

$$v(x^{(j)}) = \sum_{i=1}^n w_i v_i(x^{(j)})$$

$$w_i^{(ROC)} = \frac{1}{n} \sum_{l=i}^n \frac{1}{l}, i = 1, \dots, n$$

$$\frac{Vol(S(x^{(j)} \text{ é óptima}))}{Vol(S)}$$

Paula Cristina Sarabando dos Santos

## ESCOLHA E ORDENAÇÃO COM INFORMAÇÃO ORDINAL: EXTENSÃO À DECISÃO EM GRUPO E À NEGOCIAÇÃO

Dissertação de Doutoramento apresentada à Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra,  
para obtenção do grau de Doutor em Gestão - Ciência Aplicada à Decisão

2010



UNIVERSIDADE DE COIMBRA



Universidade de Coimbra  
Faculdade de Economia

ESCOLHA E ORDENAÇÃO COM INFORMAÇÃO  
ORDINAL: EXTENSÃO À DECISÃO EM GRUPO E À  
NEGOCIAÇÃO

Paula Cristina Sarabando dos Santos

Doutoramento em Gestão - Ciência Aplicada à Decisão

Coimbra  
2010





Dissertação de Doutoramento apresentada à Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, para obtenção do grau de Doutor em Gestão - Ciência Aplicada à Decisão, sob orientação do Professor Doutor Luís Miguel Cândido Dias.



# Agradecimentos

“Nós somos a soma das nossas decisões.”

Agradeço a todos os que de algum modo contribuíram para que este projecto se tornasse realidade:

- Ao meu orientador, Professor Luís Dias.
- Ao Professor Rudolf Vetschera, que conosco trabalhou na realização do Capítulo 6.
- Ao Pedro.
- Aos meus pais e a todos os meus familiares e amigos.
- À ESTGV e ao INESC Coimbra.
- À Fundação para a Ciência e Tecnologia, que me apoiou directamente através da Bolsa de Doutoramento com a referência SFRH / BD / 29178 / 2006 e indirectamente através dos projectos em que participei (POCI/EGE/58371/2004 e MIT/MCA/0066/2009).



# Resumo

Os modelos matemáticos utilizados no apoio à decisão são, regra geral, caracterizados por múltiplos parâmetros. De entre as muitas aproximações concebidas com o objectivo de ordenar um conjunto de alternativas ou com o objectivo de escolher a(s) melhor(es), tendo em conta múltiplos critérios, focamo-nos na Teoria de Valor Multicritério. Uma situação de informação completa ocorre quando os decisores conseguem indicar um valor preciso para cada um dos parâmetros do modelo utilizado. Contudo, por diversas razões, surgem frequentemente dificuldades em obter valores precisos para todos os parâmetros. Em alternativa os decisores podem fornecer aquilo a que chamamos de informação incompleta, que se caracteriza por não conduzir a uma combinação de valores precisos para todos os parâmetros do modelo. No contexto da agregação multicritério aditiva, estudamos problemas com informação ordinal, nomeadamente considerando uma ordenação dos pesos dos critérios, uma ordenação do valor de cada alternativa em cada critério e uma ordenação da diferença de valor entre alternativas consecutivas em cada critério.

O principal objectivo deste trabalho é apresentar e comparar métodos para ajudar os decisores, mesmo que estes optem por fornecer informação ordinal sobre as suas preferências. Propomos duas novas regras para lidar com informação incompleta relativamente ao valor de cada alternativa em cada critério e estudamos até que ponto estas regras conduzem a bons resultados. Estas regras são testadas tanto no caso da decisão individual como no caso da negociação e da decisão em grupo. Sugerimos ainda três novas aproximações, para o caso da negociação, e uma nova aproximação, para o caso da decisão em grupo, para que um mediador, ou um facilitador, possa sugerir uma ou mais alternativas.

Este trabalho pode ser dividido em duas partes. Em ambas as partes utilizamos simulação Monte Carlo.

Numa primeira parte, estudamos quão boas são as regras propostas quando existe informação ordinal, em comparação com uma situação ideal na qual todos os parâmetros do modelo são conhecidos. Esta parte do trabalho visa conhecer melhor a forma como as diferentes regras e fórmulas se comparam, bem como fornecer algumas pistas sobre a melhor forma de as utilizar. O propósito deste tipo de estratégias é simplificar o problema em termos do número de alternativas, com o objectivo de as estudar em mais detalhe, ou com o objectivo de eliciar mais informação. As simulações realizadas mostram que as regras propostas conduzem a bons resultados, pelo que será de recomendar o uso de informação ordinal para identificar as alternativas mais promissoras, sempre que se antevêja ser difícil ou moroso usar os processos tradicionais para eliciar valores precisos para todos os parâmetros.

Numa segunda parte o objectivo não é comparar regras, mas sim ver como diferentes aproximações podem ser utilizadas para sugerir alternativas. No caso da negociação sugerimos três aproximações. Defendemos que não existe nenhuma aproximação que seja claramente melhor do que as restantes e todas as aproximações têm forças particulares que as tornam adequadas para algumas situações. Sugerimos uma integração das aproximações, que deve ser preferencialmente implementada através de um processo interactivo. Na aproximação apresentada para o caso da decisão em grupo, o objectivo é aproximar o volume do subconjunto do espaço dos parâmetros no qual cada alternativa é a melhor, ou não perde por uma diferença significativa, bem como determinar aproximadamente as alternativas que cada alternativa domina. A aproximação apresentada pode ser facilmente utilizada, e apesar de não fornecer resultados precisos, pode ser bastante útil para recomendar um subconjunto de alternativas aos decisores.



# Abstract

The mathematical models used in decision aiding are generally characterized by multiple parameters. Among the many approaches designed to rank a set of alternatives or to choose the best one(s), taking into account multiple criteria, we focus on the Multicriteria Value Theory. A situation of complete information occurs when decision makers are able to specify precise values for each parameter of the model used. However, for many reasons, frequently difficulties arise in obtaining accurate values for all parameters. Alternatively decision makers may provide what we call incomplete information, which is characterized by not leading to a combination of accurate values for all the parameters of the model. In the context of multicriteria additive aggregation, we study problems with ordinal information, namely considering a ranking of the criteria weights, a ranking of the value of each alternative on each criterion and a ranking of the difference of value between consecutive alternatives in each criterion.

The main objective of this study is to present and compare methods to help decision makers, even in the case they choose to provide ordinal information about their preferences. We propose two new rules for dealing with incomplete information on the value of each alternative on each criterion and study whether these rules lead to good results. These rules are tested both for the individual decision and for the group decision and negotiation. We also suggest three new approaches, for the case of negotiation, and a new approach, for the case of group decision, to help a mediator, or a facilitator, suggesting one or more alternatives.

This work can be divided into two parts. In both parts we use Monte Carlo simulation.

In the first part, we study how good the proposed rules are when there is ordinal information, compared with an ideal situation in which all the parameters of the model are known. This part of work is aimed at better understanding how the different rules and formulas compare, and provides some guidelines about the best way of using them. The objective of this type of strategies is to simplify the problem in terms of the number of alternatives, with the objective of studying them with more detail, or with the objective of eliciting more information. Simulations show that the proposed rules yield good results, therefore we deem that the use of this type of rules to identify a small subset containing the most promising alternatives is an interesting possibility, whenever it is costly or difficult to obtain precise values for all parameters.

In the second part the aim is not to compare rules, but to see how different approaches can be used to suggest alternatives. In the case of negotiation we suggest three approaches. We sustain that there is no approach which is clearly better than the others, all approaches have their particular strengths and weaknesses which make them suitable for some tasks. We therefore argue for a mix of approaches, which should preferably be implemented in the form of an interactive process. In the approach suggested to the case of group decision, the objective is to approximate the volume of the parameters space in which each alternative is the the best one, or does not lose for a significative difference, and to determine approximately the alternatives that each alternative dominates. The presented approach can be easily used and, despite not yielding a precise result, can be very useful to recommend a small subset of alternatives to the decision makers.





# Índice Geral

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Enquadramento geral . . . . .	1
1.2	Motivações e objectivos do trabalho . . . . .	4
1.3	Metodologia . . . . .	9
1.4	Breve descrição da estrutura do trabalho . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Apoio Multicritério à Decisão: Enquadramento</b>	<b>13</b>
2.1	Introdução . . . . .	13
2.2	Apoio Multicritério à Decisão . . . . .	14
2.2.1	Métodos de Apoio Multicritério à Decisão . . . . .	14
2.2.2	Sistemas de Apoio Multicritério à Decisão . . . . .	16
2.2.3	Intervenientes no processo de decisão . . . . .	18
2.2.4	Valores <i>versus</i> alternativas . . . . .	18
2.2.5	Conjunto de alternativas e problemáticas de Apoio Multicritério à Decisão . . . . .	19
2.2.6	Pontos de vista e critérios . . . . .	20
2.2.7	Desempenhos e escalas . . . . .	21
2.3	Funções de Utilidade / Valor - Modelo Aditivo . . . . .	22
2.3.1	Teoria de Utilidade <i>versus</i> Teoria de Valor . . . . .	23
2.3.2	Características e axiomas da Teoria de Valor . . . . .	24
2.3.3	Função de Valor Aditiva . . . . .	25
2.3.4	Eliciação dos valores dos parâmetros . . . . .	27
2.4	Utilização de informação incompleta . . . . .	28
2.4.1	Análises de sensibilidade . . . . .	28
2.4.2	Métodos baseados em dominância e em optimalidade . . . . .	30
2.4.3	Métodos baseados em volumes e em conclusões robustas . . . . .	33
2.4.4	Métodos baseados em regras de decisão simples . . . . .	35
2.4.5	Métodos interactivos . . . . .	36
2.4.6	Métodos não baseados na função de valor . . . . .	37
2.4.7	Métodos para a problemática da afectação . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Decisão Individual: Comparação de Diferentes Regras</b>	<b>39</b>
3.1	Introdução . . . . .	39
3.2	Notação e regras de decisão . . . . .	41
3.2.1	Notação . . . . .	41
3.2.2	Regras de decisão . . . . .	43
3.3	Exemplo ilustrativo . . . . .	48

3.4	Simulações . . . . .	52
3.5	Resultados . . . . .	55
3.5.1	Introdução . . . . .	55
3.5.2	Informação incompleta relativamente ao peso dos critérios . . . . .	55
3.5.3	Informação incompleta relativamente ao valor de cada alternativa em cada critério . . . . .	59
3.5.4	Informação incompleta relativamente ao peso dos critérios e ao valor de cada alternativa em cada critério . . . . .	61
3.5.5	Comparação das regras relativamente à taxa de acerto média . . . . .	62
3.5.6	Perda de valor . . . . .	63
3.6	Conclusões . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Decisão Colectiva: Enquadramento</b>	<b>69</b>
4.1	Introdução . . . . .	69
4.2	Negociação . . . . .	71
4.2.1	Enquadramento . . . . .	71
4.2.2	Uso de informação incompleta . . . . .	75
4.2.3	Notação e métodos . . . . .	77
4.3	Decisão em Grupo . . . . .	79
4.3.1	Enquadramento . . . . .	79
4.3.2	Uso de informação incompleta . . . . .	82
4.3.3	Notação e agregação das preferências individuais . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Decisão Colectiva: Comparação de Diferentes Regras</b>	<b>89</b>
5.1	Introdução . . . . .	89
5.2	Simulações . . . . .	91
5.3	Resultados . . . . .	93
5.3.1	Introdução . . . . .	93
5.3.2	Negociação . . . . .	94
5.3.3	Decisão em Grupo . . . . .	98
5.4	Conclusões . . . . .	102
5.5	Tabelas . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Aproximações para Apoio à Mediação com Informação Incompleta</b>	<b>119</b>
6.1	Introdução . . . . .	119
6.2	Negociação com informação incompleta . . . . .	120
6.2.1	Diferentes possibilidades para a informação disponível . . . . .	120
6.2.2	Representação da informação incompleta . . . . .	122
6.2.3	Critérios para seleccionar soluções alternativas . . . . .	124
6.3	Aproximações para sugerir potenciais acordos . . . . .	126
6.3.1	Aproximação dos Parâmetros Extremos . . . . .	126

6.3.2	Aproximação dos Parâmetros Centrais . . . . .	127
6.3.3	Aproximação do Domínio . . . . .	129
6.3.4	Comparação das três aproximações . . . . .	131
6.4	Exemplo ilustrativo: Caso Nelson <i>versus</i> Amstore . . . . .	139
6.4.1	Introdução . . . . .	139
6.4.2	Informação completa . . . . .	140
6.4.3	Informação incompleta . . . . .	142
6.4.4	Resultados usando a Aproximação dos Parâmetros Extremos . . . . .	146
6.4.5	Resultados usando a Aproximação dos Parâmetros Centrais . . . . .	149
6.4.6	Resultados usando a Aproximação do Domínio . . . . .	153
6.4.7	Comparação das recomendações fornecidas pelas diferentes aproximações . . . . .	158
6.5	Conclusões . . . . .	160
<b>7</b>	<b>Decisão em Grupo: Aproximação do Volume e da Dominância</b>	<b>165</b>
7.1	Introdução . . . . .	165
7.2	Aproximação do Volume e da Dominância . . . . .	166
7.2.1	Caracterização dos pesos dos decisores . . . . .	166
7.2.2	Descrição da Aproximação . . . . .	168
7.3	Exemplo ilustrativo . . . . .	171
7.3.1	Introdução . . . . .	171
7.3.2	O peso dos critérios e os valores são conhecidos (o peso dos decisores não são eliciados) . . . . .	175
7.3.3	São dadas ordenações do peso dos critérios e valores conhecidos . . . . .	176
7.3.4	São dadas ordenações do peso dos critérios e ordenações dos valores . . . . .	177
7.3.5	São dadas ordenações do peso dos critérios e ordenações das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério . . . . .	178
7.3.6	Discussão . . . . .	178
7.3.7	Tabelas . . . . .	181
7.4	Conclusões . . . . .	186
<b>8</b>	<b>Conclusões e vias para investigação futura</b>	<b>189</b>
<b>A</b>	<b>Decisão Colectiva: Comparação de Diferentes Regras</b>	<b>197</b>
A.1	Decisão em Grupo: agregação usando pesos para os decisores . . . . .	197
A.2	Negociação: utilização de <i>template</i> conhecido para gerar exemplos aleatórios . . . . .	200
A.2.1	Introdução . . . . .	200
A.2.2	Paralelismo com o exposto no Capítulo 5 . . . . .	200
A.2.3	Outros indicadores que mostram se a alternativa fornecida por cada regra é uma boa alternativa . . . . .	201
A.2.4	As regras fornecem uma aproximação justa? . . . . .	202

A.3 Tabelas . . . . .	204
<b>B Aproximações para Apoio à Mediação com Informação Incompleta</b>	<b>209</b>
B.1 E se o compromisso não foi (ainda) alcançado? . . . . .	209
B.2 E se impusermos que as funções de valor marginais têm que ser côncavas? .	211
B.3 E se não impusermos a condição de monotonia? . . . . .	213

# Índice de Figuras

3.1	Exemplo de um esboço para o critério $c_i$ . . . . .	45
3.2	Espaço dos pesos. . . . .	53
3.3	Valor da taxa de acerto a dividir pelo valor da probabilidade de base, em função do número de alternativas do problema: valores verdadeiros. . . . .	58
3.4	Porcentagem de casos em que a melhor alternativa é escolhida, em função do número de alternativas retidas: valores verdadeiros. . . . .	59
3.5	Comparação das diferentes regras relativamente à perda de valor média, considerando um nível de significância de 1%. . . . .	64
5.1	Comparação dos resultados das diferentes regras para a negociação: taxa de acerto média (esquerda) e perda de valor média (direita). . . . .	96
5.2	Comparação da taxa de acerto média fazendo variar o número de decisores. . . . .	99
5.3	Comparação dos resultados das diferentes regras para a decisão em grupo: taxa de acerto média (esquerda) e perda de valor média (direita). . . . .	100
6.1	Forma da função de valor para o assunto preço (caso de um vendedor). . . . .	121
6.2	Conjunto original de parâmetros admissíveis. . . . .	133
6.3	Conjunto alterado de parâmetros admissíveis. . . . .	134
6.4	Dança dos pacotes. . . . .	141
6.5	Funções de valor. . . . .	144
6.6	Comparação dos valores verdadeiros, dos valores PL e dos valores centróide: restrições relativas à sequência de propostas. . . . .	152
6.7	<i>Trade-offs</i> entre as aproximações para lidar com informação incompleta na negociação. . . . .	161
7.1	Volume de optimalidade / quasi-optimalidade: pesos dos decisores livres. . . . .	179
7.2	Diagramas de extremos e quartis: pesos dos decisores livres. . . . .	180
A.1	Comparação dos resultados das diferentes regras para a decisão em grupo: taxa de acerto média e perda de valor média - agregação usando pesos para os decisores (3 decisores). . . . .	199



# Índice de Tabelas

3.1	Valor das diferentes alternativas usando as diferentes regras. . . . .	50
3.2	Posição na ordenação das diferentes alternativas usando as diferentes regras. . . . .	51
3.3	Comparação entre a ordenação gerada usando pesos e valores verdadeiros e as ordenações geradas usando as diferentes regras. . . . .	52
3.4	Posição da melhor alternativa de acordo com as regras pesos ROC, maximin, arrependimento minimax e pesos centrais, na ordenação supostamente verdadeira: valores verdadeiros ( $n$ denota o número de critérios e $m$ o número de alternativas). . . . .	57
3.5	Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas regras pesos ROC, maximin, arrependimento minimax e pesos centrais: valores verdadeiros. . . . .	59
3.6	Posição da melhor alternativa de acordo com as regras valores ROC e valores $\Delta$ ROC na ordenação supostamente verdadeira: pesos verdadeiros. . . . .	60
3.7	Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas regras valores ROC e valores $\Delta$ ROC: pesos verdadeiros. . . . .	61
3.8	Posição da melhor alternativa de acordo com a regras pesos ROC valores ROC, e pesos ROC valores $\Delta$ ROC na ordenação supostamente verdadeira. . . . .	62
3.9	Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas regras pesos ROC valores ROC, e pesos ROC valores $\Delta$ ROC. . . . .	62
3.10	Perda de valor. . . . .	64
4.1	Vantagens e desvantagens da decisão colectiva (segundo Ben-Arieh et al., 2008). . . . .	69
5.1	Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira: sem valores de reserva ( $n$ denota o número de assuntos e $m$ o número de níveis em cada assunto). . . . .	104
5.2	Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira: com valores de reserva. . . . .	105
5.3	Comparação da taxa de acerto média sem valores de reserva com a taxa de acerto média com valores reserva. . . . .	106
5.4	Comparação da taxa de acerto média para as diferentes regras: negociação. . . . .	106
5.5	Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: sem valores de reserva. . . . .	107
5.6	Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: com valores de reserva. . . . .	108
5.7	Perda de valor: negociação. . . . .	109

5.8	Comparação da perda de valor média para as diferentes regras: negociação.	110
5.9	Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira: 3 decisores ( $n$ denota o número de critérios e $m$ o número de alternativas).	111
5.10	Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira: 5 decisores.	112
5.11	Comparação da taxa de acerto média para o diferente número de decisores.	113
5.12	Comparação da taxa de acerto média para as diferentes regras: decisão em grupo.	113
5.13	Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: 3 decisores.	114
5.14	Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: 5 decisores.	115
5.15	Perda de valor: decisão em grupo.	116
5.16	Comparação da perda de valor média para as diferentes regras: decisão em grupo.	117
6.1	Sumário das diferentes análises que podem ser realizadas.	136
6.2	Alternativas.	140
6.3	Informação completa.	140
6.4	Sequência de propostas.	141
6.5	Valor das alternativas que são melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso.	142
6.6	Alternativas que são certamente piores do que o compromisso (esquerda) e alternativas que são certamente melhores do que o compromisso (direita).	147
6.7	Comparação dos pesos PL e dos pesos centróide.	150
6.8	Resultados da Aproximação dos Parâmetros Centrais.	151
6.9	Probabilidade de cada alternativa ser melhor do que a solução de compromisso (não mostrando as alternativas para as quais a probabilidade de ser melhor, para ambas as partes, do que a solução de compromisso é inferior a 0.05).	154
6.10	Probabilidade de cada alternativa ser eficiente.	154
6.11	Probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com o método da soma dos valores.	155
6.12	Probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com o método PoP (compromisso como referência).	155
6.13	Comparação das três aproximações considerando valores conhecidos (mas considerando pesos desconhecidos) e usando as restrições relativas à sequência de propostas juntamente com as restrições relativas à equivalência de alternativas.	159



6.14	Comparação das três aproximações considerando funções de valor com parâmetros desconhecidos (pesos e valores desconhecidos) e usando as restrições relativas à sequência de propostas juntamente com as restrições relativas à equivalência de alternativas. . . . .	160
7.1	Valor de cada alternativa para cada decisor e peso dos diferentes decisores: Exemplo 1 (esquerda) e Exemplo 2 (direita). . . . .	167
7.2	Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a $\epsilon$ ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): peso dos critérios e valores conhecidos. . . . .	181
7.3	Relações de dominância dados pesos dos critérios e valores conhecidos ( $\bullet$ : $x^{(linha)}$ domina $x^{(coluna)}$ para pesos dos decisores livres; $\circ$ : $x^{(linha)}$ domina $x^{(coluna)}$ apenas se nenhum decisor pode ser ditador). . . . .	182
7.4	Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a $\epsilon$ ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): ordenação do peso dos critérios e valores conhecidos. . . . .	182
7.5	Relações de dominância dadas ordenações do peso dos critérios e valores conhecidos. . . . .	183
7.6	Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a $\epsilon$ ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): ordenação do peso dos critérios e ordenação dos valores. . . . .	183
7.7	Relações de dominância dadas ordenações do peso dos critérios e ordenações dos valores. . . . .	184
7.8	Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a $\epsilon$ ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): ordenação do peso dos critérios e ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. . . . .	184
7.9	Relações de dominância dadas ordenações do peso dos critérios e ordenações das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. . . . .	185
7.10	Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a $\epsilon$ ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): peso dos critérios e valores conhecidos (caso em que Lisboa não pode ser escolhida) - pesos dos decisores livres. . . . .	185
7.11	Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a $\epsilon$ ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): ordenação do peso dos critérios e valores conhecidos (caso em que Lisboa não pode ser escolhida) - pesos dos decisores livres. . . . .	185
7.12	Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a $\epsilon$ ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): ordenação do peso dos critérios e ordenação dos valores (caso em que Lisboa não pode ser escolhida) - pesos dos decisores livres. . . . .	186

7.13	Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a $\epsilon$ ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): ordenação do peso dos critérios e ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério (caso em que Lisboa não pode ser escolhida) - pesos dos decisores livres. . . . .	186
A.1	Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira: agregação usando pesos para os decisores (3 decisores). . . . .	204
A.2	Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: agregação usando pesos para os decisores (3 decisores). . . . .	205
A.3	Perda de valor: agregação usando pesos para os decisores (3 decisores). . . . .	205
A.4	Comparação da taxa de acerto média e da perda de valor média: agregação usando pesos para os decisores (3 decisores). . . . .	206
A.5	Número de alternativas melhores do que os valores de reserva para ambas as partes: Nelson <i>versus</i> Amstore. . . . .	206
A.6	Percentagem de vezes em que a alternativa escolhida pela regra é não admissível: Nelson <i>versus</i> Amstore. . . . .	206
A.7	Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira e posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: sem valores de reserva - Nelson <i>versus</i> Amstore. . . . .	206
A.8	Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira e posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: com valores de reserva - Nelson <i>versus</i> Amstore. . . . .	207
A.9	Perda de valor: Nelson <i>versus</i> Amstore. . . . .	207
A.10	Percentagem de vezes em que a alternativa escolhida é eficiente: Nelson <i>versus</i> Amstore. . . . .	207
A.11	Distância Euclidiana entre a alternativa escolhida e a eficiente mais próxima: Nelson <i>versus</i> Amstore. . . . .	208
A.12	Distância de Tchebychev entre a alternativa escolhida e a eficiente mais próxima: Nelson <i>versus</i> Amstore. . . . .	208
A.13	Média da diferença entre o valor real da melhor alternativa e o valor real da alternativa escolhida pela regra utilizada: Nelson <i>versus</i> Amstore. . . . .	208
B.1	Sequência de propostas: compromisso ainda não alcançado. . . . .	210
B.2	Soma dos valores e PoP mínima das alternativas que são melhores para ambas as partes do que o ponto de referência: compromisso ainda não alcançado. . . . .	210

- 
- B.3 Probabilidade de cada alternativa ser melhor do que o ponto de referência para ambas as partes (eliminando as alternativas para as quais a probabilidade de ser melhor, para ambas as partes, do que o ponto de referência é inferior a 0.05), probabilidade de cada alternativa ser eficiente, probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com o método de maximizar a soma dos valores e probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com a PoP mínima: compromisso ainda não alcançado (valores conhecidos). 211
- B.4 Probabilidade de cada alternativa ser melhor do que o compromisso para ambas as partes (eliminando as alternativas para as quais a probabilidade de ser melhor, para ambas as partes, do que o compromisso é inferior a 0.05), probabilidade de cada alternativa ser eficiente, probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com o método de maximizar a soma dos valores e probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com a PoP mínima: impondo concavidade (funções de valor com parâmetros desconhecidos). . . . . 212
- B.5 Probabilidade de cada alternativa ser melhor do que o compromisso para ambas as partes (eliminando as alternativas para as quais a probabilidade de ser melhor, para ambas as partes, do que o compromisso é inferior a 0.05), probabilidade de cada alternativa ser eficiente, probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com o método de maximizar a soma dos valores e probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com a PoP mínima: sem impor condição de monotonia relativamente às preferências de cada negociador (valores conhecidos). . . . . 214



# Introdução

---

*“Nada é mais difícil e, portanto, mais precioso, do que ser capaz de decidir.”*

(Napoleão Bonaparte)

*“A liberdade de decidir, de escolher, pode ser a liberdade mais preciosa que as pessoas possuem.”*

(Ackoff, 1994)

## 1.1 Enquadramento geral

A decisão está presente nas nossas vidas sem que muitas vezes nos apercebamos disso. Todos os dias tomamos pequenas decisões como “o que comer”, “quando dormir” e “o trajeto utilizado para ir para o trabalho”. No entanto nem todas as decisões são tão fáceis como estas e há decisões que são tão importantes que temos que perder algum tempo a pensar em qual a melhor opção.

A dificuldade em tomar decisões depende não só da complexidade do problema mas também da incerteza presente na tomada de decisões. Muitas decisões podem ser apoiadas pelo bom senso, pela experiência vivida e até pela intuição daquele que decide ou daqueles que o aconselham, tratando-se de um processo intuitivo. Porém, para muitas outras decisões o apoio à decisão pode ser mais elaborado e formal, recorrendo a abstrações e a técnicas para extrair conclusões com base em diversos modelos, tratando-se neste caso de um processo analítico (Dias, 2002).

Quando falamos em termos económicos, devemos ter em atenção que sempre que decidimos utilizar um recurso de uma forma estamos a prescindir da oportunidade de usá-lo de outro modo. Isto é fácil de ver nas nossas vidas, em que estamos constantemente a decidir o que fazer com o tempo e o dinheiro limitado que temos. Vamos ao cinema ou vamos estudar para o teste da próxima semana? Viajamos até ao México ou compramos um automóvel? Fazemos uma pós-graduação ou começamos a trabalhar após o curso? Em cada um destes casos, tomar uma decisão custa-nos, de facto, a oportunidade de fazer outra coisa qualquer. O custo de oportunidade é o valor do bem ou do serviço que se perdeu. O custo monetário imediato de ir ao cinema em vez de estudar é o preço do bilhete, mas o custo de oportunidade inclui também a possibilidade de ter uma melhor nota no exame (Samuelson e Nordhaus, 1999).

Existe uma analogia bastante grande entre esta vertente económica e os problemas de decisão a que nos referimos ao longo deste texto. Se existir uma alternativa melhor do que todas as outras em todos os aspectos é óbvio que não temos dúvidas em escolher essa alternativa. O problema é que a maior parte das vezes isso não acontece, e quando escolhemos uma alternativa temos que estar dispostos a aceitar aquilo que “perdemos” em não ter optado por outra alternativa<sup>1</sup>.

Um facto importante é que quando nos referimos a problema de decisão não estamos necessariamente perante um aspecto negativo. Keeney (1992: 8) apresenta um exemplo bastante elucidativo:

If you were looking for a job, would the prospect of having one alternative thrill you? You might have to accept the job whether or not it was particularly desirable, but there would definitely be no decision problem. There would be no required choices. But this “no decision problem” might be a big problem. On the other hand, suppose you were faced with several job alternatives, some of which were quite appealing. This presumably would not be a bad situation to be in, but it is what is referred to as a decision problem.

Na maior parte das situações reais, existe mais do que um critério a considerar quando temos de tomar decisões, por isso falamos de Apoio Multicritério à Decisão em vez de Apoio à Decisão. Roy (2005: 5) refere que:

Even when decision aiding is provided for a single decision maker, it is rare for her or him to have in mind a single clear criterion. Thus, when decision aiding takes place in a multi-actor decision making process, it is even rarer for there to be *a priori* a single, well-defined criterion deemed acceptable by all actors to guide the process. This process is often not very rational. Each actor plays a more or less well defined role which gives priority to her or his own objectives and value system.

In both cases, it is necessary to take into consideration various points of view dealing with, for example, finance, human resources, environmental aspects, delays, security, quality, ethics,...

---

<sup>1</sup>Nos problemas que envolvem múltiplos decisores, principalmente nos problemas que envolvem negociação, a questão ainda é mais complexa. Mesmo que exista uma alternativa melhor do que todas as outras para um dos negociadores dificilmente essa alternativa é melhor do que todas as outras para os outros negociadores.

O Apoio Multicritério à Decisão tem como objectivo avaliar e comparar um conjunto de alternativas, e inclui técnicas para ajudar a eliciar as preferências dos decisores. Os critérios normalmente são conflituosos. O conjunto das alternativas pode ser definido em extensão, quando os elementos do conjunto são enumerados explicitamente, ou em compreensão, quando o conjunto é definido pelas restrições a que todos os seus elementos têm de obedecer. Ao longo deste trabalho consideramos apenas o caso em que o conjunto das alternativas é definido em extensão<sup>2</sup>. O Apoio Multicritério à Decisão pode considerar quatro diferentes problemáticas (Roy, 1985): descrição, escolha, afectação e ordenação. Ao longo deste trabalho focamo-nos nas problemáticas da escolha e da ordenação.

Dentro das muitas aproximações concebidas com o objectivo de ordenar um conjunto de alternativas ou com o objectivo de escolher a(s) melhor(es), tendo em conta múltiplos critérios, focamo-nos na Teoria de Utilidade Multicritério (“Multiattribute Utility Theory” - MAUT) (Keeney e Raiffa, 1976) / Teoria de Valor Multicritério (“Multiattribute Value Theory” - MAVT) (Winterfeldt e Edwards, 1986; Watson e Buede, 1987), que explora a ideia de dar uma avaliação a cada alternativa<sup>3</sup>. De acordo com a teoria de utilidade / valor multicritério, é necessário começar por construir uma função de utilidade / valor para cada critério, que expressa numa escala cardinal o valor associado a cada nível da escala em que o critério é medido. A função de valor pode ser crescente ou decrescente à medida que o nível aumenta (por exemplo, decrescente no caso de um custo). No caso da função de utilidade é possível modelar diferentes atitudes face ao risco. Ao longo deste texto vamos referir-nos apenas à função de valor, já que as duas funções são semelhantes em termos dos cálculos a efectuar e do tratamento de que vão ser alvo.

O modelo mais popular para agregar múltiplas funções de valor é o modelo aditivo. No modelo aditivo defende-se que, aceitando alguns pressupostos<sup>4</sup> (Keeney e Raiffa, 1976), o valor global de uma alternativa é a soma de funções de valor, uma para cada critério de avaliação, cada uma das quais ponderada por um coeficiente de escala. Estes coeficientes são os pesos usados na soma pesada de funções de valor. Este método é um dos métodos mais conhecidos entre investigadores e é um dos mais utilizados na prática. Além disso é simples de perceber, e as suas propriedades teóricas estão bastante estudadas (ver, por exemplo, Keeney e Raiffa, 1976; Winterfeldt e Edwards, 1986; Wakker, 1989; Keeney, 1992; Belton e Stewart, 2002). Raiffa (1982) defende a utilização dos modelos aditivos argumentando que eles são preferíveis devido à sua robustez, transparência (claro entendimento por parte dos intervenientes no processo de decisão do seu significado) e desenvolvimento

---

<sup>2</sup>Vamos deixar de fora da nossa discussão a Optimização Multiobjectivo que se foca na aplicação de algoritmos matemáticos para identificar as alternativas eficientes, sob certas restrições, com respeito a um pequeno número de objectivos. Esses objectivos são expressos matematicamente usando variáveis de decisão (Steuer, 1986). As variáveis de decisão normalmente são contínuas, e desta forma, a maioria dos problemas de Optimização Multiobjectivo tem um conjunto infinito de alternativas. Essas alternativas são definidas por combinações distintas dos valores das variáveis de decisão.

<sup>3</sup>Para uma revisão de outros métodos (AHP (Saaty, 1980), PROMETHEE (Brans e Vincke, 1985), ELECTRE (Roy e Bouyssou, 1993), e outros) ver Belton e Stewart (2002) e Figueira et al. (2005).

<sup>4</sup>Iremos referir estes pressupostos mais à frente neste trabalho (ver Subsecção 2.3.3).

simples (simplicidade com que os cálculos são efectuados e com que as alternativas são ordenadas). Hämäläinen (2004) apresenta de forma bastante interessante a análise SWOT (“Strengths, Weaknesses, Opportunities, and Threats”) das aproximações para Apoio Multicritério à Decisão, focando-se especialmente na teoria de valor multicritério. Dentro dos pontos fortes que o autor apresenta destacam-se as bases teóricas do método. No entanto também se pode referir o facto da teoria de valor multicritério ajudar a estruturar o problema e permitir incorporar tanto informação quantitativa como informação qualitativa. Além disso, utilizar a teoria de valor multicritério aumenta o entendimento do problema, uma vez que os decisores necessitam de construir a função de valor que representa as suas preferências, e fornece uma maneira de comunicar, clarificando as vantagens e desvantagens de cada alternativa. Utilizando a teoria de valor multicritério é possível incorporar os pontos de vista de diversos decisores e é possível testar a robustez dos resultados usando análise da sensibilidade, uma vez que já existem bastantes softwares para aplicar o modelo aditivo da teoria de valor multicritério. Dentro dos pontos fracos pode destacar-se o carácter compensatório do modelo, o que implica que um mau desempenho num critério pode ser compensado por um bom desempenho noutra critério. Desta forma, as alternativas equilibradas não são valorizadas, e pequenas vantagens em muitos critérios podem valer mais do que uma vantagem notória em apenas um critério. Além disso, criar uma função de valor não aditiva não é uma tarefa fácil, principalmente se o número de critérios envolvidos é grande e se estes são de diferente natureza. Pode ainda referir-se que na prática é difícil analisar se se verifica a condição de independência aditiva, já que algumas violações podem ser muito subtis, e em muitos trabalhos esta condição é mesmo ignorada. Também é um ponto fraco o facto de na maioria dos trabalhos não ser referida a verificação de que os decisores entenderam de forma correcta as questões que lhes foram colocadas. Dentro das oportunidades pode referir-se a utilização da internet. Dentro das ameaças pode referir-se a falta de abertura dos investigadores da área para a possibilidade de integrar a teoria de valor multicritério com outros métodos e técnicas.

## 1.2 Motivações e objectivos do trabalho

A construção das funções de valor para cada critério, e a atribuição dos valores dos pesos dos critérios (os coeficientes de escala), requer a eliciação de preferências dos decisores, que é normalmente problemática. Parâmetros como os pesos são artefactos cuja semântica pode ser difícil de perceber pelos decisores (o que está relacionado com o erro comum de confundir esses pesos com importância; ver Keeney, 1992), e desta forma constituem habitualmente os parâmetros mais difíceis de obter com precisão. O papel dos pesos nem sempre é óbvio uma vez que eles reflectem as preferências dos decisores que muitas vezes são mal-definidas e instáveis. Além disso, os pesos implicitamente definem *trade-offs* (isto é, taxas de compensação) entre critérios e são obtidos através de perguntas de difícil resposta. Obter os pesos envolve saber exactamente quanto se estará disposto a perder em determinado critério para ganhar uma unidade de valor noutra critério. Por exemplo, na



construção de determinada obra poderá ser necessário saber quanto se estará disposto a investir em material de segurança para diminuir o número de acidentes de trabalho, questão que obviamente não é de fácil resposta. Como referido por Alfares e Duffuaa (2008), é reconhecido que a atribuição dos pesos é uma tarefa cognitivamente exigente e, em algumas circunstâncias, pode ser apropriado pedir aos decisores para fornecerem informação ordinal sobre os pesos (ou fornecerem informação qualitativa, ou indicarem intervalos,...), em vez de uma avaliação directa dos seus valores numéricos. Segundo Keeney (1992), perguntar directamente aos decisores se um critério é mais importante do que o outro é um dos erros mais frequentes no Apoio Multicritério à Decisão.

Apesar das dificuldades apresentadas, geralmente assume-se que o valor dos parâmetros dos modelos é conhecido ou pode ser perguntado a um decisor. Porém, em muitos casos, este pressuposto é irrealista ou, pelo menos, pode existir vantagem em trabalhar com informação menos precisa. Dada a dificuldade em obter dos decisores valores numéricos precisos para os diferentes parâmetros dos modelos, ao longo deste trabalho permitimos que os decisores forneçam aquilo a que se chama informação incompleta (também chamada de informação imprecisa, informação parcial, informação pobre ou informação não pontual). Tal informação caracteriza-se por não conduzir a uma combinação de valores precisos para os parâmetros (Dias, 2000). Por exemplo, um decisor pode indicar que determinado peso é maior do que outro, sem quantificar quanto, ou pode indicar que o valor de determinado desempenho pertence a um certo intervalo, sem indicar o valor exacto.

São diversas as razões apontadas na literatura que justificam porque os decisores optam por fornecer informação incompleta (Weber, 1987; Dias, 2000; Lahdelma et al., 2003; Damart et al., 2007). A decisão pode ter de ser tomada com pressões de tempo e falta de dados e alguns parâmetros do modelo podem ser intangíveis ou não monetários uma vez que, por exemplo, reflectem impactos sociais ou ambientais, o que pode conduzir à impossibilidade de o decisor indicar valores precisos com confiança. Além disso, o decisor tem capacidade limitada de processar informação e tem tempo e paciência limitados, pode ter dificuldade em comparar critérios e pode não desejar revelar as suas preferências em público ou pode não querer fixar as suas preferências, pois elas podem mudar ao longo do processo. Em cada critério, os desempenhos das alternativas podem resultar de estatísticas ou instrumentos de medida, que geralmente não são completamente precisos. Alguns parâmetros reflectem valores ou preferências do decisor, que este pode considerar difíceis de expressar porque considera difícil atribuir-lhes um valor numérico preciso. Junta-se o facto de existir a possibilidade dos desempenhos das alternativas dependerem de variáveis cujo valor não é conhecido na altura da análise e da incerteza quanto ao que o futuro reserva poder interferir no sistema de valores do decisor. As preferências podem evoluir, uma vez que são normalmente resultados instáveis de conflitos internos da mente do decisor e a informação que permitiria fixar o valor de alguns parâmetros pode estar incompleta, ser pouco credível, ser contraditória ou controversa. Por último, o decisor pode ser um grupo, ou o representante de uma organização, incapaz de fornecer valores precisos devido à falta

de consenso. Alguns destes factores podem ser minorados à custa de tempo, discussões ou dinheiro, mas os intervenientes desejarão evitar incorrer nestes custos.

Além de os julgamentos de valor serem naturalmente mais fáceis de expressar por palavras do que por números, é sabido que a maneira como a questão é colocada (por exemplo, através de técnicas de questionário ou do uso de hierarquias) tem efeito no valor dos pesos que são eliciados (Schoemaker e Waid, 1982; Borchering et al., 1991; Weber e Borchering, 1993; Pöyhönen e Hämäläinen, 2001). Uma preocupação relacionada, de acordo com Edwards e outros investigadores (Edwards et al., 1988; Edwards e Barron, 1994), é que tentar eliciar valores numéricos precisos para as preferências dos decisores origina respostas menos confiáveis do que tentar basear o diálogo em métodos de eliciação simples, requerendo menos informação precisa. Além disso, estes autores defendem que, no segundo caso, o processo de decisão será mais fácil de perceber e mais fácil de ser aceite pelos decisores, e também defendem que devido ao princípio *flat maxima*<sup>5</sup> (Winterfeldt e Edwards, 1986), os resultados da análise não serão muito inferiores aos da análise baseada numa rigorosa eliciação de valores numéricos precisos. Larichev et al. (1995) apresentam uma série de resultados que confirmam a hipótese de que a decisão é mais estável se a informação for eliciada de forma ordinal.

A preocupação de trabalhar com informação incompleta surge, naturalmente, no contexto do uso de funções de valor multicritério. Trabalhar com modelos que requerem menos esforço dos decisores é porventura uma forma de contribuir para aumentar a popularidade dos métodos formais de apoio à decisão. Desta forma, neste trabalho consideramos problemas nos quais a decisão é baseada no uso de informação incompleta, referindo não só a decisão individual mas também a decisão colectiva, nomeadamente a negociação e a decisão em grupo. Em situações de decisão com múltiplos decisores, é frequente que existam divergências de opinião ou de preferência entre os mesmos (pode existir desacordo, por exemplo, relativamente ao vector dos pesos apropriado) e, mesmo que os valores dos parâmetros possam ser obtidos dos decisores, não é claro como as preferências de múltiplos decisores podem ser combinadas. Desta forma, consideramos que no caso da decisão colectiva é ainda mais pertinente a utilização de informação incompleta, em vez de tentar eliciar valores precisos para todos os parâmetros do modelo.

Relativamente à decisão individual, existem muitos métodos que aceitam informação incompleta, por exemplo, informação de carácter ordinal. A maioria desses métodos foca-se na imprecisão nos pesos, considerando conhecido o valor de cada alternativa em cada critério (por exemplo, Bana e Costa, 1986; Hazen, 1986; Weber, 1987; Dias e Clímaco, 2000a; Salo e Hämäläinen, 2001; Ahn e Park, 2008). No entanto, nem sempre é fácil eliciar o valor preciso de cada alternativa em cada critério. Existem também métodos que se focam na imprecisão nos desempenhos (por exemplo, Iyer, 2003), ou são capazes de lidar com imprecisão nos pesos e nos desempenhos simultaneamente (por exemplo, Sage e White, 1984;

---

<sup>5</sup>O princípio *flat maxima* diz basicamente que depois das alternativas que são dominadas serem eliminadas, erros moderados nas probabilidades, pesos ou utilidades não produzem grandes alterações nas utilidades esperadas ou utilidades multicritério.

Park, 2004; Mateos et al., 2007; White e Holloway, 2008). Apesar da área de apoio à decisão com informação incompleta apresentar um conjunto variado de propostas para lidar com problemas de escolha e ordenação, consideramos interessante fornecer propostas inovadoras, especialmente relativamente à aceitação de informação incompleta no valor de cada alternativa em cada critério e relativamente à melhor forma de escolher um subconjunto das alternativas mais promissoras, ou de obter uma ordenação das alternativas. Nunca é demais apresentar métodos simples, fáceis de perceber e úteis para resolver problemas de apoio multicritério à decisão. Desta forma, no contexto da agregação multicritério aditiva, consideramos problemas com informação ordinal, nomeadamente considerando uma ordenação dos pesos, uma ordenação do valor de cada alternativa em cada critério e uma ordenação da diferença de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. Pretendemos verificar se os métodos propostos conduzem a resultados muito diferentes dos obtidos considerando informação completa sobre os diferentes parâmetros do modelo.

Além de considerarmos utilização de informação incompleta no caso da decisão individual, também estudamos como este tipo de informação pode ser utilizado no caso da negociação e da decisão em grupo. O apoio a processos de negociação com informação incompleta é um tema onde a investigação não está muito desenvolvida, havendo necessidade de novas contribuições seja em perspectivas de apoio a uma das partes (também referidas ao longo deste texto como os negociadores), seja para apoiar todas as partes envolvidas na negociação, seja para apoiar um mediador. Interessa fornecer métodos onde não seja necessário que os negociadores indiquem de forma precisa as suas preferências e que sejam facilmente aplicáveis mesmo quando os negociadores não têm informação disponível referente às preferências da outra parte. Ao longo deste trabalho apresentamos contribuições para o apoio a negociações com informação incompleta, nomeadamente na perspectiva da mediação. Uma das questões de investigação a que pretendemos dar resposta é se é possível ajudar os negociadores a alcançarem uma solução eficiente, na ausência de informação completa sobre os diferentes parâmetros do modelo. Relativamente à negociação consideramos contextos nos quais os negociadores fornecem informação ordinal sobre as suas preferências (sobre os pesos, sobre o valor de cada nível em cada assunto e sobre a diferença de valor entre níveis consecutivos em cada assunto), mas também contextos em que o mediador obtém informação dos negociadores, de forma implícita ou explícita, ao longo do processo de negociação.

Em situações de decisão em grupo, nem todos os elementos têm igual conhecimento sobre o domínio do problema, e além de fenómenos como a inibição das minorias, o que torna o processo difícil é o facto de ser necessário encontrar um acordo entre os decisores apesar da diversidade de julgamentos e das percepções subjectivas da realidade (Damart et al., 2007). Neste trabalho apresentamos aproximações para lidar com a problemática da escolha no contexto da decisão em grupo com informação incompleta. Abordamos assim o problema no qual um grupo de decisores não é capaz de, ou prefere evitar, fornecer informação sobre as suas preferências individuais, e desta forma fornece informação ordinal

sobre os pesos, sobre o valor de cada alternativa em cada critério e sobre a diferença de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. Apresentamos aproximações nas quais não existe necessidade de atribuir pesos aos diferentes decisores, uma das dificuldades associadas com o uso da função de valor aditiva. A escolha dos pesos que reflectem a importância dos decisores requer comparações relativas à autoridade, experiência e especialidade dos elementos do grupo.

Desta forma, o principal objectivo deste trabalho é apresentar e comparar métodos para ajudar os decisores, mesmo que estes optem por fornecer informação incompleta (nomeadamente informação ordinal) sobre as suas preferências, e averiguar se estes métodos podem conduzir a bons resultados. Vamos propor duas novas regras para lidar com informação incompleta relativamente ao valor de cada alternativa em cada critério e vamos estudar até que ponto estas regras conduzem a bons resultados. Estas regras vão ser testadas também no caso da negociação e da decisão em grupo. Vamos ainda sugerir três novas aproximações, para o caso da negociação, e uma nova aproximação, para o caso da decisão em grupo, para que um mediador, ou um facilitador, possa sugerir uma ou mais alternativas. Os nossos objectivos incluem assim a procura de novos métodos para problemas de selecção e ordenação, oferecendo propostas inovadoras, sobretudo no que diz respeito à aceitação de informação de carácter ordinal, em particular em problemas de negociação e de decisão em grupo, tratando-se de situações onde se torna necessário conciliar múltiplos interesses ou opiniões. Estes desenvolvimentos vão ser aferidos pelo seu rigor metodológico e por experiências de aplicação, por exemplo, a problemas já conhecidos na literatura. Propomos assim a eliciação de informação que, mesmo não sendo completa, facilite o conhecimento da questão em análise. A informação incompleta pode deste modo ser usada para fornecer algumas linhas de referência sobre qual a melhor escolha, usando ferramentas como a simulação e a programação matemática.

Neste trabalho vamos referir o Apoio Multicritério à Decisão, focando-nos na Teoria de Valor Multicritério com base na utilização da função de valor aditiva. Não iremos referir outras formas da função de valor (como, por exemplo, a forma multiplicativa) nem outros métodos que poderiam ser utilizados no contexto abordado neste trabalho (como, por exemplo, os *Outranking Methods* (Roy e Mousseau, 1996)). Focamo-nos nas problemáticas da escolha e ordenação dentro de um conjunto finito de alternativas definido em extensão, não abordando a problemática da afectação (Roy, 1985). Não podemos no entanto deixar de referir que a afectação ordinal constitui uma forma de procurar ordenar de forma fraca um conjunto de alternativas. Consideramos problemas nos quais a decisão é baseada no uso de informação incompleta tanto no caso da decisão individual como no caso da decisão colectiva. Consideramos que os decisores fornecem informação de carácter ordinal, indicando uma ordenação completa (mais formalmente, uma pré-ordem completa, uma vez que admitimos que a ordenação incluía elementos *ex-aequo*). Excluimos do nosso estudo os casos em que a informação fornecida é dada, por exemplo, através de uma ordenação parcial ou através de intervalos de valores.

## 1.3 Metodologia

Este trabalho é dividido em duas partes: numa primeira parte, estudamos quão bons são os métodos propostos quando existe informação ordinal, em comparação com uma situação ideal na qual todos os parâmetros do modelo são conhecidos; numa segunda parte o objectivo não é comparar métodos, mas sim ver como diferentes métodos podem ser utilizados para sugerir alternativas. Como metodologia de trabalho, quer para comparar métodos, quer para ver como diferentes métodos podem ser utilizados para sugerir alternativas, recorreremos à simulação.

Como refere Winston (1996), em muitas situações existem modelos analíticos que os decisores podem usar para apoiar uma decisão. Por um modelo analítico, entende-se um conjunto de equações matemáticas, que permite ao decisor, para valores dados de certos *inputs*, determinar o valor de importantes *outputs*. A simulação pode ser usada quando não existem métodos de cálculo adequados, ou quando os cálculos adequados são morosos, e normalmente fornece aos decisores informação importante, uma vez que, como o próprio nome indica, é uma técnica que permite imitar o funcionamento de um sistema real. Como referem Bertsimis e Freund (2000), os modelos de simulação são usados numa grande variedade de situações de gestão, incluindo modelação de operações industriais, modelação de filas de espera, modelação de alternativas de investimento, e análise e estimação de instrumentos financeiros sofisticados. Existe um tipo de simulação em que gerar os números aleatórios usados para cada experiência é análogo a girar uma roleta num casino, pois como quando se gira uma roleta num casino os números gerados são independentes entre si. A este tipo de simulação chama-se simulação Monte Carlo (Winston, 1996). Vose (1996) considera que a simulação Monte Carlo apresenta bastantes vantagens em relação a outras técnicas de simulação, entre as quais podemos referir as seguintes: não ser necessário aproximar a distribuição das variáveis do modelo e as correlações e inter-dependências poderem ser modeladas; os conhecimentos matemáticos para levar a cabo uma simulação Monte Carlo serem muito básicos e os seus resultados serem facilmente aceites, uma vez que é reconhecida como uma técnica muito válida; o computador fazer todo o trabalho necessário na determinação da distribuição resultante e o nível de precisão poder ser aumentado simplesmente aumentando o número de iterações, conseguindo-se desta forma introduzir complexidade matemática sem muita dificuldade adicional; mudanças no modelo poderem ser feitas muito rapidamente e os resultados poderem ser comparados com os modelos anteriores. Bertsimis e Freund (2000) consideram que a simulação é uma ferramenta extremamente útil para ajudar o decisor a tomar decisões difíceis em situações de incerteza. No entanto, Hillier e Lieberman (1995) referem que apesar da simulação ser uma ferramenta muito útil é uma técnica imprecisa, uma vez que fornece apenas estatísticas e não resultados exactos, e compara alternativas em vez de gerar uma alternativa óptima.

Apesar de algumas limitações que a simulação possa ter, ela será utilizada em ambas as partes do nosso trabalho uma vez que pode fornecer informação muito útil. Assim, ao longo do trabalho, e no contexto do apoio à decisão com informação incompleta, a simulação Monte Carlo será utilizada com diferentes propósitos:

- Comparar métodos, à semelhança dos trabalhos desenvolvidos, por exemplo, por Barron e Barrett (1996) e por Ahn e Park (2008).
- Aproximar valores difíceis de calcular, à semelhança dos trabalhos desenvolvidos, por exemplo, por Charnetski e Soland (1978) no método CHC (“Comparative Hypervolume Criterion”), e por Lahdelma et al. (1998) no método SMAA (“Stochastic Multiobjective Acceptability Analysis”) e suas variantes.

## 1.4 Breve descrição da estrutura do trabalho

Fazemos agora um breve resumo do que vamos apresentar ao longo deste trabalho:

- No Capítulo 2 é feito um enquadramento do apoio multicritério à decisão, onde são apresentados alguns métodos e sistemas de apoio multicritério à decisão, os intervenientes no processo de decisão, a distinção entre valores e alternativas, o conjunto de alternativas e as problemáticas de apoio à decisão, os pontos de vista e os critérios, e os desempenhos e as escalas. Vamos referir a utilização da função de valor aditiva, falando da distinção entre teoria de utilidade e teoria de valor, das características e axiomas da teoria de valor, e da eliciação dos valores dos parâmetros da função de valor aditiva. Vamos ainda falar do uso de informação incompleta no contexto da decisão individual, referindo em particular a análise de sensibilidade e fazendo uma breve revisão da literatura sobre o uso de informação incompleta.
- Alguns autores sugerem o uso de regras de decisão simples baseadas em informação incompleta, mas fácil de eliciar, para sugerir uma alternativa ou um pequeno subconjunto de alternativas. Apesar de nenhuma destas regras garantir que a alternativa indicada como sendo a melhor é a mesma que resultaria se fossem eliciados valores precisos para os parâmetros, estudos de simulação mostram que em geral a alternativa seleccionada é uma das melhores. O trabalho apresentado no Capítulo 3 pertence a este grupo de aproximações que usam regras baseadas em informação fácil de eliciar. O nosso objectivo é ordenar as alternativas, ou seleccionar uma alternativa ou um subconjunto de alternativas, sem requerer informação completa do decisor. Iremos propor duas novas regras, baseadas na regra pesos ROC (“Rank Order Centroid”, Barron e Barrett, 1996), para lidar com informação incompleta relativamente ao valor de cada alternativa em cada critério. Em vez de assumir que o decisor é capaz de definir precisamente a sua função de valor, assumimos que apenas é eliciada informação ordinal sobre as suas preferências: sobre os pesos, sobre o valor das diferentes

alternativas em cada critério e sobre a diferença de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. Utilizamos simulação Monte Carlo para comparar os resultados que se obteriam se toda a informação estivesse disponível com os resultados obtidos quando as regras propostas são utilizadas. Verificamos se a regra fornece a verdadeira melhor alternativa e, caso contrário, qual é a perda de valor. Apresentamos algumas ideias sobre como usar essas regras num contexto de seleccionar um subconjunto contendo as alternativas mais promissoras, considerando os objectivos contraditórios de reter o menor número possível de alternativas sem no entanto excluir a melhor.

- No Capítulo 4 fazemos um breve enquadramento à decisão colectiva e ao uso de informação incompleta, tanto no caso da negociação como no caso da decisão em grupo. Apresentamos ainda diversos métodos de mediação que serão referidos ao longo do trabalho.
- No caso da decisão colectiva, e considerando que a função de valor aditiva é utilizada, normalmente não é fácil obter valores precisos para os pesos ou para o valor dos diferentes níveis em cada assunto, ou para o valor das diferentes alternativas em cada critério. No Capítulo 5 generalizamos três regras apresentadas no Capítulo 3, para o caso da negociação bilateral e da decisão em grupo com informação incompleta. O nosso objectivo é que com base em informação ordinal, o mediador ou o facilitador possa sugerir uma ou mais alternativas usando as regras de decisão que apresentamos. Comparamos estas regras utilizando diferentes métodos de mediação. A escolha do método a utilizar depende das preferências do mediador ou do facilitador e todos eles apresentam vantagens e desvantagens. No caso da decisão em grupo, utilizar métodos de mediação para sugerir uma alternativa elimina a necessidade de atribuir pesos aos diferentes elementos do grupo.
- No Capítulo 6, que se refere também à negociação bilateral, consideramos que as partes negociam com base na dança dos pacotes (“Dance of Packages”, Raiffa et al., 2002). Aqui propomos obter informação relativamente às preferências dos negociadores ao longo do processo de negociação, através das afirmações que fazem e das ofertas que trocam. O objectivo é que um mediador seja capaz de propor alternativas próximas da fronteira de Pareto. A informação que usamos é principalmente baseada na comparação de propostas (também chamadas de ofertas) que são feitas implicitamente ou explicitamente pelas partes. Desenvolvemos e comparamos sistematicamente três novas aproximações para ajudar um mediador. A primeira é baseada em conclusões robustas, a segunda é baseada em aproximações inferidas, e a terceira usa a análise do domínio. Estas aproximações permitirão que o mediador avalie como cada proposta que coloque sobre a mesa será recebida pelas partes, nomeadamente se a considerarão melhor do que as que já consideraram, ou mesmo aceitaram como compromisso, e verifique quais são as alternativas mais promissoras

de acordo com os métodos de mediação. Consideramos negociação integrativa sobre múltiplos assuntos, que é a que mais beneficia do esforço de um mediador.

- Alguns métodos enfatizam a exploração do espaço dos pesos, com o objectivo de examinar que tipo de avaliação tornará uma alternativa preferida a outra alternativa. Outros métodos são baseados em relações de dominância para identificar possíveis soluções. A aproximação apresentada no Capítulo 7 adequa-se à decisão em grupo com informação incompleta e combina estas duas ideias. O objectivo é informar os decisores verificando se existem alternativas óptimas, ou quasi-óptimas, e se existem alternativas que podem ser eliminadas devido à dominância. Os pesos dos decisores serão deixados sem restrições, ou apenas restringidos pelas restrições necessárias para prevenir que um elemento se torne um “ditador”. Isto elimina a necessidade de comparar quão importante é cada elemento do grupo, e favorece a obtenção de conclusões que são largamente aceites entre os elementos.
- No Capítulo 8 terminamos o nosso trabalho sumariando algumas conclusões a apresentando algumas vias para investigação futura.



# Apoio Multicritério à Decisão: Enquadramento

---

## 2.1 Introdução

Kersten (1997: 2) refere que:

Decision making is about thinking of new situations and making choices among them. It involves the decision maker and other people. The decision process is about changing the current situation to a new situation. This aspect may be more important than the decision outcome itself. Decision makers need to be able to determine what they can change, why they want to make a change, and how it may be introduced.

A tomada de decisões insere-se num processo que decorre ao longo de certo tempo. Foi apresentado por Simon (1977) um enquadramento geral para os processos de decisão, enquadramento esse que engloba quatro fases: inteligência, concepção (ou estruturação), escolha (ou avaliação) e revisão. A fase de inteligência é aquela na qual se detecta a necessidade de agir. A fase de concepção compreende a modelação da situação de decisão. A fase de escolha corresponde à tomada da decisão propriamente dita, frequentemente com o apoio de técnicas matemáticas, algoritmos, ou regras simples para explorar o modelo construído. Na fase de revisão, coloca-se em prática a decisão tomada e acompanham-se as suas consequências. Dias (2000) refere que nesta sequência, admite-se em qualquer altura um retorno às fases anteriores, bem como o desenvolvimento, em paralelo, de trabalho ligado a fases distintas. Ao longo deste trabalho focamo-nos na fase da escolha.

Um processo de decisão típico pode apresentar duas vertentes distintas: numa primeira vertente é identificado um problema de decisão, o que normalmente acontece quando se está insatisfeito com alguma situação e se deseja fazer algo para a mudar, e à medida que o decisor analisa o problema surgem algumas alternativas óbvias; numa segunda vertente, aparecem alternativas menos óbvias, como a possibilidade de um novo emprego, e existe a necessidade de decidir entre as alternativas existentes anteriormente e as novas alternativas que entretanto surgiram. Como referido por Chen et al. (2009), o estudo de um problema de análise de decisão multicritério envolve três passos fundamentais:

- (1) Construção do problema - O processo de definir objectivos, transformar os objectivos em critérios, identificar todas as alternativas possíveis, e medir o desempenho de cada alternativa em cada critério.
- (2) Eliciação das preferências e agregação - O processo de modelar as preferências dos decisores relativamente ao desempenho em cada critério e ao peso que os decisores atribuem a cada critério, obtendo uma avaliação global de cada alternativa.
- (3) Implementação - O processo de analisar as alternativas com o objectivo de escolher uma, ou mais, de as ordenar ou de as afectar a categorias.

Este capítulo tem como objectivo fazer um enquadramento do apoio multicritério à decisão, nomeadamente da utilização da função de valor aditiva e do uso de informação incompleta no contexto da decisão individual, e é organizado da seguinte forma: na Secção 2.2 revemos de forma breve a área do apoio multicritério à decisão; na Secção 2.3 referimos a utilização de funções de utilidade / valor, em particular do modelo aditivo; terminamos na Secção 2.4 onde falamos da utilização de informação incompleta em processos de análise de decisão multicritério.

## 2.2 Apoio Multicritério à Decisão

Nesta secção, começamos por referir alguns métodos e sistemas de apoio multicritério à decisão. Seguidamente falamos do intervenientes no processo de decisão e da distinção entre problemas que se focam nos valores e problemas que se focam nas alternativas, citando as diferentes problemáticas de apoio multicritério à decisão. Terminamos referindo, de forma breve, o que são os pontos de vista e os critérios, e os desempenhos e as escalas.

### 2.2.1 Métodos de Apoio Multicritério à Decisão

Segundo a “International Society on Multiple Criteria Decision Making”:

Multi-Criteria Decision Making is the study of methods and procedures by which concerns about conflicting criteria can be formally incorporated into management planning process.

Desta forma o apoio multicritério à decisão, é normalmente sustentado por um conjunto de técnicas (métodos) para ajudar o decisor a identificar, comparar e avaliar alternativas de acordo com diversos, e normalmente conflituosos, critérios (ou atributos). Apresentamos seguidamente alguns dos muitos métodos para apoio multicritério à decisão. Apresentamos os métodos separados em diferentes categoriais, mas não podemos deixar de referir que esta classificação é de certa forma arbitrária e discutível. A primeira categoria de métodos que apresentamos refere-se a métodos que procuram atribuir um valor global a cada alternativa, agregando os seus desempenhos em vários critérios. Os métodos da segunda categoria

caracterizam-se por construir e explorar relações binárias entre as alternativas. Na última categoria incluímos métodos que funcionam de forma interactiva, intercalando fases de diálogo com fases de cálculo. Esta classificação é semelhante à apresentada por Dias (2000), no entanto, diferentes classificações dos métodos de apoio multicritério à decisão podem ser encontradas, por exemplo, em Roy (1985), Vincke (1992), Roy e Bouyssou (1993), e Belton e Stewart (2002):

- Métodos que atribuem um valor global a cada alternativa: MAUT (“Multi-Attribute Utility Theory”) (Keeney e Raiffa, 1976), MAVT (“Multi-Attribute Value Theory”) (Watson e Buede, 1987), AHP (“Analytic Hierarchy Process”) (Saaty, 1980), OWA (“Ordered Weighted Average”) (Yager, 1988), SMART (“Simple Multi-Attribute Rating Technique”) (Edwards, 1977), SMARTS (“SMART using Swings”) e SMARTER (“SMART Exploiting Ranks”) (Edwards e Barron, 1994).
- Métodos *Outranking*: ELECTRE (“ELimination Et Choix Traduisant la REalité”) e suas variantes (Roy e Bouyssou, 1993), PROMETHEE (“Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations”) (Brans e Vincke, 1985), ORESTE (“Organization Rangement Et Synthèses de donnés relaTionnElles”) (Roubens, 1982), QUALIFLEX (“QUALItative and FLEXible assessment REGIME”) (Paelinck, 1978), TACTIC (“Traitement des Actions Compte Tune de l’Importance des Critères”) (Vansnick, 1986), MELCHIOR (“Méthode d’ELimination et de Choix Incluant les ralation d’ORDre”) (Leclercq, 1984), MAPPAC (“Multicriterion Analysis of Preferences by means of Pairwise Alternatives and Criterion comparisons”) (Matarazzo, 1986), PRAGMA (“Preference RAnking Global frequencis in Multicriterion Analysis”) (Matarazzo, 1987).
- Métodos interactivos: TRIMAP (Clímaco e Antunes, 1987), STEM (“Step Method”) (Benayoun et al., 1971), Pareto Race (Korhonen e Wallenius, 1988), ICW (“Interval Criterion Weights”) (Steuer, 1986), Zionts e Walleniuns (Zionts e Wallenius, 1983).

Apresentamos apenas alguns métodos que se podem enquadrar em cada uma das diferentes categorias, no entanto mais métodos poderiam ser referidos. Além disso, existem outros métodos que não se enquadram na classificação anterior, que é o caso dos métodos que Vincke (1992) denomina de Métodos Elementares. Exemplos de Métodos Elementares são o “Lexicographic Method”, o “Sum of Ranks” (“Borda’s Method”), a “Majoriry Rule” (“Condorcet’s Method”) e os “Adjustment Methods” (ver, por exemplo, a revisão apresentada por Vincke (1992)). Existem ainda métodos cujo objectivo é parametrizar os modelos associados com os diferentes métodos. Podemos referir o UTA (“UTilités Aditives”) (Jacquet-Lagrèze e Siskos, 1982) e o MACBETH (“Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation TecHnique”) (Bana e Costa e Vansnick, 1994), para as funções de valor aditivas, e o DIVAPIME (Mousseau, 1993), para os métodos ELECTRE.

A escolha de que método é mais apropriado depende do problema a ser estudado e também pode depender de qual é o modelo com o qual o decisor se sente mais confortável. Ao longo deste trabalho focamo-nos na teoria de valor / utilidade multicritério (MAVT / MAUT), que tem a vantagem de tanto poder ser utilizada no contexto da problemática da escolha, como no contexto das problemáticas da ordenação e da afectação.

### 2.2.2 Sistemas de Apoio Multicritério à Decisão

Como referido por Tervonen (2010: 1):

The scientific MCDA community has produced a vast amount of *useful* methods, but a majority of them aren't supported by *usable* software.

Apesar da observação de Tervonen ser bastante pertinente já existem diversos sistemas de apoio à decisão (“Decision Support Systems” - DSS) (ver, por exemplo, Weistroffer et al., 2005). Os DSS são sistemas de informação computadorizados com o objectivo de auxiliar actividades relacionadas com a decisão. Dentro das muitas vantagens da utilização de DSS podemos referir o facto de aumentar o número de alternativas que podem ser analisadas e originar poupança de custos e de tempo, agilizando assim a resolução de problemas e facilitando respostas mais rápidas a situações inesperadas. Além disso o uso de DSS também pode facilitar a comunicação inter-pessoal, tornando o trabalho de equipa mais eficaz, e pode melhorar a utilização dos recursos e aumentar a eficiência pessoal e o controlo organizacional. A utilização de DSS também pode encorajar a exploração e a descoberta por parte do decisor, promovendo a aprendizagem e o treino, e desta forma pode melhorar o entendimento dos assuntos em questão e originar melhores decisões. Os DSS revelam também novas aproximações para pensar no problema e ajudam a automatizar os processos administrativos. É no entanto importante referir que o objectivo dos DSS não é de forma alguma substituir o decisor, é apenas apoiar a tomada de decisões.

Considera-se que o conceito de DSS se tornou ele próprio como uma área de investigação nos meados dos anos 70, ganhando maior intensidade durante os anos 80. Em meados e fins dos anos 80 desenvolveram-se EIS (“Executive Information Systems”), GDSS (“Group Decision Support Systems”) e ODSS (“Organizational Decision Support Systems”).

Weistroffer et al. (2005) apresentam uma colecção bastante completa de softwares relacionados com o apoio multicritério à decisão. Os autores organizam os softwares existentes em sete diferentes áreas, áreas essas baseadas no tipo de problema para o qual cada software é aplicado:

- Estruturação qualitativa do problema: Decision Explorer.

- Apoio multicritério à decisão<sup>1</sup>: Criterium Decision Plus, DAM (“Decision Analysis Module”), Decision Lab, ELECCALC, ELECTRE IS, ELECTRE III-IV, Equity, Expert Choice, HIVIEW, Logical Decisions, MACBETH, MacModel, M&P, MIIDAS, MINORA, MUSTARD, NAIADE (“Novel Approach to Imprecise Assessment and Decision Environments”), OnBalance, PREFCALC, PRIAM (“PRogramme utilisant l’Intelligence Artificielle en Multicritère”), PRIME Decisions, RGDB (“Reasonable Goals for Database”), SANNA, TOPSIS (“The Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution”), UTA Plus, VIMDA, VIP Analysis (“Variable Interdependent Parameter Analysis”), V.I.S.A (“Visual Interactive Sensitivity Analysis”), Web-HIPRE, WINPRE.
- Apoio multiobjectivo à decisão<sup>2</sup>: ADBASE, FGM (“Feasible Goals Method”), FSCS (“Feasible Set in Criterion Space”), MOMHLib++, MultiGen, Multistat Optimizer, SOLVEX, TRIMAP, TOMMIX, VIG, WWW-NIMBUS.
- Problemas de classificação multicritério: ELECTRE TRI, IRIS, PREFDIS, PROAFTH, TOMASO.
- Análise de portfolios: HiPriority.
- Apoio à decisão em grupo: AGAP (“Aid to Groups for Analysis and evaluation of Projects”), ARGOS, CTLite (“ClearThinking Lite”), GMCR (“Graph Model for Conflict Resolution”), Joint Gains, MEDIATOR, SCDAS (“Selection Committee Decision Analysis and Support”), WINGDSS.
- Softwares específicos de aplicações: ACADEA, AgentAllocator, AutoMan, BANKADVISOR, CASTART, CGX, DIDASN++, DIMITRA, Electrical Power Districting, ESY (“Evaluation SYstem”), FINCLAS (“The Financial Classification”), FINEVA, INVEX (“Investment Advisory expert system”), MARKEX (“Market Expert”), MEDICS, MOIRA, SANEX, Skills Evaluator, Steel Mill Scheduling, TELOS, Water Quality Planning.

A utilização de sistemas de apoio à decisão faz com que diferentes métodos possam ser mais facilmente utilizáveis pelos intervenientes no processo de decisão.

---

<sup>1</sup>Os autores utilizam esta designação para referir softwares concebidos para lidar com problemas em que o decisor deve escolher de um conjunto finito de alternativas, caracterizadas por um conjunto de múltiplos critérios.

<sup>2</sup>Os autores utilizam esta designação para referir softwares concebidos para lidar com problemas que podem envolver funções objectivo e restrições lineares ou não lineares, e podem ter variáveis de decisão contínuas ou inteiras. O conjunto de alternativas é definido em compreensão, ou seja, é definido pelas restrições a que todos os seus elementos têm de obedecer.

### 2.2.3 Intervenientes no processo de decisão

Os intervenientes num processo de decisão são pessoas e como tal têm diferentes metas, diferentes prioridades e diferentes perspectivas. O conjunto dos intervenientes varia de processo de decisão para processo de decisão. Os intervenientes que não são decisores participarão sobretudo com o objectivo de partilhar opiniões, informações e conhecimento. Segundo Dias (2002), são muitas as pessoas, entidades ou grupos que poderão entrar num processo de decisão:

- Actores: um indivíduo, ou um grupo de indivíduos, é um actor de um processo de decisão se ele influencia directa ou indirectamente a decisão. Diz-se que a influência é directa quando o actor intervém no processo de decisão, e indirecta quando as suas opiniões são tidas em conta por aqueles que intervêm directamente no processo de decisão.
- Participantes: são os actores que condicionam directamente o processo de decisão.
- Decisor: chama-se decisor ao interveniente no processo de decisão responsável por coordenar o grupo dos intervenientes e tomar uma decisão, é quem indica objectivos e expressa preferências. Em muitas circunstâncias não existe um decisor único, mas sim múltiplos decisores que coordenam conjuntamente as actividades, tendo neste caso aquilo a que se chama decisão colectiva.
- Analista: é o especialista em apoio à decisão, que pode ser um dos intervenientes ou um consultor externo.

Além destas pessoas, Roy (1985) refere ainda cliente. Roy considera que se o analista e o decisor são pessoas diferentes existe normalmente pouco contacto directo entre eles, aparecendo um terceiro interveniente (o cliente), que faz a ligação entre os dois anteriores. O cliente é a pessoa que requer o estudo e é responsável pela alocação dos meios necessários para o conduzir.

### 2.2.4 Valores *versus* alternativas

Para Keeney (1992) as decisões devem ser conduzidas pelos valores dos decisores, apesar de habitualmente os decisores se centrarem nas alternativas, sendo comum caracterizar os problemas de decisão pelas alternativas com que se deparam. Keeney considera que os valores são mais importantes para o problema de decisão do que as alternativas e justifica, perguntando porque nos damos ao trabalho de escolher uma alternativa e não deixamos simplesmente que as coisas aconteçam. A justificação apresentada é a de que as consequências das alternativas podem ser suficientemente diferentes em termos dos nossos valores. As alternativas são apenas os meios para conseguir encontrar os valores fundamentais. Podemos identificar os nossos valores, pensando no que queremos encontrar e no que queremos ter. Segundo a opinião de Keeney, devemos passar grande parte do nosso processo

de decisão a pensar naquilo que é realmente importante. Isto leva-nos por um lado a criar melhores alternativas do que aquelas já identificadas e por outro lado a analisar com mais cuidado as desvantagens das alternativas.

Com base no que foi dito, existe distinção entre *alternative-focused thinking*, em que os decisores se focam nas alternativas, e *value-focused thinking*, em que os decisores se focam nos valores. Centrarmo-nos nos valores significa começar pelo desejável e trabalhar para torná-lo realidade, focarmo-nos nas alternativas implica começar pelo que está prontamente disponível e escolher o melhor. Ao longo deste trabalho damos maior relevância à escolha da melhor alternativa, ou seja, focamo-nos no processo de avaliação de um conjunto de alternativas já definido. Porém, não deixamos de concordar que os valores devem ter um papel importante na definição desse conjunto.

### 2.2.5 Conjunto de alternativas e problemáticas de Apoio Multicritério à Decisão

Num problema de decisão deparamo-nos frequentemente com um conjunto de alternativas, das quais devemos escolher uma. Antes desta escolha se processar existe um processo natural de eliminação de alternativas que pareçam não interessar, processo esse que muitas vezes é feito mentalmente. Estes problemas de decisão são caracterizadas por “escolher a melhor entre as alternativas”. No entanto, em geral o apoio à decisão não consiste apenas na descrição das potenciais alternativas e das possíveis consequências da tomada de uma decisão. Devemos identificar qual das problemáticas seguintes estamos a considerar:

- Problemática da descrição: consiste em descrever a situação de decisão numa linguagem formal e adequada. O decisor pretende apenas compreender melhor a situação e estabelecer uma linguagem para a comunicação entre os actores.
- Problemática da escolha (ou da selecção): consiste em escolher um subconjunto de alternativas mais restrito que possibilita posteriormente a escolha de apenas uma alternativa.
- Problemática da afectação (ou da triagem ou da classificação): consiste em afectar as alternativas a categorias definidas à priori.
- Problemática da ordenação (ou da seriação): consiste em ordenar as alternativas da mais preferida para a menos preferida.

Deve-se a Roy (1985) a definição destas quatro problemáticas de apoio à decisão.

Existem pontes entre as temáticas de ordenação e de classificação, porquanto se poderá considerar que a classificação ordinal, onde as classes são ordenadas por ordem de preferência, constitui uma forma de procurar ordenar de forma fraca um conjunto de alternativas. As problemáticas da escolha e ordenação referem-se à avaliação relativa das alternativas confrontando-as entre si. Na avaliação relativa utilizam-se os conceitos de melhor e pior,

uma vez que as alternativas são directamente comparadas umas com as outras. A problemática de afectação refere-se à avaliação absoluta das alternativas confrontando-as com padrões pré-definidos, padrões esses que são elementos de fronteira entre categorias ou alternativas de referência (Dias, 2000). Na avaliação relativa as alternativas são comparadas directamente entre si, não estando em causa os seus valores absolutos. Na avaliação absoluta cada alternativa é comparada, independentemente das outras alternativas, com normas de referência. Assim, o facto de uma alternativa particular se revelar a melhor em termos relativos não significa que ela seja boa em termos absolutos.

As alternativas são assim os elementos sujeitos a avaliação durante o processo de decisão. Ao longo deste texto, vamos representar por  $A = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}\}$  o conjunto das  $m$  alternativas e iremos focar-nos nas problemáticas da escolha e da ordenação.

### 2.2.6 Pontos de vista e critérios

Em muitas circunstâncias, não existe um decisor único, mas sim múltiplos decisores que coordenam conjuntamente as actividades. Quer se trate de uma decisão individual ou colectiva, as alternativas possíveis são geralmente avaliadas por um conjunto de pontos de vista contraditórios, sendo raras as ocasiões em que uma única alternativa se apresenta como a melhor segundo todos os pontos de vista. Não se pode portanto falar de encontrar a alternativa óptima, tal como resulta dos problemas clássicos de optimização, mas de encontrar a melhor de acordo com as preferências dos decisores. Bana e Costa (1992) considera que todo o aspecto que seja percebido como importante para a avaliação das alternativas é um Ponto de Vista Elementar (PVE), reunindo e interligando as características das alternativas e os valores dos decisores. A construção de um modelo para avaliar alternativas envolve a procura de um conjunto de Pontos de Vista Fundamentais (PVF). Os PVF podem agrupar vários PVE, por forma a serem aceitáveis para todos os actores e serem isoláveis entre si. Por isoláveis entende-se que a avaliação das alternativas segundo um PVF não depende de nenhum outro PVF.<sup>3</sup>

Apenas os pontos de vista identificados como fundamentais serão considerados como critérios. Como referem Salo e Punkka (2005), nos métodos de decisão multicritério os problemas de decisão são estruturados associando critérios mensuráveis aos pontos de vista que são relevantes para o decisor<sup>4</sup>. Os pontos de vista podem ser organizados sob a forma de árvore de modo a facilitar a sua compreensão por parte dos intervenientes. Assim, Keeney (1992) considera que deverá ser escolhido um conjunto de pontos de vista que seja:

- Essencial (ou relevante): por indicar apenas as consequências relevantes para o processo de decisão.

---

<sup>3</sup>Keeney (1992) optou por usar o conceito de “objectivo” em vez de “ponto de vista”. Usou assim as designações “objectivos elementares” e “objectivos fundamentais” em vez de “pontos de vista elementares” e “pontos de vista fundamentais”.

<sup>4</sup>Por exemplo, na compra de um carro, a beleza é um ponto de vista não se pode medir, sendo necessário atribuir-lhe um critério mensurável.



- Controlável: por se referir às consequências que são influenciadas apenas pela escolha de alternativas no contexto de decisão.
- Completo: por incluir todos os aspectos fundamentais das várias alternativas.
- Mensurável: por definir os pontos de vista e especificar os meios como podem ser atingidos.
- Operacional: por fornecer a informação requerida para uma análise consistente, considerando o tempo e esforço disponíveis.
- Decomponível: por permitir a separação dos diferentes pontos de vista em análise.
- Conciso: por reduzir ao mínimo o número de pontos de vista necessários, ou seja, o nível de detalhe.
- Compreensível: por ser entendido por todos os intervenientes.

Segundo Roy (1985), existem três propriedades, que dizem respeito à interligação de critérios, para que um conjunto de pontos de vista possa ser considerado uma família coerente de critérios:

- Exaustividade: todos os critérios necessários para a tomada da decisão têm de estar presentes. Se a avaliação de duas alternativas for igual segundo todos os critérios do conjunto então devemos considerar que as duas alternativas são indiferentes, caso contrário o conjunto de critérios não será exaustivo.
- Coesão: se a avaliação da alternativa  $x^{(j)}$  é igual à da alternativa  $x^{(k)}$  em todos os critérios, excepto num, e se nesse a alternativa  $x^{(j)}$  é melhor, então devemos considerar que a alternativa  $x^{(j)}$  não é pior do que a alternativa  $x^{(k)}$ .
- Não redundância: o conjunto dos critérios deve ser tal que a eliminação de um deles faria com que pelo menos uma das propriedades anteriores não se verificasse.

Desta forma, um critério  $c_i, i = 1, \dots, n$  é uma ferramenta para ajudar a avaliar diferentes alternativas sob um ponto de vista definido da melhor forma possível. Esta avaliação dá-nos o desempenho (ou *performance*) de cada alternativa considerando aquele critério.

### 2.2.7 Desempenhos e escalas

No caso em que o conjunto das alternativas e o conjunto dos critérios está definido, e no caso do conjunto das alternativas ser definido em extensão, pode construir-se uma tabela de desempenhos, também chamada matriz de impacto ou matriz de incidência. Trata-se de uma tabela de duas entradas, na qual o elemento na linha  $j$  e coluna  $i$  indica o desempenho da alternativa  $x^{(j)}$  considerando o critério  $c_i$ .

Normalmente o desempenho é um número, mas pode acontecer que o desempenho seja um intervalo (é indicado um intervalo de valores para o desempenho de uma alternativa segundo um determinado critério), um cenário (o desempenho de uma alternativa segundo um determinado critério consiste num vector de valores, um para cada estado da natureza<sup>5</sup>), uma distribuição de probabilidade (o desempenho de uma alternativa segundo um determinado critério é uma variável aleatória discreta ou contínua) ou um número difuso (o desempenho da alternativa  $x^{(j)}$  segundo o critério  $c_i$  quantifica o grau de pertença de  $x^{(j)}$  ao conjunto difuso “satisfaz no critério  $c_i$ ”) (Dias, 2002). O desempenho de uma alternativa considerando determinado critério também pode ser definido por níveis qualitativos, não necessariamente convertidos em números. Temos como exemplo os desempenhos “muito mau”, “mau”, “razoável”, “bom” e “muito bom”.

Quando comparamos duas alternativas segundo um determinado critério, comparamos dois níveis de resultados para avaliar o seu desempenho. Estes níveis são os que constituem uma determinada escala, que pode ser:

- Escala nominal (para dados qualitativos): os dados expressos numa escala nominal apresentam-se em diferentes categorias ou classes, ordenáveis ou não.
- Escala ordinal (para dados qualitativos): as diversas categorias possuem uma ordem intrínseca.
- Escala de intervalo (para dados quantitativos): os dados podem ser ordenados e a diferença entre dois valores desta escala pode ser calculada e interpretada.
- Escala de razões ou de rácios (para dados quantitativos): tem todas as características de uma escala de intervalo e, além disso, o valor zero representa a ausência total da característica que está a ser medida.

## 2.3 Funções de Utilidade / Valor - Modelo Aditivo

Depois de fazer um enquadramento geral ao Apoio Multicritério à Decisão vamos agora referir a utilização de funções de utilidade / valor, em particular o modelo aditivo. Este é o método que escolhemos utilizar, com o intuito de ordenar um conjunto de alternativas ou com o intuito de escolher a melhor, ou as melhores, tendo em conta múltiplos critérios.

---

<sup>5</sup>Os estados da natureza podem ser definidos como “cenários” distintos para representar “futuros plausíveis”.

