



INSTITUTO  
SUPERIOR  
TÉCNICO

**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA**  
**INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**

**META-HEURÍSTICAS DE OPTIMIZAÇÃO POR COLÓNIAS DE  
FORMIGAS EM PROBLEMAS PERIÓDICOS DE  
ESTABELECIMENTO DE ROTAS**

Ana Cristina Bico Rodrigues de Matos  
(Mestre)

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Sistemas

Orientador: Doutor Rui Manuel Moura de Carvalho Oliveira

**Júri**

Presidente: Reitor da Universidade Técnica de Lisboa

Vogais: Doutor José Manuel Caré Baptista Viegas

Doutor José Fernando da Costa Oliveira

Doutora Maria do Sameiro Faria Brandão Soares de Carvalho

Doutor Rui Manuel Moura de Carvalho Oliveira

Doutora Ana Paula Ferreira Dias Barbosa Póvoa

Doutor Nuno Alexandre Baltazar de Sousa Moreira

**Novembro 2005**



*Aos meus queridos filhos*



## Resumo

---

Nesta tese são apresentados procedimentos inovadores na classe das meta-heurísticas de optimização por colónias de formigas e técnicas de pós-optimização que se revelaram promissores na resolução de problemas periódicos de estabelecimento de rotas de grandes dimensões. Um sistema de recolha de resíduos sólidos urbanos de um concelho do centro de Portugal é usado como caso de estudo, sendo objectivo dos modelos desenvolvidos a optimização dos circuitos dos veículos de recolha.

Os problemas periódicos de estabelecimento de rotas (PVRP) constituem uma extensão do problema clássico de estabelecimento de rotas no qual os clientes têm que ser visitados um número diferenciado de vezes num dado horizonte temporal. Deste modo, é necessário elaborar um planeamento, definindo a calendarização das visitas aos clientes, e desenhar o conjunto de rotas para o horizonte temporal. São comparadas duas abordagens para a resolução deste tipo de problemas: uma formulação em que a calendarização e o estabelecimento de rotas são abordados em duas fases distintas e sequenciais, e outra formulação em que estas duas vertentes do problema são abordadas em simultâneo. Deste modo, são desenvolvidos dois modelos distintos que incorporam elementos inovadores e cujo desempenho se compara favoravelmente com outros modelos da mesma classe anteriormente desenvolvidos e publicados.

## Palavras chave

---

optimização por colónias de formigas, problemas periódicos de estabelecimento de rotas, recolha de resíduos sólidos, meta-heurísticas, coloração de grafos, optimização combinatória



## **Abstract**

---

This thesis presents innovative procedures in metaheuristics by ant colony optimisation and post-optimisation techniques which are shown to be promising in solving large periodic vehicle routing problems. A real-world solid waste collection system of a municipality in the center of Portugal is used as a case study, for which the optimisation of the routes of the collection vehicles constitutes the aim of the developed models.

Periodic vehicle routing problems (PVRP) are an extension of the classical vehicle routing problem where customers are visited with different frequencies over a time horizon. Therefore it is necessary to create a plan defining the schedule of visits to customers and to design a set of routes for the time horizon. In this thesis, two approaches for solving this type of problems are compared. In the first one, scheduling and designing routes are approached in two stages; in the other, both of these problems are tackled simultaneously. Hence, two distinct models are developed, both based on ant colony metaheuristics, complemented by post-optimisation techniques, that incorporate innovative elements and have shown a performance that compares favorably with other models of the same class previously published.

## **Keywords**

---

ant colony optimisation, periodic vehicle routing problem, solid waste collection, metaheuristics, graph colouring, combinatorial optimisation





## Agradecimentos

---

Através destas escassas mas sinceras linhas, não queria deixar de agradecer aos que contribuíram, de uma forma ou de outra, para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Rui Oliveira, orientador desta investigação, pela pronta disponibilidade e apoio demonstrado ao longo da sua elaboração. As suas reflexões e críticas foram imprescindíveis para a consecução do trabalho.

À Câmara Municipal de Viseu, em especial ao Dr. Luís Simões, pelo apoio concedido, sem o qual não teria sido possível a conclusão deste trabalho.

Agradeço igualmente o apoio concedido no âmbito do Programa de Desenvolvimento Educativo para Portugal – PRODEP, através da concessão de uma bolsa de Doutoramento, o que permitiu a dispensa integral de serviço docente.

Agradeço igualmente à Escola Superior de Tecnologia de Viseu que permitiu que durante três anos usufruísse uma bolsa de doutoramento no âmbito do Programa PRODEP/2001, Medida 5, Acção 5.3.

Aos meus colegas e amigos, em especial à Carla Henriques, Ana Seabra e Fernando Duarte pelo apoio, amizade e força que me transmitiram ao longo deste anos.

Finalmente, os meus agradecimentos para a minha família. À Rita e ao Francisco, pelas brincadeiras que muitas vezes não pude partilhar com eles e pelos momentos que não lhes pude dedicar. Ao Paulo pelo carinho, compreensão e apoio incondicional indispensáveis na elaboração deste trabalho.



## Índice Geral

---

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>Pág.</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	1
<b>CAPÍTULO 2</b>	
<b>APRESENTAÇÃO DO CASO DE ESTUDO</b>	9
2.1 Caracterização do sistema de Processamento de resíduos sólidos do Concelho de Viseu	10
2.2 Caracterização do sistema de resíduos sólidos urbanos em estudo	12
2.2.1 Área em estudo	12
2.2.2 Sistema de deposição	14
2.2.3 Sistema de recolha	17
2.3 Funcionamento do sistema em estudo	17
<b>CAPÍTULO 3</b>	
<b>ESTABELECIMENTO DE ROTAS DE VEÍCULOS: MODELOS E TÉCNICAS</b>	23
3.1 Formulação Matemática	25
3.2 Métodos de resolução apresentados em estudos anteriores	29
3.2.1 Métodos de resolução do VRP	30
3.2.2 Métodos de resolução do PVRP	42
3.2.3 Comparação de heurísticas	50
3.3 Optimização por colónias de formigas – aplicação aos problemas de rotas	51
3.3.1 Comportamentos das colónias de formigas	51
3.3.2 As formigas artificiais e sua aplicação a problemas de rotas	52
3.3.3 As etapas fundamentais dos ACO aplicados VRP – um histórico das técnicas implementadas	53
3.3.3.1 Construção das rotas (ConstructAntsSolution)	53
3.3.3.2 Actualização de feromona (UpdatesPheromone)	58
3.3.3.3 Optimização local (DaemonActions)	58
3.3.4 Estratégias de intensificação e de diversificação	61
3.3.5 Critério de Paragem	64



<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>Pág.</b>
<b>MODELO DE DUAS FASES PARA O PVRP</b>	65
4.1 Primeira fase do algoritmo: CONSTRUÇÃO DAS ROTAS	66
4.1.1 Considerações gerais	66
4.1.2 Geração de soluções admissíveis (ConstructAntsSolution)	67
4.1.3 Actualização dos valores da feromona (Updates Pheromone)	71
4.1.4 Optimização local (DaemonActions)	73
4.1.5 Estratégias de intensificação e de diversificação	79
4.1.6 Critério de Paragem	80
4.1.7 Síntese da primeira fase do algoritmo	80
4.2 Segunda fase do algoritmo – CALENDARIZAÇÃO DAS ROTAS	81
4.2.1 Considerações gerais	81
4.2.2 Construção de uma solução que verifique a unicidade de visita diária para cada localidade	82
4.2.2.1 Geração de um grafo	83
4.2.2.2 Fase de Transição	86
4.2.2.3 Coloração do grafo	87
4.2.3 Admissibilidade da solução obtida após coloração do grafo	95
 <b>CAPÍTULO 5</b>	
<b>EXPERIMENTAÇÃO COMPUTACIONAL: MODELO DE DUAS FASES</b>	101
5.1 Análise técnica da primeira fase do algoritmo	102
5.1.1 Diferentes escolhas para $\eta_{ij}$ - a visibilidade	102
5.1.2 A feromona global - $\tau_{ij}$	105
5.1.2.1 Os parâmetros: $\rho$ , $\omega$ , $\delta$	106
5.1.2.2 A gestão da feromona global: o parâmetro $\alpha$	109
5.1.2.3 A importância da feromona global	110
5.1.2.4 Validação da feromona global apresentada	111
5.1.3 Construção de rotas Sequencial versus Paralelo	116
5.1.3.1 Construção de rotas em Paralelo	116
5.1.3.2 Construção Sequencial das rotas	118
5.1.4 O impacto das técnicas de pós-optimização	122



5.1.4.1	Os procedimentos 2-optimal e 3-optimal	122
5.1.4.2	O procedimento <i> fusão</i>	125
5.1.4.3	O procedimento <i> trocas-entre-rotas</i>	128
5.1.5	Estratégias de intensificação e diversificação	130
5.1.6	Critério de Paragem	133
5.2	Conclusões da análise do desempenho (1ª fase)	137
5.3	Análise da segunda fase do algoritmo	138
5.3.1	Aplicação da fase de transição	138
5.3.2	O problema de coloração de grafos	140
5.4	Aplicação do modelo de duas fases ao caso de estudo	141
5.4.1	Resolução da segunda fase sem aplicação da fase de transição	141
5.4.2	Resolução da segunda fase com aplicação da fase de transição	143

## CAPÍTULO 6

### MODELO DE CONSTRUÇÃO DE ROTAS E CALENDARIZAÇÃO

	<b>EM SIMULTÂNEO</b>	149
6.1	Solução inicial	151
6.1.1	Equilíbrio da carga de trabalho	151
6.1.2	Construção das rotas com proximidade geográfica	153
6.2	Mecanismo de trocas	155
6.2.1	Lista de candidatos para as trocas do padrão da calendarização	156
6.2.3	Remoção versus inserção	160
6.2.4	Conversão de solução inadmissível em admissível	163
6.3	Experimentação computacional	165
6.3.1	Solução inicial	165
6.3.2	Mecanismo de trocas	169
6.3.2.1	Lista dos movimentos de trocas a avaliar	169
6.3.2.2	A relaxação – o parâmetro $\gamma$ e o parâmetro $\nu$	171
6.3.2.3	Retorno à admissibilidade das soluções	177
6.4	Aplicação do modelo ao caso de estudo	180
6.5	Comparação dos dois modelos apresentados nesta dissertação	182
6.6	O caso de estudo: comparação da solução proposta com a situação actualmente em vigor	185





<b>CAPÍTULO 7</b>	
<b>SÍNTESE E CONCLUSÕES</b>	187
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	195
<b>ANEXO A</b>	
<b>CARACTERIZAÇÃO DOS PONTOS DE RECOLHA</b>	A1
<b>ANEXO B</b>	
<b>PROBLEMAS DE TESTE EXISTENTES NA LITERATURA DE PVRP</b>	B1
<b>ANEXO C</b>	
<b>RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO DE DUAS FASES AO CASO DE ESTUDO</b>	C1
<b>ANEXO D</b>	
<b>RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO DE DUAS FASES AOS EXEMPLOS DA LITERATURA</b>	D1
<b>ANEXO E</b>	
<b>RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO DE DEFINIÇÃO SIMULTÂNEA DE ROTAS E CALENDARIZAÇÃO AOS EXEMPLOS DA LITERATURA</b>	E1
<b>ANEXO F</b>	
<b>RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO DE DEFINIÇÃO SIMULTÂNEA DE ROTAS E CALENDARIZAÇÃO AO CASO DE ESTUDO</b>	F1



## Índice de Figuras

---

	<b>Pág.</b>
<b>CAPÍTULO 2</b>	
<b>APRESENTAÇÃO DO CASO DE ESTUDO</b>	
Figura 2. 1: Sistema de processamento de resíduos sólidos	11
Figura 2. 2: Localização do concelho de Viseu	11
Figura 2. 3: Carta da área em estudo - concelho de Viseu	12
Figura 2. 4: Número de contentores versus população	15
Figura 2. 5: Frequência de recolha dos contentores versus localização geográfica	16
Figura 2. 6: Concelho de Viseu e sua divisão em 13 zonas de recolha (giros)	18
<b>CAPÍTULO 3</b>	
<b>ESTABELECIMENTO DE ROTAS: MODELOS E TÉCNICAS</b>	
Figura 3. 1: Ilustração do VRP	26
Figura 3. 2: Ilustração do PVRP	28
Figura 3. 3: Poupança da heurística Clarke e Wriqth	32
Figura 3. 4: Movimentos 3-optimal	33
Figura 3. 5: Procedimento geral de um Algoritmo Pesquisa Tabu	37
Figura 3. 6: Procedimento geral do método Arrefecimento Simulado	38
Figura 3. 7: Procedimento geral de um Algoritmo Genético	40
Figura 3. 8: Procedimento geral de um Algoritmo de Optimização de Colónias de Formigas	41
Figura 3. 9: Três rotas resultantes da heurística Clarke e Wright	43
Figura 3. 10: O comportamento das formigas face a um obstáculo	51
Figura 3. 11: Movimento de inserção (1,0)	59
Figura 3. 12: Movimento de troca (1,1)	60
Figura 3. 13: Pseudo-código de ACO	60
Figura 3. 14: Representação visual da matriz de feromona para as iterações 0, 5, 10 e 100	62



## CAPÍTULO 4

### MODELO DE DUAS FASES PARA O PVRP

Figura 4. 1: Poupança do tipo 1	69
Figura 4. 2: Poupança do tipo 2	70
Figura 4. 3: Pseudo-código de fusão	75
Figura 4. 4: Procedimentos de trocas (1,1)	78
Figura 4. 5: Procedimento de inserção	78
Figura 4. 6: Síntese da primeira fase do algoritmo	80
Figura 4. 7: Grafo representativo do exemplo 1	84
Figura 4. 8: Exemplo de um grafo com duas componentes desconexas	89

## CAPÍTULO 5

### EXPERIMENTAÇÃO COMPUTACIONAL: MODELO DE DUAS FASES

Figura 5. 1: Visualização gráfica do efeito do parâmetro $\omega$	107
Figura 5. 2: A importância do parâmetro $\alpha$	110
Figura 5. 3: O efeito da feromona no algoritmo	111
Figura 5. 4: Comparação das 2 estruturas de feromona ( $\alpha=1$ seguindo-se $\alpha=10$ ) – exemplo nº 8	112
Figura 5. 5: Comparação das 2 estruturas de feromona ( $\alpha=1$ ) – exemplo nº 8	113
Figura 5. 6: Comparação das 2 estruturas de feromona ( $\alpha=1$ seguindo-se $\alpha=10$ ) – exemplo nº 30	114
Figura 5. 7: Comparação das 2 estruturas de feromona ( $\alpha=1$ ) – exemplo nº 30	115
Figura 5. 8: Construção de rotas em paralelo	117
Figura 5. 9: Construção sequencial de rotas	118
Figura 5. 10: Quatro rotas de uma solução construída sequencialmente	119
Figura 5. 11: Quatro rotas de uma solução construída sequencialmente	121
Figura 5. 12: O efeito da aplicação das heurísticas 2 e 3 optimal	123
Figura 5. 13: Comparação dos tempos execução	124
Figura 5. 14: Tempos de execução dos procedimentos k-optimal	125
Figura 5. 15: Os efeitos dos procedimentos <i>fusão</i> e <i>trocas-entre-rotas</i>	129
Figura 5. 16: Visualização do efeito das estratégias de diversificação na matriz da feromona	131



Figura 5. 17: O efeito da reinicialização no ACO	132
Figura 5. 18: Evolução dos valores ótimos versus tempo	134

## **CAPÍTULO 6**

### **MODELO DE CONSTRUÇÃO DE ROTAS E CALENDARIZAÇÃO EM SIMULTÂNEO**

Figura 6. 1: O algoritmo para a solução inicial	155
Figura 6. 2: Movimentos não analisados	159
Figura 6. 3: Exemplo da avaliação proposta por Chao et al. (1995)	161
Figura 6. 4: O procedimento de trocas de padrões da calendarização	163
Figura 6. 5: Algoritmo de resolução de PVRP	164
Figura 6. 6: Visualização das rotas da solução inicial do caso de estudo	166
Figura 6. 7: Distribuição geográfica dos clientes do problema nº 19 da literatura	167
Figura 6. 8: Visualização das rotas da solução inicial do problema nº 19 da literatura	168
Figura 6. 9: Resultados para $\gamma = 0\%$	174
Figura 6. 10: Resultados da 2ª formulação	175
Figura 6. 11: Aplicação dos movimentos de trocas (problema nº 23)	176
Figura 6. 12: A evolução do modelo (caso de estudo)	178
Figura 6. 13: Distribuição geográfica dos clientes	179

## **ANEXO B**

### **PROBLEMAS DE TESTE EXISTENTES NA LITERATURA DE PVRP**

Figura B.1: Distribuição geográfica dos clientes do exemplo nº 8 da literatura (a) e do exemplo nº 20 da literatura (b)	B2
---	----

## **ANEXO C**

### **RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO DE DUAS FASES AO CASO DE ESTUDO**

Figura C.1: Representação esquemática das rotas de segunda-feira	C19
Figura C.2: Representação esquemática das rotas de terça-feira	C22
Figura C.3: Representação esquemática das rotas de quarta-feira	C25
Figura C.4: Representação esquemática das rotas de quinta-feira	C28
Figura C.5: Representação esquemática das rotas de sexta-feira	C31
Figura C.6: Representação esquemática das rotas do fim-de-semana	C34





**ANEXO D****RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO DE DUAS FASES AOS EXEMPLOS DA LITERATURA**

Figura D. 1: Visualização geográfica dos clientes dos exemplos 19 e 20 da literatura D6

**ANEXO F****RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO DE DEFINIÇÃO SIMULTÂNEA DE ROTAS E CALENDARIZAÇÃO AO CASO DE ESTUDO**

Figura F. 1: Representação esquemática das rotas de segunda-feira F2

Figura F.2: Representação esquemática das rotas de terça-feira F5

Figura F. 3: Representação esquemática das rotas de quarta-feira F7

Figura F. 4: Representação esquemática das rotas de quinta-feira F10

Figura F. 5: Representação esquemática das rotas de sexta-feira F13

Figura F. 6: Representação esquemática das rotas do fim-de-semana F16



## Índice de Tabelas

---

	<b>Pág.</b>
<b>CAPÍTULO 2</b>	
<b>APRESENTAÇÃO DO CASO DE ESTUDO</b>	
Tabela 2. 1: População residente do concelho de Viseu, por freguesia (resultados provisórios INE)	13
<b>CAPÍTULO 5</b>	
<b>EXPERIMENTAÇÃO COMPUTACIONAL: MODELO DE DUAS FASES</b>	
Tabela 5. 1: O efeito de diferentes “visibilidades”	104
Tabela 5. 2: Exemplo do efeito do parâmetro $\omega$ na expressão de actualização da feromona	107
Tabela 5. 3: Teste aos parâmetros $\omega$ , $\delta$ e $\rho$	108
Tabela 5. 4: Soluções da construção sequencial das rotas partindo de nós geograficamente afastados	120
Tabela 5. 5: Soluções da construção sequencial das rotas partindo de nós próximos do depósito	121
Tabela 5. 6: Resultados dos algoritmos: ligação em paralelo versus sequencial	122
Tabela 5. 7: Aplicação da post-optimização <i> fusão e trocas-entre-rotas</i>	127
Tabela 5. 8: O efeito da pós-optimização <i> fusão e trocas-entre-rotas</i>	130
Tabela 5. 9: Reinicialização versus “iteração zero”	132
Tabela 5. 10: Tempo computacional referente à execução de 500 iterações	136
Tabela 5. 11: Sumário do modelo de regressão linear (Tempo computacional versus N)	136
Tabela 5. 12: Resultados do ACO desenvolvido aplicado a problemas de rotas (VRP) da literatura	137
Tabela 5. 13: Efeito da fase de transição	139
Tabela 5. 14: O efeito das restrições adicionais no problema de coloração de grafos	140
Tabela 5. 15: Componentes desconexas do grafo relaxado do caso de estudo	141
Tabela 5. 16: Síntese dos resultados finais do caso de estudo (sem fase de transição)	142



Tabela 5. 17: Síntese dos resultados do caso de estudo (com fase de transição)	143
Tabela 5. 18: A fase de transição no caso de estudo	144
Tabela 5. 19: Conjunto de 17 rotas para a recolha de segunda-feira	145
Tabela 5. 20: Conjunto de 16 rotas para a recolha de segunda-feira	146
Tabela 5. 21: Síntese dos resultados finais do caso de estudo	147

## **CAPÍTULO 6**

### **MODELO DE CONSTRUÇÃO DE ROTAS E CALENDARIZAÇÃO EM SIMULTÂNEO**

Tabela 6. 1: Avaliação da carga de trabalho diária	152
Tabela 6. 2: Número de movimentos entre padrões bissemanais	157
Tabela 6. 3: Número de movimentos entre padrões trissemanais	157
Tabela 6. 4: A solução inicial do problema nº 19 da literatura	168
Tabela 6. 5: Solução inicial	173
Tabela 6. 6: Solução obtida após trocas (caso de estudo)	181
Tabela 6. 7: Solução final (caso de estudo)	182
Tabela 6. 8: Comparação dos resultados	184

## **ANEXO A**

### **CARACTERIZAÇÃO DOS PONTOS DE RECOLHA**

Tabela A. 1: Caracterização dos locais de recolha de RSU da área em estudo	A1
Tabela A. 2: Resultados do modelo de regressão linear	A7

## **ANEXO B**

### **PROBLEMAS DE TESTE EXISTENTES NA LITERATURA DE PVRP**

Tabela B.1: Dimensões dos problemas de teste existentes na literatura de PVRP	B2
Tabela B.2: Códigos dos dias de visita	B3
Tabela B.3: Problemas de teste seleccionados para estudo	B4

## **ANEXO C**

### **RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO DE DUAS FASES AO CASO DE ESTUDO**

Tabela C. 1: Solução da primeira fase do algoritmo – conjunto de rotas	C2
Tabela C. 2: Composição das componentes desconexas	C5
Tabela C. 3: Coloração das componentes desconexas	C6



Tabela C. 4: Número de rotas afecta a cada cor	C7
Tabela C. 5: Identificação inadmissibilidades na calendarização devido à coloração de um problema relaxado	C8
Tabela C. 6: Sumário dos resultados do caso de estudo	C8
Tabela C. 7: Calendário de visita	C9
Tabela C. 8: Composição das componentes desconexas (com fase de transição)	C11
Tabela C. 9: Solução após a fase de transição - conjunto de rotas	C12
Tabela C. 10: Resultados do problema de coloração de grafos	C15
Tabela C. 11: Sumário dos resultados do caso de estudo (com fase de transição)	C16
Tabela C. 12: Calendário de visita (solução com fase de transição)	C16
Tabela C. 13: Resultados do caso de estudo	C18
Tabela C. 14: Solução de segunda-feira	C19
Tabela C. 15: Solução de terça-feira	C22
Tabela C. 16: Solução de quarta-feira	C25
Tabela C. 17: Solução de quinta-feira	C27
Tabela C. 18: Solução de sexta-feira	C30
Tabela C. 19: Solução do fim-de-semana	C33

## **ANEXO D**

### **RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO DE DUAS FASES AOS EXEMPLOS DA LITERATURA**

Tabela D.1: Resultados da primeira fase do algoritmo aplicada aos problemas da literatura	D1
Tabela D. 2: Resultados da aplicação da segunda fase do algoritmo aos exemplos referenciados na literatura	D3

## **ANEXO E**

### **RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO DE DEFINIÇÃO SIMULTÂNEA DE ROTAS E CALENDARIZAÇÃO AOS EXEMPLOS DA LITERATURA**

Tabela E1: Solução inicial do exemplo nº 8	E2
Tabela E2: Solução final do exemplo nº 8	E2
Tabela E3: Solução inicial do exemplo nº 10	E2
Tabela E4: Solução final do exemplo nº 10	E2
Tabela E5: Solução inicial do exemplo nº 13	E3





Tabela E6: Solução final do exemplo nº 13	E3
Tabela E7: Solução inicial do exemplo nº 19	E3
Tabela E8: Solução final do exemplo nº 19	E3
Tabela E9: Solução inicial do exemplo nº 20	E4
Tabela E10: Solução final do exemplo nº 20	E4
Tabela E11: Solução inicial do exemplo nº 23	E4
Tabela E12: Solução final do exemplo nº 23	E4
Tabela E13: Solução inicial do exemplo nº 30	E5
Tabela E14: Solução final do exemplo nº 30	E5

## **ANEXO F**

### **RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO DE DEFINIÇÃO SIMULTÂNEA DE ROTAS E CALENDARIZAÇÃO AO CASO DE ESTUDO**

Tabela F. 1: Solução inicial do caso de estudo	F1
Tabela F. 2: Solução final do caso de estudo	F1
Tabela F. 3: Solução de segunda-feira	F2
Tabela F. 4: Solução de terça-feira	F4
Tabela F. 5: Solução de quarta-feira	F7
Tabela F. 6: Solução de quinta-feira	F10
Tabela F. 7: Solução de sexta-feira	F12
Tabela F. 8: Solução de fim-de-semana	F15



---

## Capítulo 1

### Introdução

---

Neste trabalho são desenvolvidos modelos que visam apoiar decisões sobre a operação de sistemas logísticos de recolha ou distribuição de produtos, especificamente no que concerne ao estabelecimento de rotas dos veículos.

Não descurando preocupações de generalidade, os modelos desenvolvidos centram-se num caso de estudo constituído pelo sistema de recolha de resíduos sólidos urbanos do concelho de Viseu.

No sistema em estudo, os meios encontram-se perfeitamente definidos: o número e localização dos contentores e a respectiva frequência de descarga, a constituição da frota de veículos, o quadro do pessoal e respectivos horários laborais, a localização da estação de transferência, entre outros. Deste modo, no problema em estudo não se abordam decisões de carácter estratégico como, por exemplo, de localização de instalações ou de constituição da frota, mas sim de um planeamento de carácter tático, pressupondo que a montante as decisões estratégicas estão tomadas. Trata-se no fundo de estabelecer um plano de rotas e calendário de visitas a aplicar num horizonte temporal alargado, cobrindo seguramente vários meses e que só será revisto face a alterações significativas no sistema, nomeadamente dos ritmos de deposição dos resíduos ou de novas urbanizações que obriguem à reformulação de localização de contentores e/ou frequências de visita dos mesmos.

Conhecidos os recursos existentes, os modelos desenvolvidos pretendem apoiar decisões de planeamento, definindo a melhor sequência dos locais a visitar e estabelecendo as rotas a efectuar.

Neste tipo de problemas periódicos, nos quais a solução é repetida por vários períodos, a optimização das rotas assume uma importância acrescida na medida em que um mau plano de operação que é replicado em horizontes temporais dilatados tem um impacto económico muito significativo. Importa pois investir na elaboração de planeamentos de qualidade, delineando percursos optimizados e minimizando os custos variáveis dos sistemas que são basicamente função das distâncias percorridas pelos veículos.

Os custos de distribuição e transportes constituem uma parcela muito significativa na economia das empresas: a título de exemplo, refira-se o caso de estudo, para o qual a parcela dos custos associados à recolha e transporte dos resíduos corresponde a cerca de 70% do custo total de exploração do sistema de recolha de resíduos de todo o concelho.

Este trabalho vem na sequência da tese de mestrado da autora (Matos (1996)), em que se estudou o sistema de recolha de resíduos sólidos de concelho de Viseu. Nessa tese de mestrado é desenvolvida e implementada uma heurística para o estabelecimento de rotas dos veículos de recolha, baseada no conceito poupança (“savings”) introduzido originalmente por Clarke e Wright (1964). O modelo implementado na tese de mestrado encerrava algumas limitações inerentes ao desempenho de heurísticas simples que produzem com frequência soluções francamente afastadas do óptimo. Adicionalmente, o problema de calendarização não foi resolvido de forma integrada com o problema de estabelecimento de rota. O sistema de recolha de resíduos sólidos então em vigor (1996) apresentava menor complexidade do que na actualidade, o que permitiu na altura resolver o problema de calendarização sem grandes dificuldades.

Neste sentido, interessa agora resolver de forma articulada os problemas de definição do calendário das visitas de cada localidade e do estabelecimento das respectivas rotas dos veículos e tirar partido de avanços mais recentes no domínio das meta-heurísticas.

O problema em estudo constitui uma variante do problema clássico de estabelecimento de rotas. É formulado como um problema de estabelecimento de rotas periódico, identificado muito frequentemente pelo acrónimo PVRP (*Periodic Vehicle Routing Problem*).

O problema clássico de rotas (VRP) consiste em determinar um conjunto de rotas, com um custo total mínimo, que os veículos terão de realizar para servirem um conjunto de clientes geograficamente dispersos, sujeito às restrições: cada rota tem início e fim num ponto pré-estabelecido; os clientes são visitados exactamente uma vez, por um único veículo; a procura total de uma rota não deve exceder a capacidade do veículo; a duração total de uma rota (incluindo o tempo de serviço e o tempo de viagem) não deve exceder o tempo limite permitido por rota.

O problema de estabelecimento de rotas periódico elabora um planeamento num horizonte temporal no qual os clientes têm uma frequência de visita diferenciada, sujeito a restrições de calendarização das visitas.

O PVRP é considerado um problema multi-nível que abrange duas vertentes: o problema de afectação (afectação dos clientes aos diferentes dias do período do horizonte temporal) e o problema de estabelecimento de rotas. Uma boa solução do problema de afectação poderá conduzir a um solução com elevados custos de transporte. Por outro lado, uma solução de rotas otimizada poderá gerar calendarizações com graves consequências quer na organização da empresa (por exemplo, desequilíbrios na carga de trabalho diária, gerando soluções com dias de visita a muitos clientes e outros com poucos clientes a visitar) quer nos níveis de serviço (por exemplo, no caso de estudo, espaçamentos excessivos entre visitas consecutivas geram períodos de vários dias sem descarga dos contentores, com implicações negativas nos padrões de higiene e limpeza). A interacção temporal e espacial constitui um desafio para esta classe de problemas sendo necessário seleccionar o padrão temporal de visita de cada cliente e estabelecer as rotas para cada dia do horizonte temporal de acordo com as regras do VRP de modo a minimizar os custos de operação do sistema.

Os problemas clássicos de rotas de veículos são, desde há muito, objecto de forte investigação e podem, em geral, considerar-se bem estudados. São conhecidas aplicações à recolha de resíduos, nomeadamente à recolha de lixo urbano e resíduos recicláveis. No entanto, não são muitos os modelos desenvolvidos para a resolução dos PVRP, embora seja bastante amplo o leque de casos reais aplicáveis a esta formulação. Neste sentido, os modelos desenvolvidos nesta dissertação têm um carácter genérico, podendo ser aplicados a diferentes problemas de recolha ou distribuição de carácter periódico. Adicionalmente pretende-se desenvolver procedimentos capazes de resolver problemas de grandes dimensões, isto é, com um elevado número de clientes a visitar no horizonte temporal.

Os problemas de estabelecimento de rotas englobam-se na classe de problemas de optimização combinatória que são normalmente fáceis de descrever e formular, mas difíceis de resolver.

As meta-heurísticas são procedimentos relativamente recentes (os seus inícios remontam à década de 80), constituindo-se como métodos de pesquisa aproximada para resolução de problemas de optimização complexos, com aplicações nas áreas mais diversas (comércio, indústria, engenharia, etc.). As meta-heurísticas normalmente combinam regras sofisticadas de pesquisa de vizinhanças, estruturas de memória e recombinações de soluções que permitem uma profunda exploração no espaço de soluções, evitando a estagnação em

óptimos locais. Têm mostrado ser métodos eficazes e capazes de resolver uma vasta gama de problemas reais.

Entre o vasto leque das meta-heurísticas encontram-se os algoritmos de optimização por colónias de formigas (ACO) que são inspirados no comportamento das colónias de formigas na procura de comida. A sua génese remonta os anos 90 (Colorni et al. (1991)) com uma aplicação ao problema do caixeiro viajante, mas só em 1999 é apresentada como estrutura de meta-heurística capaz de vastas aplicações.

O carácter inovador de uma meta-heurística emergente, com resultados promissores em algumas variantes de problemas de rotas, mas com potencial ainda insuficientemente explorado, afigurou-se-nos como uma linha de investigação promissora que importaria explorar. Deste modo, os modelos desenvolvidos nesta tese recorrem à estrutura das meta-heurística de optimização por colónias de formigas, contribuindo de forma inovadora com características que se diferenciam dos ACO existentes da literatura, capazes de gerar soluções de qualidade e particularmente ajustados à resolução de problemas de grandes dimensões.

