\frac{|a_k|}{\lambda}\right)^{\frac{p_k}{q}} \leq 1\} = 0$$

lo que, de acuerdo con el lema 4.33, conduce a contradicción.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $(a_n)_n$ definido como sigue: Ya que $\sum_n \varepsilon^{m_n} = \infty$ podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ con

$$\sum_{n=1}^{k} \varepsilon^{m_n} \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{k+1} \varepsilon^{m_n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Sea entonces $a_n = \varepsilon\varepsilon^{m_n}$ para $n = 1, 2, ..., k$, $a_{k+1} = 1 - \varepsilon \sum_{n=1}^{k} \varepsilon^{m_n} \leq \varepsilon\varepsilon^{m_{k+1}}$, y $a_n = 0$ para $n \geq k + 2$.

Así, $\sum_n |a_n| = 1$ y $(\frac{|a_n|}{\varepsilon})^{\frac{1}{m_n}} \leq \varepsilon$ son triviales, y

$$\sum_n \left(\frac{|a_n|}{\varepsilon}\right)^{\frac{p_n}{q}} = \sum_n \left(\frac{|a_n|}{\varepsilon}\right)\left(\frac{|a_n|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m_n}} \leq \frac{1}{\varepsilon}\sum_n |a_n|\varepsilon = 1.$$

Para el recíproco, acudimos a la parte (i) del corolario 4.32, para deducir que, en esta situación, $\ell(\{p_n\}) \subset \ell^q$. Aplicando el lema 4.34 podemos considerar la función de Musielak-Orlicz $\phi = (\phi_n)$ tal que $\ell^\phi = \ell(\{p_n\})$ con normas equivalentes (denotadas aquí por $\|.\|_\phi$ y $\|.\|$ respectivamente), y de manera que $\phi_n(x^{\frac{1}{q}})$ son cóncavas para cada n.

Puesto que ϕ_n son funciones convexas, $\sum_{n=1}^\infty \phi_n(\frac{|x_n|}{1+\sum \phi_n(|x_n|)}) \leq 1$ y por lo tanto $\|x\|_\phi \leq 1 + \sum_{n=1}^\infty \phi_n\left(|x(n)|\right)$ para $x \in \ell^\phi$.

Sea $M \in \mathbb{N}$ y sean $y_1, y_2, ..., y_M \in \ell(\{p_n, X_n\})$ y $(a_k)_{k=1}^M$ escalares positivos con $\sum_{k=1}^M {a_k}^{q'} = 1$, donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^M a_k \|y_k\| &= \sum_{k=1}^M {a_k}^{q'} \left\| \frac{1}{{a_k}^{q'-1}} y_k \right\| \\
&\leq C_1 \sum_{k=1}^M {a_k}^{q'} \left\| \frac{1}{{a_k}^{q'-1}} y_k \right\|_\phi \\
&\leq C_1 \sum_{k=1}^M {a_k}^{q'} \left(1 + \sum_{n=1}^\infty \phi_n \left(\frac{\|y_k(n)\|_{X_n}}{{a_k}^{q'-1}} \right) \right) \\
&= C_1 \left(\sum_{k=1}^M {a_k}^{q'} + \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^\infty {a_k}^{q'} \phi_n \left(\frac{\|y_k(n)\|_{X_n}}{{a_k}^{q'-1}} \right) \right) \\
&= C_1 \left(1 + \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^M {a_k}^{q'} \phi_n \left(\left(\frac{\|y_k(n)\|_{X_n}^q}{{a_k}^{(q'-1)q}} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right)
\end{aligned}$$

now using that $\phi_n(t^{\frac{1}{q}})$ are concave functions

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \left(1 + \sum_{n=1}^\infty \phi_n \left(\left(\sum_{k=1}^M {a_k}^{q'} \frac{\|y_k(n)\|_{X_n}^q}{{a_k}^{(q'-1)q}} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right) \\
&= C_1 \left(1 + \sum_{n=1}^\infty \phi_n \left(\left(\sum_{k=1}^M \|y_k(n)\|_{X_n}^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Aplicando para cada $n \in \mathbb{N}$ la fórmula del cotipo con los elementos $y_1(n)$, $y_2(n)$, $\ldots$, $y_M(n)$ de X_n,

$$(\sum_{k=1}^M \|y_k(n)\|_{X_n}^q)^{\frac{1}{q}} \leq K \int_0^1 \| \sum_{k=1}^M r_k(t) y_k(n) \|_{X_n} dt$$

y por la desigualdad integral de Minkowski,

$$\|\{(\sum_{k=1}^{M}\|y_k(n)\|_{X_n}^q)^{\frac{1}{q}}\}_{n=1}^{\infty}\|_\phi \leq K\|\{\int_0^1\|\sum_{k=1}^{M} r_k(t)y_k(n)\|_{X_n}dt\}_{n=1}^{\infty}\|_\phi \leq$$