### 2.3.1 Teoria de Utilidade *versus* Teoria de Valor

O objectivo da Teoria de Utilidade Multicritério é permitir avaliar a utilidade de cada alternativa, considerando-se que esta é tão melhor quanto maior for a sua utilidade. Segundo esta teoria, face a um conjunto de alternativas com consequências distintas consoante o cenário que ocorrer, após a atribuição de valores numéricos que expressem as utilidades das várias consequências e de valores numéricos que expressem as probabilidades em cada cenário, a alternativa que deve ser escolhida é aquela que maximizar a utilidade esperada (Dias, 2002). Existem diferentes atitudes face ao risco que têm implicação directa na forma da função de utilidade  $u(\cdot)$ . Segundo Keeney e Raiffa (1976):

- o decisor é propenso ao risco se e só se a função de utilidade é convexa, isto é, se

$$\lambda u(x^{(j)}) + (1 - \lambda)u(x^{(k)}) \geq u(\lambda x^{(j)} + (1 - \lambda)x^{(k)}), \quad (2.1)$$

para  $x^{(j)}$  e  $x^{(k)} \in A$  e  $\lambda \in [0, 1]$ ;

- o decisor mostra aversão ao risco se e só se a função de utilidade é côncava, isto é, se

$$\lambda u(x^{(j)}) + (1 - \lambda)u(x^{(k)}) \leq u(\lambda x^{(j)} + (1 - \lambda)x^{(k)}), \quad (2.2)$$

para  $x^{(j)}$  e  $x^{(k)} \in A$  e  $\lambda \in [0, 1]$ ;

- o decisor é indiferente ao risco se e só se a função de utilidade é linear, isto é, se

$$\lambda u(x^{(j)}) + (1 - \lambda)u(x^{(k)}) = u(\lambda x^{(j)} + (1 - \lambda)x^{(k)}), \quad (2.3)$$

para  $x^{(j)}$  e  $x^{(k)} \in A$  e  $\lambda \in [0, 1]$ .

A Teoria de Valor Multicritério pode ser vista como uma simplificação da Teoria de Utilidade Multicritério. Ao contrário da última, a teoria de valor multicritério não necessita de modelar a atitude do decisor face ao risco, o que torna o processo de eliciação mais fácil. As funções de valor devem ser usadas em situações onde as consequências são certas, enquanto que as funções de utilidade devem ser usadas em situações em que existem diferentes cenários, aos quais se associam diferentes probabilidades. A função de utilidade apenas coincide com a função de valor se o decisor for indiferente face ao risco. No entanto, por exemplo, Winterfeldt e Edwards (1986) consideram que a distinção entre função de valor e função de utilidade é questionável. Ao longo deste texto optamos por nos referir apenas à função de valor, já que as duas funções são semelhantes em termos dos cálculos a efectuar e do tratamento de que vão ser alvo, sem prejuízo da sua aplicabilidade a funções de utilidade.

### 2.3.2 Características e axiomas da Teoria de Valor

Uma das principais características da teoria de valor multicritério é a forma como representa as preferências individuais por uma função de valor  $v(\cdot)$ , de tal forma que:

- .  $v(x^{(k)}) > v(x^{(j)})$  se e só se a alternativa  $x^{(k)}$  é preferida à alternativa  $x^{(j)}$ ;
- .  $v(x^{(k)}) = v(x^{(j)})$  se e só se a alternativa  $x^{(k)}$  é indiferente à alternativa  $x^{(j)}$ ;
- .  $v(x^{(i)}) - v(x^{(j)}) \geq v(x^{(k)}) - v(x^{(l)})$  se e só se a diferença de atractividade (intensidade de preferência) de  $x^{(i)}$  para  $x^{(j)}$  não é inferior à diferença de atractividade de  $x^{(k)}$  para  $x^{(l)}$ .

Para esta representação ser possível as preferências individuais devem satisfazer os axiomas seguintes (Winterfeldt e Edwards, 1986; Gal et al., 1999):

- Transitividade: dadas três alternativas  $x^{(i)}$ ,  $x^{(j)}$  e  $x^{(k)}$ , se o decisor preferir  $x^{(i)}$  a  $x^{(j)}$  e  $x^{(j)}$  a  $x^{(k)}$ , então deve preferir  $x^{(i)}$  a  $x^{(k)}$ .
- Comparabilidade: dadas duas alternativas,  $x^{(k)}$  e  $x^{(j)}$ , e um contexto específico, o decisor deve ser capaz de indicar se prefere  $x^{(k)}$  a  $x^{(j)}$ , ou  $x^{(j)}$  a  $x^{(k)}$ , ou é indiferente entre estas duas alternativas.
- Conectividade: perante dois pares de alternativas, o decisor deve conseguir indicar se a diferença de atractividade entre as alternativas do primeiro par é maior, menor ou igual à diferença de atractividade entre as alternativas do segundo par.
- Aditividade: dadas três alternativas  $x^{(i)}$ ,  $x^{(j)}$  e  $x^{(k)}$  tais que  $x^{(i)}$  seja preferível a  $x^{(j)}$  e  $x^{(j)}$  preferível a  $x^{(k)}$ , então a diferença de atractividade de  $x^{(i)}$  sobre  $x^{(k)}$  não deve ser inferior à diferença de atractividade de  $x^{(i)}$  sobre  $x^{(j)}$  nem inferior à diferença de atractividade de  $x^{(j)}$  sobre  $x^{(k)}$ .
- Cancelamento: se a diferença de atractividade de  $x^{(i)}$  sobre  $x^{(j)}$  não é inferior à diferença de atractividade de  $x^{(i^1)}$  sobre  $x^{(j^1)}$  e se a diferença de atractividade de  $x^{(j)}$  sobre  $x^{(k)}$  não é inferior à diferença de atractividade de  $x^{(j^1)}$  sobre  $x^{(k^1)}$ , então a diferença de atractividade de  $x^{(i)}$  sobre  $x^{(k)}$  não deve ser inferior à diferença de atractividade de  $x^{(i^1)}$  sobre  $x^{(k^1)}$ .
- Continuidade: o conjunto de alternativas deve ser suficientemente rico para que se possam formular equações de indiferença (explicado mais à frente na Subsecção 2.3.4) sobre a diferença de atractividade entre pares de alternativas.
- Arquimedes: não devem existir alternativas com valor infinito.

### 2.3.3 Função de Valor Aditiva

Uma das primeiras tarefas na aplicação da teoria de valor multicritério é atribuir valores a níveis de desempenho, definindo uma função de valor associada a cada critério. Outra tarefa é a atribuição dos pesos (que representamos por  $w_i, i = 1, \dots, n$ ) às funções de valor, para que as componentes possam ser agregadas. Outras designações utilizadas, para os  $w_i$ , são coeficientes de escala, constantes de escala ou ponderações. A designação constantes de escala é considerada a mais consensual, no entanto vamos usar a designação pesos, para tornar o texto mais conciso e usar uma linguagem mais próxima do utilizador comum. Os pesos dos critérios são frequentemente interpretados de modo incorrecto, como indicando a importância relativa dos critérios. No entanto, os pesos dos critérios não indicam a importância relativa dos mesmos, mas sim a importância relativa de mudar o nível de desempenho no critério respectivo do seu pior nível (nível com valor igual a zero) para o seu melhor nível (nível com valor igual a um), especificado pela decisão em consideração, comparado com o aumento do nível zero para o nível um no desempenho noutro critério. Os pesos devem ser atribuídos cuidadosamente para assegurar que os resultados da avaliação sejam consistentes com as preferências do decisor. Os procedimentos rigorosos utilizados para questionar os decisores acerca dos valores para os pesos<sup>6</sup>, conduzem a dificuldades na obtenção de respostas precisas. Trata-se de questões acerca de quanto estariam os decisores dispostos a perder na escala de valor associada a um dado critério, para obter em compensação um certo ganho noutro critério.

Depois dos pesos serem atribuídos as componentes do modelo multicritério podem ser agregadas. Os dois métodos de agregação predominantes na teoria de valor multicritério são os modelos aditivo e multiplicativo. O modelo mais utilizado na prática é o modelo aditivo, e é geralmente expresso da seguinte forma:

$$v(x^{(j)}) = \sum_{i=1}^n w_i v_i(x^{(j)}), \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

onde  $w_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n$  que verificam  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  são pesos, e  $v_i(x^{(j)}) \in [0, 1]$  é o valor da alternativa  $x^{(j)}$  considerando o critério  $c_i$ .

Esta forma de função de valor só é válida se for verificada a condição de independência aditiva entre os vários critérios (ver Keeney e Raiffa, 1976). Esta condição diz basicamente que a diferença de valor entre duas alternativas, que tenham o mesmo nível em alguns critérios, deve manter-se, caso estes critérios se fixem noutro nível, desde que continuem em igualdade. Além desta condição, Stewart (1996) refere que as componentes da função de valor aditiva, usadas da forma anterior, devem ainda satisfazer as seguintes propriedades: os valores  $v_i(x^{(j)})$  devem obrigatoriamente pertencer a uma escala intervalar de preferên-

---

<sup>6</sup>Iremos referir alguns destes procedimentos na Subsecção 2.3.4.

cias, ou seja, iguais incrementos nesta escala têm o mesmo valor incremental para o decisor independentemente do valor base; independentemente de como os pesos são avaliados, eles devem ser interpretados em termos de *trade-offs*, ou seja, se um incremento  $\tau_i$  em  $v_i(x^{(j)})$  é suficiente para compensar um decréscimo  $\tau_k$  em  $v_k(x^{(j)})$ , então  $\frac{w_i}{w_k}$  deverá ser igual a  $\frac{\tau_k}{\tau_i}$ .

Se a condição de independência aditiva não for verificada, pode ser usado o modelo multiplicativo, onde apenas é exigida uma condição de independência mais fraca (ver Keeney e Raiffa, 1976). No entanto, ao longo deste trabalho, vamos referir apenas o modelo aditivo. O modelo multiplicativo relaxa um pouco as condições do modelo aditivo mas é mais difícil de explicar ao decisor. Stewart (1995) fez um estudo, em que utilizou simulação Monte Carlo, para comparar o modelo aditivo com o modelo multiplicativo e verificou que as conclusões são semelhantes usando os dois modelos. A substituição do modelo aditivo pelo modelo multiplicativo tem apenas um pequeno efeito na qualidade da ordenação, ou seja, a ordenação fornecida por um dos modelos é ligeiramente melhor do que a ordenação fornecida pelo outro modelo.

Apesar da forma aditiva permitir uma certa simplificação nos modelos que iremos formular, as aproximações apresentadas não dependem completamente da aditividade da função de valor e, com algumas adaptações, podem ser estendidas a outras formas, como funções bilineares ou multilineares (Keeney e Raiffa, 1976).

Como já referido, Raiffa (1982) defende a utilização dos modelos aditivos argumentando que eles são preferíveis devido à sua robustez, transparência e desenvolvimento simples. Porém, existem algumas críticas a este modelo. Além das críticas que já referimos na Secção 1.1, Stewart (1996) destaca ainda as seguintes: apesar dos cálculos a serem realizados serem simples, o diálogo entre o analista e o decisor poderá não ser assim tão simples; o modelo aditivo é sensível a mudanças dinâmicas e preferências imprecisas e desta forma, uma vez que as pessoas tendem a mudar as suas preferências, uma alternativa não deve ser declarada vencedora se uma pequena perturbação no modelo a substitui por outra; além disso, o modelo aditivo é sensível à omissão de critérios. Devido a estas limitações, Stewart (1996) utilizou simulação Monte Carlo para estudar a robustez da função de valor aditiva. Stewart simulou o uso da função de valor aditiva, para obter uma ordenação das alternativas, para uma variedade de contextos e sob algumas condições não ideais, como a omissão de critérios, perturbação de critérios e respostas inconsistentes. O autor considera que as preferências são bem identificadas pela função de valor aditiva se a diferença entre o ideal e o não ideal não é grande, e se é feito um esforço suficiente para modelar as alterações do valor de dada alternativa para determinado critério para diferentes níveis de desempenho. O objectivo de Stewart foi avaliar como os resultados obtidos por este método são sensíveis a algumas suposições que se sabe que, em algumas circunstâncias, são violadas nos problemas reais.

### 2.3.4 Eliciação dos valores dos parâmetros

Os pesos dos critérios constituem habitualmente os parâmetros mais difíceis de obter com precisão. Além da avaliação directa, que consiste em pedir ao decisor para indicar o valor dos pesos, Goodwin e Wright (2004) referem duas técnicas para atribuição dos pesos no modelo aditivo: técnica dos *swings* e técnica das equações de indiferença<sup>7</sup>. O primeiro passo na técnica dos *swings* e na técnica das equações de indiferença é ordenar os pesos dos critérios, tomando a função de valor de maior peso como referência nas questões que são depois colocadas (ver Keeney e Raiffa, 1976 e Winterfeldt e Edwards, 1986).

A técnica dos *swings* consiste basicamente em imaginar a alternativa  $x^{(j)}$ , tal que  $v_i(x^{(j)}) = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  e escolher o critério  $c_i$  em que mais se preferia passar de  $v_i(x^{(j)}) = 0$  para  $v_i(x^{(j)}) = 1$ . Se esse *swing* vale 100 pontos quantos pontos valerá a transição correspondente noutra critério? Por exemplo, imagine-se uma casa má (preço mau, área má, conforto mau e localização má). Se se pudesse melhorar um, e apenas um critério para excelente, qual escolheríamos? Se a resposta fosse preço então esse *swing* valeria 100 pontos. E então continuava-se: e se não se pudesse passar o preço de mau para excelente, qual escolheríamos? O *swing* a atribuir neste caso seria obtido por comparação com o padrão anterior. Depois deste diálogo é habitual normalizar os pesos.

A técnica das equações de indiferença tem em conta que os pesos definem *trade-offs* entre critérios que podem ser obtidos por equações de indiferença. Por exemplo, se a alternativa  $x^{(j)}$ , cujos valores parciais são  $v_1(x^{(j)}), v_2(x^{(j)}), v_3(x^{(j)}), \dots, v_n(x^{(j)})$ , é indiferente à alternativa  $x^{(k)}$ , cujos valores parciais são  $v_1(x^{(j)}) - r, v_2(x^{(j)}) + 1, v_3(x^{(j)}), \dots, v_n(x^{(j)})$ , então da equação:

$$\begin{aligned} w_1 v_1(x^{(j)}) + w_2 v_2(x^{(j)}) + w_3 v_3(x^{(j)}) + \dots + w_n v_n(x^{(j)}) &= \\ = w_1 [v_1(x^{(j)}) - r] + w_2 [v_2(x^{(j)}) + 1] + w_3 v_3(x^{(j)}) + \dots + w_n v_n(x^{(j)}), & \quad (2.5) \end{aligned}$$

conclui-se que  $\frac{w_2}{w_1}$  é igual a  $r$ , onde  $r$  é a taxa de conversão (ou compensação) entre  $w_2$  e  $w_1$ . O valor de  $r$  pode ser pedido ao decisor em questões relativas a diferentes pares de critérios.

Os valores de cada alternativa em cada critério podem ser determinados através de estimação numérica ou através de técnicas de indiferença, como por exemplo, o método da bissecção (Winterfeldt e Edwards, 1986)<sup>8</sup>.

<sup>7</sup>Determinar os pesos dos critérios pode também ser feito, por exemplo, usando o método *pricing-out* (Keeney e Raiffa, 1976) e usando o método dos rácios (Winterfeldt e Edwards, 1986).

<sup>8</sup>Dentro dos métodos de estimação numérica pode encontrar-se a avaliação directa (apesar desta não ser exactamente um técnica), a selecção de uma curva e julgamentos semânticos. Dentro das técnicas de indiferença pode ainda encontrar-se a estimação de parâmetros e a técnica da sequência de diferenças *standard* (ver Beinat, 1997).

No método da bissecção, são apresentadas ao decisor duas alternativas e pedido que defina o nível do critério que está a meio das alternativas, com respeito à força relativa das preferências. Para cada critério  $c_i$ , primeiro são identificados os dois pontos extremos, ou seja, a alternativa menos preferida  $x^{i(min)}$  e a alternativa mais preferida  $x^{i(max)}$ , e associados aos valores  $v_i(x^{i(min)}) = 0$  e  $v_i(x^{i(max)}) = 1$ . Entretanto pede-se ao decisor para definir um ponto médio  $m_1$ , para o qual  $v_i(x^{i(min)}) - v_i(m_1)$  seja equivalente a  $v_i(m_1) - v_i(x^{i(max)})$ . Como  $m_1$  está no meio da escala de valores, deve ter-se  $v_i(m_1) = \frac{1}{2}v_i(x^{i(min)}) + \frac{1}{2}v_i(x^{i(max)}) = 0.5$ . Para o ponto médio entre  $x^{i(min)}$  e  $m_1$ ,  $m_2$ , e o ponto médio entre  $m_1$  e  $x^{i(max)}$ ,  $m_3$ , tem-se  $v_i(m_2) = \frac{1}{2}v_i(x^{i(min)}) + \frac{1}{2}v_i(m_1) = 0.25$  e  $v_i(m_3) = \frac{1}{2}v_i(m_1) + \frac{1}{2}v_i(x^{i(max)}) = 0.75$ . São determinados de forma similar pontos médios adicionais até que a escala de valor esteja definida com a precisão desejada.

## 2.4 Utilização de informação incompleta

Uma vez que a construção das funções de valor para cada critério, e a atribuição dos valores dos pesos, requer a eliciação de preferências dos decisores, que é normalmente problemática, ao longo deste trabalho permitimos que os decisores forneçam informação incompleta, que se caracteriza por não conduzir a uma combinação de valores precisos para os parâmetros dos modelos. Sage e White (1984) propuseram o modelo Teoria da Utilidade Multiatributo Especificada Imprecisamente (“Imprecisely Specified Multiattribute Utility Theory” - ISMAUT), no qual não é assumida informação completa sobre os pesos e sobre as utilidades. Nesta secção referimos a análise de sensibilidade e fazemos uma revisão da literatura de diversas aproximações que têm como objectivo contornar a dificuldade associada com a eliciação de valores precisos para os parâmetros<sup>9</sup>. Na revisão que fazemos separamos os métodos em diferentes classes, dependendo da metodologia seguida e do objectivo dos mesmos, no entanto existem métodos que poderiam estar simultaneamente em mais do que uma classe.

### 2.4.1 Análises de sensibilidade

Quando não existem certezas acerca do valor que cada parâmetro deve assumir, é habitual efectuarem-se análises de sensibilidade ou análises de robustez. A análise da sensibilidade parte de um primeiro resultado para determinar a gama de variação do valor dos parâmetros compatível com o resultado obtido. Na análise de robustez, procuram encontrar-se conclusões que sejam válidas independentemente do valor que se escolha para os parâmetros, de entre as combinações aceitáveis (Dias, 2000).

---

<sup>9</sup>Esta secção apresenta uma revisão de literatura publicada, em grande parte, em Sarabando e Dias (2010a).



Como referido por Ríos-Insua e French (1991), os valores dos *inputs* são constantemente revistos à medida que o decisor percebe as implicações, e possíveis inconsistências, dos seus julgamentos. A análise da sensibilidade pode focar-se nos *inputs* críticos, os que são mais importantes na determinação da escolha, e portanto precisam de ser revistos de forma mais cuidadosa. A análise da sensibilidade pode assim ser vista como uma forma de estimular o decisor a pensar mais atentamente sobre o seu problema. Ríos-Insua e French (1991) fornecem uma aproximação geral para análise de sensibilidade que permite uma variação simultânea de todos os parâmetros. Os autores utilizam ferramentas baseadas em distâncias para identificar possíveis competidoras de uma determinada alternativa  $x^{(k)}$ . Seja  $x^{(j)}$  uma possível competidora da alternativa  $x^{(k)}$ , o objectivo é saber quanto os parâmetros podem variar antes de  $x^{(j)}$  ultrapassar  $x^{(k)}$ .

Robinson e Soland (1997) são da opinião que a análise de sensibilidade é ela própria uma actividade de análise de decisão, mas aplicada numa fase de pós-optimalidade. Mais especificamente, os autores avaliam de forma geral apenas um modelo relativo às preferências dos decisores e identificam a alternativa preferida com base nesse modelo. No entanto, não consideram que as preferências dos decisores são precisamente conhecidas. Desta forma, analisam se deverão considerar a alternativa indicada pelo modelo de avaliação utilizado, se deverão adiar a decisão, refinando as preferências inexactas, ou se deverão considerar uma outra alternativa. Os autores usam optimização para identificar largos conjuntos de valores dos parâmetros que preservam a preferência da alternativa indicada.

As técnicas de simulação podem ser utilizadas para análise de sensibilidade, como referem Butler et al. (1997), que propõem um método para testar a sensibilidade dos pesos dos critérios. A metodologia proposta por estes autores utiliza simulação Monte Carlo e tem a flexibilidade de variar todos os pesos do modelo simultaneamente, com o objectivo de explorar com mais detalhe a robustez da ordenação das alternativas em modelos multicritério. As três técnicas de simulação estudadas por Butler et al. que permitem este tipo de análise de sensibilidade foram: RW (“Random Weights”), RROW (“Random Rank Order Weights”) e RDW (“Response Distribution Weights”). Na técnica RW considera-se que em casos extremos os pesos podem ser gerados de forma completamente aleatória, não sendo necessária nenhuma informação sobre os mesmos. Esta técnica é útil na medida em que ajuda os decisores a focarem-se nas alternativas que são superiores, independentemente da importância relativa atribuída às funções de valor. No entanto, gerar os pesos de forma completamente aleatória pode ser considerado não razoável se uns critérios são mais importantes do que os outros. Enquanto o valor exacto dos pesos pode ser posto em questão, a ordenação da importância relativa das funções de valor pode ser menos controversa. Assim, a técnica RROW requer uma ordenação da importância dos pesos, que é mais fácil de obter do decisor do que os pesos exactos. A técnica RDW requer a indicação dos pesos, mas reconhece que o procedimento de obtenção dos mesmos é sujeito a variação. A ideia é considerar a avaliação dos pesos como respostas obtidas de uma distribuição de possíveis respostas, e usar simulação para explorar a variação das respostas. Os pesos indi-

cados pelo decisor são tratados como distribuições de probabilidade, e os pesos são gerados a partir destas distribuições. Nestas três técnicas, mais do que chegar a um consenso, o decisor pode testar a sensibilidade das ordenações fornecidas pelo modelo. Estas técnicas de simulação também foram referidas por Jiménez et al. (2003).

Jiménez et al. (2003) consideram que a análise de sensibilidade envolve essencialmente examinar as alterações produzidas na ordenação das alternativas em função dos *inputs* (por exemplo: pesos dos critérios e valores das alternativas em cada critério) desde que estes variem de forma razoável. Os autores apresentam um sistema que auxilia a decisão multicritério, sistema esse que examina como as alterações nos *inputs* se propagam e recalcula o valor global de cada alternativa bem como a ordenação correspondente. Outro tipo de análise de sensibilidade envolve a atribuição de intervalos de estabilidade para os pesos, nos quais estes podem variar sem afectar a ordenação das alternativas<sup>10</sup>.

As análises à posteriori possuem a desvantagem de requerer o esforço inicial da determinação de um valor exacto para cada parâmetro e de dirigir desde logo a atenção dos decisores para o primeiro resultado que obtêm, o que pode ser prematuro. Por este motivo são diversas as aproximações apresentadas na literatura que têm como objectivo contornar a dificuldade associada com a eliciação de valores precisos para os parâmetros dos modelos, permitindo que os decisores forneçam informação incompleta, em vez de valores exactos. Apresentamos seguidamente algumas dessas aproximações, particularmente as envolvendo informação ordinal. São diversos os métodos que aceitam informação de carácter ordinal (ver, por exemplo, a revisão apresentada por Bouyssou e Pirlot (2003)). O decisor pode indicar que um critério é mais importante do que alguns dos outros, ou que uma alternativa tem melhor desempenho do que as outras num determinado critério, mas sem quantificar quanto.

#### 2.4.2 Métodos baseados em dominância e em optimalidade

Dizemos que uma alternativa domina outra alternativa (dominância em termos multicritério) se for melhor ou igual àquela em todos os critérios, sendo mesmo melhor para pelo menos um deles (isto é, sem que sejam iguais em tudo). Neste caso, a alternativa deve ser considerada superior à outra independentemente da importância que seja atribuída a cada critério. Se entre duas alternativas não existir uma relação de dominância, a escolha entre elas depende do método de avaliação, da importância dos critérios, das diferenças de desempenhos, entre outros elementos.

---

<sup>10</sup>Por exemplo, se o valor actual para determinado peso for igual a 0.4 e o intervalo de estabilidade for [0.370;0.415], isto significa que esse valor pode alterar-se para qualquer outro valor no intervalo de estabilidade sem que a ordenação actual sofra alterações.

Uma possibilidade para ordenar um conjunto de alternativas, ou seleccionar a melhor alternativa dentro desse conjunto, é estabelecer relações de “dominância”, que podem ser interpretadas como relações de preferência. Na literatura (Bana e Costa, 1992; Dias, 2000; Salo e Hämäläinen, 2001; Salo e Punkka, 2005) são referidos dois tipos de dominância, que se distinguem da dominância no sentido habitual, uma vez que não é dominância relativa aos diversos critérios, mas sim relativa aos parâmetros:

- Dominância absoluta: a alternativa  $x^{(j)}$  é preferida à alternativa  $x^{(k)}$  no sentido de dominância absoluta se e só se o valor de  $x^{(j)}$  for sempre igual ou superior (e estritamente superior em pelo menos um caso) ao valor de  $x^{(k)}$ , mesmo que sejam avaliadas segundo combinações distintas, isto é:

$$v_{min}(x^{(j)}) = \min \sum_{i=1}^n w_i v_i(x^{(j)}) \geq \max \sum_{i=1}^n w_i v_i(x^{(k)}) = v_{max}(x^{(k)}), \quad (2.6)$$

sendo estritamente superior em pelo menos um caso. Os problemas de minimização e maximização são resolvidos sujeitos às restrições lineares que as preferências do decisor impõem em  $w_i$  e  $v_i(x^{(j)})$  para  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ . Os resultados sobre dominância absoluta podem ser mostrados pelos intervalos de valores que as alternativas podem assumir  $[v_{min}(x^{(j)}), v_{max}(x^{(j)})]$ , atendendo ao facto dos pesos dos critérios e dos valores de cada alternativa em cada critério pertencerem à região admissível.

- Dominância relativa, também denominada dominância aditiva (Bana e Costa, 1992) e  $\Delta$ -dominância (Dias, 2000): de acordo com este critério uma alternativa  $x^{(j)}$  é preferida a  $x^{(k)}$  se e só se o valor de  $x^{(j)}$  for maior ou igual ao de  $x^{(k)}$  para todos os resultados admissíveis, e for estritamente maior para pelo menos um, isto é:

$$\begin{aligned} \max\{v(x^{(k)}) - v(x^{(j)})\} &= \max \sum_{i=1}^n w_i [v_i(x^{(k)}) - v_i(x^{(j)})] \leq 0, \text{ e} \\ \max\{v(x^{(j)}) - v(x^{(k)})\} &= \max \sum_{i=1}^n w_i [v_i(x^{(j)}) - v_i(x^{(k)})] > 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ou seja, admite-se que o máximo possa ser igual a zero (desde que o mínimo não seja também igual a zero).

Com base nas relações de dominância referidas anteriormente, podemos considerar que a análise é dada por terminada quando a alternativa preferida é identificada através da dominância ou quando o decisor está na disposição de aceitar a decisão recomendada e a possível perda de valor que lhe está associada. A análise pode no entanto continuar “aperando” as restrições iniciais. Como os resultados de dominância são determinados como soluções de programas lineares, a análise da sensibilidade habitual identifica o processo

de “apertar” que vai contribuir para uma particular relação de dominância. Kirkwood e Sarin (1985) consideram que existem dois passos para identificar e eliminar alternativas inferiores: em primeiro lugar, utilizam-se métodos para estabelecer dominância; em segundo lugar, as relações de dominância resultantes são usadas para ordenar (por vezes parcialmente) as alternativas por grupos. Se uma alternativa caracteriza o melhor grupo, deverá ser a escolhida. Infelizmente, o resultado mais frequente é a não separação das alternativas (Kirkwood e Corner, 1993).

Uma alternativa é óptima se o seu valor global for igual ou superior ao de qualquer outra alternativa, para todas as combinações possíveis dos parâmetros. Dias e Clímaco (2000a) consideram que a alternativa  $x^{(k)}$  é óptima se:

$$\max\{v(x^{(j)}) - v(x^{(k)})\} \leq 0, \quad (2.8)$$

para todas as combinações possíveis dos parâmetros, qualquer que seja a alternativa  $x^{(j)}$  diferente da alternativa  $x^{(k)}$ . Uma alternativa não dominada é potencialmente óptima se existe uma instância de valores dos parâmetros admissíveis que a tornam a melhor alternativa.

Muitas aproximações para lidar com informação incompleta focam-se no conceito de dominância e potencial optimalidade. A ideia por detrás destas aproximações é fazer uma triagem das alternativas, mantendo apenas as não dominadas ou potencialmente óptimas, ou obter uma ordenação parcial no conjunto das alternativas, baseada numa relação de dominância. Por Park (2004) é feita uma interessante classificação de estudos anteriores para lidar com informação incompleta (tanto nos pesos como nos valores), quando o objectivo é fazer uma triagem das alternativas baseada em dominância e potencial optimalidade.

Malakooti (2000) sugeriu um algoritmo para ordenar e fazer uma triagem das alternativas quando existe informação incompleta sobre as preferências e sobre o valor das alternativas. Ao contrário de outros métodos para ordenar as alternativas, ou fazer uma triagem das mesmas, que requerem a resolução de muitos problemas de programação linear ou não linear entre pares de alternativas, no algoritmo de Malakooti é necessário resolver apenas um problema de optimização, possibilitando a eliminação de bastantes alternativas. Uma extensão do trabalho de Malakooti foi apresentada por Ahn (2003), onde foram consideradas duas categorias de informação incompleta. O primeiro tipo de informação incompleta está relacionado com julgamentos de preferência holísticos entre alguns pares de alternativas. Além disso, o autor permite também informação incompleta relativamente à avaliação do desempenho das alternativas, de forma similar aos julgamentos de preferência entre alguns pares de alternativas. Usar duas categorias de informação incompleta (restrições que se referem simultaneamente aos pesos e aos valores do modelo aditivo) origina programas não lineares que podem ser intractáveis. Desta forma o autor adopta e estende a aproximação sugerida por Malakooti para permitir resolver o seu problema, com o objectivo de diminuir o número de programas a serem resolvidos. Mais tarde, Ahn (2006) abordou o problema de inferir os pesos, incluindo a inferência dos pesos dos decisores, no caso da decisão em grupo.

Park, Kim, e seus colegas (Eum et al., 2001; Lee et al., 2002; Park, 2004) usam programação linear para obter dominâncias e potenciais optimalidades, quando a informação sobre os valores e os pesos não é completa. Eum et al. (2001) propuseram um novo método para resolver o problema não linear que surge com o objectivo de identificar dominância e potencial optimalidade. Lee et al. (2002) estenderam a aproximação a estruturas hierárquicas. Park (2004) desenvolveu os conceitos de potencial optimalidade fraca, que indica se uma alternativa é por vezes melhor do que as restantes com base em informação incompleta, e de potencial optimalidade forte, que indica se uma alternativa é sempre melhor do que as outras.

Também com base no conceito de dominância, Iyer (2003) explorou a ideia de estender as decisões baseadas em dominância a problemas com avaliações incertas. A ideia do autor era eliminar alternativas dominadas por outras alternativas de acordo com avaliações multicritério, sem assumir que um método de agregação era conhecido.

Para reconstituir os julgamentos de um decisor, fornecidos como exemplos relacionados com algumas alternativas, não é necessário inferir restrições numéricas ou valores. Greco et al. (2005) apresentam uma metodologia, Abordagem das Regras de Decisão (“Decision Rule Approach”), para apoio à decisão multicritério, em que as preferências são modeladas em termos de regras de decisão “se..., então...”, e que é baseada no princípio de dominância. A base matemática da metodologia proposta é a “Dominance-based Rough Set Approach” - DRSA. Os autores referem que os decisores aceitam mais facilmente fornecer informação em termos de exemplos de decisões e olhar para regras simples que justifiquem as suas decisões, do que fornecer valores exactos para os parâmetros.

### 2.4.3 Métodos baseados em volumes e em conclusões robustas

O critério do domínio foi introduzido por Starr (1962) e usa o volume do espaço dos parâmetros no qual cada alternativa permanece óptima para indicar a sensibilidade de uma solução. Alguns dos métodos mais antigos para lidar com informação incompleta são baseados na ideia do cálculo de volumes, por exemplo, Charnetski e Soland (1978, 1979). Charnetski e Soland (1978) introduziram o método CHC (“Comparative Hypervolume Criterion”) que é restrito ao caso em que as medidas dos critérios são deterministas e em que se usa uma função de valor aditiva. Rietveld (1980) e Rietveld e Ouwersloot (1992) apresentaram métodos similares para problemas com informação ordinal sobre critérios e sobre as preferências. A análise do espaço dos pesos foi inicialmente desenvolvida baseada nos trabalhos de Bana e Costa (1986, 1988). Mais recentemente, o método SMAA (“Stochastic Multiobjective Acceptability Analysis”), proposto por Lahdelma et al. (1998), enfatiza a exploração do espaço dos pesos com o objectivo de examinar que tipo de avaliação torná uma alternativa preferida a outra alternativa, ou que dará uma certa posição na ordenação a determinada alternativa, em vez de tentar identificar a melhor alternativa baseada em informação precisa. O método é concebido para situações em que os valores dos parâmetros são incertos ou inadequados e por algumas razões é difícil obter informação dos decisores.

Em vez de tentar identificar a melhor alternativa baseada em informação precisa, o SMAA calcula a aceitabilidade de uma alternativa como um volume no espaço dos pesos, medindo a variedade das diferentes preferências que dão a cada alternativa a melhor posição na ordenação. O método SMAA-2 (Lahdelma e Salminen, 2001) foi desenvolvido para estender a análise da aceitabilidade a todas as posições na ordenação. A aceitabilidade de uma ordenação pode ser utilizada para identificar potenciais alternativas de compromisso e para localizar alternativas particularmente más. A aceitabilidade de uma ordenação pode ser examinada individualmente, mas SMAA-2 também fornece índices de aceitabilidade holísticos, agregando juntamente as aceitabilidades das ordenações, usando meta-pesos<sup>11</sup>. Em vez de se tentar obter valores exactos para os integrais, é utilizada simulação Monte Carlo para obter aproximações suficientemente precisas. O método SMAA-O (Lahdelma et al., 2003) é uma variante do método SMAA para problemas onde alguns ou todos os critérios estão medidos em escalas ordinais. Apenas se sabe, em cada critério, qual alternativa é a melhor, a segunda melhor e assim sucessivamente, mas não se conhecem as medidas absolutas.

Mais do que inferir valores precisos para os parâmetros, Dias e Clímaco (2000a) apresentam a ideia de usar informação ordinal para inferir restrições sobre o valor desses parâmetros, admitindo que uma função de valor aditiva multicritério é utilizada. O seu objectivo é usar essas restrições para obter conclusões robustas, isto é, encontrar um conjunto de conclusões compatíveis com a informação fornecida, e usar essas restrições para identificar quais resultados são mais afectados pela imprecisão nos valores dos parâmetros, isto é, a variabilidade dos resultados. Os autores apresentam o software VIP Analysis (“Variable Interdependent Parameters Analysis”) concebido para aceitar informação incompleta sobre o peso dos critérios. Para lidar com tais casos, o VIP Analysis considera os pesos dos critérios como variáveis interdependentes que podem tomar diferentes valores, sujeitas a determinadas restrições. O software calcula o intervalo de valor global de cada alternativa e a matriz de confrontação<sup>12</sup> entre alternativas, permitindo identificar alternativas dominadas ou quasi-dominadas por outras (a relação de quasi-dominância é uma flexibilização da relação de dominância, por forma a acomodar determinada tolerância), assim como o arrependimento máximo associado à escolha de cada alternativa e os domínios onde cada alternativa é óptima ou quasi-óptima (uma alternativa quasi-óptima é aquela que nunca perde por uma diferença muito grande).

---

<sup>11</sup>São apresentadas por Lahdelma e Salminen (2001) várias formas para escolher os meta-pesos.

<sup>12</sup>Uma matriz de confrontação é uma matriz de comparações par a par, em que cada elemento representa a maior diferença de valor entre duas alternativas, atendendo às restrições que definem o conjunto admissível de parâmetros.

#### 2.4.4 Métodos baseados em regras de decisão simples

Adicionalmente a todos os métodos referidos anteriormente, alguns autores (por exemplo, Edwards e Barron, 1994) sugerem o uso de regras de decisão simples baseadas em informação incompleta, mas fácil de eliciar. Apesar de nenhuma destas regras garantir que a alternativa indicada como sendo a melhor é a mesma que resultaria se fossem eliciados valores precisos para os pesos, estudos de simulação mostram que em geral a alternativa seleccionada é uma das melhores (por exemplo, Barron e Barrett, 1996).

Uma das possibilidades descritas na literatura para lidar com informação incompleta relativamente aos pesos é seleccionar um vector de pesos admissíveis  $w$  de um conjunto de pesos admissíveis  $W$  para representar o conjunto, e usar  $w$  para avaliar as alternativas. Exemplos do uso de regras de decisão simples baseadas em informação incompleta, são o uso de pesos iguais (EW - “Equal Weights”), pesos RS (“Rank Sum”), pesos RR (“Reciprocal of the Ranks”), e pesos ROC (“Rank Order Centroid”), que são comparados no estudo de simulação de Barron e Barrett (1996). Barron e Barret compararam regras de decisão baseadas nos pesos inferidos para ver quão frequentemente a melhor alternativa de acordo com a regra coincide com a melhor alternativa de acordo com os valores dados como verdadeiros (isto é, taxa de acerto), e a perda de valor quando estas alternativas não coincidem. Este estudo concluiu que os pesos ROC fornecem uma melhor aproximação do que outros vectores de pesos.

O método SMART (“Simple Multi-Attribute Rating Technique”), originalmente proposto por Edwards (1977), fornece uma maneira simples de implementar os princípios da teoria de utilidade / valor multicritério e não requer julgamentos de preferência ou indiferença entre alternativas, como é habitual na teoria da utilidade / valor multicritério. Edwards inventou o SMART em parte porque os julgamentos de indiferença, entre pares de alternativas, requeridos por Keeney e Raiffa (1976) pareciam difíceis e instáveis. Edwards acreditava que uma avaliação mais directa das quantidades desejadas é mais fácil e menos propensa a erros de eliciação. Os métodos SMARTS (“SMART using Swings”) e SMARTER (“SMART Exploiting Ranks”) (Edwards e Barron, 1994) são dois métodos usados na teoria da utilidade / valor multicritério e ambos corrigem um erro no SMART, erro esse que tem a ver com o processo de eliciação dos pesos<sup>13</sup>. O método SMARTS usa uma aproximação linear para funções de utilidade / valor em cada dimensão, o modelo aditivo e a técnica dos *swings* para a atribuição dos pesos. SMARTER é baseado no processo de atribuição dos pesos justificado formalmente por Barron e Barrett (1996) e usa o mesmo procedimento do SMARTS excepto na atribuição dos pesos, em que são usados pesos ROC. Edwards e Barron (1994) referem que se pode mostrar que o desempenho do SMARTER é quase tão bom como o SMARTS, e não é necessário um difícil processo de eliciação.

---

<sup>13</sup>Mais pormenores sobre o assunto podem ser encontrados em Edwards e Barron (1994).

Outro tipo de regras que têm sido propostas inclui optimização. É possível distinguir as seguintes (Salo e Hämäläinen, 2001): regra maximin, que consiste em avaliar cada alternativa pelo seu valor mínimo garantido, isto é, pior caso; regra arrependimento minimax, que consiste em avaliar cada alternativa pela perda de valor máxima com respeito a uma melhor alternativa, isto é, máximo arrependimento; e regra valores centrais, que consiste em avaliar cada alternativa pelo ponto médio do intervalo de possíveis valores. O mesmo tipo de regras é usado por Salo e Punkka (2005).

Ahn e Park (2008) propuseram duas novas regras (denominadas de OUT I e OUT II) e compararam-nas com outras oito regras (pesos ROC, pesos EW, pesos RS, pesos RR, regra valores centrais, regra maximin, regra maximax, e regra arrependimento minimax), em termos de taxa de acerto e em termos de correlação das ordenações, assumindo pesos ordinais. A ideia de todas estas regras é ordenar as alternativas, ou seleccionar uma alternativa, sem requerer mais informação do decisor.

#### 2.4.5 Métodos interactivos

Qualquer método de resolução de problemas multicritério necessita da intervenção do decisor em qualquer fase do processo de procura de solução. Assim, em maior ou menor grau, qualquer um dos métodos descritos anteriormente incorpora interactividade. O que caracteriza os métodos interactivos é o intercalar de fases de cálculo, apresentando sucessivamente soluções de compromisso, com fases de diálogo com o decisor, fontes de informação adicional sobre as preferências do decisor. A maior parte dos métodos desta classe dedica-se à problemática de escolha e a um contexto em que as alternativas são definidas em compreensão. Uma apresentação dos principais métodos interactivos utilizados no apoio multicritério à decisão pode ser encontrada em Steuer (1986) e em Clímaco et. al (1996).

A eliciação indirecta das preferências é usada no paradigma de regressão ordinal, particularmente usando a função de valor aditiva multicritério. De acordo com este paradigma, inicialmente obtém-se informação holística relativamente às preferências dentro de um conjunto de alternativas de referência e posteriormente é inferido um modelo de preferências que maximiza a compatibilidade com essa informação. Esse modelo é aplicado ao conjunto de todas as alternativas com o objectivo de as ordenar. Figueira et al. (2009) propõem o método GRIP (“Generalized Regression with Intensities of Preference”) que pertence à classe de métodos baseados na eliciação indirecta das preferências e no paradigma de regressão ordinal. GRIP pode ser visto como uma generalização do método UTA (“UTilités Additives”) (Jacquet-Lagrèze e Siskos, 1982) usando informação adicional na forma de comparações de intensidade de preferência entre alguns pares de alternativas de referência.

A metodologia MACBETH (“Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique”) (Bana e Costa e Vansnick, 1994) é uma aproximação multicritério requerendo apenas julgamentos sobre diferenças de valor, com o objectivo de ajudar os decisores a quantificarem a atracção relativa entre alternativas. Usando MACBETH, a um decisor, ou um grupo de decisores, é pedido para fornecer informação sobre preferências



entre dois elementos do conjunto de alternativas ao mesmo tempo. Numa primeira fase pretende-se que o decisor forneça julgamentos ordinais sobre a sua atractividade relativa, e numa segunda fase, se as duas alternativas não forem igualmente atractivas, que o decisor expresse julgamentos qualitativos sobre a diferença de atractividade entre as alternativas mais atractiva das duas e a outra. São oferecidas ao decisor seis categorias semânticas de diferença de atractividade “very weak”, “weak”, “moderate”, “strong”, “very strong” ou “extreme”, ou uma sucessões destas categorias, no caso de surgir hesitação ou desacordo. Ao longo do processo interactivo conduzido por um facilitador, cada vez que é obtido um novo julgamento, a consistência de todas as respostas obtidas até então é testada.

White e Holloway (2008) consideraram um processo interactivo de selecção de alternativas. Neste processo, um facilitador coloca questões ao decisor e obtém respostas que serão usadas para decidir qual a questão seguinte, com o objectivo de identificar a alternativa preferida. Para guiar o facilitador na selecção da próxima questão a colocar, e determinar quando terminar o processo de questão-resposta, White e Holloway apresentaram condições que garantem a existência de uma política de questões-respostas que identificará a alternativa preferida num número finito de questões.

#### 2.4.6 Métodos não baseados na função de valor

A preocupação de aceitar informação de carácter ordinal surge, não só em métodos baseados na ideia de funções de valor multicritério, mas também em métodos baseados em princípios diferentes. Por exemplo, determinar o valor exacto para os pesos é uma dificuldade associada também com os Métodos *Outranking*. Com o objectivo de diminuir esta dificuldade, Bisdorff (2004) propõe estender o princípio de concordância por maioria (como implementado nos métodos ELECTRE) ao contexto em que apenas está disponível informação ordinal relacionada com o peso relativo dos critérios. Dentro da categoria dos Métodos *Outranking* podemos mencionar o QUALIFLEX (Paelinck, 1978), um método para ordenar alternativas com base nas suas ordenações em vários critérios e na importância relativa desses critérios, e o ORESTE (Roubens, 1982), que foi desenvolvido para situações em que as alternativas estão ordenadas de acordo com cada critério e os critérios estão ordenados de acordo com a sua importância.

Outras aproximações não baseadas na ideia de função de valor multicritério são, a VDA (Verbal Decision Analysis) (Moshkovich et al., 2005), o método TOMASO (Marichal et al., 2005), e aproximações baseadas em distâncias, para citar exemplos distintos. A VDA usa informação ordinal (por exemplo: mais preferida, menos preferida...) e é mais orientada para problemas com um grande número de alternativas e onde o número de critérios é relativamente pequeno. O ZAPROS (Larichev e Moshkovich, 1991) e o ORCLASS (Larichev e Moshkovich, 1994) são dois métodos de decisão baseados nos princípios da VDA. O ZAPROS tem como objectivo ordenar um conjunto de alternativas com base em informação de carácter ordinal, enquanto o ORCLASS é usado para problemas de classificação. Estes métodos fazem poucas suposições relativamente à forma como o decisor agrega as prefe-

rências. O método TOMASO também pode ser usado para classificação ou ordenação com base na avaliação das alternativas em escalas ordinais. Este método é baseado em integrais de Choquet<sup>14</sup> para permitir efeitos de interação entre critérios (por exemplo, sinergia). Aproximações baseadas em distâncias procuram encontrar uma ordenação o mais próxima possível, de acordo com determinada distância, de um conjunto de ordenações, ou ordenações parciais, fornecidas como *input*. Como exemplos podemos citar Cook et al. (1996), González-Pachon e Romero (2001) e Contreras e Mármol (2007).

#### 2.4.7 Métodos para a problemática da afectação

A investigação relativa à problemática da afectação tem despertado, até este momento, menos interesse por parte dos investigadores (ver, por exemplo, Dias e Clímaco, 2000b; Damart et al., 2007; Jabeur e Martel, 2007b). Dias e Clímaco (2000b) tentam encontrar a melhor e a pior categoria que cada alternativa atinge, tendo em conta restrições lineares relativas aos valores dos diferentes parâmetros. Damart et al. (2007) utilizam o software IRIS (Dias e Mousseau, 2003) para ajudar a classificar alternativas de referência, em vez de discutir valores para os diferentes parâmetros. Segundo Jabeur e Martel (2007b), na aproximação de Dias e Clímaco, existem quatro limitações: todos os decisores são obrigados a utilizar o método ELECTRE TRI (Yu, 1992) para classificar as potenciais alternativas em categorias pré-definidas; supõe-se que todos os elementos concordam com o conjunto dos critérios e com a avaliação das alternativas; supõe-se que todos os elementos do grupo têm a mesma importância e além disso existe a necessidade de resolver vários problemas de optimização. Motivados por estas limitações, Jabeur e Martel (2007b) propõem um método de classificação ordinal que determina, através de sistemas de relações de preferências individuais, pelo menos uma classificação colectiva que tem em conta a importância relativa dos elementos do grupo.

---

<sup>14</sup>Os integrais de Choquet são mais conhecidos no contexto da decisão sob risco (Schmeidler, 1986), no entanto, são preconizados no caso multicritério quando é assumida uma forma de interação entre critérios (Grabisch, 1996).

# Decisão Individual com Informação Ordinal: Comparação de Diferentes Regras

---

## 3.1 Introdução

Neste capítulo tratamos problemas de selecção multicritério, isto é, problemas de escolher uma (ou mais) alternativa(s) de um conjunto finito de alternativas, que foram avaliadas em múltiplos critérios.<sup>1</sup> Um grande número de métodos tem sido proposto para ajudar um decisor a lidar com tais problemas, por exemplo, agregando a informação existente (isto é, as alternativas, os critérios, as avaliações e os pesos). Entre estes métodos, focamo-nos no modelo de agregação aditivo no contexto da Teoria de Valor Multicritério. Como já referido no Capítulo 2, neste modelo, o desempenho de uma alternativa em determinado critério é medido por uma função de valor. Os valores obtidos por cada alternativa nas múltiplas funções, são então somados, pesados pelos coeficientes de escala (os pesos) atribuídos a essas funções.

Ao longo deste capítulo, vamos focar-nos na imprecisão nos pesos, na imprecisão nos valores de cada alternativa em cada critério e na imprecisão simultânea nos pesos e nos valores. A eliciação da informação sobre os pesos e sobre o valor de cada alternativa em cada critério, apesar de não completa, pode ser suficiente para aumentar o conhecimento do decisor sobre a questão em análise. A informação incompleta pode deste modo ser utilizada para fornecer algumas linhas de referência sobre a melhor escolha ou para fornecer algumas linhas de referência sobre como seleccionar um subconjunto de alternativas contendo as mais promissoras (ver, por exemplo, Chen et al., 2008). O nosso objectivo é então testar procedimentos para escolher um subconjunto de alternativas, com base em informação incompleta, e então observar quão boas são as alternativas escolhidas.

Uma das questões que surge neste contexto é saber quão boas são as regras propostas para seleccionar uma alternativa no contexto de falta de informação completa (por exemplo, baseadas em informação ordinal), comparadas com uma situação ideal na qual todos os parâmetros do modelo são conhecidos. Habitualmente isto é estudado usando simulação Monte Carlo: um grande número de problemas é gerado aleatoriamente (pesos dos critérios

---

<sup>1</sup>Este capítulo baseia-se nos trabalhos que relatámos em Sarabando e Dias (2009a) e Sarabando e Dias (2010a).

e valor de cada alternativa em cada critério), determina-se a alternativa com maior valor global com base no modelo multicritério e essa alternativa é comparada com a alternativa escolhida pela regra em estudo, baseada em apenas parte da informação. Como exemplo de tais comparações, podemos citar Barron e Barrett (1996), Salo e Hämäläinen (2001) e Salo e Punkka (2005). No entanto, estes trabalhos apenas consideram desconhecidos os pesos e é importante estender esta ideia ao caso em que o valor de cada alternativa em cada critério é também desconhecido.

Neste capítulo é assim utilizada simulação Monte Carlo para comparar regras de decisão, com duas características inovadoras. Por um lado, além de considerar regras estudadas anteriormente (pesos ROC - “Rank Order Centroid”, regra valores centrais, regra maximin, e regra arrependimento minimax), inclui duas novas regras que nunca foram estudadas: valores ROC e valores  $\Delta$ ROC. Por outro lado, ao contrário do que acontece na maioria da investigação anterior, não nos focamos apenas na melhor alternativa de acordo com a regra de decisão. Mais do que usar as regras para identificar uma única alternativa, o nosso objectivo é testar como essas regras se comportam no contexto da progressiva redução do número de alternativas (como sugerido por Dias e Clímaco, 2000a, e White e Holloway, 2008), com o intuito de fazer uma triagem das alternativas. As regras a serem usadas tentam conciliar os objectivos contraditórios de manter o número mínimo de alternativas assegurando que o subconjunto escolhido contém a melhor alternativa. As experiências realizadas foram concebidas para serem comparáveis com estudos anteriores e, por este motivo, testámos problemas de dimensões semelhantes.

Vamos restringir-nos ao caso em que a informação eliciada é ordinal. Note-se que esta é a informação requerida, por exemplo, pelo método SMARTER, e é frequentemente o primeiro passo quando outros métodos (por exemplo, a técnica dos *swings* e a técnica das equações de indiferença) são utilizados. Como referido por Jia et al. (1998), existem diversos argumentos favorecendo os métodos baseados em ordenações:

- Os métodos baseados em ordenações são mais fáceis, e possivelmente mais confiáveis, do que os métodos que requerem julgamentos suficientes para, por exemplo, especificar rácios dos pesos (Eckenrode, 1965).
- Os decisores podem ser incapazes de fornecer mais do que informação ordinal (Kirkwood e Sarin, 1985).
- Se a decisão é para ser tomada por um grupo, os elementos do grupo podem ser capazes de concordar com uma ordenação dos critérios mas não com os pesos precisos (Kirkwood e Sarin, 1985).
- As avaliações geradas por métodos baseados em ordenações aproximam-se mais das avaliações geradas por métodos numéricos mais precisos, do que as avaliações geradas por métodos usando, por exemplo, pesos iguais (Stillwell et al., 1981; Barron e Barrett, 1996).

Neste capítulo temos como objectivo aumentar o nosso conhecimento sobre as questões seguintes:

1. Quão boas são as alternativas sugeridas por cada regra?
2. Existem diferenças significativas entre as regras, relativamente à qualidade dos resultados?
3. Será que a variação da dimensão do problema afecta de forma significativa os resultados?

Este capítulo é organizado da seguinte forma: na Secção 3.2 introduz-se a notação matemática e apresentam-se as regras testadas; na Secção 3.3 é apresentado um exemplo ilustrativo; na Secção 3.4 descrevem-se as simulações realizadas, cujos resultados são apresentados na Secção 3.5; na Secção 3.6 conclui-se o capítulo, discutem-se os principais resultados e apresentam-se algumas vias para investigação futura.

## 3.2 Notação e regras de decisão

### 3.2.1 Notação

Considere-se a avaliação de um conjunto discreto de  $m$  alternativas  $A = \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\}$ . A avaliação de cada alternativa é feita primeiramente de acordo com cada critério, considerando um conjunto de  $n$  critérios  $\{c_1, \dots, c_n\}$ . Seja  $v_i(\cdot)$  a função de valor correspondendo ao critério  $c_i$ . Por conseguinte,  $v_i(x^{(j)}) \in [0, 1]$  denota o valor da alternativa  $x^{(j)}$  de acordo com o critério  $c_i$ .

Como já foi referido na Subsecção 2.3.3, de acordo com o modelo de agregação aditivo, o valor global multicritério de uma alternativa  $x^{(j)} \in A$  é dado por (2.4), ou seja:

$$v(x^{(j)}) = \sum_{i=1}^n w_i v_i(x^{(j)}),$$

onde  $w_i$  denota o peso associado a  $v_i(\cdot)$ . Estes parâmetros são tais que:

$$0 \leq w_i \leq 1, i = 1, \dots, n \text{ e } \sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (3.1)$$

Sem perda de generalidade, consideramos que os critérios são indexados de tal modo que os seus pesos estão por ordem decrescente, dada informação ordinal fornecida pelo decisor, por exemplo, através do uso de *swings*<sup>2</sup> (Winterfeldt e Edwards, 1986; Edwards e

---

<sup>2</sup>Outra possibilidade para obter uma ordenação dos pesos dos critérios seria apresentar ao decisor  $n$  alternativas fictícias com vectores de valores  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, \dots, 0)$ , ..., e  $(0, 0, \dots, 1)$ , e pedir-lhe para as ordenar. Uma vez que estamos a considerar funções de valor aditivas, a ordenação destas alternativas irá corresponder à ordenação dos pesos dos critérios.

Barron, 1994), dados os desempenhos que correspondem ao valor zero e ao valor um. O conjunto dos vectores de pesos compatível com informação de carácter ordinal é:

$$W = \{(w_1, w_2, \dots, w_n) : w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n \geq 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1\}. \quad (3.2)$$

Também consideramos que temos uma ordenação do valor de cada alternativa em cada critério: para cada critério o decisor indica qual alternativa tem o maior valor, qual alternativa tem o segundo maior valor, e assim sucessivamente. Assume-se assim, que para o critério  $c_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$V_i = \left\{ (v_i(x^{(1i)}), v_i(x^{(2i)}), \dots, v_i(x^{(m_i i)})) : \right. \\ \left. : 1 = v_i(x^{(1i)}) \geq v_i(x^{(2i)}) \geq \dots \geq v_i(x^{(m_i i)}) = 0 \right\}, \quad (3.3)$$

onde  $x^{(1i)}$  representa a melhor alternativa no critério  $c_i$ ,  $x^{(2i)}$  representa a segunda melhor alternativa no critério  $c_i$ , e assim sucessivamente, e  $m_i$  representa o número de níveis no critério  $c_i$ . Note-se que, se num determinado critério  $c_i$  não existirem empates entre as alternativas tem-se que  $m_i = m$ .

Numa segunda fase, consideramos que o decisor fornece também informação ordinal sobre a diferença de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. Seja  $\Delta_{i(m_i-1)} = v_i(x^{(1i)}) - v_i(x^{(2i)})$ ,  $\Delta_{i(m_i-2)} = v_i(x^{(2i)}) - v_i(x^{(3i)})$ , ..., e  $\Delta_{i1} = v_i(x^{((m_i-1)i)}) - v_i(x^{(m_i i)})$ . Ao decisor é pedido para fornecer informação ordinal sobre estes  $\Delta$ 's.

Seja  $M$  o conjunto de matrizes  $n * m$ , cujos elementos são os valores  $v_i(x^{(j)})$  ( $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ ), compatíveis com a informação referida anteriormente.

Dado um conjunto  $W$  de vectores de pesos, e um conjunto  $M$  de matrizes, é possível calcular o seguinte:

- *valor mínimo de uma alternativa  $x^{(j)} \in A$ :*

$$v_{min}(x^{(j)}) = \min_{w \in W, V \in M} v(x^{(j)}); \quad (3.4)$$

- *valor máximo de uma alternativa  $x^{(j)} \in A$ :*

$$v_{max}(x^{(j)}) = \max_{w \in W, V \in M} v(x^{(j)}); \quad (3.5)$$

- *máxima diferença de valor de  $x^{(k)} \in A$  para  $x^{(j)} \in A$ :*

$$m_{kj} = \max_{w \in W, V \in M} \{v(x^{(k)}) - v(x^{(j)})\}. \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Regras de decisão

#### Informação incompleta relativamente ao peso dos critérios

Os pesos dos critérios constituem habitualmente os parâmetros mais difíceis de obter com precisão (Roy e Mousseau, 1996). Uma das possibilidades descritas na literatura para lidar com o tipo de informação incompleta que estamos a abordar, é seleccionar um vector de pesos de  $W$ , para representar este conjunto, e usá-lo para avaliar as alternativas. Exemplos disto são o uso de pesos iguais, pesos RS, pesos RR, e pesos ROC, que foram comparados no estudo de simulação de Barron e Barrett (1996). Os autores concluíram que o vector de pesos ROC fornecia melhores aproximações que os restantes vectores de pesos. Os pesos ROC são calculados através dos vértices do polítopo<sup>3</sup>  $W$ . Este polítopo corresponde a um *simplex*<sup>4</sup> cujos vértices são  $(1, 0, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots, 0)$ , ..., e  $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ . As coordenadas do centróide<sup>5</sup> são encontradas calculando a média das coordenadas dos vértices. Os pesos ROC são assim calculados da seguinte forma (assumindo que os índices dos critérios reflectem a sua ordem, do maior peso  $w_1$  ao menor peso  $w_n$ ):

$$w_i^{(ROC)} = \frac{1}{n} \sum_{l=i}^n \frac{1}{l}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Por exemplo, para  $n = 3$  critérios tem-se  $w_1^{(ROC)} = \frac{11}{18}$ ,  $w_2^{(ROC)} = \frac{5}{18}$  e  $w_3^{(ROC)} = \frac{2}{18}$ . Como referido por Butler e Olson (1999), se existirem empates, alguns pontos extremos irão coincidir. Por exemplo, se num caso com três critérios o decisor indicar que  $w_1 \geq w_2$  e  $w_2 = w_3$ , então os vértices do *simplex* definido por estas restrições são  $(1, 0, 0)$  e  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , e desta forma  $w_1 = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$  e  $w_2 = w_3 = \frac{1}{2} (0 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}$ . Solymosi e Dombi (1986) descrevem um processo que generaliza a aproximação centróide a casos que incluem ordens fracas ou ordens parciais.

Outro tipo de regras que têm sido propostas incluem optimização. Destacamos as seguintes (Salo e Hämäläinen, 2001):

- *Regra maximin*. Esta regra consiste em avaliar cada alternativa pelo seu valor mínimo garantido (isto é, pior caso), escolhendo a alternativa  $x^{(j)}$  tal que:

$$v_{min}(x^{(j)}) \geq v_{min}(x^{(k)}), \quad \forall x^{(k)} \in A. \quad (3.8)$$

<sup>3</sup>Um polítopo é a generalização, para um número arbitrário de dimensões (finitas), dos conceitos de polígono e poliedro.

<sup>4</sup>Em topologia, um *simplex* é uma generalização do conceito de triângulo a outras dimensões. É o invólucro convexo de  $(n + 1)$  vectores independentes em  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>5</sup>Em geometria, o centróide é o ponto no interior duma forma geométrica que define o seu centro geométrico.

- *Regra arrependimento minimax.* Esta regra consiste em avaliar cada alternativa pela perda de valor máxima com respeito a uma melhor alternativa (isto é, máximo arrependimento), escolhendo uma alternativa  $x^{(j)}$  tal que:

$$\max_{x^{(k)} \neq x^{(j)}} m_{kj} \leq \max_{x^{(k)} \neq x^{(l)}} m_{kl}, \forall x^{(l)} \in A. \quad (3.9)$$

- *Regra valores centrais.* Esta regra consiste em avaliar cada alternativa pelo ponto médio do intervalo de possíveis valores, escolhendo a alternativa  $x^{(j)}$  tal que:

$$v_{min}(x^{(j)}) + v_{max}(x^{(j)}) \geq v_{min}(x^{(k)}) + v_{max}(x^{(k)}), \forall x^{(k)} \in A. \quad (3.10)$$

Outras regras foram também usadas em simulações (por exemplo, a regra maximax, que consiste em maximizar o máximo valor que as alternativas podem assumir dadas as restrições aos valores dos parâmetros), no entanto os resultados fornecidos foram piores (ver detalhes em Sarabando, 2006).

### Informação incompleta relativamente ao valor de cada alternativa em cada critério

Também consideramos que os valores atribuídos às alternativas possam ser desconhecidos, tanto porque o desempenho das alternativas possa ser desconhecido, ou porque a maneira como o decisor avalia tais alternativas possa ser desconhecida. Se o decisor considerar difícil indicar os valores exactos de cada alternativa em cada critério, uma ideia natural será pedir uma ordenação dos mesmos, por exemplo, “considerando o critério  $c_1$ , a alternativa  $x^{(1)}$  é a que tem o melhor valor, a alternativa  $x^{(2)}$  é a que tem o segundo melhor valor e a alternativa  $x^{(3)}$  é a que tem o terceiro melhor valor”. Assumimos que para cada critério o pior nível corresponde ao valor zero e o melhor nível corresponde ao valor um. Esta convenção é usual e legítima se os pesos forem atribuídos posteriormente tendo em conta estes níveis.

De forma similar ao caso de informação ordinal nos pesos, acreditamos que também neste caso é possível usar uma fórmula algébrica para escolher um vector de valores para cada critério, capaz de representar de forma aproximada todos os vectores de valores compatíveis com a informação ordinal. Uma possibilidade é usar valores ROC para cada critério, isto é, o centróide do polítopo definido pela ordenação dos valores das alternativas nesse critério. Como referido anteriormente, vamos considerar que os critérios são normalizados de tal forma que o maior valor em cada critério é igual a um e o menor é igual a zero, e desta forma, o centróide corresponde a valores igualmente espaçados no intervalo  $[0, 1]$ . Para o critério  $c_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), os valores ROC são definidos como se segue:

$$v_i^{(ROC)}(x^{(j)}) = \frac{m - r_i(x^{(j)})}{m - 1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.11)$$

onde  $r_i(x^{(j)})$  representa a posição na ordenação da alternativa  $x^{(j)}$  considerando o critério  $c_i$  e o facto de  $r_i(x^{(j)}) < r_i(x^{(k)})$  implica que  $v_i(x^{(j)}) \geq v_i(x^{(k)})$ .



Suponhamos, por exemplo, que temos  $m = 5$  alternativas, e para o critério  $c_i$  se tem  $1 = v_i(x^{(1)}) \geq v_i(x^{(2)}) \geq v_i(x^{(3)}) \geq v_i(x^{(4)}) \geq v_i(x^{(5)}) = 0$ . Uma vez que os vértices deste *simplex* são  $(1, 1, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 0, 0)$  e  $(1, 0, 0, 0, 0)$ , o centróide do *simplex* definido pela restrição anterior é  $(1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ . Desta forma,  $v_i(x^{(1)}) = 1$ ,  $v_i(x^{(2)}) = \frac{3}{4}$ ,  $v_i(x^{(3)}) = \frac{2}{4}$ ,  $v_i(x^{(4)}) = \frac{1}{4}$ , e  $v_i(x^{(5)}) = 0$ . Num caso com  $m$  alternativas, o centróide do *simplex* definido por  $1 = v_i(x^{(1)}) \geq v_i(x^{(2)}) \geq \dots \geq v_i(x^{(m)}) = 0$  é igual a  $(1, \frac{m-2}{m-1}, \dots, \frac{1}{m-1}, 0)$ .

A formula para aproximar os valores usando valores ROC pode também ser usada se existirem empates relativamente ao valor das alternativas em algum critério. Em casos com um empate num critério, o problema pode ser resolvido diminuindo uma dimensão ao número de alternativas do problema, isto é, considerando  $m - 1$  níveis de valores em vez de  $m$ , nesse critério. Em casos com dois empates, o problema pode ser resolvido diminuindo duas dimensões ao problema, e assim sucessivamente. Assumimos que não existe nenhum critério para o qual todas as alternativas têm o mesmo valor, uma vez que, na prática, um critério nestas condições poderia ser eliminado.

Com o objectivo de obter informação mais rica sobre o valor das alternativas, além de uma ordenação das alternativas em cada critério, é também possível pedir ao decisor para indicar uma ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério<sup>6</sup>. Suponhamos, por exemplo, que considerando o critério  $c_i$ , o decisor descreve grosseiramente a sua ideia da posição relativa das quatro alternativas  $\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}\}$  relativamente ao seu valor de acordo com o critério  $c_i$ , como mostra a Figura 3.1.

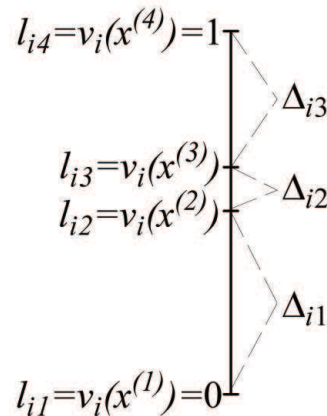


Figura 3.1: Exemplo de um esboço para o critério  $c_i$ .

<sup>6</sup>Esta ideia pode ser vista como uma extensão do método de Simos (Simos, 1990; Pictet e Bollinger, 2008).

Através deste esboço, pode pedir-se ao decisor não apenas para confirmar que  $1 = v_i(x^{(4)}) \geq v_i(x^{(3)}) \geq v_i(x^{(2)}) \geq v_i(x^{(1)}) = 0$ , mas também para confirmar que a ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas  $\Delta_{i1} = v_i(x^{(2)}) - v_i(x^{(1)}) = v_i(x^{(2)})$ ,  $\Delta_{i2} = v_i(x^{(3)}) - v_i(x^{(2)})$ , e  $\Delta_{i3} = v_i(x^{(4)}) - v_i(x^{(3)}) = 1 - v_i(x^{(3)})$ , é  $\Delta_{i1} \geq \Delta_{i3} \geq \Delta_{i2}$ . Este tipo de eliciação baseada em esboços foi previamente proposta para obter valores dos parâmetros, por exemplo por Pitz (1987). No entanto, no nosso caso o objectivo não é ler o valor exacto para cada alternativa. Apenas consideramos informação ordinal sobre a posição das alternativas e sobre as diferenças de valor entre alternativas consecutivas. Obviamente, a ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas pode também ser obtida do decisor sem usar uma representação gráfica. Pedir ao decisor uma ordenação do valor de cada alternativa em cada critério, requer pedir para comparar, no máximo,  $m - 1$  diferenças para cada critério, o que exige algum esforço, mas muito menor do que o que seria requerido para comparar o número total de diferenças (no máximo,  $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$  comparações em cada critério).

Com base neste tipo de informação, podemos propor uma regra para aproximar o valor das alternativas, que chamamos de regra  $\Delta$ ROC. Consideremos o critério  $c_i$  e denotemos por  $m_i$  o número de diferentes níveis de valores neste critério, implícito na informação ordinal fornecida pelo decisor, incluindo os níveis de valor  $l_{i1} = 0$  e  $l_{im_i} = 1$ , que limitam os outros níveis. Por exemplo, se a informação ordinal é  $v_i(x^{(4)}) > v_i(x^{(3)}) > v_i(x^{(2)}) > v_i(x^{(1)})$ , então existem quatro diferentes níveis ( $m_i = 4$ ), que estão por ordem decrescente  $l_{i4} = v_i(x^{(4)}) = 1$ ,  $l_{i3} = v_i(x^{(3)})$ ,  $l_{i2} = v_i(x^{(2)})$  e  $l_{i1} = v_i(x^{(1)}) = 0$ . Denotemos a diferença de valor entre dois níveis consecutivos por  $\Delta_{it} = l_{i(t+1)} - l_{it}$ , para  $t = 1, \dots, m_i - 1$ . Para estas definições, é fácil verificar que:

$$0 \leq \Delta_{i1}, \dots, \Delta_{i(m_i-1)} \leq 1, i = 1, \dots, n \text{ e } \sum_{t=1}^{m_i-1} \Delta_{it} = 1. \quad (3.12)$$

Admitimos que as diferenças de valor estão ordenadas, são positivas, e têm soma igual a um, podendo desta forma ser usada uma expressão similar à fórmula usada para derivar os pesos ROC (equação (3.7)). Uma aproximação para o valor de cada alternativa em cada critério pode ser obtida usando o algoritmo seguinte:

**Passo 1** Pedir ao decisor para indicar uma ordenação das alternativas em cada critério  $c_i$  (possivelmente com empates). Rotular os diferentes níveis resultantes por  $l_{i1}, \dots, l_{im_i}$ , ordenados do mais baixo para o mais elevado, com  $l_{i1} = 0$  e  $l_{im_i} = 1$ . Cada nível corresponderá ao valor de uma alternativa (ou mais do que uma, em caso de empates).

**Passo 2** Pedir ao decisor para indicar uma ordenação da diferença de valor entre níveis consecutivos  $\Delta_{i1}, \dots, \Delta_{i(m_i-1)}$ . Para cada  $t = 1, \dots, m_i - 1$ , seja  $rank(t)$  a posição de  $\Delta_{it}$  no conjunto  $\{\Delta_{i1}, \dots, \Delta_{i(m_i-1)}\}$ . Esta posição é um inteiro entre 1 e  $m_i - 1$ , com a posição 1 a denotar a diferença mais elevada.

**Passo 3** Determinar o centróide da ordenação de  $m_i - 1$  variáveis:

$$\Delta_{[t]} = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{l=t}^{m_i-1} \frac{1}{l}, t = 1, \dots, m_i - 1. \quad (3.13)$$

**Passo 4** Para cada  $t = 1, \dots, m_i - 1$ , usar os valores fornecidos pela aproximação centróide:

$$\Delta_{it}^{(ROC)} = \Delta_{[rank(t)]}.$$

**Passo 5** Os valores aproximados para os níveis no critério  $c_i$ , são definidos por:

$$l_{i1} = 0,$$

$$l_{ij} = \sum_{t=1}^{j-1} \Delta_{it}^{(ROC)}, j = 2, \dots, m_i. \quad (3.14)$$

**Passo 6** O valor aproximado no critério  $c_i$  para a alternativa  $x^{(j)}$  ( $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ ) com base na regra valores  $\Delta ROC$ ,  $v_i^{(\Delta ROC)}(x^{(j)})$ , é igual ao valor aproximado do respectivo nível, de acordo com a correspondência entre valores e níveis criada no Passo 1.

Para o exemplo apresentado na Figura 3.1, o ROC para as três diferenças de valor (uma vez que existem  $m_i = 4$  níveis) é  $\Delta_{[1]} = \frac{11}{18}$ ,  $\Delta_{[2]} = \frac{5}{18}$ , e  $\Delta_{[3]} = \frac{2}{18}$ . Tendo em conta a ordem  $\Delta_{i1} \geq \Delta_{i3} \geq \Delta_{i2}$ , obtém-se  $\Delta_{i1}^{(ROC)} = \frac{11}{18}$ ,  $\Delta_{i2}^{(ROC)} = \frac{2}{18}$ , e  $\Delta_{i3}^{(ROC)} = \frac{5}{18}$ . Desta forma, o vector de valores  $\Delta ROC$  é  $(0, \frac{11}{18}, \frac{13}{18}, 1)$ :

$$\begin{aligned} \cdot v_i^{(\Delta ROC)}(x^{(1)}) &= 0, \\ \cdot v_i^{(\Delta ROC)}(x^{(2)}) &= \Delta_{i1}^{(ROC)} = \frac{11}{18}, \\ \cdot v_i^{(\Delta ROC)}(x^{(3)}) &= \Delta_{i1}^{(ROC)} + \Delta_{i2}^{(ROC)} = \frac{11}{18} + \frac{2}{18} = \frac{13}{18}, \\ \cdot v_i^{(\Delta ROC)}(x^{(4)}) &= \Delta_{i1}^{(ROC)} + \Delta_{i2}^{(ROC)} + \Delta_{i3}^{(ROC)} = \frac{11}{18} + \frac{2}{18} + \frac{5}{18} = 1. \end{aligned}$$

Note-se que este algoritmo pode considerar a existência de empates no valor de cada alternativa em cada critério. Por outro lado, empates na ordenação de diferenças de valores consecutivas no Passo 2, podem ser resolvidos usando o processo proposto para o caso de empates no peso dos critérios (Solymosi e Dombi, 1986; Butler e Olson, 1999).

Na secção seguinte apresentamos um exemplo que tem como objectivo ilustrar como algumas das regras apresentadas (pesos ROC, valores ROC e valores  $\Delta ROC$ ) podem ser utilizadas. Vamos ilustrar a utilização da regra pesos ROC uma vez que, como iremos mostrar mais à frente, é aquela com a qual se obtêm melhores resultados quando a informação incompleta se refere ao peso dos critérios. Ilustramos também a utilização das duas novas regras apresentadas neste capítulo, as regras valores ROC e valores  $\Delta ROC$ .

### 3.3 Exemplo ilustrativo

Com o objectivo de ilustrar como as regras referidas anteriormente podem ser utilizadas, usamos um exemplo apresentado por Bana e Costa (1992), baseado num estudo de Keeney e Nair (1977), sobre a escolha de uma localização para uma central nuclear. Neste estudo foram consideradas  $m = 9$  alternativas que foram avaliadas através de  $n = 6$  critérios (custos de investimento e exploração; efeito na saúde humana em condições normais e em caso de acidente; efeito sobre a população de salmões causado pelo aquecimento das águas dos rios; efeito sobre o equilíbrio sócio-económico de cada local, durante os trabalhos de construção da central; perturbação na estética paisagista devido às linhas de alta tensão, e efeito na restante fauna e flora, exceptuando o salmão).

O modelo aditivo foi usado com os seguintes dados para o valor de cada alternativa em cada critério (matriz  $V$ ) e para os pesos associados às funções de valor (vector  $w$ ):

$$V = \begin{bmatrix} 0.957466 & 0.751 & 0.989533 & 0.73160 & 0.98 & 0.8135 \\ 1 & 0.800 & 0.989533 & 0.71450 & 0.98 & 0.8135 \\ 0.967990 & 0.875 & 0.989533 & 0.71490 & 0.86 & 0.8020 \\ 0.959617 & 0.760 & 0.997820 & 0.59250 & 0.88 & 0.6300 \\ 0.728686 & 0.780 & 0.993586 & 0.68535 & 0.76 & 0.4690 \\ 0.600350 & 0.885 & 0.998013 & 0.56375 & 0.98 & 0.4690 \\ 0.897580 & 0.740 & 0.998790 & 0.57250 & 1 & 0.7345 \\ 0.761342 & 0.945 & 0.991300 & 0.52750 & 1 & 0.7915 \\ 0.750121 & 0.910 & 0.992600 & 0.66915 & 1 & 0.9125 \end{bmatrix},$$

$$w = \left[ 0.347222 \quad 0.310764 \quad 0.189236 \quad 0.090278 \quad 0.051215 \quad 0.011285 \right].$$

Aplicando (2.4) a estes dados resulta:  $v(x^{(1)}) = 0.879$ ,  $v(x^{(2)}) = 0.907$ ,  $v(x^{(3)}) = 0.913$ ,  $v(x^{(4)}) = 0.864$ ,  $v(x^{(5)}) = 0.790$ ,  $v(x^{(6)}) = 0.779$ ,  $v(x^{(7)}) = 0.842$ ,  $v(x^{(8)}) = 0.853$ , e  $v(x^{(9)}) = 0.853$ . Deste modo, a alternativa  $x^{(3)}$  é aquela que apresenta maior valor global, seguida de  $x^{(2)}$  com valor muito próximo.

Se considerarmos que não é exigida informação completa acerca do valor de cada alternativa em cada critério, então podemos utilizar a regra valores ROC ou a regra valores  $\Delta$ ROC. Para podermos usar as regras ROC e  $\Delta$ ROC para os valores é porém necessário normalizar os valores de cada alternativa em cada critério (matriz  $V^*$ ), por forma a que ao pior desempenho em cada critério corresponda o valor zero, correspondendo ao melhor desempenho o valor um. Para além disso, uma vez que estamos a alterar os níveis de desempenho que correspondem aos níveis de valor zero e um, torna-se necessário recalculer os pesos (vector  $w^*$ ) de forma a compensar de forma exacta a substituição de  $V$  por  $V^*$ .

Os dados transformados são os seguintes:

$$V^* = \begin{bmatrix} 0.893572 & 0.053659 & 0 & 1 & 0.916667 & 0.776776 \\ 1 & 0.292683 & 0 & 0.916218 & 0.916667 & 0.776776 \\ 0.919905 & 0.658537 & 0 & 0.918177 & 0.416667 & 0.750846 \\ 0.898954 & 0.097561 & 0.895214 & 0.318471 & 0.500000 & 0.363021 \\ 0.321121 & 0.195122 & 0.437831 & 0.773395 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707317 & 0.916064 & 0.177609 & 0.916667 & 0 \\ 0.743726 & 0 & 1 & 0.220480 & 1 & 0.598647 \\ 0.402832 & 1 & 0.190883 & 0 & 1 & 0.727170 \\ 0.374755 & 0.829268 & 0.331317 & 0.694023 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w^* = \begin{bmatrix} 0.578323 & 0.265502 & 0.007301 & 0.076790 & 0.051226 & 0.020858 \end{bmatrix}.$$

Estas transformações, note-se, em nada alteram, a ordenação das alternativas em termos de valor global, continuando  $x^{(3)}$  a ser a melhor. Depois das transformações referidas tem-se:  $v^*(x^{(1)}) = 0.671$ ,  $v^*(x^{(2)}) = 0.790$ ,  $v^*(x^{(3)}) = 0.814$ ,  $v^*(x^{(4)}) = 0.610$ ,  $v^*(x^{(5)}) = 0.300$ ,  $v^*(x^{(6)}) = 0.255$ ,  $v^*(x^{(7)}) = 0.518$ ,  $v^*(x^{(8)}) = 0.566$ , e  $v^*(x^{(9)}) = 0.565$ . Usamos a notação  $v^*(.)$  para representar o valor global de uma determinada alternativa, depois de transformar os dados.

Consideremos que informação completa acerca do peso dos critérios não está disponível num determinado momento da análise, uma vez que o decisor se sente mais confortável ao indicar apenas informação ordinal. Neste caso, podemos então utilizar a regra pesos ROC, que as simulações que iremos apresentar na secção seguinte, mostram ser a regra mais promissora. Retirando do vector  $w^*$  apenas informação ordinal acerca dos pesos, assumimos que apenas temos  $w_1^* > w_2^* > w_4^* > w_5^* > w_6^* > w_3^*$ . Logo, o vector de pesos a usar pela regra pesos ROC será o seguinte:

$$w^{*(ROC)} = \begin{bmatrix} 0.408333 & 0.241667 & 0.027778 & 0.158333 & 0.102778 & 0.061111 \end{bmatrix}.$$

Com as regras ROC e  $\Delta$ ROC para os valores podemos determinar uma aproximação para os valores das diferentes alternativas em cada critério. Note-se que quando existem empates isto reduz uma dimensão ao problema. Por exemplo, no quinto critério apenas temos que considerar  $m_5 = 5$  níveis diferentes. Os valores ROC e  $\Delta$ ROC são os seguintes:

$$V^{*(ROC)} = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.125 & 0 & 1 & 0.75 & 0.833333 \\ 1 & 0.500 & 0 & 0.750 & 0.75 & 0.833333 \\ 0.875 & 0.625 & 0 & 0.875 & 0.25 & 0.666667 \\ 0.750 & 0.250 & 0.666667 & 0.375 & 0.50 & 0.166667 \\ 0.125 & 0.375 & 0.500000 & 0.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.750 & 0.833333 & 0.125 & 0.75 & 0 \\ 0.500 & 0 & 1 & 0.250 & 1 & 0.333333 \\ 0.375 & 1 & 0.166667 & 0 & 1 & 0.500000 \\ 0.250 & 0.875 & 0.333333 & 0.500 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V^{*(\Delta ROC)} = \begin{bmatrix} 0.840327 & 0.054315 & 0 & 1 & 0.937500 & 0.841667 \\ 1 & 0.259821 & 0 & 0.905060 & 0.937500 & 0.841667 \\ 0.889435 & 0.599554 & 0 & 0.920685 & 0.270833 & 0.780556 \\ 0.855952 & 0.069940 & 0.911111 & 0.358780 & 0.416667 & 0.408333 \\ 0.214732 & 0.149256 & 0.502778 & 0.752827 & 0 & 0 \\ 0 & 0.633036 & 0.938889 & 0.214732 & 0.937500 & 0 \\ 0.688095 & 0 & 1 & 0.248214 & 1 & 0.650000 \\ 0.348363 & 1 & 0.241667 & 0 & 1 & 0.752778 \\ 0.294048 & 0.785268 & 0.400000 & 0.698512 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os resultados obtidos usando as diferentes regras são apresentados nas Tabelas 3.1 e 3.2, nas quais a coluna “TRUE TRUE” refere-se ao uso de pesos verdadeiros (pesos TRUE) e valores verdadeiros (valores TRUE), a coluna “ROC TRUE” refere-se ao uso de pesos ROC e valores verdadeiros, e assim sucessivamente, até à última coluna, que se refere ao uso de pesos ROC e valores  $\Delta$ ROC. A Tabela 3.1 mostra o valor das diferentes alternativas usando as diferentes regras e a Tabela 3.2 mostra a posição na ordenação das diferentes alternativas usando as diferentes regras. A alternativa  $x^{(3)}$  escolhida no estudo original, tendo valor global mais elevado, não é a primeira da ordenação para nenhuma das regras, excepto para a regra pesos ROC valores TRUE. As regras coincidem em apontar a segunda alternativa da ordenação verdadeira, ou seja, a alternativa  $x^{(2)}$ . No entanto, esta segunda alternativa também é bastante boa, sendo a diferença de valor entre ambas muito pequena. Neste exemplo, se as duas melhores alternativas de acordo com cada regra forem escolhidas serão retidas as duas melhores alternativas.