Também são desenvolvidas e implementadas técnicas de pós-optimização que envolvem trocas de clientes entre rotas. As técnicas apresentadas revelaram-se promissoras na aplicação a problemas de estabelecimentos de rotas, permitindo não só diminuir o número de rotas da solução, como também melhorar a qualidade das soluções.

Nas formulações clássicas dos problemas periódicos de estabelecimento de rotas encontram-se duas abordagens. Qualquer delas trata o problema em dois estágios: um aborda o problema da calendarização, enquanto o outro trata o problema de estabelecimento de rotas, tipicamente de um modo sequencial. Mais modernamente surgem abordagens que tratam estas duas questões de um modo integrado.

Nas formulações clássicas, a abordagem claramente privilegiada pela maioria dos autores trata num primeiro estágio a calendarização, afectando a visita dos clientes a determinados dias do período. Num segundo estágio, é tratado o problema de estabelecimento de rotas para cada dia do horizonte temporal.

A formulação em que a calendarização é deixada para uma segunda fase está muito pouco explorada na literatura. Julga-se que o motivo é o conjunto de dificuldades associadas à definição de uma calendarização viável na segunda fase, condicionada pelas rotas construídas na primeira fase. Estas dificuldades constituíram para nós um desafio: tentar desenvolver um

modelo que ultrapasse as dificuldades da calendarização quanto esta é abordada como segunda fase do problema.

Avançar com uma formulação em que os dois problemas são abordados em simultâneo, indo ao encontro dos desenvolvimentos mais recentes, também se afigurou como uma via promissora que importava explorar.

Deste modo, nesta dissertação são apresentados dois modelos. O primeiro é um modelo de duas fases. Na primeira fase constroem-se as rotas para o horizonte temporal sem englobar qualquer tipo de restrição de calendarização de visita dos clientes, recorrendo-se ao desenvolvimento de um ACO para construção em paralelo das rotas. Na segunda fase recorre-se à formulação e resolução de um problema de coloração de grafos e a um mecanismo de trocas que permite afectar as rotas geradas na primeira fase aos diferentes dias do horizonte temporal de modo a cumprir as restrições de calendarização. Os procedimentos desenvolvidos para esta segunda fase permitem ultrapassar as dificuldades sentidas por outros autores na afectação das rotas, dificuldades que certamente foram determinantes no passado para o desenvolvimento destes modelos de duas fases por ordem inversa.

O segundo modelo apresentado nesta dissertação é desenvolvido abordando o problema de calendarização e estabelecimento de rotas em simultâneo. Recorrendo ao ACO, é implementado um procedimento que gera uma solução inicial para o problema afectando os clientes a visitar em cada dia a uma determinada zona geográfica e equilibrando a carga de trabalho entre os diferentes dias do horizonte temporal. Um mecanismo de trocas entre clientes é desenvolvido no sentido de melhorar a solução final.

É também propósito do trabalho apresentado nesta dissertação investigar estas duas formulações e compará-las, identificando as potencialidades e limitações das diferentes formulações.

No sentido de analisar e avaliar o desempenho dos modelos implementados, foram resolvidos, além do caso de estudo, um conjunto de problemas de teste retirados da literatura, ilustrando em simultâneo o desempenho das diferentes formulações possíveis para o PVRP e o desempenho do modelo ACO desenvolvido aplicado a problemas clássicos de estabelecimento de rotas.

Esta dissertação tem a estrutura que de seguida se apresenta sucintamente.

O Capítulo 2 é dedicado à apresentação do caso em estudo, relativo à recolha de resíduos sólidos do concelho de Viseu, sendo este caracterizado com níveis de detalhe adequado aos propósitos desta dissertação.

No Capítulo 3 é feita uma breve revisão da extensa bibliografia de problemas clássicos de rotas de veículos e uma descrição dos métodos de abordagem e técnicas de resolução dos problemas periódicos de estabelecimento de rotas existentes na literatura. Por último, apresenta-se uma descrição dos modelos de optimização por colónias de formigas e uma revisão da sua aplicação a problemas de rotas.

No Capítulo 4 é apresentado um modelo de resolução de problemas de estabelecimento de rotas periódico que engloba duas fases. Na primeira fase definem-se as rotas para o horizonte temporal, sendo desenvolvido um algoritmo que se baseia na optimização por colónias de formigas para obtenção optimizada de um conjunto de rotas. Na segunda fase, recorre-se à formulação e resolução de um problema de coloração de grafos e a um mecanismo de trocas que permitem afectar as rotas da primeira fase aos diferentes dias da semana.

O Capítulo 5 é dedicado à experimentação computacional do modelo de duas fases. O capítulo inicia-se com uma análise técnica da primeira fase do algoritmo, apresentando diferentes alternativas ao modelo proposto e comparando resultados que permitem validar a opção do modelo exposto, seguindo-se uma análise da segunda fase do modelo. Por fim são apresentados os resultados obtidos com o modelo proposto.

No Capítulo 6 é apresentado um modelo de resolução de problemas de rotas periódicos onde se procede à construção de rotas e calendarização em simultâneo. Desenvolve-se um procedimento que constrói uma solução inicial admissível para os diferentes dias do horizonte temporal, seguindo-se a elaboração de um mecanismo de trocas de clientes que permite alterações das calendarizações iniciais, melhorando o conjunto de rotas da solução inicial. Ainda no Capítulo 6 são apresentados os resultados da experimentação computacional do modelo exposto neste capítulo e comparados os desempenhos dos dois modelos



implementados. Por fim é comparada a solução proposta com a solução actualmente em vigor do sistema de recolha de lixos comunitários em estudo.

Finalmente no Capítulo 7 apresentam-se as principais conclusões deste trabalho, referem-se os contributos de nível teórico e prático e identificam-se algumas direcções de investigação futura.



---

## Capítulo 2

### **Apresentação do caso de estudo**

---

Neste capítulo é descrito o caso estudado nesta dissertação. Trata-se de um sistema de recolha indiferenciada de resíduos sólidos do Concelho de Viseu, que se encontra sob responsabilidade da Divisão de Ambiente e Transportes do Departamento de Obras Municipais, Ambiente, Transportes e Serviços Urbanos da Câmara Municipal de Viseu (CMV).

A área em estudo abrange todo o concelho de Viseu, excluindo a área urbana da cidade. Encontram-se 2336 contentores distribuídos pela área em estudo, que é necessário esvaziar diversas vezes por semana. Existem contentores que são esvaziados diariamente, enquanto que outros são visitados duas ou três vezes por semana, obedecendo a intervalos de tempo entre descargas consecutivas que são impostos no sentido de manter bons padrões de higiene e limpeza.

Conhecida a localização dos contentores, frequência de visita, rede viária, equipamento e mão-de-obra disponíveis, é necessário elaborar um plano semanal de rotas de modo a minimizar os custos variáveis da operação do sistema, que são essencialmente função da distância total percorrida. O plano semanal deverá englobar a visita a todos os contentores, tantas as vezes quantas as necessárias, obedecendo às restrições de espaçamento temporal entre visitas consecutivas.

Inicia-se o capítulo com a descrição do sistema de resíduos sólidos urbanos e a apresentação da gestão do sistema do concelho de Viseu. Na secção 2.2 é identificada e caracterizada a área em estudo, o sistema de deposição e o sistema de recolha em estudo.

Por fim, expõe-se o modo como funciona actualmente o sistema, quantificando-se algumas medidas de interesse ao desenvolvimento de qualquer problema de estabelecimento de rotas, como por exemplo velocidades médias e durações de rotas, entre outras.

## **2.1 Caracterização do sistema de Processamento de resíduos sólidos do Concelho de Viseu**

Toda a sociedade humana produz resíduos, trate-se se uma sociedade urbana, rural ou industrial.

Os resíduos podem ser agrupados em quatro grandes grupos dependendo do seu tipo: resíduos industriais, florestais, agro-industriais e sólidos urbanos. O nosso estudo vai abordar os resíduos sólidos urbanos (RSU) também designados por lixos comunitários.

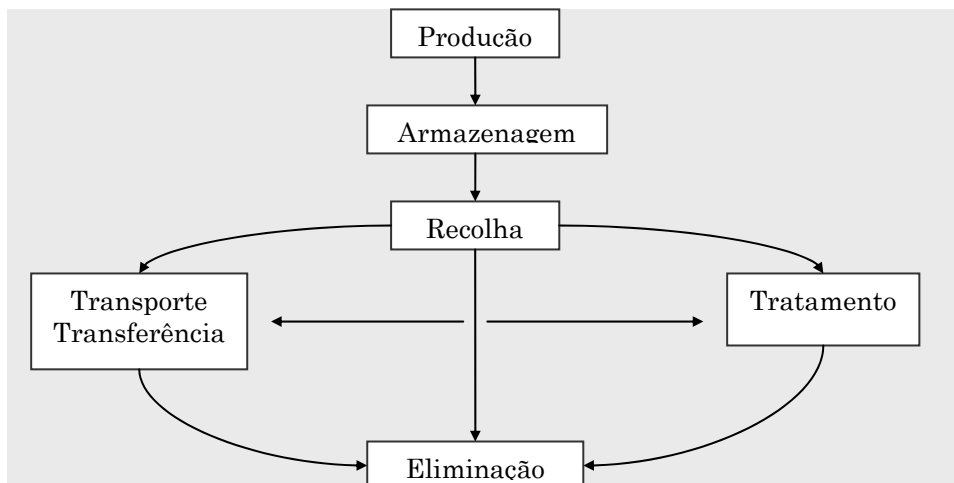
Os resíduos sólidos urbanos agrupam os resíduos domésticos, os resíduos comerciais, alguns resíduos de pequenas indústrias, resíduos de limpeza de espaços públicos e alguns resíduos especiais.

Os sistemas de lixos comunitários envolvem duas componentes fundamentais; a remoção e o destino final. A remoção é uma designação genérica que envolve, em geral, um conjunto de actividades, como sejam, a deposição, a recolha, o transporte, o despejo e a transfega. O destino final inclui operações de tratamento (destruição, transformação ou deposição sob ou sobre o solo, consoante se trate da lagunagem ou aterro sanitário), de valorização (regeneração ou recuperação), de aproveitamento energético ou outras.

Uma correcta gestão depende da análise detalhada dos seus elementos funcionais, pois cada elemento vai afectar os elementos funcionais a jusante. Por exemplo, a natureza e a quantidade de resíduos produzidos (Produção) vai condicionar o tipo, a quantidade e localização dos contentores (Armazenagem), a frequência e o número de veículos de colecta (Recolha), e tipo e dimensão do sistema de tratamento (Tratamento) e/ou de eliminação (Eliminação).

No concelho de Viseu, a gestão do sistema de RSU é um sistema integrado: a gestão é partilhada pela Divisão de Ambiente e Transportes da Câmara Municipal de Viseu e a Associação de Municípios do Planalto Beirão (AMPB).

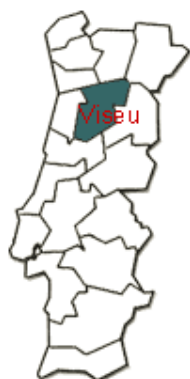
No passado, toda a recolha do Concelho ficava à responsabilidade da Câmara Municipal de Viseu (CMV). Com a adesão à Associação de Municípios do Planalto Beirão, desde 2001 a recolha do Concelho passou a tratar-se de um sistema integrado com as duas entidades.



**Figura 2. 1:** Sistema de processamento de resíduos sólidos

AMPB abrange actualmente dezanove municípios envolventes ao município de Viseu, tendo criado um sistema integrado de gestão de resíduos sólidos urbanos, que permite encontrar soluções de valorização e tratamento dos mesmos, com vista à protecção do Ambiente e preservação da região.

Com a adesão do concelho de Viseu a esta associação, coube à AMPB a responsabilidade de todo o processo relacionado com a recolha selectiva, tratamento, transferência e eliminação de todos os resíduos, e também a recolha indiferenciada da zona urbana do concelho. A recolha das zonas rurais e alguns arredores da cidade de Viseu ficam sob responsabilidade da Câmara Municipal.



O Concelho de Viseu, um concelho na zona Centro Norte de Portugal, tem cerca de 93 000 habitantes e abrange uma área de 507.2 km<sup>2</sup> distribuídas por 34 freguesias.

**Figura 2. 2:** Localização do concelho de Viseu



Os cerca de 73 000 habitantes residentes na zona em estudo não se encontram distribuídos uniformemente pela área do concelho. Como seria de esperar, existem zonas com uma maior densidade populacional – zonas mais próximas da cidade - e zonas com uma densidade populacional bastante reduzida devido aos difíceis acessos e menor desenvolvimento dessas regiões.

As colunas 4 e 8 da Tabela 2.1 ilustram algumas diferenças da distribuição populacional no concelho de Viseu. Excluindo as três freguesias do centro da cidade (Coração de Jesus, Santa Maria e São José), observam-se freguesias com densidades populacionais da ordem dos 0.3 a 0.6 habitantes por ha<sup>2</sup>, e outras com densidades da ordem dos 5.5 a 6.6 residentes por ha<sup>2</sup>. Note-se que as áreas onde a densidade populacional é mais baixa coincidem com as zonas Norte e Este do concelho e, em oposição, a zona mais povoada é a zona Centro que engloba arredores da cidade.

Freguesia	População residente	Área (ha <sup>2</sup> )	Densidade populacional	Freguesia	População residente	Área (ha <sup>2</sup> )	Densidade populacional
Abraveses	8036.0	1222.7	6.6	Mundão	1703.0	1444.6	1.2
Barreiros	334.0	600.7	0.6	Orgens	3462.0	890.2	3.9
Boa Aldeia	589.0	850.3	0.7	Povolide	1959.0	2080.1	0.9
Bodiosa	3110.0	2539.5	1.2	Ranhados	3996.0	623.5	6.4
Calde	1647.0	3505.7	0.5	Ribafeita	1461.0	1811.8	0.8
Campo	4358.0	1624.1	2.7	Rio de Loba	8407.0	1775.1	4.7
Cavernães	1471.0	1314.4	1.1	Viseu (Santa Maria)	7130.0	350.7	20.3
Cepões	1368.0	2918.1	0.5	Santos Evos	1642.0	1185.7	1.4
Viseu (Coração de Jesus)	8716.0	233.4	37.3	São Cipriano	1337.0	1260.7	1.1
Cota	1281.0	4154.8	0.3	São João de Lourosa	4316.0	2600.5	1.7
Couto de Bx.	780.0	1126.7	0.7	Viseu (São José)	5709.0	411.7	13.9
Couto de Cim.	886.0	1314.1	0.7	São Pedro de France	1451.0	1875.2	0.8
Fail	778.0	675.6	1.2	São Salvador	3087.0	646.2	4.8
Farminhão	787.0	1097.4	0.7	Torredeita	1451.0	1565.8	0.9
Fragosela	2228.0	1103.8	2.0	Vil de Souto	710.0	810.4	0.9
Lordosa	1884.0	2231.1	0.8	Vila Chã de Sá	1798.0	894.2	2.0
Silgueiros	3590.0	3617.4	1.0	Repeses	2040.0	354.6	5.8

Fonte: IGEOE/INE (CENSOS 2001)

Tabela 2. 1: População residente do concelho de Viseu, por freguesia (resultados provisórios INE)

### 2.2.2 Sistema de deposição

Os contentores são os depósitos onde os residentes do concelho de Viseu da área em estudo depositam o seu lixo indiferenciável. Nessa área encontram-se distribuídos cerca de 2336 contentores de 1100 litros pelas 31 freguesias, sendo a sua distribuição por freguesia díspar, devido às grandes diferenças de nível sócio-económico e densidade populacional entre freguesias.

É conhecida a localização e distribuição dos contentores no concelho, sendo possível, dentro de cada freguesia, saber os lugares com recolha e o número de contentores existentes.

Com vista à redução da dimensão do problema em estudo, agruparam-se os 2336 contentores a recolher em 202 locais de recolha. Este agrupamento é possível devido à pequena dimensão das localidades visitadas e à simplicidade da rede viária respectiva. Os percursos no interior das localidades (em termos de tempo, distância ou custo) não serão afectados pela inserção da visita dessa localidade no conjunto da rota do veículo. É praticamente invariante a distância percorrida no interior das localidades em função do ponto de entrada ou saída da mesma. A adopção de igual frequência de recolha para os contentores de uma mesma localidade, e o facto dos veículos terem capacidade em recolher todos os contentores existentes dentro de cada localidade, foram outros aspectos que permitiram esta formulação.

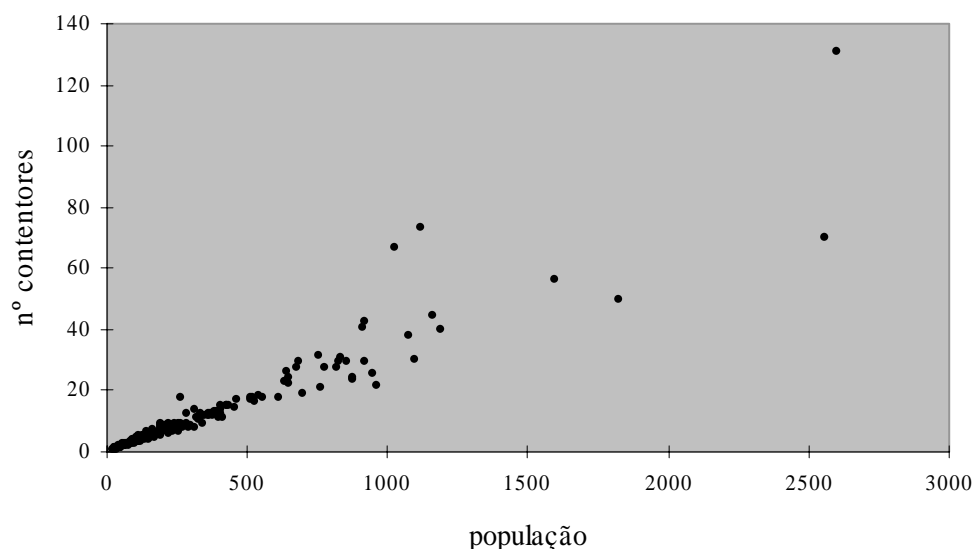
Desta forma, cada ponto de recolha corresponde a um lugar com um determinado número de contentores. Estes lugares estão identificados e caracterizados no Anexo A no que diz respeito à população residente, nº de contentores e número de recolhas semanais.

Existem desde lugares com 1 ou 2 contentores a recolher, a lugares com 130 contentores. Evidentemente que correspondem a zonas com características completamente diferentes.

Na tentativa de explicar a diferente distribuição dos contentores, que depende evidentemente das quantidades de resíduos produzidas e estando estas dependentes da densidade populacional, ajustou-se uma recta de regressão visando explicar o número de contentores pela população residente, verificando-se uma forte dependência linear (consultar Anexo A). De facto, o modelo permite concluir que 91% da variação do número de contentores é explicado pela população (coeficiente de determinação,  $r^2 = 0.91$ ).



Esta informação está de acordo com o elevado esforço que a Divisão de Ambiente e Transportes da Câmara Municipal de Viseu tem vindo a fazer no reforço de contentores pelas localidades e na sua melhor redistribuição.



**Figura 2. 4:** Número de contentores versus população

A frequência de recolha semanal, isto é, o número de vezes que se despejam os contentores por semana, não é igual para todos os lugares de recolha. Existem contentores que são despejados diariamente, enquanto que outros são esvaziados apenas duas ou três vezes por semana.

Na quantificação da produção de resíduos sólidos urbanos deve-se ter em conta, não só a densidade populacional, como também o nível sócio-económico das populações. A elevação do nível de vida traduz-se, em geral, no desenvolvimento de hábitos mais consumistas e com a consequente produção de maiores quantidades de lixo.

Segundo estudos anteriores, a produção per capita/dia de RSU da área em estudo é inferior a 0.5 kg nas zonas Nordeste do concelho, entre 1 kg a 1.5 kg na envolvente à cidade de Viseu e entre 0.5 kg e 1kg na restante área em estudo. Na zona da cidade, que não é objecto do nosso estudo, esses valores ultrapassam 1.5 kg per capita/dia.

Segundo indicações dos responsáveis pelo sistema, pretende-se que a zona envolvente à cidade tenha recolha diária durante os cinco dias úteis da semana e uma visita ao fim-de-



- A recolha é efectuada todos os dias úteis, de segunda-feira a sexta-feira e ao fim-de-semana.
- No sentido de minimizar o número de equipas a laborar ao fim-de-semana a recolha deste período deve centrar-se no estritamente necessário, correspondendo preferencialmente aos lugares com seis visitas semanais.  
Os lugares com seis visitas contemplam necessariamente uma recolha ao fim-de-semana, sendo indiferente a visita ao sábado ou ao domingo.

### **2.2.3 Sistema de recolha**

No sistema de recolha incluem-se a frota de veículos e o pessoal camarário afecto a estas operações.

O parque de veículos é composto por 11 viaturas de caixa de 15 m<sup>3</sup> de capacidade, providos de um sistema de compactação de grau 2.5:1 capaz de reduzir o volume do “lixo fresco”.

Os funcionários que de uma forma mais directa estão relacionados com a recolha e transporte são os motoristas e os cantoneiros. Existem actualmente 16 condutores de máquinas pesadas e veículos especiais e 35 cantoneiros de limpeza, perfazendo um total de 51 funcionários. O pessoal é dividido por equipas, sendo cada equipa constituída por um motorista e dois cantoneiros.

## **2.3 Funcionamento do sistema em estudo**

No modelo operacional actual, os responsáveis pela gestão municipal dos resíduos sólidos urbanos optaram por particionar a área de recolha em zonas distintas e independentes, a que chamam “giros”. Afectam cada equipa de recolha a um ou mais giros, durante o período de um mês (após o que há rotação das equipas), responsabilizando-a pela recolha e transporte dessa(s) zona(s).

Actualmente a área do concelho está dividida em 13 zonas. A coloração das áreas afectas a cada giro da carta da Figura 2.6 fornece uma percepção visual das localidades

pertencentes aos giros actualmente existentes (no Anexo A esta informação é fornecida com maior detalhe).

Cada equipa funciona em jornada contínua de 6 horas e 45 minutos em dois turnos; o turno da manhã, com início às 5:45m e fim às 12:30, e o turno da noite que ocorre das 17:15 até às 24:00 horas. Ambos os turnos têm a indicação para fazer uma pausa de meia hora, dentro do próprio giro, isto é, a pausa de 30 minutos será feita numa das localidades da rota em curso.

No início de cada turno o motorista parte da garagem, que fica localizada em Repeses, e desloca-se até Cabanões, onde se encontra com os cantoneiros. Daqui seguem para realizar a recolha dos resíduos nas localidades pertencentes ao giro que lhes é afecto. A escolha da rota a seguir é da exclusiva responsabilidade da equipa.



**Figura 2. 6:** Concelho de Viseu e sua divisão em 13 zonas de recolha (giros)

No final da recolha, o camião é pesado e despejado na estação de transferência, localizada no Mundão, seguindo para Cabanões onde o veículo é lavado, se necessário abastecido e onde ficam os cantoneiros. Por fim o motorista dirige-se com o veículo para a garagem, onde acaba o seu turno.

Cabanões (lavagem), Repeses (garagem) e Mundão (estação de transferência) são três locais de visita obrigatória. Cabanões e Repeses são duas localidades próximas da cidade de Viseu, a Sul, enquanto que a estação de transferência fica a Norte, a cerca de 6 km da cidade. Estas zonas encontram-se contornadas a amarelo na carta da Figura 2.6.

Os trabalhadores sabem quantas vezes por semana precisam de ir a cada local do giro que lhes foi atribuído. Assim, à segunda-feira de manhã começam por um local à escolha e vão realizando a recolha. Por não haver garantia de num turno conseguirem percorrer todo o giro, a equipa normalmente retoma o giro no ponto a seguir ao último local de recolha do turno anterior. Este procedimento leva a que, ou por falta de tempo, esquecimento, ou por considerarem que os contentores não estão com uma quantidade de resíduos que justifique a descarga, alguns contentores fiquem por despejar. Na prática, alguns contentores são despejados menos vezes do que as que nos são indicadas pelos serviços camarários, resultando por vezes, numa diminuição da qualidade dos níveis de higiene e limpeza.

Decompondo a operação de colecta nas suas actividades mais elementares consegue-se quantificar alguma informação que se revela útil em qualquer problema de rotas. Além da recolha propriamente dita (carregamento e descarregamento dos contentores), incluímos na operação de colecta a deslocação entre os locais de recolha, a deslocação dentro das localidades, períodos neutros ou não produtivos do ponto de vista estrito da remoção de resíduos e o tempo dispendido com a pesagem e descarregamento do veículo de recolha:

- O tempo gasto em cada localidade depende do número de contentores a recolher nessa zona. Estima-se que o tempo dispendido dentro de cada localidade seja em média 1.8 minutos por cada contentor a descarregar (consultar Matos (1996));
- O tempo médio necessário na estação de transferência para a pesagem e descarregamento do veículo estima-se em cerca de 4 minutos;

Pela observação dos discos dos tacógrafos, onde se encontram registados todos os movimentos do veículo e o número de quilómetros percorridos, foi possível estimar:

- velocidade média entre localidades – cerca de 39 km/hora;
- tempos neutros por turno – 2 horas e 15 minutos.

Nos tempos neutros ou não produtivos do ponto de vista estrito da remoção de resíduos, incluímos alguns que são necessários (por exemplo, o “check-in” e o “check-out” dos elementos da equipa de trabalho no início e no fim do dia, os 30 minutos de pausa no meio do turno, tempo dispendido entre a estação de transferência até à guarda do veículo na garagem que inclui a viagem do Mundão a Cabanões, lavagem diária dos veículos, e o percurso de Cabanões a Repezes), enquanto que outros são desnecessários (por exemplo: antecipação do fim do turno, dilatação dos prazos autorizados para refeições, etc).

- O tempo útil médio de cada turno (aplicável quer ao turno da manhã quer ao da noite), resume-se ao somatório dos tempos médios que, efectivamente, a equipa dedica à recolha; tem início em Cabanões e termina na estação de transferência no Mundão, e estima-se em 4 horas e 30 minutos;
- Através da rede viária construiu-se uma matriz triangular 202x202 com a menor distância (em quilómetros) entre quaisquer dois lugares a visitar.

No modelo a desenvolver apenas interessa incluir os trajectos que possam ser optimizados. Assim, os trajectos fixos serão excluídos e o percurso que será utilizado no processo de optimização terá início em Cabanões e fim na estação de transferência do Mundão, com uma duração que não poderá exceder as 4 horas e 30 minutos. É também desejável que não haja grandes desvios nas durações das rotas de cada turno no sentido de não haver desequilíbrios entre equipas.

Em síntese, uma vez identificados os 202 locais que é necessário visitar, conhecida a matriz de distâncias e quantificadas alguns parâmetros do sistema de recolha, é necessário de forma articulada proceder a uma calendarização de visita e estabelecer um conjunto de rotas semanais de modo que:

- ⇒ cada rota tenha início em Cabanões e termino na estação de transferência, no Mundão;

- ⇒ os contentores sejam despejados com a frequência indicada pelos serviços camarários (2, 3 ou 6 vezes por semana), obedecendo ao intervalo entre visitas que permita um bom padrão de higiene e limpeza;
- ⇒ a capacidade dos veículos não seja excedida;
- ⇒ o tempo de cada rota não ultrapasse as 4 horas e 30 minutos;
- ⇒ o número de rotas não exceda a frota disponível,

de modo otimizado, isto é, percorrendo o menor número de quilómetros possíveis.

Um plano de rotas para cada veículo é a solução pretendida para o problema de recolha de resíduos, sendo o plano um conjunto de rotas para cada dia de recolha. O plano deve ser estabelecido de modo a cumprir todas necessidades de descarga dos contentores e obedecer a restrições relacionadas com os intervalos entre visitas consecutivas.

A solução é estática, visto ser definida uma vez e repetida sem alteração ao longo de vários períodos, isto é, todas as semanas. Evidentemente que sendo uma solução estática é vulnerável a interrupções. Por exemplo, um dia de trabalho não cumprido devido à presença de um feriado, exigirá alterações do plano se não se proceder à recolha nesse dia conforme o plano. Será necessário, nestas situações pontuais, estabelecer planos de contingência adaptados a cada caso particular uma vez que obedecem a um diferente conjunto de restrições.





---

## Capítulo 3

### Estabelecimento de Rotas de Veículos: modelos e técnicas

---

Os problemas de estabelecimento de rotas de veículos são dos mais estudados no campo da otimização combinatória. São elevados os casos reais que podem ser modelados como problemas de otimização de rotas de veículos que incluem, entre outras, distribuição de mercadorias ou serviço a clientes, recolha de resíduos, distribuição de combustível, definição e escalonamento de rotas de autocarros, entrega-expresso de encomendas, distribuição de correio, etc.

O problema de definição de rotas básico, designado na literatura por VRP (*vehicle routing problem*) consiste em definir um conjunto de rotas de modo a servir um conjunto de clientes, a partir de um depósito central, com uma frota de veículos idênticos, de capacidade limitada. Cada rota tem início e fim num depósito central e a sua duração não deve exceder um limite de tempo. O objectivo é estabelecer um conjunto de rotas que minimize o custo total de transporte.

Devido a necessidades específicas de algumas organizações, o problema clássico de rotas de veículos é subdividido num conjunto de variantes (consultar Bodin e Golden (1981) ou Bodin et al. (1983)). As variantes normalmente têm origem em restrições específicas associadas ao VRP clássico. Por exemplo: a existência de vários depósitos de onde saem os veículos dá origem ao problema multi-depósito (MDVRP); casos onde os clientes apenas podem ser servidos em determinadas horas do dia, gera o problema de rotas com janelas temporais (VRPTW); se existem diferentes capacidades, custos de operação ou velocidades de circulação da frota de veículos, está-se perante problema heterogéneo de rotas (HVRP); se existem clientes com diferentes necessidades de visita para um período fixo em estudo, designa-se problema de rotas periódico (PVRP). É sobre este último que incide esta dissertação.

A variante mais elementar do VRP, designada muito frequentemente de CVRP (*Capacitated Vehicle Routing Problem*) contém apenas restrições de limite de capacidade dos veículos numa frota homogénea, não existindo restrições de limitação de tempo.

O VRP pode ser considerado como uma generalização de um outro problema, o problema do caixeiro viajante (TSP – *Traveling Salesman Problem*), mais concretamente do problema do caixeiro viajante múltiplo (Bodin et al. -1983). O TSP consiste em encontrar a rota óptima a ser efectuada por um único veículo que irá visitar todos os outros clientes, regressando ao ponto de partida. Pode ser interpretado como um CVRP com um único veículo de capacidade superior à totalidade da procura.

Neste capítulo, na secção 3.1, é apresentada uma formulação do problema básico de rotas (VRP) e uma formulação para a sua variante periódica (PVRP), sendo destacadas as características que os diferenciam. Segue-se um levantamento da evolução dos métodos de abordagem e técnicas de resolução dos VRP (subsecção 3.2.1), sendo focados os aspectos que mais se evidenciaram ao longo dos tempos. Na subsecção 3.2.2 é feita uma descrição das técnicas existentes na literatura para a resolução dos PVRP. Por fim, na secção 3.3 é dado um especial destaque ao método de optimização de colónias de formigas, por se tratar de uma opção feita para o desenvolvimento do nosso trabalho.

### 3.1 Formulação Matemática

A formulação matemática dos problemas de rotas passa pela definição de um grafo, podendo distinguir-se duas classes de problemas: com serviço nos nós (ou vértices) ou com serviço nos arcos (respectivamente, *node-routing* e *arc-routing*). As duas classes estão relacionadas e um problema com serviço nos arcos pode ser convertido num problema com serviço nos nós e vice-versa (Assad e Golden (1995)). No entanto, os modelos de *node-routing* são mais adequados quando os clientes formam um conjunto de pontos discretos ligados entre si por estrada ou percursos, assumindo particular relevância a distância e o tempo para viajar entre clientes. Atendendo às características geográficas da área em estudo (ver Capítulo 2) optou-se por esta última modelação, não sendo explorados modelos *arc-routing* neste trabalho que seriam eventualmente mais ajustados à recolha de resíduos porta-à-porta em zonas urbanas.