$$\leq K\int_0^1 \|\{\sum_{k=1}^{M} r_k(t)y_k(n)\}_{n=1}^{\infty}\|_\phi dt$$

Esto nos justifica la existencia de una constante C_2 tal que si

$$\int_0^1 \|\{\sum_{k=1}^{M} r_k(t)y_k(n)\}_{n=1}^{\infty}\|_\phi dt \leq C_2$$

entonces

$$\{(\sum_{k=1}^{M}\|y_k(n)\|_{X_n}^q)^{\frac{1}{q}}\}_{n=1}^{\infty}$$

pertenece a la bola unidad de ℓ^ϕ.

Así, las desigualdades anteriores muestran que siempre que se tenga la relación $\int_0^1 \|\sum_{k=1}^M r_k(t)y_k\|dt \leq C_3$ se cumplirá que $(\sum_{k=1}^M \|y_k\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq 2C_1$, donde C_3 aparece por el isomorfismo que hay entre las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\phi$. Por ello podemos concluir que $\ell(\{p_n, X_n\})$ tiene cotipo q. □

Para la caracterización del tipo hacemos uso del siguiente resultado.

Proposición 4.36 ([52]) *Sea ℓ^ϕ un espacio de sucesiones de Musielak-Orlicz. Entonces ℓ^ϕ es B-convexo si y sólo si ϕ y ϕ^* satisfacen ambas la condición δ_2.*

El lema 4.28 nos traduce la proposición anterior en la siguiente afirmación:

$\ell(\{p_n\})$ es B-convexo si y sólo si $1 < \liminf_n p_n \leq \limsup_n p_n < \infty$.

Remitimos al lector a los preliminares (p. 17) donde encontrará el concepto de B-convexidad y su relación con las propiedades de tipo y cotipo. Ahora podemos pasar a probar el segundo resultado importante.

Teorema 4.37 *Sean $1 < p \leq 2$, $(p_n)_n \subset [1, \infty)$ y sea $(X_n)_n$ una familia de espacios de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\ell(\{p_n, X_n\})$ tiene tipo p.

(2) X_n tiene tipo p para $n = 1, 2, \ldots$ con $\sup_n T_p(X_n) < \infty$, $(p_n)_n$ es acotada, y existe $0 < C < 1$ tal que $\sum_{p_n<p} C^{\frac{1}{p-p_n}} < \infty$.

Prueba: Supongamos que $\ell(\{p_n, X_n\})$ tiene tipo $p > 1$. Entonces cada X_n y también $\ell(\{p_n\})$ tienen tipo $p > 1$ (ver lema 4.29). Así $\ell(\{p_n\})$ es B-convexo y por tanto $\{p_n\}_n$ es acotada y $\ell(\{p'_n\}) = [\ell(\{p_n\})]^*$ (ver teorema 4.15) tiene cotipo $p' < \infty$. Aplicando entonces el teorema del cotipo, existe una constante $C > 0$ tal que $\sum_{p'_n>p'} C^{\frac{1}{p'_n-p'}} < \infty$. Dado que

$$\sum_{p'_n>p'} C^{\frac{1}{p'_n-p'}} = \sum_{p_n<p} (C^{(p_n-1)(p-1)})^{\frac{1}{p-p_n}}$$

podemos afirmar que tenemos (2) con constante, por ejemplo,

$$0 < C^{(\limsup_n p_n - 1)(p-1)} < 1.$$

Para el recíproco, es fácil probar, razonando como antes, que $\ell(\{p_n\})$ tiene tipo p. Además, se tiene que $\ell(\{p_n\})$ es p-convexo y r-cóncavo para algún $r < \infty$ (ver [Kat, Thm. 9a, 9b, Prop. 14]). Una ligera modificación de la prueba de [Kam, Thm. 4] (ver p. 41), y que exponemos a continuación, nos conduce a que $\ell(\{p_n, X_n\})$ tiene tipo p.

En efecto, debemos probar que existe una constante $A > 0$ de modo que para cada familia finita $y_1, y_2, ..., y_M \in \ell(\{p_n, X_n\})$ se cumple la desigualdad

$$(\int_0^1 \|\sum_{k=1}^M r_k(t) y_k\|^r dt)^{\frac{1}{r}} \leq A(\sum_{k=1}^M \|y_k\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(las desigualdades de Kahane nos permiten retocar la desigualdad de tipo usando el exponente r). Por lo tanto, y denotando por $\|\cdot\|$ la norma en $\ell(\{p_n, X_n\})$, se tiene