Alt. / Regra	TRUE TRUE	ROC TRUE	TRUE ROC	ROC ROC	TRUE $\Delta$ ROC	ROC $\Delta$ ROC
$x^{(1)}$	<b>0.671</b>	0.678	0.527	0.572	0.643	0.662
$x^{(2)}$	<b>0.790</b>	0.766	0.824	0.776	0.782	0.762
$x^{(3)}$	<b>0.814</b>	0.769	0.766	0.713	0.774	0.729
$x^{(4)}$	<b>0.610</b>	0.540	0.563	0.506	0.578	0.516
$x^{(5)}$	<b>0.300</b>	0.313	0.223	0.255	0.225	0.257
$x^{(6)}$	<b>0.255</b>	0.319	0.253	0.301	0.239	0.309
$x^{(7)}$	<b>0.518</b>	0.506	0.374	0.395	0.489	0.491
$x^{(8)}$	<b>0.566</b>	0.559	0.545	0.533	0.536	0.539
$x^{(9)}$	<b>0.565</b>	0.636	0.490	0.566	0.507	0.595

Tabela 3.1: Valor das diferentes alternativas usando as diferentes regras.

Nas simulações que apresentamos na secção seguinte vamos considerar duas medidas de eficiência, a taxa de acerto (isto é, a percentagem de vezes em que cada uma das regras escolhe a verdadeira melhor alternativa) e a perda de valor (isto é, a diferença entre o valor real da verdadeira melhor alternativa e o valor real da alternativa escolhida por cada uma das regras). Por exemplo, a perda de valor associada à escolha da alternativa  $x^{(2)}$  em vez da alternativa  $x^{(3)}$  (a verdadeira melhor alternativa), é igual a 0.024 (= 0.814 – 0.790).

Alt. / Regra	TRUE TRUE	ROC TRUE	TRUE ROC	ROC ROC	TRUE ΔROC	ROC ΔROC
$x^{(1)}$	<b>3<sup>a</sup></b>	3 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>
$x^{(2)}$	<b>2<sup>a</sup></b>	2 <sup>a</sup>	1 <sup>a</sup>	1 <sup>a</sup>	1 <sup>a</sup>	1 <sup>a</sup>
$x^{(3)}$	<b>1<sup>a</sup></b>	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>
$x^{(4)}$	<b>4<sup>a</sup></b>	6 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>
$x^{(5)}$	<b>8<sup>a</sup></b>	9 <sup>a</sup>	9 <sup>a</sup>	9 <sup>a</sup>	9 <sup>a</sup>	9 <sup>a</sup>
$x^{(6)}$	<b>9<sup>a</sup></b>	8 <sup>a</sup>	8 <sup>a</sup>	8 <sup>a</sup>	8 <sup>a</sup>	8 <sup>a</sup>
$x^{(7)}$	<b>7<sup>a</sup></b>	7 <sup>a</sup>	7 <sup>a</sup>	7 <sup>a</sup>	7 <sup>a</sup>	7 <sup>a</sup>
$x^{(8)}$	<b>5<sup>a</sup></b>	5 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>
$x^{(9)}$	<b>6<sup>a</sup></b>	4 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>

Tabela 3.2: Posição na ordenação das diferentes alternativas usando as diferentes regras.

Uma outra medida de eficiência também utilizada na literatura é a correlação entre as ordenações (ver, por exemplo, Ahn e Park, 2008). A correlação entre as ordenações representa a similaridade da ordenação das alternativas obtida pela utilização de pesos e valores verdadeiros e da ordenação das alternativas obtida por cada uma das regras de decisão utilizada. Alguns dos coeficientes utilizados para estudar a correlação entre as ordenações são: coeficiente de Spearman (Spearman, 1904), coeficiente Gama (Goodman e Kruskal, 1954), coeficiente  $\tau$  de Kendall (Kendall, 1955), e coeficiente D de Somers (Somers, 1974). Por exemplo, o coeficiente de Spearman,  $r_s$ , varia entre  $-1$  e  $1$ , e é determinado através de:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{j=1}^m \delta_j^2}{m(m^2 - 1)}, \quad (3.15)$$

onde  $\delta_j$  representa a diferença entre a posição nas duas ordenações da alternativa  $x^{(j)}$ , e  $m$  o número de alternativas. O valor de  $r_s$  igual a um significa que existe correlação perfeita entre as duas ordenações.

Consideramos que outra medida que seria interessante calcular é a distância entre a ordenação obtida por cada uma das regras e a ordenação supostamente verdadeira. Para isso pode ser utilizada, por exemplo, a distância de Kemeny e Snell (Kemeny e Snell, 1962), que é obtida através da seguinte fórmula:

$$d_{KS}(O, P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |o_{ij} - p_{ij}|, \quad (3.16)$$

onde  $O$  e  $P$  são matrizes de comparação par a par, e

$$o_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a alternativa } x^{(i)} \text{ é preferida a } x^{(j)}; \\ 0.5, & \text{se as alternativas } x^{(i)} \text{ e } x^{(j)} \text{ estão empatadas;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.17)$$

De igual forma para  $p_{ij}$ .

Os resultados relativos ao coeficiente de Spearman e à distância de Kemeny e Snell, entre a ordenação obtida usando pesos e valores verdadeiros e a ordenação obtida por cada uma das regras, estão apresentados na Tabela 3.3. Os resultados mostram que, naturalmente, as ordenações mais próximas da verdadeira são aquelas em que se utiliza menos informação incompleta. No caso de existir informação ordinal sobre os valores, a regra  $\Delta$ ROC é superior à regra ROC.

Regra	Coefficiente de Spearman	Distância de Kemeny e Snell
ROC TRUE	0.9167	4
TRUE ROC	0.9167	8
TRUE $\Delta$ ROC	0.9667	4
ROC ROC	0.9000	12
ROC $\Delta$ ROC	0.9083	10

Tabela 3.3: Comparação entre a ordenação gerada usando pesos e valores verdadeiros e as ordenações geradas usando as diferentes regras.

### 3.4 Simulações

Na Secção 3.2 apresentámos regras que podem ser usadas para seleccionar um subconjunto de alternativas promissoras, fornecendo informação ordinal sobre os pesos do modelo aditivo, informação ordinal sobre o valor de cada alternativa em cada critério, e informação ordinal sobre a diferença de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. Nesta secção descrevemos uma sequência de experiências usando simulação Monte Carlo para comparar essas regras. Nessas experiências considerámos situações com 5, 10 e 15 critérios, e 5, 10 e 15 alternativas. De forma similar ao feito por Salo e Hämäläinen (2001), gerámos de forma aleatória 5000 problemas para cada dimensão, depois de verificar que um maior número de simulações não alterava de forma substancial os resultados<sup>7</sup>. Ao longo deste trabalho, por uma questão de coerência, sempre que utilizamos simulação Monte Carlo são gerados de forma aleatória 5000 problemas para cada dimensão. As simulações são realizadas com base na utilização do programa @Risk (Newfield, NJ, Palisade Corporation 1994) na folha de cálculo Excel.

<sup>7</sup>Uma questão que se coloca neste contexto, é saber qual deverá ser o número de problemas a gerar, de modo a que, com uma certa confiança, o erro que se comete ao estimar o verdadeiro valor da taxa de acerto ( $p$ ) usando o valor da taxa de acerto da amostra ( $\hat{p}$ ), seja inferior a determinado erro ( $e$ ). O número de problemas a gerar ( $n_{itr}$ ) pode ser determinado através de  $n_{itr} = z^2 \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{e^2}$ . Para 95% de confiança o valor de  $z$  é igual a 1.96. Por exemplo, para o caso da regra pesos ROC valores TRUE, e para 5 critérios e 5 alternativas, para uma amostra suficientemente grande ( $n_{itr} > 30$ ) obteve-se uma taxa de acerto igual a  $\hat{p} = 0.859$ . Desta forma, se pretendermos que o erro seja inferior a 0.01 o número de problemas a gerar deverá ser superior a 4653.



Consideremos, por exemplo, um caso com três critérios, no qual  $w_1 > w_2 > w_3$ . Uma vez que  $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ , o espaço dos pesos corresponde ao interior de um triângulo equilátero definido pelos pontos  $(0,0,1)$ ,  $(1,0,0)$  e  $(0,1,0)$  que pode ser projectado, por exemplo, no plano  $w_1 w_2$  (ver lado esquerdo e centro da Figura 3.2). Impondo que  $w_1 > w_2 > w_3$ , tem-se que  $w_1 \geq w_2$ ,  $2w_2 \geq 1 - w_1$  e  $2w_1 \geq 1 - w_2$ . O subconjunto do espaço dos pesos obtido impondo estas restrições é o representado no lado direito da Figura 3.2.

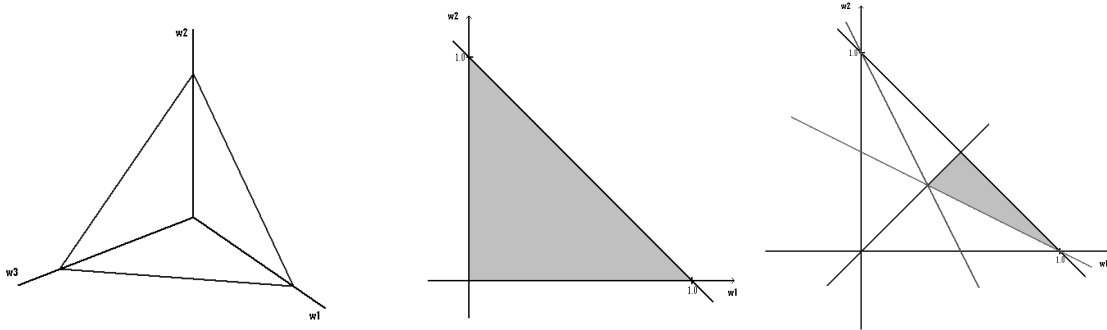


Figura 3.2: Espaço dos pesos.

Se o decisor indicar uma ordenação do peso dos critérios:

*Os pesos dos critérios são gerados de acordo com uma distribuição uniforme em  $W$  usando o processo descrito por Butler et al. (1997). Para gerar os pesos num caso com  $n$  critérios, geramos de forma independente  $n-1$  números usando uma distribuição uniforme em  $[0, 1]$  e ordenamos esses números. Suponhamos que os números ordenados são  $r_{(n-1)} \geq \dots \geq r_{(2)} \geq r_{(1)}$ . É possível obter os pesos determinando as diferenças seguintes:  $w'_n = 1 - r_{(n-1)}$ ,  $w'_{n-1} = r_{(n-1)} - r_{(n-2)}$ , ..., e  $w'_1 = r_{(1)} - 0$ . Deste modo, o vector de pesos  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$  terá soma igual a um e será uniformemente distribuído no simplex unitário definido pelas restrições de ordem (3.2). Neste vector,  $w_1$  representa o maior valor do conjunto  $\{w'_1, w'_2, \dots, w'_n\}$ ,  $w_2$  o segundo maior valor do mesmo conjunto, até  $w_n$  que representa o valor mais pequeno do conjunto.*

Note-se que, como referido por Barron e Barrett (1996), se o conjunto admissível de pesos é completamente especificado por uma ordenação completa, então nenhum ponto em  $W$  deve ser considerado mais provável do que outro, e a densidade dos pesos é uniforme em  $W$ . Além disso, para tornar os resultados do nosso estudo de simulação o mais gerais possível, desejamos considerar todos os pesos verdadeiros possíveis.

O processo descrito por Butler et al. (1997), assume que não existem empates entre alguns pesos. Se o decisor for capaz de identificar empates entre os pesos é possível resolver o problema gerando aleatoriamente combinações convexas dos vértices da região admissível. Os multiplicadores usados nas combinações podem ser gerados usando o processo descrito anteriormente, sem no entanto ordenar os números finais. O processo de encontrar os

vértices é esquematizado por Kmietowicz e Pearman (1984). Os vértices podem também ser determinados usando algoritmos, tais como, “Linear Reverse Search Algorithm” (Avis e Fukuda, 1992).

Se os decisores fornecem informação ordinal sobre o valor de cada alternativa em cada critério:

*Os valores de cada alternativa em cada critério,  $v_i(x^{(j)})$ , são gerados aleatoriamente usando uma distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$  e depois normalizados de tal modo que o maior valor em cada critério seja o valor um e o menor valor seja o valor zero, para  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ . Em cada critério, suponhamos que  $v_i^{me}$  e  $v_i^{ma}$  são o menor e maior valor entre os  $m$  gerados, respectivamente. Deste modo, o valor normalizado de  $v_i(x^{(j)})$  é igual a<sup>8</sup>:*

$$\frac{(v_i(x^{(j)}) - v_i^{me})}{(v_i^{ma} - v_i^{me})}. \quad (3.18)$$

A distribuição uniforme foi também considerada por Salo e Hämäläinen (2001) e Ahn e Park (2008). Barron e Barrett (1996) usaram tanto a distribuição uniforme como a distribuição normal para comparar as taxas de acerto e as perdas de valor de diferentes regras, e concluíram que o uso da distribuição normal não afectava de forma substancial os resultados.

Se o decisor fornecer informação ordinal sobre o valor de cada alternativa em cada critério e informação ordinal sobre a diferença de valor entre alternativas consecutivas em cada critério, e assumindo que os níveis extremos em cada critério são iguais a zero e a um, o procedimento proposto por Butler et al. (1997) pode também ser utilizado para gerar os  $\Delta_{it}$  ( $i = 1, \dots, n$  e  $t = 1, \dots, m_i - 1$ ). Com estes  $\Delta$ 's é possível obter uma aproximação do valor de cada alternativa em cada critério, usando o algoritmo proposto na Subsecção 3.2.2.

Para cada problema gerado aleatoriamente, definido por uma matriz de valores e um vector de pesos, o modelo aditivo fornece o valor global de cada alternativa, que produz uma ordenação das mesmas. Trata-se da ordenação que designamos por ordenação supostamente verdadeira, isto é, a ordenação que obteríamos se fosse usada informação cardinal. Por outro lado, as regras apresentadas produzem ordenações usando informação ordinal sobre o vector de pesos e a matriz de valores. De forma similar ao feito por Barron e Barrett (1996), no caso em que as melhores alternativas das duas ordenações não coincidem, determinámos a perda de valor. Seja  $x^{(real)}$  a suposta melhor alternativa e  $x^{(regra)}$  a melhor alternativa fornecida pela regra, a perda de valor é dada por  $v(x^{(real)}) - v(x^{(regra)})$ . A perda de valor permite-nos saber se a alternativa escolhida por cada uma das regras tem valor muito inferior ao da verdadeira melhor alternativa.

<sup>8</sup>A este tipo de normalização chama-se normalização da razão de diferenças, que apesar de não preservar as razões entre desempenhos, assegura a utilização de toda a gama do intervalo, transformando os desempenhos numa escala uniforme. O mesmo tipo de normalização foi utilizada, por exemplo, por Barron e Barrett (1996), Salo e Hämäläinen (2001) e Salo e Punkka (2005).

Comparando a ordenação das alternativas de acordo com os parâmetros supostamente verdadeiros e a ordenação das alternativas de acordo com a regra de decisão utilizada, considerámos os seguintes resultados:

- A posição que a melhor alternativa de acordo com a ordenação supostamente verdadeira atinge na ordenação gerada pela regra de decisão utilizada. Esta informação permite-nos saber o número mínimo de alternativas que deve ser escolhido, começando pelo topo da ordenação fornecida pela regra, para que a suposta melhor alternativa fosse incluída no conjunto escolhido. No caso em que apenas os pesos são desconhecidos, estes resultados complementam resultados existentes relativamente à taxa de acerto (Barron e Barrett, 1996; Salo e Hämäläinen, 2001; Salo e Punkka, 2005).
- A posição que a melhor alternativa da ordenação gerada pela regra atinge na ordenação supostamente verdadeira. Esta informação permite-nos saber quão boa é a alternativa escolhida pela regra em termos da ordenação supostamente verdadeira. No caso em que apenas os pesos são desconhecidos, estes resultados complementam resultados existentes relativamente à perda de valor (Barron e Barrett, 1996; Salo e Hämäläinen, 2001; Salo e Punkka, 2005).

A posição que a melhor alternativa de acordo com a ordenação supostamente verdadeira atinge na ordenação gerada pela regra permite avaliar a estratégia de reter  $m' < m$  alternativas em vez de apenas uma. A posição que a melhor alternativa na ordenação gerada pela regra atinge na ordenação supostamente verdadeira complementa outros resultados que mostram se a alternativa escolhida pela regra é uma boa alternativa, por exemplo, a perda de valor.

## 3.5 Resultados

### 3.5.1 Introdução

Nas tabelas apresentadas nesta secção, “ROC TRUE” refere-se ao uso de pesos ROC e valores verdadeiros, “maximin TRUE” refere-se ao uso da regra maximin para os pesos e valores verdadeiros, e assim sucessivamente, até “ROC ROC” que se refere ao uso de pesos ROC e valores ROC.

### 3.5.2 Informação incompleta relativamente ao peso dos critérios

Foi realizado um primeiro conjunto de experiências com o objectivo de ver como as diferentes regras se comparavam, quando a informação incompleta se refere apenas ao peso dos critérios. Numa estratégia de seleccionar a melhor alternativa de acordo com cada regra, olhámos para a posição atingida pela alternativa sugerida pela regra, na ordenação supostamente verdadeira. Resultados detalhados relativos à posição que a melhor

alternativa de acordo com cada regra atinge na ordenação supostamente verdadeira são apresentados na Tabela 3.4. Esta tabela mostra, para cada regra e para cada dimensão, a posição média na suposta ordenação verdadeira e a percentagem de casos em que a posição atingida é  $1, \leq 2, \leq 3, \leq 4$  e  $\leq 5$ . A coluna %1 na Tabela 3.4 mostra a taxa de acerto das diferentes regras, isto é, a percentagem de casos em que a regra selecciona a suposta melhor alternativa, e permite tirar algumas conclusões:

- Os resultados indicam que os pesos ROC são a melhor regra para esta estratégia, com uma taxa de acerto média de 83.40, maior do que as taxas de acerto médias para as regras maximin (71.58), arrependimento minimax (67.94), e pesos centrais (66.64).
- Utilizámos alguns testes estatísticos para verificar se ocorre uma diferença significativa entre a regra pesos ROC e as outras regras relativamente às taxas de acerto médias, depois de verificar que se verificam os pressupostos necessários à utilização dos mesmos. A estatística de teste a utilizar para comparar as taxas de acerto médias considerando amostras emparelhadas de pequenas dimensões (amostras estas provenientes de populações normais) é:

$$T = \frac{\bar{D}}{s_D/\sqrt{q}}, \quad (3.19)$$

onde  $q$  representa o número de dimensões diferentes para o problema (neste caso,  $q = 9$  uma vez que as diferentes dimensões são:  $5*5, 5*10, 5*15, 10*5, 10*10, 10*15, 15*5, 15*10$ , e  $15*15$ ),  $D$  representa a diferença entre as taxas de acerto das duas regras comparadas, para cada uma das dimensões do problema,  $\bar{D}$  representa a média de  $D$  e  $s_D$  representa o desvio padrão de  $D$ . A estatística de teste considerada segue uma distribuição t de Student com  $q - 1$  graus de liberdade.

Comparando as regras pesos ROC e maximin, obtivemos um valor observado para a estatística de teste de 10.576 e um valor-p de 0. O valor-p é o menor nível de significância<sup>9</sup> para o qual a hipótese de igualdade das regras pode ser rejeitada. Neste caso, o valor-p igual a zero significa que a regra pesos ROC pode ser considerada superior à regra maximin qualquer que seja o nível de significância utilizado. Comparando a regra pesos ROC com as regras arrependimento minimax e pesos centrais obtivemos valores observados para a estatística de teste de 6.406 e 5.823, respectivamente, e valores-p iguais a 0.

---

<sup>9</sup>O nível de significância representa a probabilidade de cometer um erro do tipo I, também chamado de erro de rejeição. Ou seja, é a probabilidade de rejeitar a igualdade entre as regras, quando de facto elas são iguais.

- Não existe muita diferença entre os resultados das regras maximin, arrependimento minimax e valores centrais, todas oferecendo resultados razoáveis (mas piores do que os da regra pesos ROC). Para problemas com 5 critérios, a regra pesos centrais é, quase sempre, a melhor das três, mas é a pior para problemas com 10 e 15 critérios.
- Usando os pesos ROC, a taxa de acerto decresce moderadamente à medida que o número de alternativas aumenta, e aumenta, também de forma moderada, à medida que o número de critérios aumenta. Para as restantes regras, a taxa de acerto decresce de forma mais brusca à medida que o número de alternativas aumenta, e também decresce à medida que o número de critérios aumenta.

		ROC TRUE						maximin TRUE					
n	m	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
5	5	1.18	84.96	97.22	99.62	99.96	100	1.24	79.84	96.08	99.62	99.98	100
5	10	1.25	81.76	94.98	98.56	99.57	99.83	1.40	71.82	91.52	97.04	99.30	99.86
5	15	1.30	79.72	93.86	97.76	99.12	99.66	1.56	65.90	86.40	94.76	98.08	99.24
10	5	1.17	85.58	97.56	99.74	99.94	100	1.29	77.04	94.74	99.28	99.90	100
10	10	1.24	82.46	95.56	98.76	99.54	99.94	1.43	70.68	90.42	97.12	99.00	99.66
10	15	1.27	80.80	94.38	98.22	99.48	99.84	1.53	66.90	87.32	95.68	98.18	99.46
15	5	1.14	87.92	98.00	99.76	100	100	1.34	74.62	93.34	98.54	99.76	100
15	10	1.20	84.46	96.56	99.20	99.70	99.86	1.45	69.82	89.58	96.70	98.86	99.70
15	15	1.24	82.96	95.30	98.60	99.68	99.94	1.54	67.64	87.28	94.72	97.66	99.20
		arrependimento minimax TRUE						pesos centrais TRUE					
n	m	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
5	5	1.26	79.66	95.54	99.36	99.92	100	1.26	79.78	95.14	99.06	99.84	100
5	10	1.40	73.80	91.40	96.80	98.76	99.60	1.41	74.28	90.54	96.28	98.58	99.40
5	15	1.49	70.34	87.36	94.10	97.40	98.36	1.52	71.14	88.28	94.26	97.12	98.62
10	5	1.38	73.18	91.36	97.64	99.64	100	1.40	72.24	90.98	97.08	99.34	100
10	10	1.57	66.86	86.32	94.02	97.46	99.02	1.68	64.56	83.68	91.48	95.58	97.76
10	15	1.69	62.82	83.24	92.08	96.14	98.18	1.87	59.62	79.46	88.72	93.16	96.18
15	5	1.48	67.04	89.02	96.68	99.26	100	1.52	66.96	87.18	95.48	98.50	100
15	10	1.73	60.64	81.88	87.06	91.82	94.26	1.89	56.68	77.52	88.18	93.88	96.90
15	15	1.88	57.10	79.14	89.16	94.04	96.86	2.10	54.44	74.44	84.84	90.66	94.06

Tabela 3.4: Posição da melhor alternativa de acordo com as regras pesos ROC, maximin, arrependimento minimax e pesos centrais, na ordenação supostamente verdadeira: valores verdadeiros ( $n$  denota o número de critérios e  $m$  o número de alternativas).

Obviamente que à medida que o número de alternativas aumenta, diminui a taxa de acerto, no entanto não deve ser ignorado o valor da probabilidade de base. Isto é, se estivermos perante 5 alternativas, escolhendo uma alternativa completamente ao acaso, a probabilidade de escolher efectivamente a melhor alternativa é de 20%. Se tivermos um conjunto de 20 alternativas, a probabilidade correspondente já será de 5%. Desta forma, consideramos que não se deve olhar apenas para a taxa de acerto, mas também para o valor da taxa de acerto a dividir pelo valor da probabilidade de base. Na Figura 3.3 representamos o valor da taxa de acerto média a dividir pelo valor da probabilidade de base, em função do número de alternativas do problema, para as quatro regras estudadas, e considerando valores verdadeiros. Como é possível verificar, apesar da taxa de acerto diminuir com o aumento do número de alternativas do problema, o valor da taxa de acerto a dividir pelo valor da probabilidade de base aumenta para todas as regras consideradas, sendo esse aumento mais notório para a regra pesos ROC. Apesar do valor da taxa de acerto a dividir pelo valor da probabilidade de base ser um importante indicativo da qualidade das aproximações, daqui para a frente iremos referir apenas a taxa de acerto.

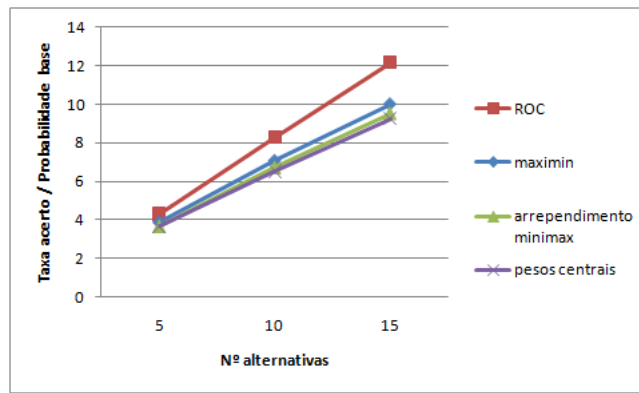


Figura 3.3: Valor da taxa de acerto a dividir pelo valor da probabilidade de base, em função do número de alternativas do problema: valores verdadeiros.

A Tabela 3.4 também é útil para verificar como as diferentes regras se comparam quando, em vez de considerar a probabilidade de obter a suposta melhor alternativa (dada pela taxa de acerto), consideramos a probabilidade de obter uma das alternativas no topo da ordenação supostamente verdadeira. Por exemplo, a alternativa sugerida pela regra pesos ROC é uma das duas melhores alternativas em pelo menos 93% dos casos, enquanto que esta probabilidade é consideravelmente inferior para as restantes regras (ver a coluna  $\% \leq 2$ ).

Numa estratégia de redução progressiva do número de alternativas, o objectivo é reter o número mínimo de alternativas para análise futura, sem no entanto eliminar a melhor. Um questão interessante neste ponto é saber quantas alternativas devem ser retidas. Para responder a esta questão, é necessário saber a posição da suposta melhor alternativa na ordenação produzida por cada regra. A Tabela 3.5 indica, para cada dimensão, a posição média da suposta melhor alternativa na ordenação fornecida por cada regra, assim como a percentagem de casos em que a posição é  $1, \leq 2, \leq 3, \leq 4$  e  $\leq 5$ . A Figura 3.4, que mostra claramente a superioridade da regra pesos ROC, mostra também como a probabilidade de reter a suposta melhor alternativa, aumenta com o número de alternativas retidas:

- Usando a regra pesos ROC, para as dimensões consideradas, seleccionar duas alternativas é suficiente para reter a suposta melhor em, pelo menos, 94% dos casos. Seleccionar três alternativas não é suficiente apenas em 2% dos casos, no máximo. Para as outras regras é necessário seleccionar mais alternativas, especialmente à medida que a dimensão do problema aumenta.

Seguidamente apresentamos um estudo similar, para obter resultados comparáveis, considerando primeiramente que a informação incompleta se refere apenas ao valor de cada alternativa em cada critério, e posteriormente que a informação incompleta se refere simultaneamente ao peso dos critérios e ao valor de cada alternativa em cada critério.

		ROC TRUE						maximin TRUE					
n	m	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
5	5	1.18	84.96	97.12	99.78	100	100	1.29	79.84	94.38	97.92	99.24	100
5	10	1.25	81.76	95.12	98.66	99.66	99.92	1.50	71.82	89.00	95.24	97.42	97.98
5	15	1.29	79.72	94.12	98.02	99.26	99.80	1.66	65.90	85.04	92.94	96.22	97.38
10	5	1.17	85.58	97.58	99.52	99.94	100	1.38	77.04	91.26	95.70	97.90	100
10	10	1.24	82.46	95.22	98.58	99.60	100	1.50	70.68	87.50	93.70	96.00	96.66
10	15	1.27	80.80	94.58	98.52	99.42	99.78	1.76	66.90	84.30	91.82	94.56	95.84
15	5	1.15	87.92	97.88	99.70	99.96	100	1.45	74.62	89.26	94.18	97.28	100
15	10	1.21	84.46	96.38	99.04	99.70	99.86	1.72	69.82	85.26	91.14	93.60	94.44
15	15	1.23	82.96	95.90	98.64	99.52	99.78	1.87	67.64	83.74	90.18	93.46	95.00
		arrependimento minimax TRUE						pesos centrais TRUE					
n	m	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
5	5	1.32	79.66	92.12	96.97	99.23	100	1.27	79.78	94.84	98.84	99.74	100
5	10	1.56	73.80	86.78	92.72	95.60	96.44	1.39	74.28	91.62	96.96	98.72	99.54
5	15	1.72	70.34	84.38	90.44	93.92	94.88	1.50	71.14	88.38	95.46	97.54	99.04
10	5	1.48	73.18	86.64	93.80	97.90	100	1.40	72.24	91.28	97.58	99.36	100
10	10	1.84	66.86	80.80	87.62	91.84	93.40	1.65	64.56	85.48	92.90	96.30	98.48
10	15	2.19	62.82	76.88	82.98	87.54	89.58	1.85	59.62	80.52	89.62	94.20	97.22
15	5	1.60	67.04	83.08	92.16	97.28	100	1.50	66.96	88.00	96.10	99.14	100
15	10	2.12	60.64	74.78	82.68	88.22	90.66	1.86	56.68	79.62	89.34	94.20	97.22
15	15	2.52	57.10	71.02	78.98	84.12	86.94	2.10	54.44	75.58	85.54	90.96	94.36

Tabela 3.5: Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas regras pesos ROC, maximin, arrependimento minimax e pesos centrais: valores verdadeiros.

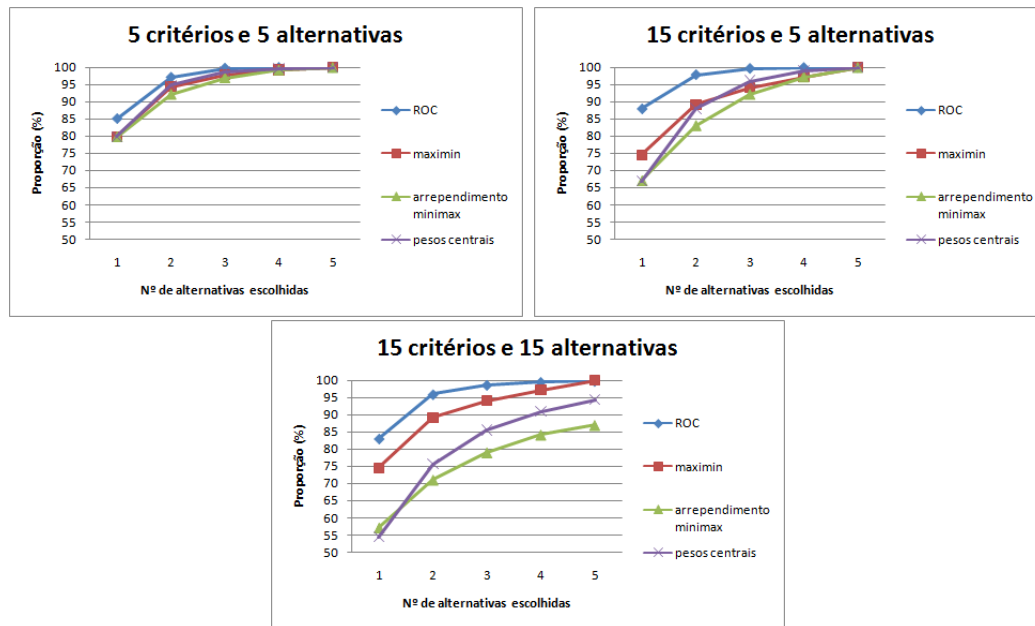


Figura 3.4: Percentagem de casos em que a melhor alternativa é escolhida, em função do número de alternativas retidas: valores verdadeiros.

### 3.5.3 Informação incompleta relativamente ao valor de cada alternativa em cada critério

Neste conjunto de experiências considerámos que os pesos dos critérios eram conhecidos, mas supusemos que o decisor havia indicado informação incompleta sobre o valor de cada alternativa em cada critério. Testámos a regra valores ROC (assumindo que o decisor ordenava as alternativas) e a regra valores  $\Delta$ ROC (assumindo que o decisor ordenava as alternativas e ordenava as diferenças de valor entre alternativas consecutivas) para o valor de cada alternativa em cada critério.

Um primeiro conjunto de experiências foi realizado com o objectivo de ver como as diferentes regras se comparavam numa estratégia de seleccionar a melhor alternativa de acordo com cada regra. Resultados detalhados sobre a posição que a melhor alternativa de acordo com as regras valores ROC e valores  $\Delta$ ROC alcança na ordenação supostamente verdadeira, são apresentados na Tabela 3.6:

- Os resultados indicam que o uso de pesos supostamente verdadeiros e valores  $\Delta$ ROC leva a uma taxa de acerto superior a 90%. Com esta regra, a taxa de acerto aumenta com o aumento do número de alternativas. Usando pesos verdadeiros e valores ROC a taxa de acerto varia entre os 76% e os 81%. O uso de valores  $\Delta$ ROC leva a um aumento substancial na taxa de acerto quando comparado com o uso de valores ROC.
- Utilizámos testes estatísticos para verificar se ocorre uma diferença significativa entre as taxas de acerto médias da regra pesos TRUE valores ROC (78.62) e da regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC (91.88). Obtivemos um valor observado para a estatística de teste de 22.499 e um valor-p de 0, o que significa que a regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC pode ser considerada superior à regra pesos TRUE valores ROC qualquer que seja o nível de significância considerado.

Para saber quantas alternativas devem ser retidas, precisamos de saber a posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida por cada regra. Os resultados estão apresentados na Tabela 3.7. Obviamente, a probabilidade de reter a suposta melhor alternativa aumenta com o número de alternativas que é retido:

- Para a regra valores ROC, seleccionar duas alternativas é suficiente em, pelo menos, 93% dos casos, enquanto que seleccionar três alternativas não é suficiente em apenas 3% dos casos, no máximo. Podemos ver que a informação adicional requerida do decisor pela regra valores  $\Delta$ ROC é compensada por resultados claramente superiores em comparação com a regra valores ROC.

n	m	TRUE $\Delta$ ROC						TRUE ROC					
		Média	% $\leq 1$	% $\leq 2$	% $\leq 3$	% $\leq 4$	% $\leq 5$	Média	% $\leq 1$	% $\leq 2$	% $\leq 3$	% $\leq 4$	% $\leq 5$
5	5	1.10	91.00	99.20	99.92	100	100	1.25	78.78	96.22	99.58	99.98	100
5	10	1.09	91.82	99.18	99.86	100	100	1.28	78.66	95.04	98.68	99.72	99.92
5	15	1.08	93.32	99.20	99.82	100	100	1.29	79.02	94.32	98.46	99.52	99.86
10	5	1.10	90.76	99.22	99.96	100	100	1.24	80.94	95.86	99.24	99.94	100
10	10	1.09	91.58	99.12	99.88	100	100	1.32	77.38	93.40	97.90	99.48	99.84
10	15	1.08	93.00	99.28	99.92	100	100	1.31	77.76	93.80	98.30	99.46	99.92
15	5	1.10	90.80	99.16	99.96	100	100	1.26	79.20	95.84	99.22	99.92	100
15	10	1.09	91.88	99.00	99.92	99.98	100	1.31	76.84	93.54	98.18	99.44	99.88
15	15	1.08	92.80	99.20	99.84	99.98	100	1.30	79.00	93.74	98.14	99.58	99.82

Tabela 3.6: Posição da melhor alternativa de acordo com as regras valores ROC e valores  $\Delta$ ROC na ordenação supostamente verdadeira: pesos verdadeiros.



n	m	TRUE $\Delta$ ROC						TRUE ROC					
		Média	% 1	% $\leq$ 2	% $\leq$ 3	% $\leq$ 4	% $\leq$ 5	Média	% 1	% $\leq$ 2	% $\leq$ 3	% $\leq$ 4	% $\leq$ 5
5	5	1.10	91.00	99.12	99.92	100	100	1.25	78.78	96.38	99.66	99.96	100
5	10	1.09	91.82	99.32	99.96	100	100	1.28	78.66	95.10	98.78	99.72	99.92
5	15	1.07	93.32	99.28	99.94	99.98	100	1.29	79.02	93.94	98.34	99.54	99.84
10	5	1.10	90.76	99.22	99.98	100	100	1.24	80.94	96.04	99.26	99.90	100
10	10	1.10	91.58	98.84	99.94	99.98	100	1.32	77.38	93.44	98.24	99.48	99.84
10	15	1.08	93.00	99.26	99.98	100	100	1.31	77.76	94.12	97.84	99.26	99.88
15	5	1.10	90.80	99.18	99.94	100	100	1.26	79.20	95.76	99.16	99.96	100
15	10	1.09	91.88	98.98	99.88	99.94	100	1.31	76.84	93.66	98.10	99.46	99.92
15	15	1.08	92.80	99.28	99.92	99.98	100	1.29	79.00	93.88	98.46	99.58	99.92

Tabela 3.7: Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas regras valores ROC e valores  $\Delta$ ROC: pesos verdadeiros.

### 3.5.4 Informação incompleta relativamente ao peso dos critérios e ao valor de cada alternativa em cada critério

Nesta subsecção consideramos que o peso dos critérios e o valor de cada alternativa em cada critério são ambos desconhecidos. O decisor indica apenas informação ordinal sobre os pesos e sobre o valor de cada alternativa em cada critério, possivelmente adicionando informação ordinal sobre diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. Considerando informação incompleta relativamente ao peso dos critérios, usámos a regra pesos ROC, uma vez que, como mostrado na Subsecção 3.5.2, é a que produz melhores resultados. Testámos as regras que combinam pesos ROC com valores ROC, e pesos ROC com valores  $\Delta$ ROC. A Tabela 3.8 mostra a posição da melhor alternativa de acordo com as regras pesos ROC valores ROC, e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC na ordenação supostamente verdadeira:

- Em geral, usando pesos ROC e valores ROC ou  $\Delta$ ROC a taxa de acerto diminui com o aumento do número de alternativas e aumenta com o aumento do número de critérios.
- Os resultados são obviamente piores do que os obtidos considerando os pesos conhecidos (Subsecção 3.5.3), uma vez que esta é a situação na qual é exigida do decisor menos informação. No entanto, deve ser notado que combinando pesos ROC e valores  $\Delta$ ROC conduz a resultados similares aos obtidos quando se assume que o valor de cada alternativa em cada critério é conhecido e se usam pesos ROC (ver Subsecção 3.5.2). Mais uma vez, a informação adicional requerida do decisor pela regra valores  $\Delta$ ROC é compensada por resultados superiores comparando com a regra valores ROC.
- Utilizámos testes estatísticos para verificar se ocorre uma diferença significativa entre as taxas de acerto médias da regra pesos ROC valores ROC (73.86) e da regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC (81.72). Obtivemos um valor observado para a estatística de teste de 21.469 e um valor-p de 0, o que significa que a regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC pode ser considerada superior à regra pesos ROC valores ROC para todos os níveis de significância.

- Nas experiências anteriores onde se consideraram pesos verdadeiros e valores  $\Delta\text{ROC}$ , os resultados indicaram que a taxa de acerto é superior a 90%. Se considerarmos que também não conhecemos os pesos, e usarmos pesos ROC, os resultados também são bons, uma vez que a taxa de acerto é superior a 78%.

A Tabela 3.9 mostra a posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas regras pesos ROC valores ROC, e pesos ROC valores  $\Delta\text{ROC}$ :

- Reter duas alternativas é suficiente para reter a melhor em pelo menos 93% dos casos, usando a regra pesos ROC valores  $\Delta\text{ROC}$ . Para a regra pesos ROC valores ROC a percentagem correspondente é de 89%. Usar pesos ROC e valores  $\Delta\text{ROC}$  facilita a eliciação da informação e leva a uma rápida identificação das alternativas mais promissoras.

n	m	ROC $\Delta\text{ROC}$						ROC ROC					
		Média	% 1	% $\leq 2$	% $\leq 3$	% $\leq 4$	% $\leq 5$	Média	% 1	% $\leq 2$	% $\leq 3$	% $\leq 4$	% $\leq 5$
5	5	1.21	83.12	96.52	99.58	100	100	1.32	74.98	94.20	98.94	99.92	100
5	10	1.29	79.44	94.28	98.16	99.58	99.96	1.41	72.92	90.72	96.72	99.14	99.54
5	15	1.31	78.98	93.54	97.72	99.06	99.66	1.47	71.26	89.12	95.64	98.34	99.40
10	5	1.21	83.02	96.92	99.58	99.96	100	1.31	75.98	94.12	98.74	99.92	100
10	10	1.25	81.42	95.24	98.66	99.68	99.90	1.42	72.26	90.50	96.56	98.82	99.68
10	15	1.29	80.50	94.40	97.88	99.08	99.74	1.46	71.84	89.76	95.84	98.20	99.48
15	5	1.19	84.40	96.84	99.60	100	100	1.32	76.20	93.72	98.64	99.76	100
15	10	1.23	83.24	95.96	98.70	99.64	99.88	1.39	74.02	91.42	96.90	99.02	99.52
15	15	1.26	81.40	94.70	98.46	99.48	99.74	1.39	75.22	91.02	96.76	98.62	99.40

Tabela 3.8: Posição da melhor alternativa de acordo com a regras pesos ROC valores ROC, e pesos ROC valores  $\Delta\text{ROC}$  na ordenação supostamente verdadeira.

n	m	ROC $\Delta\text{ROC}$						ROC ROC					
		Média	% 1	% $\leq 2$	% $\leq 3$	% $\leq 4$	% $\leq 5$	Média	% 1	% $\leq 2$	% $\leq 3$	% $\leq 4$	% $\leq 5$
5	5	1.21	83.12	96.66	99.56	100	100	1.32	75.00	94.28	98.74	99.84	100
5	10	1.28	79.44	94.60	98.30	99.44	99.76	1.43	72.92	90.76	96.22	98.40	99.66
5	15	1.31	78.98	93.64	97.72	99.00	99.60	1.47	71.26	89.10	95.76	98.24	99.18
10	5	1.20	83.02	97.10	99.68	99.98	100	1.32	75.98	93.24	98.66	99.90	100
10	10	1.25	81.42	95.08	98.58	99.68	99.92	1.43	72.26	90.52	96.38	98.74	99.62
10	15	1.28	80.50	94.32	98.04	99.36	99.80	1.46	71.84	89.32	96.04	98.30	99.22
15	5	1.19	84.40	97.00	99.54	99.96	100	1.31	76.20	94.38	98.80	99.84	100
15	10	1.22	83.24	96.10	98.88	99.76	99.90	1.39	74.02	91.34	97.08	99.04	99.76
15	15	1.25	81.40	94.94	98.70	99.60	99.86	1.38	75.22	91.44	96.64	99.08	99.54

Tabela 3.9: Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas regras pesos ROC valores ROC, e pesos ROC valores  $\Delta\text{ROC}$ .

### 3.5.5 Comparação das regras relativamente à taxa de acerto média

Utilizámos alguns testes estatísticos para verificar se ocorre uma diferença significativa entre as taxas de acerto médias de todas as regras. Além do já concluído nas subsecções anteriores verificámos ainda que:

- Obviamente a regra pesos ROC valores TRUE é superior à regra pesos ROC valores  $\Delta\text{ROC}$  (com um valor-p igual a 0.001), a regra pesos TRUE valores ROC é superior à regra pesos ROC valores ROC, a regra pesos TRUE valores  $\Delta\text{ROC}$  é superior à regra pesos ROC valores  $\Delta\text{ROC}$  e a regra pesos ROC valores TRUE é superior à regra pesos ROC valores ROC.

- A regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC é superior à regra pesos ROC valores TRUE.
- A regra pesos ROC valores TRUE é superior à regra pesos TRUE valores ROC.
- A regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC é superior à regra pesos ROC valores ROC.
- A regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC é superior à regra pesos TRUE valores ROC (com um valor-p igual a 0.002).

Foi então possível verificar que, relativamente à taxa de acerto média, a regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC é a melhor, seguida das regras pesos ROC valores TRUE, pesos ROC valores  $\Delta$ ROC, pesos TRUE valores ROC e pesos ROC valores ROC.

### 3.5.6 Perda de valor

Na Tabela 3.10 é possível ver o valor médio e o valor máximo da perda de valor das diferentes regras:

- Por exemplo, considerando que os valores são conhecidos (valores TRUE), e usando pesos ROC, a perda de valor média varia entre 0.0207 e 0.0589, e a perda de valor máxima é um valor entre 0.1610 e 0.4222.
- Utilizámos alguns testes estatísticos para verificar se ocorre uma diferença significativa entre as perdas de valor médias de todas as regras.

- . Concluimos obviamente que a regra pesos ROC valores TRUE é melhor do que a regra pesos ROC valores ROC relativamente à perda de valor média, uma vez que apresenta uma perda de valor média inferior. Concluimos também que a regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC é melhor do que a regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC, e que a regra pesos TRUE valores ROC é melhor do que a regra pesos ROC valores ROC.
- . Concluimos que a regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC é melhor do que a regra pesos ROC valores TRUE, a regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC é melhor do que a regra pesos ROC valores ROC, a regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC é melhor do que a regra pesos TRUE valores ROC, e a regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC é melhor do que a regra pesos ROC valores ROC.
- . Comparando as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC obtivemos um valor observado para a estatística de teste de  $-1.974$  e um valor-p de 0.084, comparando as regras pesos ROC valores TRUE e pesos TRUE valores ROC obtivemos um valor observado para a estatística de teste de  $-2.453$  e um valor-p de 0.040, os valores correspondentes comparando as regras pesos ROC valores  $\Delta$ ROC e pesos TRUE valores ROC foram de  $-1.840$  e 0.103, respectivamente. Desta forma é possível considerar, dependendo obviamente do nível de significância utilizado, que não existem diferenças significativas entre as regras consideradas.

Na Figura 3.5 é possível ver uma ilustração do comportamento das diferentes regras relativamente à perda de valor média, considerando, por exemplo, um nível de significância de 1%. É possível verificar que a regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC é a melhor, e a regra pesos ROC valores ROC é a pior. As regras pesos TRUE valores ROC, pesos ROC valores ROC e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC podem ser consideradas equivalentes.

n	m	ROC TRUE		ROC $\Delta$ ROC		ROC ROC		TRUE $\Delta$ ROC		TRUE ROC	
		Média	Máximo	Média	Máximo	Média	Máximo	Média	Máximo	Média	Máximo
5	5	0.0589	0.4222	0.0663	0.4926	0.0816	0.5351	0.0316	0.2455	0.0655	0.3123
5	10	0.0433	0.2999	0.0482	0.3177	0.0668	0.5143	0.0171	0.0994	0.0459	0.2377
5	15	0.0383	0.3009	0.0400	0.2364	0.0543	0.4223	0.0076	0.1755	0.0391	0.2105
10	5	0.0391	0.3053	0.0459	0.3605	0.0662	0.3808	0.0238	0.1195	0.0535	0.2602
10	10	0.0314	0.3092	0.0339	0.3466	0.0480	0.2845	0.0119	0.0705	0.0367	0.1996
10	15	0.0276	0.2158	0.0292	0.2780	0.0412	0.2804	0.0100	0.0607	0.0292	0.1599
15	5	0.0285	0.2217	0.0365	0.4018	0.0534	0.3167	0.0207	0.0991	0.0447	0.2341
15	10	0.0236	0.2448	0.0280	0.1751	0.0346	0.1946	0.0111	0.0693	0.0311	0.1922
15	15	0.0207	0.1610	0.0215	0.1869	0.0355	0.2080	0.0070	0.0580	0.0243	0.0998

Tabela 3.10: Perda de valor.

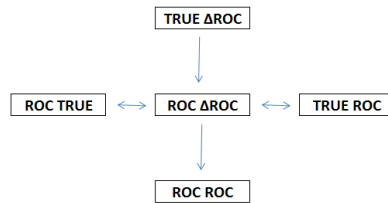


Figura 3.5: Comparação das diferentes regras relativamente à perda de valor média, considerando um nível de significância de 1%.

### 3.6 Conclusões

Este capítulo apresenta algumas regras de decisão e uma série de simulações Monte Carlo, com o objectivo de estudar e comparar o comportamento dessas regras, para o caso em que existe apenas informação ordinal relativamente ao peso dos critérios e ao valor de cada alternativa em cada critério, considerando o modelo de agregação aditivo para funções de valor. As experiências apresentadas estendem experiências realizadas anteriormente por outros autores, centradas no cálculo de taxas de acerto e perdas de valor, na medida em que testam estratégias de seleccionar mais do que uma alternativa. Estas experiências também consideram desconhecido o valor de cada alternativa em cada critério. O propósito deste tipo de estratégias é simplificar o problema em termos do número de alternativas, com o objectivo de as estudar em mais detalhe, ou com o objectivo de eliciar mais informação.

Para a estratégia de seleccionar apenas uma alternativa, os nossos resultados corroboram com os encontrados na literatura (por exemplo, Barron e Barrett, 1996; Ahn e Park, 2008) que indicam que quando temos uma ordenação dos pesos, os pesos ROC são a melhor regra a ser utilizada, particularmente quando o número de critérios aumenta. Além disso, esta regra tem a vantagem de ser fácil de perceber e de implementar. No entanto, se o decisor pretender aumentar a taxa de acerto e para isso não se importar de dar mais alguma informação sobre as suas preferências relativamente aos pesos, tem a hipótese de usar a regra pesos  $\Delta$ ROC. Fizemos uma simulação para o caso com 5 alternativas e 5 critérios e verificámos que usando pesos  $\Delta$ ROC e supondo conhecido o valor de cada alternativa em cada critério a taxa de acerto é de 90.14% (comparando com os 84.96% quando se usam pesos ROC e se supõe conhecido o valor de cada alternativa em cada critério). No entanto, consideramos que a taxa de acerto obtida quando se utilizam pesos ROC já é suficientemente elevada, e por este facto talvez não se justifique a informação adicional requerida pela regra pesos  $\Delta$ ROC.

Se são escolhidas as duas ou três melhores alternativas de acordo com a regra pesos ROC (considerando valores verdadeiros), as chances de seleccionar a suposta melhor alternativa aumentam substancialmente para pelo menos 94% e 98%, respectivamente.

Uma das originalidades deste trabalho, para além da ultrapassagem do enfoque na melhor alternativa de cada regra, é considerar a aplicação de regras de decisão quando se tem informação ordinal relativamente ao valor de cada alternativa em cada critério. Propusemos a adaptação da regra ROC para este propósito, e também uma nova regra que exige um pouco mais de informação (mas facilmente eliciável, por exemplo, através de um esboço desenhado pelo decisor, conforme sugerimos), a regra valores  $\Delta$ ROC. Se consideramos que não conhecemos o valor de cada alternativa em cada critério, os nossos resultados mostram que a regra valores  $\Delta$ ROC conduz a resultados claramente superiores aos da regra valores ROC.

Relativamente às questões colocadas no início do capítulo:

1. Como verificámos no exemplo e nas experiências, na maioria dos casos, usar informação ordinal conduz a bons resultados na identificação das alternativas mais promissoras.
2. Foi possível verificar que, relativamente à taxa de acerto média, a regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC é a melhor, seguida das regras pesos ROC valores TRUE, pesos ROC valores  $\Delta$ ROC, pesos TRUE valores ROC e pesos ROC valores ROC. Relativamente à perda de valor média, a regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC é a melhor, a regra pesos ROC valores ROC é a pior, e as regras pesos TRUE valores ROC, pesos ROC valores ROC e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC podem ser consideradas equivalentes. A melhor regra apresentada para os casos em que não existe nenhuma informação cardinal foi o uso de pesos ROC e valores  $\Delta$ ROC. Com esta regra a taxa de acerto varia entre 78% e 85%. A regra apresentada é boa para seleccionar um subconjunto das alternativas mais promissoras: escolher apenas as duas melhores alternativa segundo esta regra

é suficiente em 93% dos casos, ou mais, dependendo da dimensão do problema, para reter a melhor alternativa de acordo com os valores e pesos supostamente verdadeiros.

3. Considerando valores conhecidos e pesos desconhecidos, usando pesos ROC, a taxa de acerto decresce moderadamente à medida que o número de alternativas aumenta, e aumenta também de forma moderada à medida que o número de critérios aumenta. Para as restantes regras, a taxa de acerto decresce de forma mais brusca à medida que o número de alternativas aumenta, e também decresce à medida que o número de critérios aumenta. Com a regra pesos TRUE valores  $\Delta$ ROC a taxa de acerto aumenta com o aumento do número de alternativas. Em geral, usando pesos ROC e valores ROC ou  $\Delta$ ROC a taxa de acerto diminui com o aumento do número de alternativas e aumenta com o aumento do número de critérios.

A eliciação da informação que utilizamos torna a análise mais fácil, mesmo que não seja muito precisa. Será assim de recomendar o uso de informação ordinal para identificar as alternativas mais promissoras, sempre que se antever que seja difícil ou moroso usar os processos tradicionais para eliciar valores precisos para todos os parâmetros. Isto pode acontecer pois o decisor considera cognitivamente difícil expressar *trade-offs* de forma cardinal, porque o tempo é escasso, porque é dispendioso avaliar ou medir o desempenho das alternativas, ou por outras razões. Eliciar informação ordinal sobre diferenças de valor consecutivas requer um pequeno esforço adicional, mas o resultante aumento na qualidade dos resultados, na nossa opinião, justifica este passo extra.

A desvantagem das regras ROC e  $\Delta$ ROC é que estas não fornecem nenhuma informação sobre a perda de valor associada com a selecção de uma ou mais alternativas nas melhores posições com respeito à suposta melhor. Para acompanhar esta preocupação podem ser usadas as regras arrependimento minimax, quasi-optimalidade e quasi-dominância. As nossas experiências mostraram que, considerando valores conhecidos, a regra arrependimento minimax é claramente inferior à regra pesos ROC. É possível que as regras quasi-optimalidade e quasi-dominância forneçam resultados quase tão bons como o uso de pesos ROC. Para mais detalhes sobre estas regras ver, por exemplo, Sarabando (2006). Este será certamente um interessante tópico para investigar futuramente.

Relativamente ao tipo de informação utilizado restringimos o nosso estudo ao caso em a informação incompleta sobre os valores dos parâmetros se refere a uma ordenação dos mesmos, que é frequentemente o primeiro passo quando outros métodos (por exemplo, a técnica dos *swings* e a técnica das equações de indiferença) são utilizados. No entanto seria interessante considerar outro tipo de restrições, como por exemplo, intervalos de valores, intervalos para rácios de valores, restrições lineares para os valores, restrições não lineares para os valores e ordenações parciais dos valores (como considerado, por exemplo, no método SMAA-2, Lahdelma e Salminen (2001)).

---

No Capítulo 5 mostraremos como utilizar as aproximações consideradas neste capítulo em casos com múltiplos decisores, nomeadamente na negociação e na decisão em grupo. Note-se que, por exemplo, na decisão em grupo, a eliciação de relações de ordem é menos propícia a desacordos do que eliciar valores precisos para os parâmetros.





# Decisão Colectiva: Enquadramento

## 4.1 Introdução

Grande parte das decisões mais complexas dentro de uma organização são tomadas e implementadas por grupos de pessoas. Os participantes em grupos de decisão podem vir de diferentes áreas funcionais ou de diferentes níveis de supervisão, apresentando uma variedade de perspectivas para o grupo. Por um lado, esta variedade pode enriquecer o trabalho do grupo, por outro lado pode tornar mais lento o processo de decisão. Na literatura são apresentadas algumas vantagens e desvantagens da tomada de decisão colectiva (ver, por exemplo, Ben-Arieh et al., 2008). Apresentamos na Tabela 4.1 algumas dessas vantagens e desvantagens, no entanto mais poderiam ser referidas.

Vantagens	Desvantagens
<ul style="list-style-type: none"> <li>- normalmente os membros dos grupos são solidários com as decisões nas quais tomaram parte, logo é mais provável a aceitação da decisão final;</li> <li>- está disponível mais informação e conhecimento;</li> <li>- existe a possibilidade de serem criadas mais alternativas;</li> <li>- a propensão ao risco é ponderada (os grupos tendem a moderar os jogadores e a encorajar os elementos mais conservadores);</li> <li>- a avaliação é mais objectiva;</li> <li>- geralmente emergem melhores decisões.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- o processo é mais complexo do que o da decisão individual e desta forma é mais dispendioso;</li> <li>- um indivíduo pode dominar o grupo;</li> <li>- pode ocorrer “pensamento de grupo” (Janis, 1972), bloqueio de produção, receio de avaliação, esquecimento e excesso de informação.</li> </ul>

Tabela 4.1: Vantagens e desvantagens da decisão colectiva (segundo Ben-Arieh et al., 2008).

Jelassi et al. (1998) fazem a distinção entre quatro tipos de procedimentos para decidir quando estão envolvidos vários actores: (1) decisão individual dentro do grupo, (2) decisão hierárquica (ou burocrática), (3) decisão em grupo, e (4) negociação. Na primeira situação, um decisor é responsável pela decisão, mas, durante o processo, utiliza o conhecimento de especialistas, conselheiros ou das partes interessadas. Todos os elementos do grupo participam no processo, mas apenas um é responsável pela decisão tomada. Na decisão

hierárquica existem dois casos a considerar: o caso centralizado e o caso descentralizado. No caso centralizado existe um conjunto de objectivos representando os decisores de topo, decisores esses que têm pleno controlo sobre os decisores de níveis inferiores. No caso descentralizado, cada elemento, independentemente, controla subconjuntos de variáveis de decisão e de objectivos e é responsável pela sua decisão, que serve como *input* para os decisores de níveis mais altos. Na decisão em grupo, cada elemento do grupo participa no processo e é parcialmente responsável pela decisão final. Normalmente existe um objectivo global que é aceite por todos os elementos do grupo, no entanto as opiniões dos mesmos diferem relativamente à maneira em como esse objectivo deve ser alcançado. Na negociação um decisor representa uma parte (ou um negociador) e é responsável pela decisão dessa parte e não das outras partes. Existe um conflito de interesses uma vez que as partes têm objectivos diferentes e conflituosos e têm diferentes necessidades que pretendem satisfazer. A negociação é a maneira escolhida para resolver um conflito por necessidade, e não por eficácia ou por eficiência. Ao longo deste trabalho falamos da decisão em grupo e da negociação.

Pode considerar-se que a fronteira entre a decisão em grupo e a negociação nem sempre é clara, sendo, no entanto, possível apontar algumas diferenças (Dias e Clímaco, 2005). Geralmente, na decisão em grupo os objectivos fundamentais são partilhados pelos elementos do grupo e sabe-se à partida qual é o conjunto de alternativas a avaliar; na negociação os objectivos fundamentais são opostos e o conjunto de alternativas é constituído por propostas (ou ofertas) sequenciais. Na decisão em grupo as restrições são discutidas pelos elementos do grupo e as votações são possíveis; na negociação as restrições são escondidas e não há a possibilidade de realizar votações. Habitualmente, na decisão em grupo os elementos do grupo estão presentes no grupo por nomeação e deixar o grupo não é uma opção normal; na negociação as pessoas estão presentes por necessidade e é comum abandonar-se a negociação, caso o valor da proposta seja inferior ao valor da melhor opção se a negociação não se realizar. A maioria dos trabalhos que abordam a decisão em grupo consideram a existência de grupos cooperativos (Salo, 1995; Dias e Clímaco, 2005; Damart et al., 2007). No entanto, também existem trabalhos em que se considera a hipótese dos grupos serem não cooperativos (Mateos et al., 2006). Numa situação de grupos cooperativos os elementos do grupo têm um interesse sincero em trabalhar juntos num clima amigável e de confiança, enquanto que nos grupos não cooperativos o clima entre os elementos do grupo é pouco cordial. Na negociação os interesses das partes envolvidas são mais conflituosos.

Este capítulo é organizado da seguinte forma<sup>1</sup>: na Secção 4.2 desenvolvemos com mais detalhe o tema da negociação e na Secção 4.3 o tema da decisão em grupo. Em ambas as secções falamos da utilização de informação incompleta, da notação que utilizamos ao longo do trabalho e dos métodos de mediação que um mediador, ou um facilitador, pode utilizar para sugerir uma alternativa.

---

<sup>1</sup>Grande parte da revisão apresentada neste capítulo foi publicada em Sarabando et al. (2009), Sarabando e Dias (2010b) e Sarabando e Dias (2010c).

## 4.2 Negociação

### 4.2.1 Enquadramento

Fisher et al. (1992: xiiv) referem que:

Like it or not, you are a negotiator. Negotiation is a fact of life. You discuss a raise with your boss. You try to agree with a stranger on a price for his house. Two lawyers try to settle a lawsuit arising from a car accident. A group of oil companies plan a joint venture exploring for offshore oil. A city official meets with union leaders to avert a transit strike. The United States Secretary of State sits down with his Sovietic counterpart to seek an agreement limiting nuclear arms. All these are negotiations.

Como referido por Maubert (1997), a negociação é uma atitude que se situa algures entre dois limites: cooperação e confronto. Numa das extremidades encontra-se a cooperação pura entre parceiros que procuram resolver um problema. A solução será obra de uma equipa, onde cada um dos participantes contribui com os meios de que dispõe, sem os pesar em relação à contribuição dos outros e sem exigir contrapartidas para a sua contribuição. Os interesses particulares não entram em linha de conta ou então são relegados para segundo plano. É o resultado da equipa inteira que importa. Na outra extremidade, situa-se o confronto, ou seja, a tentativa de impor o seu poder aos outros pelo exercício puro e simples de uma relação de forças. O objectivo procurado é então conseguir resolver o problema que se coloca segundo as suas próprias condições, sem ter em conta os desejos ou os interesses dos adversários. No entanto, ninguém sacrifica totalmente os seus interesses particulares em prol de uma causa comum, e raras são as situações em que se pode impor, sem travão, um poder absoluto. Desta forma, a negociação apresenta uma orientação mais ou menos marcada em direcção a um dos limites referidos. Segundo Fisher et al. (1992), e com base na mesma ideia, as pessoas consideram duas formas distintas de negociação: negociação flexível (“soft”) e negociação inflexível (“hard”). Um negociador flexível pretende eliminar conflitos pessoais e portanto faz prontamente cedências com o objectivo de chegar a um acordo. Ele pretende uma solução amigável, acabando muitas vezes por se sentir explorado. O negociador inflexível vê qualquer situação como uma competição de vontades, na qual vence quem tomar as posições mais extremas. A negociação inflexível consome bastante tempo e muitas vezes pode impedir as partes de chegarem a um compromisso. Fisher et al. (1992), consideram no entanto que existe uma terceira forma de negociação que não é flexível nem inflexível, mas ao mesmo tempo flexível e inflexível. O método Negociação com Princípios (“Principled Negotiation”), desenvolvido pelo Projecto Negocial de Harvard, sugere que se olhe para os ganhos de ambas as partes, quando possível, e que quando os interesses entrarem em conflito, se insista em que os resultados sejam baseados em padrões justos, independentes da vontade das partes. O método Negociação com Princípios é inflexível quanto aos métodos e princípios e flexível com as pessoas e as suas posições, e mostra como obter aquilo a que se tem direito sem se deixar de ser correcto.

Habitualmente faz-se a distinção entre dois tipos de negociação: negociação distributiva e negociação integrativa (ver, por exemplo, Walton e McKersie, 1965). Nas negociações distributivas (ou “win-lose”) o objectivo é tipicamente a divisão de um único bem e a maior preocupação dos negociadores é obter a maior fatia possível do bolo. Neste tipo de negociação, uma das partes ganha e as outras perdem; existem recursos fixos que têm de ser divididos, de forma a que quanto mais uma parte obtém, menos obtém as outras; os interesses de uma parte opõem-se aos interesses das outras partes; a preocupação dominante é maximizar os próprios interesses e a estratégia dominante inclui manipulação, uso da força e retenção de informação. Existem duas possibilidades na negociação distributiva: revelação simultânea dos preços de reserva e a Dança das Negociações. A revelação simultânea dos preços de reserva corresponde ao realizado na Teoria de Jogos. A Dança das Negociações consiste num conjunto de propostas e contra propostas cujo resultado é frequentemente próximo do ponto focal (solução que considera de igual forma os interesses dos envolvidos), mas pode depender de vários aspectos (por exemplo: riqueza, número de pessoas de cada lado, custos temporais, agressividade). As negociações integrativas (ou “win-win”) contrastam com as negociações distributivas, uma vez que assumem a integração dos recursos e capacidades das partes para gerar mais valor. Na negociação integrativa as estratégias dominantes incluem cooperação, partilha de informação e resolução conjunta dos problemas. Duas formas típicas de negociação integrativa são: a Dança dos Pacotes (“Dance of Packages”) e a construção conjunta de um texto (“single negotiation text”) (Raiffa et al., 2002). Relativamente à dança do pacotes, imagine-se que a parte *A* prepara uma proposta que considera interessante e espera que a parte *B* aceite. Entretanto, a parte *B* responderá com um proposta dela própria. Como se espera, a proposta inicial da parte *A* será muito boa para ela e inaceitável para a parte *B*. A contra proposta da parte *B* terá as características opostas. Existem desta forma duas propostas sobre a mesa, e cada parte descreve os méritos da sua própria proposta e possivelmente critica a outra. A dança dos pacotes procede fazendo concessões de forma a procurar um compromisso. Numa variação deste procedimento, ambas as partes podem oferecer simultaneamente propostas, em vez de as oferecer em sequência. Na construção conjunta de um texto, uma proposta inicial é criticada por ambas as partes e depois modificada de uma forma interactiva. Nesta aproximação o compromisso é alcançado construindo a proposta com uma sucessão de compromissos nas questões individuais ou em subgrupos de questões.

Para Fisher et al. (1992), qualquer método de negociação deve ser avaliado por três critérios. O método deve ser eficiente, deve melhorar, ou pelo menos não piorar, a relação entre as partes, e deve produzir um acordo inteligente, se o acordo for possível. Um acordo inteligente pode ser definido como um acordo em que, na medida do possível, os legítimos interesses de ambas as partes são defendidos, um acordo em que os conflitos de interesses são resolvidos razoavelmente, e um acordo que seja duradouro. Existem três fases comuns que podem caracterizar uma negociação: preparação, condução da negociação e implementação (ver, por exemplo, Ghauri e Usunier, 2003). Pode considerar-se que a preparação é a

fase mais importante numa negociação. A preparação envolve introspecção (decidir o que realmente é importante para nós, quanto estamos dispostos a ceder se formos pressionados para isso e qual é o custo esperado da negociação), extrospecção (metermo-nos na pele das outras partes para percebermos o que será importante para elas, como reagirão às nossas ofertas e quais são as suas opções se a negociação não nos conduzir a um acordo), e consideração das nossas alternativas (as outras partes dificilmente concordarão com a primeira alternativa que colocarmos sobre a mesa, deste modo devemos ter preparado um conjunto de alternativas para apresentar seguidamente, bem como a justificação para as nossas posições, de maneira a que elas sejam percebidas pelas outras partes). Depois da fase de preparação vem a fase de condução da negociação. É nesta fase que se apresentam as propostas e as contra propostas, possivelmente com a necessidade de argumentação. Esta fase pode ser realizada formalmente numa mesa de negociação, ou informalmente numa mesa de café, pelo telefone, ou através da internet. A fase de condução da negociação termina quando as partes chegam um compromisso satisfatório. Depois da condução da negociação há que implementar o resultado a que se chegou. Durante a fase de implementação as partes devem manter as promessas que fizeram para chegar à solução de compromisso. Ao longo deste processo os negociadores podem aperceber-se de que as partes podem ganhar se colaborarem honestamente e deste modo, pode surgir uma quarta fase a que se chama re-negociação. Nesta fase as partes trocam novas ofertas até se chegar a um melhor compromisso.

Nas negociações existe a possibilidade de recorrer a alguém externo à negociação, como um mediador ou um árbitro (ver Raiffa et al., 2002). Estes são normalmente referidos como a terceira parte, mesmo quando na negociação existem mais de duas partes. Um mediador é alguém que deve ser aceitável, imparcial e neutro e que, apesar de não ter o poder da decisão autoritária, deve assistir à negociação das outras partes, estabelecendo um clima positivo. Um árbitro é uma pessoa neutra e imparcial, que toma a decisão num processo de negociação, por exemplo, comparando resultados anteriores e usando critérios de justiça, decisão essa que pode ser vinculativa ou não. O uso da terceira parte pode impor-se por diversos motivos. Por exemplo, o contacto directo entre as partes pode não ser possível, a situação atingiu um ponto de bloqueio que já não a permite avançar ou o tema a debater é delicado e a exposição directa das reivindicações formuladas pelas partes pode colocá-las numa posição pouco confortável. A vantagem do uso de uma pessoa externa à negociação é que o seu cargo a coloca numa posição de neutralidade.

Como referem Raiffa et al. (2002), a investigação em negociação pode ser vista segundo diversas perspectivas: perspectiva simetricamente descritiva, perspectiva simetricamente normativa, perspectiva assimetricamente descritiva-prescritiva, perspectiva externamente descritiva e perspectiva externamente prescritiva. Na perspectiva simetricamente descritiva o investigador está interessado apenas em descrever o comportamento de todos os negociadores, sem ter qualquer interesse em dar conselhos relativamente à forma como eles devem actuar. Na perspectiva simetricamente normativa são dados conselhos simetrica-

mente a todas as partes, sobre a melhor forma de actuar. O interesse não está na maneira como actuamos, mas em como deveríamos actuar se fôssemos espertos, pensássemos arduamente, fôssemos mais consistentes e totalmente sabedores. Na perspectiva assimetricamente descritiva-prescritiva o objectivo é estudar e perceber os interesses de pessoas reais em conflitos reais, para que seja possível aconselhar uma das partes, sobre a forma de actuar, de modo a que possa alcançar os resultados esperados. Este tipo de análise é prescritiva do ponto de vista de uma parte e descritiva relativamente ao ponto de vista das outras partes. Na perspectiva externamente descritiva o objectivo é saber como se comportam os mediadores ou árbitros. Na perspectiva externamente prescritiva, o objectivo é determinar como os mediadores ou árbitros devem actuar de modo a ajudarem as partes em negociação de forma equilibrada e imparcial.

Ao longo deste trabalho, focamo-nos na negociação bilateral (entre duas partes) integrativa sobre múltiplos assuntos, no caso discreto. Abordamos situações envolvendo dois negociadores individuais que interagem com a assistência de um mediador. O nosso principal objectivo é contribuir com novas metodologias para ajudar um mediador, permitindo que ele aconselhe os negociadores com boas alternativas (a perspectiva externamente prescritiva). No entanto, as metodologias desenvolvidas podem ser adaptadas para poderem ser usadas para ajudar uma das partes, com base na descrição do comportamento da outra parte (a perspectiva assimetricamente descritiva-prescritiva). A principal suposição que fazemos é que as preferências de ambas as partes podem ser modeladas de forma aproximada por uma função de valor aditiva, como assumido por Raiffa et al. (2002). De acordo com Raiffa et al. (2002), na negociação integrativa é necessário construir e avaliar propostas englobando vários assuntos. Este processo implica a identificação dos assuntos a resolver, a especificação de possíveis níveis de resolução para cada assunto, e a especificação do valor de cada combinação possível dos níveis (valor esse que pode ser obtido através de um modelo de agregação, como por exemplo, o modelo de valor aditivo). A existência de um modelo de avaliação com base em valores permite que cada parte avalie as suas potenciais propostas, avalie as propostas da outra parte, e avalie o seu BATNA (“Best Alternative To a Negotiated Agreement”), e também permite que alguém com informação completa possa dizer se um acordo é eficiente de Pareto ou não. Note-se que uma solução é eficiente de Pareto se não é possível trocá-la por nenhuma outra solução sem piorar o valor para uma das partes em negociação. Não supomos que a função de valor de cada parte é precisamente conhecida, isto é, não assumimos que as partes indicam explicitamente e exactamente os valores dos parâmetros que definem completamente o modelo. No entanto, embora não assumindo informação completa, assumimos que pelo menos alguma informação sobre as preferências está disponível. Esta informação pode surgir de uma de duas fontes: informação incompleta obtida implicitamente através das ofertas, ou das decisões, e reacções às ofertas, e informação incompleta fornecida explicitamente pelos negociadores (por exemplo, através da indicação de uma ordenação dos valores). Na subsecção seguinte

fazemos uma breve revisão de algumas aproximações apresentadas na literatura que lidam com informação incompleta em processos de negociação.

#### 4.2.2 Uso de informação incompleta

Em negociações bilaterais, a literatura considera normalmente o caso de existência de informação completa. Se o mediador conhecer a expressão das funções de valor de ambas as partes, pode calcular a fronteira de Pareto (ou fronteira eficiente) definida pelas soluções eficientes de Pareto. O mediador pode, desta forma, sugerir um acordo neste conjunto, onde a escolha entre as soluções que são eficientes de Pareto pode ser baseada em métodos adicionais, como a justiça do compromisso proposto. No entanto, estas aproximações não podem ser aplicadas na prática quando nem as partes, nem o mediador, têm informação completa sobre as preferências de todas as partes, isto é, quando não está disponível informação completa (ver, por exemplo, Lai et al., 2006). Em muitos casos, as partes podem mesmo não ter informação completa sobre os parâmetros que descrevem as suas próprias preferências (Vetschera, 2009), e o pressuposto de que os valores dos parâmetros podem ser eliciados de forma precisa, em alguns casos é irrealista (conforme referido na Secção 1.2). Para o mediador de uma negociação, é ainda mais difícil saber exactamente a função de valor das partes, e mesmo que tente perguntar-lhes, elas podem estrategicamente distorcer a informação sobre as preferências que fornecem (ver Vetschera, 2005a).

A importância da informação sobre as preferências é claramente mencionada na maioria da literatura sobre negociação. Um importante objectivo em processos de negociação é alcançar uma solução integrativa, solução essa que melhora a posição das partes relativamente à situação actual. De acordo com o modelo de negociação Preocupação Dual (“Dual Concern”) (Pruitt, 1983; Thomas, 1992), estas soluções apenas podem ser alcançadas se os negociadores tiverem bastante conhecimento sobre as suas preferências e sobre as preferências das outras partes. Vetschera (2009) propõe um método para medir a quantidade de informação que está disponível durante a negociação, considerando que a informação é obtida de forma implícita através das ofertas. O método é baseado no critério do domínio (que foi inicialmente desenvolvido para análise de sensibilidade), e tanto pode ser utilizado quando um compromisso é alcançado como quando não é. No caso em que o compromisso é alcançado, Vetschera (2005b, 2009) faz duas suposições relativamente às preferências dos negociadores: um negociador prefere o compromisso final a qualquer oferta feita pela outra parte ao longo do processo de negociação, e o negociador prefere todas as ofertas feitas por si próprio ao longo do processo à solução de compromisso. O autor refere que a primeira suposição é bastante lógica uma vez que se o negociador preferisse uma oferta feita pela outra parte à solução de compromisso era possível tornar esta oferta a solução final. Seria pouco provável que a outra parte se recusasse a fazer esta alteração uma vez que já tinha feito esta proposta anteriormente. A segunda suposição presume que um negociador começa com posições perto do seu ponto ideal e faz concessões ao longo do processo de negociação, em vez de começar com uma posição fraca e procurar por ganhos mútuos. No

caso em que o compromisso não é alcançado, assume-se que o negociador prefere as suas propostas às propostas da outra parte.

Ehtamo et al. (1999) apresentam uma classe de métodos, chamada Métodos de Proposta de Restrições (“Constraint Proposal Methods”), que são métodos interactivos para encontrar soluções óptimas de Pareto através de hiperplanos tangentes comuns, e que se adequam a negociações de duas partes com dois ou mais assuntos contínuos. Nesta classe de métodos, um mediador imparcial tenta localizar um hiperplano, através de alguns pontos de referência, de tal modo que as alternativas preferidas, de ambas as partes, nesse hiperplano coincidam.

Heikanen (1999) propõe um método para determinar soluções óptimas de Pareto em negociações com múltiplas partes, sobre assuntos contínuos. Neste método não é requerido que os negociadores conheçam as funções de valor das outras partes, nem que alguém externo à negociação conheça todas as funções de valor. O método apresentado é um processo interactivo onde se recorre a um mediador.

Para processos de negociação bilateral com informação incompleta nos pesos, Clímaco e Dias (2006) propõem uma extensão da metodologia do software VIP - G (Dias e Clímaco, 2005), baseada no relaxamento do espaço dos pesos que cada negociador aceita, e definindo caminhos de convergência nesse mesmo espaço. A metodologia apresentada adequa-se a problemas de negociação entre duas partes no caso discreto, e a situações em que as partes chegam a acordo em quais critérios são a maximizar e a minimizar.

Assumindo que os negociadores tomam decisões com base nas suas funções de valor, não é trivial a construção das mesmas quando são considerados múltiplos critérios. Lai et al. (2006) apresentam um modelo que considera eficiência de Pareto e eficiência computacional, para situações em que a informação é incompleta, as funções de valor não são lineares e não são explicitamente conhecidas. Os autores referem que um dos principais problemas associado à negociação multicritério, é a dificuldade de tomar decisões num espaço multidimensional. Para diminuir esta dificuldade, propõem um processo que permite que os negociadores negociem com base numa única linha, chamada linha base da negociação (“negotiation base line”), com a ajuda de um mediador.

Apesar de não ser difícil envolver um mediador em negociações mecanizadas entre agentes de software (“software agents”), podem existir situações em que as partes não confiem no mediador ou que este seja difícil de implementar. Desta forma, Lai e Sycara (2009) focam-se no desenvolvimento de mecanismos para procurar eficiência de Pareto, em negociações multicritério sem a presença de um mediador.



### 4.2.3 Notação e métodos

#### Notação

Neste trabalho, consideramos diferentes possibilidades para a informação disponível sobre as preferências dos negociadores, sobre múltiplos assuntos, que pode estar disponível para o mediador. Para formalmente caracterizar esta informação, de forma similar a Raiffa et al. (2002), assumimos que as verdadeiras (mas possivelmente desconhecidas) preferências de um negociador  $k$  ( $k = 1, 2$ ) podem ser representadas por uma função de valor aditiva da forma:

$$v^k(x^{(j)}) = \sum_{i=1}^n w_i^k v_i^k(l_i^{(j)}), \quad j = 1, \dots, m \quad (4.1)$$

onde  $n$  representa o número de assuntos em negociação,  $m$  representa o número de alternativas (sendo cada alternativa caracterizada por um valor para cada assunto),  $l_i^{(j)}$  representa o nível que a alternativa  $x^{(j)}$  atinge no assunto  $i$ ,  $v_i^k(\cdot)$  representa a função de valor do negociador  $k$  no assunto  $i$  e  $w_i^k$  representa o peso que cada negociador  $k$  atribui a cada função de valor  $v_i^k(\cdot)$  (o peso dos assuntos). Sem perda de generalidade, assumimos que, para cada negociador  $k$  ( $k = 1, 2$ ):

$$0 \leq w_i^k \leq 1, i = 1, \dots, n \text{ e } \sum_{i=1}^n w_i^k = 1, \quad (4.2)$$

$$0 \leq v_i^k(l_i^{(j)}) \leq 1, i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

Consideramos também, que os índices dos assuntos estão codificados, de tal forma que, para cada negociador  $k$  ( $k = 1, 2$ ), os pesos estão por ordem decrescente:

$$W^k = \{(w_{[1]}^k, w_{[2]}^k, \dots, w_{[n]}^k) : w_{[1]}^k \geq w_{[2]}^k \geq \dots \geq w_{[n]}^k \geq 0, \sum_{i=1}^n w_{[i]}^k = 1\}, \quad (4.4)$$

onde  $w_{[i]}^k \in \{w_1^k, \dots, w_n^k\}$  representa o peso na posição  $i$  para o negociador  $k$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Analogamente ao caso da decisão individual (ver Subsecção 3.2.1), consideramos que cada negociador fornece informação ordinal sobre o valor de cada nível em cada assunto. Assume-se que, para o negociador  $k$  e para o assunto  $i$  ( $k = 1, 2$  e  $i = 1, \dots, n$ ):

$$V_{ik} = \left\{ (v_i^k(l_i^{([1]k)}), v_i^k(l_i^{([2]k)}), \dots, v_i^k(l_i^{([m_i]k)})) : \right. \\ \left. : 1 = v_i^k(l_i^{([1]k)}) \geq v_i^k(l_i^{([2]k)}) \geq \dots \geq v_i^k(l_i^{([m_i]k)}) = 0 \right\}, \quad (4.5)$$

onde  $l_i^{([j]k)} \in \{l_i^{(1k)}, \dots, l_i^{(m_i k)}\}$  representa o nível na posição  $j$  do assunto  $i$  para o negociador  $k$ , e  $m_i$  representa o número de níveis no assunto  $i$ .

Consideramos que cada negociador pode também fornecer informação ordinal sobre a diferença de valor entre níveis consecutivos em cada assunto. Seja  $\Delta_{i(m_i-1)}^k = v_i^k(l_i^{([1]k)}) - v_i^k(l_i^{([2]k)})$ ,  $\Delta_{i(m_i-2)}^k = v_i^k(l_i^{([2]k)}) - v_i^k(l_i^{([3]k)})$ , ..., e  $\Delta_{i1}^k = v_i^k(l_i^{([m_i-1]k)}) - v_i^k(l_i^{([m_i]k)})$ . Neste caso, cada negociador deverá fornecer informação sobre estas diferenças de valor.

## Métodos

Podemos assumir que para cada parte algumas propostas são aceitáveis enquanto que outras não o são. De acordo com o sistema de valores, assume-se que cada parte tem um valor de reserva associado ao seu BATNA. O valor de reserva especificará o mínimo valor aceitável para cada parte (Raiffa et al., 2002). É possível avaliar quais são as alternativas mais promissoras de acordo com alguns métodos de mediação. Vários métodos podem ser desenvolvidos, dependendo se o mediador está mais interessado em encontrar uma solução eficiente (que maximiza o valor total criado) ou uma solução justa (que tenta balancear o interesse de ambas as partes envolvidas). Neste trabalho, vamos considerar os seguintes métodos de mediação (Raiffa et al., 2002):

- *Maximizar a soma dos valores*: que maximiza a soma dos valores de ambas as partes e depois selecciona a melhor alternativa de acordo com a eficiência total.
- *Maximizar o produto dos excessos*: que maximiza o produto dos excessos relativamente ao valor de reserva.
- *Maximizar a Proporção de Potencial<sup>2</sup> mínima*: que maximiza o *payoff* (recompensa ou compensação) mínimo, isto é, o *payoff* do negociador que recebe o menor *payoff* de acordo com o resultado da negociação. Para tornar os *payoffs* comparáveis entre negociadores, eles são estandardizados dentro dos limites possíveis, calculando a Proporção de Potencial (PoP), ou seja, o excesso a dividir pelo potencial.