É possível ainda estabelecer duas divisões dos problemas de veículos relativamente à natureza dos dados:

- (a) estocásticos e determinísticos - consoante exista, ou não, incerteza nos clientes a visitar, na localização dos clientes, tempo de visita ou tempo de percursos;
- (b) estáticos e dinâmicos - conforme os dados se alterem, ou não, durante o processo de resolução. Por exemplo, por surgirem novos clientes a visitar durante numa rota, ou se alterarem as condições de tráfego.

Devido à natureza e características do caso de estudo, apenas serão considerados modelos determinísticos e estáticos. O modelo clássico de rotas encaixa nestas características e pode ser formulado matematicamente por um modelo de programação linear inteira (PLI).

Segue-se a definição da notação utilizada e das variáveis. Apresenta-se uma formulação matemática para o VRP e outra para o PVRP, nas quais se admite que a dimensão da frota está definida, sendo destacadas as características que diferenciam estes dois tipos de problemas.

#### Notação:

- Seja o grafo  $G = (V, A)$ , formado pelo o conjunto de vértices ou nós  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  e o conjunto de arcos  $A = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ . O vértice  $v_0$  representa o depósito no qual estão disponíveis  $m$  veículos de capacidades  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ .

- A cada vértice de  $V \setminus \{v_0\}$  corresponde um local a visitar (ou um cliente), que também se pode designar por nó, com uma quantidade  $q_i$  de um bem que é necessário recolher ou entregar com um tempo  $d_i$  de serviço associado à recolha ou entrega.
- Ao conjunto  $A$  está associada uma matriz simétrica de custos não negativos (ou distâncias)  $C = (c_{ij})$ , tal que  $c_{ij} = c_{ji}$  corresponde ao custo (ou distância ou duração), entre os clientes  $i$  e  $j$ .
- A rota efectuada pelo veículo  $k$ , de capacidade  $Q_k$ , não pode exceder a duração de  $D_k$ , nem exceder a capacidade do veículo ( $k=1, \dots, m$ ).

Na formulação apresentada, o custo de visita aos clientes é independente dos veículos que a efectuam, não se considerando restrições que contemplem incompatibilidades entre veículos e clientes. A matriz de custos  $C = (c_{ij})$  reflecte o tempo dispendido no percurso entre o cliente  $i$  e o cliente  $j$ .

O VRP consiste em desenhar  $m$  rotas em  $G$  de menor custo tal que:

- i. cada rota tem início e fim no depósito;
- ii. cada cliente pertence exactamente a uma rota;
- iii. a quantidade total distribuída (ou recolhida) pelo veículo  $k$  não excede  $Q_k$  e a duração da rota não excede  $D_k$ .

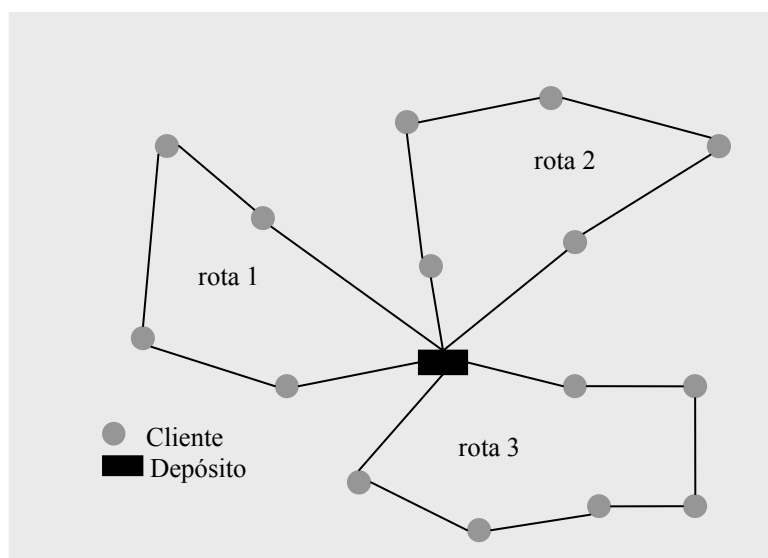


Figura 3. 1: Ilustração do VRP

O problema consiste em encontrar as variáveis binárias  $x_{ijk}$  que tomam o valor 1 se o veículo  $k$  visita o cliente  $j$  imediatamente após o cliente  $i$ , e o valor zero caso contrário. Assumindo que  $d_0=0$  e  $q_0=0$  o problema pode ser formulado do seguinte modo:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} \left( \sum_{k=1}^m x_{ijk} \right) \quad (3.1)$$

sujeito a

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^m x_{ijk} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ipk} - \sum_{j=0}^n x_{pj k} = 0 \quad k = 1, \dots, m; p = 0, \dots, n \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n q_i x_{ijk} \leq Q_k \quad k = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (c_{ij} + d_i) x_{ijk} \leq D_k \quad k = 1, \dots, m \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0jk} \leq 1 \quad k = 1, \dots, m \quad (3.6)$$

$$\sum_{v_i \in S} \sum_{v_j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}; |S| \geq 2, k = 1, \dots, m \quad (3.7)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

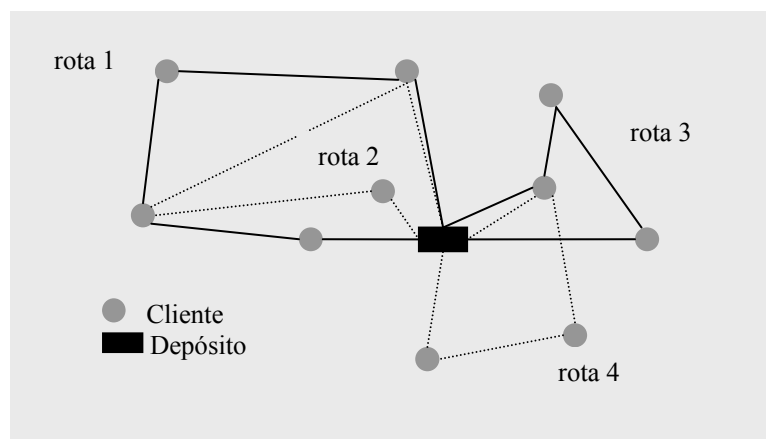
A função objectivo (3.1) consiste em minimizar o custo total. As equações (3.2) asseguram que cada cliente seja visitado uma única vez. A continuidade da rota é representada pelas equações (3.3); um veículo que entra num vértice terá que sair dele. As equações de limitação da capacidade e tempo máximo por rota estão expressas em (3.4) e (3.5) respectivamente. As equações (3.6) garantem que o número de veículos disponíveis não é excedido. Finalmente, as restrições de eliminação de subcircuitos podem exprimir-se pelas equações (3.7).

O problema de estabelecimento de rotas periódico elabora um planeamento num horizonte temporal de  $t$  dias, onde cada cliente  $i$  tem uma frequência de visita  $e_i$  e um conjunto  $C_i$  de padrões de visita que correspondem às combinações possíveis de visita no horizonte temporal  $t$ . Por exemplo, se o planeamento for de 5 dias ( $t=5$ ),  $e_i = 2$  e  $C_i = \{\{1,4\}, \{1,5\}, \{2,5\}\}$ , o cliente  $i$  será visitado duas vezes durante os 5 dias do período de planeamento e as

mesmas terão de ser efectuadas nos dias 1 e 4, ou nos dias 1 e 5, ou alternativamente, nos dias 2 e 5, não sendo possível qualquer outra combinação de visitas.

O problema consiste em simultaneamente seleccionar a combinação (ou padrão) da visita de cada cliente e estabelecer as rotas para cada dia do horizonte temporal, de acordo com as regras do VRP.

Na Figura 3.2 ilustra-se um exemplo de PVRP no qual as rotas 1 e 2 terão de ocorrer em períodos diferentes (por terem pontos em comum). Analogamente as rotas 3 e 4 também terão que ocorrer em períodos distintos.



**Figura 3. 2:** Ilustração do PVRP

Pode considerar-se o PVRP como um problema de optimização combinatoria multinível, pois é não só necessário estabelecer a calendarização das visitas dos clientes, como também desenhar as rotas para os diferentes dias do horizonte temporal de modo a minimizar os custos associados à totalidade das rotas do período temporal em estudo.

Na formulação dos PVRP é necessário definir constantes binárias;

$$a_{rl} = \begin{cases} 1, & \text{sse o dia } l \text{ pertence ao padrão de visita } r \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde as variáveis binárias tomam a forma

$$x_{ijkl} = \begin{cases} 1, & \text{o veículo } k \text{ visita o cliente } j \text{ imediatamente após do cliente } i \text{ no dia } l \text{ (} i \neq j \text{)} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{ir} = \begin{cases} 1, & \text{sse o padrão de visita } r \text{ pertencer a } C_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} \left( \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^t x_{ijkl} \right) \quad (3.9)$$

sujeito a

$$\sum_{r \in C_i} y_{ir} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^m x_{ijkl} - \sum_{r \in C_i} a_{rl} y_{ir} = 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, t \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ipkl} - \sum_{j=0}^n x_{pjkl} = 0 \quad k = 1, \dots, m; \quad p = 0, \dots, n; \quad l = 1, \dots, t \quad (3.12)$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n q_i x_{ijkl} \leq Q_k \quad k = 1, \dots, m; \quad l = 1, \dots, t \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (c_{ij} + d_i) x_{ijkl} \leq D_k \quad k = 1, \dots, m; \quad l = 1, \dots, t \quad (3.14)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0jkl} \leq 1 \quad k = 1, \dots, m; \quad l = 1, \dots, t \quad (3.15)$$

$$\sum_{v_i \in S} \sum_{v_j \in S} x_{ijkl} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}; \quad |S| \geq 2, \quad k = 1, \dots, m; \quad l = 1, \dots, t \quad (3.16)$$

$$x_{ijkl} \in \{0,1\} \quad i, j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m; \quad l = 1, \dots, t \quad (3.17)$$

$$y_{ir} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n; \quad r \in C_i \quad (3.18)$$

As restrições (3.10) garantem que a cada cliente será afectado uma das combinações de visita admissíveis, enquanto que as restrições (3.11) asseguram que cada cliente é visitado exactamente nos dias da combinação que lhe é afecta. As restantes restrições são semelhantes às apresentadas para o VRP.

Se a frota é homogénea, tal como acontece para o caso em estudo e nos exemplos referidos na literatura,  $D_k = D$  e  $Q_k = Q$  para  $k = 1, \dots, m$ . Se  $t = 1$ , o planeamento restringe-se a um único dia, convertendo-se num problema de rotas clássico.

### 3.2 Métodos de resolução apresentados em estudos anteriores

Muitos dos métodos apresentados para resolver o PVRP derivam dos utilizados por outros autores para resolver o problema de rotas clássico. Desta forma, é não só importante analisar as abordagens desenvolvidas para a resolução do PVRP, mas também focar a atenção nos desenvolvimentos das técnicas de resolução dos VRP. Assim, nesta secção serão focados

alguns dos aspectos mais relevantes da evolução dos métodos de resolução dos VRP e analisados sucintamente alguns desses algoritmos no sentido de perceber como funcionam e quais os processos mais recentes utilizados na resolução dos problemas de estabelecimento de rotas. Posteriormente serão apresentados os métodos existentes na literatura para a resolução PVRP e, por fim, algumas conclusões.

### 3.2.1 Métodos de resolução do VRP

Uma forma de resolver estes problemas seria simplesmente enumerar todas as soluções possíveis e guardar a de menor custo. Entretanto, para qualquer problema de um tamanho minimamente interessante (e útil), este método torna-se impraticável, já que o número de soluções possíveis é excessivamente grande. Trata-se de um problema de natureza combinatória explosiva, isto é, o número de soluções aumenta desmesuradamente com a dimensão do problema, o que faz com que os VRP pertençam à família dos problemas combinatórios NP-difíceis (Lenstra e Rinnoy, 1981). Tal como uma grande parte dos problemas de otimização combinatória, o VRP é um problema fácil de descrever mas difícil de resolver.

Os métodos de resolução exacta, onde é garantido encontrar-se a solução óptima, baseiam-se em diferentes formulações do problema e em diferentes técnicas de tratamento dessas formulações. Em Laporte (1992), o autor identifica três categorias de algoritmos exactos: programação linear inteira, programação dinâmica e métodos de pesquisa em árvore. Muitos dos modelos eficazes de resolução exacta baseiam-se nos algoritmos de pesquisa em árvore destacando-se, entre outros, os trabalhos de Fisher (1994), Miller (1995) e Hadjconstantinou et al.(1995) para resolução de problemas simétricos.

Mais recentemente, foram desenvolvidos métodos de planos de corte, conhecidos na literatura como branch-and-cut, para a resolução exacta de problemas de rotas. A título de exemplo pode-se referir Baldacci et al. (2004), Ralphs et al. (2003) Fukasawa et al. (2004)) que, segundo alguns autores, são considerados os melhores algoritmos de resolução exacta capazes de resolver alguns problemas de estabelecimento de rotas simétricos com 135 clientes.

Apesar dos extensivos estudos e desenvolvimentos dos métodos de resolução exacta do CVRP, face à natureza combinatória dos problemas ainda são sentidas grandes



dificuldades na resolução de problemas de grandes dimensões. Segundo os autores Toth e Vigo (2002b), o maior problema resolvido de modo consistente pelos mais eficazes algoritmos de resolução exacta contém 50 clientes, uma vez que os problemas de grande dimensão apenas são resolvidos em algumas situações particulares.

A dificuldade em resolver de modo exacto problemas de grande dimensão e o vasto número de casos reais com muitos clientes, terão sido alguns dos motivos que incentivaram os investigadores ao estudo do VRP nos últimos anos. Observou-se, nos últimos 20 anos, uma crescente qualidade das soluções dos métodos de resolução aproximados.

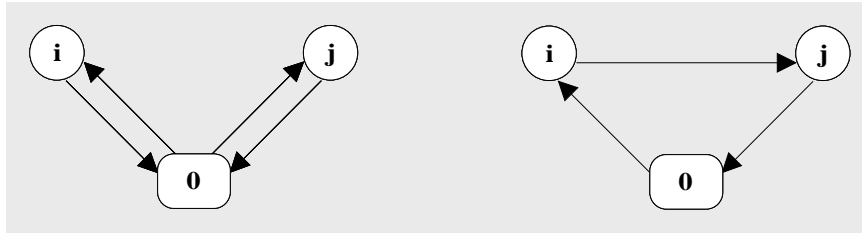
Os métodos de resolução aproximados, muitas vezes designados de métodos heurísticos, não garantem que a solução óptima seja encontrada, mas visam encontrar uma boa solução com esforço computacional aceitável. Verificou-se um enorme progresso nestas técnicas, existindo uma vasta bibliografia sobre a aplicabilidades deste tipo de técnicas aos VRP que pode ser encontrada, a título de exemplo consultar <http://neo.lcc.uma.es/radi-aeb/WebVRP/>.

Face à dimensão do problema em análise, daremos destaque aos métodos de resolução que permitem resolver problemas de grande dimensão. Tal como referimos anteriormente, este tipo de métodos tem evoluído ao longo dos tempos e muito se tem publicado nesta área. Nos parágrafos seguintes serão abordadas algumas das técnicas que se destacaram ao longo destes últimos 40 anos.

Em meados de 1964, Clarke e Wright (1964) apresentam um método construtivo “simples” baseado no conceito poupança (“savings” na literatura de língua inglesa). Considera-se inicialmente cada cliente servido por uma rota que apenas o serve a ele, isto é, uma solução com tantas rotas quantos os clientes. Para cada par de clientes  $(i, j)$  é avaliada a sua inclusão numa só rota, calculando

$$S_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij} \quad (3.19)$$

que representa a poupança de substituir as rotas  $(0, i, 0)$  e  $(0, j, 0)$  pelo circuito  $(0, i, j, 0)$ .



**Figura 3. 3:** Poupança da heurística Clarke e Wrieth

O par que resultar na melhor poupança será incluído numa mesma rota, excepto se essa rota violar alguma restrição. O processo é repetido para os pares de clientes que são início ou fim da rota, por ordem decrescente dos respectivos "savings", até que todos clientes estejam servidos pelas rotas estabelecidas.

Muitos estudos se seguiram com o objectivo de melhorar esta heurística. Modificar o modo de calcular as poupanças  $s_{ij}$ , a fim de obter melhores resultados, é comum neste tipo de métodos:

- Gaskel (1967) propôs a substituição de (3.19) por uma das seguintes alternativas

$$\lambda_{ij} = s_{ij} ( \bar{c} + |c_{i0} - c_{0j}| - c_{ij} ) \quad (3.20)$$

$$\pi_{ij} = s_{ij} - c_{ij} \quad (3.21)$$

onde  $\bar{c}$  representa a média dos valores  $c_{0i}$  e  $s_{ij}$  é definido por (3.19).

- Yellow (1970) propôs a modificação do cálculo das poupanças para a seguinte expressão:

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - \gamma c_{ij} \quad (3.22)$$

a qual, por manipulação do parâmetro  $\gamma$ , permite atribuir maior ou menor importância à distância entre os clientes dependendo da posição relativa ao depósito central. O parâmetro pode ser alterado obtendo-se diferentes soluções; a melhor delas é escolhida.

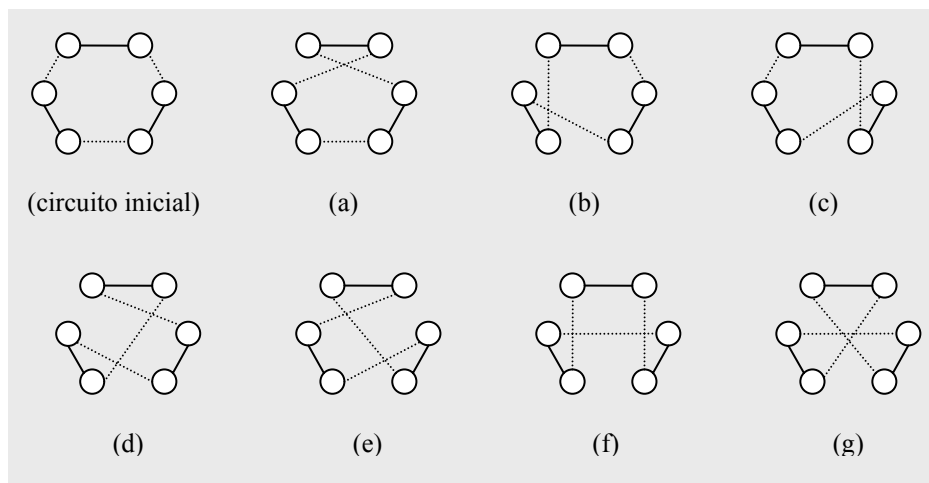
- Paessens (1988) usa a função:

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - \gamma c_{ij} + \beta |c_{i0} - c_{0j}| \quad (3.23)$$

Como fruto da experiência computacional, o autor propõe combinar os valores de  $\gamma$  e  $\beta$  nos intervalos  $]0, 3]$  e  $[0, 1]$  respectivamente e também  $(\gamma, \beta) = (1.0, 0.1), (1.0, 0.5), (1.4, 0.0), (1.4, 0.5)$ .

Lin (1965) desenvolveu métodos melhorativos envolvendo movimentos entre arcos das rotas, dando origem às tão populares heurísticas 2-optimal (2-opt) e 3-optimal (3-opt). Consistem na remoção de 2 arcos (3, para a 3-optimal) de uma rota e na recombinação destes. Pode ser implementada a primeira troca que melhore a solução (*first improve*), ou então pesquisadas todas as trocas e implementada a melhor (*best improve*). Repete-se este procedimento para todo o conjunto de dois (três) arcos do circuito até não haver ganhos entre trocas de arcos.

Na Figura 3.4 ilustram-se os movimentos 3-optimal: os movimentos representados em (a), (b) e (c) obtêm-se através da troca de dois arcos e (d), (e), (f) e (g) envolvem troca de três arcos.



**Figura 3. 4:** Movimentos 3-optimal

Estes procedimentos foram alvo de muitas evoluções. Por exemplo Lin e Kernighan (1973) apresentam trocas k-optimal com  $k > 3$ .

Os procedimentos 2-opt também se podem descrever com uma metodologia que particiona o circuito em dois segmentos, inverte um deles, e liga-os formando um novo circuito. Nesta óptica em Or (1976) apresenta-se a Or-opt em que desloca um conjunto de três ou menos clientes consecutivos dentro da rota; Renaud et al. (1996) adicionam à heurística 4-opt um procedimento onde recombina uma cadeia de  $w$  arcos ou menos com outra cadeia de dois arcos, diminuindo a complexidade da heurística; Thompson e Psaraftis (1993), entre outros, sugerem trocas entre rotas de segmentos de rotas (conjuntos de clientes consecutivos).

Gillett e Miller (1974) desenvolvem o “*sweep algorithm*” onde são formados clusters de clientes por rotação de um raio, de centro no depósito e um cliente aleatoriamente escolhido, e posterior resolução do problema do caixeiro viajante para cada grupo. A agregação dos clientes é feita em função das suas localizações, representadas pelas respectivas coordenadas polares.

Algumas das aplicações incluem uma pos-óptimização que envolve trocas entre clientes dos clusters. Mais tarde surge o “*petal algorithms*” como extensão do *sweep algorithm*.

Fisher e Jaikumar (1981) apresentam a heurística de afectação generalizada, sendo inicialmente formados clusters de clientes por resolução de um problema de afectação generalizada que visa a afectação óptima dos clientes aos veículos e posterior resolução do TSP para cada cluster.

Durante muitos anos, as heurísticas assentaram em procedimentos iterativos que terminam quando não é encontrada uma solução que melhore a anterior. Em muitos casos, a solução encontrada corresponde a um óptimo local. Mais recentemente, com Glover (1986), surgem as meta-heurísticas.

As meta-heurísticas são técnicas heurísticas que admitem degradar temporariamente a qualidade da solução, permitindo explorar o espaço das soluções mais extensivamente evitando ficar “preso” em óptimos locais. Desde então, principalmente a partir dos anos 90, verificou-se uma larga expansão destas técnicas.

*“A metaheuristic refers to a master strategy that guides and modifies other heuristics to produce solutions beyond those that are normally generated in a quest for local optimality.” – Tabu Search, Fred Glover e Manuel Laguna, 1997.*

As estratégias de exploração do espaço de soluções atingem vários contornos, sendo inspiradas em comportamentos visíveis do mundo animal (algoritmo das formigas), na evolução genética (algoritmos genéticos), nas ciências da física e da matemática (arrefecimento simulado), em mecanismos estatísticos (pesquisa tabu, pesquisa de vizinhança variável) e outros, abrangendo uma variedade de interpretações do conceito de “pesquisa inteligente”.

Como seria de esperar, são vastos os desenvolvimentos destas técnicas aplicadas aos VRP’s e suas variantes. A título de exemplo podemos referir algumas das muitas referências

da literatura: Hjorring (1995), Kopfer et al. (1994), Schmitt (1994), Berger e Barkaoui (2004), dentro dos algoritmos genéticos; Osman (1993), Janssens e Breedam (1995), Chiang e Russell (1996) no arrefecimento simulado; Golden et al. (1998), Li et al. (2005) no arrefecimento determinístico; Gendreau et al. (1994), Osman (1993), Rego e Roucairol (1996), Xu e Kelly (1996), Cordeau et al. (2004) na pesquisa tabu; Prins (2004), Berger e Barkaoui (2004), Mester e Bräys (2004) em algoritmos evolucionários; Rochat e Taillard (1995), Tarantilis e Kiranoudis (2002) nos procedimentos de memória adaptativa; Potvin e Robillard (1995), Schumann e Retzko (1995) em redes neuronais; Bullnheimer et al. (1999a), Gambardella et al. (1999), Reimann et al. (2002),(2004), nos algoritmos das formigas.

O bom desempenho das meta-heurísticas levou a que vários investigadores aproveitassem características promissoras de diferentes heurísticas e implementassem métodos híbridos. Muitas referências dentro deste conjunto de técnicas podem ser encontradas em Osman e Laporte (1996).

As meta-heurísticas mostraram ser métodos eficazes e capazes em resolver uma vasta gama de problemas reais. O sucesso destas meta-heurísticas depende de factores tais como: a facilidade de implementação, a capacidade de considerarem restrições específicas que permitem a sua aplicação em casos práticos da vida real e as boas soluções que produzem numa grande variedade de problemas. Todos estes métodos têm características em comum:

- Incluem um procedimento para criar uma solução inicial, que serve de ponto de partida;
- Aplicam um método de pesquisa local assente num conceito de vizinhança para melhorar a solução inicial;
- Memorizam soluções ou características das soluções geradas durante o processo de pesquisa.

Segundo Taillard et al. (1998), todas as meta-heurísticas podem ser agrupadas sob uma denominação comum, “*Adaptive Memory Programming - AMP*”, termo também utilizado por Glover e Laguna (1997), uma vez que exploram a memória para construir uma nova solução e a melhoram, actualizando de seguida a memória com o conhecimento trazido pela nova solução (a solução melhorada).

Dentro da enorme quantidade de trabalho desenvolvido nesta área, como podemos perceber pela pequena amostra do parágrafo acima, tornar-se-ia penoso fazer uma descrição

dos diferentes métodos e suas evoluções. Optou-se por referir sucintamente as ideias genéricas de algumas meta-heurísticas mais conhecidas: Pesquisa Tabu, Arrefecimento Simulado, Algoritmos Genéticos e Optimização de Colónias de Formigas.

**Pesquisa Tabu (TS)**, “*Tabu Search*” na terminologia inglesa, assenta nas ideias introduzidas por Glover (1986). Pode ser interpretada como uma extensão da pesquisa local clássica, muitas vezes denominada por método descendente, na qual uma sequência de trocas básicas e locais na vizinhança da solução corrente melhoram, a cada iteração, o valor da função objectivo, até que seja alcançado um óptimo local. No entanto, diferencia-se do método descendente por admitir movimentos que conduzem à deterioração do valor da função objectivo, assim como pelo uso inteligente da informação obtida ao longo da pesquisa, o que lhe permite “escapar” dos óptimos locais.

A pesquisa tabu inicia-se com uma solução inicial que posteriormente é melhorada de forma iterativa. O melhoramento da solução é conseguido por recurso a uma estrutura de vizinhança, que permite à pesquisa percorrer o espaço de soluções, sendo estas avaliadas através de uma função custo que se pretende minimizar. A fase de melhoramento repete-se até que um critério de paragem seja accionado. Durante todo este processo, o algoritmo memoriza selectivamente alguns elementos chave do caminho percorrido direccionando, de forma inteligente, a pesquisa no espaço de soluções. A memorização faz-se recorrendo a uma lista de soluções já exploradas ou informações relevantes sobre estas soluções. Esta lista de soluções, denominada de lista tabu, permite à pesquisa tentar escapar aos mínimos locais e, simultaneamente, impedir a ocorrência de ciclos (repetição de uma sequência de configurações). Neste sentido, a lista tabu contém movimentos que são impedidos de serem escolhidos, designados por movimentos tabu, embora excepcionalmente possam ser aceites se trouxerem melhorias à solução já conhecida, fazendo uso de um critério de aspiração (consultar Glover e Laguna, 1997).

O esquema da pesquisa tabu incorpora estratégias de intensificação, que conduzem a pesquisa para regiões mais atractivas do espaço de soluções, e estratégias de diversificação, que levam a pesquisa a explorar regiões menos visitadas, forçando movimentos para longe dos óptimos locais.

Segundo Glover e Laguna (1997) existem dois tipos de estratégias de intensificação: intensificação com medidas de diversificação, que assegura que as soluções guardadas

diferem entre si por um grau desejável; e intensificação por decomposição, limitando as restrições um pouco mais de modo a concentrar a atenção numa determinada parte da estrutura.

As estratégias que fomentam a pesquisa para regiões menos utilizadas poderão ser, entre outras: a proibição dos movimentos ou de atributos mais utilizados; oscilação dos limites das restrições, permitindo a violação temporária das restrições visando encontrar boas soluções inadmissíveis que sirvam como indicadores para a pesquisa de boas soluções admissíveis; ou reinicialização da pesquisa a partir de uma nova solução.

---

```

Escolher uma solução inicial  $S$ 
Fazer  $S^*=S$ 
enquanto critério de paragem não for alcançado fazer
    Gerar uma sub-vizinhança de  $S$ , contida na vizinhança de  $S$ ,
    Escolher o melhor vizinho  $S'$  dentro da sub-vizinhança de  $S$ ,
     $S=S'$ ;
    Se  $f(S') < f(S)$ , então  $S^*=S'$ ;
fim de enquanto

```

---

**Figura 3. 5:** Procedimento geral de um Algoritmo Pesquisa Tabu

**Arrefecimento Simulado** (SA), que toma a designação de “*Simulated Annealing*” na terminologia inglesa, foi proposto por Kirkpatrick, Gelat e Vecchi (1983) explorando uma analogia com a termodinâmica, ao simular o arrefecimento de um conjunto de átomos aquecidos (o processo real de *annealing*).

Tal como a pesquisa tabu, é um processo iterativo que se move de uma solução para outra evitando estagnar em óptimos locais ao permitir movimentos que piorem a solução.

A admissão de movimentos que degradam a solução depende de uma probabilidade que está relacionada com um parâmetro  $T$ , designado de *temperatura*. Em cada iteração, um vizinho  $s'$  da solução corrente  $s$  é gerado aleatoriamente e testada a variação da função objectivo, isto é  $\Delta = f(s') - f(s)$ . Se  $\Delta < 0$ , o método aceita a solução e  $s'$  passa a ser a nova solução corrente. Caso  $\Delta \geq 0$  a solução vizinha candidata também poderá ser aceite, mas neste caso, com uma probabilidade  $e^{-\Delta/T}$ . A temperatura  $T$  assume inicialmente um valor elevado  $T_0$ . Após um número fixo de iterações (o qual representa o número de iterações necessárias para o sistema atingir o equilíbrio térmico em uma dada temperatura), a temperatura é gradualmente reduzida a uma razão de arrefecimento  $\alpha$ , tal que  $T_n \leftarrow \alpha * T_{n-1}$ , sendo  $0 < \alpha < 1$ . Com esse

procedimento, no início verifica-se uma maior possibilidade para escapar de mínimos locais e, à medida que  $T$  se aproxima de zero, diminui-se a probabilidade de se aceitar movimentos que degradem a solução ( $T \rightarrow 0 \Rightarrow e^{-\Delta/T} \rightarrow 0$ ). O procedimento pára quando a temperatura chega a um valor próximo de zero e nenhuma solução que piore o valor da melhor solução é mais aceite, isto é, quando o sistema está estável.

---

```

Escolher uma solução inicial  $s$  e uma temperatura inicial  $T_0 > 0$ ,  $s^* = s$ ;
enquanto critério de paragem não for alcançado fazer
    Escolher  $s'$  dentro dos elementos da vizinhança de  $s$ . Calcular  $\Delta = f(s') - f(s)$ ;
    se  $\Delta < 0$  então  $s = s'$  e  $s^* = s'$ ,
    caso contrário,  $s = s'$  com uma probabilidade  $e^{-\Delta/T}$ 
    Actualizar (diminuir) o parâmetro da temperatura
fim de enquanto

```

---

**Figura 3. 6:** Procedimento geral do método Arrefecimento Simulado

**Algoritmos Genéticos (GA)** foram introduzidos por Holland (1975) baseando-se na Teoria da Evolução, também conhecida pela Teoria da Selecção Natural. Esta teoria assenta no princípio de que o meio ambiente tem uma acção determinante sobre a evolução das espécies: sobrevivem apenas os indivíduos melhor adaptados ao seu habitat; apenas estes têm a oportunidade de deixar descendência, perpetuando as suas características. Esporadicamente, surge um indivíduo com alguma característica que o distingue dos restantes elementos da sua espécie - indivíduo mutado. Se esta nova característica oferecer vantagens competitivas, aumentará a probabilidade deste indivíduo sobreviver e de passá-la à sua descendência. Com o tempo, a nova característica acabará por se impor na espécie, uma vez que esta confere aos indivíduos melhores hipóteses de sobrevivência. E assim, geração após geração, a espécie evolui no sentido de melhor se adaptar ao seu meio ambiente.

Enquanto que os procedimentos Pesquisa Tabu ou Arrefecimento Simulado exploram o espaço de soluções sequencialmente, os Algoritmos Genéticos utilizam populações de soluções, tentando guiar a pesquisa no sentido de melhorar a solução, escolhendo as melhores propriedades das populações.