$$\begin{aligned}(\int_0^1 \|\sum_{k=1}^M r_k(t) y_k\|^r dt)^{\frac{1}{r}} &= \frac{1}{2^{M/r}}(\sum_{\varepsilon_i \in \{1,-1\}^M} \|\sum_k \varepsilon_i(k) y_k\|^r)^{\frac{1}{r}} \\ &= \frac{1}{2^{M/r}}(\sum_{\varepsilon_i \in \{1,-1\}^M} \|\Big(\|\sum_k \varepsilon_i(k) y_k(j)\|_{X_j}\Big)_j\|^r_{\ell(\{p_n\})})^{\frac{1}{r}}\end{aligned}$$

por r-concavidad de $\ell(\{p_n\})$

$$\begin{aligned}&\leq B\frac{1}{2^{M/r}}\|\Big((\sum_{\varepsilon_i \in \{1,-1\}^M} \|\sum_k \varepsilon_i(k) y_k(j)\|^r_{X_j})^{\frac{1}{r}}\Big)_j\|_{\ell(\{p_n\})} \\ &= B\|\Big((\int_0^1 \|\sum_{k=1}^M r_k(t) y_k(j)\|^r_{X_j} dt)^{\frac{1}{r}}\Big)_j\|_{\ell(\{p_n\})}\end{aligned}$$

ahora la acotación uniforme de las constantes del tipo p y la estructure reticular de $\ell(\{p_n\})$ dan

$$\leq BC\|\Big((\sum_k \|y_k(j)\|^p_{X_j})^{\frac{1}{p}}\Big)_j\|_{\ell(\{p_n\})}$$

y finalmente, por la p-convexidad de $\ell(\{p_n\})$

$$\begin{aligned}&\leq BCD(\sum_k \|\Big(\|y_k(j)\|_{X_j}\Big)_j\|^p_{\ell(\{p_n\})})^{\frac{1}{p}} \\ &= BCD(\sum_k \|y_k\|^p)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

para ciertas constantes $B, C, D > 0$.

$\square$

Para concluir este apartado vamos a recurrir a [Kat], donde se caracteriza el tipo y cotipo de los espacios de sucesiones de Musielak-Orlicz ℓ^ϕ en términos de las condiciones δ_q y δ_p^*. Vamos a examinar en qué se concretizan dichas condiciones cuando se trata con los espacios de Nakano, y obtendremos unos resultados, a modo de resumen, donde se relacionan la condición de tipo y cotipo con la relación de inclusiones entre espacios de Nakano.

Definición 4.38 *([Kat, Def. 2]) Se dice que una función de Musielak-Orlicz $\phi = (\phi_n)$ satisface la condición δ^q (para $q \geq 1$) si existen constantes positivas K, δ y una sucesión de términos no negativos $(c_n)_n \in \ell^1$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$ y $\lambda > 1$,*

$$\phi_n(\lambda x) \leq K\lambda^q[\phi_n(x) + c_n] \tag{4.1}$$

siempre que $\phi_n(\lambda x) \leq \delta$.

Se dice que la función de Musielak-Orlicz $\phi = (\phi_n)$ satisface la condición δ^{*p} (para $p \geq 1$) si existen constantes positivas K, δ y una sucesión de términos no negativos $(c_n)_n \in \ell^1$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$ y $\lambda > 1$

$$\phi_n(\lambda x) \geq K\lambda^p[\phi_n(x) - c_n]$$

siempre que $\phi_n(\lambda x) \leq \delta$.

Teorema 4.39 ([Kat, Thm. 9a]) *Sea $\phi = (\phi_n)_n$ una función de Musielak-Orlicz y $2 \leq q < \infty$. El espacio de sucesiones de Musielak-Orlicz ℓ^ϕ tiene cotipo q si y sólo si ϕ satisface la condición δ^q.*

Teorema 4.40 ([Kat, Thm. 9b]) *Sea $1 < p \leq 2$ y $\phi = (\phi_n)_n$ una función de Musielak-Orlicz que cumple las condiciones $\lim_{u\to 0} \frac{\phi_n(u)}{u} = 0$ y $\lim_{u\to\infty} \frac{\phi_n(u)}{u} = \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces el espacio de sucesiones de Musielak-Orlicz ℓ^ϕ tiene tipo p si y sólo si ϕ satisface las condiciones δ_2 y δ^{*p}.*

Lema 4.41 *Sea $\phi = (\phi_n)_n$ dada por $\phi_n(x) = x^{p_n}$.*

1. *$\phi = (\phi_n)_n$ cumple la condición δ^q si y sólo si existen una constante positiva K y una sucesión $(c_n)_n \in \ell^1$ de términos no negativos tales que*

   $$x^q \leq K(x^{p_n} + c_n)$$

   para cada $n \in \mathbb{N}$ con $p_n > q$ y $0 < x \leq 1$.