Desta forma:

- O método de maximizar a soma dos valores, selecciona a alternativa  $x^{(j)}$  que maximiza:

$$v^1(x^{(j)}) + v^2(x^{(j)}). \quad (4.6)$$

- O método de maximizar o produto dos excessos relativamente aos valores de reserva, selecciona a alternativa  $x^{(j)}$  que maximiza:

$$(v^1(x^{(j)}) - R^1) * (v^2(x^{(j)}) - R^2), \quad (4.7)$$

---

<sup>2</sup>O potencial de cada parte pode ser definido como a diferença entre seu valor máximo admissível e o seu valor de reserva.

onde  $R^k$  representa o valor de reserva da parte  $k$  ( $k = 1, 2$ ). Se os valores de reserva são iguais a zero, o método de maximizar o produto dos excessos relativamente aos valores de reserva, corresponde à solução de Nash (1950, 1953), solução que tem como objectivo maximizar o produto dos valores de ambas as partes (isto é, maximizar  $v^1(x^{(j)}) * v^2(x^{(j)})$ ).

- O método de maximizar a PoP mínima, selecciona a alternativa  $x^{(j)}$  que maximiza:

$$\min_{k=1,2} \frac{v^k(x^{(j)}) - R^k}{v^{k-max} - R^k}, \quad (4.8)$$

onde  $v^{k-max}$  representa o melhor *payoff* que o negociador  $k$  pode alcançar considerando o conjunto das alternativas que são melhores para ambas as partes do que o valor de reserva.

Note-se que todos os métodos apresentam vantagens e desvantagens. Por exemplo, o método de maximizar a soma dos valores pode não ser atractivo para muitos devido à desigualdade dos resultados que normalmente fornece e ao seu carácter completamente compensatório. O método da soma não atende ao equilíbrio e não atende ao facto de uma parte ser “rica” e a outra “pobre”, isto é, considera que cada unidade tem o mesmo valor para ambas as partes. No entanto, como nem tudo são desvantagens, este método é o que maximiza o valor total criado. Consideramos assim que a escolha do método de mediação a utilizar depende das preferências do mediador.

## 4.3 Decisão em Grupo

### 4.3.1 Enquadramento

Para Schwartz (1994), o processo de decisão em grupo compreende nove fases: identificação e caracterização do problema, clarificação do problema, análise da causa, apresentação de soluções alternativas para o problema, selecção de uma ou mais alternativas, elaboração de um plano de implementação, clarificação do contrato, plano em curso e avaliação. Na fase de identificação e caracterização do problema é de evitar apresentar soluções prematuras, uma vez que se podem gerar desacordos antecipados. Uma vez o problema identificado, este deve ser escrito numa linguagem precisa e perceptível para todos os decisores. A fase clarificação do problema é muito importante quando o processo de decisão é realizado em grupo. Se o problema não se apresenta de uma forma clara, de modo a que todos os decisores o compreendam como um só, o resultado é a apresentação de soluções como se de diferentes problemas se tratasse. Segue-se a fase análise da causa. Qualquer desvio analisado é produzido por uma causa ou uma interacção de causas. É assim necessário isolar a maioria das causas centrais do problema e analisar a sua influência sobre o problema identificado. Tendo sido identificados os problemas e conhecidas as causas do seu aparecimento, passa-se para a fase de apresentação de soluções alternativas

para o problema, onde os decisores devem indicar soluções para a resolução do problema. É importante limitar o tempo de discussão sobre cada uma das alternativas, de forma a ser possível analisar e debater o maior número de alternativas possíveis. A fase seguinte é a selecção de uma ou mais alternativas. Depois de seleccionadas as alternativas possíveis de implementação, é necessário especificar as características que a alternativa desejável deve reunir. Nesta fase é necessário olhar e discutir as vantagens e desvantagens das alternativas seleccionadas, para que os decisores entrem num acordo comum sobre a alternativa mais viável. Na fase de elaboração de um plano de implementação definem-se os responsáveis pelos diferentes detalhes da alternativa escolhida, para que esta solução seja activada com eficiência. A fase de clarificação do contrato permite assegurar que todos entenderam qual a sua função na implementação da solução. Constitui um sumário e uma nova exposição sobre o que foi acordado, sobre o que cada elemento tem que fazer e quando se espera a sua realização ou conclusão. A fase de plano em curso constitui a fase de resolução do problema, em que se espera que os objectivos planeados nas fases anteriores sejam executados eficientemente, de forma a anular o problema. Estando o plano em curso e após ter decorrido o tempo necessário para que se verifique um efeito, tem-se finalmente a última fase, avaliação, onde o grupo se deve reunir para avaliar os resultados e responsabilidades. O grupo deve analisar se as acções anteriormente planeadas e acordadas foram correctamente realizadas, e se os responsáveis pela sua realização fizeram o que tinham acordado com o grupo. Uma vez realizadas todas as acções, é necessário avaliar a sua eficiência na resolução do problema inicialmente identificado. Se a solução não funcionou, torna-se necessário definir um conjunto de acções que permitam realizar de imediato alterações.

Um conceito importante na decisão em grupo é o conceito de consenso (ou resultado consensual), representando um resultado subscrito por todos os elementos do grupo. Ness e Hoffman (1998) definem consenso como:

(...) a decision that has been reached when most members of the team agree on a clear option and the few who oppose it think they had a reasonable opportunity to influence that choice. All team members agree to support the decision.

Como referido por Ben-Arieh et al. (2008), é impraticável acreditar que um grupo de elementos partilhe a mesma opinião. Por este motivo, muitas vezes é necessário influenciar a opinião dos decisores individuais, com o objectivo que eles concordem com uma opinião global do grupo. É nestes casos que é desejável a coordenação de um facilitador. Um facilitador é alguém que ajuda um grupo de pessoas a compreender os seus objectivos comuns auxiliando-as a planear como alcançá-los, sem no entanto, tomar uma posição particular na discussão, tentando assim ajudar o grupo a conseguir chegar a um consenso ou acordo.

Existem três procedimentos diferentes para lidar com situações de decisão em grupo, que Belton e Pictet (1997) chamam de partilha (o grupo constrói um modelo conjuntamente através da obtenção de um resultado consensual), agregação (é realizada a agregação das preferências individuais) e comparação (as preferências individuais obtidas usando uma aproximação comum são comparadas e podem formar as bases para discussão ou para a decisão). A partilha tem como objectivo obter um elemento comum por consenso, através da discussão de pontos de vista e da negociação de um acordo, abordando as diferenças e tentando reduzi-las discutindo explicitamente as suas causas. A agregação tem como objectivo obter um elemento comum, através de um voto ou do cálculo de um valor representativo, reconhecendo as diferenças e tentando reduzi-las sem discutir explicitamente as suas causas. A comparação tem como objectivo obter um elemento individual, para obter um eventual resultado consensual, com base na negociação de resultados individuais independentes, reconhecendo as diferenças sem necessariamente tentar reduzi-las. A partilha é muito exigente para o facilitador que deve estar constantemente ciente dos problemas do processo. A facilitação do processo baseada na agregação de avaliações individuais é processualmente mais simples, uma vez que qualquer discussão pode ser limitada pelo facilitador propondo uma votação das propostas individuais. A comparação concentra os esforços do facilitador em determinadas fases do processo. No acto de partilhar é provável a detecção de diferentes interpretações numa fase inicial do processo, garantido um entendimento compartilhado do problema. Em contraste, na agregação esta detecção pode mesmo nunca ocorrer. Usando o procedimento de partilha, a detecção destas diferentes interpretações pode apenas surgir numa fase tardia. Assim, aquando da adopção de um procedimento com base na agregação ou na comparação é importante garantir uma compreensão compartilhada dos elementos comuns, antes de passar para avaliações individuais. É possível que nem todos os elementos do grupo sejam especialistas no que diz respeito a todos os aspectos do problema. Pode acontecer que algum elemento do grupo não esteja familiarizado com uma alternativa específica ou que não tenha o conhecimento necessário para julgar o desempenho relativamente a um critério particular. Na partilha cada elemento pode contribuir com as suas competências. A agregação pode apenas usar juízos expressos e um elemento do grupo pode abster-se de contribuir no caso de falta de especialização. Os custos da partilha são elevados em termos do tempo que é necessário para o processo e da exigência para o facilitador. No entanto, a expectativa de um resultado consensual também é maior.

Como referido por Damart et al. (2007), em situações de decisão em grupo, nem todos os elementos têm igual conhecimento sobre o domínio do problema, e além de fenómenos como a emergência de um líder ou a inibição das minorias, o que torna o processo difícil é que é necessário encontrar um acordo entre os decisores apesar da diversidade de julgamentos e das percepções subjectivas da realidade. Estes são alguns dos motivos que mostram a importância do uso de informação incompleta nos processos de decisão em grupo. Desenvolvemos com mais detalhe este assunto na subsecção seguinte.

### 4.3.2 Uso de informação incompleta

Trabalhar com informação incompleta (por exemplo, informação de natureza ordinal) é particularmente interessante em situações de decisão em grupo multicritério, uma vez que os decisores podem com muita frequência concordar com algumas restrições (por exemplo, o primeiro critério tem mais peso do que o segundo critério), mas não são solicitados a chegar a acordo sobre os valores precisos. Alguma da literatura existente já propõe este tipo de aproximações, por exemplo, Salo (1995), Kim e Ahn (1999), Tavares (2004), Dias e Clímaco (2005), Contreras e Mármol (2007) e Damart et al. (2007). Segundo Contreras e Mármol (2007) a investigação considerando decisão em grupo com informação incompleta pode ser classificada em três categorias. A primeira categoria inclui aproximações baseadas em comparações par a par entre alternativas (Bana e Costa, 1986; Lahdelma et al., 1998; Dias e Clímaco, 2005). Estas aproximações propõem obter resultados individuais numa primeira instância, estabelecendo relações de dominância entre pares de alternativas. A agregação destes resultados individuais fornece a solução do grupo. A segunda categoria de aproximações inclui procedimentos que procuram atribuir pesos aos diferentes decisores (Salo, 1995; Kim e Ahn, 1997; Kim et al., 1999). A última categoria de aproximações inclui procedimentos que têm como objectivo determinar um vector (de pesos ou ordenação) que seja um compromisso (Tavares, 2004; Contreras e Mármol, 2007).

Existe assim um variado conjunto de propostas para lidar com problemas de decisão em grupo com informação incompleta. Alguns métodos são baseados em relações de dominância, nomeadamente usando optimização. Alguns métodos usam simulação, por exemplo, para identificar uma estratégia que seja consensual. Para alguns autores o objectivo é encontrar um vector de pesos colectivo ou uma ordenação colectiva. Outros autores pretendem fornecer informação adicional aos decisores, em vez de simplificar a informação por agregação. Apresentamos seguidamente algumas dessas propostas.

Entre as aproximações que são baseadas em relações de dominância podemos referir, por exemplo, Salo (1995) e Kim e Ahn (1999). Existem diversos métodos que usam programação matemática para obter relações de dominância. Por exemplo, Salo (1995) desenvolveu um processo interactivo capaz de lidar com *inputs* imprecisos e que intercala as fases de eliciação das preferências e o cálculo de resultados intermédios. Salo agrega as preferências dos diferentes decisores com base numa função de valor aditiva, sugerindo a utilização de relações de dominância. A ideia é transformar as preferências dos decisores em restrições no espaço dos parâmetros. À medida que os decisores indicam as suas preferências com mais detalhe, o conjunto das alternativas não dominadas torna-se gradualmente mais pequeno. Outra ideia é ordenar as alternativas considerando conceitos de dominância, como no método proposto por Kim e Ahn (1999), que consideram um modelo no qual três parâmetros (pesos dos critérios, valores e possivelmente os pesos referentes à importância de cada decisor) são especificados de forma incompleta por cada decisor. Desta forma, para obter relações de dominância par a par entre alternativas, é necessário resolver programas não lineares, que em alguns casos são intratáveis. Para contornar esta dificuldade,

os autores sugerem um método, usando resultados de decisões individuais, para obter um consenso de grupo e que considera resultados de dominância, como *inputs* para um procedimento de agregação. A ordenação final, que é consensual para o maior número de elementos, é construída através da resolução de uma série de programas lineares, usando o resultado de decisões individuais, sujeitos às restrições relativas aos pesos dos diferentes decisores.

Mateos, Jiménez e colaboradores usam simulação, para identificar um resultado que seja consensual ou para agregar as preferências dos diferentes decisores. Mateos et al. (2003) descrevem um sistema de apoio à decisão com base num modelo de valor multicritério aditivo para identificar a estratégia óptima em problemas de decisão complexos. O sistema permite informação incompleta relativamente às componentes das funções de valor e à avaliação dos pesos, o que leva a classes de funções de valor e a intervalos de pesos. O sistema calcula não-dominâncias e potenciais optimalidades para identificar a estratégia preferida. Os autores propõem uma aproximação baseada em técnicas de simulação Monte Carlo, onde as preferências dos decisores são eliciadas separadamente, como ponto de partida para o processo de decisão em grupo. Jiménez et al. (2005) e Mateos et al. (2006) propõem uma técnica, para identificar a melhor alternativa, em que cada decisor elicia as suas preferências separadamente usando o sistema GMAA<sup>3</sup> (Jiménez et al., 2003) e utilizam posteriormente simulação Monte Carlo para agregar as preferências. É levado a cabo um processo interactivo para obter um resultado que seja consensual. Depois das simulações terem sido realizadas, as componentes de valores imprecisas e os pesos correspondentes aos diferentes decisores são restringidos, para fornecer informação significativa para as simulações seguintes.

Chiclana et al. (2007) referem que os problemas de decisão em grupo são normalmente resolvidos usando dois passos: agregação e exploração. A fase de agregação consiste em combinar as preferências individuais numa preferência de grupo, de tal modo que esta sumarie e reflecta as propriedades contidas nas preferências individuais. A fase de exploração transforma a informação global sobre as alternativas numa ordenação global. São diversos os trabalhos em que existe agregação das preferências individuais com o objectivo de estabelecer uma preferência colectiva (Bui, 1987; Salo, 1995; Mateos et al., 2006; Jabeur e Martel, 2007a). Considera-se que a teoria da escolha social (Nurmi, 1987), com raízes nos trabalhos de Borda (1781) e Condorcet (1785), foi a primeira a considerar o problema de agregação quando as preferências individuais são expressas através de ordenações completas. Desde os trabalhos de Borda e Condorcet muitos estudos surgiram (Kemeny e Snell, 1962; Cook e Seiford, 1978; Cook e Kress, 1985).

---

<sup>3</sup>O sistema GMAA (“Generic Multi-Attribute Analysis”) aceita informação incompleta relativamente à quantificação das preferências dos decisores, o que leva a classes de funções de valor para os diferentes critérios e a pesos dos critérios imprecisos.

Os modelos baseados em distâncias foram sugeridos inicialmente por Kemeny e Snell (1962). O modelo de Kemeny e Snell é baseado numa medida de distância indicando o grau de correlação entre ordenações. Existem outros métodos que se focam no cálculo de distâncias: para agregar conjuntos de relações binárias (por exemplo, Khélifa e Martel, 2001; Jabeur e Martel, 2007a); para agregar um vector de pesos (por exemplo, Contreras e Mármol, 2007); ou para implementar uma aproximação interactiva (por exemplo, Eklund et al., 2007). Khélifa e Martel (2001) apresentam uma aproximação para encontrar uma ordenação que discorde o menos possível das relações binárias, relativas a pares de alternativas. A ideia de base é encontrar uma ordenação colectiva o mais próxima possível, em termos de acordo, das ordenações dos decisores. Jabeur e Martel (2007a) consideram que as preferências individuais são expressas através de conjuntos de relações binárias. O objectivo é determinar uma relação binária colectiva, relação essa que tem a mínima distância aos sistemas de relações binárias individuais, e que tem em conta a importância relativa dos decisores, para deste modo se conseguir obter pelo menos um subconjunto contendo as melhores alternativas. Contreras e Mármol (2007) desenvolveram um procedimento para obter um vector de pesos que seja um compromisso. Os autores tentam minimizar a distância de Tchebychev entre a avaliação que os decisores obteriam com os pesos que atribuem a cada critério e a avaliação induzida pelo vector de pesos que seja compromisso. Eklund et al. (2007) apresentam um processo dinâmico, que precisa do apoio de um facilitador, para escolher uma ou mais alternativas, processo esse onde as preferências podem mudar depois de ouvidos os argumentos dos outros decisores. Com base na avaliação (comparação) de todas as alternativas por todos os decisores, tendo em conta todos os critérios e os seus pesos para os diferentes decisores, são calculadas distâncias do tipo Euclidiano entre os decisores. O grau de consenso generalizado é definido como a diferença entre a unidade e a distância máxima entre dois decisores. Os diferentes decisores usam o MACBETH (Bana e Costa e Vansnick, 1994) para determinar os pesos dos critérios e os valores de cada alternativa em cada critério.

Tavares (2004) transformou o problema de agregar as ordenações, num problema sobre distância entre pesos de critérios. Tavares apresentou o Multitrident, um modelo para ajudar a encontrar uma ordenação que seja um compromisso em termos do espaço dos pesos. Essa ordenação é obtida através das ordenações dos diferentes decisores sem utilizar o conceito de distâncias entre ordenações, conceito esse que implica a suposição de iguais distâncias entre alternativas adjacentes. A aproximação apresentada tenta ajudar os decisores a adoptarem tal ordenação como um resultado consensual, e tem como objectivo suportar o processo de procura de um resultado consensual num problema no qual os decisores ordenaram um subconjunto de alternativas, em termos de uma matriz de desempenhos comum.

Escobar e Moreno-Jiménez (2007) apresentam um procedimento, Agregação das Estruturas de Preferência Individuais (“Aggregation of Individual Preference Structures” - AIPS), para lidar com uma situação de decisão em grupo usando o método AHP (“Ana-



lytic hierarchy process”) como suporte metodológico. Este procedimento incorpora ideias similares aos métodos de Borda e usa o princípio de agregação utilizado nas duas aproximações tradicionalmente seguidas na decisão em grupo usando o método AHP (agregação de julgamentos individuais e agregação de prioridades individuais). O procedimento AIPS fornece importância holística a cada alternativa e a cada ordenação, assim como a estrutura mais representativa das preferências do grupo.

Entre os métodos cujo objectivo é fornecer informação adicional aos decisores, em vez de simplificar a informação por agregação podemos referir, por exemplo, Dias e Clímaco (2005) e Hodgkin et al. (2005). Dias e Clímaco (2005) apresentam o VIP-G, um sistema concebido para ajudar os decisores a escolherem uma alternativa, que ao invés de impor um modelo de agregação, tem como objectivo reflectir para cada decisor as consequências dos seus *inputs*, e dos *inputs* do grupo, em termos de conclusões robustas. Hodgkin et al. (2005: 175) referem que:

(...) the aim of MCDA is not to find the “right answer” to a problem. Rather, it is to facilitate decision makers in a process of learning about an issue and about their own and other stakeholders’ perspectives on and preferences relating to that issue.

Hodgkin et al. (2005) apresentam dois softwares, PCA-Plot e  $\Delta$ -Plot, que foram concebidos para fornecer informação adicional aos facilitadores ou utilizadores de funções de valor multicritério.

### 4.3.3 Notação e agregação das preferências individuais

#### Notação

Como proposto por Keeney e Kirkwood (1975) quando discutindo a agregação de preferências individuais, consideramos a agregação das avaliações individuais e dos pesos dos critérios, dado um conjunto partilhado de alternativas e critérios. Este modelo de agregação requer a atribuição de valores numéricos precisos para três tipos de parâmetros: os pesos que cada elemento atribui a cada função de valor (os pesos dos critérios), o valor que cada elemento atribui a cada alternativa em cada critério (os valores) e possivelmente os pesos dos elementos do grupo (os pesos dos decisores).

Pode considerar-se que existem duas diferentes perspectivas para lidar com decisão em grupo com informação incompleta. A primeira tem como objectivo sugerir alternativas com base em diferentes métodos. Na segunda perspectiva, como apresentado por Keeney e Kirkwood (1975), uma única pessoa, ou um pequeno grupo, tomará a decisão, mas gostará de incorporar as preferências de todo o grupo no seu processo de decisão. Existirá um ditador benevolente (alguém ou um pequeno grupo) que terá a responsabilidade pela decisão mas que deseja ter em conta o ponto de vista dos outros. Esta perspectiva pode ser usada, por exemplo, se um decisor dá uma tarefa a cada um dos outros decisores e no fim precisa de agregar todas as tarefas (por exemplo, *referees* de um artigo).

Sejam  $p$ ,  $n$ , e  $m$  o número de decisores, o número de critérios e o número de alternativas, respectivamente. Assume-se que cada decisor  $k$  ( $k \in \{1, \dots, p\}$ ) atribui um valor a cada alternativa  $x^{(j)}$  ( $j \in \{1, \dots, m\}$ ) de acordo com uma função de valor aditiva (Keeney e Raiffa, 1976):

$$v^k(x^{(j)}) = \sum_{i=1}^n w_i^k v_i^k(x^{(j)}), \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.9)$$

onde  $v_i^k(\cdot)$  representa a função de valor do decisor  $k$  para o critério  $c_i$  e  $w_i^k$  representa o peso que o decisor  $k$  atribui a cada função de valor  $v_i^k(\cdot)$  (o peso dos critérios). Sem perda de generalidade, mais uma vez assumimos que para o decisor  $k$  ( $k = 1, \dots, p$ ):

$$0 \leq w_i^k \leq 1, i = 1, \dots, n \text{ e } \sum_{i=1}^n w_i^k = 1, \quad (4.10)$$

$$0 \leq v_i^k(x^{(j)}) \leq 1, i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, m. \quad (4.11)$$

Assumimos que as restrições relativas ao peso dos critérios, ao valor de cada alternativa em cada critério e às diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério, são semelhantes às apresentadas na Subsecção 4.2.3 relativamente ao peso dos assuntos, ao valor de cada nível em cada assunto e às diferenças de valor entre níveis consecutivos em cada assunto. Desta forma, a informação sobre o peso dos critérios e a informação sobre as funções de valor é incompleta, mas restringida pela informação eliciada.

As funções de valor individuais tanto podem ser agregadas usando pesos para os diferentes decisores como usando diferentes métodos. Referimos seguidamente esses dois tipos de agregação.

### Agregação usando pesos para os decisores

Neste cenário enquadram-se os problemas nos quais os decisores são eles próprios pesados. A agregação pode ser feita usando o modelo aditivo (Keeney e Kirkwood, 1975):

$$v^G(x^{(j)}) = \sum_{k=1}^p d_k \sum_{i=1}^n w_i^k v_i^k(x^{(j)}) = \sum_{k=1}^p d_k v^k(x^{(j)}), \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.12)$$

onde  $d_k$  é o peso que reflecte a importância do decisor  $k$ ,  $v^k(x^{(j)})$  denota o valor global de uma alternativa  $x^{(j)}$  para o decisor  $k$  de acordo com (4.9), e  $v^G(x^{(j)})$  representa o valor global desta alternativa para o grupo. Por convenção assumimos que os pesos dos decisores são não negativos e a sua soma é igual à unidade.

A avaliação dos pesos que reflectem a importância dos decisores, os  $d_k$  da equação (4.12), é uma das dificuldades associadas com o uso da função de valor aditiva. A escolha dos pesos que reflectem a importância dos decisores requer comparações relativas à autoridade, experiência e especialidade dos elementos do grupo. Sen (1970) sugere trabalhar com um intervalo razoável de pesos, mesmo que os resultados do modelo impreciso sejam

incompletos, em vez de ter como objectivo usar pesos precisos. Nakayama et al. (1979) propõem pedir que cada decisor indique qual é o peso que impõe no valor dos outros decisores, normalizar estes valores de forma a que a soma dos pesos que cada decisor atribui seja igual a um, e determinar o peso de cada decisor  $k$ , dividindo a soma dos valores normalizados que cada decisor impõe no valor do decisor  $k$  pelo número de decisores. Salo (1995) refere que a caracterização dos pesos que reflectem a importância dos decisores pode ser feita, por exemplo, tomando o invólucro convexo dos pesos que cada decisor atribui a cada um dos outros decisores, encorajando os decisores a estabelecerem restrições razoáveis nos seus pesos através de uma discussão aberta, ou perguntando por comparações de possíveis coligações divergentes. Tais comparações, combinadas com afirmações sobre preferências individuais, impõem restrições nos valores dos critérios assim como no peso dos decisores.

### Métodos que tratam todos os decisores por igual

Para resolver o problema da atribuição dos pesos para os diferentes decisores, também consideramos cenários nos quais são utilizados métodos que tratam todos os decisores por igual, uma vez que não requerem pesos para os decisores. Nomeadamente os métodos de mediação apresentados na Subsecção 4.2.3:

- *Maximizar a soma dos valores*<sup>4</sup>: escolher a alternativa  $x^{(j)}$  que maximiza

$$v^1(x^{(j)}) + v^2(x^{(j)}) + \dots + v^p(x^{(j)}). \quad (4.13)$$

- *Maximizar o produto dos valores*: escolher a alternativa  $x^{(j)}$  que maximiza

$$v^1(x^{(j)}) * v^2(x^{(j)}) * \dots * v^p(x^{(j)}). \quad (4.14)$$

- *Maximizar a PoP mínima*: escolher a alternativa  $x^{(j)}$  que maximiza

$$\min_{k=1, \dots, p} \frac{v^k(x^{(j)})}{v^{k-max}}, \quad (4.15)$$

onde  $v^{k-max}$  representa o máximo valor admissível para o decisor  $k$ .

---

<sup>4</sup>Note-se que maximizar a soma dos valores corresponde a usar (4.12), considerando que todos os decisores têm o mesmo peso.



# Decisão Colectiva com Informação Ordinal: Comparação de Diferentes Regras

---

## 5.1 Introdução

O objectivo deste capítulo é estender o estudo das regras apresentadas no Capítulo 3 ao caso da negociação e da decisão em grupo com informação incompleta<sup>1</sup>. Mais uma vez, consideramos problemas com informação ordinal, admitindo em particular que os negociadores ou decisores fornecem uma ordenação dos pesos dos assuntos ou dos pesos dos critérios, uma ordenação do valor de cada nível em cada assunto ou uma ordenação do valor de cada alternativa em cada critério, e informação ordinal sobre as diferenças de valor entre níveis consecutivos em cada assunto ou sobre as diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. Na aproximação apresentada neste capítulo é utilizada simulação Monte Carlo para verificar como as regras se comparam. A ideia é que, com base em informação ordinal, em vez de se utilizarem valores cardinais precisos, um mediador ou um facilitador possa sugerir uma ou mais boas alternativas com base nas regras de decisão apresentadas.

Admitindo que os pesos dos assuntos ou critérios são desconhecidos, usamos a regra pesos ROC para aproximar os seus valores, uma vez que, como verificado no Capítulo 3, esta é a regra que conduz a melhores resultados. Quando a informação incompleta se refere também ao valor de cada nível em cada assunto ou ao valor de cada alternativa em cada critério, consideramos a regra valores ROC. Quando a informação incompleta se refere às diferenças de valor entre níveis consecutivos em cada assunto ou às diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério consideramos a regra valores  $\Delta$ ROC. Para uma descrição detalhada destas regras rever Capítulo 3 (Subsecção 3.2.2).

Relembremos que, para a negociação:

$$v^k(x^{(j)}) = \sum_{i=1}^n w_i^k v_i^k(l_i^{(j)}), \quad j = 1, \dots, m.$$

---

<sup>1</sup>Este capítulo baseia-se nos trabalhos que relatámos em Sarabando e Dias (2010b) e Sarabando e Dias (2010c).

Para a decisão em grupo:

$$v^k(x^{(j)}) = \sum_{i=1}^n w_i^k v_i^k(x^{(j)}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Como referência, consideramos o caso de informação completa no qual se assume que todas as componentes da função de valor são conhecidas. Relaxando esta suposição, consideramos duas possibilidades para o tipo de informação incompleta:

- (1) Os pesos  $w_i^k$  são desconhecidos: é fornecida informação ordinal e usa-se a regra pesos ROC, apresentada na Subsecção 3.2.2, para aproximar os seus valores. Os valores de  $v_i^k(l_i^{(j)})$  ou de  $v_i^k(x^{(j)})$  são conhecidos.
- (2) Tanto os pesos como os valores são desconhecidos: apenas é fornecida informação ordinal. A regra pesos ROC é utilizada para aproximar os valores de  $w_i^k$  e a regra valores ROC ou a regra valores  $\Delta$ ROC, apresentadas na Subsecção 3.2.2, são utilizadas para aproximar os valores de  $v_i^k(l_i^{(j)})$  ou de  $v_i^k(x^{(j)})$ .

Tanto no caso da negociação como no caso da decisão em grupo, comparamos o comportamento das diferentes regras, quando se utilizam os três métodos apresentados no Capítulo 4: maximizar a soma dos valores, maximizar o produto dos excessos relativamente aos valores de reserva, no caso da negociação ou maximizar o produto dos valores, no caso da decisão em grupo, e maximizar a PoP mínima. Como já referido, alguns métodos podem ser considerados mais apelativos do que outros. No entanto o nosso objectivo não é comparar os métodos mas sim avaliar e comparar as regras. A escolha do método a utilizar depende das preferências do mediador ou do facilitador, nomeadamente em considerações sobre justiça *versus* eficiência.

Neste capítulo temos como objectivo aumentar o nosso conhecimento sobre as questões seguintes:

1. Quão boas são as alternativas sugeridas por cada regra?
2. Existem diferenças significativas entre as regras, relativamente à qualidade dos resultados?
3. Será que a variação da dimensão do problema afecta de forma significativa os resultados?
4. Será que, no caso da negociação, o uso de valores de reserva afecta de forma significativa os resultados?
5. Será que, no caso da decisão em grupo, a variação do número de decisores afecta de forma significativa os resultados?

Na Secção 5.2 são descritas as simulações realizadas, sendo os resultados de tais simulações apresentados na Secção 5.3. Na Secção 5.4 apresentamos algumas conclusões, tentando responder às questões colocadas anteriormente e apresentamos algumas vias para investigação futura. Na Secção 5.5 mostramos as tabelas com os resultados.

## 5.2 Simulações

À semelhança do Capítulo 3 (ver Secção 3.4), tanto para o caso da negociação como para o caso da decisão em grupo, foram utilizadas simulações Monte Carlo para comparar as regras, gerando 5000 problemas aleatórios para cada conjunto de aspectos (número de assuntos ou critérios, número de níveis ou alternativas, ...). Para gerar problemas aleatórios, os valores dos níveis ou os valores das alternativas, foram gerados uniformemente no intervalo  $[0,1]$  e posteriormente normalizados de forma que o maior valor em cada assunto ou critério fosse igual a um e o menor valor fosse igual a zero. Os pesos dos assuntos ou dos critérios foram também gerados de acordo com uma distribuição uniforme em  $W^k$  (conjunto admissível dos pesos para o negociador ou decisor  $k$ ) usando o processo descrito na Secção 3.4.

Para cada problema aleatório, definido por uma matriz de valores dos níveis ou de valores das alternativas, e por um vector de pesos dos assuntos ou dos critérios, o método de agregação fornece o valor global de cada alternativa, produzindo uma ordenação das mesmas. Trata-se da ordenação que mais uma vez designamos por ordenação supostamente verdadeira. Por outro lado, para cada método de agregação, a aproximação fornecida por cada uma das regras baseada em informação ordinal fornece outra ordenação. Consideramos que,  $x^{(real-soma)}$  é a suposta melhor alternativa de acordo com o método de maximizar a soma dos valores e  $x^{(regra-soma)}$  é a melhor alternativa fornecida pela regra de acordo com o mesmo método, e de igual forma para os restantes métodos de agregação.

Comparando a ordenação das alternativas de acordo com os parâmetros supostamente verdadeiros com a ordenação das alternativas de acordo com a regra de decisão utilizada, mais uma vez consideramos os resultados seguintes:

- A posição que a melhor alternativa de acordo com a ordenação supostamente verdadeira atinge na ordenação gerada pela regra de decisão utilizada.
  
- A posição que a melhor alternativa da ordenação gerada pela regra atinge na ordenação supostamente verdadeira.

- A taxa de acerto, isto é, a proporção de casos nos quais as melhores alternativas nas duas ordenações coincidem<sup>2</sup>.
- A perda de valor, isto é, a diferença entre o valor real da suposta melhor alternativa e o valor real da alternativa escolhida pela regra, para cada um dos métodos utilizados. Por exemplo, para o método de maximizar a soma dos valores, e para o caso da negociação, a perda de valor é dada por<sup>3</sup>:

$$[v^1(x^{(real-soma)}) + v^2(x^{(real-soma)})] - [v^1(x^{(regra-soma)}) + v^2(x^{(regra-soma)})]. \quad (5.1)$$

No caso da negociação, pode variar o número de assuntos a negociar assim como o número de níveis em cada assunto. Como nem todos os assuntos têm necessariamente o mesmo número de níveis, a combinação de diferentes possibilidades para estes valores conduz a dimensões do problema que podem diferir muito de problema para problema. No nosso estudo, para comparar as regras de decisão, considerámos situações com 3 e 5 assuntos e 3 e 5 níveis em cada assunto. No caso com 3 assuntos e 3 níveis em cada assunto existe um total de 27 alternativas, para 3 assuntos e 5 níveis existem 125 alternativas, para 5 assuntos e 3 níveis existem 243 alternativas e para 5 assuntos e 5 níveis existem 3125 alternativas. Não utilizámos problemas com mais de 5 assuntos e 5 níveis em cada assunto, uma vez que originaria um número muito elevado de alternativas. Optámos também por utilizar o mesmo número de níveis em cada assunto para evitar ter um grande número de diferentes dimensões para o problema. Considerámos ainda, sem perda de generalidade, que para o primeiro negociador todos os assuntos são a maximizar enquanto que para o segundo negociador todos os assuntos são a minimizar. Considerámos inicialmente que os valores de reserva são iguais a zero para ambos os negociadores, o que corresponde ao caso em que não existem valores de reserva, e num segundo conjunto de experiências considerámos que os valores de reserva de ambos os negociadores são iguais a 0.5.

---

<sup>2</sup>A taxa de acerto considerando a posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras é tipicamente igual à taxa de acerto considerando a posição da melhor alternativa usando as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira, mas pode diferir na presença de empates no topo da ordenação, o que é frequente quando as diferentes regras são utilizadas. Neste caso, a alternativa escolhida é a primeira com posição na ordenação igual a um. Por este motivo, a taxa de acerto considerando a posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras é maior ou igual à taxa de acerto considerando a posição da melhor alternativa usando as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira.

<sup>3</sup>Relembremos que, no caso da negociação, estamos a considerar negociações bilaterais, e  $v^1(x^{(j)})$  representa o valor da alternativa  $x^{(j)}$  para o primeiro negociador, e  $v^2(x^{(j)})$  representa o valor da mesma alternativa para o segundo negociador.



Para comparar as regras de decisão para o caso da decisão em grupo, considerámos situações com 5 e 15 critérios e 5 e 15 alternativas. Não considerámos situações com 10 critérios e 10 alternativas, à semelhança do exposto no Capítulo 3, uma vez que, sendo dimensões intermédias, não dão muita informação adicional. Para cada uma das quatro dimensões do problema (5 critérios e 5 alternativas, 5 critérios e 15 alternativas, 15 critérios e 5 alternativas, e 15 critérios e 15 alternativas) considerámos 3 e 5 decisores. O estudo realizado relativamente à decisão em grupo é muito semelhante ao do caso da decisão individual, com a principal diferença de que agora existe mais do que um decisor. Note-se que, nesta abordagem de decisão em grupo, uma vez que o nosso objectivo é que um facilitador possa sugerir alternativas com base em diferentes métodos, não existe necessidade de atribuir pesos aos diferentes decisores (os  $d_k$  da equação (4.12) apresentada na Subsecção 4.3.3). Na Secção A.1 do Apêndice A apresentamos, apenas para comparação, uma abordagem ligeiramente diferente, que já tem em conta os pesos dos diferentes elementos do grupo.

## 5.3 Resultados

### 5.3.1 Introdução

Ao longo desta secção usamos a notação “ROC TRUE” para referir o uso de pesos ROC para os assuntos ou critérios e valores verdadeiros, “ROC  $\Delta$ ROC” para referir o uso de pesos ROC para os assuntos ou critérios e valores  $\Delta$ ROC, e “ROC ROC” para referir o uso de pesos ROC para os assuntos ou critérios e valores ROC. Todas as tabelas referidas são apresentadas no fim do capítulo (Secção 5.5). As tabelas relativas à perda de valor das diferentes regras, considerando os diferentes métodos, mostram o valor médio, o desvio padrão e o valor máximo da perda de valor<sup>4</sup>. As tabelas relativas à posição que a melhor alternativa de acordo com a ordenação supostamente verdadeira atinge na ordenação gerada pela regra de decisão utilizada, mostram, para cada regra e cada método, a posição média na ordenação supostamente verdadeira e a percentagem de vezes em que a posição atingida é igual a 1,  $\leq 2$ ,  $\leq 3$ ,  $\leq 4$ ,  $\leq 5$ ,  $\leq 10$  e  $\leq 20$ , para o caso da negociação, e igual a 1,  $\leq 2$ ,  $\leq 3$ ,  $\leq 4$  e  $\leq 5$ , para o caso da decisão em grupo. Estas tabelas dão-nos informação para saber quantas alternativas devem ser escolhidas para ter uma probabilidade elevada de reter a suposta melhor alternativa. Não apresentamos os mesmos resultados nos dois casos, uma vez que na negociação as dimensões utilizadas conduzem a problemas com bastante mais alternativas do que as consideradas na decisão em grupo. As

---

<sup>4</sup>Note-se que no Capítulo 3 (rever Subsecção 3.5.6), relativo à decisão individual, não apresentámos o desvio padrão da perda de valor. No entanto, como neste caso as perdas de valor entre os métodos não são comparáveis, optámos por mostrar mais este indicador. Por exemplo, no caso da negociação, a perda de valor máxima é igual a dois para o método de maximizar a soma dos valores, é igual a um para o método de maximizar o produto dos excessos relativamente aos valores de reserva (se se considerarem valores de reserva iguais a zero) e é igual a um para o método de maximizar a PoP mínima.

tabelas relativas à posição da melhor alternativa usando as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira mostram resultados semelhantes. Estes resultados permitem-nos saber quão boa é a alternativa escolhida pela regra em termos da ordenação supostamente verdadeira, e complementam os resultados relativos à perda de valor.

Tanto no caso da negociação como no caso da decisão em grupo, vamos apresentar os resultados de alguns testes estatísticos semelhantes aos expostos no Capítulo 3 (ver Subsecção 3.5.2). Vamos apresentar tabelas onde mostramos o valor observado da estatística de teste e o valor-p (relembremos que o valor-p é o menor nível de significância que permite rejeitar a igualdade entre as regras). Apresentamos algumas conclusões para níveis de significância de 1% e 5%, que são valores bastante utilizados na prática<sup>5</sup>. Note-se que o facto de não se rejeitar a igualdade entre as regras não significa que elas efectivamente são iguais. Significa sim que as simulações não fornecem argumentos que provem que as regras conduzem a resultados diferentes. Para facilitar a compreensão das conclusões apresentamos algumas figuras onde:

- Assinalamos a preto o caso em que, para um nível de significância 1%, as regras podem ser consideradas diferentes.
- Assinalamos a cinzento escuro o caso em que as regras podem ser consideradas diferentes para um nível de significância de 5%, mas não para um nível de significância de 1%.
- Assinalamos a cinzento claro o caso em que as regras não podem ser consideradas diferentes mesmo utilizando um nível de significância de 5%.

### 5.3.2 Negociação

No caso em que existe informação disponível relativamente aos valores de reserva, consideramos que uma alternativa para ser admissível tem que ser melhor, para ambas as partes, do que os valores de reserva. No nosso estudo de simulação eliminámos os casos em que isso não acontecia. Para determinar uma perda de valor realística decidimos analisar apenas os casos em que a alternativa fornecida pela regra é admissível. De facto, não ocorrerá nenhuma perda de valor se a alternativa proposta pelo mediador não for aceite por uma das partes, uma vez que não existirá acordo.

Os resultados relativos à posição que a melhor alternativa de acordo com as diferentes regras atinge na ordenação supostamente verdadeira são apresentados nas Tabelas 5.1 e 5.2, não considerando valores de reserva e considerando valores de reserva, respectivamente:

- Como esperado, uma vez que o número total de alternativas é elevado, a melhor alternativa segundo a regra não é frequentemente a melhor.

---

<sup>5</sup>Relembremos que o nível de significância representa a probabilidade de rejeitar a igualdade entre as regras, quando de facto elas são iguais. Desta forma, quanto menor for o nível de significância utilizado, menor será a probabilidade de cometer este tipo de erro.

- Aumentando o número de assuntos diminui a taxa de acerto, o mesmo acontecendo quando se aumenta o número de níveis em cada assunto. Este resultado é natural, uma vez que, quer aumentando o número de assuntos, quer aumentando o número de níveis em cada assunto, aumenta o número de alternativas.
- Como esperado, os piores resultados são obtidos usando a regra pesos ROC valores ROC, porque este é o caso em que menos informação é requerida dos negociadores. Os melhores resultados são obtidos utilizando a regra pesos ROC valores TRUE. Os resultados obtidos utilizando a regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC são mais próximos dos obtidos utilizando a regra pesos ROC valores TRUE do que os obtidos usando a regra pesos ROC valores ROC.
- Apesar de não ser nosso objectivo comparar os métodos, é possível verificar que para o método PoP a taxa de acerto é inferior à dos restantes métodos, para todas as regras utilizadas.

A diferença entre os resultados relativos à taxa de acerto média, considerando valores de reserva e não considerando valores de reserva não parece muito significativa. Utilizámos alguns testes estatísticos para comprovar a veracidade desta afirmação. Comparámos, para as diferentes regras, a taxa de acerto média da soma sem valores de reserva com a taxa de acerto média da soma com valores de reserva, a taxa de acerto média do produto sem valores de reserva com a taxa de acerto média do produto com valores de reserva, e a taxa de acerto média do PoP sem valores de reserva com a taxa de acerto média do PoP com valores de reserva. Os resultados são apresentados na Tabela 5.3. Como os valores-p são muito elevados, não é possível concluir que o uso de valores de reserva afecte de forma significativa a qualidade das aproximações proporcionadas pelas regras.

A Tabela 5.4 mostra os resultados comparando a utilização das diferentes regras, relativamente à taxa de acerto média. As conclusões seguintes podem ser lidas mais facilmente através da Figura 5.1:

- Para o método da soma, tanto usando como não usando valores de reserva, a diferença entre as taxas de acerto médias pode ser considerada significativa para um nível de significância de 5%, mas não para um nível de significância de 1%.
- Para o método do produto, as conclusões são as mesmas, excepto utilizando valores de reserva e comparando a regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC com a regra pesos ROC valores ROC, em que a diferença entre as regras não pode ser considerada significativa.

- Para o método PoP, em quase todos os casos, a diferença entre as regras não pode ser considerada significativa, excepto não considerando valores de reserva e comparando a regra pesos ROC valores TRUE com a regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC que, para um nível de significância de 5%, podem ser consideradas diferentes relativamente à taxa de acerto média<sup>6</sup>.

	Sem valores reserva	Com valores reserva
Soma		
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC		
ROC TRUE - ROC ROC		
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC		
Produto		
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC		
ROC TRUE - ROC ROC		
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC		
PoP		
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC		
ROC TRUE - ROC ROC		
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC		

	Sem valores reserva	Com valores reserva
Soma		
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC		
ROC TRUE - ROC ROC		
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC		
Produto		
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC		
ROC TRUE - ROC ROC		
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC		
PoP		
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC		
ROC TRUE - ROC ROC		
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC		

Figura 5.1: Comparação dos resultados das diferentes regras para a negociação: taxa de acerto média (esquerda) e perda de valor média (direita).

Resultados relativos à posição da suposta melhor alternativa na ordenação fornecida por cada regra são mostrados nas Tabelas 5.5 e 5.6, não considerando valores de reserva e considerando valores de reserva, respectivamente. Estas tabelas permitem-nos saber quantas alternativas devem ser retidas para garantir a retenção da suposta melhor alternativa. Uma vez que o número total de alternativas é elevado, reter apenas uma alternativa não é suficiente na maioria dos casos para obter a suposta melhor. Obviamente, a probabilidade de reter a suposta melhor alternativa aumenta com o número de alternativas que é retido. Para as dimensões testadas, podemos retirar algumas conclusões:

<sup>6</sup>Pode parecer estranho que, para o método PoP, a diferença entre as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC possa ser considerada significativa e a diferença entre as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores ROC não possa ser considerada significativa. Isto acontece uma vez que, apesar da média da diferença entre taxas de acerto ser superior comparando as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores ROC, o desvio padrão também é bastante mais elevado, obtendo-se desta forma um valor observado da estatística de teste inferior. Comparando a regra pesos ROC valores TRUE com a regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC, a média da diferença entre as taxas de acerto é de 4.660 e o desvio padrão é de 2.899, o que faz com que  $t_{obs} = \frac{4.660}{2.899/\sqrt{4}} = 3.214$ . Os valores correspondentes comparando a regra pesos ROC valores TRUE com a regra pesos ROC valores ROC são, respectivamente, 11.565, 7.650 e 3.023. O desvio padrão da diferença entre as taxas de acerto é bastante superior considerando as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores ROC, uma vez que para 3 assuntos e 3 e 5 níveis em cada assunto e para 5 assuntos e 3 níveis em cada assunto, a diferença entre as taxas de acerto é bastante elevada. O mesmo não acontece para 5 assuntos e 5 níveis em cada assunto, uma vez que neste caso a taxa de acerto é muito pequena qualquer que seja a regra utilizada.

- Não considerando valores de reserva, em mais de 35% dos casos a alternativa escolhida pela regra é uma das 20 melhores alternativas. Se considerarmos as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC, em mais de 42% dos casos a alternativa escolhida pela regra é uma das 10 melhores alternativas.
- Os resultados são piores considerando valores de reserva. As percentagens correspondentes são de 13% e 10%, respectivamente.
- Note-se que estes valores não são muito elevados, porque no caso com 5 assuntos e 5 níveis em cada assunto existe um total de 3125 alternativas. Neste caso, reter 20 alternativas corresponde a reter apenas 0.64% do número total de alternativas.

Na Tabela 5.7 é possível ver a perda de valor das diferentes regras, considerando os diferentes métodos, tanto não utilizando valores de reserva como utilizando valores de reserva. Como esperado, os piores resultados são obtidos usando a regra pesos ROC valores ROC. No entanto, mesmo utilizando esta regra a perda de valor não é muito elevada. Comparando os resultados obtidos não considerando valores de reserva com os resultados obtidos considerando valores de reserva é possível verificar que a perda de valor do método da soma é ligeiramente inferior no segundo caso (ou seja, considerando valores de reserva) e a perda de valor do método PoP é superior. Estes resultados são normais uma vez que, considerando valores de reserva, estamos a excluir da análise as alternativas não admissíveis. Usando o método do produto a perda de valor é consideravelmente mais elevada não considerando valores de reserva, uma vez que o valor global também é mais elevado. Desta forma, não é possível comparar a perda de valor não considerando valores de reserva com a perda de valor considerando valores de reserva, uma vez que não se obtêm valores comparáveis. Não podemos assim apresentar uma tabela análoga à Tabela 5.3, para a perda de valor. No entanto, utilizámos alguns testes estatísticos para verificar se a diferença entre as regras é significativa, relativamente à perda de valor média, tanto considerando valores de reserva, como não considerando valores de reserva. Os resultados estão apresentados na Tabela 5.8 e as conclusões esquematizadas na Figura 5.1:

- Para todos os métodos, não considerando valores de reserva, as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores ROC e as regras pesos ROC valores  $\Delta$ ROC e pesos ROC valores ROC podem ser consideradas diferentes relativamente à perda de valor média. As regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC podem ser consideradas diferentes para um nível de significância de 5%, mas não para um nível de significância de 1%.
- Para os métodos da soma e PoP, considerando valores de reserva, as regras podem ser consideradas diferentes para um nível de significância de 5%, mas não para um nível de significância de 1%.

- Para o método do produto, considerando valores de reserva, as conclusões são as mesmas, excepto quando se comparam as regras pesos ROC valores  $\Delta$ ROC e pesos ROC valores ROC, que não se podem considerar diferentes.

### 5.3.3 Decisão em Grupo

A Tabela 5.9 apresenta a posição que a melhor alternativa na ordenação gerada pelas regras atinge na ordenação supostamente verdadeira, para 3 decisores. Os resultados correspondentes, para 5 decisores, são apresentados na Tabela 5.10. É possível verificar que:

- Aumentando o número de alternativas, obviamente, diminui a taxa de acerto. Aumentando o número de critérios, aumenta a taxa de acerto<sup>7</sup>.
- Obviamente os piores resultados são obtidos usando a regra pesos ROC valores ROC, e os melhores resultados são obtidos utilizando a regra pesos ROC valores TRUE. Os resultados da regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC são mais próximos dos da regra pesos ROC valores TRUE do que dos da regra pesos ROC valores ROC.
- As taxas de acerto para os métodos da soma e do produto são semelhantes, e melhores do que a taxa de acerto do método PoP.

Utilizámos alguns testes estatísticos para verificar se a qualidade das regras relativamente à taxa de acerto depende significativamente do número de decisores. Comparámos a média da taxa de acerto para 3 e 5 decisores nos diferentes cenários. Também comparámos a média da taxa de acerto para 3 decisores<sup>8</sup> com a média da taxa de acerto para apenas um decisor (rever resultados na Secção 3.5). Os resultados são apresentados na Tabela 5.11 e as conclusões esquematizadas na Figura 5.2:

- Comparando os resultados relativos à taxa de acerto média, para 3 e 5 decisores:
  - . Para um nível de significância de 1%, a diferença pode ser considerada significativa para a regra pesos ROC valores TRUE e usando os métodos da soma e do produto, e para as regras pesos ROC valores  $\Delta$ ROC e pesos ROC valores ROC e usando o método PoP.
  - . Para um nível de significância de 5%, a diferença pode ainda ser considerada significativa para a regra ROC TRUE e usando o método PoP.
  - . Nos casos em que a diferença entre as taxas de acerto médias pode ser considerada significativa, essa diferença é favorável ao caso com 3 decisores.

<sup>7</sup>Relembremos que no caso da decisão individual, ver Subsecções 3.5.2 e 3.5.4, em geral, é observado o mesmo comportamento da taxa de acerto. Para as regras pesos ROC valores TRUE, pesos ROC valores  $\Delta$ ROC e pesos ROC valores ROC, em geral a taxa de acerto aumenta com o número de critérios.

<sup>8</sup>Escolhemos o caso com 3 decisores uma vez que, como iremos referir seguidamente, quando existem diferenças entre as taxas de acerto médias essas diferenças são favoráveis ao caso com 3 decisores.

- Comparando os resultados da decisão individual com o caso com 3 decisores:
  - . Para um nível de significância de 1%, a diferença apenas pode ser considerada significativa quando é usado o método PoP.
  - . Para um nível de significância de 5%, a diferença apenas não é considerada significativa para a regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC e usando o método da soma.
  - . A diferença encontrada nas taxas de acerto médias é sempre favorável à decisão individual.

ROC TRUE			
3 decisores vs 5 decisores		Individual vs 3 decisores	
Soma - Soma		Individual - Soma	
Produto - Produto		Individual - Produto	
PoP - PoP		Individual - PoP	
ROC $\Delta$ ROC			
3 decisores vs 5 decisores		Individual vs 3 decisores	
Soma - Soma		Individual - Soma	
Produto - Produto		Individual - Produto	
PoP - PoP		Individual - PoP	
ROC ROC			
3 decisores vs 5 decisores		Individual vs 3 decisores	
Soma - Soma		Individual - Soma	
Produto - Produto		Individual - Produto	
PoP - PoP		Individual - PoP	

Figura 5.2: Comparação da taxa de acerto média fazendo variar o número de decisores.

A Tabela 5.12 mostra os resultados de testes estatísticos comparando a utilização das diferentes regras, relativamente às taxas de acerto médias, e a Figura 5.3 esquematiza as conclusões:

- Para 3 decisores, e usando o método da soma, a diferença entre as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC e entre as regras pesos ROC valores ROC e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC não pode ser considerada significativa. A diferença entre as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores ROC pode ser considerada significativa.
- Para 3 decisores, e usando os métodos do produto e PoP, com um nível de significância de 5%, a diferença entre as regras pode ser considerada significativa. Para um nível de significância de 1%, a diferença apenas não pode ser considerada significativa quando é usado o método do produto e comparando as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC.

- Para 5 decisores, e para um nível de significância de 1%, a diferença entre as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores ROC e entre as regras pesos ROC valores  $\Delta$ ROC e pesos ROC valores ROC pode ser considerada significativa. Para o método PoP, e para um nível de significância de 5%, a diferença entre as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC também pode ser considerada significativa.

	3 decisores	5 decisores		3 decisores	5 decisores
	Soma			Soma	
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC			ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC		
ROC TRUE - ROC ROC			ROC TRUE - ROC ROC		
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC			ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC		
	Produto			Produto	
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC			ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC		
ROC TRUE - ROC ROC			ROC TRUE - ROC ROC		
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC			ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC		
	PoP			PoP	
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC			ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC		
ROC TRUE - ROC ROC			ROC TRUE - ROC ROC		
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC			ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC		

Figura 5.3: Comparação dos resultados das diferentes regras para a decisão em grupo: taxa de acerto média (esquerda) e perda de valor média (direita).

Nas Tabelas 5.13 e 5.14 é possível ver a posição que a melhor alternativa de acordo com a ordenação supostamente verdadeira atinge na ordenação gerada pela regra de decisão utilizada, para 3 e 5 decisores, respectivamente:

- Para 3 decisores, e para todos os métodos, usando a regra pesos ROC valores TRUE, reter duas alternativas é suficiente para reter a verdadeira melhor alternativa em mais de 88% dos casos. Para os métodos da soma e do produto, esta probabilidade é superior a 92%. As probabilidades correspondentes são iguais a 84% e 92%, para 5 decisores.
- Para 3 decisores, e para todos os métodos, usando a regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC, reter duas alternativas é suficiente em mais de 87% dos casos. Para os métodos da soma e do produto, esta probabilidade é superior a 92%. As probabilidades correspondentes são iguais a 82% e 91%, para 5 decisores. Note-se que estes resultados são muito próximos dos observados para a regra pesos ROC valores TRUE.
- Para 3 decisores, e para todos os métodos, usando a regra pesos ROC valores ROC, reter duas alternativas é suficiente em mais de 79% dos casos. Para os métodos da soma e do produto, esta probabilidade é superior a 86%. As probabilidades correspondentes são iguais a 74% e 86%, para 5 decisores.



Os resultados relativos à perda de valor, para 3 e 5 decisores, são apresentados na Tabela 5.15. Note-se que não existe muito interesse em comparar a perda de valor para 3 e 5 decisores, uma vez que não é possível obter valores comparáveis<sup>9</sup>. É no entanto possível comparar, dentro de cada método e para o mesmo número de decisores, a perda de valor média (para todos os decisores) de cada regra. Realizámos alguns testes estatísticos cujos resultados estão apresentados na Tabela 5.16 e cujas conclusões estão esquematizadas na Figura 5.3. Podemos concluir que:

- As conclusões obtidas para 3 decisores, relativamente à perda de valor média, são semelhantes às obtidas para 5 decisores. Note-se que, apesar de, de 3 para 5 decisores a variação no número de decisores não ser muito substancial, essa variação foi suficiente para conduzir a diferentes resultados relativamente à taxa de acerto média.
- A diferença entre as perdas de valor médias das regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC não pode ser considerada significativa, tanto para 3 como para 5 decisores.
- Para um nível de significância de 5%, a diferença entre as restantes regras pode ser considerada significativa.
- Para um nível de significância de 1%, a diferença apenas pode ser considerada significativa para 5 decisores e para o método PoP, e comparando as regras pesos ROC valores  $\Delta$ ROC e pesos ROC valores ROC.

Note-se que, nas simulações realizadas, considerámos que a matriz de valores não é a mesma para todos os decisores. Um caso particular deste é admitir que todos os decisores chegam a acordo sobre uma ordenação dos valores das alternativas em cada critério, e possivelmente sobre uma ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. Neste caso poderia ser utilizada a mesma matriz de valores para todos os decisores, à semelhança do realizado, por exemplo, por Dias e Clímaco (2005). Por exemplo, para a regra pesos ROC valores TRUE, e para 5 critérios, 5 alternativas e 3 decisores, considerando avaliações consensuais, obtém-se uma taxa de acerto de 91.88% para o método da soma, 91.98% para o método do produto, e 91.42% para o método PoP. Considerando que a matriz de valores não é a mesma para todos os decisores as taxas de acerto correspondentes são de 83.04%, 83.18% e 79.06%, respectivamente (ver Tabela 5.9). Não apresentamos os resultados nos restantes casos, no entanto, considerar avaliações consensuais leva a um aumento notório na taxa de acerto.

---

<sup>9</sup>Apenas para o método PoP é possível comparar a perda de valor média para 3 decisores com a perda de valor média para 5 decisores, no entanto para manter a coerência com os restantes métodos não o faremos.

## 5.4 Conclusões

Neste capítulo considerámos problemas de diversas dimensões para os casos da negociação bilateral e da decisão em grupo, nos quais as preferências de ambos os negociadores, ou dos vários elementos do grupo, podem ser modeladas por uma função de valor aditiva.

Comparámos três regras de decisão (pesos ROC valores TRUE, pesos ROC valores  $\Delta$ ROC e pesos ROC valores ROC), para ajudar um mediador ou um facilitador a sugerir uma alternativa, ou um subconjunto de alternativas, considerando que existe informação ordinal tanto nos pesos como nos valores dos níveis ou das alternativas, e testámos as referidas regras usando simulação Monte Carlo.

À semelhança do Capítulo 3, para comparar as regras relacionámos a ordenação das alternativas de acordo com os parâmetros supostamente verdadeiros com a ordenação das alternativas de acordo com a regra de decisão utilizada. Para cada método (soma, produto e PoP) determinámos a percentagem de vezes em que cada regra escolhe a suposta melhor alternativa, e no caso em que as duas alternativas não coincidem determinámos a perda de valor.

Relativamente às questões que nos propusemos responder no início do capítulo, foi possível verificar que:

1. Na nossa opinião os resultados obtidos são encorajadores. Na negociação, foi possível concluir que, devido ao elevado número de alternativas consideradas, reter apenas uma alternativa não é suficiente na maioria dos casos, mas, mesmo quando a regra não escolhe a verdadeira melhor alternativa, a perda de valor média é relativamente baixa. Se em vez de uma alternativa, o mediador sugerir, por exemplo, um conjunto de 20 alternativas, a probabilidade deste conjunto conter a verdadeira melhor alternativa é bastante mais elevada. Note-se que reter 20 alternativas não parece um resultado muito animador, e não o é se o conjunto inicial de alternativas é pequeno, mas, se o conjunto inicial de alternativas for bastante elevado, pode ser muito interessante ficar apenas com um conjunto de 20 alternativas. Na decisão em grupo, obtivemos taxas de acerto bastante elevadas e perdas de valor médias não muito substanciais.
2. Os melhores resultados são obtidos usando as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC. Existem mesmo situações em que a diferença entre estas regras não pode ser considerada significativa, o que de certa forma é surpreendente, uma vez que na regra pesos ROC valores TRUE é requerida dos negociadores ou dos elementos do grupo, informação cardinal sobre o valor dos níveis em cada assunto ou sobre o valor das alternativas em cada critério. A regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC pode, na grande maioria dos casos, ser considerada melhor do que a regra pesos ROC valores ROC.

3. No caso da negociação, aumentando o número de assuntos diminui a taxa de acerto, verificando-se o mesmo quando se aumenta o número de níveis em cada assunto. Isto verifica-se uma vez que, quer aumentando o número de assuntos quer aumentando o número de níveis em cada assunto, faz aumentar o número de alternativas. Na decisão em grupo, aumentando o número de alternativas, obviamente, diminui a taxa de acerto, e à semelhança do que acontece na decisão individual (rever Capítulo 3), aumentando o número de critérios, aumenta a taxa de acerto.
4. Na negociação, a diferença entre os resultados relativos à taxa de acerto média, considerando valores de reserva e não considerando valores de reserva, não pode ser considerada significativa. Obviamente não se verifica o mesmo relativamente à perda de valor média, uma vez que usar valores de reserva leva a obter valores globais diferentes. Valores inferiores para os métodos da soma e do produto, e superiores para o método PoP.
5. Na decisão em grupo, fazendo variar o número de decisores verificaram-se algumas alterações relativamente à taxa de acerto média. Comparando o caso com 3 decisores com o caso com 5 decisores, nos casos em que existem diferenças, a diferença é favorável ao caso com 3 decisores. Comparando o caso da decisão individual com o caso com 3 decisores, as diferenças encontradas são favoráveis à decisão individual. Pelo menos para as dimensões consideradas, a qualidade das aproximações diminui à medida que o número de decisores aumenta.

Apesar de termos obtido conclusões interessantes, todas elas devem ser lidas com cuidado uma vez que apenas considerámos dois valores possíveis para cada variável (negociação - número de assuntos e número de níveis em cada assunto; decisão em grupo - número de critérios, número de alternativas e número de decisores). Na negociação considerámos ainda que todos os assuntos têm o mesmo número de níveis e que, no caso de existirem valores de reserva, estes são iguais para ambas as partes e iguais a  $0.5^{10}$ . Desta forma, o nosso estudo pode naturalmente ser estendido, por exemplo, aumentando as possibilidades para o número de assuntos ou critérios, para o número de níveis em cada assunto ou número de alternativas, e para o número de decisores, no caso da decisão em grupo.

Quando conduzindo os testes de hipóteses existiram casos em que não foi possível concluir que as diferentes regras conduzem a diferentes resultados. Note-se que o facto de não rejeitarmos a igualdade entre as regras não significa que elas são iguais, significa sim que as simulações não fornecem argumentos para afirmar que elas conduzem a diferentes resultados. É possível que aumentando o número de assuntos ou critérios, o número de níveis em cada assunto ou de alternativas e o número de decisores, no caso da decisão

---

<sup>10</sup>Na Secção A.2 do Apêndice A é possível ver alguns resultados usando um conhecido *template* para gerar exemplos aleatório. Nesse *template* nem o número de níveis é igual em todos os assuntos nem o valor de reserva é igual para ambas as partes.

em grupo, as simulações forneçam argumentos para sustentar que as regras conduzem a diferentes resultados.

## 5.5 Tabelas

Soma								
3 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	2.88	47.14	68.18	77.58	83.70	87.24	95.36	99.78
ROC ΔROC	3.74	37.10	56.88	68.22	75.74	81.06	92.04	98.86
ROC ROC	5.52	26.34	43.46	56.26	63.52	69.10	83.04	95.78
3 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	6.37	40.14	40.14	55.64	64.66	71.14	84.82	93.36
ROC ΔROC	9.04	31.14	31.14	45.30	53.88	60.62	77.60	88.56
ROC ROC	21.67	17.36	17.36	26.62	33.66	39.56	56.32	70.20
5 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	6.44	37.50	55.08	64.10	70.16	74.78	86.06	93.34
ROC ΔROC	10.19	25.60	49.64	56.98	64.56	68.70	82.32	91.02
ROC ROC	20.35	16.04	34.62	40.56	48.30	51.02	65.40	77.74
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	214.82	13.48	40.98	40.98	40.98	40.98	54.42	67.16
ROC ΔROC	246.80	9.32	31.24	31.24	31.24	31.24	42.02	55.30
ROC ROC	407.48	4.66	23.18	23.18	23.18	23.18	28.34	35.42
Produto								
3 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	2.49	49.58	71.32	81.38	86.96	90.64	97.58	99.98
ROC ΔROC	2.94	38.56	62.34	73.84	81.42	86.44	97.24	99.98
ROC ROC	4.28	27.44	46.46	59.88	68.82	74.92	90.30	99.86
3 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	5.90	41.20	41.20	57.02	65.78	71.96	86.98	94.36
ROC ΔROC	7.47	30.50	30.50	46.70	56.70	63.54	81.44	91.60
ROC ROC	15.85	15.06	15.06	24.40	33.06	39.34	58.72	73.84
5 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	5.76	39.36	56.72	66.26	72.22	76.14	87.64	94.36
ROC ΔROC	8.66	26.08	49.64	56.98	64.56	68.70	82.32	91.02
ROC ROC	16.32	16.40	34.62	40.56	48.30	51.02	65.40	77.74
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	279.69	9.74	40.98	40.98	40.98	40.98	54.42	67.16
ROC ΔROC	302.33	6.72	31.24	31.24	31.24	31.24	42.02	55.30
ROC ROC	453.63	3.82	23.18	23.18	23.18	23.18	28.34	35.42
PoP								
3 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	2.48	39.54	66.86	79.60	87.84	92.22	99.22	100
ROC ΔROC	2.90	32.00	64.76	74.68	82.98	87.84	98.26	100
ROC ROC	3.76	20.88	48.40	63.62	71.84	79.32	95.26	99.96
3 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	6.47	21.96	35.80	47.28	56.62	63.04	82.10	94.36
ROC ΔROC	7.98	17.24	29.30	41.18	49.66	56.20	76.66	90.54
ROC ROC	13.67	7.64	14.92	24.04	30.38	36.50	57.04	77.80
5 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	7.36	23.82	39.80	49.88	57.58	63.14	79.80	92.78
ROC ΔROC	9.74	18.12	49.64	56.98	64.56	68.70	82.32	91.02
ROC ROC	15.78	11.30	21.24	29.46	35.72	40.58	58.10	75.68
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	390.62	1.42	40.98	40.98	40.98	40.98	54.42	67.16
ROC ΔROC	704.70	0.74	31.24	31.24	31.24	31.24	42.02	55.30
ROC ROC	810.22	0.66	23.18	23.18	23.18	23.18	28.34	35.42

Tabela 5.1: Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira: sem valores de reserva ( $n$  denota o número de assuntos e  $m$  o número de níveis em cada assunto).

Soma								
3 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	2.02	52.60	75.59	86.59	92.19	95.70	99.83	100
ROC ΔROC	2.34	43.19	67.33	80.67	89.09	93.58	99.82	100
ROC ROC	2.80	30.07	56.17	73.65	82.94	90.31	99.71	100
3 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	4.86	42.20	42.20	58.20	67.72	74.12	88.33	96.47
ROC ΔROC	6.16	34.89	34.89	50.21	58.72	65.42	81.99	94.75
ROC ROC	9.85	18.04	18.04	28.84	37.81	45.17	66.96	86.86
5 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	5.76	37.71	54.37	64.15	70.59	74.77	85.74	93.21
ROC ΔROC	7.95	26.40	41.08	50.17	57.59	62.34	77.18	89.65
ROC ROC	12.13	16.44	27.83	35.12	41.15	46.64	63.46	80.79
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	186.31	10.45	10.45	15.52	18.60	21.01	29.09	37.80
ROC ΔROC	211.9441	7.12	7.12	11.37	14.02	16.51	23.91	32.56
ROC ROC	260.88	4.09	4.09	6.49	8.04	9.39	15.45	21.28
Produto								
3 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	1.93	51.23	76.81	88.75	94.68	97.54	100	100
ROC ΔROC	2.28	39.26	68.86	83.26	90.54	94.93	99.87	100
ROC ROC	2.73	27.17	57.60	76.52	84.73	91.10	99.82	100
3 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	4.84	36.54	36.54	52.30	62.94	70.97	89.05	97.68
ROC ΔROC	5.84	27.99	27.99	44.81	56.05	64.72	84.61	96.70
ROC ROC	9.54	8.59	8.59	19.83	32.97	41.67	69.14	89.43
5 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	4.75	37.49	53.36	63.52	69.97	74.67	87.78	96.57
ROC ΔROC	6.65	26.56	41.12	51.18	59.23	64.24	80.25	92.90
ROC ROC	10.27	16.48	27.47	36.42	42.11	46.80	65.71	85.71
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	229.51	6.02	6.02	8.69	10.79	12.16	17.59	24.69
ROC ΔROC	252.65	4.32	4.32	6.27	8.10	9.91	15.15	21.87
ROC ROC	291.82	2.35	2.35	3.64	4.90	5.63	9.08	14.08
PoP								
3 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	2.17	42.67	68.62	85.42	92.93	96.37	99.98	100
ROC ΔROC	2.48	34.72	61.17	78.95	88.31	94.04	99.97	100
ROC ROC	2.72	24.84	55.40	76.41	85.40	92.40	99.98	100
3 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	5.63	22.24	35.05	45.73	55.63	64.04	85.09	97.36
ROC ΔROC	6.54	18.13	30.53	41.19	50.74	58.36	80.33	95.68
ROC ROC	8.80	9.66	18.69	28.78	37.53	45.15	69.85	90.84
5 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	6.52	23.85	38.68	48.62	57.22	62.55	80.57	94.06
ROC ΔROC	8.31	18.27	30.85	39.90	48.17	53.51	72.57	90.16
ROC ROC	11.62	10.91	20.47	28.83	34.68	40.22	60.14	83.08
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	325.83	1.39	1.99	2.55	3.13	3.71	5.98	9.29
ROC ΔROC	341.45	1.08	1.64	2.09	2.56	3.10	5.21	8.97
ROC ROC	353.05	0.64	1.09	1.45	1.88	2.23	3.78	6.23

Tabela 5.2: Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira: com valores de reserva.

<b>ROC TRUE</b>	$t_{obs}$	valor-p
Soma - Soma	-0.662	0.555
Produto - Produto	1.543	0.220
PoP - PoP	-1.119	0.345
<b>ROC ΔROC</b>	$t_{obs}$	valor-p
Soma - Soma	-1.173	0.325
Produto - Produto	1.059	0.367
PoP - PoP	-1.748	0.179
<b>ROC ROC</b>	$t_{obs}$	valor-p
Soma - Soma	-1.140	0.337
Produto - Produto	1.346	0.271
PoP - PoP	-1.383	0.261

Tabela 5.3: Comparação da taxa de acerto média sem valores de reserva com a taxa de acerto média com valores reserva.

	Sem valores reserva		Com valores reserva	
	$t_{obs}$	valor-p	$t_{obs}$	valor-p
<b>Soma</b>				
ROC TRUE - ROC ΔROC	5.315	0.013	4.582	0.020
ROC TRUE - ROC ROC	5.697	0.011	4.514	0.020
ROC ΔROC - ROC ROC	5.108	0.015	3.665	0.035
<b>Produto</b>				
ROC TRUE - ROC ΔROC	4.250	0.024	3.588	0.037
ROC TRUE - ROC ROC	4.249	0.024	3.582	0.037
ROC ΔROC - ROC ROC	3.762	0.033	3.048	0.056
<b>PoP</b>				
ROC TRUE - ROC ΔROC	3.214	0.049	2.802	0.068
ROC TRUE - ROC ROC	3.023	0.057	3.039	0.056
ROC ΔROC - ROC ROC	2.826	0.066	3.118	0.053

Tabela 5.4: Comparação da taxa de acerto média para as diferentes regras: negociação.

Soma								
3 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	2.34	59.94	76.28	84.18	87.78	91.54	96.86	99.80
ROC ΔROC	2.76	54.94	69.22	76.40	84.60	88.40	95.66	99.70
ROC ROC	3.88	40.72	52.28	63.18	73.88	80.12	91.30	98.30
3 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	5.91	45.30	45.30	60.32	69.52	74.48	86.86	93.76
ROC ΔROC	7.18	41.98	41.98	54.26	62.60	67.38	82.04	91.66
ROC ROC	14.84	34.58	34.58	37.94	42.84	47.32	65.02	78.92
5 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	4.93	46.78	61.18	70.36	75.16	79.96	88.68	95.44
ROC ΔROC	7.71	38.40	49.64	56.98	64.56	68.70	82.32	91.02
ROC ROC	15.34	28.58	34.56	40.56	48.30	51.02	65.40	77.74
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	51.36	40.98	40.98	40.98	40.98	40.98	54.42	67.16
ROC ΔROC	79.63	31.24	31.24	31.24	31.24	31.24	42.02	55.30
ROC ROC	203.47	23.18	23.18	23.18	23.18	23.18	28.34	35.42
Produto								
3 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	2.13	56.18	76.20	84.22	90.44	93.64	99.02	100
ROC ΔROC	2.67	43.56	66.62	75.38	83.84	88.36	98.38	100
ROC ROC	4.06	27.44	53.60	56.36	68.40	72.78	92.98	100
3 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	5.37	42.98	42.98	58.64	67.86	73.90	86.92	95.16
ROC ΔROC	7.10	32.06	32.06	47.84	57.38	64.94	80.94	91.94
ROC ROC	15.52	15.06	15.06	28.88	32.82	46.64	60.34	73.80
5 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	5.09	40.60	57.96	67.48	73.54	77.76	88.10	95.24
ROC ΔROC	7.87	26.86	49.64	56.98	64.56	68.70	82.32	91.02
ROC ROC	15.58	16.40	34.62	40.56	48.30	51.02	65.40	77.74
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	149.90	29.24	40.98	40.98	40.98	40.98	54.42	67.16
ROC ΔROC	193.95	21.04	31.24	31.24	31.24	31.24	42.02	55.30
ROC ROC	360.83	12.04	23.18	23.18	23.18	23.18	28.34	35.42
PoP								
3 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	2.49	39.54	60.08	77.98	88.02	93.62	99.52	100
ROC ΔROC	2.85	32.16	51.48	72.48	83.76	91.20	98.96	99.96
ROC ROC	4.22	20.88	31.04	51.66	67.06	73.06	93.66	100
3 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	6.90	21.96	34.02	43.74	51.30	58.68	79.50	93.82
ROC ΔROC	8.49	17.26	28.18	35.52	42.78	50.56	73.86	90.36
ROC ROC	15.43	7.82	14.28	21.52	27.36	35.70	53.56	74.04
5 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	8.03	23.82	37.56	47.62	55.66	61.72	78.66	90.04
ROC ΔROC	11.05	18.12	49.64	56.98	64.56	68.70	82.32	91.02
ROC ROC	19.63	11.30	34.62	40.56	48.30	51.02	65.40	77.74
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	517.89	4.30	40.98	40.98	40.98	40.98	54.42	67.16
ROC ΔROC	564.49	3.26	31.24	31.24	31.24	31.24	42.02	55.30
ROC ROC	732.49	2.20	23.18	23.18	23.18	23.18	28.34	35.42

Tabela 5.5: Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: sem valores de reserva.

Soma								
3 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	1.76	61.08	82.43	91.34	94.92	97.24	99.90	100
ROC ΔROC	2.16	55.34	76.82	83.41	89.40	91.63	99.52	100
ROC ROC	2.40	35.29	62.35	85.25	86.91	92.98	100	100
3 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	4.19	45.73	45.73	62.58	73.18	79.10	91.89	97.47
ROC ΔROC	5.34	42.18	42.18	55.94	65.17	71.22	86.83	95.23
ROC ROC	6.74	27.13	27.13	45.97	51.65	56.65	82.93	93.12
5 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	5.97	43.93	57.60	66.01	71.12	75.64	86.06	92.16
ROC ΔROC	8.33	34.81	46.19	54.03	61.53	65.88	79.04	88.15
ROC ROC	11.93	24.82	32.59	38.00	44.39	48.16	63.40	78.87
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	101.44	32.99	33.99	32.99	32.99	32.99	45.96	56.47
ROC ΔROC	124.95	23.84	23.84	23.84	23.84	23.84	35.73	48.11
ROC ROC	183.91	16.33	16.33	16.33	16.33	16.33	23.73	32.22
Produto								
3 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	1.91	55.36	78.33	88.16	93.73	96.59	99.85	100
ROC ΔROC	2.28	43.08	72.28	81.97	89.09	93.46	99.82	100
ROC ROC	2.50	27.17	65.11	78.27	88.34	93.54	100	100
3 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	4.90	37.46	37.46	52.53	63.68	71.50	89.00	97.30
ROC ΔROC	5.97	28.72	28.72	45.15	56.08	64.79	84.36	95.84
ROC ROC	7.19	8.59	8.59	38.04	43.61	56.62	83.00	94.66
5 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	5.37	38.44	54.31	64.25	70.73	75.42	87.34	94.47
ROC ΔROC	7.44	27.37	41.78	51.08	58.04	63.19	79.64	91.02
ROC ROC	11.81	16.48	27.85	34.56	40.39	44.53	59.92	81.03
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	124.57	18.28	18.28	18.28	18.28	18.28	28.86	39.73
ROC ΔROC	143.64	12.47	12.47	12.47	12.47	12.47	23.09	34.41
ROC ROC	192.63	7.54	7.54	7.54	7.54	7.54	14.10	21.78
PoP								
3 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	2.26	42.67	64.47	82.86	91.17	95.97	99.95	100
ROC ΔROC	2.53	34.85	58.74	76.41	87.75	94.01	100	100
ROC ROC	2.66	24.84	53.32	76.95	87.02	93.74	100	100
3 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	5.58	22.24	36.46	47.21	56.55	64.84	86.08	96.70
ROC ΔROC	6.51	18.13	31.21	41.64	50.40	58.81	81.62	94.93
ROC ROC	6.95	9.66	30.68	37.38	44.47	52.57	79.77	95.25
5 * 3	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	6.31	23.85	38.90	50.27	59.24	65.76	82.87	94.38
ROC ΔROC	8.53	18.27	30.24	40.17	48.62	54.78	74.43	90.00
ROC ROC	12.26	10.91	20.93	28.79	36.01	41.62	58.83	79.62
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	184.25	4.59	4.59	4.59	4.59	4.59	11.03	18.25
ROC ΔROC	194.37	3.64	3.64	3.64	3.64	3.64	10.05	17.43
ROC ROC	228.25	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	7.37	13.29

Tabela 5.6: Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: com valores de reserva.



	Sem valores reserva			Com valores reserva		
	Soma					
3*3	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0999	0.1069	0.8571	0.0610	0.0603	0.3825
ROC ΔROC	0.1189	0.1108	0.7266	0.0753	0.0693	0.4267
ROC ROC	0.1750	0.1609	1.2622	0.0967	0.0852	0.4722
3*5	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0736	0.0855	0.7956	0.0519	0.0577	0.5851
ROC ΔROC	0.0907	0.0974	0.9864	0.0633	0.0642	0.4605
ROC ROC	0.1636	0.1517	1.1498	0.0970	0.0849	0.5164
5*3	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0575	0.0671	0.5649	0.0469	0.0487	0.3391
ROC ΔROC	0.0754	0.0762	0.6106	0.0631	0.0599	0.3811
ROC ROC	0.1184	0.1116	0.7978	0.0874	0.0774	0.4799
5*5	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.1467	0.1453	0.9588	0.0940	0.0926	0.7352
ROC ΔROC	0.1539	0.1460	0.8653	0.0987	0.0917	0.6603
ROC ROC	0.1959	0.1573	0.9073	0.1106	0.0954	0.5963
	Produto					
3*3	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0718	0.0802	0.5308	0.0190	0.0209	0.1773
ROC ΔROC	0.0779	0.0752	0.5050	0.0234	0.0250	0.1984
ROC ROC	0.1061	0.0867	0.5064	0.0257	0.0258	0.1855
3*5	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0538	0.0627	0.4471	0.0154	0.0179	0.1855
ROC ΔROC	0.0608	0.0654	0.4932	0.0175	0.0194	0.2119
ROC ROC	0.0988	0.0805	0.5043	0.0256	0.0236	0.1724
5*3	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0424	0.0498	0.0508	0.0129	0.0134	0.0110
ROC ΔROC	0.0536	0.0547	0.5029	0.0161	0.0157	0.1130
ROC ROC	0.0807	0.0703	0.5169	0.0268	0.0203	0.1297
5*5	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.1232	0.1185	0.7963	0.0316	0.0273	0.2071
ROC ΔROC	0.1285	0.1158	0.8010	0.0331	0.0277	0.1706
ROC ROC	0.1559	0.1214	0.7496	0.0365	0.0273	0.1816
	PoP					
3*3	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0842	0.0792	0.4695	0.2385	0.1987	0.9706
ROC ΔROC	0.0942	0.0875	0.5318	0.2576	0.2035	0.9528
ROC ROC	0.1148	0.1015	0.6690	0.2799	0.2134	0.9600
3*5	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0701	0.0622	0.4489	0.2080	0.1738	0.9236
ROC ΔROC	0.0796	0.0686	0.5330	0.2247	0.1775	0.9512
ROC ROC	0.1166	0.0904	0.5776	0.2659	0.1938	0.9663
5*3	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0575	0.0546	0.5653	0.1682	0.1177	0.9227
ROC ΔROC	0.0689	0.0599	0.5108	0.1888	0.1506	0.9340
ROC ROC	0.0927	0.0747	0.5682	0.2259	0.1637	0.8956
5*5	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.2235	0.1344	0.7737	0.3409	0.1796	0.8930
ROC ΔROC	0.2270	0.1342	0.8474	0.3460	0.1842	0.8740
ROC ROC	0.2455	0.1401	0.7871	0.3516	0.1758	0.8516

Tabela 5.7: Perda de valor: negociação.

	Sem valores reserva		Com valores reserva	
<b>Soma</b>	$t_{obs}$	valor-p	$t_{obs}$	valor-p
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC	-5.609	0.011	-4.627	0.019
ROC TRUE - ROC ROC	-7.791	0.004	-5.507	0.012
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC	-7.410	0.005	-5.085	0.015
<b>Produto</b>	$t_{obs}$	valor-p	$t_{obs}$	valor-p
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC	-5.634	0.011	-4.382	0.022
ROC TRUE - ROC ROC	-13.709	0.001	-4.485	0.021
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC	-11.523	0.001	-3.099	0.053
<b>PoP</b>	$t_{obs}$	valor-p	$t_{obs}$	valor-p
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC	-4.923	0.016	-4.371	0.022
ROC TRUE - ROC ROC	-6.579	0.007	-3.776	0.033
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC	-6.013	0.009	-3.287	0.046

Tabela 5.8: Comparação da perda de valor média para as diferentes regras: negociação.