Uma população inicial de  $n$  indivíduos é gerada aleatoriamente. Cada um dos indivíduos da população é geralmente representado por vectores binários, onde cada elemento



de um vector denota a presença (1) ou ausência (0) de uma determinada característica. O seu genótipo (cromossoma) representa uma possível solução para o problema, ou seja, um ponto no espaço de soluções. Segue-se um processo iterativo (cada iteração é designada de geração), onde em cada iteração os princípios de selecção e reprodução são aplicados a uma população de candidatos. Através da selecção determinam-se quais os indivíduos que se conseguirão reproduzir, gerando um número de descendentes para a próxima geração com uma probabilidade determinada pelo seu índice de aptidão.

A qualidade de cada solução é medida por uma função de ajustamento (equivalente à função objectivo ou função custo num problema tradicional de optimização), e o algoritmo de pesquisa atravessa várias gerações (iterações) em que cada uma contribui para a seguinte proporcionalmente às suas qualidades. Deste modo, as soluções são combinadas para produzir filhos que preservem as “boas” características dos progenitores. Este ciclo: avaliação – selecção – reprodução, repete-se iterativamente até que seja encontrada uma solução satisfatória para o problema.

É necessário um conjunto de operações para que uma população consiga gerar populações sucessivas que (espera-se) melhorem sua aptidão com o tempo. Estes operadores são: cruzamento (designado de *crossover*) e mutação. Eles são utilizados para assegurar que a nova geração seja totalmente nova, mas possua, de alguma forma, características de seus pais, ou seja, a população diversifica-se e mantém características de adaptação adquiridas pelas gerações anteriores. Para prevenir que os melhores indivíduos não desapareçam da população pela manipulação dos operadores genéticos, eles podem ser automaticamente colocados na próxima geração, através da reprodução elitista.

O operador de mutação é necessário para a introdução e manutenção da diversidade genética da população, alterando arbitrariamente um, ou mais componentes de uma estrutura escolhida, fornecendo assim meios para introdução de novos elementos na população. Desta forma, a mutação assegura que a probabilidade de se chegar a qualquer ponto do espaço de busca nunca será zero, além de contornar o problema de mínimos locais, pois com este mecanismo altera-se levemente a direcção da busca. O operador de mutação é aplicado aos indivíduos com uma probabilidade dada pela taxa de mutação que é geralmente baixa.

O cruzamento é o operador responsável pela recombinação de características dos pais durante a reprodução, permitindo que as próximas gerações herdem essas características. Ele é considerado o operador genético predominante, por isso é aplicado com probabilidade dada pela taxa de *crossover*, que deve ser maior que a taxa de mutação.

Segundo Dowsland (1996) a aplicação de um algoritmo genético num problema particular envolve dois tipos de decisão; a primeira diz respeito à forma como o problema deve ser modelado no contexto de um GA e inclui a definição do espaço de soluções, a definição da função de ajustamento e a forma como as características das soluções são codificadas em cromossomas. A segunda decisão tem a ver com a definição do próprio algoritmo e inclui o tamanho da população, o procedimento de selecção, o número de gerações, as proporções da população a serem produzidas como resultado das operações de reprodução, cruzamento e mutação.

---

```

Gerar população inicial  $S_t$ 
Avaliar a qualidade dos indivíduos de  $S_t$ 
enquanto critério de paragem não for alcançado fazer
    Seleccionar elementos de  $S_t$  a colocar em  $S_{t+1}$ 
    Cruzar elementos de  $S_t$  e colocar em  $S_{t+1}$ 
    Mutação de novos elementos e colocar em  $S_{t+1}$ 
    Avaliar nova população  $S_{t+1}$ 
     $S_t = S_{t+1}$ 
fim de enquanto

```

---

**Figura 3. 7:** Procedimento geral de um Algoritmo Genético

**Optimização de Colónias Formigas (ACO), “*Ant Colony Optimization*”** na terminologia inglesa, foi inspirado no comportamento das colónias de formigas na procura de comida. As formigas marcam o caminho que percorrem libertando uma hormona, designada por feromona, que é identificado por outras formigas que percorrem igual caminho e encontram a comida. A quantidade de feromona libertada depende da distância a que a comida se encontra e da qualidade da mesma. Por exemplo, se a comida é de qualidade e se encontra a uma distância próxima do ninho, a feromona libertada é intensa de modo a incentivar as suas parceiras a seguir o mesmo caminho. Por sua vez, cada formiga que siga este o percurso libertará feromona, o que fará com que o rasto seja cada vez mais intenso, e consequentemente mais formigas a segui-lo.

O primeiro algoritmo das formigas, designado por *Ant System* (AS), foi proposto por Colorni, Dorigo e Maniezzo (1991) aplicado ao tão conhecido problema do caixeiro viajante (TSP). Seguiram-se aplicações aos problemas combinatórios de escalonamento da produção (Colorni et al. (1994)), coloração de grafos (Costa e Hertz (1997)) e afectação quadrática

(Maniezzo et al. (1994)). Recentemente Dorigo, Di Caro (1999) e Dorigo et al. (1999) propõem uma meta-heurística, designada por *Ant Colony Optimization* – ACO, que fornece uma estrutura única para a maioria de aplicações de algoritmos das formigas.

A estrutura básica de ACO pode ser descrita como um processo iterativo, onde cada iteração é composta por três procedimentos chave. O primeiro procedimento consiste na construção de soluções por parte de um conjunto de formigas artificiais (*ConstructAntsSolutions*). Cada formiga constrói uma solução probabilisticamente com base em duas componentes, a quantidade de feromona contida no percurso das suas colegas formigas artificiais, e informação heurística.

Uma vez construída a solução, a formiga avalia-a de modo a decidir a quantidade de feromona a libertar. Este é segundo procedimento dos ACO, em que se actualiza a feromona (*UpdatesPheromone*) e onde alguns aspectos são realçados, por ser depositada feromona, e outros atenuados devido à evaporação.

Finalmente, o terceiro procedimento, que pode ou não ser implementado, designado de *DaemonActions*, é usado para implementar acções centralizadas que não podem ser executadas pelas formigas artificiais de modo individual. Exemplo destas acções são procedimentos de optimização local ou procedimentos que ajudam a ter uma visão global da colónia com o intuito de decidir se se deve, ou não, depositar um complemento adicional de feromona em determinadas situações.

---

```
enquanto critério de paragem não for alcançado fazer  
    ConstructAntsSolutions  
    UpdatesPheromone  
    DaemonActions (opcional)  
fim de enquanto
```

---

**Figura 3. 8:** Procedimento geral de um Algoritmo de Optimização de Colónias de Formigas

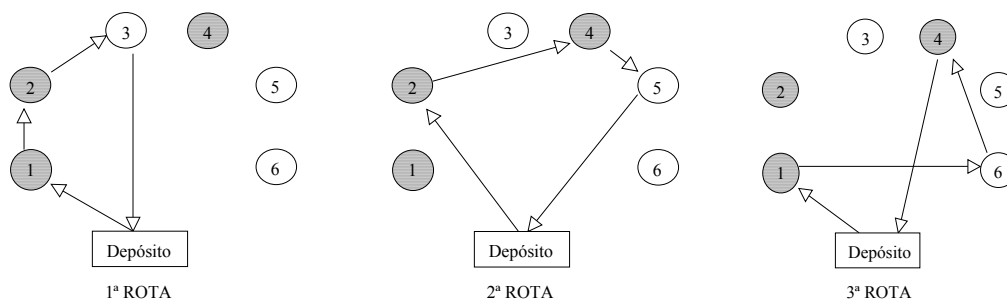
### 3.2.2 Métodos de resolução do PVRP

Os problemas periódicos de estabelecimento de rotas têm aplicabilidade em diversas áreas. A título de exemplo podem-se referir áreas como a distribuição de produtos de origem alimentar e/ou mercearia (Golden e Wasil (1987), Carter et al. (1996)), distribuição de combustíveis e de gás industrial (Ball (1988), Dror e Ball (1987)), recolha de resíduos (Beltrami e Bodin(1974), Russell, Igo (1979), Matos (1996)), planeamento da manutenção e reparação de elevadores (Blakeley et al. (2003)), entre outras.

Ao contrário do que se verifica noutras variantes dos problemas de rotas, os PVRP não são muito explorados na literatura, existindo um número relativamente pequeno de modelos desenvolvidos. Nesta secção serão abordados os pontos fundamentais dos trabalhos desenvolvidos pelos diferentes autores para a resolução dos PVRP.

Beltrami e Bodin (1974), pioneiros do conceito PVRP, fazem uma breve abordagem deste problema adaptado à recolha de resíduos. Apresentam um caso de planeamento semanal de recolha de resíduos, onde existem clientes com necessidade de visita de três vezes por semana e outros de visita diária (seis vezes). A questão que se lhes pôs foi saber quais os locais a visitar à segunda-feira, quarta-feira e sexta-feira, quais os locais a visitar à terça-feira, quinta-feira e sábado e definir as rotas a seguir para cada dia da semana. Os autores apresentam dois métodos de abordagem deste problema. No primeiro, desenham inicialmente as rotas e afectam-nas posteriormente aos dias da semana. Para definição das rotas, os autores duplicam os clientes de visita diária e resolvem um VRP de período único de modo que um cliente e uma sua imagem nunca apareçam numa mesma rota. A existência de  $k$  clientes de visita diária em  $n$ , conduz à resolução de um VRP de  $n+k$  clientes, com um conjunto de restrições adicionais, que garantem que um ponto de visita e uma sua réplica nunca pertencerão à mesma rota. As rotas são criadas através dos procedimentos heurísticos de Clarke e Wright (1964).

Após construção das rotas é necessário afectá-las aos dias da semana, isto é, decidir quais as rotas a elaborar à segunda-feira, quarta-feira e sexta-feira e quais as rotas dos restantes dias da semana. Esta afectação não é imediata, como podemos constatar através do seguinte exemplo: considerem-se as três rotas indicadas na Figura 3.9, na qual os clientes 1, 2 e 4 têm visita diária.



**Figura 3. 9:** Três rotas resultantes da heurística Clarke e Wright

Se se efectuar a primeira rota à segunda-feira, quarta-feira e sexta-feira, a 2ª rota será à terça-feira, quinta-feira e Sábado, pois têm o cliente 2 em comum. O mesmo se passa entre as duas últimas rotas, que tendo o cliente 4 em comum, obriga que a 3ª rota ocorra à segunda-feira, quarta-feira e Sábado. O problema surge no momento em que a rota 1 e a rota 3 têm o cliente 1 em comum, tendo que ocorrer em momentos diferentes. Pode-se controlar este problema criando uma rotina que evite estas situações, mas aí corre-se o risco de afectar a qualidade da heurística principalmente se os clientes de visita diária forem em grande número. Miller et al. (1960) mostram que o conjunto de rotas é admissível, se o grafo construído não tiver ciclos de ordem ímpar.

Face ao exposto, o modelo revelou algumas limitações: não só é aplicável aos problemas cujos clientes têm necessidade de 3 e 6 visitas semanais, como a segunda fase, em que se afectam as rotas aos dias da semana, se revelou impossível de resolver em algumas situações.

No segundo método proposto por Beltrami e Bodin (1974), decide-se inicialmente os clientes a visitar em cada dia da semana, e posteriormente procede-se à construção das rotas diárias baseadas no conjunto de pontos a visitar. O uso da simulação para uma afectação aleatória dos clientes aos dias da semana é uma possibilidade apontada pelos autores para a primeira afectação do segundo método.

Russell e Igo (1979), também numa aplicação à recolha de resíduos, estendem a análise de Beltrami e Bodin (1974) a problemas com outras quaisquer frequências de visita e a problemas de maior dimensão. Para qualquer cliente com mais que uma visita durante o período em estudo são criadas múltiplas réplicas, tantas quantas o número de visitas para esse

período. Por exemplo, clientes com 6 visitas aparecerão 6 vezes, os de 5 visitas 5 vezes, e assim sucessivamente. Este procedimento poderá expandir em demasia o problema inicial. Para problemas com mais de 500 pontos (já com as réplicas), os autores sugerem agrupar clientes que se encontrem geograficamente próximos com igual frequência de serviço, formando clusters de clientes, reduzindo a dimensão do problema a resolver.

Os autores apresentam 3 heurísticas para a resolução dos PVRP: na primeira os clientes (ou clusters de clientes) são ordenados por frequência de serviço e por ordem decrescente vão sendo afectos aos dias de semana. Após afectação dos de visita diária (de frequência de visita igual a 6) é determinado para cada dia um “núcleo” que vai atraindo outros clientes recorrendo ao cálculo de médias e variâncias das distâncias entre os pontos e os núcleos. Uma vez decidida a calendarização dos clientes, é aplicada uma heurística para resolver diferentes VRP's, um para cada dia da semana. A segunda heurística recorre às rotas formadas pela primeira heurística e a um mecanismo de trocas que pretende melhorar a solução. O mecanismo de trocas usado é o algoritmo MTOUR desenvolvido por Russell (1977) que generaliza o problema da caixeiro viajante a M caixeiros. A terceira heurística é uma implementação de metodologia proposta por Clarke e Wright (1964). As rotas são construídas de modo que um cliente e uma sua réplica nunca sejam inseridos numa mesma rota e adicionalmente só será inserido um cliente se as restrições de calendarização não forem violadas.

Christofides e Beasley (1984) desenvolvem duas heurísticas compostas por uma inicialização seguidas de métodos melhorativos. A primeira heurística inicia-se com um procedimento que visa a distribuição dos clientes pelos diferentes dias da semana; baseia-se na ideia de minimizar a soma das distâncias dos raios entre clientes e o centro (existindo um centro para cada dia do período em análise) recorrendo à resolução do problema da p-mediana para determinação dos melhores centros. Existe a possibilidade de troca desta afectação por um mecanismo melhorativo. Posteriormente, uma heurística é aplicada a todos os dias de modo a resolver um VRP para cada dia do período em estudo.

Na segunda heurística, Christofides e Beasley consideram que minimizar a distância para o TSP em cada dia do período também minimiza a distância total do PVRP. Em vez de resolver PVRP, os autores recorrem à resolução um problema de caixeiro viajante periódico (PTSP). Aplicam um mecanismo que permite trocas entre padrões de modo a melhorar a

solução para o TSP e posteriormente é aplicado um procedimento heurístico para resolver VRP diários.

Tan e Beasley (1984) apresentam uma adaptação para o PVRP da heurística de afectação generalizada de Fisher e Jaikumar (1981) de resolução de VRP's. Após gerados clientes que servirão como “sementes”, é resolvido um problema de programação linear cujo objectivo consiste em definir a calendarização dos clientes de acordo com as distâncias desses pontos “semente” aos clientes. Uma vez decididos os dias de visita de cada cliente, dentro dos padrões admissíveis, é aplicada a heurística de afectação generalizada de Fisher e Jaikumar a cada dia do período para resolução de VRP's diários.

Russell e Gribbin (1991) desenvolvem um algoritmo composto por quatro fases. Na primeira visam encontrar clientes que servirão como “sementes”, um para cada dia do período, e proceder à escolha dos padrões de acordo com a soma das distâncias entre as sementes e os dias do padrão em análise. Na segunda é aplicado o mecanismo proposto Christofides e Beasley (1984) permitindo trocas entre os dias de visita, alterando os padrões, onde se recorre ao problema do caixeiro viajante na tentativa de melhorar a afectação obtida na primeira fase do algoritmo. Na terceira fase também são efectuadas trocas; enquanto que na segunda fase se recorre à resolução do TSP para cada dia do período, agora recorre-se à resolução do VRP para cada dia em estudo. Após avaliada a distância total percorrida (do TSP para a 2ª fase; do VRP para a 3ª fase) são permitidas trocas de padrões se isso conduzir a uma redução e melhoria da solução. Finalmente, na última fase é resolvido um problema de programação linear inteiro e binário que visa avaliar outros padrões de calendarização admissíveis na tentativa de melhorar a solução.

Gaudioso e Paletta (1992) apresentam uma heurística que se diferencia das anteriores essencialmente por visar, não a minimização da distância total percorrida, mas a minimização do tamanho da frota, isto é do número de veículos visando um equilíbrio dos recursos entre os diferentes dias do período.

Chao, Golden e Wasil (1995) propõem uma rápida (em termos de tempos computacionais) e fácil afectação dos clientes aos dias da semana por resolução de um problema de programação linear que visa simplesmente equilibrar as quantidades recolhidas (ou distribuídas) entre os dias do período. Esta metodologia diferencia-se de todas as outras no sentido em que todas as heurísticas até então propostas, onde a afectação dos clientes era feita numa primeira fase, havia a preocupação de formar, para cada dia do período, clusters de clientes com alguma proximidade geográfica. A afectação sugerida por estes autores ignora quaisquer compromissos geográficos. Uma vez afectos aos diferentes dias do período, são resolvidos VRP's diários recorrendo a um algoritmo que assenta no conceito poupança de Clarke e Wright, obtendo-se uma solução inicial para o problema.

A solução inicial é melhorada recorrendo a um procedimento iterativo composto por diferentes mecanismos de trocas:

- *one-point-movement*, um mecanismo de trocas que avalia iterativamente um cliente da cada vez. As trocas podem envolver, ou não, mudança do padrão inicialmente definido para esse cliente. Por exemplo, seja o cliente  $i$  com 2 visitas num período de comprimento igual a 4 ( $t=4$ ) cujos padrões admissíveis são  $\{1,3\}$  ou  $\{2,4\}$ , isto é, a visita ao cliente deverá ser no primeiro e terceiro dia do período ou, alternativamente, no segundo e último dia do período. Admita-se que o padrão afecto na solução inicial é  $\{1,3\}$ . Se as trocas forem entre rotas do(s) mesmo(s) dia(s) não há mudança de padrão, isto é, o cliente  $i$  pode mudar da rota que inicialmente lhe foi afecta, para uma outra rota do dia 1, analogamente no dia 3. Por outro lado, se a rota a inserir ocorrer no dia 2, esta troca terá que ser avaliada conjuntamente com a troca do cliente  $i$  do dia 3 para as rotas o dia 4.

Se a(s) troca(s) se revelar(em) vantajosa(s) para a solução corrente, será efectuada de imediato, se aumentar a solução, será guardado o movimento que menos degrade a solução corrente. Se esse aumento for inferior a um determinado valor a definir, designado de *deviation*, será efectuada a troca, caso contrário não será efectuada troca do cliente. Esta técnica é apresentada em Dueck (1993) e designada de *record-to-record*; sendo a melhor solução obtida por este processo designada de *record*.

-*Clean Up*, é um outro procedimento de trocas aplicado nesta heurística que tenta para um determinado dia do período, melhorar a solução corrente movendo, um a um,



todos os clientes de uma mesma rota, inserindo-os em rotas que ocorram nesse dia, eliminando a rota. São efectuadas trocas de clientes entre rotas desse dia, havendo possibilidade de mudança de padrão apenas para clientes com uma única visita durante o período em estudo.

- Procedimentos *2-optimal*, também são aplicados a todas as rotas.

Com o intuito de permitir uma maior mobilidade entre os clientes nestes mecanismos de trocas, é relaxada a restrição de capacidade dos veículos de acordo com o rácio

$$r_{capacidade} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\sum_{l=1}^t B_l Q_p} \quad (3.24)$$

onde  $q_i$  representa a quantidade total a recolher (ou distribuir) no cliente  $i$ ,  $Q_p$  a capacidade de cada veículo,  $B_l$  o número de veículos disponíveis no dia  $l$ ,  $n$  o numero de clientes e  $t$  o número de dias do período. Se  $r_{capacidade} \geq 90\%$ , então a capacidade dos veículos é relaxada em 10%; se  $r_{capacidade} < 90\%$ , então supõe-se que ainda existe alguma capacidade disponível não sendo necessário relaxar as restrição de capacidade. Por exemplo, assumindo uma frota homogénea de capacidade igual a 100 unidades. Se  $r_{capacidade} = 94$  são permitidas trocas até que cada veículo atinja um máximo de 110 unidades, se  $r_{capacidade} = 89$  não será permitido que se excedam as 100 unidades para qualquer veículo.

Com a possibilidade de se extrapolarem os limites das restrições de capacidade dos veículos, juntamente a uma solução inicial com o serviço (de distribuição ou recolha) equilibrado, os autores esperam conseguir uma maior flexibilidade na movimentação de clientes entre rotas e assim obter melhor soluções e escapar de mínimos locais.

É apresentado um procedimento que visa (embora nem sempre possível) converter a possível solução inadmissível (por se excederem os limites de capacidade) numa solução admissível, tentando iterativamente inserir clientes das rotas onde se excedem a capacidade noutras rotas do mesmo dia do período que envolvam o menor custo possível sem violar qualquer restrição, até não ser excedida a capacidade dos veículos. Adicionalmente são apresentados dois tipos de reinicialização para diversificação das soluções.

Cordeau, Gendreau e Laporte (1997) apresentaram uma meta-heurística baseada na Pesquisa Tabu. O processo inicia-se com uma ordenação dos clientes para criar uma solução inicial; no caso dos clientes estarem representados por coordenadas Euclidianas, a ordenação faz-se por ordem crescente relativamente ao ângulo que fazem com o depósito e um raio arbitrariamente estabelecido; se não é possível obter as coordenadas Euclidianas, os clientes serão ordenados arbitrariamente. Seguindo a ordenação, cliente após cliente é afecto arbitrariamente a um padrão admissível à qual se segue a inserção nas rotas correspondentes aos dias do padrão usando a heurística GENI (*Generalized Insertion Procedure*) desenvolvida por Gendreau et al. (1992) para o TSP.

A heurística GENI insere e retira clientes de uma rota, reoptimizando-a localmente: inicia-se com 3 clientes arbitrariamente escolhidos, GENI gradualmente constrói um circuito Hamiltoniano por inserção de um cliente  $v$  escolhido entre 2 dos  $p$  vizinhos mais próximos,  $v_i$  e  $v_j$ , da rota corrente. Neste instante  $v_i$  e  $v_j$  não são necessariamente consecutivos, mas após a inserção a sequência  $(v_i, v, v_j)$  faz parte da rota. Para finalizar a inserção, o algoritmo GENI, considera modificações 4-optimal (Lin (1965)) em torno de  $v_i$  e  $v_j$  e selecciona a inserção de menor custo. Analogamente, por movimentos inversos se remove um cliente  $v$  de uma rota.

A pesquisa tabu inicia-se com uma solução inicial que, posteriormente, é melhorada de forma iterativa. O melhoramento da solução é conseguido por recurso a uma estrutura de vizinhança, que permite à pesquisa percorrer o espaço de soluções, sendo estas avaliadas através de uma função custo que se pretende minimizar. No algoritmo tabu proposto poderão existir, durante a pesquisa, soluções intermédias inadmissíveis, e é aplicado um esquema de diversificação baseado na penalização da função objectivo quando a solução excede os limites de admissibilidade (limites de capacidade dos veículos ou limites do tempo permitido por rota). A função custo é representada pela expressão

$$f(s) = c(s) + \alpha q(s) + \beta d(s) \quad (3.25)$$

sendo  $c(s)$  a função objectivo do PVRP (expressão 3.9),  $q(s)$  e  $d(s)$  os montantes excedidos das restrições capacidade e tempo permitido por rota, que são influenciados pelos parâmetros de penalização  $\alpha$  e  $\beta$ . No caso da solução ser admissível  $f(s)=c(s)$ .

Para definir a estrutura de vizinhança, a cada solução é associado um conjunto de atributos

$$B(s) = \{(i, k, l) : \text{cliente } i \text{ é visitado pelo veículo } k \text{ no dia } l\} \quad (3.26)$$

sendo a transição da solução corrente  $s$  para uma solução vizinha  $s'$  obtida por alteração de um dos atributo do conjunto  $B(s)$ , permitindo à pesquisa percorrer o espaço de soluções.

Drummond, Ochi e Vianna (2001), apresentam um algoritmo evolucionário híbrido onde recorrem ao conceito dos algoritmos genéticos paralelos, procura por dispersão (*scatter search*) e heurísticas de pesquisa local. Inicia-se por gerar uma população inicial que é obtida por uma afectação aleatória dos clientes a um padrão admissível de calendarização; começa-se pelos clientes com menor número de combinações de calendarização, e assim sucessivamente, até todos os clientes estarem com uma calendarização definida. Se durante esta afectação aleatória, a introdução de um cliente num determinado dia violar a capacidade total dos veículos, será avaliado um outro padrão para esse cliente; caso não seja viável nenhuma das alternativas possíveis, o cromossoma é abandonado.

Para cada dia do período é resolvido um VRP com base no conceito poupança de Clarke e Wright (1964) e assim calculada a distância total percorrida que mede a qualidade do cromossoma. Iterativamente, vai-se melhorando a solução, através dos operadores de cruzamento e de mutação, até ser activado o critério de paragem.

Angelelli e Speranza (2002) propõem uma heurística tabu para uma versão generalizada do PVRP, onde são considerados problemas periódicos de rotas com postos de distribuição intermédios: veículos saem do depósito no início do turno e, quando a capacidade do veículo se encontra completa, a mercadoria é descarregada num posto intermédio (no caso dos resíduos poderá ser numa estação de transferência), que normalmente tem uma localização diferente do depósito, e o retorno ao depósito só se fará no fim do turno. Os autores adaptam a heurística tabu sugerida por Cordeau et al. (1997) a este tipo de problemas.

Outros desenvolvimentos de procedimentos na resolução de variantes do PVRP podem ser encontradas na literatura. A título de exemplo pode-se referir Blakeley et al. (2003) numa aplicação do PVRP ao planeamento de equipas de manutenção e reparação de elevadores Schindler ou Alegre et al. (2004) numa aplicação ao problema de recolha de matéria prima para uma industria do ramo automóvel no norte de Espanha.

### 3.2.3 Comparação de heurísticas

Terminada a descrição sumária de algumas meta-heurísticas usadas na resolução de problemas de otimização de rotas e a descrição das técnicas aplicadas ao problema de rotas periódico põe-se uma questão: Qual a melhor, ou qual a heurística a utilizar face a um determinado problema de rotas? Esta é, sem dúvida, uma pergunta sem resposta! Cordeau et al. (2004) fazem uma análise a nove heurísticas recentes desenvolvidas para resolução de VRP clássicos. Entre elas encontram-se heurísticas que englobam procedimentos tabu (Toth e Vigo (2003) e Cordeau et al. (2005)), operações de mutação e cruzamento (Prins (2004)) assim como outras características presentes nos algoritmos genéticos (Berger e Barkaoui (2004)), algoritmos de otimização de colónias de formigas (Reimann et al. (2004)) entre outras. Os autores fazem uma análise comparativa baseada em alguns critérios (precisão, tempo computacional, simplicidade, flexibilidade) percebendo que uns são melhores que outros face a alguns critérios mas inconclusivo quanto ao melhor na sua globalidade, sendo todos de grande qualidade.

Nos problemas periódicos o algoritmo que melhores resultados apresenta, à data desta redacção, é o algoritmo proposto por Cordeau et al. (1997) com os procedimentos tabu. Os autores fazem um estudo comparativo dos valores das funções objectivo de 32 problemas referenciados na literatura, obtendo melhores valores quando comparados com as heurísticas anteriormente desenvolvidas.

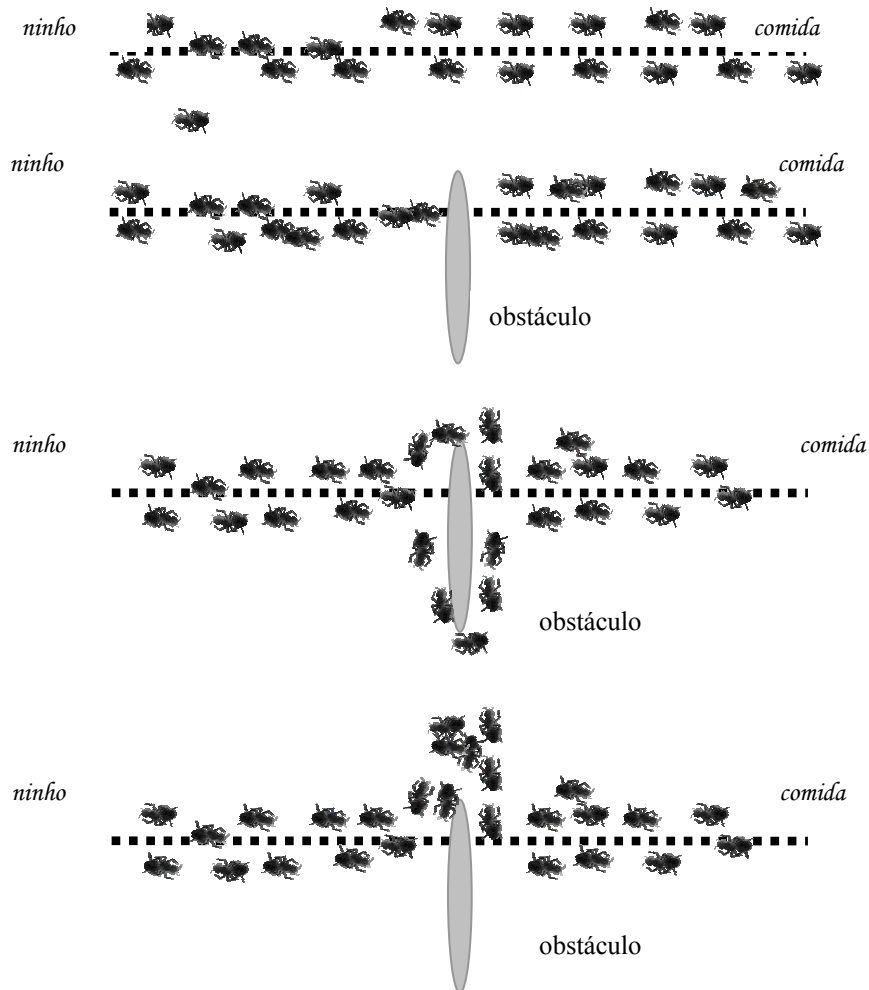
A abordagem seguida nos modelos testados ao longo desta dissertação engloba, entre outros, procedimentos de otimização por colónias de formigas. A simplicidade destes algoritmos, o pequeno número de parâmetros a testar e o bom desempenho que eles têm revelado nas aplicações ao TSP, VRP e em algumas variantes do problema de rotas (por exemplo VRPTW, Gambardella et al. (1999)), foram alguns dos motivos que nos levaram em enveredar por esta opção. A esta opção não foi também alheio o facto de se tratar de um método ainda relativamente pouco explorado e, portanto, com mais elevado potencial para desenvolvimentos inovadores.

### 3.3 Otimização por colónias de formigas – aplicação aos problemas de rotas

#### 3.3.1 Comportamentos das colónias de formigas

As colónias de formigas, e mais genericamente as comunidades de insectos, são formadas por sistemas, que apesar da extrema simplicidade de cada indivíduo, apresentam uma elevada estrutura de organização social. Como resultado desta organização, as colónias de formigas conseguem executar complexas tarefas que, em alguns casos, excedem em muito a capacidade dos seus elementos individuais.

Foi a observação dos comportamentos das colónias de formigas que inspirou os ACO: quando as formigas procuram comida marcam o caminho que percorrem libertando uma substância química, designada por feromona, que é identificada por outras formigas que tendem a seguir igual caminho para encontrarem a comida.



**Figura 3. 10:** O comportamento das formigas face a um obstáculo

A Figura 3.10 ilustra o comportamento de uma colónia de formiga face a um obstáculo: numa primeira fase escolhem aleatoriamente o caminho; passado algum tempo, o caminho escolhido para fazer face ao obstáculo é o mais curto.

Quanto mais perto do ninho se encontra a comida, maior é a quantidade de feromona existente no caminho, induzindo outras formigas a seguir igual percurso, as quais igualmente libertam feromona, tornando o rasto cada vez mais intenso. A qualidade da comida também determina a quantidade de feromona a libertar: Beckers et al. (1993) descobriu que uma espécie de formigas, *Lasius Niger*, que, no retorno de fontes de comida de boa qualidade, tendem a libertar maiores quantidades de feromona comparativamente com o retorno de fontes de comida de baixa qualidade.

Um outro factor observado nas colónias reais de formigas consiste na evaporação da feromona, isto é, a intensidade de feromona existente no percurso vai decrescendo ao longo do tempo devido à evaporação.