2. *$\phi = (\phi_n)_n$ cumple la condición δ^{*p} si y sólo si existen una constante positiva K y una sucesión $(c_n)_n \in \ell^1$ de términos no negativos tales que*

   $$x^p \geq K(x^{p_n} - c_n)$$

   para cada $n \in \mathbb{N}$ con $p_n < p$ y $0 < x \leq 1$.

Prueba: (i) Supongamos la condición δ^q. La ecuación (4.1) nos da la existencia de $K, \delta > 0$ y $(c_n) \in \ell^1$ de términos no negativos tales que

$$\lambda^{p_n - q} x^{p_n} \leq K(x^{p_n} + c_n)$$

para todo $x > 0$, $\lambda \geq 1$ tales que $\lambda x \leq \delta^{\frac{1}{p_n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Tomando $A = \max\{K, \frac{1}{\delta}, 1\}$ podemos afirmar que

$$\lambda^{p_n - q} x^{p_n} \leq A(x^{p_n} + c_n)$$

siempre que $\lambda x \leq A^{-\frac{1}{p_n}}$. Fijemos ahora $0 < x \leq A^{-\frac{1}{p_n}}$ y n tales que $p_n > q$. Tomando supremo sobre $1 \leq \lambda \leq \frac{A^{-\frac{1}{p_n}}}{x}$ obtenemos que

$$(A^{\frac{1}{p_n}} x)^q \leq A^2(x^{p_n} + c_n).$$

En otros términos,

$$y^q \leq A y^{p_n} + A^2 c_n$$

para $0 < y \leq 1$ y n tales que $p_n > q$.

Recíprocamente, supongamos que existe una constante positiva K y un sucesión de términos no negativos $(c_n) \in \ell^1$ tales que

$$x^q \leq K(x^{p_n} + c_n)$$

para cada n tal que $p_n > q$ y $0 < x \leq 1$. Definimos $c'_n = 0$ para n tal que $p_n \leq q$, $c'_n = \frac{c_n}{K}$ para n con $p_n > q$, $\delta = 1$ y $K' = \max\{K^2, 1\}$. Sea $\lambda \geq 1, x > 0$ con $\lambda x \leq 1$. Entonces, obviamente, cuando $p_n \leq q$,

$$(\lambda x)^{p_n} \leq \lambda^q x^{p_n} \leq K' \lambda^q (x^{p_n} + c'_n).$$

Por otro lado, cuando $p_n > q$,

$$(\lambda x)^{p_n} \leq (\lambda x)^q \leq \lambda^q K' (x^{p_n} + c'_n).$$

(ii) Es similar a (i). □

Con esto, podemos formalizar los siguientes resultados:

Teorema 4.42 *Sean $(p_n)_n \subset [1, \infty)$ y $2 \leq q < \infty$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\ell(\{p_n\})$ tiene cotipo q.*
2. *$\ell(\{p_n\}) \subset \ell^q$.*
3. *Existe una constante $K > 0$ y una sucesión $(c_n)_n \in \ell^1$ de términos no negativos tales que*
$$x^q \leq K(x^{p_n} + c_n)$$
para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n > q$ y $0 < x \leq 1$.

4. *Existe* $0 < C < 1$ *tal que* $\displaystyle\sum_{p_n > q} C^{\frac{1}{p_n - q}} < \infty$.

Teorema 4.43 *Sean* $(p_n)_n \subset]1, \infty)$ *y* $1 < p \leq 2$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\ell(\{p_n\})$ *tiene tipo* p.

2. $(p_n)_n$ *es acotada y* $\ell^p \subset \ell(\{p_n\})$.

3. $(p_n)_n$ *es acotada y existe* $K > 0$ *y* $(c_n)_n \in \ell^1$ *de términos no negativos tal que*

$$x^p \geq K(x^{p_n} - c_n)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ *con* $p_n < p$ *y* $0 < x \leq 1$.

4. *Existe* $0 < C < 1$ *tal que* $\displaystyle\sum_{p_n < p} C^{\frac{1}{p - p_n}} < \infty$ *y* $(p_n)_n$ *es acotada.*

Estos dos resultados son consecuencia del lema 4.41, el corolario 4.32, y los teoremas 4.39 y 4.40, pero se pueden obtener, de manera independiente, a partir de 4.35, 4.37 y 4.32.