<b>Soma</b>						
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.21	83.04	97.02	99.42	99.96	100
ROC ΔROC	1.24	81.38	95.80	99.14	99.94	100
ROC ROC	1.35	73.80	92.98	98.36	99.80	100
5 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.35	76.66	92.40	97.58	98.82	99.66
ROC ΔROC	1.36	76.26	92.14	97.18	98.94	99.40
ROC ROC	1.52	68.86	87.92	94.82	97.76	99.02
15 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.15	87.18	97.78	99.72	99.98	100
ROC ΔROC	1.20	83.68	96.78	99.34	99.94	100
ROC ROC	1.33	75.08	93.40	98.58	99.90	100
15 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.28	79.90	94.30	98.32	99.50	99.82
ROC ΔROC	1.31	78.52	94.02	97.96	99.24	99.62
ROC ROC	1.46	72.34	89.50	95.68	97.96	99.24
<b>Produto</b>						
5* 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.20	83.18	96.94	99.48	99.94	100
ROC ΔROC	1.24	80.92	95.68	99.16	99.86	100
ROC ROC	1.37	73.22	92.10	98.22	99.64	100
5 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.36	76.46	92.30	97.10	98.86	99.54
ROC ΔROC	1.37	75.98	92.24	97.20	98.72	99.32
ROC ROC	1.55	67.90	87.18	94.42	97.68	98.88
15 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.16	86.82	97.72	99.50	99.96	100
ROC ΔROC	1.20	83.72	96.86	99.36	99.92	100
ROC ROC	1.34	74.64	93.22	98.46	99.78	100
15 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.28	80.30	94.52	98.14	99.30	99.72
ROC ΔROC	1.31	78.22	94.20	98.04	99.14	99.66
ROC ROC	1.47	71.86	88.86	95.34	97.92	99.18
<b>PoP</b>						
5* 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.28	79.06	94.96	98.60	99.72	100
ROC ΔROC	1.32	76.92	93.32	98.30	99.60	100
ROC ROC	1.52	66.12	87.18	96.06	99.10	100
5 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.50	71.84	88.80	94.84	97.48	98.66
ROC ΔROC	1.58	69.32	87.12	93.74	96.56	98
ROC ROC	1.85	59.84	80.10	89.02	93.78	96.56
15 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.23	82.08	95.84	99.24	99.82	100
ROC ΔROC	1.28	78.72	94.34	98.70	99.78	100
ROC ROC	1.44	69.54	89.70	96.90	99.42	100
15 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.48	72.16	89.26	95.70	97.84	98.76
ROC ΔROC	1.51	70.76	88.48	94.70	97.72	98.86
ROC ROC	1.72	64.00	83.38	91.76	95.44	97.52

Tabela 5.9: Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira: 3 decisores ( $n$  denota o número de critérios e  $m$  o número de alternativas).

<b>Soma</b>						
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.20	83.24	96.88	99.52	99.92	100
ROC ΔROC	1.24	80.84	95.88	99.32	100	100
ROC ROC	1.35	74.32	92.50	98.16	99.86	100
5 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.36	75.56	92.70	97.48	99.22	99.66
ROC ΔROC	1.36	76.38	92.24	97.06	98.96	99.48
ROC ROC	1.55	67.36	87.02	94.94	97.84	98.88
15 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.15	87.22	97.70	99.78	99.98	100
ROC ΔROC	1.20	83.62	96.54	99.52	99.94	100
ROC ROC	1.32	75.56	93.70	98.64	99.84	100
15 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.29	79.88	94.30	98.18	99.48	99.80
ROC ΔROC	1.30	79.44	93.76	98.18	99.38	99.76
ROC ROC	1.47	71.10	89.74	95.66	98.00	99.12
<b>Produto</b>						
5* 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.22	82.84	96.30	99.36	99.90	100
ROC ΔROC	1.26	80.08	95.24	98.92	99.94	100
ROC ROC	1.38	72.98	91.70	97.92	99.74	100
5 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.37	76.12	91.82	97.06	98.80	99.40
ROC ΔROC	1.38	75.60	91.64	96.92	98.50	99.24
ROC ROC	1.58	67.42	86.24	94.00	97.26	98.68
15 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.16	86.48	97.34	99.74	100	100
ROC ΔROC	1.21	83.00	96.90	99.50	99.96	100
ROC ROC	1.33	75.30	93.20	98.40	99.64	100
15 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.29	79.76	94.32	97.70	99.16	99.70
ROC ΔROC	1.29	79.58	93.84	98.22	99.36	99.74
ROC ROC	1.48	71.12	88.88	95.24	97.98	99.22
<b>PoP</b>						
5* 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.34	75.54	93.06	97.74	99.36	100
ROC ΔROC	1.41	72.50	90.34	96.82	99.30	100
ROC ROC	1.59	62.34	85.28	94.64	98.92	100
5 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.72	65.36	84.14	91.60	95.10	97.16
ROC ΔROC	1.75	63.06	83.22	91.14	94.96	96.90
ROC ROC	2.12	54.16	74.06	84.78	90.30	94.24
15 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.28	79.80	94.16	98.38	99.54	100
ROC ΔROC	1.36	74.78	91.84	97.60	99.52	100
ROC ROC	1.54	65.16	86.46	95.06	98.90	100
15 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.62	69.28	86.62	92.84	95.82	97.40
ROC ΔROC	1.67	66.64	84.80	92.10	95.44	97.48
ROC ROC	2.04	56.16	76.34	85.94	91.50	94.56

Tabela 5.10: Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira: 5 decisores.

<b>ROC TRUE</b>					
<i>3 decisores versus 5 decisores</i>	$t_{obs}$	valor-p	<i>individual versus 3 decisores</i>	$t_{obs}$	valor-p
Soma - Soma	14.087	0.001	Individual - Soma	3.959	0.029
Produto - Produto	7.800	0.004	Individual - Produto	4.620	0.019
PoP - PoP	4.068	0.027	Individual - PoP	6.524	0.007
<b>ROC ΔROC</b>					
<i>3 decisores versus 5 decisores</i>	$t_{obs}$	valor-p	<i>individual versus 3 decisores</i>	$t_{obs}$	valor-p
Soma - Soma	-0.928	0.422	Individual - Soma	1.724	0.183
Produto - Produto	0.284	0.795	Individual - Produto	3.076	0.028
PoP - PoP	8.769	0.003	Individual - PoP	6.508	0.007
<b>ROC ROC</b>					
<i>3 decisores versus 5 decisores</i>	$t_{obs}$	valor-p	<i>individual versus 3 decisores</i>	$t_{obs}$	valor-p
Soma - Soma	0.802	0.481	Individual - Soma	4.294	0.023
Produto - Produto	0.657	0.558	Individual - Produto	5.097	0.015
PoP - PoP	6.030	0.009	Individual - PoP	8.501	0.003

Tabela 5.11: Comparação da taxa de acerto média para o diferente número de decisores.

	<b>3 decisores</b>		<b>5 decisores</b>	
	$t_{obs}$	valor-p	$t_{obs}$	valor-p
<b>Soma</b>				
ROC TRUE - ROC ΔROC	1.876	0.157	1.424	0.250
ROC TRUE - ROC ROC	8.795	0.003	12.155	0.001
ROC ΔROC - ROC ROC	2.221	0.113	15.115	0.001
<b>Produto</b>				
ROC TRUE - ROC ΔROC	3.619	0.036	2.126	0.123
ROC TRUE - ROC ROC	11.251	0.002	16.037	0.001
ROC ΔROC - ROC ROC	13.869	0.001	26.376	0.000
<b>PoP</b>				
ROC TRUE - ROC ΔROC	5.775	0.010	5.336	0.013
ROC TRUE - ROC ROC	10.370	0.002	18.476	0.000
ROC ΔROC - ROC ROC	10.754	0.002	28.320	0.000

Tabela 5.12: Comparação da taxa de acerto média para as diferentes regras: decisão em grupo.

<b>Soma</b>						
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.20	83.04	97.16	99.58	99.98	100
ROC ΔROC	1.23	81.38	96.60	99.42	99.92	100
ROC ROC	1.35	73.84	92.82	98.34	99.84	100
5 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.34	76.66	93.08	97.72	99.24	99.76
ROC ΔROC	1.36	76.26	92.28	97.28	98.98	99.52
ROC ROC	1.54	68.86	87.34	94.52	97.34	98.62
15 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.15	87.18	97.88	99.70	99.96	100
ROC ΔROC	1.20	83.68	96.86	99.46	99.94	100
ROC ROC	1.33	75.08	93.54	98.74	99.76	100
15 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.28	79.90	94.38	98.18	99.40	99.84
ROC ΔROC	1.30	78.52	94.06	98.06	99.36	99.76
ROC ROC	1.45	72.34	89.62	96.04	98.28	99.28
<b>Produto</b>						
5* 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.20	83.18	97.18	99.50	99.94	100
ROC ΔROC	1.24	80.92	96.26	99.16	99.84	100
ROC ROC	1.37	73.22	92.18	98.10	99.70	100
5 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.35	76.46	92.70	97.58	99.18	99.68
ROC ΔROC	1.36	75.98	92.12	97.32	98.98	99.60
ROC ROC	1.56	67.90	86.92	94.12	97.08	98.78
15 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.16	86.82	97.90	99.70	99.98	100
ROC ΔROC	1.20	83.72	96.90	99.38	99.94	100
ROC ROC	1.34	74.64	93.08	98.78	99.80	100
15 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.27	80.30	94.58	98.26	99.56	99.88
ROC ΔROC	1.31	78.22	93.76	98.08	99.34	99.70
ROC ROC	1.45	71.86	89.38	96.18	98.36	99.22
<b>PoP</b>						
5* 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.27	79.06	95.36	99.06	99.92	100
ROC ΔROC	1.31	76.92	93.96	98.58	99.80	100
ROC ROC	1.50	66.12	88.18	96.66	99.14	100
5 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.48	71.84	88.70	95.32	97.94	99.14
ROC ΔROC	1.55	69.32	87.18	93.92	97.04	98.54
ROC ROC	1.85	59.86	79.64	89.12	93.80	96.78
15 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.23	82.08	96.14	99.26	99.96	100
ROC ΔROC	1.28	78.72	94.76	98.98	99.82	100
ROC ROC	1.44	69.54	89.46	97.02	99.50	100
15 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.45	72.16	89.92	96.02	98.52	99.36
ROC ΔROC	1.48	70.76	89.08	95.54	98.08	99.12
ROC ROC	1.73	64.00	82.32	91.12	95.12	96.96

Tabela 5.13: Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: 3 decisores.

<b>Soma</b>						
5 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.20	83.24	97.12	99.36	99.92	100
ROC ΔROC	1.24	80.84	96.00	99.22	99.08	100
ROC ROC	1.34	74.34	93.02	98.36	99.80	100
5 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.36	75.56	92.90	97.52	99.18	99.60
ROC ΔROC	1.36	76.38	91.92	97.34	98.98	99.74
ROC ROC	1.56	67.38	86.84	94.10	97.50	98.68
15 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.15	87.22	97.80	99.72	99.96	100
ROC ΔROC	1.20	83.62	96.94	99.50	99.96	100
ROC ROC	1.33	75.56	92.98	98.42	99.76	100
15 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.29	79.88	94.24	97.98	99.40	99.88
ROC ΔROC	1.28	79.44	94.76	98.28	99.48	99.82
ROC ROC	1.47	71.10	89.42	95.64	98.24	99.34
<b>Produto</b>						
5* 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.21	82.84	96.62	99.42	99.98	100
ROC ΔROC	1.25	80.08	95.62	99.10	99.94	100
ROC ROC	1.37	72.98	91.96	98.08	99.74	100
5 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.34	76.12	93.16	97.68	99.12	99.68
ROC ΔROC	1.36	75.60	91.90	97.34	99.10	99.78
ROC ROC	1.58	67.42	86.36	93.58	97.22	98.76
15 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.16	86.48	97.92	99.70	99.96	100
ROC ΔROC	1.20	83.00	96.88	99.64	100	100
ROC ROC	1.33	75.30	93.14	98.54	99.80	100
15 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.29	79.76	94.18	97.92	99.24	99.76
ROC ΔROC	1.29	79.58	94.32	97.98	99.44	99.84
ROC ROC	1.47	71.12	89.08	95.46	97.98	99.40
<b>PoP</b>						
5* 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.32	75.54	93.84	98.62	99.80	100
ROC ΔROC	1.39	72.50	91.06	97.84	99.68	100
ROC ROC	1.59	62.40	85.10	94.96	98.86	100
5 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.67	65.36	84.56	92.04	95.96	97.76
ROC ΔROC	1.70	63.06	82.96	91.76	96.32	97.94
ROC ROC	2.07	54.16	74.88	85.56	91.34	94.92
15 * 5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.26	79.80	95.18	99.16	99.86	100
ROC ΔROC	1.34	74.78	93.40	98.38	99.84	100
ROC ROC	1.54	65.16	86.52	95.66	98.92	100
15 * 15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
ROC TRUE	1.54	69.28	87.56	94.40	97.40	98.78
ROC ΔROC	1.62	66.64	85.30	93.28	96.62	98.04
ROC ROC	1.97	56.16	76.76	86.70	92.36	95.64

Tabela 5.14: Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: 5 decisores.

	3 decisores			5 decisores		
	Soma					
5*5	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.1035	0.0907	0.5271	0.1366	0.1127	0.7174
ROC ΔROC	0.1235	0.1116	0.7461	0.1559	0.1279	0.8507
ROC ROC	0.1677	0.1369	0.8498	0.2180	0.1762	0.9780
5*15	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0776	0.0685	0.4258	0.1073	0.0942	0.6085
ROC ΔROC	0.0845	0.0742	0.5967	0.1094	0.0875	0.5913
ROC ROC	0.1082	0.0908	0.7218	0.1365	0.1090	0.7705
15*5	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0562	0.0500	0.4080	0.0683	0.0572	0.4237
ROC ΔROC	0.0644	0.0585	0.3665	0.0847	0.0743	0.5224
ROC ROC	0.0954	0.0758	0.4348	0.1168	0.0968	0.5823
15*15	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0436	0.0376	0.2499	0.0554	0.0497	0.2774
ROC ΔROC	0.0446	0.0410	0.4451	0.0581	0.0504	0.3575
ROC ROC	0.0610	0.0515	0.3326	0.0794	0.0671	0.4863
	Produto					
5*5	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0378	0.0346	0.2901	0.0141	0.0131	0.0784
ROC ΔROC	0.0442	0.0401	0.2645	0.0159	0.0152	0.0986
ROC ROC	0.0608	0.0515	0.3702	0.0216	0.0199	0.1433
5*15	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0336	0.0303	0.2368	0.0158	0.0136	0.0866
ROC ΔROC	0.0358	0.0313	0.2062	0.0148	0.0125	0.0818
ROC ROC	0.0464	0.0388	0.2410	0.0195	0.0160	0.1109
15*5	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0170	0.0155	0.1334	0.0059	0.0056	0.0334
ROC ΔROC	0.0202	0.0185	0.1186	0.0071	0.0063	0.0386
ROC ROC	0.0304	0.0241	0.1400	0.0099	0.0085	0.0624
15*15	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0155	0.0143	0.0934	0.0057	0.0049	0.0334
ROC ΔROC	0.0158	0.0143	0.1209	0.0060	0.0052	0.0411
ROC ROC	0.0214	0.0184	0.1177	0.0080	0.0067	0.0432
	PoP					
5*5	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0836	0.0776	0.4658	0.0822	0.0705	0.4710
ROC ΔROC	0.0977	0.0869	0.6132	0.0918	0.0756	0.4509
ROC ROC	0.1353	0.1062	0.5742	0.1167	0.0946	0.5785
5*15	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0637	0.0571	0.4005	0.0656	0.0597	0.3779
ROC ΔROC	0.0628	0.0549	0.3829	0.0660	0.0587	0.4248
ROC ROC	0.0852	0.0697	0.4621	0.0873	0.0723	0.4649
15*5	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0523	0.0472	0.4039	0.0534	0.0482	0.3090
ROC ΔROC	0.0659	0.0597	0.4590	0.0616	0.0518	0.3370
ROC ROC	0.0862	0.0695	0.5562	0.0827	0.0696	0.4541
15*15	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0415	0.0375	0.2966	0.0423	0.0409	0.2653
ROC ΔROC	0.0423	0.0397	0.4182	0.0437	0.0391	0.3830
ROC ROC	0.0541	0.0458	0.3423	0.0561	0.0456	0.3040

Tabela 5.15: Perda de valor: decisão em grupo.



	<b>3 decisores</b>		<b>5 decisores</b>	
<b>Soma</b>	$t_{obs}$	valor-p	$t_{obs}$	valor-p
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC	-2.268	0.108	-2.250	0.110
ROC TRUE - ROC ROC	-3.838	0.031	-3.523	0.039
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC	-4.862	0.017	-3.922	0.029
<b>Produto</b>	$t_{obs}$	valor-p	$t_{obs}$	valor-p
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC	-2.371	0.098	-0.944	0.415
ROC TRUE - ROC ROC	-3.920	0.030	-3.957	0.029
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC	-4.765	0.018	-4.473	0.021
<b>PoP</b>	$t_{obs}$	valor-p	$t_{obs}$	valor-p
ROC TRUE - ROC $\Delta$ ROC	-1.713	0.185	-2.098	0.127
ROC TRUE - ROC ROC	-3.533	0.039	-5.495	0.012
ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC	-4.286	0.023	-7.502	0.005

Tabela 5.16: Comparação da perda de valor média para as diferentes regras: decisão em grupo.



# Aproximações para Apoio à Mediação com Informação Incompleta

---

## 6.1 Introdução

Ao longo deste capítulo, retomamos o tema da negociação bilateral integrativa sobre múltiplos assuntos, no caso discreto<sup>1</sup>. Abordamos situações envolvendo dois negociadores individuais que interagem com a assistência de um mediador. Este capítulo e o seguinte distanciam-se de certa forma do que foi descrito anteriormente ao longo deste trabalho, uma vez que o objectivo não é ver como diferentes regras se comportam, como descrito no Capítulo 3 e no Capítulo 5, mas em vez disso é ver como diferentes aproximações podem ser conjugadas para sugerir alternativas. Nomeadamente, pretende-se encontrar alternativas que sejam melhores do que o ponto de referência (ponto abaixo do qual os negociadores não aceitarão nenhuma alternativa) para ambos os negociadores, sejam eficientes e sejam óptimas, de acordo com determinado método de mediação. O tipo de informação incompleta utilizado também é diferente daquele que foi considerado anteriormente. A informação que consideramos neste capítulo é baseada principalmente na comparação das propostas que são feitas pelas partes.

A nossa contribuição é a proposta de uma metodologia que integra três novas aproximações para ajudar um mediador no caso de existência de informação incompleta: a primeira é baseada em conclusões robustas, a segunda é baseada na inferência de parâmetros, e a terceira é baseada na análise do domínio. Estas aproximações permitirão ao mediador avaliar como cada proposta que ele irá sugerir será recebida pelas partes, nomeadamente se a considerarão melhor do que as que já apreciaram, ou mesmo aceitaram como compromisso, e permitirão saber quais são as propostas mais promissoras de acordo com alguns conhecidos métodos de mediação (rever Subsecção 4.2.3). É possível prever dois cenários nos quais estas aproximações podem ser aplicadas:

- As partes chegaram a um acordo que pretendem melhorar.
- As partes (ainda) não chegaram a acordo e existem duas propostas sobre a mesa.

---

<sup>1</sup>Este capítulo baseia-se no trabalho que relatámos em Sarabando et al. (2009).

No segundo caso, cada parte pode, pelo menos, obter o valor que corresponde à oferta actual feita pela outra parte. O compromisso é então substituído pelo último valor oferecido pela outra parte. Consideramos o valor que cada proposta tem para a outra parte como o *status quo* da negociação. As nossas aproximações são portanto aplicadas tanto para aperfeiçoar negociações que foram um sucesso, verificando se as partes “deixaram dinheiro sobre a mesa”, como para encontrar um potencial compromisso em negociações que caso contrário falhariam.

Este capítulo é estruturado da seguinte forma. Na Secção 6.2 apresentamos um enquadramento para o tipo de informação incompleta utilizado. Na Secção 6.3 propomos três diferentes aproximações para sugerir um potencial acordo. Na Secção 6.4 apresentamos um exemplo ilustrativo onde utilizamos as diferentes aproximações apresentadas na Secção 6.3. Terminamos na Secção 6.5 com algumas conclusões e algumas vias para investigação futura.

## 6.2 Negociação com informação incompleta

### 6.2.1 Diferentes possibilidades para a informação disponível

Para caracterizarmos formalmente a informação à qual um mediador externo pode ter acesso, assumimos que as verdadeiras preferências, mas possivelmente desconhecidas, de um negociador podem ser representadas por uma função de valor aditiva da forma (4.1), apresentada no Capítulo 4 (rever Subsecção 4.2.3), onde a alternativa  $x^{(j)}$  representa o potencial compromisso:

$$v^k(x^{(j)}) = \sum_{i=1}^n w_i^k v_i^k(l_i^{(j)}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Consideramos mais uma vez diferentes possibilidades para o tipo de informação incompleta, em particular o caso em que alguns parâmetros do modelo de avaliação são conhecidos (valor de cada nível em cada assunto), e o caso em que nenhum dos parâmetros do modelo é exactamente conhecido. Consideramos assim duas possibilidades:

- (1) Os pesos  $w_i^k$  são desconhecidos e os valores de  $v_i^k(l_i^{(j)})$  são conhecidos.
- (2) Tanto os pesos como os valores são desconhecidos. São apenas feitas suposições muito gerais relativamente à forma da função de valor  $v_i^k(\cdot)$ .

No caso (2), restringimos as possíveis funções de valor por um limite superior e um limite inferior, admitindo a monotonia das mesmas. Se pudermos excluir valores marginais crescentes, o que é uma suposição razoável e pode facilmente ser avaliada fazendo perguntas simples a cada uma das partes, o limite inferior será a função linear:

$$v_i^{k-lin}(l_i^{(j)}) = \frac{l_i^{(j)} - l_i^{(m_i k)}}{l_i^{(1k)} - l_i^{(m_i k)}}, \quad (6.1)$$

onde  $l_i^{(1k)}$  e  $l_i^{(m_i k)}$  representam o melhor e o pior nível no assunto  $i$ , respectivamente, para o negociador  $k$ , e  $m_i$  o número de níveis no assunto  $i$ .

O limite superior será uma função de valor côncava:

$$v_i^{k-con}(l_i^{(j)}) = a + b(-e^{-c * l_i^{(j)}}), \quad (6.2)$$

onde os parâmetros  $a$  e  $b$  são escolhidos de forma a que a função de valor esteja normalizada entre zero e um, e o parâmetro  $c$  determina o grau de concavidade da função. Restringimos desta forma os valores a  $v_i^{k-lin}(l_i^{(j)}) \leq \hat{v}_i(l_i^{(j)}) \leq v_i^{k-con}(l_i^{(j)})$ , onde usamos  $\hat{v}$  para indicar que se trata de uma aproximação dos verdadeiros valores que são desconhecidos. Por exemplo, na Figura 6.1 consideraríamos que  $m \leq \hat{v}_{\text{preço}}(11) \leq M$ .

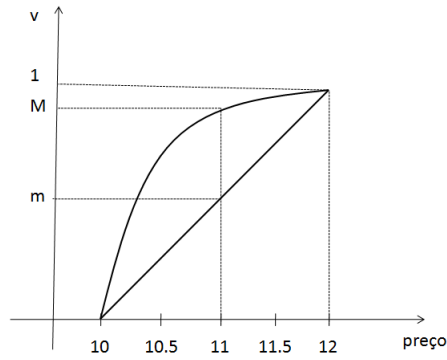


Figura 6.1: Forma da função de valor para o assunto preço (caso de um vendedor).

Outra possibilidade é fazer uma aproximação do valor de cada nível em cada assunto baseada em funções de valor lineares (Stewart, 1995). A suposição de que as funções de valor são lineares é bastante forte, no entanto, alguns autores consideram que uma simples função linear é preferível por diversas razões (ver, por exemplo, Vetschera, 2009). Funções mais gerais requerem mais parâmetros, e quando está disponível um pequeno número de observações, o número de parâmetros deve ser mantido o mais pequeno possível. Esta é uma vantagem da função linear, que não requer parâmetros adicionais para as funções de valor marginais. Pode ainda acontecer que mesmo uma função requerendo mais parâmetros do que a simples função linear não forneça uma melhor aproximação para as verdadeiras preferências dos negociadores. Neste trabalho não apresentamos resultados com base na aproximação linear, dado que os resultados não são muito bons, no entanto eles podem ser encontrados em Sarabando et al. (2009).

### 6.2.2 Representação da informação incompleta

Nos dois casos descritos anteriormente, relativamente ao tipo de informação incompleta, o mediador não é necessariamente completamente ignorante sobre os pesos e valores, mas pode ser apenas capaz de obter alguma informação sobre os mesmos. Tal informação pode ser obtida de duas formas:

- Pode ser fornecida de forma explícita pelos negociadores.
- Pode ser inferida observando o comportamento dos negociadores ao longo do processo de negociação, em particular através das ofertas que cada um faz e das suas reacções às ofertas da outra parte.

Em ambos os casos, a informação obtida pelo mediador é mais fácil de obter sob a forma de expressões de preferência ou indiferença entre diferentes alternativas. Se a informação é directamente fornecida pelos negociadores, o mediador pode perguntar se existe alguma outra alternativa que ele considere aproximadamente tão boa como a alternativa proposta, ou quando o mediador faz uma proposta, ele pode perguntar se esta proposta é sem dúvida melhor do que outra oferta já sobre a mesa. Desta forma é possível inferir a direcção de preferência entre duas alternativas.

No processo de negociação dança dos pacotes (ver Subsecção 4.2.1), as preferências entre as alternativas podem também ser inferidas através das ofertas feitas pelos negociadores ao longo do processo (Vetschera, 2009). Por exemplo, num cenário em que os negociadores tenham já alcançado uma tentativa de compromisso que pretendam melhorar, pode assumir-se que um negociador prefere o compromisso a todas as ofertas feitas pela outra parte ao longo da negociação. Caso contrário, na maioria dos casos seria possível reverter para a proposta da outra parte. A outra parte dificilmente rejeitaria esta proposta, uma vez que esta foi originalmente feita por ela. Na dança dos pacotes, os negociadores começam tipicamente com ofertas muito favoráveis para si e fazem concessões, sucessivamente, no decorrer da negociação. Desta forma, pode também assumir-se que um negociador prefere todas as ofertas feitas por si ao compromisso e também prefere as suas primeiras ofertas às ofertas que fez recentemente no processo. Por transitividade segue que um negociador prefere todas as propostas feitas por si a todas as propostas feitas pela outra parte. Esta última condição é válida mesmo no caso em que um compromisso não foi (ainda) alcançado.

A informação sobre as preferências dos negociadores será então avaliada na forma de expressões de preferência ou indiferença entre alternativas. Assumindo uma função de valor aditiva, a informação de que a alternativa  $x^{(1)}$  é preferida à alternativa  $x^{(2)}$  pode ser representada pela condição (ver, por exemplo, Jacquet-Lagrèze e Siskos, 1982; Vetschera, 2009):

$$\sum_{i=1}^n w_i^k v_i^k(l_i^{(1)}) \geq \sum_{i=1}^n w_i^k v_i^k(l_i^{(2)}). \quad (6.3)$$

Enquanto que a indiferença pode ser representada pela restrição, onde  $\epsilon$  é uma pequena tolerância:

$$\left| \sum_{i=1}^n w_i^k v_i^k(l_i^{(1)}) - \sum_{i=1}^n w_i^k v_i^k(l_i^{(2)}) \right| \leq \epsilon. \quad (6.4)$$

Seja  $V_i^k(l_i^{(j)}) = w_i^k v_i^k(l_i^{(j)})$ . A especificação de  $V_i^k(\cdot)$  depende do nível de informação considerado. Para o caso de pesos desconhecidos e valores conhecidos, é definido por:

$$V_i^k(l_i^{(j)}) = w_i^k v_i^k(l_i^{(j)}), \quad (6.5)$$

isto é, o peso desconhecido é combinado com a função de valor conhecida do negociador  $k$ . Neste caso, as restrições são lineares e definem um conjunto admissível de pesos  $W^k$  (um polítopo), que pode ser considerado como o conjunto dos parâmetros possíveis relativamente às preferências do negociador  $k$ .

No segundo caso, com pesos e valores desconhecidos, os valores de  $V_i^k(l_i^{(j)})$  podem ser directamente utilizados como variáveis no modelo, como em Greco et al. (2008). Seja  $s_i$  o número de diferentes valores para  $l_i^{(j)}$  considerando todos os potenciais níveis no assunto  $i$ . Seja  $v_{j,i}^k = V_i^k(l_i^{(j)})$  um vector de  $s_1 + \dots + s_n$  variáveis. Estas variáveis podem ser utilizadas nas restrições do tipo (6.3) e (6.4). Se  $l_i^{(1k)}$  representar o melhor resultado possível no assunto  $i$  para o negociador  $k$ , considerando  $v_i^k(l_i^{(1k)}) = 1$  tem-se  $V_i^k(l_i^{(1k)}) = w_i^k$ . Se se assumir que os valores estão ordenados por ordem decrescente de preferência, isto é, que  $v_{1,i}^k$  representa  $V_i^k(l_i^{(1k)})$ , podemos expressar (4.2), ou seja,  $0 \leq w_i^k \leq 1, i = 1, \dots, n$  e  $\sum_{i=1}^n w_i^k = 1$ , como:

$$0 \leq v_{s_i,i}^k < \dots < v_{2,i}^k < v_{1,i}^k = w_i^k \leq 1, i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n v_{1,i}^k = 1. \quad (6.6)$$

Desta forma, estamos a lidar com problemas lineares mesmo no caso em que tanto os pesos como os valores são desconhecidos.

Quando a função de valor de cada assunto é considerada conhecida, as restrições (4.2), (6.3), e (6.4) definem um polítopo  $W^k$  de pesos admissíveis. Quando a função de valor de cada assunto é considerada desconhecida, as restrições (6.3), (6.4), e (6.6) definem um conjunto de valores admissíveis, também um polítopo, que representamos por  $(WM)^k$ . Em ambos os casos, o polítopo pode ser considerado como o conjunto de possíveis parâmetros de acordo com as preferências do negociador  $k$ . Deve ser referido que assumimos que todas as acções de um negociador, e toda a informação relativamente às preferências fornecidas pelo negociador, são consistentes com a verdadeira função de valor da forma (4.1). Se este não for o caso, e as restrições obtidas através das escolhas dos negociadores forem contraditórias, estes conjuntos podem tornar-se vazios.

Daqui para a frente usaremos a notação geral  $(w^k, V^k) \in (W^k, M^k)$  com o seguinte significado:

$$(w^k, V^k) \in (W^k, M^k) \Leftrightarrow \begin{cases} (w_1^k, \dots, w_n^k) \in W^k \\ \quad \text{se } v_i^k(\cdot) \text{ é conhecido} \\ \\ (v_{1,1}^k, \dots, v_{s_1,1}^k, \dots, v_{s_n,n}^k) \in (WM)^k \\ \quad \text{se } v_i^k(\cdot) \text{ é desconhecido} \end{cases} \quad (6.7)$$

### 6.2.3 Critérios para seleccionar soluções alternativas

O mediador pode usar informação de um dos tipos apresentados anteriormente para sugerir uma ou várias soluções alternativas aos negociadores, com boa potencialidade de serem aceites por ambos. Estas propostas podem ser obtidas através de diversos critérios. Começamos por apresentar esses critérios, e na secção seguinte apresentamos três diferentes aproximações para obter tais propostas.

Se o objectivo é propor várias alternativas, o critério da dominância é um ponto de partida natural. Neste caso, o mediador pode identificar todas as alternativas que dominam o compromisso proposto  $x^{(c)}$  ou o *status quo* da negociação (relembremos que estamos a usar este termo para o caso em que existem duas ofertas sobre a mesa). Reciprocamente, alternativas que são dominadas pelo compromisso ou pelo *status quo* podem ser eliminadas de considerações futuras. Seja  $x^{(r)}$  o ponto de referência (ou ponto de reserva) abaixo do qual os negociadores não aceitarão nenhuma alternativa. Se um compromisso já foi alcançado  $x^{(r)} = x^{(c)}$ . Se um compromisso ainda não foi alcançado e as últimas duas ofertas sobre a mesa são  $x^{(o_1)}$ , oferecida pelo negociador 1 e  $x^{(o_2)}$ , oferecida pelo negociador 2, então  $x^{(r)}$  referir-se-á ao seguinte ponto no espaço dos valores  $(v^1(x^{(o_2)}), v^2(x^{(o_1)}))$ . Isto é, a uma alternativa fictícia valendo para cada negociador a quantidade que foi oferecida pela outra parte. Por construção  $(v^1(x^{(o_2)}), v^2(x^{(o_1)}))$  é dominada por  $x^{(o_1)}$  e  $x^{(o_2)}$ , desta forma, faz sentido procurar por alternativas que a dominem. As alternativas a serem propostas pelo mediador devem ser melhores, para ambos os negociadores, do que  $x^{(r)}$ . Uma vez que a informação sobre as preferências é incompleta, é possível distinguir aqui entre alternativas que certamente dominam  $x^{(r)}$ , isto é, aquelas que são melhores para ambas as partes, considerando todos os parâmetros possíveis, de acordo com as preferências dos negociadores; alternativas que possivelmente dominam  $x^{(r)}$ , isto é, alternativas que são melhores para ambas as partes para pelo menos um vector de parâmetros; e alternativas que não podem dominar  $x^{(r)}$ , porque, para pelo menos uma parte, não existe nenhum vector de parâmetros para o qual a alternativa seja melhor do que  $x^{(r)}$ .

Como um segundo critério, as alternativas a serem propostas devem ser eficientes de Pareto de acordo com o valor que fornecem a cada uma das partes. Relembremos que alternativas eficientes são alternativas para as quais não é possível melhorar o valor para uma das partes sem piorar o valor para uma das outras partes. Mais uma vez, sob informação incompleta, podemos falar em alternativas que são certamente eficientes, alternativas que



são possivelmente eficientes, e alternativas que não podem ser eficientes, porque são certamente dominadas por outra alternativa. Nesta análise, consideramos uma alternativa como não sendo eficiente se é dominada por qualquer outra alternativa. Também se pode determinar a eficiência considerando apenas dominância pelas alternativas não eliminadas, mas consideramos que o facto de uma alternativa ser dominada por qualquer outra alternativa é importante, mesmo quando a alternativa que domina é eliminada, uma vez que, por exemplo, tem valor inferior ao do compromisso para uma das partes.

Se o mediador pretende apresentar apenas uma alternativa, ou um pequeno conjunto de alternativas, podem ser usados métodos adicionais para guiar essa selecção (ver Subsecção 4.2.3). Neste capítulo, consideramos os métodos de mediação maximizar a soma dos valores, aspirando a quantidade máxima total do bolo, e maximizar a PoP mínima, aspirando igualdade<sup>2</sup>. Note-se que, no contexto abordado neste capítulo, o método de maximizar a PoP mínima maximiza:

$$\min_{k=1,2} \frac{v^k(x^{(j)}) - v^{k-min}}{v^{k-max} - v^{k-min}}, \quad (6.8)$$

onde  $v^{k-max}$  representa o melhor *payoff* que o negociador  $k$  pode alcançar considerando o conjunto das alternativas, ou seja, aquelas que são melhores para ambas as partes do que  $x^{(r)}$ , e  $v^{k-min}$  representa o limite inferior dos *payoffs* considerados para a parte  $k$  para o mesmo conjunto de alternativas. Para assegurar a aceitabilidade da proposta, apenas consideramos alternativas que são pelo menos tão boas como  $x^{(r)}$  para ambas as partes quando utilizando o método. Quando consideramos informação incompleta é possível distinguir diferentes classes de alternativas. Alternativas que são certamente óptimas para o método, ou seja, maximizam esse método para todos os parâmetros possíveis. Alternativas que são potencialmente óptimas, ou seja, maximizam o método para alguns valores possíveis dos parâmetros, enquanto que o máximo é obtido com outra alternativa para outros valores possíveis dos parâmetros. E alternativas certamente não óptimas, ou seja, se não existe nenhum vector de parâmetros  $(w^k, V^k) \in (W^k, M^k)$  para o qual a alternativa maximize o método sob consideração.

---

<sup>2</sup>Naturalmente podem ser utilizados outros métodos de mediação, como por exemplo, maximizar o produto dos excessos relativamente a  $x^{(r)}$ , o que é equivalente à solução de Nash usando  $x^{(r)}$  como ponto de desacordo. Embora a generalização a outros métodos seja directa, neste capítulo restringimos-nos aos métodos maximizar a soma dos valores e maximizar a PoP mínima, uma vez que eles conduzem a modelos de programação linear enquanto que, por exemplo, o método do produto requer modelos não lineares.

## 6.3 Aproximações para sugerir potencias acordos

### 6.3.1 Aproximação dos Parâmetros Extremos

Como uma primeira aproximação, formulamos modelos de otimização para detectar quais alternativas certamente satisfazem os objectivos do mediador, descritos na secção anterior, assim como quais alternativas certamente não satisfazem esses objectivos. Podem existir outras alternativas, que satisfazem esses objectivos ou não, dependendo dos valores dos parâmetros. Chamamos a esta primeira aproximação, Aproximação dos Parâmetros Extremos, uma vez que olhamos para valores de parâmetros que estão situados na fronteira do conjunto admissível, levando a diferenças de valor extremas.

Para verificar se uma alternativa é certamente melhor ou certamente pior do que o ponto de referência, pode ser resolvido um Programa Linear (PL). Relembremos que  $v^k(x^{(j)})$  é o valor da alternativa  $x^{(j)}$  para o negociador  $k$  ( $k = 1, 2$ ). Seja  $m_{ij}^k$  o valor óptimo do seguinte PL:

$$\begin{aligned} & \max\{v^k(x^{(i)}) - v^k(x^{(j)})\} \\ \text{s.a. } & (w^k, V^k) \in (W^k, M^k) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Quando  $m_{ij}^k \leq 0$ , não existe nenhuma combinação possível de parâmetros que tornem a alternativa  $x^{(i)}$  melhor do que a alternativa  $x^{(j)}$  para o negociador  $k$ , e deste modo podemos dizer que  $x^{(j)}$  é certamente melhor do que  $x^{(i)}$  (ou  $x^{(i)}$  é certamente pior do que  $x^{(j)}$ ) com respeito à informação disponível relativamente às preferências do negociador  $k$ .

Dados os conjuntos dos valores dos parâmetros admissíveis para ambos o negociadores, ou seja,  $(W^1, M^1)$  e  $(W^2, M^2)$ , é possível determinar, para cada negociador, quais alternativas são certamente melhores do que o ponto de referência  $x^{(r)}$  e quais alternativas são certamente piores do que essa referência. O mediador pretenderá propor uma alternativa  $x^{(j)}$  de tal forma que  $m_{rj}^1 \leq 0$  e  $m_{rj}^2 \leq 0$ , ou seja, uma alternativa que seja pelo menos tão boa como o ponto de referência. O problema é que pode acontecer que não exista nenhuma alternativa certamente melhor do que o ponto de referência para ambos os negociadores. No entanto, esta aproximação é boa como ponto de partida. Se existirem alternativas que são certamente piores do que a referência para um dos negociadores, o mediador pode eliminar essas alternativas, isto é, podem ser eliminadas as alternativas  $x^{(j)}$  para as quais  $m_{jr}^1 \leq 0$  ou  $m_{jr}^2 \leq 0$ . Desta forma, apenas as alternativas que são potencialmente pelo menos tão boas como o ponto de referência, para ambos os negociadores, são candidatas a serem propostas. Estes cálculos são semelhantes aos propostos por Dias e Clímaco (2000a) para obter conclusões binárias robustas.

O PL (6.9) também pode ser utilizado para comparar qualquer outro par de alternativas, além de pares contendo o ponto de referência  $x^{(r)}$ . Isto permite verificar a existência de eficiência de Pareto. Para um par de alternativas  $(x^{(i)}, x^{(j)})$ , se  $m_{ij}^1 \leq 0$  e  $m_{ij}^2 \leq 0$ , então  $x^{(i)}$  é certamente pior do que  $x^{(j)}$  para ambos os negociadores e desta forma  $x^{(i)}$  é certamente não eficiente de Pareto, podendo, desta forma, também ser eliminada.

Seja  $P$  o conjunto das alternativas candidatas, depois de eliminar alternativas certamente piores do que o ponto de referência para algum dos negociadores e alternativas certamente não pertencentes à fronteira de Pareto. Para discriminar entre as alternativas de  $P$ , o mediador pode também tentar identificar quais alternativas são potencialmente ótimas de acordo com um método de mediação. Para o método de maximizar a soma dos valores o seguinte PL pode ser resolvido para cada alternativa  $x^{(j)} \in P$ :

$$\begin{aligned}
 & \max \delta \\
 & s.a \quad [v^1(x^{(j)}) + v^2(x^{(j)})] - [v^1(x^{(i)}) + v^2(x^{(i)})] - \delta \geq 0, \forall x^{(i)} \in P, i \neq j \\
 & \quad (w^1, V^1) \in (W^1, M^1) \\
 & \quad (w^2, V^2) \in (W^2, M^2) \\
 & \quad \delta \text{ livre}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Se o valor óptimo deste PL for maior ou igual do que zero ( $\max \delta \geq 0$ ) então a alternativa  $x^{(j)}$  é potencialmente ótima de acordo com o método de maximizar a soma dos valores. Caso contrário, não poderá ser a melhor de acordo com este método. Realizar uma análise semelhante considerando outro método de mediação requer a introdução de variáveis binárias (para o método de maximizar a PoP mínima) ou programação não linear (para métodos envolvendo produtos).

### 6.3.2 Aproximação dos Parâmetros Centrais

Uma segunda aproximação que o mediador pode seguir, insistindo no objectivo de encontrar alternativas potencialmente boas, consiste em inferir uma combinação de valores dos parâmetros de  $(W^1, M^1)$  e  $(W^2, M^2)$ , que seja representativa, e usar essa combinação de valores para encontrar alternativas que são melhores do que o ponto de referência para ambos os negociadores, são eficientes e são ótimas de acordo com o método de mediação. Obviamente, as conclusões que se verificam para tal vector de parâmetros não se verificam necessariamente para os verdadeiros valores dos parâmetros, que seriam definidos no decorrer de um processo de eliciação completo e explícito. No entanto, estudos no contexto de funções de valor aditivas (exemplo, Barron e Barrett, 1996) mostram que usando uma combinação dos valores dos parâmetros que estão no centro da região admissível leva a boas aproximações (ver também Capítulos 3 e 5<sup>3</sup>). Quanto mais informação o mediador tem, em termos de restrições relativamente aos valores dos parâmetros, mais precisa será a aproximação.

Uma aproximação possível para encontrar uma combinação central para os valores dos parâmetros é resolver um PL do tipo “max-min” para encontrar um ponto, tal que a folga mais pequena numa restrição da forma (6.3) seja a maior possível. Esta é uma aproximação utilizada para inferir aproximações para os parâmetros com base na agregação multicritério

---

<sup>3</sup>Nos Capítulos 3 e 5 verificou-se que o uso de valores que estão no centro da região admissível conduzem a bons resultados quando a informação incompleta se baseia em informação de carácter ordinal.

(exemplo, Jacquet-Lagrèze e Siskos, 1982; Mousseau e Dias, 2004). Seja  $A_k$  uma matriz de coeficientes e seja  $b_k$  um vector tal que  $(w^k, V^k) \in (W^k, M^k)$  se e só se  $A_k \cdot (w^k, V^k) \leq b_k$ . Seja  $p_k$  um vector contendo uma constante por restrição, igual a um se a restrição é do tipo (6.3) e igual a zero caso contrário. O seguinte PL pode ser utilizado para inferir um vector de parâmetros centrais com respeito às preferências de desigualdade, para  $k = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} & \max \Delta^k \\ & \text{s.a. } A_k \cdot (w^k, V^k) + p_k \Delta^k \leq b_k \end{aligned} \quad (6.11)$$

As variáveis deste problema são o escalar  $\Delta^k$ , representando a folga mínima a ser maximizada, os pesos, e possivelmente os valores. Pretendemos que a solução óptima esteja o mais longe possível de cada limite. Desta forma, o objectivo é maximizar a folga. Note-se que todas as restrições são formuladas em termos de valor multicritério, que é dimensionado entre zero e um, e desta forma têm magnitude comparável. Isto torna possível comparar desvios entre restrições sem necessidade de reescalar.

Uma forma diferente de obter uma combinação de parâmetros central é calcular o centróide de  $(W^k, M^k)$  de forma exacta ou usando uma aproximação, para  $k = 1, 2$ . Existem métodos exactos para determinar o centróide de alguns tipos de polítopos (Solymosi e Dombi, 1986). No entanto, uma aproximação para o centróide de qualquer polítopo pode ser obtida facilmente usando simulação Monte Carlo, como no cálculo de pesos centrais segundo o método SMAA (Lahdelma et al., 1998).

Seja  $(w^1, V^1)^*$  o vector de parâmetros centrais obtidos para o negociador 1, e  $(w^2, V^2)^*$  o resultado análogo obtido para o negociador 2. Usando  $(w^1, V^1)^*$  e  $(w^2, V^2)^*$  é possível determinar quais alternativas são melhores do que o ponto de referência para ambos os negociadores, e quais, entre estas, maximizam o método de mediação. Contrariamente ao que acontece na aproximação de parâmetros extremos, maximizar a PoP mínima ou métodos envolvendo produtos é directo na aproximação dos valores centrais, uma vez que apenas é necessário calcular o valor da função objectivo para cada alternativa usando um determinado vector de parâmetros. Além da alternativa óptima para o método de mediação, também pode ser determinado facilmente o conjunto de todas as alternativas eficientes para o vector de parâmetros centrais.

Uma vez que o vector de parâmetros usado nesta aproximação é apenas uma aproximação, pode não reflectir as verdadeiras preferências dos negociadores. Desta forma, pode acontecer que um negociador  $k$ , considere que a alternativa  $x^{(j)}$  proposta pelo mediador não é aceitável. Desta afirmação, o mediador pode concluir que a alternativa  $x^{(j)}$  tem valor inferior ao do ponto de referência  $x^{(r)}$ , para o negociador  $k$ . Neste caso é possível alterar  $(W^k, M^k)$  introduzindo esta nova informação sob a forma de uma restrição  $v^k(x^{(j)}) < v^k(x^{(r)})$  e calcular um novo vector de parâmetros centrais, para o novo, e mais reduzido, polítopo.

### 6.3.3 Aproximação do Domínio

A nossa terceira aproximação consiste em explorar o espaço dos parâmetros com o objectivo de medir o volume relativo do conjunto admissível dos valores dos parâmetros no qual determinadas condições se verificam. Seja  $S$  o conjunto dos valores dos parâmetros admissíveis para as duas partes, de acordo com a informação disponível:

$$S = W^1 \times M^1 \times W^2 \times M^2. \quad (6.12)$$

Seja  $S(\tilde{C})$  o subconjunto de  $S$  no qual a condição  $\tilde{C}$  se verifica:

$$S(\tilde{C}) = \{(w^1, V^1, w^2, V^2) \in (W^1, M^1, W^2, M^2) : \tilde{C} \text{ é verdadeira}\}. \quad (6.13)$$

Seja  $Vol(S(\tilde{C}))$  o volume do conjunto  $S(\tilde{C})$  e  $Vol(S)$  o volume do conjunto  $S$ . A expressão:

$$\frac{Vol(S(\tilde{C}))}{Vol(S)}, \quad (6.14)$$

representa o volume relativo do subconjunto no qual a condição  $\tilde{C}$  se verifica, comparando com o volume de toda a região admissível. Se se utilizar a distribuição uniforme para gerar aleatoriamente os vectores dos parâmetros, este rácio pode ser interpretado como a probabilidade da condição  $\tilde{C}$  se verificar, para algum vector de parâmetros admissível gerado aleatoriamente.

O volume relativo do espaço dos parâmetros, no qual a alternativa  $x^{(j)}$  é pelo menos tão boa como a alternativa de referência para ambos os negociadores, pode ser calculado através de:

$$\frac{Vol(S(v^1(x^{(j)}) \geq v^1(x^{(r)}) \wedge v^2(x^{(j)}) \geq v^2(x^{(r)})))}{Vol(S)}. \quad (6.15)$$

Note-se que este volume relativo é igual a zero para as alternativas que são certamente piores do que  $x^{(r)}$ , e é igual a um para as alternativas que são certamente melhores do que esta referência. Desta forma, esta aproximação complementa a aproximação dos parâmetros extremos, fornecendo informação adicional sobre as alternativas que estão entre os dois casos extremos (de serem certamente melhores ou certamente piores do que a alternativa de referência), e indica a probabilidade de, dada a informação sobre as preferências obtida pelo mediador ao longo da negociação, ambos os negociadores preferirem a alternativa  $x^{(j)}$  à alternativa de referência.

É também interessante determinar o volume relativo do espaço dos parâmetros no qual cada alternativa é eficiente de Pareto:

$$\frac{Vol(S(x^{(j)} \text{ é eficiente}))}{Vol(S)}. \quad (6.16)$$

A mesma aproximação pode ser usada para determinar o volume relativo do subconjunto do espaço dos parâmetros no qual a alternativa  $x^{(j)}$  é ótima de acordo com os diferentes métodos de mediação (maximizar a soma dos valores, maximizar a PoP mínima, etc.) como:

$$\frac{\text{Vol}(S(x^{(j)} \text{ é ótima}))}{\text{Vol}(S)}. \quad (6.17)$$

Para o método da soma dos valores esse volume relativo é:

$$\frac{\text{Vol}(S(v^1(x^{(j)}) + v^2(x^{(j)}) \geq v^1(x^{(i)}) + v^2(x^{(i)}), \forall x^{(i)} \neq x^{(j)}))}{\text{Vol}(S)}. \quad (6.18)$$

A aproximação do domínio também pode ser usada interactivamente de forma semelhante à aproximação dos parâmetros centrais. Se o negociador não aceitar uma determinada alternativa é possível redefinir  $S$  introduzindo uma nova restrição para eliminar essa alternativa, e calcular novamente os volumes do domínio.

Uma vez que o mediador deve ser informado dos volumes relativos de diferentes resultados, sugerimos utilizar simulação Monte Carlo para aproximar esses volumes. Existem métodos exactos para calcular os volumes (ver, por exemplo, Lasserre, 1983; Lawrence, 1991; Vetschera, 1997), mas esses métodos são mais exigentes computacionalmente e podem ser usados apenas para uma questão de cada vez.

A simulação gera de forma aleatória um grande número de instâncias para os valores dos parâmetros dos dois negociadores verificando todas as restrições. Para cada instância, todas as características de interesse,  $\tilde{C}$ , podem ser avaliadas simultaneamente, isto é, quais alternativas são melhores do que a referência  $x^{(r)}$  para ambos os negociadores, quais alternativas são eficientes, e qual alternativa é a melhor de acordo com cada método de mediação. Neste caso é possível analisar vários métodos de mediação simultaneamente. Considerando os resultados de todas estas instâncias, é possível indicar, para cada alternativa  $x^{(j)}$ , a proporção de instâncias para as quais as condições referidas anteriormente se verificam para esta alternativa em particular.

Quando interpretamos os volumes como probabilidades, o que pode ser feito se for usada uma distribuição uniforme para gerar os vectores de parâmetros, também poderá ser interessante calcular probabilidades condicionadas, por exemplo, a probabilidade de uma alternativa ser ótima de acordo com um método de mediação sob a condição de ser melhor do que o ponto de referência e eficiente. Tais probabilidades condicionadas podem também ser obtidas através das simulações, registando o número de instâncias nas quais ambas as condições são satisfeitas e calculando:

$$P(\tilde{C}|\tilde{D}) = \frac{P(\tilde{C} \cap \tilde{D})}{P(\tilde{D})}, \quad (6.19)$$

onde  $\tilde{C}$  e  $\tilde{D}$  representam as duas condições a serem analisadas. O cálculo de volumes condicionados já havia sido sugerido por Eiselt e Laporte (1992) para encontrar uma ordenação completa das alternativas para cada decisor. Ordenações essas que deverão ser agregadas no caso de múltiplos decisores.

### 6.3.4 Comparação das três aproximações

#### Propriedades

Nas subsecções anteriores, propusemos três aproximações para ajudar um mediador que observa uma dança dos pacotes com informação incompleta. Nesta subsecção começamos por discutir duas propriedades das aproximações apresentadas.

1. O uso de informação incompleta torna possível que os modelos enganem o mediador a propor alternativas inadequadas. A primeira propriedade que analisamos lida directamente com a questão de saber se alguma das aproximações que propomos suportará afirmações que não são verdadeiras do ponto de vista das preferências actuais dos negociadores. Por exemplo, se é possível que uma alternativa seja indicada como sendo melhor do que o valor de referência para ambos os negociadores, quando na realidade não é.

Tomando como analogia as decisões estatísticas perante o risco, dois tipos de erros podem ser cometidos quando os resultados são incertos. Por um lado, uma alternativa pode ser indicada como sendo óptima ou melhor do que outra alternativa, quando na realidade não é. Por outro lado a aproximação pode falhar na identificação de uma alternativa que na realidade é boa. Todas as aproximações podem originar o segundo tipo de erro. O primeiro tipo de erro, declarar uma alternativa como sendo óptima, por erro, é um problema particular de aproximações que se focam em elementos particulares da informação disponível<sup>4</sup>. Este é o caso da aproximação dos parâmetros centrais. Focamos seguidamente a nossa discussão no primeiro tipo de erro, declarar uma alternativa erroneamente como óptima.

A aproximação dos parâmetros extremos determina exactamente quais alternativas são certamente melhores, determina exactamente quais alternativas são possivelmente melhores, calcula exactamente quais alternativas são certamente eficientes ou certamente não eficientes, calcula exactamente se existe uma alternativa óptima para todos os valores dos parâmetros e determina exactamente quais alternativas podem ser óptimas. Se a informação fornecida pelos negociadores é consistente (o que estamos a assumir) não é portanto possível obter resultados errados usando a aproximação dos parâmetros extremos.

---

<sup>4</sup>O mesmo risco também existe quando as funções de valor marginais são aproximadas por funções lineares. O exemplo apresentado por Sarabando et al. (2009) mostra que esta aproximação pode introduzir distorções que podem levar à sobrevalorização de alternativas que na realidade são inferiores.

A aproximação dos parâmetros centrais faz afirmações sobre as alternativas assumindo um vector de parâmetros centrais. No entanto, o vector central é apenas uma aproximação, que pode ser bastante grosseira se a informação é escassa. Desta forma, não existe garantia de que as supostas melhores alternativas tenham na realidade valor mais elevado do que o ponto de referência, ou que qualquer afirmação feita sobre as alternativas se verifique para os verdadeiros valores dos parâmetros.

A aproximação do domínio determina a probabilidade de cada alternativa ser melhor do que o ponto de referência para ambos os negociadores simultaneamente, a probabilidade de cada alternativa ser eficiente e a probabilidade de cada alternativa ser óptima. As condições com probabilidade igual a zero ou a um correspondem a condições que “certamente” não se verificam ou a condições que “certamente” se verificam<sup>5</sup>, respectivamente, e desta forma correspondem a informação exacta, como a aproximação dos parâmetros extremos. No entanto, quando alguma propriedade se verifica com uma probabilidade estritamente entre zero e um, pode acontecer que a afirmação seja verdadeira ou falsa para os verdadeiros valores dos parâmetros. Em particular, esta aproximação pode ser enganosa para o mediador se diferentes probabilidades são atribuídas a diferentes alternativas. Por exemplo, o mediador pode ser tentado a propor uma alternativa que tem a probabilidade mais elevada de ser óptima de acordo com alguns métodos de mediação, enquanto que de acordo com os parâmetros verdadeiros, outra alternativa, para a qual é indicada uma probabilidade mais baixa, é óptima.

Portanto, de acordo com a possibilidade de fornecer resultados enganosos, ordenamos a aproximação dos parâmetros extremos em primeiro lugar, seguida pela aproximação do domínio, vindo a aproximação dos parâmetros centrais por último.

2. Quando a informação é incompleta, existe também a possibilidade de obter informação adicional para melhorar a qualidade dos resultados. O desejado é que esta informação adicional melhore de facto os resultados. A informação adicional será enganosa se, sem a informação adicional, a aproximação fornecer o resultado correcto (por exemplo, indicar a verdadeira alternativa óptima como sendo a melhor de acordo com algum método de mediação), enquanto que depois de adicionar informação, a aproximação forneça um resultado diferente, e portanto errado.

---

<sup>5</sup>Usamos a expressão *condições que “certamente” não se verificam* para indicar que para todas as instâncias geradas as condições nunca se verificaram. O que não quer dizer, que para outras instâncias possíveis essas condições continuem a não se verificar. De igual forma para a expressão *condições que “certamente” se verificam*.



Por simplicidade, analisamos esta propriedade para o caso de pesos desconhecidos (e valores conhecidos), mas os resultados podem ser facilmente generalizados para o outro caso. Consideremos alguma afirmação que o mediador pretende verificar, por exemplo, se a alternativa  $x^{(j)}$  é melhor do que o valor de referência. A situação antes de receber informação adicional é mostrada na Figura 6.2. O polígono apresentado na figura representa o conjunto de todos os vectores que ainda são considerados possíveis dada a informação que o mediador recebeu anteriormente. Seja o verdadeiro vector de pesos (que é desconhecido para o mediador) localizado no ponto **T**. A parte esquerda do polígono representa todos os vectores dos parâmetros para os quais a afirmação em consideração será verdadeira e a parte direita os vectores de parâmetros para os quais a afirmação é falsa. Uma vez que o verdadeiro vector dos parâmetros é localizado na parte esquerda, a afirmação é na realidade verdadeira.

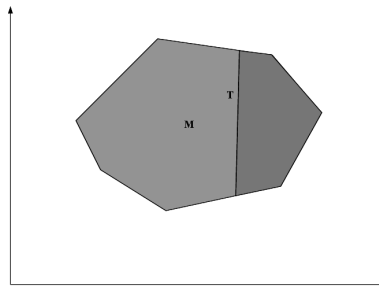


Figura 6.2: Conjunto original de parâmetros admissíveis.

As três aproximações procedem nesta situação da seguinte maneira:

- Uma vez que o conjunto de vectores de pesos admissíveis contém tanto vectores para os quais a afirmação é verdadeira como vectores para os quais a afirmação é falsa, a aproximação dos parâmetros extremos indica que a afirmação é possivelmente verdadeira. Por exemplo, a alternativa  $x^{(j)}$  é possivelmente melhor do que o valor de referência.
- Na aproximação dos parâmetros centrais, o ponto médio **M** do polígono é usado para avaliação. Neste ponto a afirmação é verdadeira, desta forma, a aproximação dos parâmetros centrais indica a afirmação como sendo verdadeira.
- Na aproximação do domínio, a área do lado esquerdo indica a probabilidade da afirmação ser verdadeira e a área do lado direito a probabilidade da afirmação ser falsa. A aproximação do domínio indicará portanto que a afirmação tem uma probabilidade bem superior a cinquenta por cento de ser verdadeira.

Posteriormente o mediador obtêm informação adicional sobre as preferências de um negociador, o que leva a uma restrição adicional representada por uma nova linha na Figura 6.3.

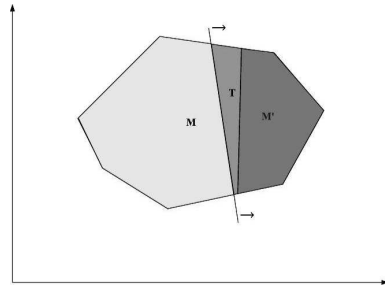


Figura 6.3: Conjunto alterado de parâmetros admissíveis.

As três aproximações irão processar esta informação adicional da forma seguinte:

- Uma vez que o conjunto de vectores de parâmetros admissíveis continua a conter elementos para os quais a afirmação é verdadeira e elementos para os quais a afirmação é falsa, a aproximação dos parâmetros extremos continuará a indicar a afirmação como potencialmente verdadeira. De facto, uma vez que qualquer restrição adicional que é baseada nas preferências correctas de um negociador irá reter o verdadeiro vector das preferências no conjunto admissível, a aproximação dos parâmetros extremos indicará pelo menos a afirmação como possivelmente verdadeira. Se a restrição eliminar todos os vectores de parâmetros para os quais a afirmação é falsa, a afirmação será indicada como certamente verdadeira.
- Na aproximação dos parâmetros centrais, o ponto  $M'$  será agora usado como vector de parâmetros. Para este ponto a afirmação é falsa, desta forma esta aproximação indicará agora incorrectamente que a afirmação é falsa.
- A aproximação do domínio indicará agora uma probabilidade bastante mais elevada para a afirmação ser falsa (parte direita da restante área), do que para a afirmação ser verdadeira.

Mostrámos assim que na aproximação dos parâmetros centrais e na aproximação do domínio, informação adicional pode ser enganosa na medida em que é obtida uma resposta correcta sem a informação, mas uma resposta errada com a informação adicional. Em contraste, isto nunca acontece na aproximação dos parâmetros extremos.

A questão agora é se tal situação ocorrerá com frequência, e sob que condições tal reversão indesejável dos resultados poderá ocorrer. Da Figura 6.3, é claro verificar que é mais provável ocorrer tal reversão se o verdadeiro vector dos parâmetros é localizado perto da fronteira no espaço dos parâmetros que separa as regiões nas quais a afirmação é verdadeira e falsa, e ao mesmo tempo, é próxima da restrição gerada pela informação adicional.

Se a restrição adicional é próxima do verdadeiro vector de parâmetros, isto indica que a decisão na qual a restrição é baseada envolve duas alternativas que fornecem aproximadamente o mesmo valor para o negociador. Uma vez que a restrição adicional é também próxima da linha fronteira da afirmação em questão, podemos ter, por exemplo, uma situação na qual a alternativa  $x^{(j)}$  está a ser comparada com uma alternativa que é similar ao valor de referência assim como ao valor de  $x^{(j)}$  em si.

Em aplicações reais, um negociador pode hesitar em fazer afirmações de preferência sobre alternativas entre as quais ele é quase indiferente. Desta forma será de esperar que tais reversões não ocorram com muita frequência. Por outro lado, tais afirmações sobre preferências não podem ser completamente evitadas. Se o mediador tentar usar apenas afirmação sobre preferências sobre as quais os negociadores têm a certeza, isto originará apenas restrições afastadas do verdadeiro vector de parâmetros. Usando apenas tais restrições, não é possível reduzir o conjunto admissível de valores dos parâmetros para uma região próxima do vector de parâmetros verdadeiros. Uma grande região admissível pode ser suficiente em alguns casos, mas não será frequentemente suficiente para obter uma solução única. Tais afirmações, mesmo que sejam correctas, ou seja, o vector de parâmetros verdadeiro continue admissível, e desta forma a afirmação sobre as preferências que origina a nova linha está de acordo com as preferências verdadeiras, podem gerar resultados enganosos.

### Comparação das aproximações sob o ponto de vista dos utilizadores

A Tabela 6.1 apresenta um sumário das diferentes possíveis intervenções do mediador, usando as três aproximações, que no geral pode constituir um processo com três passos.

As linhas da Tabela 6.1 expressam as preocupações complementares do mediador. O mediador gostaria de propor uma alternativa com possibilidade de ser aceite, isto é, melhor do que o ponto de referência para ambos os negociadores (primeira linha da Tabela 6.1). As três aproximações podem ser usadas:

- A aproximação dos parâmetros extremos determinará exactamente quais alternativas são certamente melhores (isto é, melhores para todos os vectores de parâmetros) do que o ponto de referência para ambos os negociadores simultaneamente (análise 1a). No entanto, pode acontecer que tais alternativas não existam. A mesma aproximação pode ser usada para determinar exactamente quais alternativas são possivelmente melhores (isto é, melhores para pelo menos um vector de parâmetros) do que o ponto de referência para ambos o negociadores simultaneamente, permitindo eliminar todas as alternativas que não possam verificar esta condição (análise 1b). A vantagem desta aproximação é que as condições de serem certamente melhores ou certamente piores são exactamente determinadas. A sua desvantagem é que requer a resolução de  $m$  PLs para cada análise, onde  $m$  representa o número de alternativas possíveis, isto é, o número de diferentes combinações dos níveis dos assuntos.

<i>Conceito / Aproximação</i>	<b>Extremo</b>	<b>Central</b>	<b>Domínio</b>
<b>Passo 1: Comparação com o ponto de referência no espaço dos valores</b>	<p><b>1a.</b> identificar as alternativas que são certamente melhores do que o ponto de referência para ambos os negociadores</p> <p><b>1b.</b> eliminar as alternativas que são certamente piores do que o ponto de referência para um negociador (ou ambos)</p>	<p><b>1'.</b> identificar as alternativas que são melhores do que o ponto de referência para ambos os negociadores, assumindo valores dos parâmetros centrais (solução do PL ou centróide)</p>	<p><b>1''.</b> determinar a probabilidade de cada alternativa ser melhor do que o ponto de referência para ambos os negociadores</p>
<b>Passo 2: Eficiência de Pareto</b>	<p><b>2a.</b> identificar as alternativas que são certamente eficientes de Pareto</p> <p><b>2b.</b> eliminar as alternativas que são certamente não eficientes de Pareto</p>	<p><b>2'.</b> identificar as alternativas que são eficientes de Pareto, assumindo valores dos parâmetros centrais (solução do PL ou centróide)</p>	<p><b>2''.</b> determinar a probabilidade de cada alternativa ser eficiente de Pareto</p>
<b>Passo 3: Alternativas ótimas usando métodos de mediação</b>	<p><b>3a.</b> identificar as alternativas que são certamente ótimas para o método de mediação (para todos os vectores de parâmetros)</p> <p><b>3b.</b> identificar as alternativas que podem ser ótimas para o método de mediação (para pelo menos um vector de parâmetros)</p>	<p><b>3'.</b> identificar as alternativas que são ótimas para o método de mediação, assumindo valores dos parâmetros centrais (solução do PL ou centróide)</p>	<p><b>3''.</b> determinar a probabilidade de cada alternativa ser ótima para o método de mediação</p>

Tabela 6.1: Sumário das diferentes análises que podem ser realizadas.

- A aproximação dos parâmetros centrais determinará quais alternativas são melhores do que o ponto de referência para ambos os negociadores simultaneamente, assumindo um vector de parâmetros centrais (análise 1'). Este vector pode ser determinado resolvendo um PL, maximizando a folga mínima, ou determinando um centróide. Uma vantagem desta aproximação é que apenas precisam de ser resolvidos dois PLs, um para cada negociador, ou apenas dois centróides precisam de ser calculados. Outra vantagem é que fornece uma clara divisão do conjunto das alternativas: as melhores do que o ponto de referência e as piores do que o ponto de referência.
- A aproximação do domínio determinará a probabilidade de cada alternativa ser melhor do que o ponto de referência para ambos os negociadores simultaneamente (análise 1''). Algumas alternativas terão uma probabilidade muito baixa e poderão ser descartadas de análise futura. A vantagem desta aproximação é que é simples determinar as probabilidades usando simulação Monte Carlo, com um nível de confiança tão elevado quanto necessário. É uma questão de se aumentar o número de iterações usadas na simulação. A sua desvantagem é que o resultado não fornece uma clara divisão como no caso anterior.

Relativamente à segunda linha da Tabela 6.1, o mediador querera propor uma alternativa na fronteira eficiente de Pareto. Mais uma vez podem ser usadas as três aproximações:

- A aproximação dos parâmetros extremos determinará quais alternativas são certamente eficientes (análise 2a), ou certamente não eficientes (análise 2b), permitindo eliminar as últimas. A sua desvantagem é que requer a resolução de  $2 * m * (m - 1)$  PLs para cada análise. Note-se que o valor indicado é um limite superior, uma vez que se uma alternativa for considerada certamente ineficiente não será necessário incluir esta alternativa nas comparações seguintes. A vantagem desta aproximação é que as condições de ser certamente eficiente ou certamente ineficiente são exactamente determinadas.
- A aproximação dos parâmetros centrais determinará quais alternativas são eficientes, assumindo um vector de parâmetros centrais, resolvendo um PL ou calculando um centróide (análise 2'). Uma vantagem desta aproximação é que apenas é necessário o cálculo de dois PLs ou centróides. Também fornece uma clara partição do conjunto das alternativas entre alternativas eficientes e alternativas ineficientes.
- A aproximação do domínio determinará a probabilidade de cada alternativa ser eficiente (análise 2''). Alternativas com baixa probabilidade de serem eficientes poderão ser descartadas de análise futura. As vantagens e desvantagens são as mesmas da análise 1'.

Finalmente, relativamente à terceira linha da Tabela 6.1, o mediador poderá ter como objectivo propor, entre as alternativas eficientes, uma alternativa que seja óptima de acordo com um método de mediação, como a soma dos valores ou a PoP mínima:

- A aproximação dos parâmetros extremos determinará exactamente se existe uma alternativa óptima para todos os valores dos parâmetros (análise 3a), o que não é muito provável, e determinará exactamente quais alternativas podem ser óptimas (análise 3b). Como uma vantagem, as condições de serem certamente óptimas ou potencialmente óptimas são determinadas de forma exacta. No entanto, o resultado mais provável é que se encontre um conjunto de alternativas potencialmente óptimas sem maneira de saber qual é a melhor. Além disso, o uso de programação linear é limitado ao caso em que o método de mediação é a soma dos valores.
- A aproximação dos parâmetros centrais determinará as alternativas óptimas, assumindo um vector de parâmetros centrais, resolvendo um PL ou calculando um centróide (análise 3'). Uma vantagem desta aproximação é que uma única alternativa será identificada (excepto nos casos em que existam óptimos alternativos). Uma segunda vantagem é que não é computacionalmente difícil o uso do PoP (ou de um método envolvendo produtos), como método de mediação.
- A aproximação do domínio determinará a probabilidade de cada alternativa ser óptima (análise 3''). Alternativas com baixa probabilidade de serem óptimas podem ser descartadas de análise futura. A vantagem desta aproximação é que as probabilidades podem facilmente ser determinadas usando simulação Monte Carlo, e as probabilidades permitirão identificar as alternativas mais promissoras entre o conjunto das alternativas potencialmente óptimas, mesmo se o método de mediação é o PoP ou um método envolvendo produtos. Não é muito provável uma partição clara dos resultados, mas existe mais informação do que na análise 3b, uma vez que sabemos as probabilidades.

Todas as aproximações apresentadas conduzem a resultados interessantes e diversificados. A escolha da aproximação a ser usada depende dos objectivos do mediador. No entanto sugerimos a utilização de diferentes aproximações de forma complementar e em sequência. O mediador pode começar por abordar o objectivo de encontrar alternativas que são consideradas por ambos os negociadores como uma melhoria relativamente ao ponto de referência. O mediador pode reduzir o conjunto das alternativas potencialmente interessantes, eliminando as que são certamente piores do que a referência para um dos negociadores (análise 1b), ou aquelas com uma baixa probabilidade de serem melhores do que a referência para ambos os negociadores (análise 1''). Num segundo passo, o mediador pode eliminar as alternativas que são certamente ineficientes (análise 2b) ou com baixa probabilidade de serem eficientes (análise 2''), sendo preferível a última aproximação se existirem ainda muitas alternativas. Para detectar eficiência, cada uma das alternativas que não foi eliminada no passo anterior será comparada com o conjunto original das alternativas. Finalmente, para escolher uma única alternativa para propor aos negociadores, o

mediador pode usar a análise 3' para propor a solução óptima usando parâmetros centrais, ou usar a análise 3'' para escolher a alternativa que tem a probabilidade mais elevada de ser óptima. Pode ser considerado mais do que um método de mediação.

Como referido anteriormente, este tipo de aproximação global pode ser usado de forma interactiva. Se a alternativa proposta pelo mediador é aceite, a negociação termina com sucesso. No entanto, pode acontecer que a alternativa proposta pelo mediador não seja aceite por um dos negociadores, ou por ambos. Se o negociador  $k$  afirmar que a solução proposta,  $x^{(j)}$ , não é melhor do que a referência,  $x^{(r)}$ , então a restrição  $v^k(x^{(j)}) < v^k(x^{(r)})$  pode ser acrescentada à definição de  $(W^k, M^k)$ . A análise pode ser repetida para encontrar um nova solução. Pode acontecer que o negociador não seja sincero, actuando estrategicamente, quando afirma que  $x^{(j)}$  não é melhor do que a referência, esperando que uma melhor alternativa seja proposta pelo mediador. No entanto, uma vez que o mediador incorporará a restrição  $v^k(x^{(j)}) < v^k(x^{(r)})$ , que é contrária às preferências deste negociador, possivelmente excluindo da região admissível o verdadeiro vector dos parâmetros do negociador, pode acontecer que as próximas alternativas propostas não sejam tão boas como a anterior. Por esta razão, a manipulação poderia acabar por levar a perder uma oportunidade para melhorar a primeira proposta do mediador.

Considerando os três tipos de aproximações correspondendo às três colunas da Tabela 6.1, é possível notar que levar a cabo uma simulação Monte Carlo pode ser suficiente para implementar todas elas. De facto, pode ser usada simulação Monte Carlo para determinar as probabilidades (domínios relativos) para diferentes condições com elevada precisão, que pode ser tão elevada quanto se pretenda. Por outro lado, determinando a média dos valores dos parâmetros gerados na simulação definirá uma boa aproximação do centróide de  $(W^1, M^1)$  e  $(W^2, M^2)$ . Usar estes centróides corresponde à aproximação dos parâmetros centrais.

## 6.4 Exemplo ilustrativo: Caso Nelson *versus* Amstore

### 6.4.1 Introdução

Para ilustrar as aproximações apresentadas na secção anterior consideramos o exemplo de Nelson *versus* Amstore, introduzido por Raiffa et al. (2002). No caso Nelson *versus* Amstore existem duas partes em negociação: Nelson e Amstore. Nelson tem uma firma de construção e negoceia com uma empresa de revenda (Amstore) para construir um novo armazém para a mesma. Existem três assuntos: preço (10, 10.5, 11, 11.5 ou 12 mil dólares), *design* (básico ou melhorado) e prazo (20, 21, 22, 23, 24, 25 ou 26 dias). Combinando estes assuntos originamos um total de 70 alternativas possíveis (ver Tabela 6.2). Para Nelson, o preço e o prazo são assuntos a maximizar e o *design* é um assunto a minimizar, enquanto que para Amstore se verifica o oposto. Desta forma, a alternativa preferida para Amstore é a alternativa 1 ( $x^{(1)} = (10, \text{melhorado}, 20)$ ), enquanto que a alternativa preferida para Nelson é a alternativa 70 ( $x^{(70)} = (12, \text{básico}, 26)$ ).

Alternativa	Preço	Design	Prazo	Alternativa	Preço	Design	Prazo	Alternativa	Preço	Design	Prazo
1	10	Melhorado	20	25	10.5	Básico	23	49	11.5	Melhorado	26
2	10	Melhorado	21	26	10.5	Básico	24	50	11.5	Básico	20
3	10	Melhorado	22	27	10.5	Básico	25	51	11.5	Básico	21
4	10	Melhorado	23	28	10.5	Básico	26	52	11.5	Básico	22
5	10	Melhorado	24	29	11	Melhorado	20	53	11.5	Básico	23
6	10	Melhorado	25	30	11	Melhorado	21	54	11.5	Básico	24
7	10	Melhorado	26	31	11	Melhorado	22	55	11.5	Básico	25
8	10	Básico	20	32	11	Melhorado	23	56	11.5	Básico	26
9	10	Básico	21	33	11	Melhorado	24	57	12	Melhorado	20
10	10	Básico	22	34	11	Melhorado	25	58	12	Melhorado	21
11	10	Básico	23	35	11	Melhorado	26	59	12	Melhorado	22
12	10	Básico	24	36	11	Básico	20	60	12	Melhorado	23
13	10	Básico	25	37	11	Básico	21	61	12	Melhorado	24
14	10	Básico	26	38	11	Básico	22	62	12	Melhorado	25
15	10.5	Melhorado	20	39	11	Básico	23	63	12	Melhorado	26
16	10.5	Melhorado	21	40	11	Básico	24	64	12	Básico	20
17	10.5	Melhorado	22	41	11	Básico	25	65	12	Básico	21
18	10.5	Melhorado	23	42	11	Básico	26	66	12	Básico	22
19	10.5	Melhorado	24	43	11.5	Melhorado	20	67	12	Básico	23
20	10.5	Melhorado	25	44	11.5	Melhorado	21	68	12	Básico	24
21	10.5	Melhorado	26	45	11.5	Melhorado	22	69	12	Básico	25
22	10.5	Básico	20	46	11.5	Melhorado	23	70	12	Básico	26
23	10.5	Básico	21	47	11.5	Melhorado	24				
24	10.5	Básico	22	48	11.5	Melhorado	25				

Tabela 6.2: Alternativas.

### 6.4.2 Informação completa

Suponhamos que temos informação completa, isto é, que o mediador conhece o valor de cada nível e conhece o peso dos três assuntos, para ambos os negociadores (ver Tabela 6.3)<sup>6</sup>. Deste modo, é conhecido o valor de cada alternativa. As alternativas 1-5, 9, 15-19, 22-27, 37-42, 51-56 e 67-70 são eficientes.

Assunto	Nível	Valor parcial		Valor*100	
		Nelson	Amstore	Nelson	Amstore
Preço	10	0	1	0	70
	10.5	0.4167	0.8571	25	60
	11	0.6667	0.6429	40	45
	11.5	0.9167	0.3571	55	25
	12	1	0	60	0
	$w_1$	<b>0.6</b>	<b>0.7</b>		
Design	Básico	1	0	20	0
	Melhorado	0	1	0	10
		$w_2$	<b>0.2</b>	<b>0.1</b>	
Prazo	20	0	1	0	20
	21	0.40	0.95	8	19
	22	0.60	0.90	12	18
	23	0.75	0.80	15	16
	24	0.85	0.60	17	12
	25	0.95	0.35	19	7
	26	1	0	20	0
	$w_3$	<b>0.2</b>	<b>0.2</b>		

Tabela 6.3: Informação completa.

<sup>6</sup>Para simplificar a leitura, multiplicámos o valor de cada nível por 100, sendo o valor global de cada alternativa, para cada parte, um valor entre 0 e 100



Suponhamos que Amstore começa por propor a alternativa 1, Nelson responde propondo a alternativa 70, Amstore propõe a alternativa 8, e assim sucessivamente. O processo termina quando Nelson propõe a alternativa 44 que Amstore aceita (ver Tabela 6.4 e Figura 6.4). As alternativas 27-28, 37-42, 45-56 e 58-70 são melhores do que a solução de compromisso para Nelson e as alternativas 1-40 e 43 são melhores do que a solução de compromisso para Amstore. Considerando que informação completa da Tabela 6.3 está disponível, é possível saber que a alternativa 44 é ineficiente, e que existem alternativas melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso: alternativas 27-28 e 37-40 (ver Figura 6.4). Dentro destas alternativas, apenas a alternativa 28 não é eficiente. Na Secção B.1 do Apêndice B mostramos alguns dos resultados que se obtêm considerando que um compromisso ainda não havia sido alcançado, e permitem concluir que mesmo neste caso será de esperar bons resultados.

Amstore	Nelson
$x^{(1)}$	$x^{(70)}$
$x^{(8)}$	$x^{(67)}$
$x^{(17)}$	$x^{(53)}$
$x^{(20)}$	$x^{(42)}$
$x^{(31)}$	$x^{(46)}$
$x^{(32)}$	$x^{(44)}$

Tabela 6.4: Sequência de propostas.

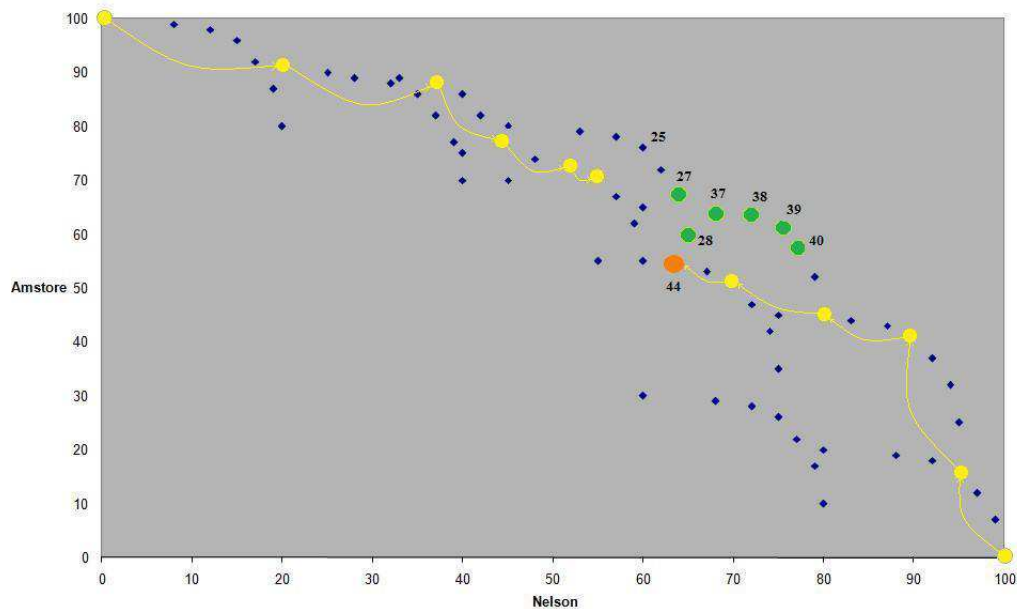


Figura 6.4: Dança dos pacotes.

Nesta ilustração consideramos os métodos de mediação de maximizar a soma dos valores e maximizar a PoP mínima relativamente à solução de compromisso. Dentro das alternativas eficientes que são melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso, dependendo do objectivo, é possível recomendar diferentes alternativas. Se o objectivo é maximizar a soma dos valores, a alternativa 39 é a melhor, com soma dos valores igual a 136. A alternativa 25 também tem soma dos valores igual a 136, mas não é melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso. Se o objectivo é maximizar a PoP mínima relativamente à solução de compromisso, a alternativa 38 é a melhor, com uma PoP mínima igual a 0.64. Para determinar a PoP mínima usámos o máximo valor obtido por cada parte considerando que a alternativa escolhida tem que ser melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso. Na Tabela 6.5 é possível ver o valor (valor para Nelson, valor para Amstore, soma dos valores e PoP mínima) das alternativas que são melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso. Dados estes resultados, e dependendo do seu julgamento, o mediador proporá, às partes em negociação, ou a alternativa 38 ou a alternativa 39.

	Nelson	Amstore	Soma dos valores	PoP mínima
$x^{(27)}$	60	67	131	0.07
$x^{(28)}$	65	60	125	0.14
$x^{(37)}$	68	64	132	0.36
$x^{(38)}$	72	63	135	<b>0.64</b>
$x^{(39)}$	75	61	<b>136</b>	0.54
$x^{(40)}$	77	57	134	0.23

Tabela 6.5: Valor das alternativas que são melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso.

### 6.4.3 Informação incompleta

Consideremos a análise de um mediador que conhece as alternativas disponíveis (Tabela 6.2) e que testemunha a sequência de propostas (Tabela 6.4), mas não conhece o valor exacto dos parâmetros de cada negociador apresentados na Tabela 6.3. Consideremos os dois tipos de incerteza apresentados na Subsecção 6.2.1: (1) apenas os pesos são incertos e os valores são conhecidos, (2) os pesos e os valores são incertos.