### 3.3.2 As formigas artificiais e sua aplicação a problemas de rotas

O primeiro algoritmo das formigas, designado de Ant System (AS), foi proposto por Colomi, Dorigo e Maniezzo (1991) e aplicado ao problema do caixeiro viajante. Desde então o TSP tem desempenhado um importante papel na evolução dos ACO. Muitos dos desenvolvimentos dos ACO são testados, numa primeira instância, em TSP. Segundo Dorigo e Stützle (2004), quando novas ideias ou técnicas apresentam um bom desempenho em aplicações a TSP, são frequentemente úteis. Os autores referem ainda que uma observação da evolução histórica dos ACO mostrou que os ACO mais eficientes para o TSP são também, normalmente, muito eficientes quando aplicados a outros problemas de optimização combinatória.

Os trabalhos publicados de aplicação de ACO aos VRP e suas variantes são incentivadores face à sua simplicidade e competitividade com outras meta-heurísticas. Bullnheimer et al. (1999a) (1999b) foram os pioneiros destas aplicações; os autores implementam o  $AS_{rank}$ -CVRP que se baseia em trabalhos desenvolvidos para o TSP ( $AS_{rank}$ ) pelos mesmos autores (Bullnheimer et al. (1999c)) e Dorigo et al. (1996)).

Reimann et al. (2002) implementam algumas melhorias ao algoritmos anteriormente proposto, apresentando um algoritmo (SbAS) que apresenta resultados bastante competitivos

quando comparados com as melhores algoritmos Tabu para a resolução de VRP, seguindo-lhes de Doerner et al. (2002). Mais recentemente Reimann et al. (2004) apresentam a D-Ants que é uma adaptação do SbAS para problemas de grande dimensão, onde se decompõe o problema inicial de grande dimensão em pequenos sub-problemas, podendo assim resolve-los através do SbAS, obtendo mais qualidade nas soluções com menor tempo computacional.

Gambardella et al. (1999) apresentam um eficiente algoritmo ACO para a resolução de problemas de rotas com janelas temporais, que é considerada uma das meta-heurísticas mais eficientes para a resolução deste tipo de problemas. Montemanni et al. (2004) aplicam os ACO a problemas de rotas dinâmicos.

### **3.3.3 As etapas fundamentais dos ACO aplicados VRP – um histórico das técnicas implementadas**

Qualquer ACO é um algoritmo iterativo que engloba três passos fundamentais; o primeiro é um procedimento que constrói soluções para o problema em análise (ConstructAntsSolution), o segundo a actualização de feromona (UpdatesPheromone) e por fim, o terceiro, que pode ou não ser implementado, é composto por procedimentos de optimização local (DaemonActions). Nesta subsecção serão descritas as implementações sugeridas pelos investigadores para as diferentes fases do algoritmo.

#### **3.3.3.1 Construção das rotas (ConstructAntsSolution)**

Para resolver o VRP, as formigas artificiais constroem soluções para o problema de rotas, sendo que cada formiga artificial vai gerar uma solução. Sendo  $m$  o número de formigas artificiais criadas, cada iteração vai gerar  $m$  soluções diferentes.

Em todos os trabalhos descritos na literatura de aplicação dos ACO aos problemas de rotas, cada formiga inicia a construção sequencial da rota partindo do local onde se encontra até que a restrição de capacidade do veículo ou de tempo permitido por rota seja violada. Quando tal suceder, o depósito é escolhido e nova rota é iniciada até que todos os clientes

sejam visitados. Na selecção do cliente (ainda não visitado) tem-se em consideração 2 factores: a memória e a visibilidade da solução corrente:

- Com o primeiro factor – **memória** – pretende-se relembrar situações análogas já ocorridas em iterações anteriores em que a ligação em análise (i, j) foi efectuada. Se houve qualidade nas soluções onde esta ligação esteve presente, então a escolha do cliente j seguido ao cliente i é incentivada; caso contrário, não será incentivada tal ligação, embora possa ocorrer.

A memória está armazenada numa matriz de dimensão  $n \times n$ , designada matriz de feromona, onde cada elemento (i, j) da matriz contém uma determinada quantidade de feromona  $\tau_{ij}$ . É essa quantidade  $\tau_{ij}$  que reflecte a memória do algoritmo: se  $\tau_{ij}$  tem um valor baixo, é porque no passado a ligação (i, j) não foi promissora, ou não ocorreu; se pelo contrário,  $\tau_{ij}$  tem um valor elevado, é porque existem referências passadas de boas soluções associadas à ligação (i, j).

No início do algoritmo, tal como acontece nas formigas reais quando iniciam o processo de procura de comida, não existe qualquer tipo de memória, isto é  $\tau_{ij}=k$  para  $\forall i,j: i \neq j$ , onde k é uma constante. No decorrer do algoritmo, a quantidade de feromona associada a cada arco vai sofrer alterações, sendo uma componente dinâmica que sofre constantes actualizações.

As actualizações da matriz de feromona devem-se à interacção de duas importantes componentes: a evaporação e os depósitos de feromona.

A primeira componente (evaporação), influencia todos os elementos da matriz, diminuindo o valor de todos os elementos de  $\tau_{ij}$  de um factor  $(1-\rho)$ . Permite o “esquecimento” de erros ou más escolhas efectuadas no passado, ao mesmo tempo que desempenha um papel muito importante ao evitar que alguns valores da  $\tau_{ij}$  da matriz de feromona atinjam valores muito elevados.

O segundo elemento (depósito de feromona), adiciona feromona aos arcos pertencentes à solução de rotas construída pelas formigas, o que se faz com base na qualidade da solução obtida. Mais uma vez se simula o comportamento real das colónias de formigas, pois o rasto de feromona é sujeito a constantes alterações que se devem à evaporação da hormona e a constantes reforços por parte das formigas.

Os procedimentos de actualização do depósito de feromona têm sofrido algumas alterações desde os primeiros ACO. Inicialmente, com *Ant System* (Dorigo et al. (1996),



Bullnheimer et al. (1999b)), todas as formigas contribuíam na actualização da feromona. A quantidade de feromona existente na ligação (i, j) no instante de actualização  $t$ , designada de  $\tau_{ij}(t)$  pode ser representada pela expressão (3.27).

$$\tau_{ij}(t) = \rho\tau_{ij}(t-1) + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k \quad (3.27)$$

Sendo

$t$  – número da iteração,

$\rho$  – um parâmetro tal que  $(1-\rho)$  representa a evaporação,  $0 \leq \rho \leq 1$ ,

$m$  – o número de formigas artificiais

$\Delta\tau_{ij}^k$  – a quantidade de reforço de feromona aplicada na ligação (i, j) no instante  $t$ , onde

$$\Delta\tau_{ij}^k = \begin{cases} \frac{B}{L_k} & \text{se na solução da } k\text{-ésima formiga a ligação (i, j) está presente em alguma rota} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.28)$$

$B$  - constante,

$L_k$  - valor da função objectivo correspondente à solução da formiga  $k$ .

Bullnheimer et al. (1999b) consideram a constante  $B$  igual à unidade e adicionam à expressão de actualização (3.27) uma parcela que realça todos os arcos pertencentes à melhor solução até então encontrada (com valor da função objectivo igual a  $L^*$ ) se um determinado grupo de  $\sigma$  formigas, denominadas de elitistas, usarem esses arcos. Uma formiga elitista reforça o rasto de uma quantidade  $\Delta\tau_{ij}^* = 1/L^*$  se o arco (i, j) pertencer à melhor solução corrente - expressão (3.29).

$$\tau_{ij}(t) = \rho\tau_{ij}(t-1) + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k + \sigma\Delta\tau_{ij}^* \quad (3.29)$$

Nos trabalhos mais recentes (quer em aplicações a TSP quer em VRP) apenas as melhores formigas, isto é as formigas associadas às melhores soluções, contribuem na actualização da feromona.

Bullnheimer et al. (1999c) numa aplicação ao TSP ( $AS_{rank}$ ) e posteriormente numa aplicação dos mesmos autores ao VRP ( $AS_{rank-CVRP}$ ), e também em SbAS de Reimann

et al. (2002) e Reimann et al. (2004) ordenam as formigas de acordo com a solução que lhe está associada ( $L^1(t) \leq L^2(t) \leq \dots \leq L^m(t)$ ). A quantidade de feromona que cada formiga pode depositar depende da sua posição na ordenação. Apenas ( $\sigma - 1$ ) formigas de cada iteração libertam feromona com diferentes intensidades que vão diminuindo com a qualidade da solução que lhe está associada. Os arcos onde a intensidade é mais forte são os pertencentes à melhor solução global até então encontrada.

A actualização da feromona pode ser representada pela expressão (3.30).

$$\tau_{ij}(t) = \rho\tau_{ij}(t-1) + \sum_{\mu=1}^{\sigma-1} \Delta\tau_{ij}^{\mu} + \sigma\Delta\tau_{ij}^* \quad (3.30)$$

A primeira parcela refere-se à quantidade de informação perdida por evaporação, a segunda aborda a actualização das  $\sigma - 1$  melhores formigas da iteração (formigas elitistas) onde  $\Delta\tau_{ij}^{\mu} = (\sigma - \mu) / L_{\mu}$ , e por último são realçados os arcos pertencentes à melhor solução até então encontrada através de  $\Delta\tau_{ij}^* = 1 / L^*$  se as  $\sigma$  formigas elitistas os usaram.  $L^*$  corresponde ao valor da função objectivo da melhor solução até então encontrada e  $L_{\mu}$  o valor da  $\mu$ -ésima melhor solução da iteração corrente.

Numa versão, denominada de *MAX-MIN-Ant System* (*MMAS*) de Stützle e Hoos (1997) (2000), apenas as formigas associadas à melhor solução global ou à melhor solução de cada iteração têm permissão de libertar feromona dentro de limites pré-definidos [ $\tau_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$ ]. Assim, após todas as formigas construírem as suas rotas, libertam a feromona recorrendo à expressão,

$$\tau_{ij}(t) = \rho\tau_{ij}(t-1) + \Delta\tau_{ij}^* \quad (3.31)$$

A primeira parcela refere-se à quantidade de informação perdida por evaporação,  $\Delta\tau_{ij}^* = 1 / L^{gb}$  ou  $\Delta\tau_{ij}^* = 1 / L^{it}$  onde  $L^{gb}$  e  $L^{it}$  correspondem respectivamente, à melhor solução até então encontrada pelo algoritmo, e à melhor solução da iteração corrente. Em geral nos algoritmos *MMAS*, ambas hipóteses são implementadas de modo alternado.

- O segundo aspecto que interfere na escolha do cliente  $j$  a inserir após o cliente  $i$  é obtido através de procedimentos heurísticos e muitas vezes designado por **visibilidade**;

refere-se à escolha de clientes que lhe sejam mais visíveis (isto é próximos) e atractivos. Definida inicialmente por Dorigo e Gambardella (1996) como  $\eta_{ij} = 1/d_{ij}$ , onde  $d_{ij}$  é a distância (conhecida) do cliente  $i$  ao cliente  $j$ .

Bullnheimer et al. (1999b) apresentam um complemento onde, além da proximidade relativa entre clientes ( $1/d_{ij}$ ), também recorrem ao conceito tradicional de poupança de Clarke e Wright ( $s_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - d_{ij}$ ) e à capacidade de utilização dos veículos,  $\kappa_{ij} = (Q_i + q_j)/Q$ , incentivando soluções com um maior nível de utilização da capacidade dos veículos. Sendo  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$  os parâmetros que determinam a influência relativa dos três factores, a componente heurística  $\eta_{ij}$  pode ser representada por

$$\eta_{ij} = \left[ \frac{1}{d_{ij}} \right]^\beta [s_{ij}]^\gamma [\kappa_{ij}]^\lambda \quad (3.32)$$

O elevado esforço computacional que a Equação (3.32) envolve (terá de ser recalculada iteração após iteração) levou outros autores a enveredar por soluções mais simples:

- Bullnheimer et al. (1999a) optam unicamente pelo conceito de poupança paramétrica de Paessens (1988):  $\eta_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - g d_{ij} + f |d_{i0} - d_{0j}|$ , onde  $g$  e  $f$  são dois parâmetros;
- Doerner et al. (2002), Reimann et al. (2002) com SbAS e Reimann et al. (2004) com D-Ants, optam pelo conceito de poupança clássico,  $\eta_{ij} = s_{ij}$ .

A construção das rotas é influenciada probabilisticamente pelas duas componentes descritas acima, a feromona e a visibilidade. Sendo  $\Omega$  o conjunto de todos os clientes possíveis com ligação a partir de  $i$ , o local  $j$  é seleccionado de entre todos os pertencentes a  $\Omega$  de acordo com a distribuição de probabilidade definida em (3.33), onde  $p_{ij}$  representa a probabilidade de se escolher  $j$  a partir de  $i$ :

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{se } j \in \Omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.33)$$

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  reflectem a influência relativa da feromona e da visibilidade.

Com o intuito de reduzir o tempo de execução e de melhorar os resultados, é comum efectuar uma pesquisa local definindo critérios que permitem, para cada cliente  $i$ , reduzir os possíveis clientes candidatos a futuras ligações. Isto é, o conjunto  $\Omega$  não será o conjunto de todos os clientes possíveis com ligação a partir de  $i$ , como acima definido, mas um subconjunto deste, designado por lista de candidatos, constituído pelos clientes que, supostamente, oferecem melhores resultados. Para Doerner et al. (2002) e Reimann et al. (2002),  $\Omega$  será constituído pelos  $k$  clientes com maior poupança  $s_{ij}$  sendo  $k$  é um parâmetro a definir. Bullnheimer et al. (1999a) consideram  $\Omega$  constituído apenas pelos  $k$  candidatos que estejam a menor distância.

### 3.3.3.2 Actualização de feromona (UpdatesPheromone)

As duas etapas básicas, construção das rotas e actualização da feromona, repetem-se durante um determinado número de iterações. Na secção anterior já se fez um relato das diferentes quantificações para a actualização da feromona.

A actualização é efectuada após a construção das rotas, isto é, no final de cada iteração. É de notar que poderá existir uma fase intermédia de optimização local após a construção das rotas. Nestes casos a actualização da feromona será feita após esta fase.

### 3.3.3.3 Optimização local (DaemonActions)

Com o intuito de melhorar este tipo de heurísticas, Bullnheimer et al. (1999b) sugerem aplicar a heurística 2-optimal às rotas geradas pelas formigas artificiais. Este procedimento é também aplicado por Bullnheimer et al. (1999a), Doerner et al. (2002), Reimann et al. (2002), Reimann et al. (2004), isto é, em todas as aplicações dos ACO aos VRP.

Reimann et al. (2001) apresentam um algoritmo híbrido ACO-GA que usa os benefícios das formigas combinados com os dos genéticos. O algoritmo genético é usado numa pós-optimização que lhe permite melhorar as soluções geradas pelas formigas.

Adicionalmente à heurística 2-optimal, Reimann et al. (2002) no SbAS e posteriormente em D-Ants aplicam trocas entre dois clientes de diferentes rotas, isto é, um

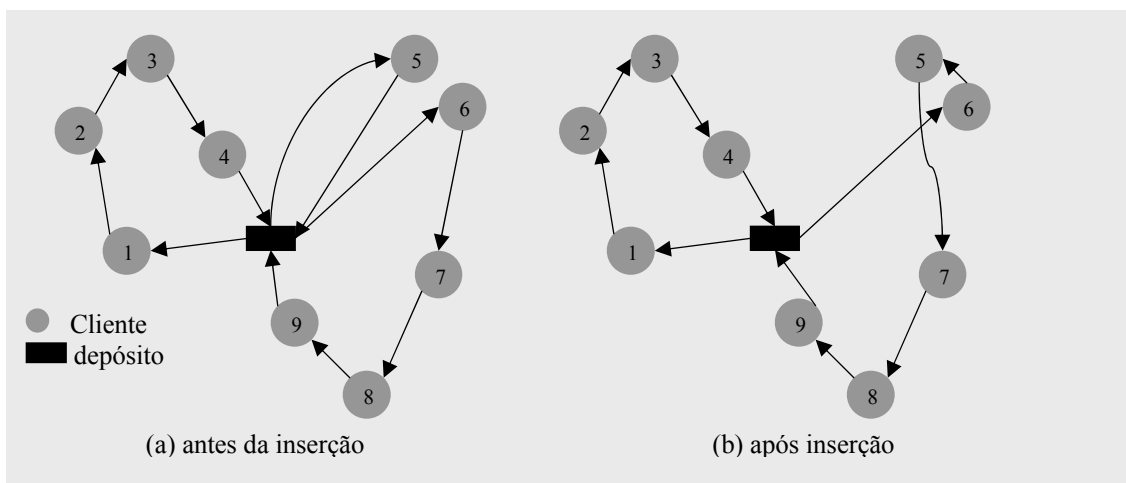
cliente  $i$  de uma rota  $k$  é trocado pelo cliente  $j$  da rota  $l$ . A ideia deste tipo de movimentos, designados de  $\lambda$ -intercâmbios ( $\lambda$ -interchange) foi introduzida por Osman (1993).

O procedimento de  $\lambda$ -intercâmbios, apresentado por Osman em 1993, consiste em trocar subconjuntos de clientes, de dimensão variável, entre rotas. Seja uma solução admissível representada por um conjunto de rotas  $S = \{R_1, \dots, R_p, \dots, R_q, \dots, R_v\}$ . O intercâmbio de  $\lambda$  clientes entre duas rotas  $R_p$  e  $R_q$ , consiste em trocar o subconjunto de clientes  $S_1 \subseteq R_p$  de tamanho  $|S_1| \leq \lambda$ , por outro subconjunto  $S_2 \subseteq R_q$ , de tamanho  $|S_2| \leq \lambda$ , e vice-versa. Assim obtêm-se duas novas rotas e uma nova solução  $S' = \{R_1, \dots, R'_p, \dots, R'_q, \dots, R_v\}$  na vizinhança de  $S$ , onde  $R'_p = (R_p - S_1) \cup S_2$  e  $R'_q = (R_q - S_2) \cup S_1$ .

Para uma dada solução  $S$ , são pesquisados  $v(v-1)/2$  pares diferentes de rotas  $(R_p, R_q)$  pela ordem  $(R_1, R_2), (R_1, R_3), \dots, (R_1, R_v), (R_2, R_3), \dots, (R_{v-1}, R_v)$ .

Por questões de limitação do tempo computacional, muitas vezes o intercâmbio restringe-se apenas a um cliente, isto é, para cada par de rotas onde se testa a possibilidade de intercâmbio, apenas serão consideradas as trocas definidas pelo operador  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(1,1)$ . O operador  $(0,1)$  ou  $(1,0)$  representa um movimento de inserção que consiste na mudança de um cliente de uma rota para outra, enquanto que o operador  $(1,1)$  representa um movimento de troca entre duas rotas de um cliente.

A Figura 3. 11 ilustra um movimento de inserção  $(1,0)$ . O cliente  $5 \in R_p = \{5\}$  é removido e inserido no conjunto  $R_q = \{6, 7, 8, 9\}$ .



**Figura 3. 11:** Movimento de inserção  $(1,0)$

Na Figura 3. 12 é visível um processo de troca entre o cliente 5 pertencente à rota  $R_p=\{1,2,3,4,5\}$  e o cliente 4 da rota  $R_q=\{4,6,7,8,9\}$ .

Os clientes trocados vão ser inseridos ao longo da rota, na posição que minimizar o custo, isto é, em cada tentativa de movimento a rota de entrada é explorada de maneira a determinar a melhor sequência de clientes, incluindo o novo cliente. Nestes procedimentos recorre-se ao mecanismo de troca 2-optimal após os movimentos na tentativa de melhorar a sequência das visitas.

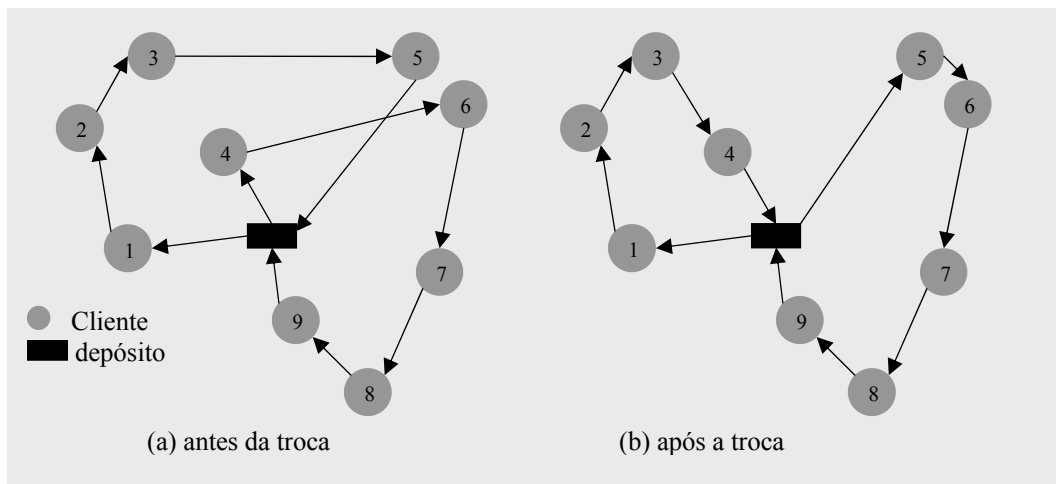


Figura 3. 12: Movimento de troca (1,1)

Em termos gerais, os ACO aplicados ao TSP ou ao VRP seguem o esquema apresentado na Figura 3. 13 (em pseudo-código). Após a inicialização da feromona e de alguns parâmetros, um conjunto de acções é repetido até se verificar uma condição terminal.

---

```

procedimento ACO algoritmo
inicializar os parâmetros e a feromona
enquanto (condição final não se verifica) fazer
    Gerar soluções // ConstructAntsSolutions
    Aplicar um algoritmo de pesquisa local //DaemonActions
                                     (opcional)
    Actualizar a feromona // UpdatesPheromone
fim

```

---

Figura 3. 13: Pseudo-código de ACO

Em síntese, pode-se referir que é um processo iterativo no qual em cada iteração se obtêm  $m$  soluções diferentes ( $m$  = número de formigas artificiais criadas). As soluções geradas em cada iteração são avaliadas em função do custo. Das melhores soluções será armazenada informação de modo que soluções futuras utilizem essa informação - este procedimento faz-se através da quantidade da feromona libertada em cada arco, que será maior ou menor de acordo com a qualidade da solução que lhe está associada. Com este procedimento pressupõe-se que as soluções vão melhorando de iteração em iteração. Quando o critério de paragem for accionado, o processo termina.

### 3.3.4 Estratégias de intensificação e de diversificação

As meta-heurísticas que se têm revelado eficientes englobam estratégias de intensificação e de diversificação. Estes tipos de estratégias têm demonstrado ser muito úteis na medida em que permitem à pesquisa ultrapassar as más opções, fugir aos óptimos locais ou permanecer nos “vales” dos pontos óptimos. Estas estratégias baseiam-se na modificação de regras que encorajem movimentos que permitam a pesquisa de outras soluções.

A estratégia de intensificação conduz a pesquisa para regiões consideradas atractivas, anteriormente visitadas, enquanto que a estratégia de diversificação fomenta a utilização de movimentos ou atributos pouco utilizados na tentativa de encontrar outras soluções (eventualmente melhores) que só podem ser alcançadas ultrapassando alguns obstáculos derivados da topologia do espaço de soluções.

Uma meta-heurística deverá conseguir um balanço adequado entre estes dois tipos de estratégias. Nos ACO, existem diversas técnicas que permitem este balanço, sendo o mais comum efectuado recorrendo à gestão dos valores da feromona provocar. De facto, os níveis de feromona induzem a distribuição de probabilidade à pesquisa das soluções que são usadas com maior frequência: no processo iterativo são construídas rotas baseadas na intensidade da feromona artificial e na informação heurística. Quanto melhor for a solução, maior é a quantidade de feromona que as formigas depositam nos arcos dessa solução. Iterativamente, são lançados reforços de feromona nos arcos das soluções mais promissoras e adicionalmente, a evaporação baixa os níveis de feromona dos arcos raramente usados. À medida que o processo iterativo vai avançando, as diferenças entre os valores de feromona vão-se tornando mais evidentes, existindo vários arcos com valores próximos de zero e outros com valores

elevados. Este procedimento reduz a pesquisa a um número limitado de arcos, o que pode ser indesejável se os níveis de concentração forem demasiado fortes, pois pode provocar uma situação em que, desde cedo, iteração após iteração, todas as formigas escolham o mesmo caminho e construam uma solução igual – esta situação define-se por estagnação.

A estagnação da pesquisa é de todo indesejável pois a pesquisa fica inibida de explorar novas possibilidades e melhores soluções poderão ficar por explorar.

Evidentemente que, dependendo dos valores da matriz de feromona, a distribuição amostral gerada pode variar de uma distribuição uniforme a degenerar numa distribuição com valor de probabilidade 1 para um determinado valor e zero para todos os outros. Este problema está ilustrado na Figura 3. 14 através do exemplo referenciado com o número 1 da literatura de PVRP (de 50 clientes).

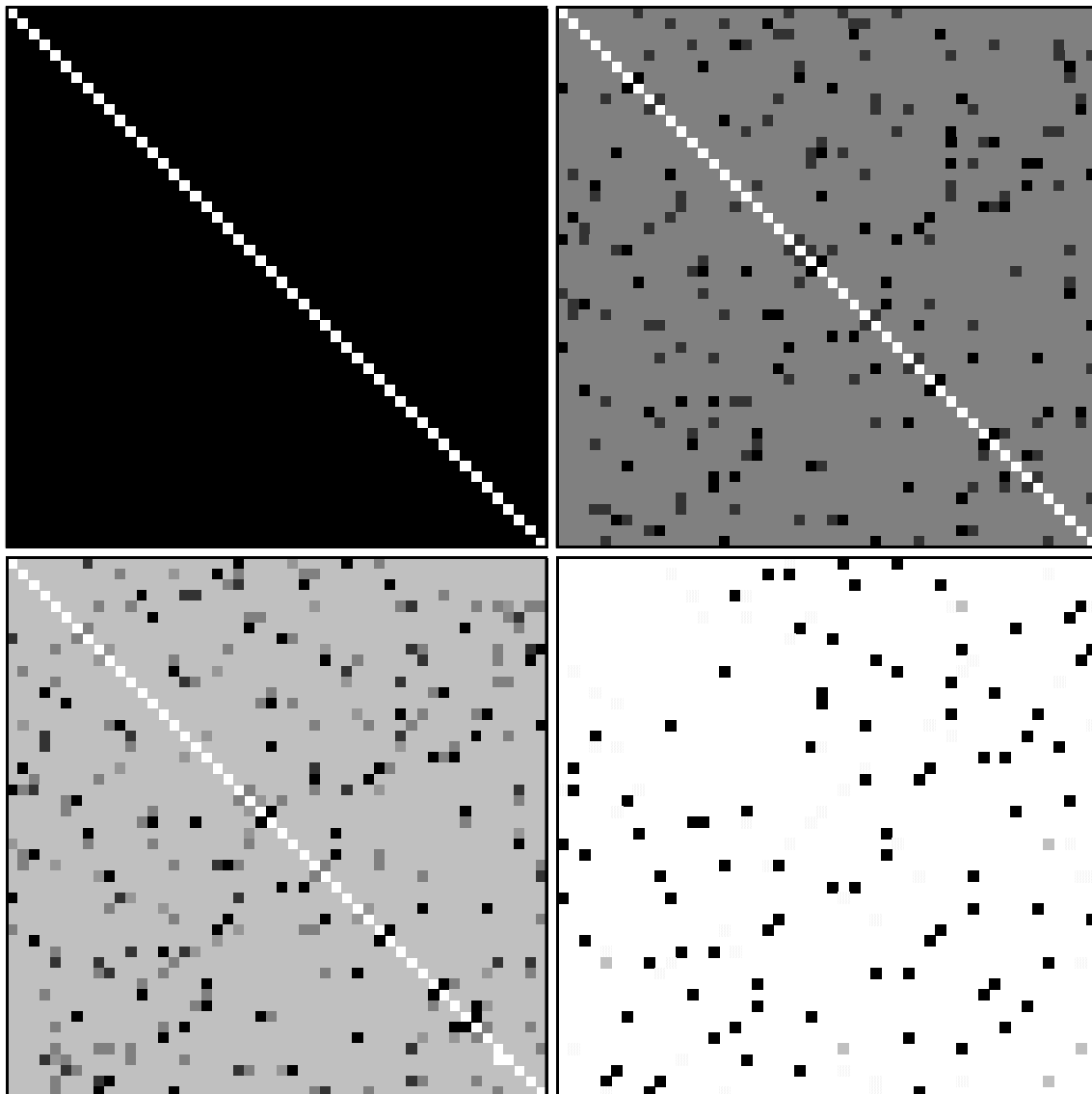


Figura 3. 14: Representação visual da matriz de feromona para as iterações 0, 5, 10 e 100



Os valores de feromona nos arcos estão representados na escala preto e branco; quanto mais escuros, maiores são os valores associados a esse arco. A actualização da feromona é feita unicamente com a informação da melhor solução até então obtida.

Há diversas maneiras evitar as situações de estagnação, mantendo um nível razoável de exploração. Não ter uma só formiga a contribuir para actualização dos níveis de feromona, mas um conjunto de formigas (por exemplo um conjunto de formigas associadas às melhores soluções - *elitist strategy*), permite um incentivo mais diversificado. Numa aplicação ao problema do caixeiro viajante, Stützle e Dorigo (1999) recorrem a uma feromona local usada durante a construção da solução para permitir o acesso a soluções menos desejáveis. Stützle e Hoos (1997, 2000) em *MMAS* impõem limites mínimos de feromona, garantindo sempre certo nível de diversificação.

Também as escolhas dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  existentes na expressão da distribuição de probabilidade (3.33), que determinam a influência relativa da feromona e da heurística na construção das soluções, podem contribuir para uma maior intensificação ou diversificação: para  $\alpha > 0$ , quanto maior for o  $\alpha$ , maior é a intensificação desta pesquisa; para  $\alpha = 0$  os valores da feromona são totalmente esquecidos na construção das soluções; se  $\alpha < 0$  maior probabilidade existe na escolha de soluções com baixos valores de feromona. De modo similar, o parâmetro que determina a intervenção do procedimento heurístico,  $\beta$ , também pode influenciar estas estratégias (ver Merkle e Middendorf (2002)).

A reinicialização da matriz de feromona também é sugerida por alguns autores. Os primeiros estudos destas estratégias de reinicialização foram apresentados por Stützle (1999). Stützle e Hoos (2000) mostraram que a reinicialização da matriz de feromona quando combinada com apropriados procedimentos de actualização dos níveis de feromona pode ser muito útil na pesquisa de novos espaços de soluções. Algumas aplicações recentes que optam por este tipo de procedimento podem-se encontrar em Blum (2003), Blum e Blesa (2003) ou Merkle e Middendorf (2002).

### 3.3.5 Critério de Paragem

O critério de paragem necessário na construção deste tipo de algoritmos iterativos, tem como objectivo evitar que o processo iterativo de pesquisa se prolongue por tempos indefinidos sem qualquer vantagem.

Na literatura de ACO com aplicações aos problemas de rotas são apresentados resultados para  $n/2$ ,  $n$  e  $2n$  iterações (Reimann et al. (2002), Doerner et al. (2002), por exemplo). Bullnheimer et al. (1999b) apresentam resultados para 100 iterações, enquanto que em Bullnheimer et al. (1999a), os mesmos autores apresentam resultados para  $2n$  iterações. Nestes casos, o critério de paragem baseia-se no número máximo de iterações. Outros critérios podem ser aplicados, como por exemplo o número máximo de iterações em que a solução não foi melhorada ou também o tempo computacional, estando o número de iterações a realizar limitado por um tempo máximo de computação (Reimann et al.(2004)).

---

## Capítulo 4

### Modelo de duas fases para o PVRP

---

Neste capítulo descreve-se um novo algoritmo baseado nas colónias de formigas para a resolução de problemas periódicos de estabelecimento de rotas. À formulação clássica dos PVRP são acrescentadas algumas restrições adicionais com vista à resolução do caso de estudo de recolha de resíduos sólidos urbanos do concelho de Viseu.

A estrutura básica do modelo que se apresenta neste capítulo difere da estrutura habitualmente desenvolvida nos procedimentos de resolução de PVRP. O modelo, composto por duas fases, constrói inicialmente um conjunto de rotas para os dias do período em estudo e posteriormente, na segunda fase, procede-se à afectação das rotas construídas na primeira fase pelos diferentes dias do período, seguido de reajustamentos das mesmas.