Referencias

[BeSh] Bennet, C.; Sharpley, R., Interpolation of operators, *Academic Press, Inc.* (1988)

[Blsc] Blasco, O., Espacios de Hardy de funciones con valores vectoriales, *Tesis, Zaragoza* (1985)

[DJT] Diestel, J.; Jarchow, H.; Tonge, A., Absolutely summing operators, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics: 43* Cambridge University Press (1995)

[DiUh] Diestel, J.; Uhl, J. J., Vector measures, *American Mathematical Society, Mathematical Surveys, Number 15* (1977)

[Dinc] Dinculeanu, N., Vector measures, *International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Volume 95, Pergamon Press* (1967)

[Gret] Gretsky, N. E., Representation theorems on Banach function spaces, *Memoirs of the American Mathematical Society* 84 (1968)

[GrUh] Gretsky, N. E.; Uhl, J. J., Bounded linear operators on Banach function spaces of vector-valued functions, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 167 (1972) 263-277

[Hunt] Hunt, R. A., On $L(p, q)$ spaces, *L'Enseignement Math. (2) 12* (1966) 249-275

[Kam] Kamińska, A., Type and cotype in vector-valued function spaces, *Math. Japonica 37* No. 4 (1992) 743-749

[Kat] Katirtzoglou, E., Type and cotype of Musielak-Orlicz sequence spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 226 (1998), no. 2, 431–455.

[Mus] Musielak, J., Orlicz spaces and modular spaces, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1034, Springer-Verlag (1983)

Bibliografía

[1] Axler, S.; Bourdon, P.; Ramey, W., Harmonic function theory. *Graduate Texts in Mathematics, 137.* Springer-Verlag, New York (1992)

[2] Barbanti, L., Simply regulated functions and semivariation in uniformly convex spaces, *Real Anal. Exchange* 24 (1) (1998/99) 405–409

[3] Barcelo, B., Representation of operators on $L^{(p)}()$-spaces by vector measures. (Spanish) *Publ. Sec. Mat. Univ. Autnoma Barcelona* No. 23 (1981) 5–67.

[4] Bartle, R. G., A general bilinear vector integral, *Studia Math.* 15 (1956) 337–352

[5] Beck, A., A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.* 13 (1962) 329–334

[6] Blasco, O., Vector-valued harmonic functions and cone absolutely summing operators, *Illinois J. Math.* 33 (1989), n. 2, 292–300

[7] Blasco, O., Boundary values of vector-valued harmonic functions considered as operators, *Studia Math.* 86 (1987), n. 1, 19–33

[8] Blasco, O., Boundary values of functions in vector-valued Hardy spaces and geometry on Banach spaces, *J. Funct. Anal.* 78 (1988), n. 2, 346–364

[9] Blasco, O., Positive p-summing operators on L_p-spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 100 (1987), n. 2, 275–280

[10] Blasco, O., Positive p-summing operators, vector measures and tensor products, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 31 (1988), n. 2, 179–184

[11] Blasco, O., A characterization of the Radon-Nikodým property, *Pub. Mat. UAB, Vol.* 29 (1985), N1, 65–72

[12] Blasco, O., Boundary values of vector valued functions in Orlicz-Hardy classes, *Arch. Math., Vol.* 49 (1987) 434–439

[13] Blasco, O., Radon-Nikodym versus Fatou, *XXIX National Congress of the Mexican Mathematical Society (Spanish) (San Luis Potosí, 1996)* (1997) 71–76

[14] Blasco, O., Convolution by means of bilinear maps, *Function spaces (Edwardsville, IL, 1998) Amer. Math. Soc.* (1999) 85–103

[15] Blasco, O.; Gregori, P., Type and cotype of vector-valued Nakano sequence spaces, *Preprint* (2000)

[16] Blasco, O.; Gregori, P., Lorentz spaces of vector-valued measures, *Preprint* (2001)

[17] Blasco, O.; Gregori, P.; Calabuig, J. M., Finite semivariation and regulated functions by means of bilinear maps, *Real Anal. Exchange* vol. 26(2) 2000/2001 p. 1–6

[18] Bochner, S.; Taylor, A.E., Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions, *Ann. Math.* (2) 39 (1938) 913–944

[19] Buhvalov, A. V., The duality of functors that are generated by spaces of vector-valued functions. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 39 (1975), no. 6, 1284–1309, 1438

[20] Buhvalov, A. V., The analytic representation of operators with an abstract norm. (Russian) *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Matematika* no. 11 (162) (1975) 21–32

[21] Buhvalov, A. V., The analytic representation of linear operators by means of measurable vector-valued functions. (Russian) *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Matematika* no. 7 (182) (1977) 21–31

[22] Buhvalov, A. V., Geometric properties of Banach spaces of measurable vector-valued functions. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 239 (1978), no. 6, 1279–1282

[23] Buhvalov, A. V., The Radon-Nikodým property in Banach spaces of measurable vector-valued functions. (Russian) *Mat. Zametki* 26 (1979), no. 6, 875–884, 973.

[24] Buhvalov, A. V., Some Banach properties of spaces of measurable vector-valued functions. (Russian) *Problems in functional analysis (Russian)*, 3–15, 116, Petrozavodsk. Gos. Univ., Petrozavodsk, 1985.