No segundo caso, consideramos que a função de valor está entre dois limites, tomando a função linear como limite inferior e a função côncava como limite superior, admitindo a monotonia da mesma. Para Nelson, e para o assunto preço tem-se  $v_{\text{preço}}^N(10) = 0$  e  $v_{\text{preço}}^N(12) = 1$ , desta forma concluímos que o limite inferior para o assunto preço é dado por:

$$v_{\text{preço}}^{N-\text{lin}}(l_{\text{preço}}^{(j)}) = \frac{1}{2}l_{\text{preço}}^{(j)} - 5.$$

Para o prazo tem-se  $v_{\text{prazo}}^N(20) = 0$  e  $v_{\text{prazo}}^N(26) = 1$ , logo podemos concluir que:

$$v_{\text{prazo}}^{N-\text{lin}}(l_{\text{prazo}}^{(j)}) = \frac{1}{6}l_{\text{prazo}}^{(j)} - \frac{10}{3}.$$

De forma similar, para Amstore tem-se:

$$v_{\text{preço}}^{A\text{-lin}}(l_{\text{preço}}^{(j)}) = -\frac{1}{2}l_{\text{preço}}^{(j)} + 6,$$

$$v_{\text{prazo}}^{A\text{-lin}}(l_{\text{prazo}}^{(j)}) = -\frac{1}{6}l_{\text{prazo}}^{(j)} + \frac{13}{3}.$$

Considerando o limite superior, isto é, a função côncava  $v_i^{k\text{-con}}(l_i^{(j)}) = a + b(-e^{-c*l_i^{(j)}})$ , por exemplo, para Nelson e relativamente ao preço:

$$\begin{cases} v_{\text{preço}}^N(10) = 0 \\ v_{\text{preço}}^N(12) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b(-e^{-c*10}) = 0 \\ a + b(-e^{-c*12}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{e^{-10c} - e^{-12c}} * e^{-10c} \\ b = \frac{1}{e^{-10c} - e^{-12c}} \end{cases}$$

Desta forma tem-se:

$$v_{\text{preço}}^{N\text{-con}}(l_i^{(j)}) = \frac{1}{e^{-10c} - e^{-12c}} * e^{-10c} + \frac{1}{e^{-10c} - e^{-12c}} (-e^{-c*l_i^{(j)}}).$$

Na expressão anterior decidimos usar  $c = 5$  de tal forma que os valores reais pertençam ao intervalo com a função linear como limite inferior e a função côncava como limite superior, mas sem considerar que as funções de valor são extremamente côncavas. A Figura 6.5 mostra as verdadeiras funções de valor para Nelson e Amstore e também os limites inferiores e superiores. Note-se que as funções de valor reais são côncavas, no entanto, numa fase inicial do nosso estudo admitimos apenas a monotonia das mesmas. Será de esperar que admitindo também a concavidade das funções de valor os resultados melhorem, uma vez que as funções de valor aproximadas se aproximarão mais das funções de valor reais. Na Secção B.2 do Apêndice B mostramos alguns resultados obtidos admitindo a concavidade das mesmas, e que permitem concluir que realmente os resultados melhoram impondo a concavidade das funções de valor.

Assumindo então que o mediador conhece as alternativas possíveis, bem como as ofertas que foram feitas e que levaram a um compromisso, ele pode retirar algumas restrições adicionais. Para começar, ele sabe quais as melhores e piores alternativas para Nelson e Amstore<sup>7</sup>:

$$V_{\text{preço}}^N(10) + V_{\text{design}}^N(\text{melhorado}) + V_{\text{prazo}}^N(20) = 0,$$

$$V_{\text{preço}}^N(12) + V_{\text{design}}^N(\text{básico}) + V_{\text{prazo}}^N(26) = 100,$$

$$V_{\text{preço}}^A(12) + V_{\text{design}}^A(\text{básico}) + V_{\text{prazo}}^A(26) = 0,$$

$$V_{\text{preço}}^A(10) + V_{\text{design}}^A(\text{melhorado}) + V_{\text{prazo}}^A(20) = 100.$$

<sup>7</sup>Relembremos que usamos a notação  $V_i^k(l_i^{(j)})$  para representar  $w_i^k v_i^k(l_i^{(j)})$

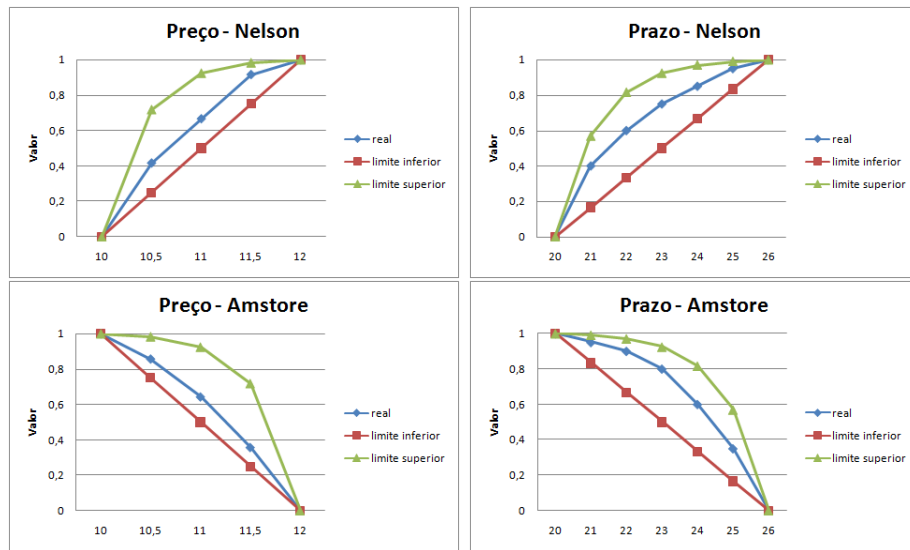


Figura 6.5: Funções de valor.

Para o caso com valores desconhecidos, assumimos que as preferências são monótonas, tal que<sup>8</sup>:

$$V_{\text{preço}}^N(10) < V_{\text{preço}}^N(10.5) < V_{\text{preço}}^N(11) < V_{\text{preço}}^N(11.5) < V_{\text{preço}}^N(12),$$

$$V_{\text{design}}^N(\text{básico}) > V_{\text{design}}^N(\text{melhorado}),$$

$$V_{\text{prazo}}^N(20) < V_{\text{prazo}}^N(21) < V_{\text{prazo}}^N(22) < V_{\text{prazo}}^N(23) < V_{\text{prazo}}^N(24) < V_{\text{prazo}}^N(25) < V_{\text{prazo}}^N(26),$$

$$V_{\text{preço}}^A(10) > V_{\text{preço}}^A(10.5) > V_{\text{preço}}^A(11) > V_{\text{preço}}^A(11.5) > V_{\text{preço}}^A(12),$$

$$V_{\text{design}}^A(\text{básico}) < V_{\text{design}}^A(\text{melhorado}),$$

$$V_{\text{prazo}}^A(20) > V_{\text{prazo}}^A(21) > V_{\text{prazo}}^A(22) > V_{\text{prazo}}^A(23) > V_{\text{prazo}}^A(24) > V_{\text{prazo}}^A(25) > V_{\text{prazo}}^A(26).$$

A sequência de propostas origina restrições do tipo (6.3). Assumimos que cada proposta apresentada por um negociador tem para ele valor inferior às propostas que já apresentou anteriormente, e que o negociador prefere todas as ofertas feitas por si ao compromisso.

<sup>8</sup>Para garantir que a desigualdade é estrita considerámos que, por exemplo,  $V_{\text{preço}}^N(10) < V_{\text{preço}}^N(10.5)$  implica que  $V_{\text{preço}}^N(10) + 1 \leq V_{\text{preço}}^N(10.5)$ .

Obtemos as seguintes restrições<sup>9</sup>:

$$v^N(x^{(70)}) > v^N(x^{(67)}) > v^N(x^{(53)}) > v^N(x^{(42)}) > v^N(x^{(46)}) > v^N(x^{(44)}),$$

$$v^A(x^{(1)}) > v^A(x^{(8)}) > v^A(x^{(17)}) > v^A(x^{(20)}) > v^A(x^{(31)}) > v^A(x^{(32)}) > v^A(x^{(44)}).$$

Também assumimos que um negociador prefere o compromisso às propostas da outra parte. Para Nelson e Amstore tem-se:

$$\begin{aligned} v^N(x^{(44)}) &> v^N(x^{(32)}), \\ v^N(x^{(44)}) &> v^N(x^{(31)}), \\ v^N(x^{(44)}) &> v^N(x^{(20)}), \\ v^N(x^{(44)}) &> v^N(x^{(17)}), \\ v^N(x^{(44)}) &> v^N(x^{(8)}), \\ v^N(x^{(44)}) &> v^N(x^{(1)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^A(x^{(44)}) &> v^A(x^{(46)}), \\ v^A(x^{(44)}) &> v^A(x^{(42)}), \\ v^A(x^{(44)}) &> v^A(x^{(53)}), \\ v^A(x^{(44)}) &> v^A(x^{(67)}), \\ v^A(x^{(44)}) &> v^A(x^{(70)}). \end{aligned}$$

Para ilustrar o uso de informação explícita sobre preferências (nomeadamente, restrições do tipo (6.4)), suponhamos que Nelson afirma que a alternativa 25 é tão boa como alternativa 36, e que a alternativa 39 é tão boa como a alternativa 50. Suponhamos também que Amstore afirma que as alternativas 42 e 50 são quase equivalentes, ocorrendo o mesmo com as alternativas 36 e 37. Obtemos deste modo as seguintes restrições, onde usámos  $\epsilon = 10$ :

$$\begin{aligned} |v^N(x^{(25)}) - v^N(x^{(36)})| &\leq \epsilon, \\ |v^N(x^{(39)}) - v^N(x^{(50)})| &\leq \epsilon, \\ |v^A(x^{(42)}) - v^A(x^{(50)})| &\leq \epsilon, \\ |v^A(x^{(36)}) - v^A(x^{(37)})| &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

O nosso objectivo é que, com a informação incompleta indicada anteriormente, o mediador possa sugerir aos negociadores uma alternativa eficiente e melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso. Os resultados obtidos seguindo as três aproximações propostas são apresentados nas subsecções seguintes. Nas tabelas apresentadas usamos a designação “restrições 1” para representar as restrições relativas à sequência de propostas (restrições do tipo (6.3)) e a designação “restrições 2” para representar as restrições relativas à equivalência de alternativas (restrições do tipo (6.4)).

<sup>9</sup>Também para as restrições relativas à sequência das propostas consideramos que a desigualdade é estrita.

Das condições que impusemos relativamente às preferências dos negociadores, provavelmente a mais forte é a monotonia das propostas de cada negociador. Ou seja, admitir que cada proposta feita por um negociador tem para ele valor inferior às propostas que apresentou anteriormente. Na Secção B.3 do Apêndice B mostramos alguns resultados não considerando estas restrições, que permitem ver que, mesmo não impondo as restrições relativas à monotonia das propostas de cada negociador, se esperam obter bons resultados.

#### 6.4.4 Resultados usando a Aproximação dos Parâmetros Extremos

Relembremos que nesta aproximação é necessário resolver  $2 * (70 - 1)$  PLs do tipo (6.9) para verificar se existem alternativas que são certamente melhores do que a solução de compromisso e para eliminar alternativas que são certamente piores. O mesmo tipo de PL pode ser usado para comparar qualquer outro par de alternativas para verificar eficiência de Pareto. Considerando o conjunto das restantes alternativas, depois de eliminar as alternativas certamente piores do que a solução de compromisso e as alternativas certamente não pertencendo à fronteira eficiente - conjunto  $P$ , é possível resolver PLs do tipo (6.10) para verificar se cada alternativa em  $P$  é potencialmente ótima de acordo com o método de maximizar a soma dos valores. Considerámos os dois tipos de informação incompleta, as restrições relativamente à sequência de propostas (restrições do tipo (6.3)) e as restrições relativas à equivalência de alternativas (restrições do tipo (6.4)). Na Tabela 6.6 é possível ver as alternativas que são certamente piores e as alternativas que são certamente melhores do que a solução de compromisso.

#### Apenas pesos incertos (valores conhecidos)

Considerando que apenas os pesos são incertos (valores conhecidos), e considerando as restrições relacionadas com a sequência das propostas, o conjunto das alternativas não eliminadas é composto por 24 alternativas (alternativas 9-14, 22-28, 33-42 e 50), cerca de 34% do número inicial de alternativas. Por exemplo,  $\max\{v^N(x^{(1)}) - v^N(x^{(44)})\} \leq 0$ , logo, a alternativa  $x^{(1)}$  pode ser eliminada uma vez que é certamente pior do que o compromisso para Nelson. Considerando simultaneamente as restrições relativas à sequência das propostas e à equivalência de alternativas, os resultados são muito semelhantes. O conjunto das alternativas não eliminadas é composto por 21 alternativas (alternativas 12-14, 22-28, 33-42 e 50). Logo, a informação adicional obtida através da indicação de forma explícita das indiferenças tem muito pouco efeito neste caso.

Até agora, identificámos quais das alternativas são potencialmente melhores do que a solução de compromisso, isto é, para pelo menos um vector de parâmetros. Analisaremos agora quais alternativas são certamente melhores do que o compromisso, isto é, para todos os vectores de parâmetros. Relembremos que as alternativas que na realidade são melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso são as alternativas 27, 28, 37, 38, 39 e 40.

Alternativas	PIORES COMPROMISSO								MELHORES COMPROMISSO							
	Valores Conhecidos				Funções de valor parâmetros desconhecidos				Valores Conhecidos				Funções de valor parâmetros desconhecidos			
	Restrições 1		Restrições 1+2		Restrições 1		Restrições 1+2		Restrições 1		Restrições 1+2		Restrições 1		Restrições 1+2	
	Nelson	Amstore	Nelson	Amstore	Nelson	Amstore	Nelson	Amstore	Nelson	Amstore	Nelson	Amstore	Nelson	Amstore	Nelson	Amstore
1	X		X		X		X		X		X		X		X	
2	X		X		X		X		X		X		X		X	
3	X		X		X		X		X		X		X		X	
4	X		X		X		X		X		X		X		X	
5	X		X		X		X		X		X		X		X	
6	X		X		X		X		X		X		X		X	
7	X		X		X		X		X		X		X		X	
8	X		X		X		X		X		X		X		X	
9			X				X				X				X	
10			X				X				X				X	
11			X				X				X				X	
12																
13																
14																
15	X		X		X		X		X		X		X		X	
16	X		X		X		X		X		X		X		X	
17	X		X		X		X		X		X		X		X	
18	X		X		X		X		X		X		X		X	
19	X		X		X		X		X		X		X		X	
20	X		X		X		X		X		X		X		X	
21	X		X		X		X		X		X		X		X	
22																
23																
24																
25																
26																
27																
28																
29	X		X		X		X		X		X		X		X	
30	X		X		X		X		X		X		X		X	
31	X		X		X		X		X		X		X		X	
32	X		X		X		X		X		X		X		X	
33																
34																
35																
36																
37																
38																
39																
40																
41																
42																
43	X		X		X		X		X		X		X		X	
44																
45		X		X		X		X		X		X		X		
46		X		X		X		X		X		X		X		
47		X		X		X		X		X		X		X		
48		X		X		X		X		X		X		X		
49		X		X		X		X		X		X		X		
50																
51		X		X		X		X		X		X		X		
52		X		X		X		X		X		X		X		
53		X		X		X		X		X		X		X		
54		X		X		X		X		X		X		X		
55		X		X		X		X		X		X		X		
56		X		X		X		X		X		X		X		
57	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
58		X		X		X		X		X		X		X		
59		X		X		X		X		X		X		X		
60		X		X		X		X		X		X		X		
61		X		X		X		X		X		X		X		
62		X		X		X		X		X		X		X		
63		X		X		X		X		X		X		X		
64		X		X		X		X		X		X		X		
65		X		X		X		X		X		X		X		
66		X		X		X		X		X		X		X		
67		X		X		X		X		X		X		X		
68		X		X		X		X		X		X		X		
69		X		X		X		X		X		X		X		
70		X		X		X		X		X		X		X		

Tabela 6.6: Alternativas que são certamente piores do que o compromisso (esquerda) e alternativas que são certamente melhores do que o compromisso (direita).

Tanto considerando as restrições do tipo (6.3) como as restrições do tipo (6.3) juntamente com as restrições do tipo (6.4), podemos ver que as alternativas 27, 37 e 38 são indicadas como sendo certamente melhores do que o compromisso para Amstore, a alternativa 40 é indicada como sendo certamente melhor do que o compromisso para Nelson e

a alternativa 28 não é indicada como sendo certamente melhor do que o compromisso para nenhuma das partes. A alternativa 39 poderá ser uma boa sugestão uma vez que é indicada como sendo certamente melhor do que o compromisso para ambas as partes. No entanto, deve ser notado que na realidade existem mais alternativas que são melhores para ambas as partes do que o compromisso. Mas, uma vez que existem alguns vectores considerados possíveis, para os quais essas alternativas aparecem como sendo piores do que o compromisso, elas não são indicadas como sendo certamente melhores do que o compromisso.

Num segundo passo, também queremos comparar todos os pares das alternativas restantes para verificar a existência de eficiência de Pareto. Por exemplo, considerando as restrições do tipo (6.3) juntamente com as restrições do tipo (6.4) é também possível eliminar as alternativas 13, 14, 34, 35, 36 e 50. Por exemplo,  $\max\{v^k(x^{(13)}) - v^k(x^{(23)})\} \leq 0$ , para  $k \in \{N, A\}$ , logo a alternativa 13 pode ser eliminada. Nenhuma das alternativas é certamente eficiente. Entre as 15 alternativas não eliminadas - conjunto  $P$  (alternativas 12, 22-28, 33 e 37-42), todas podem maximizar a soma dos valores, uma vez que para todas as alternativas  $x^{(j)} \in P$ , se tem  $\max \delta \geq 0$  (rever Subsecção 6.3.1).

### **Pesos incertos e função de valor com parâmetros desconhecidos**

Uma vez que os resultados obtidos considerando valores conhecidos são muito semelhantes aos obtidos considerando valores desconhecidos, com a principal diferença de que no caso em que se consideram valores desconhecidos, a alternativa 39 não é indicada como sendo melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso, não comentaremos os segundos resultados em detalhe. Referimos apenas que, por exemplo, considerando pesos incertos e funções de valor com parâmetros desconhecidos e, usando os dois tipos de restrições ao mesmo tempo, comparando todos os pares de alternativas restantes, para verificar eficiência de Pareto, não adiciona nenhuma informação, uma vez que todas as alternativas podem ser eficientes e todas podem maximizar a soma dos valores.

### **Alguns comentários**

Neste exemplo, alterando o tipo de informação incompleta não afectou de forma notória os resultados. Além disso, considerando as restrições do tipo (6.3) juntamente com as restrições do tipo (6.4), os resultados não são muito diferentes dos obtidos considerando apenas restrições do tipo (6.3). Em todos os casos existem bastantes alternativas que podem ser eliminadas uma vez que são certamente piores do que o compromisso. Apenas no caso em que os valores são considerados conhecidos foi possível encontrar uma alternativa que é certamente melhor do que o compromisso para ambas as partes. Note-se que, mesmo considerando valores conhecidos e usando os dois tipos de restrições, caso em que mais informação é requerida dos negociadores, comparar todos os pares de alternativas restantes, para verificar eficiência de Pareto, não ajudou a eliminar muitas alternativas. Considerando pesos incertos e funções de valor com parâmetros desconhecidos não foi mesmo possível eliminar nenhuma alternativa. Comparando as alternativas que podem ser melhores do que o



compromisso e podem ser eficientes de Pareto, e tentando ver quais destas alternativas podem maximizar a soma dos valores, não deu nenhuma informação adicional. Por exemplo, no caso de pesos conhecidos e usando as restrições do tipo (6.3) juntamente com as restrições do tipo (6.4), e no fim da análise, o mediador teria um conjunto de 15 alternativas para recomendar aos negociadores. Como apresentado na Subsecção 6.3.4 esta aproximação pode ser boa como ponto de partida, eliminado bastantes alternativas certamente piores do que o compromisso para alguma das partes. Para recomendar uma alternativa, entre as alternativas restantes, é melhor usar uma das outras duas aproximações.

#### 6.4.5 Resultados usando a Aproximação dos Parâmetros Centrais

A aproximação dos parâmetros centrais consiste em inferir uma combinação de valores dos parâmetros que seja representativa, do conjunto dos valores admissíveis, e usar essa combinação para encontrar alternativas que sejam melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso, sejam eficientes e ótimas de acordo com um método de mediação. Nesta subsecção consideramos dois tipos de vectores de parâmetros centrais: vectores obtidos resolvendo um problema linear do tipo (6.11) maximizando a folga mínima (referidos posteriormente como vectores PL) e vectores obtidos aproximando os centróides da região admissível (referidos posteriormente como vectores centróide).

No primeiro caso de vectores de parâmetros centrais, inferimos os pesos resolvendo um PL do tipo (6.11), para cada parte. Relembremos que  $x^{(67)}=(12, \text{básico}, 23)$  e que  $x^{(70)}=(11, \text{básico}, 26)$ . Por exemplo, considerando que apenas os pesos são incertos, para Nelson, tem-se:

$$v^N(x^{(67)}) < v^N(x^{(70)}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w_1^N * 100 + w_2^N * 100 + 0.75 * w_3^N * 100 < 0.6667 * w_1^N * 100 + w_2^N * 100 + w_3^N * 100.$$

Desta forma, uma das restrições que incluímos no problema linear é:

$$(1 - 0.6667) * w_1^N + 0 * w_2^N + (0.75 - 1) * w_3^N + \Delta^N \leq 0.$$

Para aproximar os centróides da região admissível determinámos a média de 5000<sup>10</sup> vectores de parâmetros, gerados utilizando simulação Monte Carlo. Os pesos foram gerados de acordo com uma distribuição uniforme usando o processo descrito por Butler et al. (1997) (rever Secção 3.4). No caso em que os valores também são considerados desconhecidos, estes foram gerados aleatoriamente de forma a que as funções de valor marginais fossem minoradas pela função linear e majoradas pela função côncava, admitindo a monotonia das mesmas.

<sup>10</sup>Note-se que, como se trata apenas de um exemplo ilustrativo, o número de vectores gerados não é muito relevante, desde que seja suficientemente elevado. Assim, à falta de uma melhor justificação, optámos por usar o mesmo número de simulações que realizámos nos Capítulos 3 e 5, apesar da simulação não ter o mesmo propósito.

Na Tabela 6.7 é possível comparar os pesos PL e os pesos centróide, para Nelson e para Amstore, considerando os dois tipos de informação incompleta e considerando as restrições do tipo (6.3) e as restrições do tipo (6.3) juntamente com as restrições do tipo (6.4). Para simplificar a comparação dos vectores dos parâmetros, também determinámos a distância Euclidiana entre os pesos reais e os pesos PL e entre o pesos reais e os pesos centróide. Sejam  $p = (p_1, \dots, p_n)$  e  $q = (q_1, \dots, q_n)$  dois vectores de pesos. A distância Euclidiana entre dois pontos  $p$  e  $q$ , no espaço dos pesos, pode ser calculada através de:

$$d_E(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2}. \quad (6.20)$$

		Valores conhecidos									
		Restrições 1					Restrições 1+2				
pesos TRUE		Nelson		Amstore			Nelson		Amstore		
		Nelson	Amstore	PL	centróide	PL	centróide	PL	centróide	PL	centróide
$w_1$	0.6	0.7	0.6316	0.5261	0.7339	0.7176	0.6316	0.5482	0.7339	0.7191	
$w_2$	0.2	0.1	0.1579	0.2093	0.0242	0.0532	0.1579	0.1992	0.0242	0.0553	
$w_3$	0.2	0.2	0.2105	0.2645	0.2419	0.2292	0.2105	0.2526	0.2419	0.2256	
Distância Euclidiana			0.0537	0.0985	0.0930	0.0579	0.0537	0.0738	0.0930	0.0549	

		Funções valor parâmetros desconhecidos									
		Restrições 1					Restrições 1+2				
pesos TRUE		Nelson		Amstore			Nelson		Amstore		
		Nelson	Amstore	PL	centróide	PL	centróide	PL	centróide	PL	centróide
$w_1$	0.6	0.7	0.5769	0.5486	0.7018	0.6891	0.5769	0.5671	0.7018	0.7289	
$w_2$	0.2	0.1	0.1923	0.2059	0.0861	0.0613	0.1923	0.1932	0.0861	0.0630	
$w_3$	0.2	0.2	0.2308	0.2455	0.2121	0.2495	0.2308	0.2389	0.2121	0.2082	
Distância Euclidiana			0.0392	0.0689	0.0185	0.0638	0.0392	0.0514	0.0185	0.0477	

Tabela 6.7: Comparação dos pesos PL e dos pesos centróide.

A Tabela 6.8 mostra os resultados considerando a aproximação dos parâmetros centrais, usando valores dos parâmetros PL e valores dos parâmetros centróide. Nesta tabela é possível ver quais alternativas são melhores do que o compromisso para Nelson, para Amstore e para ambos, quais das alternativas que são melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso são eficientes, qual alternativa maximiza a soma dos valores e qual alternativa maximiza a PoP mínima. Os resultados apresentados são os obtidos sem usar o processo de forma interactiva.

### Apenas pesos incertos (valores conhecidos)

Considerando as restrições relativas à sequência de propostas, e usando os pesos PL, entre as alternativas que são eficientes e melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso, a alternativa 39 é a que maximiza a soma dos valores e também a PoP mínima. As alternativas 27, 28 e 37, que na realidade são melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso, não são indicadas como sendo melhores para ambas as partes. Verifica-se o oposto com a alternativa 41. Usando os pesos centróide, a alternativa 25 é a que maximiza a soma dos valores, e a alternativa 38 é a que maximiza a PoP

mínima. Note-se que a alternativa 25 é, na realidade, uma das alternativas que maximiza a soma dos valores, mas não é melhor para Nelson do que a solução de compromisso, e provavelmente Nelson não aceitará esta alternativa. Se isto acontecer é necessário incluir a restrição  $v^N(x^{(25)}) < v^N(x^{(44)})$  e determinar um novo centróide. Com o novo centróide, as alternativas 28, 34 e 38-41 são indicadas como sendo melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso. Entre estas alternativas, a alternativa 39 é indicada como maximizando a soma dos valores e a PoP mínima.

Considerando as restrições relativas à sequência de propostas e à equivalência de alternativas, e considerando os pesos PL, os resultados são exactamente os mesmos. Não é surpreendente que se obtenham os mesmos resultados, uma vez que continuamos a usar os valores verdadeiros e as restrições relativamente à equivalência de alternativas são baseadas em alternativas que têm o mesmo valor (com base em pesos verdadeiros, que são próximos dos que obtemos do modelo, e em valores verdadeiros), e não incluímos a folga,  $\Delta^k$ , nas restrições de equivalência. Considerando os pesos centróide os resultados são exactamente os mesmos apesar dos pesos obtidos serem ligeiramente diferentes. As distâncias Euclidianas são inferiores considerando os dois tipos de restrições

Valores conhecidos				
Alternativas:	Restrições 1		Restrições 1+2	
	PL	centróide	PL	centróide
Melhores para Nelson do que o compromisso	38-42, 45-56, 58-70	25-28, 34-35, 37-42, 45-56, 58-70	38-42, 45-56, 58-70	25-28, 34-35, 37-42, 45-56, 58-70
Melhores para Amstore do que o compromisso	1-34, 36-41, 43	1-34, 36-41, 43	1-34, 36-41, 43	1-34, 36-41, 43
Melhores para ambos do que o compromisso	38-41	25-28, 34 37-41	38-41	25-28, 34 37-41
Não eficientes	nenhuma	34 e 37	nenhuma	34 e 37
Melhor considerando a soma	39	25	39	25
Melhor considerando o PoP	39	38	39	38

Funções valor parâmetros desconhecidos				
Alternativas:	Restrições 1		Restrições 1+2	
	PL	centróide	PL	centróide
Melhores para Nelson do que o compromisso	24-28, 37-42, 45-70	25-28, 35, 37-42, 45-56, 58-70	24-28, 37-42, 45-70	25-28, 35, 37-42, 45-56, 58-70
Melhores para Amstore do que o compromisso	1-34, 36-38, 43	1-34, 36-40, 43	1-34, 36-38, 43	1-41, 43
Melhores para ambos do que o compromisso	24-28, 37-38	27-28, 37-40	24-28, 37-38	25-28, 35, 37-41
Não eficientes	37 e 38	37	37 e 38	35, 37 and 38
Melhor considerando a soma	24	25	24	25 e 26
Melhor considerando o PoP	26	27	26	28

Tabela 6.8: Resultados da Aproximação dos Parâmetros Centrais.

### Pesos incertos e função de valor com parâmetros desconhecidos

Na figura 6.6 é possível comparar os valores verdadeiros, os valores PL e os valores centróide, para Nelson e Amstore, considerando as restrições relativas à sequência de alternativas. Como é possível ver na figura, as funções de valor centróide são mais próximas das funções de valor verdadeiras do que a funções de valor PL (passa-se o oposto para os pesos). Note-se que, mesmo não impondo a concavidade das funções de valor, as funções de valor centróide aproximam-se bastante da concavidade, o mesmo não acontecendo para as funções de valor PL. A forma das funções de valor centróide não depende verdadeiramente

do valor de  $c$ . Considerando outro valor para  $c$  (por exemplo,  $c = 20$ ) verificou-se que as funções de valor centróide são muito semelhantes às obtidas considerando  $c = 5$ .

Considerando as restrições relativas à sequência de alternativas, e usando os pesos e valores PL, a alternativa 24 é a que maximiza a soma dos valores, e a alternativa 26 é a que maximiza a PoP mínima. Note-se que Nelson não deverá aceitar estas alternativas uma vez que têm para ele valor inferior à da solução de compromisso. É necessário resolver novamente o problema linear e inferir novos pesos e valores, incluindo estas duas restrições adicionais. Inferindo os pesos e os valores com as duas novas restrições, a alternativa 38 é a única apontada como sendo melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso. Usando os pesos e os valores centróide, a alternativa 25 é a que maximiza a soma dos valores, e a alternativa 27 a que maximiza a PoP mínima. Note-se que a alternativa 25 não é melhor para o Nelson do que a solução de compromisso, e poderá ser necessário usar o processo de forma interactiva.

Considerando as restrições do tipo (6.3) juntamente com as restrições do tipo (6.4) os valores são muito semelhantes aos obtidos considerando apenas restrições do tipo (6.3).

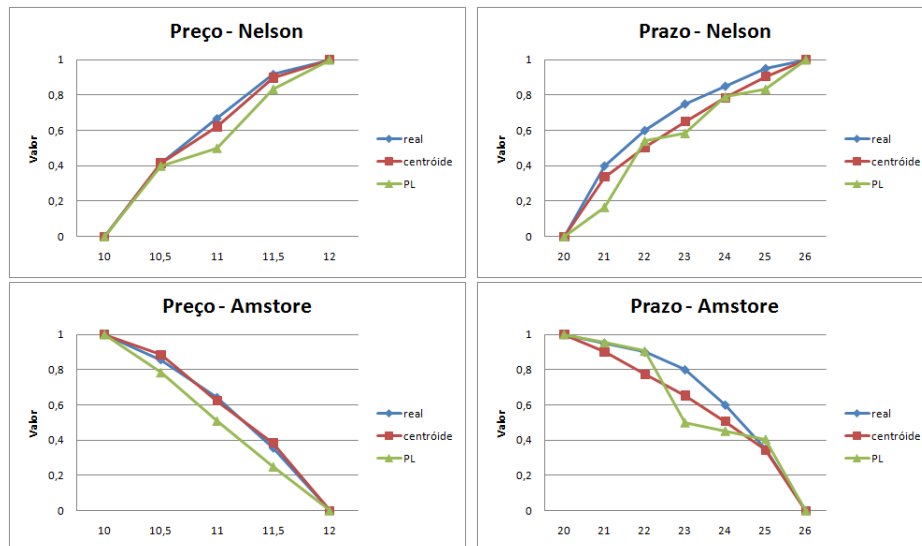


Figura 6.6: Comparação dos valores verdadeiros, dos valores PL e dos valores centróide: restrições relativas à sequência de propostas.

### Alguns comentários

Considerando valores conhecidos, foi sempre possível aconselhar os negociadores com uma alternativa eficiente, melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso. No entanto, em alguns casos essa alternativa não foi encontrada directamente, e foi necessário usar o processo de forma interactiva e incluir novas restrições no problema depois das primeiras propostas serem rejeitadas pelos negociadores. Nesses casos a informação inicialmente disponível não foi suficiente e foi necessário adquirir informação

adicional interagindo com os negociadores. Os resultados considerando os pesos centróide e os pesos PL não são muito diferentes, e usar as restrições do tipo (6.3) ou do tipo (6.3) juntamente com (6.4) conduz exactamente aos mesmos resultados. Os resultados não são muito diferentes considerando os dois tipos de informação incompleta. Em todos os casos, e inferindo os vectores resolvendo os PLs, o conjunto das alternativas recomendadas como sendo melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso não incluiu todas as alternativas realmente melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso. Isto nunca aconteceu considerando os vectores centróide. Os resultados são muito semelhantes considerando as restrições do tipo (6.3) e as restrições do tipo (6.3) juntamente com as restrições do tipo (6.4). Tanto resolvendo os PLs como aproximando os centróides, existem casos em que alternativas que na realidade são eficientes são apontadas como não sendo eficientes. O oposto também aconteceu. Os valores centróide parecem ser mais próximos dos parâmetros verdadeiros do que os valores PL. Isto não é realmente surpreendente, uma vez que o PL otimiza apenas a folga mínima, ignorando as folgas das restantes restrições.

#### 6.4.6 Resultados usando a Aproximação do Domínio

A nossa implementação da aproximação do domínio é baseada numa simulação, na qual se gera de forma aleatória um grande número de instâncias relativas aos valores dos parâmetros dos dois negociadores, satisfazendo todas as restrições. Nas nossas experiências, utilizámos os mesmos 5000 vectores de parâmetros admissíveis gerados na Subsecção 6.4.5. Para cada vector, determinámos quais alternativas são melhores do que a solução de compromisso para ambos os negociadores, quais alternativas são eficientes e qual alternativa é óptima de acordo com cada método de mediação. Considerámos os dois tipos de informação incompleta e as restrições do tipo (6.3) e (6.4). Utilizar uma distribuição uniforme para gerar vectores dos parâmetros nas simulações, permite que os volumes (relativos) possam ser interpretados como probabilidades, se assumirmos vectores equiprováveis. Em todos os casos, começámos por eliminar não apenas as alternativas para as quais a probabilidade de ser melhor do que a solução de compromisso para ambas as partes é igual a zero, mas também outras alternativas para as quais esta probabilidade é inferior a 0.05.

Na Tabela 6.9 é possível ver a probabilidade de cada alternativa ser melhor do que o compromisso para Nelson, para Amstore e para ambas as partes. Uma vez que os vectores dos parâmetros gerados para as duas partes são variáveis aleatórias independentes, a probabilidade de uma alternativa ser melhor do que o compromisso para ambas as partes é igual ao produto das probabilidades das duas partes. A Tabela 6.10 mostra a probabilidade de cada alternativa ser eficiente. As Tabelas 6.11 e 6.12 referem-se à probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com o método da soma dos valores e à probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com o método PoP, respectivamente. Em todas estas tabelas apresentamos os resultados obtidos considerando as restrições do tipo (6.3) e os resultados obtidos considerando as restrições do tipo (6.3) juntamente com as restrições

do tipo (6.4), e os dois tipos de informação incompleta. Os espaços em branco nestas tabelas correspondem a alternativas com probabilidade igual a zero.

Alternativas	Valores conhecidos						Funções valor parâmetros desconhecidos					
	Restrições 1			Restrições 1+2			Restrições 1			Restrições 1+2		
	Ambos	Nelson	Amstore	Ambos	Nelson	Amstore	Ambos	Nelson	Amstore	Ambos	Nelson	Amstore
9							0.0502	0.0502	1			
10	0.0840	0.0840	1				0.0866	0.0866	1			
11	0.1460	0.1460	1				0.1194	0.1194	1			
12	0.1808	0.1808	1				0.1536	0.1536	0.9994			
13	0.2168	0.2168	1				0.2002	0.2006	0.9984	0.0702	0.0702	1
14	0.2360	0.2360	1				0.2044	0.2396	0.8630	0.1108	0.1112	0.9970
21							0.0502	0.0570	0.8698			
22	0.1820	0.1820	1				0.1906	0.1906	1			
23	0.3198	0.3198	1	0.1310	0.1310	1	0.3320	0.3320	1	0.1786	0.1788	0.9998
24	0.4428	0.4428	1	0.3514	0.3514	1	0.4316	0.4316	0.9982	0.3564	0.3566	0.9996
25	0.5548	0.5548	1	0.5856	0.5856	1	0.5462	0.5486	0.9944	0.5512	0.5518	0.9988
26	0.6580	0.6580	1	0.7038	0.7038	1	0.6376	0.6500	0.9834	0.7154	0.7206	0.9920
27	0.7678	0.7678	1	0.8268	0.8268	1	0.6954	0.7376	0.9462	0.8192	0.8344	0.9812
28	0.8272	0.8292	0.9980	0.8552	0.8552	1	0.5272	0.7928	0.6664	0.8058	0.9004	0.8934
33	0.3358	0.3358	1	0.2208	0.2208	1	0.1246	0.1518	0.8140	0.1204	0.1224	0.9842
34	0.7172	0.7172	1	0.4534	0.4534	1	0.2618	0.4556	0.5752	0.3624	0.4082	0.8800
35	0.2396	0.8758	0.2746	0.2254	0.6408	0.3480	0.1774	0.6722	0.2648	0.2762	0.6290	0.4428
36	0.3512	0.3512	1	0.2422	0.2422	1	0.3774	0.3962	0.9612	0.3272	0.3370	0.9710
37	0.7076	0.7076	1	0.8506	0.8506	1	0.5946	0.6510	0.9192	0.6448	0.6790	0.9478
38	0.9870	0.9870	1	1	1	1	0.6552	0.8130	0.8092	0.7872	0.8742	0.9018
39	1	1	1	1	1	1	0.6158	0.9286	0.6640	0.8032	0.9730	0.8256
40	1	1	1	1	1	1	0.4696	0.9876	0.4750	0.7026	0.9968	0.7044
41	0.6992	1	0.6992	0.6490	1	0.6490	0.3142	1	0.3142	0.5064	1	0.5056
42							0.1470	1	0.1470	0.1806	1	0.1806
50							0.1046	0.8544	0.1196	0.0670	0.9490	0.0690

Tabela 6.9: Probabilidade de cada alternativa ser melhor do que a solução de compromisso (não mostrando as alternativas para as quais a probabilidade de ser melhor, para ambas as partes, do que a solução de compromisso é inferior a 0.05).

Alternativas	Valores conhecidos		Funções valor parâmetros desconhecidos	
	Restrições 1	Restrições 1+2	Restrições 1	Restrições 1+2
	9			0.6202
10	0.9294		0.4838	
11	0.8788		0.3624	
12	0.6178		0.2596	
13			0.1708	0.2484
14			0.0570	0.0928
21			0.0308	
22	0.3216		0.6372	
23	0.9128	0.9972	0.8662	0.8636
24	0.9954	1	0.9028	0.9280
25	0.9998	1	0.9156	0.9638
26	0.9964	1	0.9006	0.9550
27	0.9580	0.9724	0.8432	0.9140
28	0.0044		0.5116	0.6636
33	0.0682	0.0100	0.0718	0.0294
34	0.0036		0.0640	0.0296
35			0.0178	0.0062
36			0.1610	0.1440
37	0.3108	0.5592	0.3372	0.3168
38	0.9954	1	0.4574	0.4484
39	0.9998	1	0.5874	0.6256
40	1	1	0.6310	0.7890
41	0.9998	1	0.6072	0.8728
42			0.3408	0.5834
50			0.2002	0.1122

Tabela 6.10: Probabilidade de cada alternativa ser eficiente.

Alternativas	Valores conhecidos		Funções valor parâmetros desconhecidos	
	Restrições 1	Restrições 1+2	Restrições 1	Restrições 1+2
9			0.0011	
10			0.0004	
11			0.0032	
12			0.0045	
13			0.0055	0.0077
14			0.0008	0.0028
21			0.0019	
22			0.0078	
23			0.0759	0.0238
24			0.0880	0.0598
25	0.5548	0.5856	0.1474	0.1200
26	0.0528	0.0330	0.1695	0.2240
27	0.0038		0.1703	0.2583
28			0.0250	0.0413
33	0.0024		0.0081	0.0014
34			0.0146	0.0020
35			0.0028	
36			0.0066	0.0039
37			0.0562	0.0563
38			0.0566	0.0572
39	0.3862	0.3814	0.0626	0.0620
40			0.0454	0.0448
41			0.0342	0.0336
42			0.0023	0.0004
50			0.0091	0.0006

Tabela 6.11: Probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com o método da soma dos valores.

Alternativas	Valores conhecidos		Funções valor parâmetros desconhecidos	
	Restrições 1	Restrições 1+2	Restrições 1	Restrições 1+2
13			0.0002	
21			0.0011	
25			0.0206	0.0041
26	0.0094		0.0882	0.0163
27	0.1064	0.0084	0.2482	0.1392
28			0.1700	0.3067
33			0.0070	0.0002
34	0.0004		0.0136	0.0028
35			0.0042	0.0008
36			0.0144	0.0110
37	0.0028		0.0748	0.0556
38	0.2258	0.1890	0.1067	0.1260
39	0.4672	0.6902	0.1028	0.1647
40	0.1880	0.1124	0.799	0.1160
41			0.0542	0.0560
42			0.0115	0.0006
50			0.0025	

Tabela 6.12: Probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com o método PoP (compromisso como referência).

### Apenas pesos incertos (valores conhecidos)

Considerando as restrições relativas à sequência de propostas, e eliminado as alternativas com probabilidade inferior a 0.05 de serem melhores, para ambas as partes, do que a solução de compromisso, reduzimos o conjunto inicial para 21 alternativas, ou seja, 30% do número inicial de alternativas. O conjunto das alternativas não eliminadas é muito semelhante ao obtido usando a aproximação dos parâmetros extremos. Relembremos que as alternativas que na realidade são melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso são as alternativas 27, 28, 37, 38, 39 e 40. Todas estas alternativas apresentam probabilidades elevadas (superiores a 0.70). Considerando o método de maximizar a soma dos valores, as duas alternativas com probabilidades mais elevadas são a alternativa 25 (com probabilidade igual a 0.5548) e a alternativa 39 (com probabilidade igual a 0.3862). Relembremos que estas duas alternativas são as alternativas que na realidade maximizam a soma dos valores. Para a alternativa 39, a probabilidade de ser melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso é igual a 1 e a probabilidade de ser eficiente é igual a 0.9998. A probabilidade da alternativa 25 ser eficiente é também igual a 0.9998, mas apenas em 55.48% dos casos esta alternativa é melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso. Consideramos que, neste caso, a alternativa 39 é a melhor opção para o mediador propor aos negociadores. Considerando o método de maximizar a PoP mínima, a alternativa 39 é a que apresenta probabilidade mais elevada (0.4672). Também considerando o método de maximizar a PoP mínima, o mediador deverá sugerir a alternativa 39. Note-se, no entanto, que a alternativa que na realidade maximiza a PoP mínima é a alternativa 38, que apresenta aqui uma probabilidade igual a 0.2258. A verdadeira PoP mínima da alternativa 39 é igual a 0.54 e o da alternativa 38 é igual a 0.64.

Considerando as restrições do tipo (6.3) juntamente com as restrições do tipo (6.4), é possível reter 15 alternativas, ou seja, cerca de 22% das alternativas. Todas as alternativas que, na realidade, são melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso apresentam probabilidades elevadas (acima de 0.82). As alternativas que na realidade são melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso são as que apresentam probabilidades mais elevadas, o que é uma melhoria nos resultados obtidos quando se consideram apenas as restrições relativas à sequência de propostas. Considerando o método de maximizar a soma dos valores, as duas alternativas com probabilidades mais elevadas são as alternativas 25 (com probabilidade igual a 0.5856) e 39 (com probabilidade igual a 0.3814). Considerando o método de maximizar a PoP mínima, a alternativa 39 é a que apresenta probabilidade mais elevada (0.6902). A verdadeira melhor alternativa considerando este método, alternativa 38, apresenta uma probabilidade igual a 0.1890. Mais uma vez consideramos que, dados estes resultados, o mediador deve sugerir a alternativa 39.



### Pesos incertos e função de valor com parâmetros desconhecidos

Considerando apenas as restrições relativas à sequência de propostas, o conjunto de alternativas é reduzido para 25 alternativas (comparando com as 21 alternativas considerando valores conhecidos). As probabilidades das alternativas que na realidade são melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso, variam entre 0.4696 e 0.6954. Existem alternativas apontadas como sendo melhores do que a solução de compromisso para ambas as partes que não apareciam quando se consideraram os valores conhecidos, no entanto estas alternativas têm probabilidades baixas. Entre as 25 alternativas com probabilidade positiva de serem as melhores de acordo com a soma dos valores (8 das quais com probabilidade superior a 0.05), as alternativas 25, 26 e 27 são as que apresentam probabilidades mais elevadas (alternativa 25 com probabilidade igual a 0.1474, alternativa 26 com probabilidade igual a 0.1695 e alternativa 27 com probabilidade igual a 0.1703). As probabilidades destas alternativas serem melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso são iguais a 0.5462, 0.6376 e 0.6954, respectivamente. As probabilidades de serem eficientes são iguais a 0.9156, 0.9006 e 0.8432, respectivamente. Relembremos que todas estas alternativas tem probabilidade positiva de maximizar a soma dos valores considerando valores conhecidos, no entanto as probabilidades são agora bastante inferiores. As alternativas 25, 26 e 27 são eficientes, mas apenas a alternativa 27 é melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso. Se o mediador sugerir estas três alternativas, provavelmente os negociadores concordarão em escolher a alternativa 27 uma vez que é a única que é melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso. Note-se que a alternativa 39, apontada como sendo a melhor considerando valores conhecidos, tem neste caso uma probabilidade bastante inferior (igual a 0.0626). Existem 17 alternativas que podem maximizar a PoP mínima (8 das quais com probabilidade superior a 0.05). Entre estas alternativas, a alternativa 27 é a que apresenta probabilidade mais elevada (igual a 0.2482). Esta alternativa também apresentou probabilidade positiva quando se consideraram valores conhecidos.

Considerando as restrições relativas à sequência de propostas e à equivalência de alternativas, existem 19 alternativas com probabilidades positivas de serem melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso (comparando com as 15 alternativas considerando valores conhecidos). As probabilidades das alternativas 27-28 e 37-40 serem melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso, variam entre 0.6448 e 0.8192. Se o objectivo é maximizar a soma dos valores, existem 18 alternativas com probabilidades positivas (7 delas com probabilidade superior a 0.05). As alternativas com probabilidades mais elevadas são as alternativas 26 e 27 (com probabilidades iguais a 0.2240 e 0.2583, respectivamente). Note-se que a alternativa 27 tem probabilidade igual a zero de maximizar a soma dos valores, considerando os valores conhecidos. A alternativa 26 tem probabilidade igual a 0.7154 de ser melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso, e probabilidade igual a 0.9550 de ser eficiente. As probabilidades correspondentes para a alternativa 27 são 0.8192 e 0.9140, respectivamente. A alternativa 28 é a que

tem maior probabilidade de maximizar a PoP mínima (com probabilidade igual a 0.3067), entre as 14 alternativas com probabilidade positiva (6 das quais com probabilidades superiores a 0.05). Considerando valores conhecidos a alternativa 28 tem probabilidade igual a zero de maximizar a PoP mínima. A probabilidade da alternativa 28 ser melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso é igual a 0.8058 e a probabilidade de ser eficiente é igual a 0.6636. Na realidade esta alternativa é melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso, mas não é eficiente. As alternativas 27, 38, 39 e 40 também aparecem com elevadas probabilidades de maximizar a PoP mínima.

### Alguns comentários

Considerando a aproximação do domínio, os resultados são muito diferentes de acordo com o tipo de informação incompleta utilizada. Com valores conhecidos, foi sempre possível aconselhar os negociadores com uma alternativa eficiente melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso. Considerando funções de valor com parâmetros desconhecidos, obviamente os resultados não são tão bons como os obtidos considerando valores conhecidos. Pode acontecer que a alternativa sugerida não seja eficiente, ou que o conjunto das alternativas sugeridas contenha alternativas que não sejam melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso. Usando os dois tipos de restrições ao mesmo tempo, os resultados melhoram, por exemplo, minimizando o número de alternativas sugeridas, mas não de forma substancial. Em todos os casos, os conjuntos das alternativas retidas são muito semelhantes considerando a aproximação dos parâmetros extremos e a aproximação do domínio. No entanto, com a aproximação do domínio é sempre possível recomendar apenas uma alternativa (ou um pequeno conjunto de alternativas), o que não acontece com a aproximação dos parâmetros extremos. Se um, ou ambos, os negociadores não concordarem com a alternativa sugerida é possível incluir novas restrições e determinar novamente as probabilidades.

#### 6.4.7 Comparação das recomendações fornecidas pelas diferentes aproximações

Nas Tabelas 6.13 e 6.14 é possível comparar os resultados das três aproximações considerando valores conhecidos e considerando funções de valor com parâmetros desconhecidos, respectivamente, usando as restrições do tipo (6.3) juntamente com as restrições do tipo (6.4). Escolhemos apresentar os resultados usando os dois tipos de restrições ao mesmo tempo uma vez que os resultados são melhores do que os obtidos considerando apenas restrições relativas à sequência de propostas. Os resultados apresentados nas tabelas são os obtidos sem usar as aproximações de forma interactiva.

Considerando valores conhecidos, com todas as aproximações, o mediador deverá recomendar a alternativa 39. Com a aproximação dos parâmetros centrais, e com os pesos centróide, é possível chegar a esta conclusão depois de usar o processo interactivamente. A alternativa 39 é na realidade eficiente e melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso.

Considerando funções de valor com parâmetros desconhecidos, e usando a aproximação dos parâmetros extremos, apenas foi possível recomendar um conjunto de 15 alternativas que podem ser melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso, podem ser eficientes e podem maximizar a soma dos valores. Considerando a aproximação dos parâmetros centrais, e resolvendo os PLs é possível recomendar a alternativa 38, depois de usar o processo interactivamente, tanto no método de maximizar a soma dos valores como no método de maximizar a PoP mínima. Esta alternativa é na realidade eficiente e melhor para ambas as partes do que a solução de compromisso. Usando os pesos e valores centróide se o objectivo é maximizar a soma dos valores, o mediador deverá sugerir as alternativas 38, 39 e 40. Se o objectivo é maximizar a PoP mínima o mediador deverá sugerir a alternativa 39, depois de usar o processo interactivamente. Todas estas alternativas são, na realidade, eficientes e melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso. Considerando a aproximação do domínio, se o objectivo é maximizar a soma dos valores o mediador deverá sugerir as alternativas 26 e 27. Ambas as alternativas são eficientes, mas a alternativa 26 não é melhor para Nelson do que a solução de compromisso. Se o objectivo é maximizar a PoP mínima o mediador deverá sugerir a alternativa 28 que, na realidade, não é eficiente.

Conceito / Aproximação	Extremo	Central	Domínio
Comparação com o ponto de referência no espaço dos valores	1a. Identificar as alternativas que são certamente melhores do que o compromisso para ambos os negociadores: <b>alternativa 39</b> 1b. Eliminar as alternativas que são certamente piores do que o compromisso para um negociador: <b>alternativas 1-11, 15-21, 29-32, 43-49, 51-70</b>	1'. Identificar as alternativas que são melhores do que o compromisso para ambos os negociadores: <b>PL - alternativas 38-41</b> <b>centróide - alternativas 25-28, 34, 37-41</b>	1". Identificar as alternativas com probabilidade superior a 50% de serem melhores do que o compromisso para ambas as partes: <b>alternativas 25-28, 37-41</b>
Eficiência de Pareto	2a. Identificar as alternativas que são certamente eficientes de Pareto: <b>nenhuma</b> 2b. Identificar as alternativas que são certamente não eficientes de Pareto: <b>alternativas 13, 14, 34, 35, 36, 50</b>	2'. Identificar as alternativas que são eficientes de Pareto: <b>PL - alternativas 38-41</b> <b>centróide - alternativas 25-28, 38-41</b>	2". Determinar a probabilidade de cada alternativa ser eficiente de Pareto: <b>alternativas 25-26, 38 - 41 (1)</b> <b>alternativa 27 (0.9724), alternativa 37 (0.5592)</b>
Alternativas óptimas usando critérios de mediação	3a. Identificar as alternativas que são certamente óptimas para a soma dos valores: <b>nenhuma</b> 3b. Identificar as alternativas que podem ser óptimas para a soma dos valores: <b>alternativas 12, 22-28, 33, 37-42</b>	3'. Identificar as alternativas que são óptimas para o critério de mediação: <b>PL soma, PL PoP - alternativa 39</b> <b>centróide soma - alternativa 25</b> <b>centróide PoP - alternativa 38</b>	3". Determinar a probabilidade de cada alternativa ser óptima para o critério de mediação: <b>soma - alternativas 25 (0.5856) e 39 (0.3814)</b> <b>PoP - alternativa 39 (0.6902)</b>
Recomendação do mediador	<b>alternativa 39</b>	<b>PL soma, PL PoP - alternativa 39</b> <b>centróide soma - alternativa 25</b> <b>centróide PoP - alternativa 38</b>	<b>soma e PoP - alternativa 39</b>

Tabela 6.13: Comparação das três aproximações considerando valores conhecidos (mas considerando pesos desconhecidos) e usando as restrições relativas à sequência de propostas juntamente com as restrições relativas à equivalência de alternativas.

Conceito / Aproximação	Extremo	Central	Domínio
Comparação com o ponto de referência no espaço dos valores	1a. Identificar as alternativas que são certamente melhores do que o compromisso para ambos os negociadores: <b>nenhuma</b> 1b. Eliminar as alternativas que são certamente piores do que o compromisso para um negociador: <b>alternativas 1-8, 15-20, 29-32, 43, 45-49, 51-70</b>	1'. Identificar as alternativas que são melhores do que o compromisso para ambos os negociadores: <b>PL - alternativas 24-28, 37-38</b> <b>centróide - alternativas 25-28, 35, 37-41</b>	1". Identificar as alternativas com probabilidade superior a 50% de serem melhores do que o compromisso para ambas as partes: <b>alternativas 25-28, 37-41</b>
Eficiência de Pareto	2a. Identificar as alternativas que são certamente eficientes de Pareto: <b>nenhuma</b> 2b. Identificar as alternativas que são certamente não eficientes de Pareto: <b>nenhuma</b>	2'. Identificar as alternativas que são eficientes de Pareto: <b>PL - alternativas 24-28</b> <b>centróide - alternativas 25-28, 39-41</b>	2". Determinar a probabilidade de cada alternativa ser eficiente de Pareto: <b>alternativas 25 (0.9638), 26 (0.9550), 27 (0.9140), 28 (0.6636), 39 (0.6256), 40 (0.7890), 41 (0.8728)</b>
Alternativas ótimas usando critérios de mediação	3a. Identificar as alternativas que são certamente ótimas para a soma dos valores: <b>nenhuma</b> 3b. Identificar as alternativas que podem ser ótimas para a soma dos valores: <b>alternativas 9-14, 21-28, 33-42, 50</b>	3'. Identificar as alternativas que são ótimas para o critério de mediação: <b>PL soma - alternativa 24, PL PoP - alternativa 26</b> <b>centróide soma - alternativa 25 e alternativa 26</b> <b>centróide PoP - alternativa 28</b>	3". Determinar a probabilidade de cada alternativa ser ótima para o critério de mediação: <b>soma - alternativas 26 (0.2240) e 27 (0.2583)</b> <b>PoP - alternativa 28 (0.3067)</b>
Recomendação do mediador	<b>Não conclusivo</b>	<b>PL soma - alternativa 24, PL PoP - alternativa 26</b> <b>centróide soma - alternativa 25 ou alternativa 26</b> <b>centróide PoP - alternativa 28</b>	<b>soma - alternativa 26 ou alternativa 27</b> <b>PoP - alternativa 28</b>

Tabela 6.14: Comparação das três aproximações considerando funções de valor com parâmetros desconhecidos (pesos e valores desconhecidos) e usando as restrições relativas à sequência de propostas juntamente com as restrições relativas à equivalência de alternativas.

## 6.5 Conclusões

Neste capítulo abordamos três formas de lidar com informação incompleta no contexto das negociações: a aproximação dos parâmetros extremos, a aproximação dos parâmetros centrais, e a aproximação do domínio. Analisamos como estas aproximações podem ser aplicadas a diferentes tipos de informação, sobre as preferências dos negociadores, que possam estar disponíveis. As aproximações apresentadas tanto podem ser utilizadas no caso em que um compromisso já tenha sido alcançado como no caso em que o compromisso não foi (ainda) alcançado.

As três aproximações que discutimos reflectem dois importantes *trade-offs* quando se lida com informação incompleta. O primeiro *trade-off*, que pode ser melhor ilustrado comparando a aproximação dos parâmetros extremos com a aproximação do domínio, pode ser rotulado de *ambiguidade versus falta de universalidade*. A aproximação do domínio gera apenas afirmações probabilísticas, que por vezes podem ser um pouco vagas e podem ser difíceis de interpretar, contrastando com as afirmações muito claras geradas pela aproximação dos parâmetros extremos. Se uma alternativa é certamente melhor do que outra alternativa de acordo com a aproximação dos parâmetros extremos, não há dúvidas de como as duas alternativas devem ser vistas, enquanto que a aproximação do domínio pode criar afirmações do tipo: “existem 55% de hipóteses de uma alternativa  $x^{(i)}$  ser melhor do que outra alternativa  $x^{(j)}$ ”. No entanto, a vantagem da aproximação dos parâmetros extremos em termos de baixa ambiguidade tem um preço: a aproximação do domínio é capaz de gerar afirmações (probabilísticas) sobre quaisquer duas alternativas enquanto que a aproximação dos parâmetros extremos pode ser incapaz de indicar se uma alternativa é certamente melhor do que outra alternativa ou vice-versa. A aproximação dos parâmetros

centrais supera este dilema. Esta aproximação origina apenas um único resultado, mas faz isto ignorando muita da informação que está disponível e foca-se apenas num dos muitos parâmetros de vectores possíveis. Desta forma, ilustra outro importante *trade-off* que pode ser rotulado de *riqueza de informação versus resultados únicos*. A Figura 6.7 ilustra esta relação. As duas dimensões representadas na Figura 6.7 representam *trade-offs* e ambas as extremidades dos eixos apresentam vantagens e desvantagens. Consequentemente, não existe nenhuma aproximação que seja claramente melhor do que as restantes e todas as aproximações têm forças particulares que as tornam adequadas para algumas situações. Defendemos uma integração das aproximações, que deve ser preferencialmente implementada através de um processo interactivo. O primeiro passo de tal processo consiste numa pré-selecção das alternativas baseada na aproximação dos parâmetros extremos. Dependendo do objectivo da análise, a escolha futura, entre as alternativas restantes, pode ser baseada na aproximação dos parâmetros centrais para obter parâmetros específicos, ou na aproximação do domínio para melhor explorar a riqueza, mas potencialmente ambígua, da informação disponível.

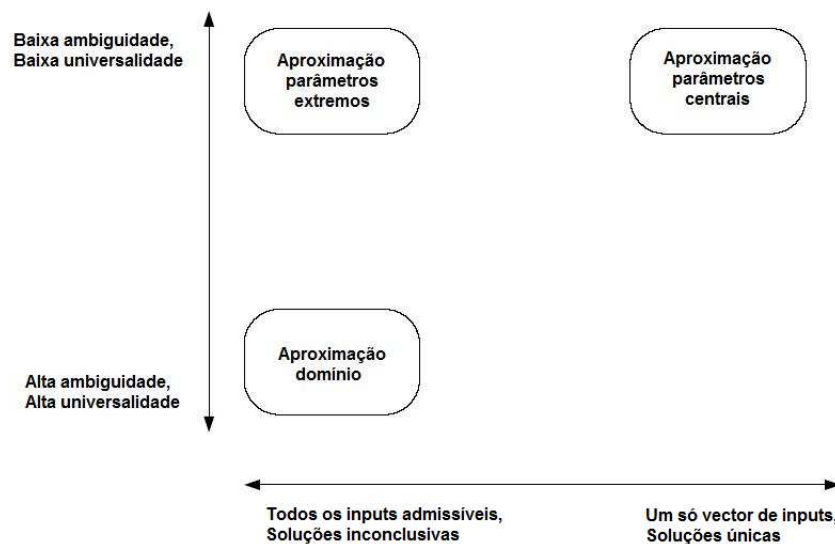


Figura 6.7: *Trade-offs* entre as aproximações para lidar com informação incompleta na negociação.

A integração das aproximações pode ser melhor alcançada usando simulação. Considerando os três tipos de aproximações, é possível notar que levar a cabo uma simulação Monte Carlo é suficiente para implementar todas elas. De facto, pode ser usada simulação Monte Carlo para determinar as probabilidades (domínios relativos) para diferentes condições, com elevada precisão. Precisão esta que pode ser tão elevada quanto se pretenda, uma vez que, quanto maior o número de iterações maior é a precisão. As condições com probabilidade igual a zero ou a um correspondem a condições que “certamente” não se

verificam ou a condições que “certamente” se verificam, respectivamente. Isto corresponde à aproximação dos parâmetros extremos. Por outro lado, determinando a média dos valores dos parâmetros gerados na simulação definirá uma boa aproximação do centróide dos conjuntos admissíveis. Usar estes centróides corresponde à aproximação dos parâmetros centrais.

Os estudos de simulação que realizámos para obter os resultados numéricos apresentados na Secção 6.4 fornecem informação sobre os efeitos da informação adicional. Por um lado, alguns resultados mostram que a informação que pode ser inferida através das escolhas feitas ao longo da negociação pode não ser suficiente para obter resultados confiáveis. Os resultados podem ser melhorados de forma substancial adicionando pelo menos algumas afirmações de preferência ou indiferença obtidas directamente dos negociadores. Por outro lado, apenas algumas dessas afirmações são suficientes para obter resultados que são muito próximos das verdadeiras preferências dos negociadores. Desta forma parece que não é necessário obter muita informação adicional dos negociadores.

As aproximações apresentadas podem ser usadas de forma interactiva. Se a alternativa proposta pelo mediador é aceite, a negociação termina com sucesso. No entanto, pode acontecer que a alternativa proposta pelo mediador não seja aceite por um dos negociadores, ou mesmo por ambos. Se um negociador afirmar que a solução proposta não é melhor do que o ponto de referência, então uma nova restrição pode ser acrescentada à definição do conjunto admissível do espaço do parâmetros. A análise pode ser repetida para encontrar uma nova solução.

A informação incompleta obtida dos negociadores nas aproximações sugeridas neste capítulo é bastante distinta da obtida no Capítulo 5. Relembremos que no Capítulo 5 é sugerida uma alternativa, ou um subconjunto de alternativas, com base na utilização de diferentes regras de decisão que usam informação ordinal relativamente aos pesos dos assuntos, ao valor de cada nível em cada assunto e à diferença de valor entre níveis consecutivos em cada assunto. Neste capítulo sugerimos três aproximações que utilizam informação obtida de forma implícita ou explícita por um mediador ao longo da negociação. O tipo de informação que o mediador pode fornecer aos negociadores também é distinta. Usando a aproximação dos parâmetros extremos o mediador poderá informar os negociadores de quais são as alternativas que podem ser eliminadas pois são certamente piores do que a solução de compromisso para pelo menos um dos negociadores, e de quais são as alternativas que são certamente melhores para ambos os negociadores, caso existam. Utilizar a aproximação dos parâmetros centrais é semelhante ao apresentado no Capítulo 5, uma vez que se usa uma aproximação para o valor dos parâmetros para sugerir alternativas. Com a aproximação do domínio o mediador é capaz de informar os negociadores do volume relativo do espaço dos parâmetros no qual cada alternativa é melhor do que a solução de compromisso para ambos os negociadores, é eficiente e maximiza o método de mediação, comparando com o volume de toda a região admissível.

As aproximações sugeridas neste capítulo foram aplicadas apenas a um caso com propósitos ilustrativos. Apesar de neste caso os resultados obtidos terem sido bastante interessante, num passo futuro será necessários fazer um estudo mais exaustivo. Será importante aplicar as aproximações a negociações reais, e ver até que ponto as alternativas sugeridas são facilmente aceites pelos negociadores e se realmente constituem uma melhoria relativamente à situação em que os mesmos se encontram. Além disso é necessário verificar se algumas das suposições que fizemos se verificam em negociações reais, nomeadamente verificar se realmente as propostas de ambas as partes são monótonas (ou seja, admitir que cada proposta feita por um negociador tem para ele valor inferior às propostas apresentadas anteriormente), e verificar se toda a informação obtida dos negociadores, quer implicitamente quer explicitamente, é consistente e reflecte as funções de valores reais de cada negociador.

Neste capítulo considerámos a forma de negociação integrativa, dança dos pacotes. No entanto poderá ser feito um trabalho análogo para a construção conjunta de um texto (rever Subsecção 4.2.1). Neste caso, uma possibilidade para apoio à negociação com informação incompleta é começar com uma má proposta e tentar melhora-la juntamente. Uma ideia poderá ser fazer algo similar ao método dos cartões (Pictet e Bollinger, 2005). No método dos cartões cada negociador, na sua vez, tem a possibilidade de melhorar a proposta em apenas um assunto, movendo esse assunto para o nível seguinte ou para o nível anterior. O procedimento termina quando o compromisso é alcançado. Imaginemos uma proposta má para ambas as partes. A questão que se pode colocar de forma alternada a cada uma das partes é: “Se pudesse melhorar apenas um assunto, qual assunto escolheria?”. Esta questão pode ser repetida até que se alcance um compromisso. Consideremos, por exemplo, um caso com  $n = 3$  assuntos e a proposta inicial  $x^{(0)} = (x_i, x_j, x_p)$ . Sem perda de generalidade, admitamos que, para o negociador  $k$  que vai fazer a escolha, todas as funções são a maximizar. Se, por exemplo, o negociador  $k$  decidir ir de  $x_j$  para  $x_{j+1}$  no segundo assunto, isto é, mover para a proposta  $x^{(1)} = (x_i, x_{j+1}, x_p)$ , então tem-se:

$$w_1^k v_1^k(x_{i+1}) + w_2^k v_2^k(x_j) + w_3^k v_3^k(x_p) < w_1^k v_1^k(x_i) + w_2^k v_2^k(x_{j+1}) + w_3^k v_3^k(x_p) \quad (6.21)$$

e

$$w_1^k v_1^k(x_i) + w_2^k v_2^k(x_j) + w_3^k v_3^k(x_{p+1}) < w_1^k v_1^k(x_i) + w_2^k v_2^k(x_{j+1}) + w_3^k v_3^k(x_p), \quad (6.22)$$

caso contrário o negociador teria escolhido outra alteração.

Outra ideia a investigar futuramente é considerar que o mediador apresenta um conjunto de alternativas, e os negociadores, um de cada vez, eliminam uma das alternativas. Desta forma, podem surgir restrições que levem à eliminação de outras alternativas. O processo poderá ser dado por terminado quando existir só uma alternativa sobre a mesa.

No Capítulo 7 vamos apresentar uma nova aproximação para lidar com a decisão em grupo com informação incompleta que de certa forma é semelhante à aproximação do domínio, uma vez que os decisores também são informados do volume relativo do espaço dos parâmetros no qual cada alternativa é melhor, comparando com o volume de toda a região admissível. Apesar das similaridades que possam existir entre as duas aproximações elas são distintas. Na aproximação apresentada no Capítulo 7 o tipo de informação incompleta utilizado é diferente do considerado neste capítulo e a agregação das preferências dos decisores não é feita usando diferentes métodos de mediação, como exposto neste capítulo.



# Decisão em Grupo com Informação Ordinal: Aproximação do Volume e da Dominância

---

## 7.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos uma aproximação para lidar com a decisão em grupo com informação incompleta. À semelhança do exposto no Capítulo 6, para o caso da negociação, vamos ver como a aproximação que apresentamos pode ser utilizada para sugerir uma alternativa, ou um pequeno subconjunto de alternativas. Ao contrário do exposto no Capítulo 5, relativamente à decisão em grupo, onde as preferências dos decisores foram agregadas utilizando conhecidos métodos de mediação, neste capítulo consideramos a utilização de uma função de valor aditiva da forma (4.12), apresentada no Capítulo 4 (rever Subsecção 4.3.3):

$$v^G(x^{(j)}) = \sum_{k=1}^p d_k \sum_{i=1}^n w_i^k v_i^k(x^{(j)}) = \sum_{k=1}^p d_k v^k(x^{(j)}), \quad j = 1, \dots, m$$

que pressupõe a utilização de pesos para os diferentes decisores. No entanto, os pesos dos decisores serão deixados sem restrições, ou apenas restringidos pelas restrições necessárias para prevenir que um elemento do grupo se torne um “ditador”. Isto elimina a necessidade de comparar quão importante é cada elemento do grupo, e favorece a obtenção de conclusões que são largamente aceites entre os elementos. Relativamente aos pesos dos critérios, mais uma vez consideramos que cada elemento do grupo será capaz de fornecer informação ordinal, isto é, uma ordenação desses pesos. Também consideramos que os valores atribuídos às alternativas possam não ser completamente conhecidos. Em tais casos, consideramos que cada elemento será capaz de fornecer uma ordenação do valor das alternativas em cada critério, e possivelmente também uma ordenação da diferença de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. O tipo de informação incompleta utilizado é assim semelhante ao utilizado no Capítulo 5.

A aproximação que propomos tem como objectivo verificar se existem alternativas óptimas ou quasi-óptimas para o grupo, e verificar se existem alternativas que são dominadas por outras, e desta forma podem ser eliminadas. À semelhança do sugerido na Aproximação do Domínio, apresentada no Capítulo 6 (ver Subsecção 6.3.3), para sermos capazes de

fornecer informação mais rica, propomos basear a análise nos volumes relativos do espaço dos parâmetros, que levam a determinadas conclusões, comparando com o volume de toda a região admissível. Como existem relações não lineares envolvidas, o cálculo do volume será aproximado usando simulação Monte Carlo, gerando um grande número de vectores consistente com a informação dada.

Este capítulo é estruturado da seguinte forma. Na Secção 7.2 apresentamos uma nova aproximação para lidar com o uso de informação incompleta em situações de decisão em grupo. Na Secção 7.3 apresentamos um exemplo ilustrativo. Terminamos na Secção 7.4 com algumas conclusões e algumas vias para investigação futura.

## 7.2 Aproximação do Volume e da Dominância

### 7.2.1 Caracterização dos pesos dos decisores

Seja  $D$  o conjunto de vectores de pesos aceitáveis para os elementos do grupo. Como já referido anteriormente, a avaliação dos pesos que reflectem a importância dos decisores, é uma das dificuldades associadas com o uso da função de valor aditiva, já que a escolha dos pesos que reflectem a importância dos decisores, requer comparações relativas à autoridade, experiência e especialidade dos elementos do grupo. Consideramos assim que a informação sobre os pesos que reflectem a importância dos elementos do grupo não é para ser eliciada, seguindo uma de duas possibilidades.

A primeira possibilidade é considerar que os pesos dos  $p$  elementos do grupo são completamente livres para variar:

$$D = \{(d_1, d_2, \dots, d_p) : d_1, d_2, \dots, d_p \geq 0, \sum_{k=1}^p d_k = 1\}. \quad (7.1)$$

A segunda possibilidade é limitar os pesos possíveis para os decisores de forma a que nenhum decisor tenha tanto peso que possa ser considerado um “ditador”. Por exemplo, num caso com  $p = 3$  decisores, alguém pode argumentar que  $d = (0.98; 0.01; 0.01)$  não deve ser um vector de pesos aceitável, uma vez que o primeiro decisor é muito mais importante do que os outros dois decisores, podendo ser considerado um “ditador”. No entanto, qual a melhor maneira de definir o que é um “ditador”?

De acordo com Arrow (1951), o decisor  $y$  é um ditador se  $x^{(j)} \succ_y x^{(l)}$  implicar que  $x^{(j)} \succ x^{(l)}$  (usamos a notação  $x^{(j)} \succ_y x^{(l)}$  para indicar que a alternativa  $x^{(j)}$  é preferida à alternativa  $x^{(l)}$ , para o decisor  $y$ , e a notação  $x^{(j)} \succ x^{(l)}$  para indicar que a alternativa  $x^{(j)}$  é preferida à alternativa  $x^{(l)}$ , para o grupo). Por outras palavras, o decisor  $y$  é um ditador se é suficiente que o decisor  $y$  diga que  $v^y(x^{(j)}) > v^y(x^{(l)})$  para implicar que  $v^G(x^{(j)}) > v^G(x^{(l)})$ , independentemente dos valores que os outros elementos do grupo atribuam às restantes alternativas. Note-se que, com a definição de ditador de Arrow, o grupo escolherá a alternativa  $x^{(j)}$ , mesmo que, para o ditador, a intensidade de preferência de  $x^{(j)}$  sobre  $x^{(l)}$  seja pequena. A maioria da literatura dos anos 70 (Keeney e Kirkwood, 1975; Keeney,

1976; Dyer e Sarin, 1979) segue de perto a definição de ditador de Arrow e considera um elemento do grupo como sendo ditador se as preferências dessa pessoa determinam as preferências do grupo, independentemente das preferências dos outros elementos do grupo.

No entanto, traduzir a ideia de ditador de Arrow para o modelo cardinal (4.12) origina alguns problemas. Consideremos que o primeiro decisor é um potencial ditador. Se  $d_1 = 1$  e  $d_2 = d_3 = \dots = d_p = 0$  então, trivialmente, a definição de ditador de Arrow verifica-se para o primeiro decisor. No entanto, se  $d_1 = 1 - \varepsilon$  a definição não se verifica para um valor positivo de  $\varepsilon$ , não interessa quão pequeno seja esse valor. Por exemplo, no primeiro exemplo apresentado na Tabela 7.1 são comparadas duas alternativas. Para qualquer  $\varepsilon > \varepsilon'$ , tem-se  $x^{(2)} \succ x^{(1)}$  para o grupo, apesar de  $x^{(1)} \succ_1 x^{(2)}$  para o primeiro decisor. De facto,  $v^G(x^{(1)}) - v^G(x^{(2)}) = (1 - \varepsilon)\varepsilon' - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 = \varepsilon' - \varepsilon\varepsilon' - \varepsilon < 0$ . Desta forma, quase nunca existirá um ditador sob esta definição, não interessa quão alto é o valor de  $d_1$ , desde que seja inferior a um. Seguindo a definição de Arrow, pode-se considerar que um ditador, no sentido estrito da palavra, apenas existirá se um elemento do grupo tiver peso igual a um. No entanto, a maioria de nós concordará que um decisor  $y$  com peso  $d_y = 0.99$ , por exemplo, pode ser considerado um “ditador”. Uma vez que a definição de ditador de Arrow não é um axioma muito útil no contexto abordado neste trabalho, pretendemos arranjar uma definição que permita eliminar situações em que o peso de um dos decisores é exageradamente elevado comparado com o peso dos outros decisores. O nosso objectivo não é de forma alguma substituir a definição de ditador de Arrow, mas apenas encontrar uma definição que se ajuste mais ao contexto deste trabalho. Utilizaremos a partir de agora a noção de ditador mesmo quando não nos referimos à definição de ditador de Arrow, admitindo no entanto que usar a noção de ditador para qualquer outra definição, que não seja a definição de Arrow, pode ser um abuso de linguagem.

	decisor 1	decisor 2	decisor 3		decisor 1	decisor 2	decisor 3
$x^{(1)}$	$v$	0	0	$x^{(1)}$	1	0.98	0.98
$x^{(2)}$	$v - \varepsilon'$	1	1	$x^{(2)}$	0	1	0.99
$d$	$1 - \varepsilon$	$\varepsilon/2$	$\varepsilon/2$	$x^{(3)}$	0	0.99	1
				$x^{(4)}$	0	0	0
				$d$	0.98	0.01	0.01

Tabela 7.1: Valor de cada alternativa para cada decisor e peso dos diferentes decisores: Exemplo 1 (esquerda) e Exemplo 2 (direita).

Outra opção é considerar que o decisor  $y$  é um ditador num conjunto particular de alternativas  $A$  se existirem  $x^{(j)}$  e  $x^{(l)} \in A$ , de tal forma que  $v^G(x^{(j)}) > v^G(x^{(l)})$  e  $v^t(x^{(j)}) \leq v^t(x^{(l)})$ , para todo o decisor  $t \neq y$ . Por outras palavras, o decisor  $y$  será um ditador se existirem duas alternativas  $x^{(j)}$  e  $x^{(l)}$  tal que  $x^{(j)}$  é considerada melhor pelo grupo apesar de todos os decisores, excepto o decisor  $y$ , preferirem  $x^{(l)}$ . No entanto, esta definição de ditador também não é satisfatória. Considere-se o segundo exemplo apresentado na Tabela 7.1. Neste exemplo, se a escolha do grupo for a alternativa  $x^{(1)}$ , que é a escolha

mais natural, isto fará com que o primeiro decisor seja um ditador. Sob esta definição, ditadura será comum mesmo em situações nas quais a maioria de nós considere que não existe um ditador.

Consideramos assim uma definição diferente de ditador, entre os dois casos extremos definidos anteriormente. Seja  $x^{(j)}$  uma alternativa com  $v^y(x^{(j)}) = 1$  e  $x^{(l)}$  uma alternativa com  $v^y(x^{(l)}) = 0$ . Consideramos que o decisor  $y$  é um ditador se  $v^G(x^{(j)}) > v^G(x^{(l)})$ . Como em particular, podemos ter  $v^t(x^{(j)}) = 0$  e  $v^t(x^{(l)}) = 1, \forall t \neq y, v^G(x^{(j)}) > v^G(x^{(l)})$  acontece se e só se  $d_y > 0.5$ . Por outras palavras, o decisor  $y$  é um ditador se é suficiente que o decisor  $y$  diga que  $v^y(x^{(j)}) = 1$  e  $v^y(x^{(l)}) = 0, x^{(l)} \neq x^{(j)}$  para implicar que  $v^G(x^{(j)}) > v^G(x^{(l)})$ , independentemente dos valores que os outros elementos do grupo dêem às outras alternativas. A definição de ditador por nós apresentada, apesar de ser útil no contexto do nosso problema, tem dois problemas. Uma vez que a definição apenas pode ser aplicada a duas alternativas, o ditador não consegue desta forma forçar as preferências para várias alternativas. Além disso, esta definição permite comportamento estratégico, uma vez que se o ditador prefere uma alternativa ainda mais do que a alternativa preferida no par, ele pode atribuir valor igual a um a ambas as alternativas. Apesar destas limitações, e como todas as definições que possamos considerar apresentam limitações, como uma alternativa a (7.1) iremos considerar:

$$D = \{(d_1, d_2, \dots, d_p) : 0.5 \geq d_1, d_2, \dots, d_p \geq 0, \sum_{k=1}^p d_k = 1\}. \quad (7.2)$$

## 7.2.2 Descrição da Aproximação

A aproximação que sugerimos combina elementos das aproximações baseadas no cálculo de volumes e elementos das aproximações baseadas em dominâncias. Consiste em explorar o espaço dos parâmetros definido pelas restrições apresentadas anteriormente (ver Subsecção 4.3.3 e Subsecção 7.2.1), restrições essas relativas aos pesos dos critérios e dos decisores e ao valor de cada alternativa em cada critério, para que se possa medir o volume relativo do conjunto admissível de parâmetros onde cada alternativa é a melhor, ou quase a melhor, comparando com o volume de toda a região admissível, bem como identificar alternativas dominadas.

Denotemos por  $S$  o conjunto admissível dos valores dos parâmetros relativamente à informação disponível:

$$S = W^1 \times M^1 \times W^2 \times M^2 \times \dots \times W^p \times M^p \times D, \quad (7.3)$$

onde  $W^k$  e  $M^k$  são os conjuntos admissíveis dos pesos dos critérios e dos valores, respectivamente, para o decisor  $k$  ( $k = 1, \dots, p$ ) (rever Subsecção 6.2.2), e  $D$  o conjunto admissível dos pesos dos decisores.

Seja  $Vol(S)$  o volume do conjunto  $S$  e  $Vol(S(\tilde{C}))$  o volume do subconjunto de  $S$  no qual a condição  $\tilde{C}$  se verifica. Para medir o volume relativo do espaço dos parâmetros onde cada alternativa  $x^{(j)}$  é a melhor, pode determinar-se:

$$\frac{Vol(S(v^G(x^{(j)}) \geq v^G(x^{(l)}), \forall x^{(l)} \in A))}{Vol(S)}. \quad (7.4)$$

É também possível considerar quasi-optimalidade (Dias e Clímaco, 2000a) em vez de optimalidade estrita, para destacar aquelas alternativas que estão sempre próximas das melhores em termos de diferença de valores. Para um dado vector de parâmetros, as alternativas quasi-óptimas são as melhores, ou as que não perdem para as melhores por uma diferença superior a uma especificada tolerância  $\epsilon > 0$ . O volume relativo de quasi-optimalidade para uma alternativa  $x^{(j)}$  é:

$$\frac{Vol(S(v^G(x^{(j)}) \geq v^G(x^{(l)}) - \epsilon, \forall x^{(l)} \in A))}{Vol(S)}. \quad (7.5)$$

A simulação Monte Carlo pode ser utilizada para obter aproximações para estes volumes, de forma análoga ao realizado nos métodos SMAA (Lahdelma et al., 2003). Dentro dos métodos SMAA o método SMAA-2 (Lahdelma e Salminen, 2001) foi concebido para situações de decisão em grupo com informação incompleta. No método SMAA-2 calcula-se a aceitabilidade de uma alternativa como um volume no espaço dos pesos, medindo a variedade das diferentes preferências que dão a cada alternativa as diferentes posições na ordenação. No método SMAA-2, e ao contrário do que consideramos neste capítulo, não se calcula um valor global para cada alternativa, não se consideram pesos para os diferentes decisores e admite-se que a função de valor é igual para todos os decisores.

Com as restrições fornecidas pelos decisores é possível, usando simulação Monte Carlo, determinar aproximadamente as alternativas óptimas ou quasi-óptimas, por exemplo, descobrindo que “a alternativa  $x^{(j)}$  é quasi-óptima, permitindo uma tolerância de  $\epsilon = 0.01$ , para 93% dos possíveis valores dos parâmetros”.