O capítulo inicia-se com a apresentação da 1ª fase do algoritmo onde se constroem as rotas. Na secção 4.1 é desenvolvido um novo algoritmo construtivo que envolve os conceitos dos algoritmos de colónias de formigas. O modelo implementado apresenta algumas características que o diferenciam dos ACO aplicados a problemas de rotas existentes na literatura, das quais podem-se destacar a construção das rotas em paralelo, a geração de apenas uma só formiga artificial por iteração (em vez das  $m$  propostas habitualmente na literatura), um procedimento inovador de actualização da feromona e o desenvolvimento de técnicas de optimização local que envolvem trocas de clientes entre rotas que permitem diminuir o número de rotas e melhorar a solução.

Na secção 4.2 é descrita 2ª fase do algoritmo. Recorre-se à resolução de um problema de coloração de grafos e a um mecanismo de trocas de clientes entre rotas com vista à afectação das rotas obtidas na primeira fase do algoritmo aos diferentes dias do período.

## 4.1 Primeira fase do algoritmo: CONSTRUÇÃO DAS ROTAS

### 4.1.1 Considerações gerais

É comum aos problemas de rotas associar-se um grafo  $G = (V, A)$ , formado por um conjunto de vértices ou nós  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  e o conjunto de arcos ou ligações  $A = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ . O nó  $v_0$  representa o depósito e os restantes nós de  $V \setminus \{v_0\}$  correspondem aos locais a visitar, também designados clientes.

Na construção das rotas do algoritmo proposto, e por se tratar de um PVRP, começa-se por criar, para cada cliente existente, tantos nós artificiais (réplicas dos originais) quanto o número de visitas semanais a esse cliente. As rotas são construídas para todos os nós, de tal modo que um nó e uma sua réplica nunca apareçam numa mesma rota. Após a construção das rotas, que farão parte do plano semanal, há que as afectar aos diferentes dias da semana. Este procedimento tem por base uma metodologia desenvolvida por Beltrami e Bodin (1974) que não teve grandes seguidores devido a algumas limitações.

Os clientes com duas visitas no período em estudo aparecerão em duplicado, os de três visitas aparecerão com três nós, e assim sucessivamente. Este procedimento tem o inconveniente de aumentar a dimensão do problema. A dimensão do problema não será somente determinada pelo número de pontos a visitar, mas também pela frequência de visita dos clientes. Sendo  $n$  o número de clientes e  $per(i)$  a frequência da visita ao cliente  $i$ , o número de nós total do problema será dado por

$$N = \sum_{i=1}^n per(i) \quad (4.1)$$

A primeira fase do algoritmo consiste em resolver um problema de estabelecimento de rotas óptimas (VRP), isto é, encontrar as rotas a serem efectuadas por veículos, que, partindo de um mesmo ponto, irão visitar outras localidades recolhendo as quantidades de resíduos depositadas nesse local, de forma que o custo total seja mínimo. As limitações de capacidade de cada veículo terão de ser respeitadas, assim como restrições relativas à duração máxima de cada rota. Acrescido a estas condições clássicas associadas aos VRP's, tem de se ter em atenção que a construção das rotas deve ser feita de modo que um nó e uma sua réplica nunca apareçam numa mesma rota – isto surge devido à metodologia adoptada de replicação de nós.

Por se tratar de um problema de natureza combinatório, cujo número de soluções admissíveis aumenta desmesuradamente com a dimensão do problema, recorreu-se aos procedimentos meta-heurísticos. Pretende-se desenvolver um método com uma pesquisa inteligente do espaço de soluções que permita obter uma boa solução, em tempos computacionais que se compadeçam com a aplicação real ao caso em estudo.

A opção por desenvolver um procedimento com base nos algoritmos das formigas deveu-se, numa primeira instância à simplicidade da metodologia dos ACO, ao reduzido número de parâmetros a testar e à facilidade que estes algoritmos apresentam em incorporar restrições adicionais. Também a tenra idade deste tipo de algoritmos e os bons resultados da aplicação dos ACO aos problemas de rotas e suas variantes tiveram influência na nossa opção (por exemplo em problemas com janelas temporais, Gambardella et al.(1999) desenvolveram um algoritmos que é considerado um dos melhores procedimentos para resolver o VRPTW).

Qualquer ACO é um procedimento iterativo que engloba três etapas fundamentais. Nas secções que se seguem são expostas estas três etapas. Na primeira, `ConstructAntsSolution` (subsecção 4.1.2) são construídas soluções do problema de rotas. Na segunda etapa, `Updates Pheromone` (subsecção 4.1.3), é apresentado um procedimento inovador de actualização dos valores de feromona, e por fim, na subsecção 4.1.4 é descrita a terceira etapa – `DaemonActions` - onde são relatados os procedimentos de optimização local que envolvem trocas de clientes entre rotas.

#### **4.1.2 Geração de soluções admissíveis (`ConstructAntsSolution`)**

Todos os algoritmos de optimização por colónias de formigas são processos iterativos. Nos VRP, em cada iteração dos ACO são criadas  $m$  formigas artificiais que, depois de afectadas aos clientes, dão início à construção das rotas. Cada formiga gera uma solução do problema, isto é, a cada formiga artificial está associada uma solução do problema que engloba um conjunto de rotas que obedecem às restrições do problema (capacidade do veículo, duração das rotas, um cliente e uma sua réplica nunca integrem uma mesma rota).

As soluções geradas serão avaliadas e a informação das melhores é retida recorrendo à quantidade diferenciada de libertação de feromona.

A implementação deste tipo de procedimentos levanta desde logo algumas questões: *Quantas formigas se criam? Como se afectam as formigas aos clientes? Como se constroem as rotas?*

Nas aplicações de ACO ao VRP clássico os autores criam tantas formigas quanto o número de clientes a visitar no problema, isto é  $m=n$ . Porém, noutras aplicações, é menor o número de formigas criadas: Stützle e Hoos (1997) numa aplicação ao TSP usa  $m=2/n$ ; Reimann et al. (2001) num algoritmo híbrido ACO-GA para VRP utilizam  $m=10$ ; Gambardella et al. (1999) numa aplicação ao VRPTW também sugerem  $m=10$ .

A meta-heurística proposta difere das anteriores logo na sua génese, isto é, considera-se um processo iterativo, onde em cada iteração só se gera uma solução (o que equivale a criar uma única formiga) e a informação retida em memória dependerá da qualidade da solução gerada.

Relativamente à afectação das formigas artificiais, isto é o ponto por onde se inicia a rota, existem duas situações distintas: quando o número de formigas criado é igual ao número de clientes ( $n$ ), e quando o número de formigas gerado é menor que o número de clientes. No primeiro cenário, os autores sugerem afectar cada formiga a um cliente, ficando todos os clientes (nós) com uma e uma só formiga artificial. Bullnheimer et al. (1999b) faz um estudo onde compara os resultados para 3 possíveis afectações: afectar todas as formigas ao depósito, afecta-las aleatoriamente, ou cada uma a um cliente diferente, concluindo que a terceira opção é a que produz melhores resultados. Se o número de formigas é menor que  $n$  é sugerido afectar aleatoriamente cada formiga (Gambardella et al. (1999)).

Quanto à construção da rota, todas as referências literárias apontam para a construção sequencial, isto é, constrói-se uma primeira rota segundo critérios definidos e só após conclusão dessa rota (por violar algum tipo de restrição) se retoma o depósito e se inicia a construção de nova rota.

No algoritmo apresentado, a construção das rotas será efectuada em paralelo, isto é, podem-se formar várias rotas em simultâneo que, posteriormente, poderão ou não fundir-se. O processo inicia-se pela escolha de um cliente para se iniciar a construção da primeira rota.

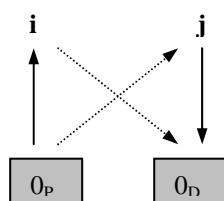
Posteriormente, de acordo com critérios previamente definidos, procede-se à expansão da rota já iniciada ou ao início da formação de uma nova rota. É então necessário definir um critério para a escolha do cliente que vai dar início à construção da rota, isto é, ao qual se afectam inicialmente as formigas. Testaram-se três hipóteses:

- afectar as formigas aleatoriamente;
- afectar as formigas aos nós, que na matriz de distâncias têm menor distância associada;
- afectação aos nós com maior poupança (conceito definido por Clarke e Wright (1964) e exposto no Capítulo 3, secção 3.2.1).

Destas três formulações, foi a última que produziu melhores resultados. Assim, em cada iteração cria-se uma formiga artificial que sucessivamente vai sendo afectada ao cliente que apresenta maior poupança.

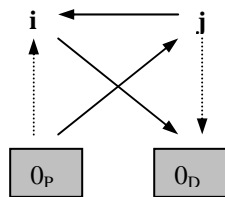
As poupanças utilizadas para o caso de estudo diferem ligeiramente das poupanças propostas por Clarke e Wright (1964), pois houve a necessidade de adaptar os procedimentos para a situação do caso em estudo onde o ponto de origem (Cabanões) não coincide com o ponto de chegada (estação de transferência – Mundão):

- Inicialmente considera-se cada nó (incluindo as réplicas) servido por uma única rota, que apenas o serve a ele, com início no ponto de partida,  $0_P$ , e fim no destino,  $0_D$ . Segue-se o cálculo das poupanças para cada par  $(i, j)$ , para  $i > j$ . Existem dois tipos de poupanças; poupanças do tipo 1 e poupanças do tipo 2.



As poupanças do tipo 1 correspondem ao benefício obtido na substituição das viagens  $(0_P, j)$  e  $(i, 0_D)$  pela ligação  $(i, j)$ ,  $s_{ij}^1 = d_{0_P, j} + d_{i, 0_D} - d_{ij}$ . Estas poupanças são as que se obtêm quando a inserção do nó  $j$  é feita pelo lado do ponto de chegada.

**Figura 4. 1:** Poupança do tipo 1



As poupanças do tipo 2 representam o ganho de uma ligação efectuada pelo ponto de partida, isto é a realização de  $(j, i)$  em vez de  $(0_P, i)$  e  $(j, 0_D)$ ,  $s_{ij}^2 = d_{0_P i} + d_{j 0_D} - d_{ji}$ .

**Figura 4. 2:** Poupança do tipo 2

O problema em estudo, tal como todos os problemas existentes na literatura referentes à resolução de problemas periódicos de rotas, são simétricos, isto é  $d_{ij} = d_{ji}$  para qualquer ponto, inclusive a origem e o destino, logo  $s_{ij}^1 = s_{ji}^2$  e, no caso do ponto de origem coincidir com o ponto de chegada,  $s_{ij}^1 = s_{ij}^2, \forall i, j$ .

Esta adaptação amplia o leque de problemas em que o modelo proposto se pode aplicar, pois engloba, não só os problemas VRP clássicos onde o ponto de partida coincide com o destino, mas também casos onde origem e o destino não são coincidentes.

A construção das rotas inicia-se com o cálculo das poupanças e sua ordenação. Sempre que as poupanças forem negativas consideramo-las nulas, pois são ligações não vantajosas.

A partir do cliente com maior poupança associada,  $i$ , selecciona-se o cliente  $j$  de entre o conjunto de todos os clientes possíveis com ligação a partir de  $i$  – conjunto  $\Omega$  – de acordo com a distribuição de probabilidade definida pela expressão (4.2).

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]} & \text{se } j \in \Omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.2)$$

onde  $\eta$  retrata a visibilidade e  $\tau$  a memória que, por analogia com as colónias reais de formigas,  $\tau$  designa-se de feromona. Os níveis de feromona e visibilidade fornecem informação sobre a atractividade da inserção de um arco  $(i, j)$  na solução.

- A **visibilidade** tem em consideração dois aspectos: a proximidade entre clientes e a poupança:



$$\eta_{ij} = \left(\frac{1}{d_{ij}}\right)^{\beta_1} \times (s_{ij}^k)^{\beta_2} \quad k = 1, 2 \quad (4.3)$$

Através da expressão (4.3) são incentivadas as ligações entre clientes vizinhos com poupança elevada, o que à partida tenderá a gerar boas soluções. É através da distribuição de probabilidade que se escolhem, sequencialmente, os nós a inserir nas rotas. Assim, a escolha do nó a inserir é influenciada pelos parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  que determinam a importância relativa das duas componentes da heurística que, no seu conjunto, também determinam a importância da componente heurística da expressão (4.2). Analogamente, o parâmetro  $\alpha$  da expressão reflecte a importância que se pretende dar à feromona.

- A **feromona** é uma componente dinâmica, pois é constantemente alterada durante o processo, ao contrário da visibilidade que não passa de uma componente estática, isto é, nunca é alterada ao longo do processo. Enquanto que a informação das componentes da visibilidade é guardada em matrizes estáticas (de dimensão  $n \times n$ ) que nunca variam durante todo o processo, a informação da feromona, também guardada numa matriz de dimensão  $n \times n$ , é constantemente actualizada.

#### 4.1.3 Actualização dos valores da feromona (Updates Pheromone)

No modelo proposto apresentam-se dois tipos diferenciados de feromona: a *feromona global* e a *feromona local*. Tal como o nome indica, a feromona global analisa a evolução global do algoritmo, desde a primeira iteração até à iteração corrente, enquanto que a feromona local se refere única e exclusivamente à evolução da iteração corrente. Nesta fase do algoritmo apenas falaremos da feromona global pois é a única que estará activa nesta fase do processo.

A *feromona global* contém a informação global de todo o processo, retendo a informação dos aspectos positivos e negativos das iterações anteriores de modo a incentivar a pesquisa de boas soluções. A actualização ocorre depois de encontrada a solução da iteração corrente e após a pós-optimização (no caso de existir).

No algoritmo, em cada iteração gera-se uma única formiga artificial, existindo apenas uma única solução. É esta solução que contribui para a actualização da feromona global.

No procedimento de actualização da feromona global é simulado o comportamento das colónias reais de formigas: a quantidade de feromona libertada é proporcional à qualidade da fonte de alimento encontrada, e à distância a que esta se encontra do ninho. Assim, a quantidade com que cada solução contribui para a actualização da matriz de feromona terá necessariamente que depender da qualidade da solução encontrada. A quantidade feromona global libertada será dada pela expressão

$$\tau_{ij}(t+1) = \rho\tau(t)_{ij} + \Delta\tau_{ij} + \Delta\tau_{ij}^* \quad (4.4)$$

A primeira parcela refere-se à quantidade perdida por evaporação:  $(1-\rho)$  é a taxa de evaporação, com  $0 \leq \rho \leq 1$ . A evaporação por um lado evita uma acumulação excessiva de feromona, por outro permite que o algoritmo “esqueça” as más opções do passado.

A segunda parcela realça todos os arcos pertencentes à solução corrente (com valor da função objectivo igual a  $L_i$ ). Este realce será directamente proporcional à qualidade da solução obtida: o incentivo dado aos arcos de soluções melhores – de menor custo – será superior aos de soluções piores, usando-se para tal a expressão (4.5).

$$\Delta\tau_{ij} = \begin{cases} \omega \frac{(L_i - L^*)}{L^*} * 100 & \text{se o arco } (i, j) \text{ pertence à solução da iteração corrente} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.5)$$

onde  $\omega$  é um parâmetro tal que  $0 < \omega < 1$ .

Na terceira parcela da expressão (4.4) são realçados todos os arcos pertencentes à melhor solução até então encontrada (com valor da função objectivo igual a  $L^*$ ): cada arco pertencente à melhor solução é incrementado de  $\Delta\tau_{ij}^* = \delta$ , com  $\delta \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , e zero caso contrário.

Após a escolha (probabilística) do cliente  $j$  a inserir na rota, liga-se  $(i, j)$  se não se violarem as restrições de capacidade e de tempo máximo permitido por rota; caso contrário não se liga. Prossegue-se com o nó que se encontra em segundo lugar na ordenação das

poupanças – que será agora o  $i_2$  – para a escolha probabilística de um novo nó  $j_2$  a inserir, em paralelo, em alguma rota e assim sucessivamente até não existirem poupanças positivas.

Por se ter optado em construir as rotas não sequencialmente, mas sim em paralelo, e por se ter criado réplicas de clientes, o conjunto  $\Omega$  é formado por todos os clientes  $j$  com ligações possíveis a partir de  $i$  de tal modo que:

- os clientes  $i$  e  $j$  pertençam a rotas distintas;
- nenhum cliente da rota de  $i$ , pertença à rota de  $j$ ;
- a rota formada através da união das duas rotas não viole as restrições de limitação do tempo máximo permitido por rota, nem a capacidade do veículo;
- os clientes  $i$  e  $j$  têm que ser "nós extremos" de cada rota, isto por se tratar de um caso onde o ponto de origem não coincide com o de chegada (Matos, (1996)).

No algoritmo proposto não existe qualquer controle directo do número de rotas que são construídas por período, podendo existir durante o processo soluções com um maior número de rotas do que o admissível (por inexistência de veículos ou brigadas de recolha). É no decorrer do processo, sem que nenhuma condição seja imposta, que se vão criando soluções que optimizam os recursos disponíveis. Ao construir-se uma solução de qualidade minimizando a distância percorrida, também se verifica que se minimiza o número de rotas criadas. Neste sentido, não é necessário aplicar qualquer tipo condicionamento que exija uma construção com limites no número de rotas.

#### 4.1.4 Optimização local (DaemonActions)

Na resolução dos mais variados problemas combinatórios NP-difíceis é comum encontrar fase(s) de pós-optimização (pesquisa local) com o intuito de melhorar a qualidade das soluções, tornando-as mais competitivas.

Nos problemas de rotas é comum ver, nos diferentes algoritmos de resolução, procedimentos de inserção e troca de clientes ou arcos entre rotas a funcionar em conjunto.

Nos ACO são sugeridos a aplicação da pesquisa local 2-optimal e/ou 3-optimal a todas as rotas antes da libertação da feromona. Outros tipos de algoritmos de pesquisa local com troca de clientes entre diferentes rotas também são implementados com sucesso.

No algoritmo desenvolvido são aplicados procedimentos 2-optimal e/ou 3-optimal a todas as soluções geradas antes da libertação da feromona. Os efeitos desta aplicação serão analisados no Capítulo 5 (secção 5.1.4).

Uma das limitações da construção das rotas em paralelo é o facto de ser difícil controlar ou limitar o número de rotas criadas em cada solução. Assim, para o mesmo problema podem-se encontrar soluções com grandes diferenças no número de rotas. Normalmente, a qualidade da solução está directamente relacionada com número de rotas, isto é, planeamentos com um menor número de rotas correspondem, geralmente, a soluções de melhor qualidade.

Na tentativa de diminuir o número de rotas, melhorando a qualidade da solução, desenvolveu-se uma técnica de pós-optimização que permite fundir algumas rotas –designada de  *fusão*. Estratégias de redução de número de rotas ou redução do número de veículos são usadas em algumas variantes dos problemas de estabelecimento de rotas. A título de exemplo na resolução de problemas de rotas com janelas temporais (VRPTW) podem-se referir os trabalhos de Gambardella et al. (1999), Berger et al. (2003), entre outros.

Adicionalmente ao procedimento fusão implementou-se um procedimento – que é designado  *trocas-entre-rotas* – que permite trocas entre 2 rotas usando os movimentos de  $\lambda$ -intercâmbios (Osman, 1993). A aplicação conjunta destes procedimentos, por consumir alguns recursos computacionais, só é efectuada se, durante as últimas  $k$  iterações ( $k$  valor a definir) não se tiver verificado aumento na qualidade das soluções. Será então aplicada a fusão e o procedimento de trocas à melhor solução de entre as últimas  $k$  iterações.

Segue-se uma descrição mais detalhada destes movimentos.

- Na  *fusão*, as rotas são ordenadas pela restrição (de capacidade ou tempo permitido por rota) que mais condiciona o retorno ao depósito. No caso de estudo da recolha dos resíduos sólidos é a restrição tempo por turno que condiciona o retorno ao depósito, enquanto nos exemplos da literatura apenas existe a restrição capacidade dos veículos, sendo esta a que condiciona o retorno ao depósito.

Seleccionada a rota com maior folga na restrição que condiciona o retorno ao depósito, tenta-se inserir, um a um, os clientes desta rota, nas outras rotas existentes sem que haja violação de qualquer tipo de restrição. Veja-se um exemplo ilustrativo:

- Seja  $R_k = [\text{Origem}, k_1, k_2, k_3, \dots, k_m, \text{destino}]$  a rota que se tenta fazer desaparecer (ou fundir). Para todos  $k_i$  pertencentes a  $R_k$  procura-se, dentro de uma vizinhança de  $k_i$  encontrar uma rota que não contenha  $k_i$ , nem viole qualquer tipo de restrição pela sua inclusão. Após a inclusão de  $k_i$ , as rotas são optimizadas pela heurística 2-optimal e reavaliadas. Basta não ser possível introduzir um dos clientes para se abandonar a tentativa de fusão da rota  $R_k$  e passa-se a outra rota, por ordem decrescente de ordenação.

Se for possível inserir todos os clientes da rota  $R_k$ , e se o acréscimo total que advém da inserção dos clientes nas outras rotas for inferior ao que se poupa por desaparecimento de  $R_k$ , procedem-se às trocas em análise.

De modo a não tornar este processo demasiado moroso e exaustivo, só se tentam fundir rotas onde exista alguma folga na restrição que condiciona a ordenação, restringindo a tentativa de fusão a um conjunto de apenas de algumas rotas. Designado este conjunto por  $\phi$ , por  $T$  o tempo máximo permitido por rota (duração de cada turno),  $Q$  a capacidade dos veículos e por  $\partial$  o limite mínimo da folga que permita à rota a tentativa de fusão, o algoritmo pode ser esquematizado pelo conjunto de quatro passos apresentados na Figura 4.3.

---

**procedimento** fusão

**Enquanto**  $\phi \neq \emptyset$  **fazer** :

Passo 1: Seleccionar o conjunto de rotas cuja  
folga da restrição seleccionada  $> \partial$ . Seja  $\phi = [R_1, R_2, \dots, R_p]$ ;

Passo 2: Encontrar a rota com maior folga na restrição  
Seja  $\{ R_t \subseteq \phi : R_t = [k_1, k_2, \dots, k_r] \}$ ;  
Sucesso := verdade;  
 $i = 1$ ;

Passo 3: **Repetir** até Sucesso=falso **ou**  $i = r + 1$ :  
Encontrar, dentro de uma vizinhança de  $k_i$  uma rota  $R_w$  tal que  
 $k_i \notin R_w \wedge R_w \cup k_i \leq T \wedge R_w \cup k_i \leq Q$   
**Se** encontrou **então**  $i = i + 1$ ;  
**caso contrário**  $\phi = \phi - R_t$ ; Sucesso=falso;

Passo 4: **Se** Sucesso=falso **e**  $\phi \neq \emptyset$  **então** Passo 2;  
**Se** Sucesso=verdade **então** actualizar todas as rotas;  
 $\phi = \phi - R_t$ ; voltar ao Passo 1

---

**Figura 4. 3:** Pseudo-código de fusão

- Nas *trocas-entre-rotas* adaptaram-se os procedimentos de  $\lambda$ -intercâmbios aos PVRP. O procedimento de  $\lambda$ -intercâmbios (ver Capítulo 3 - secção 3.3.3.3) consiste em trocar subconjuntos de  $\lambda$  clientes, de dimensão variável, entre rotas.

Como facilmente se depreende, à medida que  $\lambda$  aumenta, o número de combinações de trocas de clientes a testar entre 2 rotas também aumenta. Por questões de tempo computacional, o intercâmbio implementado restringe-se apenas a um cliente: a movimentos de inserção, que consiste na saída de um cliente de uma rota e sua inserção noutra rota (representado pelos operadores (1,0) e (0,1)); e a movimentos de troca de um cliente entre duas rotas (operador (1,1)). Seja a título de exemplo  $k_1 \in R_1$  e  $k_2 \in R_2$ , as novas rotas  $R'_1$  e  $R'_2$  vão ser tais que  $R'_1 = (R_1 - k_1) \cup k_2$  e  $R'_2 = (R_2 - k_2) \cup k_1$ .

É desejável que os clientes sujeitos aos movimentos sejam inseridos ao longo da rota numa posição vantajosa de modo a tornar a troca lucrativa. Em cada ensaio de inserção, a rota receptora é sujeita ao mecanismo de troca 2-optimal na tentativa de encontrar a melhor sequência de visita dos clientes.

No movimento (1,1) são avaliadas as trocas de cada cliente de uma rota com todos os clientes da outra rota. Nos movimentos (1,0) ou (0,1) são avaliados os movimentos de inserção para todos os clientes de uma rota.

Se para cada par de rotas se avaliassem todas as trocas possíveis seria grande a lista de candidatos, com graves implicações no tempo computacional despendido na resolução dos problemas. Para aliviar esta dificuldade, e por se tratar de um PVRP onde se procedeu à replicação de nós (que no caso de estudo triplicou o número de clientes; passando de 202 para 610 clientes a visitar), apenas serão analisadas rotas que contenham pelo menos um ponto de recolha comum, pois assim provavelmente existirá alguma proximidade entre elas, esperando com isso obter bons resultados e evitando uma análise exaustiva.

A replicação de nós fará com que existam rotas com nós coincidentes, ou até mesmo rotas completamente iguais. Este aspecto contribui favoravelmente para a diminuição da lista de candidatos, na medida em que, se um cliente pertencente a duas rotas  $R_p$  e  $R_q$ , a troca deste cliente entre estas rotas não será avaliada, pois geraria com uma rota com duas visitas ao mesmo local.

Note-se no entanto que, a aplicação deste critério a problemas cujos clientes têm um pequeno número de visitas no horizonte temporal, poderá restringir em demasia os movimentos avaliados entre trocas. Nestas situações é aconselhável analisar as trocas entre todas as rotas.

Como estratégia de selecção pode-se optar pelo primeiro movimento que verifique os critérios de aceitação (FI – first improve strategy) ou então pelo melhor movimento em análise (BI – best improve strategy).

A opção pelo movimento que melhor benefício traz para a solução corrente implica a análise de um maior número de movimentos, aumentando o tempo computacional destes procedimentos, principalmente quando se trata de problemas de grande dimensão. Sem dúvida o problema do caso em estudo é de grande dimensão, mas por se tratar de um problema de solução estática, e uma vez encontrada a solução ela vai ser repetida durante vários períodos, sendo apenas necessário encontrar novas soluções em situações pontuais, o factor tempo computacional foi atenuado no sentido de ser compatível com as necessidades do sistema. Tal comportamento seria inadmissível noutra tipo de situações e de problemas.

Os resultados apresentados correspondem à estratégia de selecção que opta pela troca do movimento que maior benefício traz para a solução em análise.

A solução sujeita à pós-optimização passa inicialmente pela tentativa de fusão de algumas das suas rotas. Após a *fusão* é, iterativamente sujeita aos movimentos de trocas (1,1) e (1,0), que se repetem até existirem trocas que sejam vantajosas para a solução em curso. A partir do momento em que estes procedimentos não encontram trocas que conduzam a uma melhoria da solução em curso, são permitidos movimentos que degradem ligeiramente a solução durante um determinado número de iterações. Existe um parâmetro, designado de tolerância ( $t_{ol}$ ), que indica de quanto se permite que a solução se degrade em cada troca. Nem todos os movimentos que degradem a solução dentro dos limites de tolerância são efectuados, sendo sujeitos a uma probabilidade de 0,5 de se efectuar, ou não, o movimento em análise.

Designando por  $L_i$  o valor da função objectivo da solução que é sujeita a estes movimentos e  $t_{ol}$  um parâmetro que determina a quantidade tolerada de degradação da solução numa determinada instância, os procedimentos de trocas podem ser esquematizados como se indica na Figura 4.4.

---

```

procedimento de trocas (1,1)
  i=1;;tol=0;
  enquanto i ≤ n° total de rotas fazer
    para rota_de_entrada( $r_E$ )=i+1 até n° total de rotas
    se existir um cliente comum entre  $r_i$  e  $r_E$  então
    Analisar todas trocas possíveis(1,1), admissíveis entre  $r_i$  e  $r_E$ ,
    guardar a troca com menor custo (c) associado
      se (tol=0 e c<0) ou (tol≠0 e c<tol e randon>0.5) então
      efectuar a troca; actualizar a solução;
       $L_{i+1}=L_i+c$ 
      i=i+1;
    caso contrário
      i=i+1;
  fim {enquanto}

```

---

**Figura 4. 4:** Procedimentos de trocas (1,1)

Analogamente, o algoritmo de movimentos de inserção pode ser esquematizado conforme se apresenta na Figura 4. 5, onde  $r_i$  é a rota de onde sai o cliente e  $r_E$  a rota de inserção.

---

```

procedimento de inserção
  i=1;
  enquanto i≤ n° total de rotas fazer
    para rota_de_entrada( $r_E$ )=i+1 até n° total de rotas
    se existir um cliente comum entre  $r_i$  e  $r_E$  então
    Analisar todas inserções possíveis(1,0)admissíveis entre  $r_i$  e  $r_E$ ,
    guardar a troca com menor custo (c) associado
      se (tol=0 e c<0) ou (tol≠0 e c<tol e randon>0.5) então
      efectuar a troca; actualizar a solução;
       $L_{i+1}=L_i+c$ ;
      i=i+1;
    caso contrário
      i=i+1;
  fim {enquanto}

```

---

**Figura 4. 5:** Procedimento de inserção

Os procedimentos  *fusão* e  *trocas-entre-rotas* só são accionados se durante as últimas k iterações não existirem melhorias nas soluções encontradas. A aplicação destes procedimentos à melhor solução encontrada nas últimas k-ésimas iterações vai certamente



melhorar significativamente a solução de partida. Esta solução vai ser um elemento importante no algoritmo das formigas uma vez que entra com ligações que, provavelmente, em iterações anteriores eram desprezadas. Para lhes dar relevo, é accionado um mecanismo de modo a incentivar, no futuro, este tipo de ligações.

Os responsáveis pela pesquisa de novas soluções são a feromona e a visibilidade, sendo a visibilidade definida por  $\eta_{ij} = (1/d_{ij}) \times (s_{ij}^k)$ . Ora, se através da fusão se revelam vantajosas ligações onde a distância entre os dois nós é grande, ou ligações entre nós cuja poupança é negativa ou nula, os procedimentos atrás descritos nunca possibilitarão a junção desses nós. Para permitir que estas ligações sejam possíveis, após a optimização local, adiciona-se à matriz das poupanças uma constante positiva, isto é  $s_{ij}^k = s_{ij}^k + \text{constante}$  para todo  $i$  e  $j$ , evitando a presença de poupanças nulas. Note-se que todas as poupanças negativas são consideradas nulas, pelo que, ao se adicionar uma constante a todas as poupanças, deixa de haver ligações impossíveis.

O realce do papel da feromona durante o processo pode ser feito em qualquer altura do algoritmo, fazendo aumentar o valor do parâmetro  $\alpha$  na expressão (4.2).

#### 4.1.5 Estratégias de intensificação e de diversificação

As estratégias de intensificação e de diversificação baseiam-se na modificação de regras que encorajam movimentos que permitam a pesquisa de outras soluções. O incentivo da pesquisa para regiões atractivas anteriormente visitadas (intensificação) é inerente ao próprio ACO, pois a interacção da evaporação com os depósitos de feromona após cada iteração dá à pesquisa a orientação de encontrar boas soluções.

O facto de a actualização da feromona, no algoritmo proposto, ser feita não só com a contribuição da melhor solução até então encontrada, como também com informação da solução corrente, ajuda na diversificação do algoritmo. Conjuntamente, também se optou pela reinicialização da matriz de feromona quando existe um certo número de iterações sem melhorias da solução final. Na reinicialização, a nova solução é construída utilizando a informação heurística e a informação retida na última solução encontrada (que pode ser de boa ou má qualidade), a partir da qual a pesquisa se reinicia e a matriz de feromona é recalculada.

#### 4.1.6 Critério de Paragem

O critério de paragem destes algoritmos tem como objectivo evitar que o processo iterativo de pesquisa se prolongue por tempos indefinidos sem qualquer vantagem.

Como a pesquisa se faz de forma iterativa, o critério de paragem adoptado foi o número de iterações, que foi fixado, após ensaios exaustivos, em 500 iterações.

#### 4.1.7 Síntese da primeira fase do algoritmo

Pode-se sintetizar a primeira fase do algoritmo através de alguns passos fundamentais que se podem esquematizar de acordo com os procedimentos apresentados na Figura 4.6.