[25] Buhvalov, A. V.; Lozanovskiĭ, G. Ja., Representations of linear functionals and operators on vector lattices and certain applications of these representations. (Russian) *Operator theory in function spaces (Proc. School, Novisibirsk, 1975) (Russian)*, pp. 71-98, 341, "Nauka" Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1977

[26] Buhvalov, A. V.; Danilevich, A. A., Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach spaces, *Mat. Zametki 31* (1982) 203-214
English translation: *Math. Notes* 31 (1982) 104–110

[27] Calabuig, J. M., Espacios de Hardy-Orlicz vectoriales, Tesina (1999)

[28] Castaing, C.; Płuciennik, R., Property (H) in Köthe-Bochner spaces, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 319 (1994), no. 11, 1159–1163

[29] Castaing, C.; Płuciennik, R., Property (H) in Köthe-Bochner spaces, *Indag. Math. (N.S.) 7* (1996), no. 4, 447–459

[30] Cerdà, J.; Hudzik, H.; Mastyło, M., *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **120** (1996) 521–533

[31] Cerdà, J.; Hudzik, H.; Kamińska, A.; Mastyło, M., Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz-Lorentz spaces, *Positivity* 2 (1998), no. 4, 311–337

[32] Chen, S., Geometry of Orlicz spaces, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 356 (1996) 204 pp.

[33] Chen, S.; Płucennik, R., A note on H-points in Köthe-Bochner spaces, *preprint* (2000)

[34] Díaz, S.; Mayoral, F., Weak and norm compactness on Köthe-Bochner function spaces, *Quaestiones Math.* 21 (1998), no. 1-2, 75–87

[35] Dinculeanu, N.; Kluvanek, I., On vector measures, *Proc. Lond. Math. Soc.* 17 (1967) 505–512

[36] Dunford, N.; Schwartz, J.T., Linear operators, Part I, *Interscience Publishers,Inc.* (1958)

[37] Duren, P., Theory of H^p-spaces, *Pure and applied mathematics, Volume 38, Academic Press* (1970)

[38] Ellis, H. W.; Halperin, I., Function spaces determined by a levelling length function, *Canadian J. Math.* 5 (1953) 576–592

[39] Feledziak, K., Uniformly -continuous topologies on Köthe-Bochner spaces and Orlicz-Bochner spaces, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 39 (1998), no. 3, 453–468

[40] Florencio, M.; Paúl, P. J.; Sáez, C., Duals of vector-valued Köthe function spaces, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 112 (1992), no. 1, 165-174

[41] Freniche, F. J.; García-Vázquez, J. C.s; Rodríguez-Piazza, L., The failure of Fatou's theorem on Poisson integrals of Pettis integrable functions, *J. Funct. Anal.* 160 (1998), no. 1, 28–41

[42] Gregori, P., Espacios de Orlicz y medidas vectoriales, *Tesina* (1998)

[43] Gretsky, N. E.; Uhl, J. J., Bounded linear operators into vector-valued Banach function spaces, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 77 = Indag. Math. 36* (1974) 457–462.

[44] Halmos, P.R., Measure theory, *Van Nostrand, New York* (1950)

[45] Halperin, I., Uniform convexity in function spaces, *Duke Math. J.* 21 (1954) 195–204

[46] Halperin, I.; Nakano, H., Generalized l^p spaces and the Schur property, *J. Math. Soc. Japan* 5 (1953) 50–58

[47] Hensgen, W., Hardy-Räume vectorwertiger functionen, *Thesis*, Munich (1986)

[48] Hensgen, W., Some properties of the vector-valued Banach ideal space $E(X)$ derived from those of E and X, *Collect. Math.* 43 (1992), no. 1, 1–13.

[49] Hensgen, W., Some remarks on boundary values of vector-valued harmonic and analytic functions, *Arch. Math. (Basel)* 57 (1991), n. 1, 88–96

[50] Hoffmann-Jorgensen, J., Sums of independent Banach space valued random variables, *Aarhus. Univ. Preprint Series 15* (1972/73)

[51] Hönig, C. S., Volterra Stieltjes-integral equations, *North-Holland Publishing Co., Amsterdam* (1975)

[52] Hudzik, H.; Kamińska, A., On uniformly convexiable and B-convex Musielak-Orlicz spaces, *Comment. Math. Prace Mat.* 25, no. 1 (1985) 59–75

[53] Hudzik, H.; Mastyło, M., Strongly extreme points in Köthe-Bochner spaces, *Rocky Mountain J. Math.* 23 (1993), no. 3, 899–909

[54] Hudzik, H.; Mastyło, M., Local uniform rotundity in Banach spaces via sublinear operators, *Math. Japon.* 46 (1997), no. 1, 1–4

[55] Hunt, R. A., An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* 70 (1964) 803–807