Enquanto que os volumes de optimalidade podem ser úteis para destacar as alternativas mais promissoras, as relações de dominância podem ser utilizadas para descartar alternativas pobres. Podemos dizer que os elementos do grupo concordam que a alternativa  $x^{(j)}$  domina a alternativa  $x^{(i)}$  se o valor de  $x^{(j)}$  é pelo menos tão bom como o valor de  $x^{(i)}$ , para todos os valores dos parâmetros admissíveis, e estritamente melhor para pelo menos um (por exemplo, Kim e Ahn, 1999). Kim e Ahn (1999) usam o conceito de dominância par a par e referem que este conceito é semelhante ao conceito de dominância<sup>1</sup> no caso da decisão individual. Seja  $m_{ij}^G$  o valor óptimo de:

$$\begin{aligned} & \max\{v^G(x^{(i)}) - v^G(x^{(j)})\} \\ & \text{s.a. } (w^1, V^1, w^2, V^2, \dots, w^p, V^p, d) \in S \end{aligned} \quad (7.6)$$

<sup>1</sup>Rever definição de dominância na Subsecção 2.4.2.

Quando  $m_{ij}^G \leq 0$ , não existe nenhuma combinação possível dos parâmetros que tornarão a alternativa  $x^{(i)}$  melhor do que  $x^{(j)}$ , logo, podemos dizer que a alternativa  $x^{(j)}$  domina  $x^{(i)}$  com respeito à informação disponível sobre as preferências dos decisores e sobre o peso dos mesmos (sendo a dominância estrita se  $m_{ji}^G > 0$ ). É também possível procurar por dominância potencial, que ocorre quando uma alternativa é melhor do que a outra para pelo menos um vector potencial de valores do parâmetros.

O problema de otimização (7.6) tem uma forma não linear. É possível, usando uma adequada mudança de variável, transformar o problema num problema linear. No entanto, para contornar a dificuldade associada com a determinação de dominância, sugerimos usar a aproximação do volume.

Sugerimos gerar de forma aleatória os valores do parâmetros, usando uma distribuição uniforme, e usar o procedimento seguinte:

**Passo 1** Considerar um dado número de iterações,  $n_{itr}$ , e colocar o contador  $cont = 1$ .

**Passo 2** Gerar  $w_i^k$ , para  $i = 1, \dots, n$  e  $k = 1, \dots, p$ .

**Passo 3** Gerar  $v_i^k(x_i^{(j)})$ , para  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, p$  e  $j = 1, \dots, m$ .

**Passo 4** Gerar  $d_k$ , para  $k = 1, \dots, p$ .

**Passo 5** Determinar  $v^k(x^{(j)})$ , para  $k = 1, \dots, p$  e  $j = 1, \dots, m$ , e  $v^G(x^{(j)})$ , para  $j = 1, \dots, m$ .

**Passo 6** Se  $cont = n_{itr}$  parar o procedimento, caso contrário, fazer  $cont := cont + 1$  e voltar ao Passo 2.

**Passo 7** Calcular a proporção de casos em que cada alternativa é a melhor ou não perde por uma diferença superior a  $\epsilon$ , e determinar quais as alternativas que são dominadas.

Mais uma vez, sugerimos usar o processo de Butler et al. (1997) para gerar os pesos dos critérios respeitando uma dada ordenação, de acordo com uma distribuição uniforme. Para gerar o vector relativo aos pesos correspondentes à importância dos decisores ( $d_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ ) também pode ser o processo de Butler et al. (1997). No caso em que um ditador não é permitido, como definido anteriormente, então é possível eliminar todos os vectores de pesos obtidos tais que o maior peso seja superior a 0.5. Se os decisores fornecerem informação ordinal sobre o valor de cada alternativa em cada critério ou se os decisores fornecerem informação ordinal sobre o valor de cada alternativa em cada critério e informação ordinal sobre a diferença de valor entre alternativas consecutivas em cada critério, os valores de cada alternativa em cada critério podem ser gerados usando o processo descrito na Secção 3.4.

## 7.3 Exemplo ilustrativo

### 7.3.1 Introdução

Nesta secção ilustramos a aproximação descrita na Secção 7.2 com base num exemplo, com o objectivo de mostrar como a aproximação pode ser utilizada e o tipo de resultados que é possível obter. Relativamente ao peso dos critérios e ao valor das alternativas, consideramos quatro diferentes possibilidades para a informação disponível, sendo em todas elas os pesos dos decisores indefinidos:

- (1) Os pesos dos critérios e os valores são precisamente conhecidos.
- (2) Ordenação dos pesos dos critérios com valores conhecidos.
- (3) Ordenação dos pesos dos critérios e ordenação dos valores para cada critério.
- (4) Ordenação dos pesos dos critérios e ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério.

Em cada uma das subsecções seguintes assumimos que a informação sobre os pesos dos critérios e sobre os valores pode ser completa ou incompleta, assumindo que apenas informação ordinal está disponível no último caso. As diferentes situações referem-se a diferentes combinações do que é conhecido de forma incompleta, permitindo-nos verificar quanto os resultados se degradam à medida que a informação se torna mais pobre. Isto permite-nos comparar os resultados quando são usados diferentes tipos de informação incompleta. Em todos os casos, à semelhança do exposto no Capítulo 6, gerámos 5000 vectores verificando as restrições impostas, para o cálculo aproximado do volume. Para determinar os resultados relativos à quasi-optimalidade usámos valores para a tolerância  $\epsilon$  iguais a 0.03, 0.05 e 0.1. Este número de vectores gerados e estes valores para a tolerância foram também utilizados, por exemplo, em Sarabando e Dias (2009a).

Como exemplo ilustrativo consideramos um problema usado como um caso de estudo em sala de aula para um curso em Decisão em Grupo e Negociação. Refere-se a uma situação hipotética na qual uma companhia pretende realizar um *workshop* de três dias sobre a sua estratégia para o futuro. Este *workshop* deverá realizar-se numa capital de distrito em Portugal. As alternativas foram avaliadas em  $n = 5$  critérios: condições de alojamento e de trabalho, conveniência de transporte para os elementos da companhia, conveniência de transporte para os convidados, actividades culturais e actividades ao ar livre. As  $m = 20$  alternativas (Aveiro, Beja, Braga, Bragança, Castelo Branco, Coimbra, Évora, Faro, Funchal, Guarda, Leiria, Lisboa, Ponta Delgada, Portalegre, Porto, Santarém, Setúbal, Viana de Castelo, Vila Real e Viseu) foram avaliadas por  $p = 5$  alunos de doutoramento (os decisores).

Cada estudante forneceu avaliações das alternativas em cada critério, usando uma escala de 0 a 20, e forneceu pesos para os critérios com referência a esta escala. Os vectores correspondentes ao peso dos critérios escolhidos por cada decisor são:

$$w^1 = [0.50 \ 0.20 \ 0.15 \ 0.10 \ 0.05],$$

$$w^2 = [0.30 \ 0.20 \ 0.20 \ 0.15 \ 0.15],$$

$$w^3 = [0.40 \ 0.10 \ 0.10 \ 0.20 \ 0.20],$$

$$w^4 = [0.35 \ 0.25 \ 0.15 \ 0.15 \ 0.10],$$

$$w^5 = [0.25 \ 0.22 \ 0.23 \ 0.15 \ 0.15].$$

As matrizes de valor são:

$$V^1 = \begin{bmatrix} 17 & 19 & 17 & 15 & 16 \\ 12 & 10 & 17 & 18 & 16 \\ 17 & 15 & 17 & 17 & 17 \\ 8 & 10 & 12 & 5 & 12 \\ 9 & 14 & 13 & 8 & 14 \\ 16 & 20 & 16 & 18 & 15 \\ 14 & 12 & 15 & 18 & 16 \\ 20 & 10 & 19 & 10 & 15 \\ 18 & 8 & 18 & 12 & 14 \\ 8 & 14 & 13 & 10 & 13 \\ 12 & 19 & 18 & 14 & 14 \\ 19 & 17 & 20 & 20 & 18 \\ 15 & 6 & 19 & 8 & 10 \\ 8 & 13 & 14 & 8 & 14 \\ 18 & 18 & 19 & 19 & 16 \\ 10 & 18 & 18 & 12 & 13 \\ 12 & 15 & 18 & 10 & 19 \\ 10 & 13 & 15 & 10 & 14 \\ 9 & 15 & 15 & 8 & 12 \\ 11 & 17 & 15 & 12 & 17 \end{bmatrix}, \quad V^2 = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 16 & 16 & 15 \\ 16 & 11 & 13 & 13 & 15 \\ 14 & 14 & 15 & 16 & 14 \\ 13 & 11 & 11 & 12 & 12 \\ 13 & 16 & 12 & 11 & 12 \\ 16 & 19 & 14 & 17 & 16 \\ 15 & 12 & 16 & 13 & 15 \\ 17 & 10 & 16 & 15 & 17 \\ 17 & 4 & 17 & 15 & 16 \\ 13 & 15 & 14 & 14 & 12 \\ 14 & 18 & 14 & 14 & 14 \\ 18 & 14 & 19 & 19 & 16 \\ 14 & 2 & 16 & 14 & 14 \\ 15 & 10 & 13 & 12 & 12 \\ 18 & 13 & 18 & 17 & 16 \\ 16 & 14 & 15 & 12 & 12 \\ 15 & 13 & 16 & 15 & 10 \\ 16 & 9 & 14 & 15 & 12 \\ 15 & 11 & 14 & 12 & 8 \\ 17 & 15 & 14 & 12 & 10 \end{bmatrix}, \quad V^3 = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 12 & 15 & 12 \\ 15 & 12 & 12 & 13 & 13 \\ 14 & 12 & 12 & 16 & 15 \\ 13 & 10 & 10 & 13 & 13 \\ 12 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 18 & 12 & 12 & 15 & 18 \\ 15 & 12 & 12 & 13 & 13 \\ 16 & 12 & 18 & 12 & 18 \\ 12 & 12 & 18 & 18 & 16 \\ 12 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 14 & 12 & 12 & 15 & 14 \\ 16 & 15 & 15 & 16 & 15 \\ 18 & 12 & 18 & 18 & 10 \\ 12 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 16 & 15 & 20 & 16 & 15 \\ 14 & 12 & 12 & 15 & 14 \\ 14 & 12 & 12 & 16 & 15 \\ 14 & 12 & 12 & 12 & 15 \\ 12 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 12 & 12 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix},$$

$$V^4 = \begin{bmatrix} 13 & 16 & 14 & 14 & 13 \\ 12 & 7 & 8 & 11 & 13 \\ 15 & 13 & 14 & 13 & 14 \\ 10 & 3 & 5 & 9 & 12 \\ 10 & 13 & 11 & 9 & 11 \\ 14 & 18 & 13 & 14 & 13 \\ 12 & 8 & 10 & 11 & 14 \\ 17 & 6 & 19 & 12 & 16 \\ 16 & 1 & 14 & 13 & 14 \\ 10 & 10 & 9 & 9 & 11 \\ 13 & 14 & 14 & 12 & 13 \\ 17 & 13 & 19 & 17 & 15 \\ 13 & 12 & 14 & 10 & 12 \\ 10 & 6 & 6 & 9 & 12 \\ 16 & 14 & 18 & 16 & 14 \\ 12 & 12 & 14 & 11 & 13 \\ 11 & 11 & 13 & 11 & 12 \\ 12 & 8 & 14 & 12 & 13 \\ 13 & 6 & 6 & 12 & 12 \\ 13 & 15 & 12 & 13 & 12 \end{bmatrix}, \quad V^5 = \begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 10 & 10 & 10 & 15 & 20 \\ 15 & 10 & 10 & 20 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 20 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 15 & 10 \\ 20 & 20 & 15 & 20 & 15 \\ 15 & 10 & 10 & 20 & 20 \\ 15 & 10 & 20 & 10 & 20 \\ 10 & 5 & 20 & 15 & 20 \\ 10 & 10 & 10 & 15 & 10 \\ 15 & 15 & 10 & 10 & 15 \\ 20 & 10 & 20 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & 20 & 15 & 20 \\ 10 & 10 & 10 & 15 & 20 \\ 20 & 10 & 20 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 10 & 15 & 10 & 15 \\ 10 & 10 & 15 & 10 & 15 \\ 10 & 10 & 10 & 15 & 10 \\ 15 & 15 & 10 & 15 & 15 \end{bmatrix}.$$



As avaliações das alternativas, para cada um dos decisores, resultantes destes pesos e valores, são:

$$\begin{aligned}
 v^1(.) &= (17.15; 13.15; 16.60; 8.90; 10.75; 16.95; 14.25; 16.60; 15.20; 10.40; 14.60; \mathbf{18.80}; \\
 &\quad 12.85; 10.20; 18.15; 13.15; 13.65; 11.55; 11.15; 13.20), \\
 v^2(.) &= (15.55; 13.80; 14.50; 11.90; 12.95; 16.35; 14.30; 15.10; 13.95; 13.60; 14.80; \mathbf{17.25}; \\
 &\quad 12.00; 12.70; 16.55; 14.20; 14.05; 13.45; 12.50; 14.20), \\
 v^3(.) &= (13.80; 13.60; 14.20; 12.40; 10.80; \mathbf{16.20}; 13.60; 15.40; 14.60; 10.80; 13.80; 15.60; \\
 &\quad 15.80; 10.80; 16.10; 13.80; 14.20; 13.40; 10.80; 11.00), \\
 v^4(.) &= (14.05; 10.10; 13.95; 7.55; 10.85; 14.75; 10.75; 13.70; 11.30; 9.80; 13.25; \mathbf{16.10}; \\
 &\quad 12.35; 8.45; 15.60; 12.25; 11.40; 11.40; 9.95; 13.25), \\
 v^5(.) &= (15.00; 12.25; 12.75; 11.50; 10.75; \mathbf{18.10}; 14.25; 15.05; 13.45; 10.75; 13.10; 15.55; \\
 &\quad 13.45; 12.25; 14.80; 12.65; 13.15; 11.90; 10.75; 13.85).
 \end{aligned}$$

De forma a assegurar a utilização de toda a gama do intervalo, normalizámos as matrizes de valor, transformando os desempenhos numa escala uniforme. Depois de normalizar as matrizes de valor de tal forma que o maior valor em cada critério seja igual a um e o menor valor seja igual a zero, usando uma transformação afim, obtivemos:

$$V^{1*} = \begin{bmatrix} 0.750 & 0.929 & 0.625 & 0.667 & 0.667 \\ 0.333 & 0.289 & 0.625 & 0.867 & 0.667 \\ 0.750 & 0.643 & 0.625 & 0.800 & 0.778 \\ 0 & 0.286 & 0 & 0 & 0.222 \\ 0.083 & 0.571 & 0.125 & 0.200 & 0.444 \\ 0.667 & 1 & 0.500 & 0.867 & 0.556 \\ 0.500 & 0.429 & 0.375 & 0.867 & 0.667 \\ 1 & 0.286 & 0.875 & 0.333 & 0.556 \\ 0.833 & 0.143 & 0.750 & 0.467 & 0.444 \\ 0 & 0.571 & 0.125 & 0.333 & 0.333 \\ 0.333 & 0.929 & 0.750 & 0.600 & 0.444 \\ 0.917 & 0.786 & 1 & 1 & 0.889 \\ 0.583 & 0 & 0.875 & 0.200 & 0 \\ 0 & 0.500 & 0.250 & 0.200 & 0.444 \\ 0.833 & 0.857 & 0.875 & 0.933 & 0.667 \\ 0.167 & 0.857 & 0.750 & 0.467 & 0.333 \\ 0.333 & 0.643 & 0.750 & 0.333 & 1 \\ 0.167 & 0.500 & 0.375 & 0.333 & 0.444 \\ 0.083 & 0.643 & 0.375 & 0.200 & 0.222 \\ 0.250 & 0.786 & 0.375 & 0.467 & 0.778 \end{bmatrix}, \quad V^{2*} = \begin{bmatrix} 0.400 & 0.824 & 0.625 & 0.625 & 0.778 \\ 0.600 & 0.529 & 0.250 & 0.250 & 0.778 \\ 0.200 & 0.706 & 0.500 & 0.625 & 0.667 \\ 0 & 0.529 & 0 & 0.125 & 0.444 \\ 0 & 0.824 & 0.125 & 0 & 0.444 \\ 0.600 & 1 & 0.375 & 0.750 & 0.889 \\ 0.400 & 0.588 & 0.625 & 0.250 & 0.778 \\ 0.800 & 0.471 & 0.625 & 0.500 & 1 \\ 0.800 & 0.118 & 0.750 & 0.500 & 0.889 \\ 0 & 0.765 & 0.375 & 0.375 & 0.444 \\ 0.200 & 0.941 & 0.375 & 0.375 & 0.667 \\ 1 & 0.706 & 1 & 1 & 0.889 \\ 0.200 & 0 & 0.625 & 0.375 & 0.667 \\ 0.400 & 0.471 & 0.250 & 0.125 & 0.444 \\ 1 & 0.647 & 0.875 & 0.750 & 0.889 \\ 0.600 & 0.706 & 0.500 & 0.125 & 0.444 \\ 0.400 & 0.647 & 0.625 & 0.500 & 0.222 \\ 0.600 & 0.412 & 0.375 & 0.500 & 0.444 \\ 0.400 & 0.529 & 0.375 & 0.125 & 0 \\ 0.800 & 0.765 & 0.375 & 0.125 & 0.222 \end{bmatrix},$$

$$V^{3*} = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.400 & 0.200 & 0.625 & 0.250 \\ 0.500 & 0.400 & 0.200 & 0.375 & 0.375 \\ 0.333 & 0.400 & 0.200 & 0.750 & 0.625 \\ 0.167 & 0.000 & 0.000 & 0.375 & 0.375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.400 & 0.200 & 0.625 & 1 \\ 0.500 & 0.400 & 0.200 & 0.375 & 0.375 \\ 0.667 & 0.400 & 0.800 & 0.250 & 1 \\ 0 & 0.400 & 0.800 & 1 & 0.750 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.333 & 0.400 & 0.200 & 0.625 & 0.500 \\ 0.667 & 1 & 0.500 & 0.750 & 0.625 \\ 1 & 0.400 & 0.800 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.667 & 1 & 1 & 0.750 & 0.625 \\ 0.333 & 0.400 & 0.200 & 0.625 & 0.500 \\ 0.333 & 0.400 & 0.200 & 0.750 & 0.625 \\ 0.333 & 0.400 & 0.200 & 0.250 & 0.625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.400 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^{4*} = \begin{bmatrix} 0.429 & 0.882 & 0.643 & 0.625 & 0.400 \\ 0.286 & 0.353 & 0.214 & 0.250 & 0.400 \\ 0.714 & 0.706 & 0.643 & 0.500 & 0.600 \\ 0 & 0.118 & 0 & 0 & 0.200 \\ 0 & 0.706 & 0.429 & 0 & 0 \\ 0.571 & 1 & 0.571 & 0.625 & 0.400 \\ 0.286 & 0.412 & 0.357 & 0.250 & 0.600 \\ 1 & 0.294 & 1 & 0.375 & 1 \\ 0.857 & 0 & 0.643 & 0.500 & 0.600 \\ 0 & 0.529 & 0.286 & 0 & 0 \\ 0.429 & 0.765 & 0.643 & 0.375 & 0.400 \\ 1 & 0.706 & 1 & 1 & 0.800 \\ 0.429 & 0.647 & 0.643 & 0.125 & 0.200 \\ 0 & 0.294 & 0.071 & 0 & 0.200 \\ 0.857 & 0.765 & 0.929 & 0.875 & 0.600 \\ 0.286 & 0.647 & 0.643 & 0.250 & 0.400 \\ 0.143 & 0.588 & 0.571 & 0.250 & 0.200 \\ 0.286 & 0.412 & 0.643 & 0.375 & 0.400 \\ 0.429 & 0.294 & 0.071 & 0.375 & 0.200 \\ 0.429 & 0.824 & 0.500 & 0.500 & 0.200 \end{bmatrix},$$

$$V^{5*} = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.667 & 0.500 & 0.500 & 0.500 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0.500 & 1 \\ 0.500 & 0.333 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0.500 & 0 \\ 1 & 1 & 0.500 & 1 & 0.500 \\ 0.500 & 0.333 & 0 & 1 & 1 \\ 0.500 & 0.333 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.500 & 1 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.667 & 0 & 0 & 0.500 \\ 1 & 0.333 & 1 & 0 & 0.500 \\ 0 & 0 & 1 & 0.500 & 1 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0.500 & 1 \\ 1 & 0.333 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0.500 & 0.500 & 0.500 \\ 0.500 & 0.333 & 0.500 & 0 & 0.500 \\ 0 & 0.333 & 0.500 & 0 & 0.500 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.667 & 0 & 0.500 & 0.500 \end{bmatrix}.$$

Recalculámos os pesos (vectores  $w^{i*}$ ) para compensar exactamente a substituição de  $V^i$  por  $V^{i*}$  (para  $i = 1, \dots, 5$ ), isto é, a transformação causada pela normalização:

$$w^{1*} = [0.4793 \quad 0.1643 \quad 0.2157 \quad 0.0767 \quad 0.0639],$$

$$w^{2*} = [0.4539 \quad 0.0890 \quad 0.1891 \quad 0.1419 \quad 0.1261],$$

$$w^{3*} = [0.4545 \quad 0.1364 \quad 0.0682 \quad 0.1705 \quad 0.1705],$$

$$w^{4*} = [0.4379 \quad 0.1288 \quad 0.0938 \quad 0.1642 \quad 0.1752],$$

$$w^{5*} = [0.2698 \quad 0.1583 \quad 0.2482 \quad 0.1619 \quad 0.1619].$$

As avaliações das alternativas, para cada um dos decisores, resultantes destes pesos e valores, são:

$$\begin{aligned}
 v^{1*}(\cdot) &= (0.74; 0.45; 0.71; 0.06; 0.20; 0.69; 0.50; 0.78; 0.65; 0.17; 0.55; \mathbf{0.92}; \\
 &\quad 0.48; 0.18; 0.84; 0.44; 0.52; 0.30; 0.26; 0.42), \\
 v^{2*}(\cdot) &= (0.56; 0.50; 0.42; 0.12; 0.15; 0.65; 0.49; 0.72; 0.70; 0.25; 0.38; \mathbf{0.96}; \\
 &\quad 0.35; 0.34; 0.90; 0.50; 0.46; 0.51; 0.32; 0.55), \\
 v^{3*}(\cdot) &= (0.44; 0.42; 0.45; 0.20; 0.00; \mathbf{0.80}; 0.42; 0.63; 0.41; 0.00; 0.41; 0.71; \\
 &\quad 0.73; 0.00; 0.74; 0.41; 0.45; 0.37; 0.00; 0.05), \\
 v^{4*}(\cdot) &= (0.53; 0.30; 0.65; 0.05; 0.13; 0.61; 0.36; 0.81; 0.62; 0.10; 0.48; \mathbf{0.93}; \\
 &\quad 0.39; 0.08; 0.81; 0.38; 0.27; 0.37; 0.33; 0.46), \\
 v^{5*}(\cdot) &= (0.53; 0.30; 0.35; 0.21; 0.13; \mathbf{0.79}; 0.51; 0.60; 0.49; 0.13; 0.32; 0.65; \\
 &\quad 0.49; 0.30; 0.57; 0.34; 0.39; 0.26; 0.13; 0.40).
 \end{aligned}$$

Seguidamente mostramos a informação sobre optimalidade, quasi-optimalidade, e dominância, que é possível obter usando simulação Monte Carlo. Os pesos dos decisores não serão eliciados, portanto iremos prosseguir usando (7.1) para deixar os parâmetros variar livremente (permitindo pesos ditatoriais), ou usando (7.2) para permitir que estes pesos variem de forma a que nenhum decisor seja ditador<sup>2</sup>. As tabelas referidas serão mostradas na Subsecção 7.3.7.

### 7.3.2 O peso dos critérios e os valores são conhecidos (o peso dos decisores não são eliciados)

Nesta subsecção, consideramos que toda a informação é completa excepto o que se refere à importância dos decisores. Esta situação fornece resultados de referência para comparação com situações nas quais os decisores fornecem informação incompleta sobre o peso dos critérios e sobre os valores. Considerando que todos os parâmetros são conhecidos, excepto o peso dos decisores, a proporção de casos em que cada alternativa é a melhor (ótima) ou não perde por uma diferença significativa (quasi-ótima) é mostrada na Tabela 7.2. As alternativas que cada alternativa domina (ou, mais precisamente, as alternativas que têm valores inferiores para todos os valores gerados) são mostradas na Tabela 7.3.

Apenas as alternativas  $x^{(6)}$ ,  $x^{(12)}$  e  $x^{(15)}$  têm probabilidade positiva de serem as melhores (ou as alternativas  $x^{(6)}$  e  $x^{(12)}$ , se não forem permitidos ditadores). A alternativa  $x^{(12)}$  é a que apresenta probabilidade mais elevada (igual a 0.9194 ou a 0.9640, dependendo se forem permitidos ditadores ou não, respectivamente). Se consideramos um valor para

<sup>2</sup>Neste exemplo ilustrativo poderá ser questionável o facto dos decisores não terem todos o mesmo peso, ou seja, a opinião de uns decisores poder ser mais importante do que a opinião dos outros decisores. No entanto, trata-se apenas de um exemplo ilustrativo, e o caso de todos os decisores terem o mesmo peso, é um caso particular daquele que consideramos.

a tolerância igual a 0.1, as alternativas  $x^{(8)}$  e  $x^{(13)}$  (ou a alternativa  $x^{(8)}$ , se não forem permitidos ditadores) também têm probabilidade positiva (apesar de serem muito baixas).

Este exemplo mostra a importância do conceito de quasi-optimalidade. A alternativa  $x^{(15)}$  tem probabilidade muito baixa de ser a melhor (probabilidade igual a 0.12% ou 0%, dependendo se forem permitidos ditadores ou não, respectivamente), mas a probabilidade de perder por uma diferença superior a 0.1 é muito pequena. Isto é, em 94.40% (99.90%, respectivamente) dos casos, a alternativa  $x^{(15)}$  não perde por uma diferença superior a 0.1. Com uma tolerância igual a 0.05, esta alternativa tem a segunda probabilidade mais elevada.

A alternativa  $x^{(12)}$  domina quase todas as outras alternativas. Apenas as alternativas  $x^{(6)}$  e  $x^{(12)}$  não são dominadas por nenhuma outra alternativa (mais a alternativa  $x^{(15)}$ , se forem permitidos pesos ditatoriais).

Os cálculos também fornecem resultados não mostrados nas tabelas, que permitem determinar níveis de confiança para as afirmações sobre dominâncias. Como exemplo, considerando que os pesos dos decisores são livres, a diferença máxima entre o valor da alternativa  $x^{(1)}$  e o valor da alternativa  $x^{(12)}$  é negativa, isto é,  $\max\{v(x^{(1)}) - v(x^{(12)})\} = -0.1411$ . Logo a alternativa  $x^{(12)}$  é melhor do que a alternativa  $x^{(1)}$  para todos os vectores gerados. Comparando, por exemplo, a alternativa  $x^{(2)}$  com a alternativa  $x^{(3)}$  obtém-se que  $\max\{v(x^{(2)}) - v(x^{(3)})\} = 0.0677$ , logo a alternativa  $x^{(3)}$  não é melhor do que a alternativa  $x^{(2)}$  para todos os vectores gerados. No entanto, a média da diferença entre  $v(x^{(2)})$  e  $v(x^{(3)})$  é igual a  $-0.1239$  com um desvio padrão igual a 0.0641. Uma vez que a distribuição é aproximadamente Normal, já que o número de simulações é elevado, é possível afirmar que a alternativa  $x^{(3)}$  domina a alternativa  $x^{(2)}$ , quase com 100% de confiança. Afirmações deste tipo podem ser úteis quando a diferença máxima observada entre as alternativas, apesar de ser positiva, é baixa.

### 7.3.3 São dadas ordenações do peso dos critérios e valores conhecidos

Consideremos que, em vez de fornecer pesos exactos, cada decisor fornece uma ordenação do peso dos critérios, como se segue (ordenação essa cumprida pelos pesos verdadeiros):

$$\begin{aligned} \text{Decisor 1: } & w_1^{1*} > w_3^{1*} > w_2^{1*} > w_4^{1*} > w_5^{1*}, \\ \text{Decisor 2: } & w_1^{2*} > w_3^{2*} > w_4^{2*} > w_5^{2*} > w_2^{2*}, \\ \text{Decisor 3: } & w_1^{3*} > w_4^{3*} = w_5^{3*} > w_2^{3*} = w_3^{3*}, \\ \text{Decisor 4: } & w_1^{4*} > w_5^{4*} > w_4^{4*} > w_2^{4*} > w_3^{4*}, \\ \text{Decisor 5: } & w_1^{5*} > w_3^{5*} > w_4^{5*} = w_5^{5*} > w_2^{5*}. \end{aligned}$$

Na Tabela 7.4 é possível ver a proporção de casos em que cada alternativa é a melhor e também a proporção de casos em que cada alternativa é quase melhor do que todas as outras as alternativas, quando uma tolerância  $\epsilon > 0$  é tida em conta. A Tabela 7.5 mostra as alternativas que cada alternativa domina. Uma vez que os resultados obtidos

considerando que nenhum decisor pode ser um ditador não são muito diferentes dos obtidos gerando os pesos dos decisores considerando (7.1), de agora em diante iremos referir-nos apenas aos últimos.

Mais uma vez, a alternativa  $x^{(12)}$  aparece com a probabilidade mais elevada de ser a melhor. A alternativa  $x^{(8)}$  aparece agora com probabilidade positiva de ser a melhor (apesar dessa probabilidade ser muito baixa).

Como esperado, uma vez que existe perda de informação quando se trabalha com ordenações em vez de valores precisos, o número de alternativas encontradas como sendo dominadas diminui. Apesar disso, apenas as alternativas  $x^{(6)}$ ,  $x^{(8)}$ ,  $x^{(12)}$  e  $x^{(15)}$  não são dominadas por nenhuma outra alternativa (no entanto a alternativa  $x^{(8)}$  é dominada se excluirmos pesos ditatoriais).

### 7.3.4 São dadas ordenações do peso dos critérios e ordenações dos valores

Consideramos agora outra perda de informação, supondo que os decisores fornecem uma ordenação do valor das alternativas em cada critério, possivelmente com empates, em vez de valores precisos, além de fornecerem uma ordenação dos pesos dos critérios. Iremos considerar as ordenações correspondentes aos valores exactos usados anteriormente. Por exemplo, para o primeiro decisor e para o primeiro critério resultará a restrição seguinte (cumprida pelos valores verdadeiros):

$$\begin{aligned} v_1^{1*}(x^{(8)}) &> v_1^{1*}(x^{(12)}) > v_1^{1*}(x^{(9)}) = v_1^{1*}(x^{(15)}) > v_1^{1*}(x^{(1)}) = v_1^{1*}(x^{(3)}) > v_1^{1*}(x^{(6)}) > \\ &> v_1^{1*}(x^{(13)}) > v_1^{1*}(x^{(7)}) > v_1^{1*}(x^{(2)}) = v_1^{1*}(x^{(11)}) = v_1^{1*}(x^{(17)}) > v_1^{1*}(x^{(20)}) > v_1^{1*}(x^{(16)}) = \\ &= v_1^{1*}(x^{(18)}) > v_1^{1*}(x^{(5)}) = v_1^{1*}(x^{(19)}) > v_1^{1*}(x^{(4)}) = v_1^{1*}(x^{(10)}) = v_1^{1*}(x^{(14)}). \end{aligned}$$

Na Tabela 7.6 é possível ver a proporção de casos em que cada alternativa é a melhor, e também a proporção de casos em que cada alternativa é quase melhor do que todas as outras alternativas, isto é, com uma diferença de valor para a melhor inferior à tolerância. Na Tabela 7.7 é possível ver as alternativas que cada alternativa domina.

Considerando uma tolerância igual a 0.1, existem 9 alternativas com probabilidade positiva (5 delas com probabilidades muito baixas). As alternativas  $x^{(6)}$ ,  $x^{(8)}$ ,  $x^{(12)}$ ,  $x^{(13)}$  e  $x^{(15)}$  não são dominadas por nenhuma outra alternativa (no entanto a alternativa  $x^{(13)}$  é dominada se excluirmos pesos ditatoriais).

Note-se que neste caso há perda de informação relativamente ao considerado na subsecção anterior, uma vez que agora apenas se exige dos decisores informação ordinal sobre os valores de cada alternativa em cada critério, em vez de valores exactos para os mesmos. No entanto os resultados obtidos não são muito diferentes dos referidos anteriormente.

### 7.3.5 São dadas ordenações do peso dos critérios e ordenações das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério

Consideramos também uma situação de compromisso relativamente à informação sobre o valor das alternativas em cada critério. Em vez de elicitar valores precisos ou uma simples ordenação desses valores, consideramos que os decisores fornecem uma ordenação dos valores e uma ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério.

Consideremos que  $\Delta_{i(m_i^k-1)}^{k*} = v_i^{k*}(x_i^{([1]k)}) - v_i^{k*}(x_i^{([2]k)})$ , ..., e  $\Delta_{i1}^{k*} = v_i^{k*}(x_i^{([m_i^k-1]k)}) - v_i^{k*}(x_i^{([m_i^k]k)})$ , onde  $x_i^{([1]k)}$  representa a melhor alternativa para o decisor  $k$  no critério  $c_i$ ,  $x_i^{([2]k)}$  representa a segunda melhor alternativa para o decisor  $k$  no critério  $c_i$ , e assim sucessivamente, e  $m_i^k$  representa o número de níveis no critério  $c_i$  para o decisor  $k$  (rever Subsecção 4.2.3). Note-se que, por exemplo, no primeiro critério e para o primeiro decisor existem  $m_1^1 = 12$  níveis, devido ao empate nos valores de algumas alternativas. Desta forma, por exemplo, será possível obter a seguinte restrição do primeiro decisor, relativamente ao primeiro critério (restrição esta cumprida pelas diferenças de valor verdadeiras):

$$\Delta_{15}^{1*} > \Delta_{1(11)}^{1*} = \Delta_{1(10)}^{1*} = \Delta_{19}^{1*} = \Delta_{18}^{1*} = \Delta_{17}^{1*} = \Delta_{16}^{1*} = \Delta_{14}^{1*} = \Delta_{13}^{1*} = \Delta_{12}^{1*} = \Delta_{11}^{1*}.$$

Na Tabela 7.8 é possível ver a proporção de casos em que cada alternativa é a melhor, e também a proporção de casos em que cada alternativa é quase melhor do que todas as outras alternativas, quando uma tolerância  $\epsilon > 0$  é tida em conta. Na Tabela 7.9 é possível ver as alternativas que cada alternativa domina.

Neste caso, os resultados não são muito diferentes dos obtidos anteriormente. No entanto, deve ser notado que os resultados apresentados na Tabela 7.8 (ordenação dos pesos dos critérios e ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério) são mais próximos dos resultados apresentados na Tabela 7.2 (pesos dos critérios e valores conhecidos) do que dos resultados apresentados na Tabela 7.6 (ordenação dos pesos dos critérios e dos valores). As alternativas  $x^{(6)}$ ,  $x^{(8)}$ ,  $x^{(12)}$  e  $x^{(15)}$  não são dominadas por nenhuma outra alternativa (no entanto a alternativa  $x^{(8)}$  é dominada se excluirmos pesos ditatoriais).

### 7.3.6 Discussão

Em todos os casos, foi possível concluir que a alternativa  $x^{(12)}$  (Lisboa) é claramente a melhor alternativa, mas se os decisores pretenderem analisar com mais detalhe um pequeno subconjunto de alternativas é também possível recomendar as alternativas  $x^{(6)}$  e  $x^{(15)}$  (Coimbra e Porto, respectivamente), e talvez a alternativa  $x^{(8)}$  (Faro). Usando a regra da dominância, em todos os casos, é possível eliminar muitas alternativas. Na figura

7.1 é possível ver como o volume de optimalidade e quasi-optimalidade destas quatro alternativas aumenta com a tolerância utilizada, nos quatro casos referidos anteriormente, e considerando que os pesos dos decisores são livres.

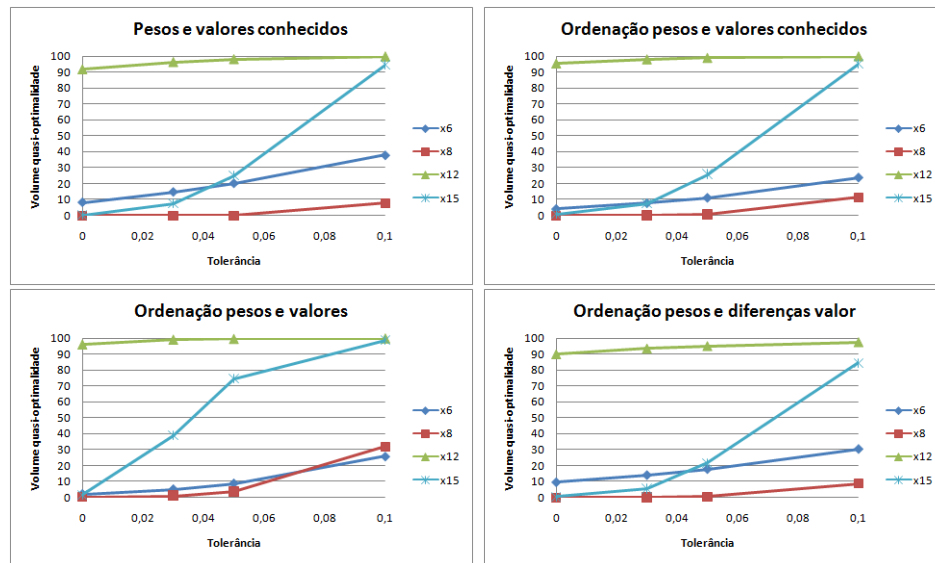


Figura 7.1: Volume de optimalidade / quasi-optimalidade: pesos dos decisores livres.

Como já havia sido referido, usando valores para a tolerância iguais a 0.05 e 0.1 aparece uma alternativa promissora, a alternativa  $x^{(15)}$ , que tem probabilidade muito baixa de ser a melhor, mas probabilidade bastante elevada de não perder por uma diferença superior a 0.1. Considerando os diferentes tipos de informação incompleta os resultados não são muito diferentes. A principal diferença aparece nas probabilidades da alternativa  $x^{(15)}$  considerando uma ordenação dos pesos dos critérios e uma ordenação dos valores.

Um dos gráficos mais utilizados para descrever uma variável que esteja a ser estudada, é o diagrama de extremos e quartis. Neste gráfico são incluídos a mediana, o 1º quartil, o 3º quartil, os valores mínimos e máximos, eventuais outliers (isto é, valores 1.5 vezes superiores ao 3º quartil + amplitude interquartil, ou 1.5 vezes inferiores ao 1º quartil - amplitude interquartil) e extremos (isto é, valores 3 vezes superiores ao 3º quartil + amplitude interquartil, ou 3 vezes inferiores ao 1º quartil - amplitude interquartil). O rectângulo representado neste tipo de gráficos é desenhado de tal modo que, os lados inferiores e superiores correspondem ao 1º e 3º quartis, respectivamente. O segmento no interior do rectângulo refere-se à mediana (ou seja, ao 2º quartil). Os valores mínimo e máximo são representados por segmentos de recta desenhados no exterior do rectângulo. Os outliers são representados por  $\circ$  e os extremos por  $*$ . Na Figura 7.2 apresentamos os diagramas de extremos e quartis dos valores,  $v(\cdot)$ , das quatro melhores alternativas. Como é possível verificar, estes gráficos apoiam a escolha de Lisboa (e a do Porto na ausência de Lisboa). No caso em que existe uma ordenação dos pesos dos critérios e uma ordenação da diferença de valor entre alternativas consecutivas em cada critério, os resultados são mais

próximos dos obtidos considerando pesos dos critérios e valores conhecidos, do que quando se considera uma ordenação dos pesos dos critérios e dos valores. No entanto obtêm-se valores mais dispersos e o número de outliers e de extremos é superior. Numa primeira análise este resultado pode parecer estranho, no entanto existe uma justificação para isto acontecer. Considerando que os decisores fornecem uma ordenação das diferenças de valor entre cada alternativa em cada critério, a forma como geramos os valores faz com que o valor de todas as alternativas, em cada critério, dependa da diferença de valor entre a alternativa mais fraca e o nível zero. Relembremos que as diferenças de valor são geradas aleatoriamente de forma a que a sua soma seja igual à unidade, e que os valores das alternativas são obtidos somando essas diferenças de valor (rever Secção 3.4). Gerando o valor das alternativas desta forma faz com que os valores de umas alternativas dependam do valor das outras alternativas. Assim, por exemplo, se a primeira diferença de valor for muito baixa ou muito elevada poderá dar origem a extremos ou mesmo a outliers. O mesmo não acontece considerando apenas uma ordenação do valor de cada alternativa em cada critério, pois neste caso, o valor de uma alternativa em nada depende do valor das restantes alternativas, uma vez que estes são gerados de forma completamente aleatória.

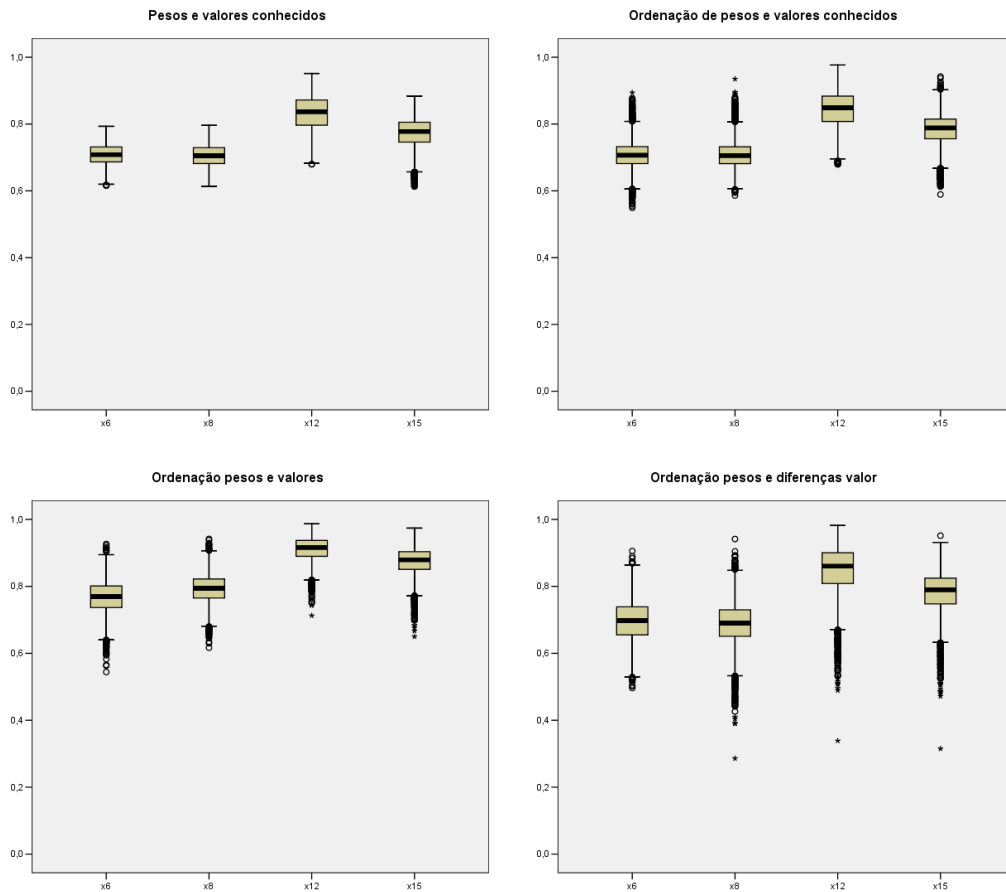


Figura 7.2: Diagramas de extremos e quartis: pesos dos decisores livres.



Considerando que nenhum decisor pode ser um ditador, apesar de algumas diferenças nos resultados, as principais conclusões são as mesmas. A principal diferença é que, em todos os casos, aumenta a proporção de vezes em que a alternativa  $x^{(12)}$  é a melhor, diminuindo a proporção correspondente para a alternativa  $x^{(6)}$ . Isto acontece uma vez que, considerando pesos e valores conhecidos, três decisores concordam que a alternativa  $x^{(12)}$  é a melhor, apoiando os outros dois a escolha da alternativa  $x^{(6)}$ .

No exemplo apresentado, Lisboa é claramente a melhor opção para realizar o *workshop*. Mas, o que fazer se a companhia decidisse que o *workshop* não se deveria realizar em Lisboa? Realizámos algumas experiências, apenas para o caso em que os pesos dos decisores são livres, considerando que Lisboa não pode ser escolhida, isto é, eliminado a alternativa  $x^{(12)}$ . Os resultados podem ser encontrados da Tabela 7.10 à Tabela 7.13<sup>3</sup>. Neste caso, a alternativa  $x^{(15)}$  (Porto) aparece como sendo a alternativa mais promissora, uma vez que é a que tem probabilidade mais elevada de ser a melhor. Mais uma vez, apenas as alternativas  $x^{(6)}$  e  $x^{(8)}$  devem ser consideradas para análise futura. Note-se que, antes de pensarmos eliminar Lisboa, quando considerando uma tolerância de 0, a alternativa  $x^{(15)}$  não parece ser a melhor alternativa para Lisboa, mas o seu interesse torna-se evidente quando uma tolerância de 0.05 ou 0.1 é considerada.

### 7.3.7 Tabelas

Alt./ Tol.	Pesos dos decisores livres				Não são permitidos ditadores (pesos $\leq 0.5$ )			
	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.03$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.1$	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.03$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.1$
$x^{(6)}$	7.94	14.59	20.06	37.95	3.60	8.34	13.23	36.34
$x^{(8)}$	0	0	0	7.58	0	0	0	6.95
$x^{(12)}$	91.94	96.47	98.25	99.92	96.40	99.04	99.72	100
$x^{(13)}$	0	0	0	0.10	0	0	0	0
$x^{(15)}$	0.12	7.45	24.73	94.40	0	3.74	24.12	99.90

Tabela 7.2: Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): peso dos critérios e valores conhecidos.

<sup>3</sup>Quando removemos Lisboa calculámos tudo novamente do início e em particular normalizámos novamente as escalas. Ou seja, normalizámos as matrizes de valor e recalculámos os pesos de forma a neutralizar o efeito da normalização do valor das alternativas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		•		•	•		•			•	•			•		•	•	•	•	•
2				•	•					•				•						
3				•	•					•	•			•				○		•
4																				
5																				
6	○	•		•	•		•			•	•		•	•		•	•	•	•	•
7				•	•					•				•						•
8	•	•	•	•	•		•		•	•	•		•	•		•	•	•	•	•
9		•		•	•					•	•			•		•	○	•	•	•
10																				
11				•	•					•				•						•
12	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•		•	•	○	•	•	•	•	•
13				•	•					•				•						•
14																				
15	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•		•	•		•	•	•	•	•
16				•	•					•				•						•
17				•	•					•				•						○
18				•	•					•				○						•
19					•					•										
20				○	•					•				•						•

Tabela 7.3: Relações de dominância dados pesos dos critérios e valores conhecidos (•:  $x^{(linha)}$  domina  $x^{(coluna)}$  para pesos dos decisores livres; ○:  $x^{(linha)}$  domina  $x^{(coluna)}$  apenas se nenhum decisor pode ser ditador).

Alt./ Tol.	Pesos dos decisores livres				Não são permitidos ditadores (pesos $< 0.5$ )			
	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.03$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.1$	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.03$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.1$
$x^{(6)}$	4.00	7.63	11.02	23.77	1.43	3.92	7.06	19.10
$x^{(8)}$	0.01	0.18	0.79	11.22	0	0.14	0.50	9.41
$x^{(9)}$	0	0	0	$< 0.01$	0	0	0	0
$x^{(12)}$	95.31	97.98	98.85	99.77	98.53	99.54	99.84	99.98
$x^{(13)}$	0	0	$< 0.01$	0.19	0	0	0	0
$x^{(15)}$	0.68	7.41	25.70	94.91	0.04	4.88	24.90	98.19

Tabela 7.4: Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): ordenação do peso dos critérios e valores conhecidos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		○		●	●					●				●		○	○	○	○	●
2				●	●					●				●						○
3				●	●					●	●			○						○
4																				
5																				
6	○	●		●	●		●			●	●		●	●		●	●	●	●	●
7				●	●					●				●		●				○
8	○	●		●	●		●		○	●	●			●		●	●	●	●	●
9				●	●					●				●					○	●
10																				
11				●	●					●				○						○
12	●	●	●	●	●		●	○	●	●	●			○	●	●	●	●	●	●
13				●	●					●										○
14																				
15	●	●	●	●	●					●	●			○	●	●	●	●	●	●
16				●	●					●				●						○
17				●	●					●				●						○
18				●	●					●				○						○
19					●															
20				○	●					●				●						●

Tabela 7.5: Relações de dominância dadas ordenações do peso dos critérios e valores conhecidos.

Alt./ Tol.	Pesos dos decisores livres				Não são permitidos ditadores (pesos $\leq 0.5$ )			
	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.03$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.1$	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.03$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.1$
$x^{(1)}$	0	0	0.01	0.23	0	0	0	0.10
$x^{(3)}$	0	0	0	$< 0.01$	0	0	0	0
$x^{(6)}$	1.95	5.03	8.73	25.79	0.64	2.51	5.15	22.07
$x^{(7)}$	0	0	0	0.01	0	0	0	0
$x^{(8)}$	0.12	0.99	3.46	31.73	0.06	0.64	2.97	31.68
$x^{(9)}$	0	$< 0.01$	$< 0.01$	0.09	0	0	0	0.04
$x^{(12)}$	96.28	99.26	99.69	99.95	98.56	99.76	99.96	99.98
$x^{(13)}$	0	0	$< 0.01$	0.08	0	0	0	0
$x^{(15)}$	1.65	38.80	74.38	98.56	0.74	37.37	75.56	99.34

Tabela 7.6: Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): ordenação do peso dos critérios e ordenação dos valores.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1				•	•					•				•						•
2				•	•					•				•						
3				•	•					•				○						○
4																				
5																				
6		•		•	•		○			•	○		○	•		•	•	•	•	•
7				•	•					•				•						
8		•		•	•		•			•			○	•		•	○	•	•	•
9				•	•					•				•						•
10																				
11				•	•					•				○						
12	•	•	•	•	•		•		•	•	•			•		•	•	•	•	•
13				•	•					•				○						
14																				
15	○	•	•	•	•		○		○	•	•		○	•		•	•	•	•	•
16				•	•					•										
17				•	•					•				○						
18				•	•					•										
19																				
20				○	•					•				•						•

Tabela 7.7: Relações de dominância dadas ordenações do peso dos critérios e ordenações dos valores.

Alt./ Tol.	Pesos dos decisores livres				Não são permitidos ditadores (pesos $\leq 0.5$ )			
	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.03$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.1$	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.03$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.1$
$x^{(1)}$	0	0	0	< 0.01	0	0	0	0
$x^{(6)}$	9.50	14.00	17.74	30.33	6.15	10.11	13.51	26.47
$x^{(8)}$	0.01	0.11	0.57	8.71	0	0.12	0.44	7.52
$x^{(9)}$	0	0	0	0.01	0	0	0	0.02
$x^{(12)}$	90.05	93.60	95.14	97.58	93.77	96.36	97.53	99.20
$x^{(13)}$	0	0.01	0.03	0.60	0	0	0	0.06
$x^{(15)}$	0.45	5.56	21.47	84.43	0.08	4.02	27.78	88.64

Tabela 7.8: Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): ordenação do peso dos critérios e ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		○		●	●					●	○			●		○	○	●	●	
2				●	●					●				●						○
3				●	●					●	●			○					●	○
4																				
5																				
6	○	●		●	●		●			●	●		●	●		●	●	●	●	●
7				●	●					●				●					○	○
8		●		●	●		●			●	●			●		●	●	●	●	●
9					●					●				●					○	●
10																				
11				●	●					●				○					●	
12	●	●	●	●	●		●	○	●	●	●			●		●	●	●	●	●
13				●	●					●										○
14																				
15	●	●	●	●	●					●	●			●		●	●	●	●	●
16				●	●					●				●						
17				●	●					●										
18				●	●					●										
19																				
20			○	●						●				●						●

Tabela 7.9: Relações de dominância dadas ordenações do peso dos critérios e ordenações das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério.

Alt. / Tol.	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.03$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.1$
$x^{(6)}$	17.44	28.80	36.98	60.80
$x^{(8)}$	0	1.60	11.48	68.66
$x^{(13)}$	0	0	0	0.14
$x^{(15)}$	82.56	89.66	93.44	98.20

Tabela 7.10: Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): peso dos critérios e valores conhecidos (caso em que Lisboa não pode ser escolhida) - pesos dos decisores livres.

Alt. / Tol.	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.03$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.1$
$x^{(6)}$	9.36	15.88	21.42	40.70
$x^{(8)}$	0.74	2.74	5.82	30.76
$x^{(9)}$	0	0	0	0.20
$x^{(13)}$	0	0	0	0.10
$x^{(15)}$	89.90	94.96	96.78	99.22

Tabela 7.11: Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): ordenação do peso dos critérios e valores conhecidos (caso em que Lisboa não pode ser escolhida) - pesos dos decisores livres.

Alt. / Tol.	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.03$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.1$
$x^{(1)}$	0.02	0.04	0.24	4.48
$x^{(3)}$	0	0	0	0.16
$x^{(6)}$	8.16	16.38	23.68	49.12
$x^{(7)}$	0	0	0	0.02
$x^{(8)}$	1.64	7.94	16.16	57.26
$x^{(9)}$	0	0.02	0.04	2.40
$x^{(13)}$	0	0	0	0.08
$x^{(15)}$	90.18	95.50	97.40	99.56

Tabela 7.12: Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): ordenação do peso dos critérios e ordenação dos valores (caso em que Lisboa não pode ser escolhida) - pesos dos decisores livres.

Alt. / Tol.	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.03$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.1$
$x^{(1)}$	0	0	0	0.02
$x^{(6)}$	15.78	22.66	28.00	45.05
$x^{(8)}$	3.80	8.30	14.34	42.50
$x^{(9)}$	0	0	0	0.12
$x^{(13)}$	0	0	0.02	0.44
$x^{(15)}$	80.42	87.78	90.80	95.72

Tabela 7.13: Proporção de casos (%) em que cada alternativa é a melhor ( $\epsilon = 0$ ) ou não perde por uma diferença superior a  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.03, 0.05, 0.1$ ): ordenação do peso dos critérios e ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério (caso em que Lisboa não pode ser escolhida) - pesos dos decisores livres.

## 7.4 Conclusões

Neste capítulo abordámos o problema no qual um grupo de decisores não é capaz, ou não pretende, fornecer informação completa sobre as suas preferências individuais. Tal como no Capítulo 5 considerámos informação ordinal, considerando uma ordenação dos pesos dos critérios, uma ordenação do valor de cada alternativa em cada critério e uma ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. No entanto existem duas principais diferenças entre o realizado neste capítulo e o realizado no Capítulo 5. No Capítulo 5, como foram usados diferentes métodos de mediação para sugerir diferentes alternativas não foi necessário usar pesos para os decisores. Além disso, o objectivo do Capítulo 5 foi comparar diferentes regras, enquanto neste capítulo o objectivo foi conjugar diferentes regras para sugerir alternativas.

Propusemos uma aproximação que enfatiza a exploração do espaço dos parâmetros (pesos dos decisores, pesos dos critérios e valores) com o objectivo de aproximar o volume do subconjunto do espaço dos parâmetros no qual cada alternativa é a melhor, ou não perde por uma diferença significativa, e com o objectivo de determinar aproximadamente as alternativas que cada alternativa domina. O objectivo da aproximação proposta é verificar se existem alternativas óptimas ou quasi-óptimas para uma vasta gama de valores

para os parâmetros, bem como verificar se existem alternativas que dominam as outras. As alternativas dominadas são certamente perdedoras e podem ser eliminadas.

Considerámos que os decisores não fornecem nenhuma informação relativamente à importância dos elementos do grupo. Com esta aproximação contornámos o problema de atribuir pesos que reflectem a importância de cada decisor, que é uma das dificuldades associadas com o uso de funções de valor aditivas. Também propusemos restringir o conjunto de pesos aceitáveis para os decisores de forma a prevenir que um decisor seja ditador, de acordo com uma nova definição que propusemos, e que nos parece mais adequada a este contexto do que a definição clássica de Arrow. A definição de ditador por nós apresentada poderá ser discutível, no entanto ela não é de todo importante para a aproximação sugerida, já que a aproximação pode ser utilizada independentemente da definição de ditador considerada. Além disso, como verificado no exemplo apresentado, é provável que os resultados sejam semelhantes deixando os pesos dos decisores livres para variar ou considerando que nenhum decisor pode ser um ditador. E se para a definição que sugerimos os resultados são semelhantes, então deixemos os pesos livres para variar. No entanto, consideramos que este deverá ser um tópico para investigar, nomeadamente, verificar se existirá alguma definição que se possa adequar mais a este contexto e que conduza a resultados muito diferentes dos obtidos considerando os pesos dos decisores livres para variar.

Também sujeito a controvérsia é o facto de termos usado um aproximação que atribui pesos aos diferentes decisores. Poderá ser questionado se existem situações de decisão em grupo nas quais uns elementos devam ser considerados mais importantes do que outros. Defendemos, no entanto, que numa situação de decisão em grupo, sobre determinado assunto, a opinião dos decisores com mais conhecimento sobre o assunto em questão deverá ser mais importante para a decisão final do que a opinião dos decisores não tão familiarizados com o assunto. No entanto, também aqui poderia ter sido utilizada a abordagem de agregar as preferências dos decisores utilizando métodos de mediação (como no Capítulo 5), que não requerem a atribuição de pesos aos diferentes elementos do grupo. Note-se que utilizar o método de maximizar a soma dos valores, seria equivalente a usar a aproximação por nós sugerida considerando pesos iguais para todos os decisores.

Sugerimos utilizar simulação Monte Carlo para aproximar o volume relativo do domínio do espaço dos parâmetros em que cada condição se verifica, com respeito ao domínio dos valores dos parâmetros admissíveis. O volume do subconjunto do espaço dos parâmetros no qual uma determinada condição se verifica pode ser aproximado, gerando de forma aleatória os valores dos parâmetros, usando uma distribuição uniforme para as simulações. Algumas alternativas terão valores de volumes muito baixos e poderão ser eliminadas. As alternativas não eliminadas poderão ser alvo de uma análise mais exaustiva. A aproximação também permite identificar alternativas que dominam as outras, sem resolver problemas não lineares. O uso da simulação é mais geral e flexível que o uso de modelos de optimização, no entanto não fornece resultados tão precisos. Nomeadamente, não é possível determinar exactamente quais alternativas cada alternativa domina. É no entanto possível afirmar que

“para todos os valores gerados a alternativa  $x^{(j)}$  domina a alternativa  $x^{(i)}$ ” (se o máximo da diferença de valor entre as duas alternativas for negativo) ou que “com  $\lambda\%$  de confiança, a alternativa  $x^{(j)}$  domina a alternativa  $x^{(i)}$ ” (se o máximo da diferença de valor entre as duas alternativas for positivo, mas baixo). O número de iterações considerado nas simulações pode ser tão elevado quanto necessário para obter a precisão desejada.

A aproximação apresentada pode ser facilmente utilizada, e apesar de não fornecer resultados precisos, pode ser bastante útil para recomendar um subconjunto de alternativas aos decisores. Este subconjunto mais reduzido pode ser sujeito a uma análise mais exaustiva por parte dos elementos do grupo.

Apresentámos um exemplo para ilustrar a aproximação proposta. O objectivo foi demonstrar como esta pode ser utilizada, e que tipo de informação é possível fornecer aos decisores. Num passo futuro, deverá ser feito um estudo mais exaustivo para testar a aproximação. É importante testar, por exemplo, se os resultados são significativamente diferentes considerando uma ordenação dos valores e considerando uma ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas em cada critério. É possível que a informação adicional requerida pedindo uma ordenação das diferenças de valor entre alternativas consecutivas, seja compensada com resultados claramente melhores, do que os obtidos considerando apenas uma ordenação dos valores.

A informação obtida dos decisores na aproximação sugerida neste capítulo é semelhante à obtida no Capítulo 5. No entanto, no Capítulo 5, com base na informação incompleta considerada, são utilizadas diferentes regras de decisão para obter uma aproximação para o valor dos parâmetros, para que seja possível sugerir aos decisores uma alternativa, ou um subconjunto de alternativas. O subconjunto indicado poderá realmente conter a verdadeira melhor alternativa, mas também pode conter outras alternativas não tão interessantes. Os decisores são informados da taxa de acerto, no caso de escolherem apenas uma alternativa, ou da probabilidade do subconjunto escolhido conter a melhor alternativa. São ainda informados da perda de valor que está associada com a escolha de uma alternativa que possa não ser a melhor de acordo com os parâmetros verdadeiros. Na aproximação apresentada neste capítulo os decisores são informados do volume relativo do espaço dos parâmetros no qual cada alternativa é óptima e quasi-óptima, permitindo que os decisores decidam qual a alternativa que preferem escolher ou se preferem analisar com mais detalhe um subconjunto de alternativas, sendo os mesmos os responsáveis por essa escolha. Os decisores são ainda informados de quais alternativas podem ser eliminadas, uma vez que são dominadas por alguma outra alternativa para todos os valores dos parâmetros gerados. Este tipo de aproximação pode ser bastante interessante para ajudar os decisores a reflectirem sobre as consequências dos seus *inputs* mais do que para sugerir uma alternativa.



# Conclusões e vias para investigação futura

---

Como referimos ao longo do trabalho, os modelos matemáticos utilizados no apoio à decisão são, regra geral, caracterizados por múltiplos parâmetros. Numa situação de informação completa os decisores conseguem indicar um valor preciso para cada um dos parâmetros do modelo. Contudo, por diversas razões, surgem muitas vezes dificuldades em obter valores precisos para todos os parâmetros. Em alternativa os decisores podem fornecer aquilo a que chamamos de informação incompleta, que se caracteriza por não conduzir a uma combinação de valores precisos para todos os parâmetros do modelo. É no entanto importante salientar que o uso de informação incompleta muitas vezes se trata de uma opção, uma vez que alguns dos factores que contribuem para a dificuldade em fixar valores precisos para os parâmetros poderiam ser minorados à custa de tempo, discussões ou dinheiro. No entanto, muitas vezes os intervenientes no processo de decisão desejarão evitar incorrer nestes custos.

O objectivo do nosso trabalho foi ver até que ponto se conseguem obter bons resultados quando não são exigidos os valores exactos de todos os parâmetros do modelo, ou seja, quando se opta pelo uso de informação incompleta, no quadro de agregação multicritério por funções de valor aditivas (o modelo mais popular para agregar múltiplas funções de valor). Relativamente ao tipo de informação utilizado restringimos o nosso estudo ao caso em a informação incompleta sobre os valores dos parâmetros tem carácter ordinal. Ao longo deste trabalho focámo-nos na problemática da escolha de uma alternativa, ou de um pequeno subconjunto de alternativas, ou na ordenação das mesmas. Estudámos não só o problema da decisão individual como também o problema da decisão colectiva, em particular da negociação e da decisão em grupo, tratando-se de situações onde se torna necessário conciliar múltiplos interesses ou opiniões.

O trabalho desenvolvido pode ser expandido em diversas direcções. Neste último capítulo pretendemos rever o que foi feito, bem como apresentar as principais conclusões. Além disso iremos apresentar algumas limitações das aproximações sugeridas e iremos referir vias para investigação futura. Alguns tópicos para investigação futura já foram deixados ao longo do trabalho.

Além dos capítulos de enquadramento e de revisão da literatura (Capítulos 2 e 4), o nosso trabalho pode ser dividido em dois grandes grupos. No primeiro grupo o objectivo foi propor diferentes regras e utilizar simulação Monte Carlo para ver como essas regras se comparam. Deste primeiro grupo fazem parte o Capítulo 3 (relativo à decisão individual) e o Capítulo 5 (relativo à negociação e à decisão em grupo). No segundo grupo o objectivo foi ver como diferentes aproximações podem ser utilizadas para sugerir alternativas. Deste segundo grupo fazem parte o Capítulo 6 (relativo à negociação) e o Capítulo 7 (relativo à decisão em grupo). Seguidamente falamos com mais detalhe de cada um destes dois grupos. No fim do capítulo deixamos algumas pistas, mais gerais, de possíveis extensões do trabalho apresentado.

Em termos gerais, a primeira parte do trabalho (Capítulo 3 e Capítulo 5) visou conhecer melhor a forma como as diferentes regras e fórmulas se comparam, bem como fornecer algumas pistas sobre a melhor forma de as utilizar, seja em situações com informação incompleta nos pesos dos critérios (ou dos assuntos), seja em situações com informação incompleta nos valores das alternativas em cada critério (ou nos valores dos níveis em cada assunto), considerando o problema aditivo multicritério. Fizemos um estudo semelhante tanto no caso da decisão individual como no caso da decisão colectiva (negociação e decisão em grupo). Verificámos que, regra geral, o uso de informação incompleta conduz a bons resultados. No caso da decisão em grupo, estes resultados foram conseguidos sem a necessidade de atribuir pesos aos diferentes decisores, isto é, agregando as preferências dos mesmos utilizando conhecidos métodos de mediação. No entanto, mostrámos também alguns resultados obtidos considerando a agregação das preferências dos decisores, usando pesos para os mesmos (Apêndice A). Neste último caso admitimos que os decisores são capazes de chegar a acordo sobre os seus pesos, ou que, pelo menos, que cada decisor é capaz de fornecer uma ordenação dos pesos de todos os decisores.

Realizámos uma série de simulações Monte Carlo com o objectivo de ver como diferentes regras se comparam. No caso da decisão individual quando a informação incompleta se referia aos pesos, foram comparadas as regras pesos ROC, maximin, arrependimento minimax, e valores centrais. Quando a informação incompleta se referia ao valor de cada alternativa em cada critério foram sugeridas e comparadas duas novas regras, valores ROC e valores  $\Delta$ ROC. No caso da negociação e da decisão em grupo, quando a informação incompleta se referia ao peso dos critérios (ou ao peso dos assuntos), foi utilizada a regra pesos ROC, que foi aquela que se mostrou mais promissora no caso da decisão individual. Quando a informação incompleta se referia também ao valor de cada alternativa em cada critério (ou ao valor de cada nível em cada assunto), foram mais uma vez comparadas as regras valores ROC e valores  $\Delta$ ROC. Estas experiências estendem experiências realizadas anteriormente, na medida em que testam estratégias de seleccionar mais do que uma alternativa. Desta forma não será necessário eliciar valores precisos para a maioria das alternativas, excepto

para as primeiras alternativas das ordenações fornecidas pelas diferentes regras. Tanto no caso da negociação como no caso da decisão em grupo, foi comparado o comportamento das diferentes regras, quando se utilizam três conhecidos métodos de mediação: maximizar a soma dos valores, maximizar o produto dos excessos relativamente aos valores de reserva, no caso da negociação, ou maximizar o produto dos valores, no caso da decisão em grupo, e maximizar a PoP mínima.

Comparando a ordenação das alternativas de acordo com os parâmetros supostamente verdadeiros com a ordenação das alternativas de acordo com a regra de decisão utilizada, considerámos os resultados seguintes: posição que a melhor alternativa de acordo com a ordenação supostamente verdadeira atinge na ordenação gerada pela regra de decisão utilizada, posição que a melhor alternativa da ordenação gerada pela regra atinge na ordenação supostamente verdadeira, taxa de acerto, e perda de valor.

Consideramos que um interessante aspecto para investigação futura seria realizar simulações para comparar outras medidas de eficiência para além da taxa de acerto e da perda de valor. Outras medidas de eficiência a utilizar poderão ser os coeficientes de correlação entre ordenações e as distâncias entre ordenações, como referido no exemplo apresentado para o caso da decisão individual (Secção 3.3). Também é possível determinar a percentagem de vezes em que a alternativa escolhida é eficiente, e não o sendo, calcular a distância à eficiente mais próxima, como mostrado no exemplo relativo à negociação (Subsecção A.2.3 do Apêndice A).

Para a estratégia de seleccionar apenas uma alternativa, no caso da decisão individual, os nossos resultados estão de acordo com os encontrados na literatura que afirmam que quando temos uma ordenação dos pesos dos critérios, os pesos ROC são a melhor regra a ser usada, particularmente quando o número de critérios aumenta. Além disso, esta regra tem a vantagem de ser fácil de perceber e de implementar. Para a estratégia de seleccionar mais do que uma alternativa, mostrámos que seleccionar as duas melhores alternativas de acordo com os pesos ROC aumenta notoriamente as hipóteses de seleccionar a melhor. O propósito deste tipo de estratégias é simplificar o problema em termos do número de alternativas, com o objectivo de estudar em mais detalhe, ou com o objectivo de eliciar mais informação relativamente aos *trade-offs* envolvidos. Se considerarmos que não conhecemos o valor de cada alternativa em cada critério, a regra valores  $\Delta$ ROC é uma boa alternativa, uma vez que conduz a bons resultados. Como verificámos, na maioria dos casos, usar informação incompleta conduz a bons resultados na identificação das alternativas mais promissoras. Na nossa opinião a melhor regra apresentada foi a que combina o uso de pesos ROC com o uso de valores  $\Delta$ ROC. Esta regra é boa para seleccionar um subconjunto das alternativas mais promissoras. Para a decisão individual, por exemplo, com esta regra a taxa de acerto é de cerca de 80%. Seleccionar 3 alternativas garantia que se retinha a alternativa óptima em pelo menos 97% dos casos. A eliciação da informação utilizada torna a análise mais fácil, mesmo que não seja muito precisa. Recomendamos o uso de informação incompleta

para identificar as alternativas mais promissoras, uma vez que conduz a bons resultados e a eliciação da informação é fácil.

A posição que a melhor alternativa de acordo com a ordenação verdadeira atinge na ordenação gerada pela regra de decisão utilizada permite-nos avaliar uma estratégia de reter um pequeno subconjunto de alternativas em vez de apenas uma. Um aspecto em que não nos focámos é a selecção final de uma alternativa do conjunto de alternativas seleccionado pela regra. Em alguns casos, isto pode não ser necessário, se o propósito do processo de decisão é precisamente obter uma pequena lista de candidatos. Em outros casos, o processo deve continuar, mas uma vez que agora existem poucas alternativas elas podem ser estudadas com mais pormenor, reavaliando os seus desempenhos ou mesmo refinando o conjunto de critérios. No caso geral, o processo poderá continuar eliciando mais informação, como sustentado por Dias e Clímaco (2000a) e por White e Holloway (2008). Consideramos que esta ideia é um caminho interessante para investigação futura.

Uma das limitações do nosso trabalho relativamente à negociação e à decisão em grupo é o facto de termos usado poucas dimensões distintas para os problemas, o que faz com que, por exemplo, muitas vezes os testes estatísticos realizados não permitam rejeitar o facto de determinadas regras serem iguais relativamente a determinado indicador. Seria interessante usar mais casos, com dimensões distintas, para verificar se as conclusões se alterariam consoante a dimensão do problema. Este será certamente um tópico interessante para investigar futuramente.

Todas as conclusões obtidas devem ser lidas com cuidado, uma vez que as experiências cingiram-se ao caso em que se deseja decidir com base numa ordenação completa do peso dos critérios (ou do peso dos assuntos), e numa ordenação completa do valor de cada alternativa em cada critério (ou do valor de cada nível em cada assunto). O caso em que o conjunto dos valores aceitáveis para os parâmetros é definido por um conjunto de restrições lineares gerais é um ponto interessante para investigação futura. Para o caso em que o conjunto de pesos aceitáveis e o conjunto de valores aceitáveis são definidos por um conjunto de restrições lineares gerais, é possível que as regras ROC e  $\Delta$ ROC percam alguma da sua força. No entanto, como referido por Barron e Barrett (1996), o ROC é um exemplo específico de valores centróide, que se pode generalizar a qualquer conjunto convexo de valores especificado por inequações lineares. Além disso, para um grande número de situações, o cálculo de centróides não é muito difícil (Solymosi e Dombi, 1986). Butler e Olson (1999) consideram que quanto mais critérios existirem, menor será o erro que esta aproximação envolve. Testar a qualidade de aproximações baseadas em centróides para outro tipo de restrições é um assunto interessante para investigação futura. À semelhança do realizado por Salo e Hämäläinen (2001) podem ser utilizados rácios imprecisos em vez de informação ordinal apenas. Jia et al. (1998) realizaram um estudo onde mostraram que o uso de julgamentos sobre o rácio de pesos é melhor do que usar uma ordenação dos pesos, quando os erros nos rácios são pequenos ou moderados, ou produz resultados semelhantes, quando os erros são grandes. Relativamente à informação relacionada com o

peso dos critérios (ou dos assuntos), seria interessante que os decisores pudessem indicar também intensidades de preferência, por exemplo, afirmando que o segundo critério (ou assunto) é muito mais importante do que o primeiro critério (ou assunto).

A simulação que realizámos baseou-se na suposição de que a verdadeira ordenação dos pesos e dos valores é conhecida com certeza. No entanto, uma suposição mais realística é que o conhecimento da ordenação, assim como a magnitude dos valores dos parâmetros, é sujeito a incerteza. De facto, a ordenação fornecida pelos decisores pode não ser consistente com a verdadeira ordenação. Jia et al. (1998) reportam os resultados de uma simulação computacional baseada numa suposição mais realística de que tanto as ordenações como as magnitudes dos pesos são incertos e são conhecidos apenas de forma probabilística.

Nos Capítulos 6 e 7 sugerimos diferentes aproximações para lidar com o uso de informação incompleta, no caso da negociação e da decisão em grupo, respectivamente. No Capítulo 6, abordámos e comparámos três formas de lidar com informação incompleta no contexto das negociações: a aproximação dos parâmetros extremos, a aproximação dos parâmetros centrais, e a aproximação do domínio. Usando a aproximação dos parâmetros extremos o mediador poderá informar os negociadores de quais são as alternativas que podem ser eliminadas pois são certamente piores do que a solução de compromisso para pelo menos um dos negociadores, e de quais são as alternativas que são certamente melhores para ambos os negociadores, caso existam. Na aproximação dos parâmetros centrais utiliza-se uma aproximação para o valor dos parâmetros para sugerir alternativas. Com a aproximação do domínio o mediador é capaz de informar os negociadores do volume relativo do espaço dos parâmetros no qual cada alternativa é melhor do que a solução de compromisso para ambos os negociadores, é eficiente e maximiza o método de mediação, comparando com o volume de toda a região admissível. Analisámos como as aproximações podem ser aplicadas a diferentes níveis de informação sobre as preferências dos negociadores, que possam estar disponíveis. Considerámos que a informação incompleta é obtida de forma implícita ou explícita dos negociadores, na forma de relações de preferência ou indiferença. Considerámos diferentes métodos de mediação para que um mediador possa sugerir uma alternativa aos negociadores (maximizar a soma dos valores, maximizar o produto dos excessos relativamente à solução de compromisso, e maximizar a PoP mínima). No Capítulo 7, propusemos uma aproximação que enfatiza a exploração do espaço dos parâmetros (pesos dos decisores, pesos dos critérios e valores) com o objectivo de aproximar o volume do espaço dos parâmetros no qual cada alternativa é a melhor, ou não perde por uma diferença significativa, e de determinar aproximadamente as alternativas que cada alternativa domina. O objectivo da aproximação proposta é verificar se existem alternativas óptimas, ou quasi-óptimas, para uma vasta gama de valores para os parâmetros, bem como verificar se existem alternativas que dominam as outras, que são certamente perdedoras e podem ser eliminadas. Neste caso considerámos mais uma vez informação de caracter or-

dinal, admitindo que os decisores fornecem informação ordinal sobre os pesos dos critérios e sobre o valor de cada alternativa em cada critério. Considerámos a utilização de uma função de valor aditiva que pressupõe a utilização de pesos para os diferentes decisores, apesar dos pesos dos decisores terem sido deixados sem restrições.

Apesar do nosso estudo originar alguns resultados interessantes acerca das vantagens e desvantagens das aproximações que sugerimos, também tem algumas limitações que indicam a necessidade de investigação futura. Primeiramente, e provavelmente a limitação mais importante, é que aplicámos as aproximações apenas a um caso com propósitos ilustrativos. Um importante passo futuro na nossa investigação consistirá na criação de uma larga base empírica, para aplicar as aproximações a dados reais de negociações e decisões em grupo e quem sabe, usar simulações mais gerais para estudar as nossas aproximações numa vasta gama de cenários. No caso da negociação, tais estudos podem ser particularmente úteis para clarificar o impacto de informação adicional sobre as preferências e a relação entre a informação sobre as preferências que é observada e a informação que é explicitamente fornecida pelos negociadores.

Além do alargamento das bases empíricas, existem alguns tópicos interessantes para melhorar as nossas aproximações do ponto de vista teórico. No caso da negociação, admitimos que toda a informação obtida dos negociadores, quer implicitamente quer explicitamente, é consistente e reflecte as funções de valores reais de cada negociador. No entanto, os negociadores podem cometer alguns erros durante a negociação propondo ofertas incorrectas, ou incorrectamente aceitando ou rejeitando ofertas das outras partes, ou podem fornecer informação inconsistente quando explicitamente inquiridos sobre as suas preferências. É desta forma necessário estender as nossas aproximações para lidar com tais inconsistências. Uma possibilidade poderá ser eliminar da análise as restrições relacionadas com as propostas mais antigas ou pelo menos considerar que quanto mais antigas são as restrições obtidas através das propostas, menos importantes são, uma vez que ao longo do processo os negociadores podem identificar novas oportunidades que desejem explorar. A inconsistência nas respostas dos negociadores pode ser resultado de um erro, mas também pode ser resultado de uma manipulação deliberada. Em particular, quando as nossas aproximações são usadas por um mediador para sugerir um potencial acordo aos negociadores, ou mesmo por um árbitro para determinar uma solução vinculativa, podem existir incentivos para que as partes manipulem de forma estratégica as suas preferências. Apesar da complexidade dos cálculos envolvidos tornar difícil que os negociadores manipulem as suas respostas de forma óptima, as partes podem todavia melhorar com sucesso a sua situação mesmo com métodos simples (Vetschera, 2005a). Estas possibilidades, e o seu impacto na qualidade dos resultados, podem também ser analisadas por estudos computacionais.

À parte destes desenvolvimentos teóricos e empíricos, é necessário trabalho futuro para permitir a aplicação prática das nossas aproximações. Este trabalho inclui o desenvolvimento de cenários para a sua utilização. Apesar de no Capítulo 6 termos discutido a utilização das aproximações propostas como uma ferramenta para um mediador ou um ár-

bitro, este não é o único cenário no qual as aproximações propostas podem ser úteis. Elas também poderão ser aplicadas como ferramentas para suportar uma das partes em negociação (a perspectiva assimetricamente descritiva-prescritiva). Em tais casos, a qualidade da informação disponível sobre as preferências das duas partes será diferente, uma vez que um negociador poderá fornecer informação mais exacta sobre as suas próprias preferências, mas a informação relativa às preferências da outra parte será restrita a informação obtida implicitamente através do seu comportamento. No entanto, a metodologia apresentada também pode ser aplicada em tais cenários.

Outro tópico que precisa de ser clarificado, antes da sua aplicação, é a aceitabilidade, pelos utilizadores, das aproximações propostas. Existe alguma evidência empírica de que os negociadores são relutantes em aceitar soluções propostas por um sistema mecanizado, mesmo que seja para melhorar a sua situação (Kersten e Noronha, 1998; Korhonen et al., 1998). Desta forma, não é claro como os negociadores e os decisores irão reagir a propostas geradas pelas nossas aproximações. Isto também poderá ser um tópico de investigação futura com o objectivo de transformar os conceitos teóricos aqui introduzidos, em ferramentas práticas para negociações e decisões em grupo. Indo ao encontro da observação de Tervonen (2010), “The scientific MCDA community has produced a vast amount of *useful* methods, but a majority of them aren’t supported by *usable* software.”, consideramos que a transformação das aproximações que propomos em software que possa ser facilmente utilizado pelos negociadores e pelos decisores é também um importante tópico para investigação futura.

Relativamente à decisão em grupo, no Capítulo 7 propusemos uma aproximação que agrega as preferências individuais através de uma função de valor aditiva. A aproximação apresentada pode fornecer informações muito interessantes relativas à optimalidade e quasi-optimalidade, e pode ajudar a eliminar bastantes alternativas devido à dominância. Propusemos sugerir alternativas considerando a agregação das opiniões dos diferentes decisores, utilizando pesos para os mesmos. No entanto, estes pesos foram gerados de forma completamente livre ou apenas admitindo que nenhum peso possa ser de tal forma elevado que faça com que um decisor possa ser considerado um ditador. Isto eliminou a necessidade de comparar quão importante cada elemento do grupo é, e favorece a obtenção de conclusões que são largamente aceites entre os elementos. Apresentámos uma alternativa à definição de ditador de Arrow que consideramos ser mais adequada ao contexto abordado neste trabalho.

No entanto, o objectivo da decisão em grupo não é apenas agregar as preferências individuais. É necessário fornecer métodos que de forma interactiva, ajudem cada decisor a reflectir sobre as consequências dos seus *inputs* de tal forma que as suas preferências possam mudar depois de ouvidos os argumentos dos outros elementos do grupo. Neste contexto podemos referir as decisões em processo de conferência (por exemplo, Phillips e Bana e Costa (2007)). Relativamente a decisões em processo de conferência, Phillips (2006: 3) refere que:

(...) a way of helping a group of key players to resolve important issues in their organization by working together, under the guidance of an impartial facilitator, with the aid of a decision analysis model of participants' perspectives on the issues, developed on-the-spot over a period of two days. (...) The model serves as a “tool for thinking”, not as providing an optimal solution or “the right answer”.

Acreditamos que a aproximação por nós apresentada possa ser utilizada em decisões em processo de conferência, uma vez que é possível que, por exemplo, os decisores não sejam capazes de chegar a acordo sobre o exacto valor dos parâmetros mas consigam chegar a acordo sobre uma ordenação. Desta forma, a aproximação pode ser útil para ajudar os decisores a reflectirem sobre as consequências dos seus *inputs* mais do que para sugerir uma alternativa. Este será certamente um interessante tópico de investigação futura.

Além dos itens para investigação futura que fomos referindo ao longo deste capítulo, deixamos ainda algumas ideias mais gerais. Considerámos que as preferências dos decisores podem ser representadas por uma função de valor aditiva, o modelo mais popular para agregar múltiplas funções de valor, o que pode ser interessante de generalizar a outras formas de funções de valor. Acreditamos que possa também ser interessante estudar a generalização das aproximações apresentadas para outros métodos multicritério além da Teoria de Valor Multicritério. Relativamente ao tipo de informação utilizado restringimos o nosso estudo ao caso em a informação incompleta sobre os valores dos parâmetros se refere a uma ordenação dos mesmos. No entanto seria interessante considerar também outro tipo de restrições. Ao longo deste trabalho focámo-nos na problemática da escolha de uma alternativa, ou de um pequeno subconjunto de alternativas, ou na ordenação das mesmas, não abordando a problemática da afectação. Consideramos que estender algumas das aproximações apresentadas ao longo deste trabalho ao caso da problemática da afectação poderá ser um importante tópico para investigação futura.