---

```

procedimento ACO algoritmo
proceder à replicação dos pontos a visitar
inicializar os parâmetros e a feromona
enquanto (condição de paragem não se verifica) fazer
    Gerar uma solução
    Aplicar um algoritmo de pesquisa local -  $\lambda$ optimal
    se nas últimas  $k$  iterações não houve melhorias então
        À melhor solução de entre as últimas  $k$ -ésimas:
        Aplicar o algoritmo de  fusão de rotas
        Aplicar o algoritmo de  trocas-entre-rotas
    fim {se}
    Actualizar a feromona
fim {enquanto}

```

---

**Figura 4. 6:** Síntese da primeira fase do algoritmo

A solução obtida nesta fase do algoritmo é formada por um conjunto de rotas que têm início e fim em pontos fixos pré-estabelecidos e obedecem às restrições de capacidade e tempo permitido por rota. As rotas englobam não só uma visita a todos os clientes, mas tantas quantas a frequência de visita de cada cliente para o período em estudo. Assim, um cliente com três visitas durante o período em estudo aparece em três rotas distintas.

Nesta fase do algoritmo não consideradas qualquer tipo de restrições que visem o cumprimento de intervalos entre visitas consecutivas e de calendarização da visita dos clientes.

Será desenvolvido um procedimento que afecta as rotas da primeira fase do algoritmo aos diferentes dias do período, de modo a englobar todo o tipo de restrições associadas ao estabelecimento de um plano de visita – assunto desenvolvido na secção 4.2 que compõe a segunda fase da metodologia proposta.

## 4.2 Segunda fase do algoritmo – CALENDARIZAÇÃO DAS ROTAS

### 4.2.1 Considerações gerais

A segunda fase do algoritmo visa construir um sistema automático de afectações das rotas construídas na primeira fase aos diferentes dias de semana. Esta afectação terá que obedecer a um conjunto de restrições de calendarização que surgem por se tratar de um PVRP. Dentro deste conjunto de restrições de calendarização encontram-se restrições para garantir a existência de algum espaçamento entre visitas consecutivas. O número de combinações possíveis para a calendarização da visita de cada local é limitado e depende da frequência de visita.

Para o caso em estudo terão de se obedecer às seguintes condições:

- i. Nunca será possível recolher os resíduos de uma localidade duas vezes num mesmo dia. Esta (obvia) afirmação implica uma limitação extremamente forte para a abordagem aplicada da replicação dos clientes. Por exemplo a rota  $R_1 = [\text{Origem}, 5, 3, 9, 12, 4, 10, \text{Destino}]$  e a rota  $R_2 = [\text{Origem}, 4, 7, 11, 1, 2, 3, \text{Destino}]$  nunca poderão ser afectadas ao mesmo dia da semana por terem o ponto 3 em comum.
- ii. Localidades com 2 únicas recolhas semanais deverão ser visitadas entre segunda-feira e sexta-feira com um intervalo mínimo de 2 dias entre visitas. Assim, uma localidade de frequência igual a 2 que seja visitada na segunda-feira, só poderá ser novamente visitada na quinta-feira ou na sexta-feira; se não for visitada na segunda-feira, terá que obrigatoriamente ser visitada na terça-feira para que a segunda recolha se poder fazer na sexta-feira e assim cumprir o espaçamento de dois dias de intervalo entre visitas consecutivas. Deste modo, as combinações admissíveis dos pontos com duas visitas

semanais, podem ser representadas pelo conjunto de padrões admissíveis  $(1,0,0,1,0,0)$ ,  $(1,0,0,0,1,0)$  e  $(0,1,0,0,1,0)$ . A cada elemento do vector corresponde um dia de semana, respectivamente segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira e fim-de-semana, onde o caractere 1 representa visita e 0 ausência de visita. Note-se que ao fim-de-semana não se recolhem localidades com pequena frequência de visita.

- iii. Localidades com três visitas por semana terão que ser efectuadas em dias não consecutivos. Se este tipo de localidades não tiverem recolha ao fim-de-semana, os padrões admissíveis são  $(1,0,1,0,1,0)$ ,  $(1,0,0,1,1,0)$ ,  $(1,1,0,1,0,0)$ ,  $(1,1,0,0,1,0)$ ,  $(1,0,1,1,0,0)$ ,  $(0,1,0,1,1,0)$ ,  $(0,1,1,0,1,0)$ .

Acrescido a este conjunto de condições a que é necessário obedecer, a solução deverá apresentar um esforço laboral semelhante entre os dias úteis da semana, o que se reflecte num equilíbrio entre o número de rotas diárias. Adicionalmente, pretende-se que ao fim-de-semana o número de rotas seja o menor possível.

O elevado número de restrições que a afectação das rotas aos dias da semana envolve faz com que dificilmente a solução encontrada na primeira fase do algoritmo seja solução admissível desta segunda fase. Existe então a necessidade de estabelecer um mecanismo de trocas e redistribuição das rotas.

Começa-se com a abordagem do problema referido no ponto *i.*, recorrendo à geração de um grafo e sua coloração na tentativa de encontrar uma calendarização para o conjunto de rotas obtido primeira fase em que não existam repetições de visitas diárias aos clientes e que, em simultâneo, essa calendarização cumpra, tanto quanto possível, as restrições de espaçamento entre visitas. Posteriormente, na secção 4.2.3, serão descritos dois mecanismos de trocas para garantir a admissibilidade da solução.

#### **4.2.2 Construção de uma solução que verifique a unicidade de visita diária para cada localidade**

Na construção do conjunto de rotas da primeira fase do algoritmo houve a preocupação de visitar todos os clientes tantas as vezes quantas as suas necessidades, mas não houve qualquer tipo preocupação de calendarização dessas visitas. É necessário distribuir as

rotas pelos diferentes dias da semana de modo que sejam cumpridas todas as exigências de calendarização. Uma primeira exigência elementar reside de uma localidade não poder ser visitada duas vezes num mesmo dia. A solução obtida na primeira fase do algoritmo tem fortes possibilidades de não cumprir este requisito básico: basta por exemplo para um problema com um horizonte temporal de 6 dias (que é o que se passa no caso de estudo apresentado nesta dissertação), a existência de 7 rotas, todas com algum ponto de visita em comum. Para ilustrar esta situação veja-se o *exemplo 1* onde os clientes 2 e 3 têm frequência igual a seis e os restantes frequência igual a dois.

#### **EXEMPLO 1:**

Sejam  $R_1, \dots, R_7$  sete rotas definidas do seguinte modo:  $R_1=[\text{Origem}, 2, \dots, 3, \dots, \text{Destino}]$ ;  $R_2=[\text{Origem}, 7, 3, \dots, \text{Destino}]$ ;  $R_3=[\text{Origem}, 2, \dots, 3, \dots, \text{Destino}]$ ;  $R_4=[\text{Origem}, 2, \dots, 3, \dots, \text{Destino}]$ ;  $R_5=[\text{Origem}, \dots, 2, \dots, 3, \text{Destino}]$ ;  $R_6=[\text{Origem}, 2, 3, \dots, \text{Destino}]$ ;  $R_7=[\text{Origem}, 2, 7, \dots, \text{Destino}]$ ;

Como todas as rotas têm um cliente em comum, é impossível distribuí-las por 6 dias distintos! Haverá sempre um cliente com duas visitas no mesmo dia, o que é uma situação não desejável, pois não terá qualquer sentido em termos práticos.

É necessário criar um mecanismo que identifique este tipo de situações e distribua as rotas pelos diferentes dias da semana de modo a que situações deste tipo não se verifiquem, isto é, afectar as rotas de modo que cada cliente seja visitado não mais que uma vez por dia.

#### **4.2.2.1 Geração de um grafo**

Inspirados por um trabalho apresentado por Burke et al. (1994) na elaboração de horários de exames escolares, vai-se recorrer à geração de um grafo e à sua coloração.

Burke et al. (1994) apresentam um sistema automático de construção de calendário de exames escolares recorrendo à construção de um grafo, no qual os vértices representam as disciplinas e as arestas os conflitos entre disciplinas. Só existe ligação (aresta) entre o vértice Y e o vértice W se existir algum tipo de conflito entre as disciplinas Y e W.

Os conflitos entre disciplinas podem ter natureza distinta: por exemplo, pode haver conflito entre duas disciplinas pelo facto de haver um ou mais alunos que se proponham a exames dessas duas disciplinas - necessariamente terão que ser exames que ocorrem em períodos distintos. Também a necessidade de uma sala com características específicas pode ser motivo, entre outros, que impeça a ocorrência de dois exames num mesmo período.

Após a construção do grafo procede-se à sua coloração com o intuito de dividir os exames em grupos que possam ocorrer em iguais períodos.

Em teoria de grafos, o problema de coloração consiste em atribuir diferentes cores, no menor número possível, aos vértices, de modo que nenhum par de vértices adjacente tenha a mesma cor. Com a coloração consegue-se perceber quais os exames que devem ocorrer em diferentes períodos (os de cores diferentes), e os que podem ocorrer no mesmo período (os de cor igual).

Vai-se proceder de modo análogo, passando as disciplinas – vértices – a serem as rotas, e as arestas os conflitos entre os vértices. Assim, sobre as rotas da solução da primeira fase, constrói-se um grafo onde os vértices representam as rotas e as arestas os conflitos entre rotas. Se duas rotas são adjacentes significa que têm pelo menos um ponto de visita em comum, daí a existência de conflito por não se poderem efectuar em igual período.

Continuando com o exemplo 1 acima descrito, o grafo representativo terá 7 vértices, um para cada rota. Como todas as rotas têm pelo menos um ponto de visita em comum o grafo é completo, isto é, cada vértice é adjacente a todos os outros – ver Figura 4. 7.

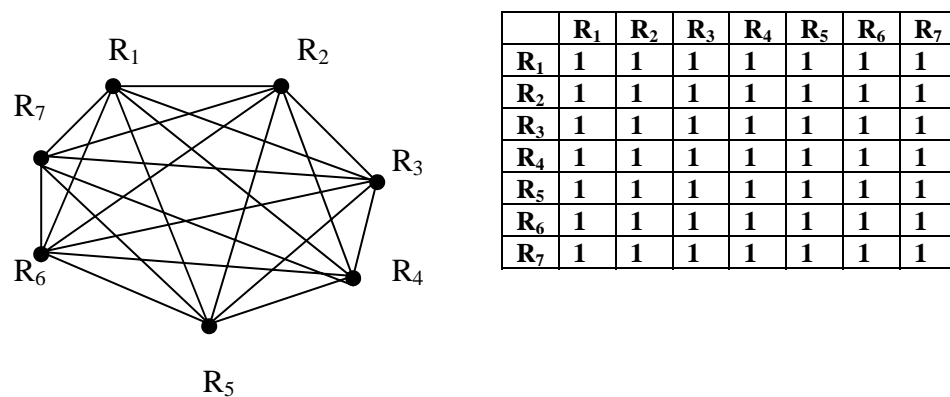


Figura 4. 7: Grafo representativo do exemplo 1

Seja o grafo  $G(V,E)$  sendo  $V$  o conjunto de vértices (rotas) e  $E$  o conjunto de arestas definido por  $E=\{(R_i, R_j):R_i, R_j \in V \text{ tal que as rotas } R_i \text{ e } R_j \text{ têm algum ponto de visita em comum}\}$ .

Ao colorir o grafo pretende-se criar subgrupos de rotas, cada qual constituído apenas por rotas compatíveis. A cada subgrupo corresponderá uma cor, sendo formado pelo conjunto de vértices – rotas – que possuem essa cor. As rotas com igual cor podem ser efectuadas num mesmo dia, uma vez que o conjunto de vértices de uma determinada cor  $C$ , não tem qualquer

tipo de conflito. As diferentes cores corresponderão aos dias da semana do período em estudo – uma cor corresponderá a um e um só dia da semana.

Coloca-se um problema: “*Se cada cor vai corresponder a um dia da semana e se o horizonte temporal é de  $M$  dias (6 no caso de estudo), o número de subgrupos, isto é, o número de cores não poderá exceder  $M$ !*”

Ao colorir o grafo, é bem possível que o menor número de cores necessárias para colorir o grafo – que em teoria de grafos se designa número cromático  $\chi(G)$  – seja superior a  $M$ . Isto faz com que seja impossível uma posterior afectação aos dias da semana. Interessa então que o grafo a colorir tenha o menor número de arestas possíveis pois assim serão maiores as possibilidades de o colorir com um menor número de cores. Note-se que um pequeno número de arestas não implica necessariamente um número cromático menor, pois basta existir um subgrafo completo com  $Z$  vértices para o número cromático ser superior ou igual a  $Z$ .

Com o objectivo de criar um grafo com o menor número de arestas possíveis tentou-se perceber a origem das arestas e a “força” das mesmas, isto é, interessa não só saber que existe uma aresta que liga  $R_i$  a  $R_j$  mas também medir o conjunto de clientes que pertencem simultaneamente às duas rotas. A existência de uma aresta devido à presença de um único cliente em comum entre vários de ambas as rotas não é muito desejável pois pode eventualmente prejudicar esta fase, e seria desejável, se possível e não muito dispendioso, que a visita a esse cliente desaparecesse de uma das rotas e assim desapareceria a aresta em questão. Por outro lado, se a aresta aparece devido à presença de vários clientes em comum entre as rotas em análise, é uma aresta mais *forte*, e o desejável é, se possível, torná-la ainda mais forte.

Interessa então que as rotas sejam formadas de modo que os conflitos entre elas sejam o mais forte possível pois assim diminui-se o número de arestas entre rotas. Por outras palavras, para um determinado grupo de clientes a visitar, interessa formar rotas semelhantes entre si, diminuindo assim o número de conflitos.

Seja então  $\varphi_{ij} = \{w: w \in R_i \wedge w \in R_j\}$ .

Interessa  $\text{Max } \# \varphi_{ij}$

Como na primeira fase do algoritmo não houve a preocupação de criar rotas semelhantes, gera-se uma fase, que designamos por fase de transição, cujo objectivo é construir rotas semelhantes. Claro que esta fase terá implicações (provavelmente negativas) nos valores da função objectivo da resolução do problema da primeira fase, mas que talvez compensem face ao menor agravamento da função objectivo do problema final que inclui as restrições de calendarização.

#### 4.2.2.2 Fase de Transição

Em cada iteração da 1ª fase do algoritmo geram-se soluções diferentes, após o que se procede à actualização da matriz de feromona. Nesta actualização entra-se com a informação da melhor solução global até então obtida e também com a qualidade da solução da iteração corrente. Chamou-se feromona global a este tipo de feromona.

Nesta fase de transição pretende-se activar uma feromona local, que actua localmente durante a construção de cada solução. Na formação da rota  $R_k$ , se o cliente  $i$  se ligou ao cliente  $j$ , em ligações futuras desta iteração serão incentivadas não só as ligações entre os clientes  $i$  e  $j$ , mas também ligações entre os clientes  $i$  e  $j$  com todos os outros pertencentes a  $R_k$ . A actualização da feromona local, no momento  $l+1$  da iteração corrente, é representada pela expressão

$$\tau_{hw}^{local}(l+1) = \max(\tau_{h1}(l), \tau_{h2}(l), \dots, \tau_{hn}(l), \tau_{w1}(l), \tau_{w2}(l), \dots, \tau_{wn}(l)), \quad h=i, j; \forall w \in R_k \quad (4.6)$$

onde são realçadas todas as ligações de  $i$  e  $j$  aos clientes pertencentes à rota  $R_k$  em construção.

Os efeitos da feromona local serão sentidos na escolha probabilística de um cliente  $j$  a ligar-se a  $i$ : se a ligação  $(i, j)$  já se verificou em alguma rota da iteração corrente ou o cliente  $i$  faz parte de uma rota onde  $j$  também esteja presente, o valor da feromona local de  $(i, j)$  é elevado, logo este ponto  $i$  (que é uma réplica do ponto  $i$  já inserido em alguma rota) é fortemente incentivado a ligar-se a  $j$  (que também é uma réplica do ponto  $j$  já inserido em alguma rota) através da função probabilidade apresentada na expressão (4.7) abaixo.



$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}] [\tau_{hw}^{local}]}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}] [\tau_{hw}^{local}]} & \text{se } j \in \Omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.7)$$

A função probabilidade passa a ser definida não só pela feromona global e pela visibilidade, que permanecem inalterados durante a iteração corrente, mas também pela feromona local que está constantemente a ser actualizada após cada ligação da iteração em curso.

A activação da feromona local, que incentiva a construção de rotas semelhantes, pode ter início em diferentes etapas do algoritmo: ou logo no início do processo, ou algures a meio do processo ou no fim, após o critério de paragem ser accionado. Neste último caso, o processo continuaria, mas agora com a feromona local activa.

Accionar a feromona local logo no início do algoritmo levaria à existência de uma nova imposição logo desde a primeira iteração, o que de algum modo poderia conduzir a pesquisa de soluções para zonas menos atractivas. Em qualquer dos casos, é de esperar que esta activação conduza a pesquisa para soluções com piores valor na função objectivo, mas soluções estruturalmente mais vantajosas para a aplicação da segunda fase do algoritmo. Interessa pois analisar estes custos no sentido de perceber se há ou não vantagem da aplicação da fase de transição. Esta análise é ilustrada no Capítulo 5 e no Anexo D com apresentação de resultados.

#### 4.2.2.3 Coloração do grafo

A coloração do grafo construído a partir do conjunto de rotas obtido na primeira fase do algoritmo pretende criar subgrupos de rotas de número não superior ao comprimento do horizonte temporal, de tal modo que os vértices pertencentes a cada subgrupo não sejam adjacentes.

Como atrás referido, esse problema é conhecido na teoria dos grafos por um problema de coloração: usam-se  $C$  cores para colorir o grafo de tal maneira que não tenha nenhum par de vértices adjacentes com a mesma cor. O objectivo é minimizar esse valor  $C$ . O valor mínimo de  $C$  é chamado número cromático  $\chi(G)$ .

A determinação do número cromático é um problema de muito difícil resolução, para um grafo simples de qualquer dimensão. De facto não é conhecido nenhum algoritmo de ordem de complexidade polinomial para determinar  $\chi(G)$ .

São conhecidas várias técnicas para determinar soluções deste problema: recorrendo à formulação e resolução de um modelo linear inteiro, modelos de programação por restrições, métodos heurísticos e meta-heurísticos.

A formulação matemática do problema de coloração de grafos como um modelo de programação linear inteira (PLI) pode ser apresentado da seguinte forma:

Sejam :

.  $G(V, E)$ , o grafo gerado para as rotas

.  $n = \Delta(G)$ ;

.  $C_j = \begin{cases} 1, & \text{se a cor } j \text{ for usada} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$  (representando as cores disponíveis)  $1 \leq j \leq n$ ;

.  $G_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a cor } j \text{ for atribuída à rota } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$   $i \in V, 1 \leq j \leq n$ ,

.  $A(i)$  o conjunto de rotas adjacentes à rota  $i$ ,  $i \in V, A(i) \subset V$

Então pretende-se:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^n C_j \quad (4.8)$$

$$\text{s. a. } G_{ij} + G_{kj} \leq 1, \quad \forall i \in V, \forall k \in A(i), 1 \leq j \leq n, \quad (4.9)$$

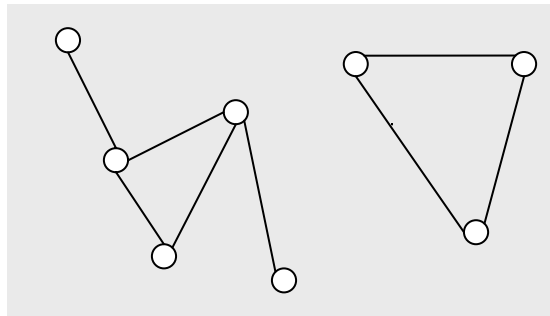
$$\sum_{j=1}^n G_{ij} = 1 \quad \forall i \in V, \quad (4.10)$$

$$C_j \geq G_{ij} \quad \forall i \in V, 1 \leq j \leq n, \quad (4.11)$$

$$G_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V \quad (4.12)$$

A função objectivo expressa a minimização do número de cores; a restrição (4.9) garante que as rotas adjacentes não têm a mesma cor; (4.10) assegura que a cada rota é atribuída uma e uma só cor; (4.11) obriga a que se a rota  $i$  é pintada com a cor  $j$  então  $C_j$  toma o valor 1, o que significa que a cor  $j$  é utilizada.

No sentido de facilitar a resolução do problema de programação linear inteira formulado, antes de colorir o grafo verifica-se se no grafo criado existem componentes desconexas, isto é, a existência de subgrafos desconexos. O grafo da Figura 4. 8 apresenta duas componentes desconexas: uma formada pelo subgrafo que engloba os 5 vértices da esquerda, outra pelo subgrafo constituído pelos três vértices da direita. Os 5 vértices da esquerda e as suas ligações formam um subgrafo que é desconexo do subgrafo formado pelos três vértices da direita.



**Figura 4. 8:** Exemplo de um grafo com duas componentes desconexas

A presença de componentes desconexas num grafo permite que a coloração de cada subgrafo seja totalmente independente dos outros. Permite dividir o problema original em vários subproblemas de menor dimensão, diminuindo a complexidade dos problemas de coloração a resolver, ao mesmo tempo que aumenta a flexibilidade da futura distribuição das rotas pelos dias da semana.

A formulação do problema de coloração acima apresentada não garante qualquer equilíbrio do número de vértices de cada cor. Ao pretender-se que o número de rotas entre os diferentes dias úteis da semana seja semelhante é necessário proceder a algumas adaptações à formulação anteriormente apresentada. Ao conjunto de restrições definido em (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12) acrescentam-se as restrições

$$-f \leq \sum_{i \in V} G_{ij_1} - \sum_{i \in V} G_{ij_2} \leq f \quad \forall j_1, j_2 : j_2 > j_1 \wedge j_2 \leq n-1 \quad (4.13)$$

sendo  $f$  uma variável inteira a minimizar, que reflecte o desequilíbrio entre o número de cores.

No caso de estudo, é desejável ao fim-de-semana um reduzido número de rotas assim, com vista a encontrar uma solução com o menor número de rotas possíveis numa das cores (cor  $n$ ), a função objectivo passa a tomar a forma indicada na expressão (4.14).

$$\text{Min} \left( \sum_{j=1}^n C_j + M \sum_{i \in V} G_{in} + f \right) \quad (4.14)$$

em que  $M$  é uma constante arbitrariamente grande.

O problema adiante designado de problema de coloração equilibrado consiste no problema minimização da função objectivo (4.14) sujeito às restrições (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) e (4.13). O problema minimiza o número de cores que utiliza, ao mesmo tempo que tenta, tanto quanto possível, equilibrar o número de vértices de cada cor, com excepção de uma única cor que terá um menor número de vértices.

A coloração garante a inexistência de visitas diárias. Adicionalmente a esta condição, existe a necessidade de cada ponto de recolha cumprir um certo espaçamento entre visitas consecutivas – restrições mencionadas nos pontos ii e iii na secção 4.2.1.

Voltando ao caso em estudo: não visitando ao fim-de-semana localidades com duas recolhas semanais, existem somente três possibilidades de calendarização da recolha (segunda-feira e quinta-feira, segunda-feira e sexta-feira ou terça-feira e sexta-feira).

Seja:

- a cor 1 a cor que corresponde à segunda-feira, a cor 2 à terça-feira e assim sucessivamente, para os restantes dias de semana.
- a localidade  $i$  um ponto de visita com duas recolhas semanais pertencente às rotas A e B geradas pela primeira fase do algoritmo.

Para que o intervalo entre visitas desta localidade  $i$  seja satisfeito, pelo menos uma das restrições que se seguem terá que ser satisfeita (recorde-se que  $G_{ij}$  é uma variável binária que toma o valor 1 se a cor  $j$  for atribuída à rota  $i$ , e o valor zero caso contrário):

$$\begin{array}{lll} G_{A1} + G_{B4}=2, & G_{A1} + G_{B5}=2, & G_{A2} + G_{B5}=2, \\ G_{A4} + G_{B1}=2, & G_{A5} + G_{B1}=2, & G_{A5} + G_{B2}=2. \end{array} \quad (4.15)$$

Lendo da esquerda para a direita, o primeiro conjunto de restrições corresponde às duas possibilidades do padrão [1, 0, 0, 1, 0], que passamos a designar por padrão nº1, o segundo conjunto os dois formatos possíveis para o padrão [1, 0, 0, 0,1], que designaremos por padrão nº 2, e por fim, o padrão nº 3, [0, 1, 0, 0, 1].

Procedendo de modo análogo para os clientes com três visitas semanais, verifica-se que são sete os padrões admissíveis para as exigências de calendarização do caso em estudo. Seja *i* um local com três recolhas semanais pertencentes às rotas A, B e C geradas na primeira fase. Para a coloração do grafo gerar uma solução que obedeça ao intervalo entre visitas exigido, uma das 42 restrições terá que ser satisfeita.

Padrões admissíveis: [10101] Padrão nº 4	[10011] Padrão nº 5	[11010] Padrão nº 6
$G_{A1} + G_{B3} + G_{C5} = 3,$	$G_{A1} + G_{B4} + G_{C5} = 3,$	$G_{A1} + G_{B2} + G_{C4} = 3,$
$G_{A1} + G_{C3} + G_{B5} = 3,$	$G_{A1} + G_{C4} + G_{B5} = 3,$	$G_{A1} + G_{C2} + G_{B4} = 3,$
$G_{B1} + G_{A3} + G_{C5} = 3,$	$G_{B1} + G_{A4} + G_{C5} = 3,$	$G_{B1} + G_{A2} + G_{C4} = 3,$
$G_{B1} + G_{C3} + G_{A5} = 3,$	$G_{B1} + G_{C4} + G_{A5} = 3,$	$G_{B1} + G_{C2} + G_{A4} = 3,$
$G_{C1} + G_{A3} + G_{B5} = 3,$	$G_{C1} + G_{A4} + G_{B5} = 3,$	$G_{C1} + G_{A2} + G_{B4} = 3,$
$G_{C1} + G_{B3} + G_{A5} = 3,$	$G_{C1} + G_{B4} + G_{A5} = 3,$	$G_{C1} + G_{B2} + G_{A4} = 3,$

(4. 16)

[11001] Padrão nº 7	[10110] Padrão nº 8	[01011] Padrão nº 9	[01101] Padrão nº 10
$G_{A1} + G_{B2} + G_{C5} = 3,$	$G_{A1} + G_{B3} + G_{C4} = 3,$	$G_{A2} + G_{B4} + G_{C5} = 3,$	$G_{A2} + G_{B3} + G_{C5} = 3,$
$G_{A1} + G_{C2} + G_{B5} = 3,$	$G_{A1} + G_{C3} + G_{B4} = 3,$	$G_{A2} + G_{C4} + G_{B5} = 3,$	$G_{A2} + G_{C3} + G_{B5} = 3,$
$G_{B1} + G_{A2} + G_{C5} = 3,$	$G_{B1} + G_{A3} + G_{C4} = 3,$	$G_{B2} + G_{A4} + G_{C5} = 3,$	$G_{B2} + G_{A3} + G_{C5} = 3,$
$G_{B1} + G_{C2} + G_{A5} = 3,$	$G_{B1} + G_{C3} + G_{A4} = 3,$	$G_{B2} + G_{C4} + G_{A5} = 3,$	$G_{B2} + G_{C3} + G_{A5} = 3,$
$G_{C1} + G_{A2} + G_{B5} = 3,$	$G_{C1} + G_{A3} + G_{B4} = 3,$	$G_{C2} + G_{A4} + G_{B5} = 3,$	$G_{C2} + G_{A3} + G_{B5} = 3,$
$G_{C1} + G_{B2} + G_{A5} = 3,$	$G_{C1} + G_{B3} + G_{A4} = 3,$	$G_{C2} + G_{B4} + G_{A5} = 3,$	$G_{C2} + G_{B3} + G_{A5} = 3,$

Para cada padrão apresentado existem 6 formatos possíveis que é necessário contemplar.

Pode-se exigir que o problema de coloração produza uma solução com um número de cores igual ao período em estudo, com o número de vértices de cada cor o mais equilibrado possível e, em simultâneo:

- todos os pontos com duas visitas semanais verifiquem uma das 6 restrições referidas em (4.15);
- todos os pontos com três visitas semanais verifiquem uma das 42 restrições descritas em (4.16).

Se se fizer tal exigência, o mais provável é obter-se um problema com solução impossível. Então, como é desejável que durante a coloração se obtenha uma solução com um maior número de clientes com um padrão admissível, adiciona-se um conjunto de restrições que vise estes procedimentos, tendo por base a seguinte ideia: “cada ponto de visita ou obedece a um padrão admissível ou sofre uma penalização!”

*E de quanto deverá ser esta penalização? E como modelar esta “ideia” em PLI?*

A penalização a atribuir por incumprimento das restrições de calendarização poderia ser igual para todos os clientes a visitar, mas não se optou por essa medida por ser mais fácil reafectar um cliente que se localize próximo da origem ou destino das rotas do que um cliente geograficamente mais afastado. Assim, a penalização vai corresponder ao afastamento geográfico dos clientes relativamente à origem e ao destino. Sendo  $d_{iO_p}$  a distância do cliente  $i$  ao ponto de partida das rotas, e  $d_{iO_D}$  a distância do cliente  $i$  ao ponto de chegada das rotas, a penalização associada ao cliente  $i$ , será calculada através da expressão

$$\text{Pen}_i = \text{Max}(d_{iO_p}, d_{iO_D}) \quad (4.17)$$

Nas soluções encontradas na primeira fase podem-se encontrar pontos com igual número de visitas semanais num mesmo conjunto de rotas: por exemplo os locais de recolha bissemanal  $i$  e  $j$ , podem pertencer às rotas  $R_A$  e  $R_B$ , ( $R_A=[\dots i, \dots j, \dots]$ ,  $R_B=[\dots i, \dots j, \dots]$ ) sendo desnecessário duplicar o conjunto de restrições para a calendarização. Nestes casos, a penalização será dada pelo somatório das penalizações individuais de cada ponto. Deste modo, não só se incentiva que rotas com mais pontos em comum sejam coloridas de modo que o intervalo entre visitas sucessivas seja cumprido, como também diminuimos o número de restrições a acrescentar ao problema de coloração base. Torna-se então necessário identificar, não os pontos de frequência de visita 2 ou 3, mas sim as rotas que os contêm para

o cálculo das penalizações e formulações das restrições. Sejam, respectivamente, D e T os conjuntos que contemplam as rotas sujeitas às restrições de calendarização com pontos de frequência de visita igual a dois e três. A cada elemento deste conjunto está associada uma penalização.

$$D = \{(A, B) : A \in V \wedge B \in V \wedge i \in A \wedge i \in B \wedge \text{per}(i) = 2\}, \quad (4.18)$$

$$T = \{(A, B, C) : i \in A \wedge i \in B \wedge i \in C \wedge \text{per}(i) = 3\} \quad (4.19)$$

Todo o elemento de D é um par de rotas (A,B) com pelo menos um ponto de visita comum de frequência igual a 2, ao qual vai estar associado uma penalização dada pela expressão (4.20).

$$SPen = \sum_{i \in A \wedge i \in B} Pen_i \quad (4.20)$$

Analogamente, os elementos de T são trios de rotas (A, B, C) com algum ponto em comum, com uma penalização dada pela expressão (4.21).

$$SPen = \sum_{i \in A \wedge i \in B \wedge i \in C} Pen_i \quad (4.21)$$

Adicionam-se à função objectivo do problema de coloração equilibrado parcelas que permitem penalizar a função objectivo quando o intervalo entre visitas não é cumprido. Seja o conjunto de variáveis binárias,

$$P_{L\_F} = \begin{cases} 0, & \text{se o padrão número } L \text{ for aplicado no formato número } F \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função objectivo passa a ser expressa pela forma:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^n C_j + M \sum_{i \in V} G_{in} + f + \sum_{h \in D} \sum_{F=1}^2 \sum_{L=1}^3 SPen_h P_{L\_F} + \sum_{h \in T} \sum_{F=1}^6 \sum_{L=4}^{10} SPen_h P_{L\_F} \quad (4.22)$$

A formulação de um modelo de programação linear não contém restrições disjuntas, sendo necessário proceder a alguns artifícios de modelação de modo a que as mesmas sejam contempladas. Para cada par de rotas (A, B) pertencente a D, e para cada restrição apontada

em (4.15) ou se pretende que a restrição seja contemplada ou que a variável binária correspondente  $P_{L\_F}$  tome o valor 1, para ser activada a penalização. Por exemplo;

$$G_{A1} + G_{B4} = 2 \quad \text{ou} \quad P_{1\_1} = 1$$

Devido à natureza do problema e das variáveis em análise, tal é equivalente a ter-se

$$G_{A1} + G_{B4} \geq 2 \quad \text{ou} \quad P_{1\_1} \geq 1,$$

podendo ser transformadas na conjunção das restrições

$$G_{A1} + G_{B4} + MY_{1\_1} \geq 2 \quad \text{e} \quad P_{1\_1} + (1 - Y_{1\_1}) M \geq 1,$$

onde  $M$  é um valor arbitrariamente grande e  $Y_{1\_1}$  uma variável binária. Generalizando, às restrições (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) e (4.13) do problema de coloração equilibrado são acrescentadas as restrições:

$$G_{ij_1} + G_{kj_2} + MY_{L\_F} \geq 2, \quad \forall i, k \in D; L=1,2,3; F=1,2; j_1, j_2 \in B \quad (4.23)$$

$$P_{L\_F} + (1 - Y_{L\_F}) M \geq 1, \quad L=1,2,3; F=1,2, \quad (4.24)$$

$$G_{ij_1} + G_{kj_2} + G_{wj_3} + MY_{L\_F} \geq 3, \quad \forall i, k, w \in T; L=4, \dots, 10; F=1, \dots, 6; \quad (4.25)$$

$$j_1, j_2, j_3 \in B$$

$$P_{L\_F} + (1 - Y_{L\_F}) M \geq 1, \quad L=4, \dots, 10; F=1, \dots, 6 \quad (4.26)$$

$$Y_{L\_F} \in \{0, 1\}, \quad L=1, \dots, 10; \quad (4.27)$$

$$F=1,2 \text{ se } L \in \{1, 2, 3\};$$

$$F=1, \dots, 6 \text{ se } L \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

$$P_{L\_F} \in \{0, 1\}, \quad L=1, \dots, 10; \quad (4.28)$$

$$F=1,2 \text{ se } L \in \{1, 2, 3\};$$

$$F=1, \dots, 6 \text{ se } L \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

sendo  $B$  é o conjunto de cores possíveis do padrão  $L$  no formato número  $F$ .