[56] Kamińska, A.; Turett, B., Type and cotype in Musielak-Orlicz spaces. Geometry of Banach spaces (Strobl, 1989), 165-180, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 158, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[57] Kamińska, A.; Turett, B., Rotundity in Köthe spaces of vector-valued functions, *Can. J. Math.* Vol. XLI, No. 4 (1989) 659–675

[58] Kamthan, P. K.; Gupta, M., Sequence spaces and series, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, vol. 65, Dekker (1981)

[59] Katznelson, Y., An introduction to harmonic analysis, *John Wiley & Sons Inc.* New York (1968)

[60] Kolwicz, P.; Płuciennik, R., P-convexity of Orlicz-Bochner spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 126 (1998), no. 8, 2315–2322

[61] Koosis, P., Introduction to H_p spaces, *Cambridge University Press* Cambridge (1980)

[62] Krasnosel' skiĭ, M. A.; Rutickiĭ, Ja. B., Convex functions and Orlicz spaces, *Noordhoff Ltd.* Groningen (1961)

[63] Krassowska, D., H-points in Köthe-Bochner spaces, *Comment. Math. Prace Mat.* 39 (1999) 97–108

[64] Krassowska, D.; Płuciennik, R., A note on property (H) in Köthe-Bochner sequence spaces, *Math. Japon.* 46 (1997), no. 3, 407–412.

[65] Kwapień, S., Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients, *Studia Math.* 44 (1972) 583–595

[66] Kufner, A.; John, O.; Fucík, S., Function spaces, *Noordhoff International Publishing* (1977)

[67] Lai, H. C., Duality of Banach function spaces and the Radon-Nikodým property, *Acta Math. Hung.* 47 (1–2) (1986) 45–52

[68] Leader, S., The theory oh L^p-spaces for finitely additive set functions, *Ann. of Math.* 58 (1953) 528–543

[69] Li, Y; Płuciennik, R.; Wang, T., P-convex Orlicz-Bochner spaces equipped with the Orlicz norm. Dedicated to Julian Musielak. *Funct. Approx. Comment. Math.* 26 (1998) 205–214

[70] Lin, P. K.; Sun, H., Extremity in Köthe-Bochner function spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 218 (1998), no. 1, 136–154

[71] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L., Classical Banach Spaces I, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 338, Springer-Verlag (1973)

[72] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L., Classical Banach Spaces II Function Spaces, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg* (1979)

[73] Lorentz, G. G., Bernstein polynomials, *University of Toronto Press*, Toronto (1953)

[74] Lorentz, G. G., Spaces of measurable functions, *(umpublished manuscript).*

[75] Luxemburg, W. A. J., Banach function spaces, *Thesis, Delft* (1955)

[76] Luxemburg, W. A. J., Rearrangement-invariant Banach function spaces, *Proc. Sympos. in Analysis, Queen's Papers in Pure and Appl. Math.* 10 (1967) 83–144

[77] Luxemburg, W. A. J., Notes on Banach function spaces, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam (Indag. Math.)*, Note XIV, A68(1965) 229–248; Note XV, A68(1965) 415–446; Note XVI, A68(1965) 646–667

[78] Luxemburg, W. A. J.; Zaanen, A. C., Notes on Banach function spaces, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam (Indag. Math.)*, Note I, A66(1963) 135–147; Note II, A66(1963) 148–153; Note III, A66(1963) 239–250; Note IV, A66(1963) 251–263; Note V, A66(1963) 496–504; Note VI, A66(1963) 655–668; Note VII, A66(1963) 669–681; Note VIII, A67(1964) 104–119; Note IX, A67(1964) 360–376; Note X, A67(1964) 493–506; Note XI, A67(1964) 507–518; Note XII, A67(1964) 519–529; Note XIII, A67(1964) 530–543

[79] Luxemburg, W. A. J.; Zaanen, A. C., Some remarks on Banach function spaces, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam (Indag. Math.)* 59 (1956) 110–119

[80] Luxemburg, W. A. J.; Zaanen, A. C., Some examples of normed Kthe spaces, *Math. Ann.* 162 (1966) 337–350

[81] Macdonald, A. L., Vector valued Köthe function spaces. I, II, *Illinois J. Math.* 17 (1973) 533–545; ibid. 17 (1973) 546–557

[82] Macdonald, A. L., Vector valued Kothe function spaces. III, *Illinois J. Math.* 18 (1974) 136–146

[83] Marcinkiewicz, J., Sur l'interpolation d'opérations, *C. R. Acad. Sci. Paris* 208 (1939) 1272–1273

[84] Maurey, B., Espaces de cotype p, $0 < p \leq 2$, *École Polyt. Palaiseau, Sém. Maurey-Schwartz 1972/73, Exp. VII*