# Decisão Colectiva com Informação Ordinal: Comparação de Diferentes Regras

---

Este apêndice serve de complemento ao apresentado no Capítulo 5. Optámos por remeter alguns pormenores para apêndice para tornar a leitura do capítulo mais fluída. A Secção A.1 refere-se à decisão em grupo e a Secção A.2 à negociação. Todas as tabelas que vão ser referidas são apresentadas no fim do apêndice (Secção A.3).

## A.1 Decisão em Grupo: agregação usando pesos para os decisores

Na perspectiva abordada nesta secção do apêndice consideramos um problema no qual existe um ditador benevolente que terá a responsabilidade pela decisão final, mas que desejará ter em conta a opinião dos restantes decisores. Essa agregação será realizada considerando que nem todos os decisores têm o mesmo peso<sup>1</sup>. Tal como referido no Capítulo 4 (rever Subsecção 4.3.3), lidamos com a agregação de desempenhos multicritério através de uma função de valor aditiva da forma (4.12):

$$v^G(x^{(j)}) = \sum_{k=1}^p d_k \sum_{i=1}^n w_i^k v_i^k(x^{(j)}), \quad j = 1, \dots, m.$$

A principal diferença entre esta secção e o considerado no Capítulo 5, relativamente à decisão em grupo, é que agora vamos mostrar alguns resultados obtidos usando aproximações para os pesos dos diferentes decisores (os  $d_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ ). Relembremos que no Capítulo 5 apresentámos resultados obtidos quando o objectivo foi sugerir alternativas com base em diferentes métodos não havendo necessidade de atribuir pesos aos diferentes decisores (rever Subsecção 5.3.3). Consideramos agora cenários nos quais os decisores são capazes de indicar pesos precisos que reflectem a sua importância (referidos como pesos TRUE para os decisores), bem como cenários nos quais cada decisor é capaz de indicar uma ordenação dos pesos dos diferentes decisores.

---

<sup>1</sup>Esta secção do apêndice baseia-se em parte do trabalho que relatámos em Sarabando e Dias (2010c).

Seja  $d_{s[1]}$  o peso que o decisor  $s$  impõe no valor do decisor que para ele é mais importante,  $d_{s[2]}$  o peso que o decisor  $s$  impõe no valor do decisor que para ele é o segundo mais importante, ... e  $d_{s[p]}$  o peso que o decisor  $s$  impõe no valor do decisor que para ele é menos importante, para  $s = 1, \dots, p$ . Sem perda de generalidade, consideramos que, para o decisor  $s$  ( $s = 1, \dots, p$ ) o conjunto de pesos admissíveis para os diferentes elementos do grupo pode ser representado por:

$$D^s = \{(d_{s[1]}, d_{s[2]}, \dots, d_{s[p]}) : d_{s[1]} \geq d_{s[2]} \geq \dots \geq d_{s[p]} \geq 0\}. \quad (\text{A.1})$$

A regra pesos ROC, apresentada na Subsecção 3.2.2, pode também ser utilizada para aproximar o peso dos decisores. Usando a regra pesos ROC, uma aproximação para o peso que o decisor  $s$  atribui ao decisor que para ele é o  $y$  mais importante é dada por ( $s = 1, \dots, p$ ):

$$d_{s[y]}^{(ROC)} = \frac{1}{p} \sum_{l=y}^p \frac{1}{l}, \quad y = 1, \dots, p. \quad (\text{A.2})$$

Para determinar o peso dos decisores, pode ser usado um procedimento similar ao proposto por Nakayama et al. (1979). Relembremos que Nakayama et al. (1979) propõem pedir que cada decisor indique qual é o peso que impõe no valor dos outros decisores, normalizar estes valores de forma a que a soma dos pesos que cada decisor atribui seja igual a um, e determinar o peso de cada decisor  $k$ , dividindo a soma dos valores normalizados que cada decisor impõe no valor do decisor  $k$  pelo número de decisores. Com este procedimento, uma vez que usando pesos ROC para os decisores já se obtêm pesos que somem a unidade, o peso de cada decisor  $k$  ( $k = 1, \dots, p$ ) pode assim ser obtido através de:

$$d_k^{(ROC)} = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p d_{sk}^{(ROC)}, \quad (\text{A.3})$$

onde  $d_{sk}^{(ROC)} \in \{d_{s[1]}^{(ROC)}, \dots, d_{s[p]}^{(ROC)}\}$  representa o peso que o decisor  $s$  atribui ao decisor  $k$ . Chamamos a estes pesos, pesos ROC para os decisores.

Nesta secção concentramos assim a nossa atenção nos resultados obtidos usando uma aproximação que utiliza a agregação usando pesos para os decisores. Vamos focar-nos no caso com 3 decisores. Relembremos que usando métodos para fazer a agregação que não requerem o uso de pesos para os decisores, a taxa de acerto diminui quando se aumenta o número de decisores (rever Subsecção 5.3.3).

A Tabela A.1 apresenta a posição que a melhor alternativa da ordenação gerada pelas diferentes regras atinge na ordenação supostamente verdadeira. Na Tabela A.2 é possível ver a posição que a melhor alternativa de acordo com a ordenação supostamente verdadeira atinge na ordenação gerada pela regra de decisão utilizada. Os resultados relativos à perda de valor são apresentados na Tabela A.3. Nas tabelas apresentadas, “TRUE ROC TRUE” significa o uso de pesos TRUE para os decisores, pesos ROC para os critérios e valores

TRUE, “TRUE ROC  $\Delta$ ROC” significa o uso de pesos TRUE para os decisores, pesos ROC para os critérios e valores  $\Delta$ ROC, e assim sucessivamente.

Também nesta aproximação seria possível realizar um estudo exaustivo como aquele apresentado na Subsecção 5.3.3. No entanto, uma vez que não traz nada de muito novo para o trabalho, não o faremos. De qualquer forma, apresentamos todos os resultados necessários para que esse estudo possa ser realizado sem dificuldade. Assim, apenas iremos comparar os resultados usando pesos TRUE para os decisores com os resultados usando pesos ROC para os decisores. Realizamos alguns testes estatísticos para comparar o uso de pesos TRUE com o uso de pesos ROC para os decisores, relativamente à taxa de acerto média e à perda de valor média. A Tabela A.4 mostra os resultados e a Figura A.1 esquematiza as conclusões, para níveis de significância iguais a 1% e a 5%<sup>2</sup>:

- Apenas para a regra valores ROC, e para um nível de significância de 1%, não é possível concluir que a diferença na taxa de acerto média entre o uso de pesos TRUE e pesos ROC para os decisores é significativa. Em todos os outros casos os resultados são obviamente favoráveis ao uso de pesos TRUE para os decisores.
- Comparando a perda de valor média, em todos os casos, a diferença pode ser considerada significativa, sendo favorável ao uso de pesos TRUE para os decisores.

	Taxa acerto	Perda de valor
TRUE ROC TRUE - ROC ROC TRUE		
TRUE ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC $\Delta$ ROC		
TRUE ROC ROC - ROC ROC ROC		

Figura A.1: Comparação dos resultados das diferentes regras para a decisão em grupo: taxa de acerto média e perda de valor média - agregação usando pesos para os decisores (3 decisores).

<sup>2</sup>Relembremos que assinalamos a preto o caso em que, para um nível de significância 1%, as regras podem ser consideradas diferentes. Assinalamos a cinzento escuro o caso em que as regras podem ser consideradas diferentes para um nível de significância de 5%, mas não para um nível de significância de 1%. E assinalamos a cinzento claro o caso em que as regras não podem ser consideradas diferentes mesmo utilizando um nível de significância de 5%.

## A.2 Negociação: utilização de *template* conhecido para gerar exemplos aleatórios

### A.2.1 Introdução

O principal objectivo desta secção do apêndice é usar um *template* conhecido para gerar exemplos aleatórios para o caso da negociação, com o intuito de mostrar que os resultados obtidos neste exemplo, em que não se considera o mesmo número de níveis em todos os assuntos e não se considera o mesmo valor de reserva para ambos os negociadores, não são muito distintos dos apresentados no Capítulo 5<sup>3</sup>.

Com o objectivo de testar as diferentes regras, utilizámos assim um caso como modelo para gerar exemplos aleatórios: o caso Nelson *versus* Amstore (mesmo caso utilizado na Secção 6.4). Neste caso existem três assuntos: preço (10, 10.5, 11, 11.5 ou 12 mil dólares), *design* (básico ou melhorado) e prazo (20, 21, 22, 23, 24, 25 ou 26 dias). No problema original, o valor de reserva para Nelson é igual a 60 e para Amstore é igual a 20 (numa escala de 0 a 100). No nosso estudo considerámos que a informação relativa aos valores de reserva é também incompleta.

Para utilizar os métodos de maximizar o produto dos excessos relativamente aos valores de reserva e maximizar a PoP mínima, é necessário saber qual o valor de reserva de ambas as partes em negociação. Mais uma vez, à semelhança do exposto no Capítulo 5, considerámos inicialmente que os valores de reserva são iguais a zero, o que corresponde à situação em que não existem valores de reserva. Numa segunda fase, supusemos que sabíamos que o valor de reserva para Nelson é igual ao valor da alternativa (preço, *design*, prazo)=(10.5, básico, 23). No problema original esta é uma das quatro alternativas que apresenta um valor igual a 60 para Nelson e é a mais equilibrada, uma vez que apresenta posições menos extremas. Supusemos também que o valor de reserva de Amstore é igual ao valor da alternativa (preço, *design*, prazo)=(12, básico, 20). No problema original esta alternativa apresenta, para Amstore, um valor igual a 20. Note-se que desta forma o valor de reserva de ambas as partes além de não ser igual, não se mantém constante de simulação para simulação.

### A.2.2 Paralelismo com o exposto no Capítulo 5

Na Tabela A.5 é possível ver a média, o desvio padrão e o número máximo de alternativas melhores para ambas as partes do que os valores de reserva. Note-se que, dependendo da regra de decisão utilizada, em média, entre 17 e 20 alternativas são melhores para ambas as partes do que os valores de reserva (num total de 70 alternativas). No problema original existem 26 alternativas efectivamente nestas condições. Apenas por curiosidade, na Tabela A.6 apresentamos a percentagem de vezes em que a regra fornece uma alternativa não admissível.

---

<sup>3</sup>Esta secção do apêndice baseia-se no trabalho que relatámos em Sarabando e Dias (2009b).

Resultados relativos à posição que a melhor alternativa de acordo com as diferentes regras atinge na ordenação supostamente verdadeira são apresentados nas Tabelas A.7 e A.8, não considerando valores de reserva e considerando valores de reserva, respectivamente. Como esperado, uma vez que o número total de alternativas é igual a 70, reter apenas uma alternativa não é suficiente na maioria dos casos. Tanto considerando valores de reserva, como não considerando valores de reserva, retendo 20 alternativas (cerca de 30% do número total de alternativas) a probabilidade de reter a verdadeira melhor é quase sempre superior a 90%. A taxa de acerto da regra pesos ROC valores ROC e usando o método da soma é surpreendentemente alta. Isto acontece devido ao grande número de empates. Usando a regra valores ROC, a função de valor de ambas as partes é simétrica, e devido a este facto, quando os pesos coincidem existe um grande número de alternativas com igual soma de valores. As diferenças entre os resultados considerando valores de reserva e não considerando valores de reserva não são muito substanciais.

Resultados relativos à posição da suposta melhor alternativa na ordenação fornecida por cada regra são também mostrados nas Tabelas A.7 e A.8, não considerando valores de reserva e considerando valores de reserva, respectivamente. Não considerando valores de reserva, em mais de 88% dos casos a alternativa escolhida pela regra é uma das 20 melhores alternativas. Se considerarmos as regras pesos ROC valores TRUE e pesos ROC valores  $\Delta$ ROC, em mais de 87% dos casos a alternativa escolhida pela regra é uma das 10 melhores alternativas. Os resultados são ligeiramente melhores considerando valores de reserva. As percentagens correspondentes são de 93% e 88%, respectivamente. Relembremos que nas simulações apresentadas na Subsecção 5.3.2 os resultados relativos à probabilidade de reter a suposta melhor alternativa pioravam considerando valores de reserva.

Na Tabela A.9 é possível ver a perda de valor das diferentes regras, considerando os diferentes métodos, tanto não utilizando valores de reserva como utilizando valores de reserva. Como esperado, os piores resultados são obtidos usando a regra pesos ROC valores ROC, porque este é o caso em que menos informação é requerida dos negociadores. No entanto, mesmo utilizando esta regra a perda de valor não é muito elevada.

### **A.2.3 Outros indicadores que mostram se a alternativa fornecida por cada regra é uma boa alternativa**

Ao longo do Capítulo 5, e à semelhança do exposto no Capítulo 3, para ver se a alternativa fornecida por cada regra é uma boa alternativa, usámos indicadores como a taxa de acerto e a perda de valor. No entanto, outros indicadores poderiam ter sido utilizados. Neste exemplo, apenas por curiosidade, determinámos, além dos indicadores referidos anteriormente, a percentagem de vezes em que a alternativa escolhida pela regra é eficiente. Relembre que alternativas eficientes são alternativas para as quais não é possível melhorar o valor para uma das partes sem piorar o valor para uma das outras partes. Quando a alternativa escolhida não é eficiente determinámos ainda a distância entre a alternativa escolhida e a alternativa eficiente mais próxima, usando a distância Euclidiana

(norma  $L_2$ ) e a distância Tchebychev (norma  $L_\infty$ ). Sejam  $x^{(i)}$  e  $x^{(j)}$  duas alternativas. A distância Euclidiana pode ser calculada através de:

$$d_E(x^{(i)}, x^{(j)}) = \sqrt{(v^1(x^{(i)}) - v^1(x^{(j)}))^2 + (v^2(x^{(i)}) - v^2(x^{(j)}))^2}. \quad (\text{A.4})$$

A distância de Tchebychev pode ser calculada através de:

$$d_T(x^{(i)}, x^{(j)}) = \max\{|v^1(x^{(i)}) - v^1(x^{(j)})|, |v^2(x^{(i)}) - v^2(x^{(j)})|\}. \quad (\text{A.5})$$

Na Tabela A.10 apresentamos a percentagem de vezes em que a alternativa escolhida é eficiente. Os resultados relativos à distância Euclidiana e à distância Tchebychev estão apresentados nas Tabelas A.11 e A.12, respectivamente. Nas tabelas relativas às distâncias é possível ver a média, o desvio padrão e o valor máximo da distância. Relativamente à percentagem de vezes em que a alternativa escolhida é eficiente, e não considerando valores de reserva, as diferentes regras produzem piores resultados para o método PoP do que para os restantes métodos. Para este método, a percentagem de vezes nos quais a alternativa escolhida é eficiente não é muito elevada e, além disso, quando a alternativa escolhida não é eficiente a distância à eficiente mais próxima é superior à dos restantes métodos. Com o método PoP, usando as três regras, a percentagem de vezes em que a alternativa escolhida é eficiente é mais elevada considerando valores de reserva. Passa-se o oposto considerando o método da soma. Relativamente à distância à eficiente mais próxima, para o método da soma, com todas as regras, os resultados também são melhores não considerando valores de reserva, verificando-se o oposto usando o método PoP. Usando os dois tipos de distância entre alternativas os resultados são semelhantes.

#### A.2.4 As regras fornecem uma aproximação justa?

Neste exemplo, determinámos ainda a diferença entre o valor real da verdadeira melhor alternativa e o valor real da alternativa escolhida pela regra usada de acordo com os diferentes métodos, para ambas as partes. Isto permite-nos saber se usar apenas informação ordinal faz com que uma das partes seja tratada de forma menos justa, quando comparando com a situação em que é usada informação cardinal precisa. Por exemplo, para as diferentes regras e para o método de maximizar o soma dos valores, determinámos

$$v^1(x^{(real-soma)}) - v^1(x^{(regra-soma)}) \quad (\text{A.6})$$

e

$$v^2(x^{(real-soma)}) - v^2(x^{(regra-soma)}). \quad (\text{A.7})$$

Relembremos que usámos a notação  $x^{(real-soma)}$  para representar a suposta melhor alternativa de acordo com o método de maximizar a soma dos valores, e  $x^{(regra-soma)}$  para representar a melhor alternativa fornecida pela regra de acordo com o mesmo método.

Consideramos que a alternativa obtida pela regra é uma aproximação justa se o valor de (A.6) for próximo do de (A.7).

Pode ver-se na Tabela A.13 a diferença média entre o valor real da melhor alternativa e o valor real da alternativa escolhida pela regra utilizada, de acordo com os diferentes métodos, para Nelson e Amstore, não considerando valores de reserva e considerando valores de reserva:

- Não considerando valores de reserva, a melhor aproximação para Nelson ocorrerá se a regra pesos ROC valores TRUE for usada, porque a diferença média é inferior. No entanto, mesmo usando esta regra, em média, Nelson perde com respeito à verdadeira melhor alternativa, porque a diferença é positiva. A pior aproximação é obtida usando a regra pesos ROC valores ROC. Maximizando a soma dos valores, com todas as regras, aparecem piores aproximações para Nelson.

Para todas as regras, usando o método da soma, em média, Amstore ganha comparativamente à verdadeira melhor alternativa. O ganho é superior considerando a regra pesos ROC valores ROC e inferior para a regra pesos ROC valores  $\Delta$ ROC. Para todas as regras, usando os métodos do produto e PoP, em média, Amstore perde comparativamente à verdadeira melhor alternativa. A perda é superior usando a regra pesos ROC valores ROC. A aproximação menos favorável é obtida usando o método PoP.

Em média, ambas as partes perdem em usar as regras em vez de valores reais, excepto Amstore com o método da soma. As regras fornecem resultados mais justos para o método PoP, uma vez que a diferenças consideradas apresentam valores semelhantes para Nelson e Amstore, e menos justos para o método da soma.

- Considerando valores de reserva, as regras são menos prejudiciais para o Nelson. Para o método da soma, Amstore ganha menos considerando valores de reserva, para o método do produto perde mais, e para o método PoP perde menos.

Na maioria dos casos, e considerando todas as regras, em média, os negociadores perdem ao usar as regras em vez de valores reais, no entanto a perda média não é muito elevada. É possível considerar que para o método PoP as regras fornecem uma aproximação justa, porque as diferenças consideradas são semelhantes para ambas as partes. O mesmo não acontece considerando o método da soma. Para o método de maximizar a soma dos valores as regras fornecem aproximações menos equilibradas entre as duas partes.

### A.3 Tabelas

5*5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
TRUE ROC TRUE	1.20	83.48	97.30	99.48	99.96	100
TRUE ROC ΔROC	1.24	81.12	96.06	99.20	99.96	100
TRUE ROC ROC	1.36	73.78	92.84	98.10	99.78	100
ROC ROC TRUE	1.24	80.94	96.02	99.18	99.92	100
ROC ROC ΔROC	1.27	78.40	95.38	99.00	99.86	100
ROC ROC ROC	1.38	72.22	92.22	97.78	99.76	100
5*15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
TRUE ROC TRUE	1.34	77.56	92.64	97.48	99.00	99.60
TRUE ROC ΔROC	1.34	76.86	93.04	97.40	99.02	99.66
TRUE ROC ROC	1.51	69.00	88.10	95.16	98.10	99.14
ROC ROC TRUE	1.44	72.94	89.96	96.02	98.16	99.12
ROC ROC ΔROC	1.46	72.28	89.80	95.78	98.16	99.10
ROC ROC ROC	1.59	66.44	86.16	93.64	97.32	98.70
15*5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
TRUE ROC TRUE	1.15	87.50	97.82	99.58	99.98	100
TRUE ROC ΔROC	1.20	83.52	96.84	99.54	100	100
TRUE ROC ROC	1.32	74.80	94.14	98.80	99.82	100
ROC ROC TRUE	1.21	83.54	96.58	99.28	99.98	100
ROC ROC ΔROC	1.25	80.80	95.28	99.08	99.92	100
ROC ROC ROC	1.36	72.84	92.76	98.24	99.74	100
15*15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
TRUE ROC TRUE	1.27	80.80	94.90	98.64	99.32	99.80
TRUE ROC ΔROC	1.29	80.18	94.06	97.96	99.20	99.68
TRUE ROC ROC	1.45	73.00	89.84	95.54	98.08	99.14
ROC ROC TRUE	1.37	75.74	92.06	97.32	98.84	99.50
ROC ROC ΔROC	1.38	75.92	91.62	96.78	98.80	99.52
ROC ROC ROC	1.54	69.34	87.56	94.20	97.38	98.64

Tabela A.1: Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira: agregação usando pesos para os decisores (3 decisores).



5*5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
TRUE ROC TRUE	1.20	83.48	96.94	99.50	99.96	100
TRUE ROC ΔROC	1.23	81.12	96.14	99.38	99.88	100
TRUE ROC ROC	1.35	73.78	93.16	98.32	99.80	100
ROC ROC TRUE	1.24	80.94	96.06	99.30	99.92	100
ROC ROC ΔROC	1.28	78.40	94.86	99.08	99.88	100
ROC ROC ROC	1.38	72.22	91.94	97.78	99.72	100
5*15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
TRUE ROC TRUE	1.33	77.56	92.92	97.66	99.16	99.68
TRUE ROC ΔROC	1.34	76.86	92.86	97.62	99.08	99.72
TRUE ROC ROC	1.54	69.00	87.38	94.74	97.60	98.96
ROC ROC TRUE	1.44	72.94	89.78	96.02	98.28	99.32
ROC ROC ΔROC	1.44	72.28	90.46	95.90	98.38	99.30
ROC ROC ROC	1.60	66.44	86.20	93.24	96.74	98.50
15*5	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
TRUE ROC TRUE	1.15	87.50	97.94	99.70	99.96	100
TRUE ROC ΔROC	1.20	83.52	96.76	99.40	99.96	100
TRUE ROC ROC	1.33	74.08	94.00	98.80	99.88	100
ROC ROC TRUE	1.21	83.54	96.62	99.30	99.92	100
ROC ROC ΔROC	1.24	80.80	95.58	99.18	99.96	100
ROC ROC ROC	1.37	72.84	92.36	98.18	99.76	100
15*15	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5
TRUE ROC TRUE	1.27	80.80	94.78	98.28	99.50	99.84
TRUE ROC ΔROC	1.29	80.18	93.70	98.12	99.40	99.78
TRUE ROC ROC	1.45	73.00	89.54	95.50	98.24	99.28
ROC ROC TRUE	1.37	75.74	92.14	96.68	98.64	99.52
ROC ROC ΔROC	1.38	75.92	91.60	96.62	98.68	99.52
ROC ROC ROC	1.53	69.34	87.46	94.08	97.56	98.80

Tabela A.2: Posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: agregação usando pesos para os decisores (3 decisores).

5*5	Média	Des. Pad.	Máximo
TRUE ROC TRUE	0.0372	0.0340	0.1991
TRUE ROC ΔROC	0.0454	0.0394	0.3635
TRUE ROC ROC	0.0602	0.0507	0.3492
ROC ROC TRUE	0.0454	0.0403	0.2243
ROC ROC ΔROC	0.0500	0.0444	0.3635
ROC ROC ROC	0.0646	0.0551	0.3002
5*15	Média	Des. Pad.	Máximo
TRUE ROC TRUE	0.0275	0.0247	0.2043
TRUE ROC ΔROC	0.0275	0.0248	0.1932
TRUE ROC ROC	0.0365	0.0314	0.2254
ROC ROC TRUE	0.0332	0.0296	0.1973
ROC ROC ΔROC	0.0338	0.0299	0.2343
ROC ROC ROC	0.0407	0.0351	0.2766
15*5	Média	Des. Pad.	Máximo
TRUE ROC TRUE	0.0188	0.0180	0.1076
TRUE ROC ΔROC	0.0215	0.0187	0.1238
TRUE ROC ROC	0.0341	0.0289	0.2037
ROC ROC TRUE	0.0248	0.0229	0.1523
ROC ROC ΔROC	0.0269	0.0247	0.1578
ROC ROC ROC	0.0378	0.0315	0.2037
15*15	Média	Des. Pad.	Máximo
TRUE ROC TRUE	0.0146	0.0136	0.1067
TRUE ROC ΔROC	0.0157	0.0146	0.1006
TRUE ROC ROC	0.0223	0.0195	0.1176
ROC ROC TRUE	0.0190	0.0176	0.1384
ROC ROC ΔROC	0.0199	0.0179	0.1182
ROC ROC ROC	0.0254	0.0218	0.1447

Tabela A.3: Perda de valor: agregação usando pesos para os decisores (3 decisores).

	Taxa acerto		Perda de valor	
	$t_{obs}$	valor-p	$t_{obs}$	valor-p
TRUE ROC TRUE - ROC ROC TRUE	7.351	0.005	-7.701	0.005
TRUE ROC $\Delta$ ROC - ROC ROC $\Delta$ ROC	7.211	0.005	-11.037	0.002
TRUE ROC ROC - ROC ROC ROC	5.327	0.013	-13.271	0.001

Tabela A.4: Comparação da taxa de acerto média e da perda de valor média: agregação usando pesos para os decisores (3 decisores).

	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	17.69	12.09	62
ROC $\Delta$ ROC	17.77	12.56	64
ROC ROC	19.03	13.61	64

Tabela A.5: Número de alternativas melhores do que os valores de reserva para ambas as partes: Nelson *versus* Amstore.

	Soma	Produto	PoP
ROC TRUE	14.89	10.52	9.47
ROC $\Delta$ ROC	17.75	12.14	11.28
ROC ROC	23.62	17.28	15.31

Tabela A.6: Percentagem de vezes em que a alternativa escolhida pela regra é não admissível: Nelson *versus* Amstore.

Regras - Verdadeira								
Soma	Média	% 1	% $\leq$ 2	% $\leq$ 3	% $\leq$ 4	% $\leq$ 5	% $\leq$ 10	% $\leq$ 20
ROC TRUE	5.67	43.06	57.40	65.72	71.78	75.46	85.90	92.80
ROC $\Delta$ ROC	6.15	37.04	51.96	60.72	67.04	71.84	83.84	92.54
ROC ROC	11.41	26.42	37.86	44.68	50.18	54.54	68.98	81.54
Produto	Média	% 1	% $\leq$ 2	% $\leq$ 3	% $\leq$ 4	% $\leq$ 5	% $\leq$ 10	% $\leq$ 20
ROC TRUE	4.68	43.74	57.70	67.78	74.04	78.38	88.06	94.64
ROC $\Delta$ ROC	5.09	36.66	53.12	63.76	70.10	75.50	87.26	94.24
ROC ROC	8.71	22.50	33.50	42.82	51.10	56.78	74.16	88.10
PoP	Média	% 1	% $\leq$ 2	% $\leq$ 3	% $\leq$ 4	% $\leq$ 5	% $\leq$ 10	% $\leq$ 20
ROC TRUE	5.21	28.36	40.82	52.98	62.32	69.32	87.14	96.58
ROC $\Delta$ ROC	5.45	25.46	37.46	50.58	60.94	67.94	86.12	96.40
ROC ROC	7.42	17.02	27.60	40.12	49.46	56.28	78.20	92.42
Verdadeira - Regras								
Soma	Média	% 1	% $\leq$ 2	% $\leq$ 3	% $\leq$ 4	% $\leq$ 5	% $\leq$ 10	% $\leq$ 20
ROC TRUE	4.18	53.68	64.72	73.14	76.32	81.68	89.84	95.84
ROC $\Delta$ ROC	4.86	49.02	61.20	70.02	74.48	78.94	87.88	94.22
ROC ROC	6.88	56.26	60.68	64.32	67.44	70.54	81.32	88.28
Produto	Média	% 1	% $\leq$ 2	% $\leq$ 3	% $\leq$ 4	% $\leq$ 5	% $\leq$ 10	% $\leq$ 20
ROC TRUE	3.58	48.24	62.56	71.20	77.06	81.70	92.82	98.16
ROC $\Delta$ ROC	4.16	41.14	56.20	65.54	72.64	77.64	90.48	97.58
ROC ROC	7.51	26.72	36.98	42.88	53.38	57.30	76.80	89.70
PoP	Média	% 1	% $\leq$ 2	% $\leq$ 3	% $\leq$ 4	% $\leq$ 5	% $\leq$ 10	% $\leq$ 20
ROC TRUE	4.71	28.36	45.52	54.52	62.78	68.92	89.80	98.42
ROC $\Delta$ ROC	5.11	25.70	42.22	51.58	59.38	66.30	87.54	98.00
ROC ROC	6.95	20.00	33.18	40.74	47.44	55.34	78.44	93.80

Tabela A.7: Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira e posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: sem valores de reserva - Nelson *versus* Amstore.

Regras - Verdadeira								
Soma	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	4.70	42.03	56.70	65.61	72.17	76.24	86.50	96.37
ROC ΔROC	5.12	35.90	51.24	61.49	67.96	72.68	85.13	96.06
ROC ROC	7.69	24.60	36.94	46.38	52.89	58.12	73.54	90.86
Produto	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	3.49	46.17	60.68	70.88	77.02	81.51	92.98	99.16
ROC ΔROC	3.82	40.66	56.12	67.00	74.60	79.31	91.73	99.02
ROC ROC	5.51	27.05	41.40	52.34	60.10	66.50	83.16	97.30
PoP	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	3.99	33.07	49.40	61.55	70.97	76.49	92.66	99.39
ROC ΔROC	4.25	30.22	46.40	59.12	68.73	75.10	91.34	99.15
ROC ROC	5.72	21.00	35.58	46.97	55.74	63.07	83.64	97.78
Verdadeira - Regras								
Soma	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	3.99	46.95	60.52	69.38	75.39	79.64	90.31	97.39
ROC ΔROC	4.49	42.21	56.08	66.04	71.66	76.66	88.58	96.43
ROC ROC	5.80	43.12	51.65	57.79	63.38	67.66	82.57	93.54
Produto	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	3.35	46.17	62.61	72.19	78.41	82.97	93.78	99.06
ROC ΔROC	3.75	40.66	58.26	68.39	75.03	79.93	92.12	98.69
ROC ROC	5.55	27.05	43.38	53.96	61.07	67.19	84.09	96.51
PoP	Média	% 1	% ≤ 2	% ≤ 3	% ≤ 4	% ≤ 5	% ≤ 10	% ≤ 20
ROC TRUE	3.92	33.07	51.12	63.03	71.92	77.54	92.90	99.15
ROC ΔROC	4.30	30.22	48.34	59.96	69.07	75.20	90.97	98.55
ROC ROC	5.79	21.00	36.99	48.18	57.77	64.20	83.86	96.72

Tabela A.8: Posição da melhor alternativa de acordo com as diferentes regras na ordenação supostamente verdadeira e posição da suposta melhor alternativa na ordenação induzida pelas diferentes regras: com valores de reserva - Nelson *versus* Amstore.

Soma	Sem valores reserva			Com valores reserva		
	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	9.13	10.24	82.80	8.51	10.48	85.92
ROC ΔROC	9.35	10.16	74.85	8.66	10.19	70.00
ROC ROC	14.87	13.35	91.61	10.75	11.11	89.22
Produto	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	666.68	758.18	5064.96	208.61	304.10	2617.30
ROC ΔROC	656.06	758.77	5452.67	210.67	277.68	2526.76
ROC ROC	925.08	847.72	6665.55	319.38	387.08	4993.22
PoP	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	0.0819	0.0772	0.5393	0.1681	0.1645	0.9362
ROC ΔROC	0.0857	0.0802	0.5808	0.1797	0.1679	0.9740
ROC ROC	0.1140	0.1015	0.8017	0.2210	0.1912	0.9784

Tabela A.9: Perda de valor: Nelson *versus* Amstore.

	Sem valores reserva			Com valores reserva		
	Soma	Produto	PoP	Soma	Produto	PoP
ROC TRUE	94.26	91.06	80.92	92.36	91.24	85.60
ROC ΔROC	92.22	90.22	79.18	89.60	89.20	84.02
ROC ROC	88.72	78.36	67.46	78.13	78.13	71.90

Tabela A.10: Percentagem de vezes em que a alternativa escolhida é eficiente: Nelson *versus* Amstore.

Soma	Sem valores reserva			Com valores reserva		
	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	6.38	4.92	26.38	7.46	5.38	35.46
ROC ΔROC	6.05	4.88	38.75	7.32	5.94	35.90
ROC ROC	7.50	5.93	36.79	8.97	7.50	51.23
Produto	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	7.95	6.30	42.28	8.39	5.92	35.07
ROC ΔROC	8.04	6.41	36.59	8.74	6.98	39.49
ROC ROC	10.63	9.59	58.90	9.63	7.71	52.14
PoP	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	9.53	7.17	42.07	8.08	5.80	32.02
ROC ΔROC	9.54	7.42	42.63	8.65	7.01	39.49
ROC ROC	11.09	8.99	58.90	9.51	7.60	52.14

Tabela A.11: Distância Euclidiana entre a alternativa escolhida e a eficiente mais próxima: Nelson *versus* Amstore.

Soma	Sem valores reserva			Com valores reserva		
	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	5.60	4.34	25.91	6.61	4.83	29.61
ROC ΔROC	5.29	4.22	34.31	6.46	5.22	29.39
ROC ROC	6.59	5.14	33.42	7.88	6.56	49.29
Produto	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	7.02	5.58	33.15	7.40	5.30	29.55
ROC ΔROC	7.12	5.79	33.32	7.65	6.12	32.32
ROC ROC	9.26	8.24	53.46	8.46	6.70	45.50
PoP	Média	Des. Pad.	Máximo	Média	Des. Pad.	Máximo
ROC TRUE	8.53	6.47	38.28	7.21	5.22	29.55
ROC ΔROC	8.57	6.80	39.56	7.71	6.37	34.26
ROC ROC	9.80	7.90	53.46	8.41	6.66	45.50

Tabela A.12: Distância de Tchebychev entre a alternativa escolhida e a eficiente mais próxima: Nelson *versus* Amstore.

Sem valores reserva	Nelson			Amstore		
	Soma	Produto	PoP	Soma	Produto	PoP
ROC TRUE	8.38	3.44	3.20	-3.15	1.81	3.21
ROC ΔROC	8.84	4.05	3.43	-2.95	1.82	2.88
ROC ROC	20.74	6.02	4.53	-9.46	5.06	5.97
Com valores reserva	Soma	Produto	PoP	Soma	Produto	PoP
ROC TRUE	5.03	1.17	1.50	-0.72	2.57	2.27
ROC ΔROC	5.69	1.70	1.83	-0.28	2.93	2.38
ROC ROC	10.69	3.40	3.75	-1.10	5.44	4.33

Tabela A.13: Média da diferença entre o valor real da melhor alternativa e o valor real da alternativa escolhida pela regra utilizada: Nelson *versus* Amstore.

# Aproximações para Apoio à Mediação com Informação Incompleta

---

Neste apêndice mostramos alguns resultados obtidos relativamente ao exemplo apresentado no Capítulo 6 (rever Secção 6.4), relaxando algumas das suposições que foram feitas. Ilustramos como as aproximações podem ser usadas, utilizando como exemplo a aproximação do domínio, que como referimos pode ser suficiente para implementar todas as outras.

## B.1 E se o compromisso não foi (ainda) alcançado?

No exemplo apresentado no Capítulo 6 vimos quais os resultados obtidos considerando que os negociadores tinham chegado a um compromisso. Se o compromisso não foi ainda alcançado, o mínimo definido pelas últimas ofertas de cada negociador pode ser considerado como ponto de referência. Nesta secção ilustramos como as aproximações podem ser usadas antes do compromisso ser alcançado, considerando como exemplo o caso em que os valores são conhecidos.

Nesta ilustração admitimos que a sequência de propostas é a mesma considerada anteriormente (rever Subsecção 6.4.2), à excepção do compromisso (alternativa  $x^{(44)}$ ) que não chega a ser alcançado (ver Tabela B.1). Se considerarmos que as duas últimas propostas sobre a mesa são as alternativas 32, para Amstore e a alternativa 46, para Nelson, o ponto de referência usado em vez do compromisso é uma alternativa fictícia dando  $v^N(x^{(32)})$ , para Nelson e  $v^A(x^{(46)})$ , para Amstore. As alternativas que na realidade são melhores para ambas as partes do que o ponto de referência são as alternativas: 24-28, 33-41 e 44-45. Na Tabela B.2 é possível ver a soma dos valores e a PoP mínima das alternativas que são melhores do que o ponto de referência para ambas as partes. Relativamente à sequência de propostas, obtemos as seguintes restrições do tipo (6.3):

$$v^N(x^{(70)}) > v^N(x^{(67)}) > v^N(x^{(53)}) > v^N(x^{(42)}) > v^N(x^{(32)}),$$

$$v^A(x^{(1)}) > v^A(x^{(8)}) > v^A(x^{(17)}) > v^A(x^{(20)}) > v^A(x^{(31)}) > v^A(x^{(46)}).$$

Amstore	Nelson
$x^{(1)}$	$x^{(70)}$
$x^{(8)}$	$x^{(67)}$
$x^{(17)}$	$x^{(53)}$
$x^{(20)}$	$x^{(42)}$
$x^{(31)}$	$x^{(46)}$
$x^{(32)}$	

Tabela B.1: Sequência de propostas: compromisso ainda não alcançado.

	Soma dos valores	PoP mínima
$x^{(24)}$	135	0.08
$x^{(25)}$	<b>136</b>	0.21
$x^{(26)}$	134	0.29
$x^{(27)}$	131	0.38
$x^{(28)}$	125	0.33
$x^{(33)}$	124	0.08
$x^{(34)}$	121	0.17
$x^{(35)}$	115	0.15
$x^{(36)}$	125	0.21
$x^{(37)}$	132	<b>0.48</b>
$x^{(38)}$	135	0.44
$x^{(39)}$	<b>136</b>	0.37
$x^{(40)}$	134	0.22
$x^{(41)}$	131	0.04
$x^{(44)}$	117	0.11
$x^{(45)}$	120	0.07

Tabela B.2: Soma dos valores e PoP mínima das alternativas que são melhores para ambas as partes do que o ponto de referência: compromisso ainda não alcançado.

Também temos:

$$\begin{aligned}
 v^N(x^{(32)}) &> v^N(x^{(31)}), \\
 v^N(x^{(32)}) &> v^N(x^{(20)}), \\
 v^N(x^{(32)}) &> v^N(x^{(17)}), \\
 v^N(x^{(32)}) &> v^N(x^{(8)}), \\
 v^N(x^{(32)}) &> v^N(x^{(1)}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v^A(x^{(46)}) &> v^A(x^{(42)}), \\
 v^A(x^{(46)}) &> v^A(x^{(53)}), \\
 v^A(x^{(46)}) &> v^A(x^{(67)}), \\
 v^A(x^{(46)}) &> v^A(x^{(70)}).
 \end{aligned}$$

A Tabela B.3 refere-se à probabilidade de cada alternativa ser melhor do que o ponto de referência para Nelson, para Amstore e para ambas as partes, à probabilidade de cada alternativa ser eficiente, e à probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com os métodos de maximizar a soma dos valores e PoP mínima. Como é possível verificar, os resultados antes do compromisso são muito interessantes, uma vez que são semelhantes ao

resultados obtidos depois do compromisso, sendo a alternativa 39 a que deve ser indicada, tanto no método da soma como no método PoP. Isto indica que os nossos métodos não são muito sensíveis à escolha do ponto de referência.

Alternativas	Melhor do que o ponto de referência						Eficiente		Maximizar a soma dos valores		Maximizar o PoP mínimo	
	Restrições 1			Restrições 1+2			Restrições 1	Restrições 1+2	Restrições 1	Restrições 1+2	Restrições 1	Restrições 1+2
	Ambos	Nelson	Amstore	Ambos	Nelson	Amstore						
9	0.0752	0.0752	1				0.6142					
10	0.1268	0.1268	1				0.7358					
11	0.1694	0.1694	1				0.7186					
12	0.2086	0.2086	1				0.4446					
13	0.2428	0.2428	1									
14	0.2688	0.2688	1	0.0654	0.0654	1						
22	0.1512	0.1512	1				0.1202					
23	0.3106	0.3106	1	0.3590	0.3590	1	0.6306	0.9974				
24	0.4240	0.4240	1	0.5954	0.5954	1	0.8016	1				
25	0.5196	0.5196	1	0.8070	0.8070	1	0.9332	1	0.5086	0.7564		
26	0.6184	0.6184		0.9684	0.9684	1	0.9022	0.9986	0.0602	0.0032	0.0094	
27	0.7154	0.7154	1	1	1	1	0.7376	0.9532	0.0140		0.1466	
28	0.7748	0.7748	1	1	1	1						
33	1	1	1	1	1	1	0.2802	0.0302	0.1384			
34	1	1	1	1	1	1	0.1554				0.0840	
35	0.9320	1	0.9320	0.9094	1	0.9094	0.0396				0.0004	
36	0.3362	0.3362	1	0.5574	0.5574	1						
37	0.6254	0.6254	1	1	1	1	0.1816	0.5182			0.0015	
38	0.8466	0.8466	1	1	1	1	0.5930	1			0.1297	0.2120
39	1	1	1	1	1	1	0.9332	1	0.2688	0.2404	0.3969	0.7848
40	1	1	1	1	1	1	0.9582	1			0.2090	0.0032
41	0.9178	1	0.9178	0.8932	1	0.8932	0.9366	1			0.0224	
43	0.0890	0.0890	1	0.0528	0.0528	1	0.0642					
44	0.7244	0.7244	1	1	1	1	0.0642					
45	1	1	1	1	1	1	0.1650		0.0100			
50	0.1378	0.7154	0.1964	0.1862	1	0.1862						
51	0.1960	0.9958	0.1964	0.1862	1	0.1862	0.1600	0.4656				

Tabela B.3: Probabilidade de cada alternativa ser melhor do que o ponto de referência para ambas as partes (eliminando as alternativas para as quais a probabilidade de ser melhor, para ambas as partes, do que o ponto de referência é inferior a 0.05), probabilidade de cada alternativa ser eficiente, probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com o método de maximizar a soma dos valores e probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com a PoP mínima: compromisso ainda não alcançado (valores conhecidos).

## B.2 E se impusermos que as funções de valor marginais têm que ser côncavas?

No caso em que os valores são desconhecidos impusemos que as funções de valor marginais têm a função linear como limite inferior e a função côncava como limite superior. Considerámos que as funções de valor marginais têm que ser monótonas, mas não impusemos a concavidade. As restrições relativas à concavidade são restrições naturais uma vez que se pudermos excluir valores marginais crescentes (que estamos a admitir) as funções de valor serão côncavas. Impondo esta restrição, espera-se que os resultados melhorem, uma vez que as aproximações vão-se aproximar mais das verdadeiras funções de valor que, na realidade, são côncavas.

Se quisermos impor a concavidade das funções de valor, por exemplo, para o Nelson e para o assunto preço (ao qual corresponde uma função de valor crescente) é necessário impor que:

$$V_{\text{preço}}^N(11) - V_{\text{preço}}^N(10.5) \leq V_{\text{preço}}^N(10.5) - V_{\text{preço}}^N(10),$$

$$V_{\text{preço}}^N(11.5) - V_{\text{preço}}^N(11) \leq V_{\text{preço}}^N(11) - V_{\text{preço}}^N(10.5),$$

$$V_{\text{preço}}^N(12) - V_{\text{preço}}^N(11.5) \leq V_{\text{preço}}^N(11.5) - V_{\text{preço}}^N(11).$$

Na Tabela B.4 é possível ver quais seriam os resultados se impuséssemos a concavidade. Como é possível verificar, tanto considerando as restrições relativas à sequência de propostas, como à sequência de propostas e à equivalência de alternativas, a alternativa que mais provavelmente maximiza a soma dos valores é a alternativa 39. A alternativa com a probabilidade mais elevada de maximizar a PoP mínima é também a alternativa 39. A verdadeira melhor alternativa segundo este critério é a alternativa 38, que também apresenta uma probabilidade bastante elevada. Tanto a alternativa 38 como a alternativa 39 são indicadas como tendo elevadas probabilidades de serem eficientes e melhores do que a solução de compromisso para ambas as partes.

Como se pode ver, considerando a aproximação do domínio, os resultados melhoram consideravelmente impondo a restrição de concavidade (rever Subsecção 6.4.6). O mesmo será de esperar que se verifique considerando as outras duas aproximações.

Alternativas	Melhor do que solução de compromisso						Eficiente		Maximizar a soma dos valores		Maximizar o PoP mínimo	
	Restrições 1			Restrições 1+2			Restrições 1	Restrições 1+2	Restrições 1	Restrições 1+2	Restrições 1	Restrições 1+2
	Ambos	Nelson	Amstore	Ambos	Nelson	Amstore						
11	0.0748	0.0748	1				0.4150		0.0002			
12	0.0988	0.0988	1				0.2412					
13	0.1256	0.1256	1				0.0902		0.0002			
14	0.1428	0.1440	0.9922				0.0146					
22	0.1912	0.1912	1				0.6624		0.0006			
23	0.2976	0.2976	1	0.1770	0.1770	1	0.9006	0.9692	0.0194	0.0052		
24	0.3750	0.3750	1	0.3420	0.3420	1	0.9570	0.9954	0.0849	0.0518		
25	0.4482	0.4482	1	0.4868	0.4868	1	0.9604	0.9942	0.1273	0.1364		
26	0.5102	0.5102	1	0.6106	0.6106	1	0.9306	0.9844	0.0703	0.0954	0.0122	0.0024
27	0.5686	0.5686	1	0.7110	0.7112	0.9998	0.7066	0.7668	0.0190	0.021	0.0450	0.0176
28	0.5614	0.6190	0.9086	0.7310	0.7760	0.9440	0.2124	0.2294	0.0046	0.0022	0.0292	0.0158
33	0.3316	0.3316	1	0.2942	0.2942	1	0.1346	0.0582	0.0164	0.0008	0.0010	
34	0.5994	0.6140	0.9754	0.5466	0.5500	0.9930	0.0678	0.0200	0.0090	0.0002	0.0100	0.0006
35	0.3752	0.7506	0.4992	0.3626	0.6892	0.5304	0.0168	0.0028	0.0004		0.0040	
36	0.4902	0.4902	1	0.5904	0.5904	1	0.3088	0.3668	0.0034	0.002	0.0114	0.0054
37	0.7462	0.7462	1	0.9226	0.9226	1	0.7458	0.8374	0.0206	0.0204	0.1203	0.0922
38	0.9446	0.9482	0.9964	0.9966	0.9984	0.9982	0.9582	0.9902	0.1537	0.1848	0.2440	0.3712
39	0.9786	0.9992	0.9794	0.9800	1	0.9800	0.9900	1	0.2768	0.309	0.3127	0.3786
40	0.8958	1	0.8958	0.9070	1	0.9070	0.9972	1	0.1697	0.155	0.1719	0.1066
41	0.6374	1	0.6374	0.6632	1	0.6632	0.9770	0.9782	0.0224	0.0158	0.0346	0.0096
42	0.2522	1	0.2522	0.2322	1	0.2322	0.6058	0.6450	0.0010		0.0036	

Tabela B.4: Probabilidade de cada alternativa ser melhor do que o compromisso para ambas as partes (eliminando as alternativas para as quais a probabilidade de ser melhor, para ambas as partes, do que o compromisso é inferior a 0.05), probabilidade de cada alternativa ser eficiente, probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com o método de maximizar a soma dos valores e probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com a PoP mínima: impondo concavidade (funções de valor com parâmetros desconhecidos).



### B.3 E se não impusermos a condição de monotonia relativamente às preferências de cada negociador?

Das condições que impusemos relativamente às preferências dos negociadores, provavelmente a mais forte é a monotonia das propostas de cada negociador. Ou seja, admitir que cada proposta feita por um negociador tem para ele valor inferior às propostas que apresentou anteriormente. Se os negociadores ao longo do processo sentirem que podem aumentar o valor, eles tentarão obviamente fazê-lo.

Como exemplo, consideramos o caso de valores conhecidos para verificar se os resultados pioram notoriamente não considerando estas restrições. As restrições a incluir são, considerando que os negociadores preferem as suas propostas à solução de compromisso:

$$\begin{aligned}
 v^N(x^{(70)}) &> v^N(x^{(44)}), \\
 v^N(x^{(67)}) &> v^N(x^{(44)}), \\
 v^N(x^{(53)}) &> v^N(x^{(44)}), \\
 v^N(x^{(42)}) &> v^N(x^{(44)}), \\
 v^N(x^{(46)}) &> v^N(x^{(44)}), \\
 v^A(x^{(1)}) &> v^A(x^{(44)}), \\
 v^A(x^{(8)}) &> v^A(x^{(44)}), \\
 v^A(x^{(17)}) &> v^A(x^{(44)}), \\
 v^A(x^{(20)}) &> v^A(x^{(44)}), \\
 v^A(x^{(31)}) &> v^A(x^{(44)}), \\
 v^A(x^{(32)}) &> v^A(x^{(44)}).
 \end{aligned}$$

Considerando que os negociadores preferem a solução de compromisso às ofertas da outra parte:

$$\begin{aligned}
 v^N(x^{(44)}) &> v^N(x^{(32)}), \\
 v^N(x^{(44)}) &> v^N(x^{(31)}), \\
 v^N(x^{(44)}) &> v^N(x^{(20)}), \\
 v^N(x^{(44)}) &> v^N(x^{(17)}), \\
 v^N(x^{(44)}) &> v^N(x^{(8)}), \\
 v^N(x^{(44)}) &> v^N(x^{(1)}), \\
 v^A(x^{(44)}) &> v^A(x^{(46)}), \\
 v^A(x^{(44)}) &> v^A(x^{(42)}), \\
 v^A(x^{(44)}) &> v^A(x^{(53)}), \\
 v^A(x^{(44)}) &> v^A(x^{(67)}), \\
 v^A(x^{(44)}) &> v^A(x^{(70)}).
 \end{aligned}$$

Os resultados estão mostrados na Tabela B.5. Como é possível verificar, apesar das probabilidades das verdadeiras melhores alternativas serem mais baixas neste caso, e de existirem bastante mais alternativas com probabilidade positiva de serem as melhores de acordo com os métodos de mediação, as verdadeiras melhores alternativas continuam a ser

aquelas que apresentam probabilidades mais elevadas. As alternativas com probabilidades mais elevadas de maximizar a soma dos valores são as alternativas 25 e 39, verdadeiras melhores alternativas segundo este método. As alternativas com probabilidades mais elevadas de maximizar a PoP mínima são a alternativas 38, verdadeira melhor alternativa segundo este método, e a alternativa 39. As alternativas 38 e 39 são também as alternativas que têm probabilidades mais elevadas de serem eficientes e de serem melhores para ambas as partes do que a solução de compromisso.

Na nossa opinião o mediador poderá perguntar aos negociadores se as suas propostas verificam a condição de monotonia e, apenas em caso afirmativo, incluir as restrições correspondentes. Mesmo no caso da resposta ser negativa também se esperam bons resultados. Outra possibilidade é que os negociadores, em privado, ordenem as propostas que ofereceram, ou mesmo as propostas recebidas.

Alternativas	Melhor do que solução de compromisso						Eficiente		Maximizar a soma dos valores		Maximizar o PoP mínimo	
	Restrições 1			Restrições 1+2			Restrições 1	Restrições 1+2	Restrições 1	Restrições 1+2	Restrições 1	Restrições 1+2
	Ambos	Nelson	Amstore	Ambos	Nelson	Amstore						
9	0.0526	0.0528	0.9976				0.3706		0.0003		0.0003	
10	0.0904	0.0912	0.9900				0.4154		0.0056		0.0070	
11	0.1112	0.1190	0.9370				0.3502		0.0051		0.0038	
12	0.1118	0.1346	0.8398				0.0948					
13	0.1102	0.1532	0.7018									
14	0.0650	0.1644	0.4058									
22	0.1046	0.1140	0.9220									
23	0.2046	0.2282	0.8988	0.0952	0.1072	0.9064	0.2096		0.0005		0.0022	
24	0.2640	0.3038	0.8750	0.2824	0.3138	0.8888	0.5218	0.6980	0.0078	0.0005	0.0089	
25	0.3126	0.3894	0.8108	0.4448	0.5032	0.8748	0.6312	0.7708	0.0691	0.0039	0.0240	
26	0.3162	0.4500	0.6996	0.5062	0.6316	0.8050	0.6552	0.8102	0.3039	0.4755	0.0867	
27	0.2412	0.5278	0.4556	0.5172	0.7632	0.6810	0.4364	0.7842	0.0056	0.0182	0.0746	
28	0.1244	0.5654	0.2126	0.3678	0.8104	0.4630	0.1622	0.4732	0.0003	0.0002	0.0277	
33	0.2644	0.2644	1	0.0726	0.0726	1						
34	0.2894	0.6322	0.4446	0.5208	0.5334	0.9746	0.4634	0.3438	0.1286	0.0128	0.0894	
35	0.0248	0.7048	0.0316	0.0558	0.6356	0.0896	0.1724	0.2314	0.0498	0.0796	0.0778	
36	0.1826	0.2640	0.6832	0.1336	0.1842	0.7416	0.0042				0.0003	
37	0.3202	0.4904	0.6528	0.5506	0.7818	0.7052	0.0054					
38	0.4274	0.6908	0.6208	0.6832	1	0.6832	0.4090	0.5232	0.0032	0.0036	0.0493	
39	0.4572	0.8582	0.5324	0.6100	1	0.6100	0.6924	0.8574	0.1013	0.0429	0.1973	
40	0.2540	0.9320	0.2736	0.4660	1	0.4660	0.7562	0.9010	0.2915	0.3629	0.2590	
41	0.0926	0.9970	0.0928	0.1942	1	0.1942	0.7028	0.9044	0.0225		0.0813	
							0.3674	0.9138	0.0048		0.0108	

Tabela B.5: Probabilidade de cada alternativa ser melhor do que o compromisso para ambas as partes (eliminando as alternativas para as quais a probabilidade de ser melhor, para ambas as partes, do que o compromisso é inferior a 0.05), probabilidade de cada alternativa ser eficiente, probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com o método de maximizar a soma dos valores e probabilidade de cada alternativa ser a melhor de acordo com a PoP mínima: sem impor condição de monotonia relativamente às preferências de cada negociador (valores conhecidos).

# Referências Bibliográficas

- R. Ackoff. *A empresa democrática - métodos, conceitos e técnicas para renovar a gestão com sucesso*. Difusão Cultural - Sociedade Editorial e Livreira Lda, Lisboa, 1994.
- B. Ahn. Extending Malakooti's model for ranking multicriteria alternatives with preference strength and partial information. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 33(3):281–287, 2003.
- B. Ahn. Multi-attribute decision aid with extended ISMAUT. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 36(3):507–520, 2006.
- B. Ahn e K. Park. Comparing methods for multiattribute decision making with ordinal weights. *Computers and Operations Research*, 35:1660–1670, 2008.
- H. Alfares e S. Duffuaa. Assigning cardinal weights in multi-criteria decision making based on ordinal ranking. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 15(5-6):125–133, 2008.
- K. Arrow. *Social choice and individual values*. John Wiley and Sons, New York, 1951.
- D. Avis e K. Fukuda. A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra. *Discrete and Computational Geometry*, 8:295–313, 1992.
- C. Bana e Costa. A multicriteria decision aid methodology to deal with conflicting situations on the weights. *European Journal of Operational Research*, 26:22–34, 1986.
- C. Bana e Costa. A methodology for sensitivity analysis in three-criteria problems: a case study in municipal management. *European Journal of Operational Research*, 33:159–173, 1988.
- C. Bana e Costa. *Structuration, construction et exploitation d'un modèle multicritère d'aide à la décision*. Tese Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico, 1992.
- C. Bana e Costa e J. Vansnick. MACBETH - an interactive path toward the construction of cardinal value functions. *International Transactions in Operational Research*, 1:489–500, 1994.
- F. Barron e B. Barrett. Decision quality using ranked attribute weights. *Management Science*, 42(11):1515–1523, 1996.
- E. Beinat. *Value function for environmental management*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1997.

- V. Belton e J. Pictet. A framework for group decision using a MCDA model: sharing, aggregating or comparing individual information? *Journal of Decision Systems*, 6:283–303, 1997.
- V. Belton e T. Stewart. *Multiple criteria decision analysis: an integrated approach*. Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.
- R. Benayoun, J. Montgillier, J. Tergny, e O. Larichev. Linear programming with multiple objective functions: step method (STEM). *Mathematical Programming*, 1:366–375, 1971.
- D. Ben-Arieh, T. Easton, e B. Evans. Minimum cost consensus with quadratic cost functions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 39(1):210–217, 2008.
- D. Bertsimis e R. Freund. *Data, models, and decisions: the fundamentals of management science*. South-Western College Publishing, Ohio, 2000.
- R. Bisdorff. Concordant outranking with multiple criteria of ordinal significance - a contribution to robust multicriteria aid for decision. *4OR: A Quarterly Journal of Operations Research*, 2:293–308, 2004.
- K. Borcherding, T. Eppel, e D. Winterfeldt. Comparison of weighting judgments in multiattribute utility measurement. *Management Science*, 37(12):1603–1619, 1991.
- J. Borda. *Mémoire sur les élections au Scrutin*. Histoire de l'Académie Royale de Science, Paris, 1781.
- D. Bouyssou e M. Pirlot. Ordinal aggregation and strict preferences for multi-attributed alternatives. *Cahiers du LAMSADE*, 212, 2003.
- J.-P. Brans e P. Vincke. A preference ranking organization method: the PROMETHEE method for MCDM. *Management Science*, 31(6):647–656, 1985.
- T. Bui. *Co-oP: a group decision support system for cooperative multiple criteria group decision making*. *Lecture notes in computer science*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 1987.
- J. Butler e D. Olson. Comparison of centroid and simulation approaches for selection sensitivity analysis. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 8:146–161, 1999.
- J. Butler, J. Jia, e J. Dyer. Simulation techniques for the sensitivity analysis of multi-criteria decision models. *European Journal of Operational Research*, 103(3):531–546, 1997.
- J. Charnetski e R. Soland. Multiple-attribute decision making with partial information: the comparative hypervolume criterion. *Naval Research Logistics Quarterly*, 25:279–288, 1978.

- J. Charnetski e R. Soland. Multiple-attribute decision making with partial information: the expected-value criterion. *Naval Research Logistics Quarterly*, 26:249–256, 1979.
- Y. Chen, M. Kilgour, e K. Hipel. A case-based distance method for screening in multiple-criteria decision aid. *Omega*, 36:373–383, 2008.
- Y. Chen, M. Kilgour, e K. Hipel. Using a benchmark in case-based multiple-criteria ranking. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 39(2):358–368, 2009.
- F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, F. Herrera, e S. Alonso. Some induced ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision making problems based on fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research*, 182:383–399, 2007.
- J. Clímaco e C. Antunes. TRIMAP - an interactive tricriteria linear programming package. *Foundations of Control Engineering*, 12:101–119, 1987.
- J. Clímaco e L. Dias. An approach to support negotiation processes with imprecise information multicriteria additive models. *Group Decision and Negotiation*, 15(2):171–184, 2006.
- J. Clímaco, C. Antunes e M. Alves. *Programação linear multiobjetivo*. Secção de Textos da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, Coimbra, 1996.
- C. Condorcet. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voies*. Imprimante Royale, Paris, 1785.
- I. Contreras e A. Mármol. A lexicographical compromise method for multiple criteria group decision problems with imprecise information. *European Journal of Operational Research*, 181(3):1530–1539, 2007.
- W. Cook e M. Kress. Ordinal ranking with intensity of preference. *Management Science*, 31(1):26–32, 1985.
- W. Cook e L. Seiford. Priority ranking and consensus formation. *Management Science*, 24(16):1721–1733, 1978.
- W. Cook, M. Kress, e L. Seiford. A general framework for distance-based consensus in ordinal ranking model. *European Journal of Operational Research*, 92:392–397, 1996.
- S. Damart, L. Dias, e V. Mousseau. Supporting groups in sorting decisions: methodology and use of a multi-criteria aggregation / disaggregation DSS. *Decision Support Systems*, 43(4):1464–1475, 2007.
- L. Dias. *A informação imprecisa e os modelos multicritério de apoio à decisão - identificação e uso de conclusões robustas*. Tese Doutorado, Faculdade de Economia, Universidade de Coimbra, 2000.

- L. Dias. Apontamentos de análise de decisão: como considerar múltiplos critérios. Secção de Textos da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, 2002.
- L. Dias e J. Clímaco. Additive aggregation with variable interdependent parameters: the VIP analysis software. *Journal of the Operational Research Society*, 51(9):1070–1082, 2000a.
- L. Dias e J. Clímaco. ELECTRE TRI for groups with imprecise information on parameter values. *Group Decision and Negotiation*, 9(5):355–377, 2000b.
- L. Dias e J. Clímaco. Dealing with imprecise information in group multicriteria decisions: a methodology and a GDSS architecture. *European Journal of Operational Research*, 160:291–307, 2005.
- L. Dias e V. Mousseau. IRIS: a DSS for multiple criteria sorting problems. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 12:285–298, 2003.
- J. Dyer e R. Sarin. Group preference aggregation rules based on strength of preference. *Management Science*, 25(9):822–832, 1979.
- R. Eckenrode. Weighting multiple criteria. *Management Science*, 12:180–192, 1965.
- W. Edwards. How to use multiattribute utility measurement for social decisionmaking. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 7(5):326–340, 1977.
- W. Edwards e F. Barron. SMARTS and SMARTER: improved simple methods for multiattribute utility measurement. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 60:306–325, 1994.
- W. Edwards, D. Winterfeldt, e D. Moody. Simplicity in decision analysis: an example and an application. Em D. Bell, H. Raiffa, e A. Tversky (eds.), *Decision making: descriptive, normative and prescriptive approaches*, pp. 443–464. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- H. Ehtamo, R. Hämäläinen, P. Heiskanen, J. Teich, M. Verkama, e S. Zionts. Generating pareto solutions in a two-party setting: constraint proposal methods. *Management Science*, 45(12):1697–1709, 1999.
- H. Eiselt e G. Laporte. The use of domains in multicriteria decision making. *European Journal of Operational Research*, 61:29–298, 1992.
- P. Eklund, A. Rusinowska, e H. Swart. Consensus reaching in committees. *European Journal of Operational Research*, 178:185–193, 2007.
- M. Escobar e J. Moreno-Jiménez. Aggregation of individual preference structures in AHP - group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 16:287–301, 2007.

- Y. Eum, K. Park, e H. Kim. Establishing dominance and potential optimality in multi-criteria analysis with imprecise weights and value. *Computers and Operations Research*, 28(5):397–409, 2001.
- J. Figueira, S. Greco, e M. Ehrgott. *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*. Springer Verlag, Boston, Dordrecht, London, 2005.
- J. Figueira, S. Greco, e R. Slowinski. Building a set of additive value functions representing a reference preorder and intensities of preference: GRIP method. *European Journal of Operational Research*, 195(2):460–486, 2009.
- R. Fisher, W. Ury, e B. Patton. *Getting to yes: negotiation an agreement without giving in*. Century Business, London, 1992.
- T. Gal, T. Stewart, e T. Hanne. *Multicriteria decision making: advances in MCDM models, algorithms, theory, and applications*. Kluwer, Dordrecht, 1999.
- P. Ghauri e J. Usunier. *International business negotiations, 2ª Edição*. Pergamon, Amsterdam, 2003.
- J. González-Pachon e C. Romero. Aggregation of partial ordinal rankings: an interval goal programming approach. *Computers and Operations Research*, 28(8):827–834, 2001.
- L. Goodman e W. Kruskal. Measures of association for cross classification. *Journal of the American Statistical Association*, 49:732–764, 1954.
- P. Goodwin e G. Wright. *Decision analysis for management judgements, 3ª Edição*. Wiley, Chichester, 2004.
- M. Grabisch. The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making. *European Journal of Operational Research*, 89:445–456, 1996.
- S. Greco, B. Matarazzo, e R. Slowinski. Decision rule approach. Em J. Figueira, S. Greco, e M. Ehrgott (eds.), *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*, pp. 507–562. Springer Verlag, Boston, Dordrecht, London, 2005.
- S. Greco, V. Mousseau, e R. Slowinski. Ordinal regression revisited: multiple criteria ranking using a set of additive value functions. *European Journal of Operational Research*, 191(2):415–435, 2008.
- R. Hämmäläinen. Reversing the perspective on the applications of decision analysis (Comment on Keefer et al. 2004). *Decision Analysis*, 1(1):26–31, 2004.
- G. Hazen. Partial information, dominance, and potential optimality in multiattribute utility theory. *Operations Research*, 34(2):296–310, 1986.
- P. Heikonen. Decentralized method for computing Pareto solutions in multiparty negotiation. *European Journal of Operational Research*, 117:578–590, 1999.

- F. Hillier e G. Lieberman. *Introduction to operations research, 6ª Edição*. McGraw-Hill, New York, 1995.
- J. Hodgkin, V. Belton, e A. Koulouri. Supporting the intelligent MCDA user: a case study in multi-person multi-criteria decision support. *European Journal of Operational Research*, 160:172–189, 2005.
- N. Iyer. A family of dominance rules for multiattribute decision making under uncertainty. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 33(4):441–450, 2003.
- K. Jabeur e J. Martel. A collective choice method based on individual preferences relational systems (p.r.s.). *European Journal of Operational Research*, 177:1549–1565, 2007a.
- K. Jabeur e J. Martel. An ordinal sorting method for group decision-making. *European Journal of Operational Research*, 180:1272–1289, 2007b.
- E. Jacquet-Lagrèze e Y. Siskos. Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision making: the UTA method. *European Journal of Operational Research*, 10:151–164, 1982.
- I. Janis. *Victims of groupthink*. Houghton Mifflin, New York, 1972.
- T. Jelassi, G. Kersten, e S. Zionts. An introduction to group decision and negotiation support. Em C. Bana e Costa (eds.), *Readings in multiple criteria decision aid*, pp. 537–568. Springer Verlag, Berlin, 1998.
- J. Jia, F. Gregory, e J. Dyer. Attribute weighting methods and decision quality in the presence of response error: a simulation study. *Journal of Behavioral Decision Making*, 11:85–105, 1998.
- A. Jiménez, S. Ríos-Insua, e A. Mateos. A decision support system for multiattribute utility evaluation based on imprecise assignments. *Decision Support Systems*, 36(1): 65–79, 2003.
- A. Jiménez, A. Mateos, e S. Ríos-Insua. Monte Carlo simulation techniques in a decision support system for group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 14:109–130, 2005.
- R. Keeney A group preference axiomatization with cardinal utility. *Management Science*, 23(2):140–145, 1976.
- R. Keeney. *Value-focused thinking. A path to creative decision making*. Harvard University Press, Cambridge, 1992.
- R. Keeney e C. Kirkwood. Group decision making using cardinal social welfare functions. *Management Science*, 22(4):430–437, 1975.



- R. Keeney e K. Nair. Selecting a nuclear power plant sites in the Pacific North - West using decision analysis. Em D. Bell, R. Keeney, e H. Raiffa (eds.), *Conflicting objectives in decisions*, pp. 298–322. John Wiley, 1977.
- R. Keeney e H. Raiffa. *Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs*. John Wiley and Sons, New York, 1976: republicado por Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- J. Kemeny e J. Snell. Preference ranking: an axiomatic approach. Em J. Kemeny e J. Snell (eds.), *Mathematical models in the social sciences*, pp. 9–32. Blaisdell, New York, 1962.
- M. Kendall. *Rank correlation methods*. Charles Griffin, London, 1955.
- G. Kersten. Support for group decisions and negotiations: an overview. *InterNeg Research Papers*, 04, 1997.
- G. Kersten e S. Noronha. Rational agents, contract curves, and inefficient compromises. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 28(3):326–338, 1998.
- S. Khélifa e J. Martel. A distance-based collective weak ordering. *Group Decision and Negotiation*, 10:317–329, 2001.
- S. Kim e B. Ahn. Group decision making procedure considering preference strength under incomplete information. *Computers and Operations Research*, 24:1101–1112, 1997.
- S. Kim e B. Ahn. Interactive group decision making procedure under incomplete information. *European Journal of Operational Research*, 116:498–508, 1999.
- S. Kim, S. Choi, e J. Kim. An interactive procedure for multi-attribute group decision making with incomplete information: range-based approach. *European Journal of Operational Research*, 118:139–152, 1999.
- C. Kirkwood e J. Corner. The effectiveness of partial information about attribute weights for ranking alternatives in multiattribute decision making. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 54:456–476, 1993.
- C. Kirkwood e R. Sarin. Ranking with partial information: a method and an application. *Operations Research*, 33:38–48, 1985.
- A. Kmietowicz e A. Pearman. Decision theory, linear partial information and statistical dominance. *Omega*, 12:391–399, 1984.
- P. Korhonen e J. Wallenius. A Pareto race. *Naval Research Logistics*, 35:615–623, 1988.
- P. Korhonen, J. Phillips, J. Teich, e J. Wallenius. Are Pareto improvements always preferred by negotiators? *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 7(1):1–2, 1998.

- R. Lahdelma e J. Salminen. SMAA-2: stochastic multicriteria acceptability analysis for group decision making. *Operations Research*, 49:444–454, 2001.
- R. Lahdelma, J. Hokkanen, e P. Salminen. SMAA - stochastic multiobjective acceptability analysis. *European Journal of Operational Research*, 106(1):137–143, 1998.
- R. Lahdelma, K. Miettinen, e P. Salminen. Ordinal criteria in stochastic multicriteria acceptability analysis (SMAA). *European Journal of Operational Research*, 147(1):117–127, 2003.
- G. Lai e K. Sycara. A generic framework for automated multi-attribute negotiation. *Group Decision and Negotiation*, 18:169–187, 2009.
- G. Lai, C. Li, e K. Sycara. Efficient multi-attribute negotiation with incomplete information. *Group Decision and Negotiation*, 15:511–528, 2006.
- O. Larichev e H. Moshkovich. *ZAPROS: a method and system for ordering multiattribute alternatives on the base of a decision-maker's preferences*. All-Union Research Institute for Systems Studies, Moscow, 1991.
- O. Larichev e H. Moskovich. An approach to ordinal classification problems. *International Transactions in Operational Research*, 1(3):375–385, 1994.
- O. Larichev, D. Olson, H. Moshkovich, e A. Mechitov. Numeric vs. cardinal measurements in multiattribute decision making: how exact is enough? *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 64:9–21, 1995.
- J. Lasserre. An analytical expression and an algorithm for the volume of a convex polyhedron in  $\mathbb{R}^n$ . *Journal of Optimization Theory and Application*, 39(3):363–377, 1983.
- J. Lawrence. Polytope volume computation. *Mathematics of Computation*, 57:259–271, 1991.
- J. Leclercq. Propositions d'extension de la notion de dominance en présence de relations d'ordre sur les pseudo-critères: MELCHIOR. *Revue Belge de Recherche Opérationnelle, de Statistique et d'Informatique*, 24:32–46, 1984.
- K. Lee, K. Park, e S. Kim. Dominance, potential optimality, imprecise information, and hierarchical structure in multi-criteria analysis. *Computers and Operations Research*, 29:1267–1281, 2002.
- B. Malakooti. Ranking and screening multiple criteria alternatives with partial information and use of ordinal and cardinal strength of preferences. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 30(3):787–801, 2000.
- J. Marichal, P. Meyer, e M. Roubens. Sorting multi-attribute alternatives: the TOMASO method. *Computers and Operations Research*, 32(4):861–877, 2005.

- B. Matarazzo. Multicriterion analysis of preferences by means of pairwise actions and criterion comparisons (MAPPAC). *Applied Mathematics and Computation*, 18(2):119–141, 1986.
- B. Matarazzo. Preference ranking global frequencies in multicriterion analysis (PRAGMA). *European Journal of Operational Research*, 36:36–49, 1987.
- A. Mateos, A. Jiménez, e S. Ríos-Insua. A multiattribute solving dominance and potential optimality in imprecise multiattribute additive problems. *Reliability Engineering and System Safety*, 79:253–262, 2003.
- A. Mateos, A. Jiménez, e S. Ríos-Insua. Monte Carlo simulation techniques for group decision making with incomplete information. *European Journal of Operational Research*, 174:1842–1864, 2006.
- A. Mateos, S. Ríos-Insua, e A. Jiménez. Dominance, potential optimality and alternative ranking in imprecise decision making. *Journal of Operational Research Society*, 58(3): 326–336, 2007.
- J. Maubert. *Os segredos de uma negociação - saber negociar é a chave para o êxito*, 2ª Edição. Edições CETOP, Mem Martins, 1997.
- H. Moshkovich, A. Mechitov, e D. Olson. Verbal decision analysis. Em J. Figueira, S. Greco, e M. Ehrgott (eds.), *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*, pp. 609–640. Springer Verlag, Boston, Dordrecht, London, 2005.
- V. Mousseau. *Problèmes liés à l'évaluation de l'importance relative des critères en aide multicritère à la décision: réflexions théoriques, experimentation et implémentation informatique*. Tese Doutorado, Universidade Paris-Dauphine, 1993.
- V. Mousseau e L. Dias. Valued outranking relations in ELECTRE providing manageable disaggregation procedures. *European Journal of Operational Research*, 156(2):467–482, 2004.
- H. Nakayama, T. Tanino, K. Matsumoto, H. Matsuo, K. Inoue, e Y. Sawaragi. Methodology for group decision support with an application to assessment of residential environment. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 9(9):447–485, 1979.
- J. Nash. The bargaining problem. *Econometrica*, 18:155–162, 1950.
- J. Nash. Two - person cooperative games. *Econometrica*, 21:125–140, 1953.
- J. Ness e C. Hoffman. *Putting sense into consensus: solving the puzzle of making team decisions*. WA: Vista Associates, Tacoma, 1998.
- H. Nurmi. *Comparing voting systems*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

- J. Paelinck. QUALIFLEX: a flexible multiple-criteria decision method. *Economic Letters*, 1:193–197, 1978.
- K. Park. Mathematical programming models for characterizing dominance and potential optimality when multicriteria alternative values and weights are simultaneously incomplete. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 34(5):601–614, 2004.
- L. Phillips. Decision conferencing. Operational Research working papers, LSEOR 06.85, Operational Research Group, Department of Management, London School of Economics and Political Science, London, 2006.
- L. Phillips e C. Bana e Costa. Transparent prioritization, budgeting and resource allocation with multi-criteria decision analysis and decision conferencing. *Annals of Operations Research*, 154:51–68, 2007.
- J. Pictet e D. Bollinger. The silent negotiation or how to elicit collective information for group MCDA without excessive discussion. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 13:199–211, 2005.
- J. Pictet e D. Bollinger. Extended use of the cards procedure as a simple elicitation technique for MAVT. Application to public procurement in Switzerland. *European Journal of Operational Research*, 185:1300–1307, 2008.
- G. Pitz. *DECAID computer program*. Carbondale, Universidade Southern Illinois, 1987.
- D. Pruitt. Strategic choice in negotiation. *The American Behavioral Scientist*, 27(2):167–194, 1983.
- M. Pöyhönen e R. Hämäläinen. On the convergence of multiattribute weighting methods. *European Journal of Operational Research*, 129(3):569–585, 2001.
- H. Raiffa. *The art and science of negotiation*. Harvard University Press, Cambridge (Ma), 1982.
- H. Raiffa, J. Richardson, e D. Metcalfe. *Negotiation analysis: the science and art of collaborative decision making*. Belknap Press of Harvard, University Press, Cambridge (Ma), 2002.
- P. Rietveld. *Multiple objective decision methods and regional planning*. North-Holland, Amsterdam, 1980.
- P. Rietveld e H. Ouwersloot. Ordinal data in multicriteria decision making, a stochastic dominance approach to siting power plants. *European Journal of Operational Research*, 56:249–262, 1992.

- M. Robinson e R. Soland. The sensitivity analysis of “inexact” multicriteria decisions. Em G. Fandel e T. Gal (eds.), *Multiple criteria decision making - proceedings of the twelfth international conference*, pp. 185–191. Springer, Berlin, 1997.
- D. Ríos-Insua e S. French. A framework for sensitivity analysis in discrete multiobjective decision making. *European Journal of Operational Research*, 54:176–190, 1991.
- M. Roubens. Preference relation on actions and criteria in multicriteria decision making. *European Journal of Operational Research*, 10:51–55, 1982.
- B. Roy. *Méthodologie multicritère d’aide à la décision*. Economica, Paris, 1985. Esta obra encontra-se (quase integralmente) traduzida para língua inglesa em: B. Roy, *Multicriteria methodology for decision aiding*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1996.
- B. Roy. Paradigms and challenges. Em J. Figueira, S. Greco, e M. Ehrgott (eds.), *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*, pp. 3–26. Springer Verlag, Boston, Dordrecht, London, 2005.
- B. Roy e D. Bouyssou. *Aide multicritère à la décision: méthodes et cas*. Economica, Paris, 1993.
- B. Roy e V. Mousseau. A theoretical framework for analyzing the notion of relative importance of criteria. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 5:145–159, 1996.
- T. Saaty. *The analytic hierarchy process*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- A. Sage e C. White. ARIADNE: a knowledge-based interactive system for planning and decision support. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 14(1):35–47, 1984.
- A. Salo. Interactive decision aiding for group decision support. *European Journal of Operational Research*, 84:134–149, 1995.
- A. Salo e R. Hämmäläinen. Preference ratio in multiattribute evaluation (PRIME) - elicitation and decision procedures under incomplete information. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 31(6):533–545, 2001.
- A. Salo e A. Punkka. Rank inclusion in criteria hierarchies. *European Journal of Operational Research*, 163(2):338–356, 2005.
- P. Samuelson e W. Nordhaus. *Economia, 16ª Edição*. McGraw-Hill, Lisboa, 1999.
- P. Sarabando. Comparação de métodos multicritério de avaliação com informação ordinal utilizando simulação Monte Carlo. Tese Mestrado, Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, 2006.

- P. Sarabando e L. Dias. Multi-attribute choice with ordinal information: a comparison of different decision rules. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 39(3):545–554, 2009a.
- P. Sarabando e L. Dias. Comparison of different rules to deal with incomplete information: perspectives of mediation Relatório investigação INESC Coimbra, 2, 2009b.
- P. Sarabando e L. Dias. Simple procedures of choice in multicriteria problems without precise information about the alternatives' values. *Computers and Operations Research*, 37:2239–2247, 2010a.
- P. Sarabando e L. Dias. Comparison of different rules to deal with incomplete information: perspectives of mediation. *Proceedings of 25th Mini-EURO Conference Uncertainty and Robustness in Planning and Decision Making (URPDM 2010)*, INESC Coimbra, Coimbra, 2010b.
- P. Sarabando e L. Dias. Comparison of approximation rules to deal with group decision with ordinal information. *Proceedings of 11th Group Decision and Negotiation Conference (GDN 2010)*, Netherlands, 2010c.
- P. Sarabando, L. Dias, e R. Vetschera. Approaches to suggest potential agreements: perspectives of mediation with incomplete information. Relatório investigação INESC Coimbra, 11, 2009.
- D. Schmeidler. Integral representation without additivity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 97:255–261, 1986.
- P. Schoemaker e C. Waid. An experimental comparison of different approaches to determining weights in additive utility models. *Management Science*, 28(2):188–196, 1982.
- A. Schwartz. Group decision-making. *The CPA Journal*, 60–63, 1994.
- A. Sen. *Collective choice and social welfare*. Holden-Day, San Francisco, 1970.
- H. Simon. *The new science of management decision*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1977.
- J. Simos. *Évaluer l'impact sur l'environnement: une approach originale par l'analyse multicritère et la négociation*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1990.
- T. Solymosi e J. Dombi. A method for determining the weights of criteria: the centralized weights. *European Journal of Operational Research*, 26:35–41, 1986.
- R. Somers. Analysis of partial rank correlation measures based on the product moment model: part one. *Social Forces*, 7(53):229–246, 1974.
- C. Spearman. General intelligence objectively determined and measured. *American Journal of Psychology*, 15:201–293, 1904.

- M. Starr. *Product design and decision theory*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- R. Steuer. *Multiple criteria optimization: theory, computation, and application*. Wiley, New York, 1986.
- T. Stewart. Simplified approaches for multicriteria decision making under uncertainty. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 44(4):246–258, 1995.
- T. Stewart. Robustness of additive value function methods in MCDM. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 5:301–309, 1996.
- W. Stillwell, D. Seaver, e W. Edwards. A comparison of weight approximation techniques in multi-attribute utility decision making. *Organizational Behavior and Human Performance*, 28:62–77, 1981.
- L. Tavares. A model to support the search for consensus with conflicting rankings: Multi-trident. *International Transactions in Operational Research*, 11:107–115, 2004.
- T. Tervonen. JSMAA: an open source software for SMAA computations. *Proceedings of 25th Mini-EURO Conference Uncertainty and Robustness in Planning and Decision Making (URPDM 2010)*, INESC Coimbra, Coimbra, 2010.
- K. Thomas. Conflict and conflict management: reflections and update. *Journal of Organizational Behavior*, 13:265–274, 1992.
- J. Vansnick. On the problem of weight in multiple criteria decision making (the non compensatory approach). *European Journal of Operational Research*, 24:288–294, 1986.
- R. Vetschera. A recursive algorithm for volume-based sensitivity analysis of linear decision models. *Computers and Operations Research*, 24(5):477–491, 1997.
- R. Vetschera. Strategic manipulation of preference information in multi-criteria group decision methods. *Group Decision and Negotiation*, 14:393–414, 2005a.
- R. Vetschera. Estimating negotiator performance without preference information. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 13:213–227, 2005b.
- R. Vetschera. Learning about preferences in electronic negotiations - a volume based measurement method. *European Journal of Operational Research*, 194:452–463, 2009.
- P. Vincke. *Multicriteria decision-aid*. John Wiley and Sons, Chichester, 1992.
- D. Vose. *Quantitative risk analysis: a guide to Monte Carlo simulation modelling*. John Wiley and Sons, Chichester, 1996.
- P. Wakker. *Additive representations of preferences: a new foundation of decision analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1989.

- R. Walton e R. McKersie. *A behavioral theory of labor negotiations*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- S. Watson e D. Buede. *Decision synthesis. The principles and practice of decision analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- M. Weber. Decision making with incomplete information. *European Journal of Operational Research*, 28(1):44–57, 1987.
- M. Weber e K. Borcherding. Behavioural influences on weight judgments in multiattribute decision making. *European Journal of Operational Research*, 67(1):1–12, 1993.
- H. Weistroffer, C. Smith, e S. Narula. Multiple criteria decision support software. Em J. Figueira, S. Greco, e M. Ehrgott (eds.), *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*, pp. 989–1010. Springer Verlag, Boston, Dordrecht, London, 2005.
- C. White e H. Holloway. Resolvability for imprecise multiattribute alternative selection. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 38(1):162–169, 2008.
- W. Winston. *Simulation modelling using @Risk*. Duxbury Press, Belmont, 1996.
- D. Winterfeldt e W. Edwards. *Decision analysis and behavioral research*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18(1):183–190, 1988.
- W. Yu. ELECTRE TRI, aspects méthodologiques et guide d'utilisation. Document du LAMSADE, 74, Universidade Paris-Dauphine, 1992.
- S. Zionts e J. Wallenius. An interactive multiple objective linear programming method for a class of underlying nonlinear utility functions. *Management Science*, 29(5):519–529, 1983.