[85] Maurey, B.; Pisier, G., Caractérisation d'une classe d'espaces de Banach par des propriétés de séries aléatoires vectorielles, *C. R. Acad. Sci. Paris* A277 (1973) 687–690

[86] Maurey, B.; Pisier, G., Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, *Studia Math.* 58 (1976) 45–90

[87] Michalak, A., Translations of functions in vector Hardy classes on the unit disk, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 359 (1996)

[88] Mills, S. E., Banach function spaces of vector-valued functions, *M. S. Thesis, Louisiana State University, Baton Rouge, La.,* (1970)

[89] Mullins, C. W., Linear functionals on vector valued Köthe spaces, *Functional analysis and its applications (Internat. Conf., Eleventh Anniversary of Matscience, Madras, 1973; dedicated to Alladi Ramakrishnan)*, pp. 380–381. Lecture Notes in Math., Vol. 399, Springer, Berlin, 1974.

[90] Nakano, H., Modulared sequence spaces, *Proc. Japan Acad.* 27 (1951) 508–512

[91] Navodnov, V. G., A vector-valued analogue of the Dunford-Pettis theorem. (Russian) *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* (1987), no. 3, 55–60, 85

[92] Nordlander, G., On sign-independent and almost sign-independent convergence in normed linear spaces, *Arkiv för Mat.* 4 (1962) 287–296

[93] Nowak, M., Mackey topologies of Orlicz-Bochner spaces. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 118 (1998) 117–126

[94] Nowak, M., Weak compactness in Köthe-Bochner spaces and Orlicz-Bochner spaces, *Indag. Math. (N.S.)* 10 (1999), no. 1, 73–86

[95] Nowak, M., Weak sequential compactness and completeness in Köthe-Bochner spaces, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 47 (1999), no. 3, 209–220

[96] Nowak, M., Weak compactness in Köthe-Bochner spaces and Orlicz-Bochner spaces. *Indag. Math. (N.S.)* 10 (1999), no. 1, 73-86

[97] Orlicz, W., Über Räume (L^M), *Bull. Acad. Polon. Sci. Lett., Ser. A* (1936) 93–107

[98] Orlicz, W., Über unbedingte Konvergenz in Functionenräumen (I), *Studia Math.* 4 (1933) 33–37

[99] Orlicz, W., Über unbedingte Konvergenz in Functionenräumen (II), *Studia Math.* 4 (1933) 41–47

[100] Phillips, R. S., On linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 48 (1940) 516–541

[101] Pisier, G., Sur les espaces de Banach qui ne contiennent pas uniformément les ℓ_1^n, *C. R. Acad. Paris A277* (1973) 991–994

[102] Pisier, G., Holomorphic semigroups and geometry of Banach spaces, *Ann. of Math.* 115 (1982) 375–392

[103] Płuciennik, R., On characterization of strongly extreme points in Köthe-Bochner spaces, *Rocky Mountain J. Math.* 27 (1997), no. 1, 307–315

[104] Płuciennik, R., Points of local uniform rotundity in Köthe-Bochner spaces, *Arch. Math. (Basel)* 70 (1998), no. 6, 479–485

[105] Popa, D., On the positive absolutely summing operators on the space $L_p(,X)$, *Collect. Math.* 48 (1997), no. 3, 315–319

[106] Popa, N., Unicity of the representation of dyadic Hardy spaces generated by a rearrangement invariant space X on $[0,1]$, *Function spaces (Poznań, 1998)*, 445–458, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 213, *Dekker, New York*, 2000.

[107] Popa, N., Vector-valued and holomorphic functions on upper half-plane, Preprint

[108] Rao, M. M.; Ren, Z. D., Theory of Orlicz spaces. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 146. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991. xii+449 pp.

[109] Rosenblum, M.; Rovnyak, J., Hardy classes and operator theory. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1985

[110] Rudin, W., Analisis real y complejo, *Ed. McGraw-Hill* (1987)

[111] Schaefer, H. H., Banach lattices and positive operators, *Springer-Verlag, New York* (1974)

[112] Simons, S., The sequence spaces $l(p_\nu)$ and $m(p_\nu)$, *Proc. London Math. Soc.* 15 (1965) 422–436

[113] Stein, E.M.; Weiss, G., Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, *Princeton Mathematical Series, No. 32*, Princeton University Press (1971)

[114] Uhl, J. J., Orlicz spaces of finitely additive set functions, linear operators, and martingales, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967) 116–119

[115] Uhl, J. J., Orlicz spaces of finitely additive set functions, *Studia Mathematica* T. XXIX (1967) 19–58

[116] Uhl, J. J., On a class of operators on Orlicz spaces, *Studia Math.* 40 (1971) 17–22

[117] Woo, J. Y. T., On modular sequence spaces, *Studia Math.* T. XLVIII (1973) 271–289

Índice de Materias