Por ser um problema muito complexo, existem muitos teoremas na teoria de grafos que permitem limitar, inferior e superiormente, o número cromático. Um desses teoremas refere que a existência de um subgrafo com  $W$  vértices mutuamente adjacentes (completo) implica  $\chi(G) \geq W$ . O grafo do *exemplo 1* é completo, logo o número mínimo de cores é 7 (= nº de vértices).

Apesar da fase de transição diminuir o número total de arestas, é possível que mesmo assim o grafo gerado contenha subgrafos com um conjunto de vértices completos com elementos em número superior ao comprimento do período, impossibilitando uma coloração com um número de cores igual inferior ou igual ao horizonte temporal. Para o caso em estudo, basta existir um subgrafo com 7 vértices completo para impossibilitar a coloração com 6 cores. Se tal acontecer, relaxa-se o problema de coloração de grafos ignorando as arestas “fracas”, isto é, ignoram-se as arestas entre rotas cuja sua existência dependa de um único cliente em comum.

### 4.2.3 Admissibilidade da solução obtida após coloração do grafo

Esta etapa visa tornar admissível a solução obtida na primeira fase do algoritmo que foi sujeita a uma coloração, formando grupos de rotas compatíveis. Interessa nesta fase verificar se a solução anterior verifica os intervalos entre recolhas sucessivas referidos na secção anterior e, em caso negativo, estabelecer um mecanismo de trocas de modo a que tais condições sejam verificadas. Nesta secção serão descritos diferentes procedimentos, tendo sempre por base o caso em estudo de recolha de resíduos sólidos, sendo desenvolvidos procedimentos análogos nos exemplos da literatura.

Após a coloração, e no caso de ter sido necessário recorrer ao problema de coloração relaxado, existe a necessidade de analisar as consequências da relaxação do problema. A solução encontrada é provavelmente uma solução inadmissível para o problema inicial. Os clientes causadores dessa inadmissibilidade terão que ser afectos a rotas de diferente cor. A título de exemplo, considerem-se  $R_{k1}$  e  $R_{k2}$  duas rotas tais que existe um e um só cliente  $i$  com visita nas duas rotas ( $i \in R_{k1}$  e  $i \in R_{k2}$ ). Ao resolver o problema de coloração relaxado é possível que  $R_{k1}$  e  $R_{k2}$  sejam coloridas com mesma cor pois no problema relaxado não existe conflito entre as duas rotas. Terá que ser solucionado este problema, isto é, o cliente  $i$  terá que sair de

uma das rotas e ser afectado a uma rota de cor diferente. Note-se que entre estas duas rotas, no máximo, só existirá um cliente nestas condições, pois são as implicações da relaxação (que consistiu em ignorar todas as aresta fracas). Perante uma situação deste tipo é necessário ter em atenção a frequência de visita do cliente  $i$ . No caso de estudo, a frequência de visita de qualquer localidade  $i$  pode ser seis, três ou dois:

- a) Se frequência de  $i$  é igual a seis, existirão, além de  $R_{k1}$  e  $R_{k2}$ , 4 rotas de cor diferente (sejam cor B, C, D e E) que contêm  $i$ , logo só resta uma cor onde  $i$  não pertence - cor F. Retira-se o cliente  $i$  de  $R_{k1}$  ou de  $R_{k2}$ , e afecta-se a uma rota de cor F;
- b) Se a frequência de  $i$  é três, existe, além de  $R_{k1}$  e  $R_{k2}$ , uma rota de cor diferente (seja B) que contém  $i$ , logo  $i$  pode ser afecto a qualquer rota de cor C, D, E ou F;
- c) Se  $i$  tem duas visitas semanais,  $i$  pode ser afecto a qualquer rota que não tenha cor A.

Põem-se desde já algumas questões: *Relativamente à situação a), o que é que é melhor; tirar  $i$  de  $R_{k1}$  ou de  $R_{k2}$ ? E depois, em qual das rotas de cor F é que se vai inserir o cliente  $i$ ?*

Questões deste género também se põem nas outras situações. Por exemplo: *Na situação c) tendo várias cores onde se pode inserir o cliente, qual delas a melhor? E depois insere-se o cliente em que rota?*

Além deste tipo de questões que surgem da relaxação do problema de coloração das rotas, existe um outro conjunto de problemas que advêm da coloração poder eventualmente ser feita sem que todas as restrições de calendarização sejam cumpridas. As restrições relativas ao intervalo exigido entre visitas sucessivas podem não ser todas cumpridas após coloração pois a formulação do problema de coloração não impõe que sejam satisfeitas todas as calendarizações.

Para fazer face a este conjunto de problemas, desenvolveram-se dois mecanismos de trocas distintos e alternativos:

- Um dos mecanismos tenta solucionar o problema recorrendo a uma redistribuição dos pontos de visita baseando-se na proximidade dos pontos. Após definida a calendarização de todos os locais de visita, é resolvido, para todos os dias do período um VRP recorrendo ao ACO desenvolvido na primeira fase.

O método passa por identificar os pontos onde há problemas, e para estes pontos, e só para estes, definir critérios de actuação para redistribuir as visitas. Na definição dos

critérios para atribuição de novos códigos há que abordar a natureza dos problemas: se a natureza do problema está na relaxação ou a calendarização.

Caso se esteja perante um problema que surge da relaxação das rotas, nos códigos referentes à calendarização, vai existir uma visita em falta pois há repetição da visita num dos dias. Por exemplo, um ponto com duas visitas semanais pode aparecer com uma calendarização definida por (1,0,0,0,0,0) isto é, visita à segunda-feira, faltando a calendarização do outro dia de recolha. A resolução deste tipo de situações passa por redefinir os códigos da calendarização:

- Se o ponto de visita tem 6 visitas semanais, a visita é diária, logo basta inserir a visita ao dia em falta, ficando a referência destes clientes com a forma (1, 1, 1, 1, 1, 1),
- Se os pontos de recolha têm frequência de visita semanal igual a três ou dois, no código aparece apenas com duas ou uma visita, respectivamente. Mantêm-se as existentes e, dentro dos vizinhos mais próximos que não têm problemas, encontra-se um com igual frequência de visita. Se este vizinho tem recolha nos dias do cliente em causa, o código será igual ao do vizinho; caso contrário, encontraremos um dia em que o vizinho proceda à recolha, não coincidente com os já existentes do cliente com problemas, que satisfaça os intervalos necessários entre recolhas sucessivas.

Se o problema que surge devido ao incumprimento das restrições de calendarização, só se pode estar perante pontos com frequência de visita igual a três e dois.

- Os locais com duas visitas são os de mais fácil resolução, mas também os causadores de maiores problemas. As combinações de visita possíveis para estes clientes são 3 pois deverão ter pelo menos dois dias de intervalo entre recolhas: (1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1, 0).

A resolução dos problemas desta natureza vai causar necessariamente um desequilíbrio no esforço laboral entre os dias da semana, pois a quarta-feira será sempre eliminada da recolha dos clientes com frequência de visita igual a dois, em detrimento dos outros, especialmente da segunda e sexta-feira.

Os clientes com menor número de recolhas semanais correspondem a localidades com menor população que, na maior parte dos casos, coincidem com as localidades mais afastadas da zona urbana. Este aspecto faz com que, para

determinadas áreas, a recolha tenha que ser toda efectuada nos mesmos dias. Assim, a resolução de um problema que surja para localidades com duas visitas passa por procurar o vizinho mais próximo que não tenha qualquer tipo de problemas. Se o número de visitas do vizinho for igual dois, faz-se coincidir os dias de recolhas. Se o ponto vizinho seleccionado tiver três visitas, coincidirão o primeiro e o último dia de recolha semanal; se tiver seis visitas, que dificilmente acontecerá, dentro das três possibilidades será seleccionada aquela que menos desequilibrará o esforço laboral diário.

O esforço laboral será medido pelo número de contentores recolhidos em cada dia de semana. Claro que o verdadeiro esforço não se medirá apenas por este factor mas, para o objectivo em causa, o número de contentores é um bom indicador.

- Nos locais com três recolhas semanais existem problemas se as três visitas são em dias consecutivos, pois para se conseguir a admissibilidade nestes pontos, basta que duas das três visitas não sejam em dias consecutivos. O ideal seria entre cada recolha haver um dia de intervalo, isto é, proceder à colecta na segunda-feira, quarta-feira e sexta-feira, só que tal é impossível devido às limitações de recursos e ao equilíbrio laboral pretendido.

Das três visitas consecutivas retira-se a que está associadas ao dia de maior esforço laboral e tenta-se afectá-la a outro dia coincidente com a do vizinho mais próximo mas também, se possível, não sobrecarregado os dias de maior esforço laboral e evitando a visita ao fim-de-semana.

No caso de existirem problemas de calendarização num ponto com três visitas e adicionalmente este ter uma das visitas ao domingo, igualam-se as visitas à do vizinho seleccionado sem visita ao domingo.

Uma vez definido a calendário de visita de todas as localidades determinam-se rotas a seguir em cada dia da semana. Trata-se de resolução de VRP clássicos, um para cada dia. Dado o bom desempenho do modelo ACO desenvolvido na primeira fase do algoritmo, vai-se aplicá-lo à resolução dos VRP's: o modelo é exactamente o mesmo, só que agora não existe replicação dos clientes, todos os clientes têm frequência de visita igual a um.

- Um segundo mecanismo, que funciona em alternativa ao anterior, tenta combinar as diferentes possibilidades de calendarização dos clientes com problemas, escolhendo a combinação mais vantajosa. Quando o número de padrões admissíveis e o número de clientes com problemas são muito pequenos, este procedimento não envolve grandes dificuldades pois o número de combinações não é muito grande. Contudo, para 5 ou 6 clientes com problemas de calendarização já é enorme o número de combinações possíveis, sendo impensável testar todas as combinações, tornando-se necessário proceder à definição de alguns critérios de selecção. Por exemplo, os clientes com 3 visitas semanais têm 7 padrões admissíveis. A existência de cinco localidades de visita trissemanal com problemas na calendarização implica o teste  $7^5 = 16807$  diferentes situações, o que em termos práticos é incomportável se se pensar em tempos computacionais.

O procedimento parte de uma solução com calendarização admissível para todos os pontos de visita, avaliando o valor da função objectivo dessa solução. Posteriormente, avalia-se a troca de padrões em apenas dois clientes, avaliando todos os pares de clientes envolvidos em problemas de calendarização, efectuando a troca que maior benefício traz para a função objectivo. Nesta avaliação são resolvidos os VRP para os dias envolvidos afectados pela mudança de padrão e actualizada a solução final. Iterativamente este processo de avaliação de mudanças de padrão em dois clientes é accionado até não se encontrarem quaisquer melhorias para a solução encontrada.



---

## Capítulo 5

### Experimentação Computacional: modelo de duas fases

---

Neste capítulo apresentam-se e analisam-se os resultados computacionais do modelo de duas fases (apresentado no Capítulo 4) proposto para a resolução de problemas periódicos de rotas. Na primeira fase do modelo é aplicado um algoritmo de optimização de colónias de formigas para elaboração de um plano semanal de rotas. Na segunda fase recorre-se a um problema de coloração de grafos para afectação das rotas construídas na primeira fase aos diferentes dias da semana.

As análises apresentadas neste capítulo têm como objectivo ilustrar o desempenho do algoritmo proposto e justificar algumas características que o diferenciam dos modelos existentes na literatura. São comparadas diferentes formulações e respectivas parametrizações, ilustrando o bom desempenho do modelo face às propostas inovadoras incorporadas no algoritmo. Neste sentido, o modelo é aplicado não só ao caso de estudo apresentado no Capítulo 2, como também a problemas de teste que se encontram na literatura de PVRP.

Inicia-se o capítulo com uma análise técnica da primeira fase do algoritmo, apresentando diferentes alternativas ao modelo proposto e comparando resultados que permitem validar a opção do modelo apresentado.

Na secção 5.2 são apresentadas as conclusões sobre a análise de desempenho da primeira fase do modelo, seguindo-se uma análise da segunda fase do modelo. Por fim, na secção 5.4, são apresentados os resultados do modelo proposto quando aplicado ao caso de estudo.

## 5.1 Análise técnica da primeira fase do algoritmo

Nesta secção são comparadas algumas configurações alternativas para o algoritmo da primeira fase, justificando as opções adoptadas: começa-se por tentar perceber o efeito de diferentes escolhas para a visibilidade ( $\eta_{ij}$ ) na expressão de distribuição de probabilidade (equação 4.2). Segue-se um estudo que mostra a importância de uma boa gestão da feromona e uma análise aos parâmetros envolvidos no processo de actualização da feromona. Posteriormente são comparados dois tipos de construção de rotas – construção sequencial versus construção em paralelo – na geração de soluções, justificando a escolha da ligação em paralelo em detrimento da sequencial. Por fim, são demonstrados os efeitos (positivos) da optimização local durante a pesquisa e das estratégias de intensificação e diversificação.

### 5.1.1 Diferentes escolhas para $\eta_{ij}$ - a visibilidade

No modelo apresentado a construção das rotas está sujeita a uma selecção probabilística dos clientes de acordo com a distribuição de probabilidade definida no Capítulo 4 através da expressão:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]} & \text{se } j \in \Omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A expressão da distribuição de probabilidade apresenta duas medidas associadas a cada ligação: a visibilidade ( $\eta_{ij}$ ) e a feromona ( $\tau_{ij}$ ). A visibilidade é a componente heurística que interfere na escolha dos clientes. Normalmente esta componente incentiva a ligação de clientes visíveis, isto é, próximos, pressupondo que assim se obtêm soluções de qualidade.

Dorigo e Gambardella (1996) sugerem usar  $\eta_{ij} = 1/d_{ij}$ , onde  $d_{ij}$  é a distância do cliente  $i$  ao cliente  $j$ . Doerner et al. (2002) sugerem usar a poupança resultante da ligação entre dois pontos,  $\eta_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - d_{ij}$  ou alternativamente a poupança paramétrica  $\eta_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - g d_{ij} + f |d_{i0} - d_{0j}|$  onde  $g$  e  $f$  são dois parâmetros (Bullnheimer et al. (1999a)). Também Bullnheimer et al. (1999b) propõem combinar a distância entre clientes, a



poupança e a capacidade de utilização dos veículos, recorrendo a três parâmetros que determinam a influência dos três factores.

Para decidir sobre os factores a incluir na expressão da visibilidade procedeu-se à simulação de diferentes cenários na tentativa de encontrar o que melhor se ajustava ao problema em estudo pois se, por um lado umas expressões parecem demasiado simplistas, outras, por recorrerem a parâmetros, tornam-se de mais difícil aplicação. Foi estudado o comportamento das seguintes alternativas:

- a)  $\eta_{ij} = (1/d_{ij})^{\beta_1} \times (s_{ij})^{\beta_2}$  sendo  $s_{ij}$  a poupança definida por Clarke e Wright (1964) e  $\beta_1$  e  $\beta_2$  parâmetros que tomam o valor 0 ou 1. Quando  $\beta_1=0$  e  $\beta_2=1$ , anula-se o efeito de  $(1/d_{ij})$  ficando-se apenas sob o efeito da poupança; analogamente, para  $\beta_1=1$  e  $\beta_2=0$ , o único factor interveniente é a distância entre clientes.
- b)  $\eta_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - gd_{ij} + f |d_{i0} - d_{0j}|$ , isto é, recorre-se ao conceito de poupança paramétrica apresentado por Paessens (1988). À poupança paramétrica está associado o inconveniente da existência de dois parâmetros que é necessário testar e calibrar. O autor propõe algumas combinações dos parâmetros  $f$  e  $g$ , entre elas  $(g, f) = (1.0, 0.1), (1.0, 0.5), (1.4, 0.0), (1.4, 0.5)$ .

Nesta análise e em outros estudos que à frente se apresentam, optou-se não só por trabalhar com o problema em estudo, como também com os problemas de maior dimensão descritos na literatura de PVRP, uma vez que o modelo proposto é desenvolvido sempre na óptica de resolução de problemas de grande dimensão. Os problemas da literatura seleccionados, descritos no Anexo B, variam entre a visita de 100 a 417 clientes, com horizontes temporais entre 4 a 7 dias. Na prática, devido às réplicas criadas, estes problemas terão dimensões que variam de 174 a 457 clientes a visitar por período.

A Tabela 5.1 apresenta alguns resultados da avaliação das diferentes expressões da visibilidade. Para um grupo de 8 problemas distintos são registados os resultados após 500 iterações do modelo descrito no capítulo anterior, modificando apenas a expressão da visibilidade. São testados os diferentes parâmetros de actualização da feromona ( $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\delta$ ) e

apenas registado o valor da solução correspondente à melhor combinação. Na coluna referente à poupança paramétrica, apresentam-se os melhores resultados das combinações dos parâmetros  $(\rho, \omega, \delta)$  com os parâmetros  $f$  e  $g$  pela ordem:  $(g, f) = (1.0, 0.1), (1.0, 0.5), (1.4, 0.0), (1.4, 0.5)$ .

As primeiras colunas da Tabela 5.1 apresentam algumas características dos problemas de teste usados neste capítulo: a primeira coluna indica o número com que o problema é identificado na literatura; a segunda o número de clientes a visitar ( $n$ ); a terceira o número de pontos a visitar durante o período em estudo ( $N$ ); a quarta o horizonte temporal ( $t$ ); a quinta o número de veículos disponíveis ( $m$ ); e por fim, na coluna 6, a capacidade dos veículos ( $Q$ ).

Características Gerais						ACO – 1ª fase			
Prob. n°	n	N	t	m	Q	$\eta_{ij} = (1/d_{ij})^{\beta_1} \times (s_{ij})^{\beta_2}$			Poupança paramétrica
						$\beta_1=1$ $\beta_2=1$	$\beta_1=0$ $\beta_2=1$	$\beta_1=1$ $\beta_2=0$	
8	100	202	5	5	200	2045	2052	2051	2045; 2050; 2050; 2050
10	100	174	5	4	200	1580	1591	1602	1604; 1601; 1603; 1590
13	417	457	7	9	2000	3676	3693	3680	3704; 3695; 3690; 3682
19	112	208	4	4	40	4822	4824	4817	4810; 4819; 4828; 4846
20	184	336	4	4	60	8367	8367	8367	8367; 8367; 8367; 8367
23	168	312	4	6	40	6584	6627	6606	6650; 6631; 6620; 6646
30	153	270	6	9	20	75570	75437	75451	75389; 75630; 75567; 75587
Caso de estudo	202	610	6	22	T<270 minutos	1929 km	1946	1951	1954; 1957; 1951; 1953

**Tabela 5. 1:** O efeito de diferentes “visibilidades”

Ao analisar os resultados dos diferentes cenários observa-se que, quando se combina a poupança com a proximidade entre pontos ( $\beta_1=1$  e  $\beta_2=1$ ), obtêm-se, de um modo geral, resultados de melhor qualidade do que quando um dos parâmetros anula o efeito do componente que lhe está associado. Adicionalmente, as experiências com a poupança paramétrica não se revelaram tão promissoras como inicialmente se esperava, tendo-se registado resultados ligeiramente melhores em apenas duas situações.

Deste modo, no modelo apresentado a visibilidade combina a proximidade entre clientes (através da expressão  $1/d_{ij}$ ) com a posição relativa entre os pontos de recolha e o depósito (através do conceito de poupança clássica), isto é,  $\eta_{ij} = (1/d_{ij}) \times (s_{ij})$ . Esta combinação é de extrema simplicidade de aplicação pois não recorre ao uso de qualquer parâmetro. Se se pretender dar diferentes realces às duas componentes da visibilidade, pode-se associar, a cada uma, um parâmetro que determina a influência relativa de cada uma delas, ficando a expressão com a forma  $\eta_{ij} = (1/d_{ij})^{\beta_1} \times (s_{ij})^{\beta_2}$ , onde  $\beta_1$  e  $\beta_2$  determinam a importância relativa de cada uma das componentes.

Por se constatar que  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = 1$  conduzem a bons resultados, adoptamos como modelo  $\eta_{ij} = (1/d_{ij}) \times (s_{ij})$ , evitando o recurso a 2 parâmetros adicionais.

### 5.1.2 A feromona global - $\tau_{ij}$

A feromona ( $\tau_{ij}$ ) é uma componente dinâmica interveniente na selecção probabilística dos clientes que possui a informação de quanto é, ou não, vantajosa a ligação (i, j) para todo o par de pontos  $i$  e  $j$  a visitar. É um dos principais factores responsáveis pela orientação do processo que, em conjugação com a visibilidade, vai permitir a construção de novas soluções.

Nesta secção é feito um estudo dos parâmetros responsáveis pela gestão da feromona e ilustrado o interesse e utilidade da presença da feromona nos ACO.

O ACO proposto possui algumas diferenças relativamente aos modelos da literatura. Entre elas, destacam-se nesta secção a existência de uma só formiga por iteração e um inovador processo de actualização da feromona. Na secção 5.1.2.4 são ilustradas as vantagens destes procedimentos que se podem traduzir por uma maior rapidez na obtenção de bons resultados, com reflexos na diminuição do esforço computacional.

### 5.1.2.1 Os parâmetros: $\rho$ , $\omega$ , $\delta$

A expressão de actualização da feromona (equação 4.4 do Capítulo 4),  $\tau_{ij}(t+1) = \rho\tau(t)_{ij} + \Delta\tau_{ij} + \Delta\tau_{ij}^*$ , contém três parâmetros, um por parcela:

- O parâmetro da primeira parcela,  $\rho$ , refere-se à **evaporação**. A evaporação quantifica a quantidade de informação perdida entre iterações, através de uma atenuação de todos os valores da matriz de feromona. Na literatura encontram-se sugestões de valores como  $\rho=0.75$ ,  $0.9$  e  $0.95$ . Nas experiências efectuadas obtiveram-se bons resultados para  $\rho=0.9$  e  $0.7$ .
- A segunda parcela da expressão de actualização da feromona realça todos os arcos pertencentes à solução corrente, cujo valor da função objectivo é igual a  $L_i$ . A quantidade de feromona adicionada aos arcos da solução corrente é directamente proporcional à qualidade da solução obtida, e igual a  $\Delta\tau_{ij} = \omega^{100.(L_i-L^*)/L^*}$ . O expoente  $(100.(L_i-L^*)/L^*)$ , reflecte a percentagem de variação entre a solução da iteração corrente e a melhor solução encontrada durante todo o processo iterativo (com valor da função objectivo igual a  $L^*$ ).

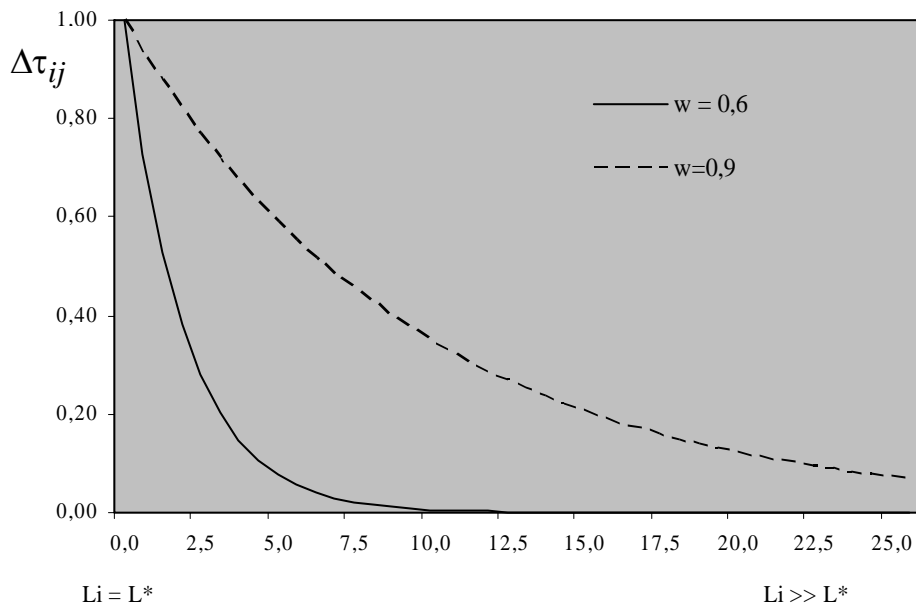
O **parâmetro**  $\omega$  é tal que  $0 < \omega < 1$ . Quanto maior for  $\omega$ , maior é a intensidade de feromona a aplicar para uma mesma variação. Se a solução encontrada é de pior qualidade que  $L^*$ , o reforço será um valor entre zero e um, enquanto que se  $L_i < L^*$ , a intensidade libertada será um valor superior a um.

Com valores de  $\omega$  elevados, isto é, próximos de 1, permite-se que soluções menos boas sejam realçadas. Por outro lado, para valores de  $\omega$  pequenos, a segunda parcela não tem qualquer efeito quando a solução encontrada é de fraca qualidade, podendo induzir à estagnação do algoritmo. O exemplo da Tabela 5.2 e o seu gráfico representativo (Figura 5. 1) ilustram os valores de  $\Delta\tau_{ij}$  para diferentes valores de  $\omega$ .

No entanto,  $\omega$  não actua isoladamente pois o valor do parâmetro  $\delta$  da terceira parcela também influenciará o caminho a seguir.

$L_i$	$\frac{(L_i - L^*)}{L^*} \times 100$	$\frac{(L_i - L^*)}{L^*} \times 100$	
		$\omega$	$\omega$
		<b><math>\omega = 0.6</math></b>	<b><math>\omega = 0.9</math></b>
20	0.0	1.0000	1.0000
20.25	1.3	0.5281	0.8766
20.75	3.8	0.1473	0.6736
21.25	6.3	0.0411	0.5176
21.75	8.8	0.0115	0.3978
22.25	11.3	0.0032	0.3057
22.75	13.8	0.0009	0.2349
23.25	16.3	0.0002	0.1805
23.75	18.8	0.0001	0.1387
24.25	21.3	0.0000	0.1066
24.75	23.8	0.0000	0.0819
25.25	26.3	0.0000	0.0629

**Tabela 5. 2:** Exemplo do efeito do parâmetro  $\omega$  na expressão de actualização da feromona



**Figura 5. 1:** Visualização gráfica do efeito do parâmetro  $\omega$

- Na terceira parcela são realçados os arcos pertencentes à melhor solução até então encontrada de uma quantidade igual a  $\Delta\tau_{ij}^* = \delta$ , onde  $\delta \in \{1,2,3,4,5\}$ .

É necessário encontrar um bom compromisso entre os diferentes parâmetros intervenientes na actualização da feromona.

Nos exemplos explorados aplicou-se  $\omega=0.6, 0.7, 0.8$  e  $0.9$ , tendo-se revelado mais promissoras as soluções com  $\omega=0.8$ .

A combinação dos parâmetros  $\rho$ ,  $\omega$  e  $\delta$  é importante, uma vez que incentiva a pesquisa em direcções diferentes, mas não é determinante pois, de um modo geral, qualquer combinação dos parâmetros entre os valores sugeridos conduz a bons resultados. Na Tabela 5. 3 apresentam-se os melhores e os piores valores da solução de alguns problemas quando testados exhaustivamente os parâmetros  $\delta$  e  $\omega$  ( $\delta \in \{1,2,3,4,5\}$  e  $\omega=0.6, 0.7, 0.8$  e  $0.9$ ) para diferentes taxas de evaporação.

<i>Prob. n°</i>	n	N	$\rho = 0.9$		$\rho = 0.8$		$\rho = 0.7$	
			Valores da função objectivo					
			melhor	pior	melhor	pior	melhor	pior
8	100	202	2047	2089	2045	2091	2048	2091
10	100	174	1580	1634	1597	1640	1604	1644
13	417	457	3717	3792	3676	3951	3689	3794
19	112	208	4831	4846	4846	4846	4822	4846
20	184	336	8367	8479	8367	8505	8378	8490
23	168	312	6628	6743	6612	6748	6584	6752
30	153	270	75870	80051	75650	76567	75570	76969
Caso estudo	202	610	1929	1980	1932	1991	1950	2000

**Tabela 5. 3:** Teste aos parâmetros  $\omega$ ,  $\delta$  e  $\rho$

Como se constata na Tabela 5. 3, e apesar de encontrados por “caminhos” diferentes, os valores da função objectivo das soluções finais não são muito distintos, concluindo-se que a variabilidade das soluções é muito pequena. Daí a referência de que, embora  $\rho$ ,  $\omega$  e  $\delta$  sejam parâmetros importantes no modelo, não são determinantes na medida em que, para se obterem boas soluções, não haverá necessidade de se testarem exhaustivamente.

### 5.1.2.2 A gestão da feromona global: o parâmetro $\alpha$

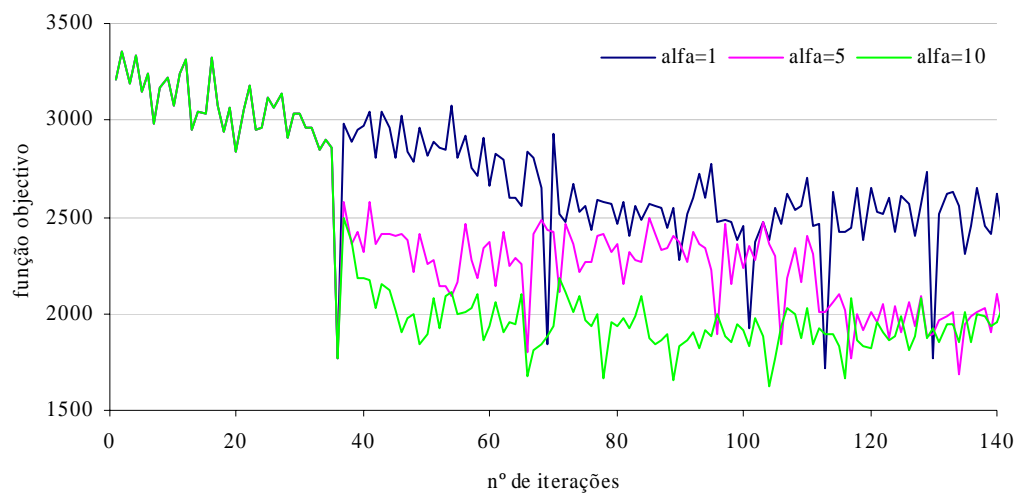
A expressão de probabilidade representada na equação (4.2) apresenta o parâmetro  $\alpha$  que reflecte a importância relativa da feromona global. Na literatura, por vezes aparece um outro parâmetro,  $\beta$ , que vem associado à visibilidade. Nestes casos os autores sugerem variar entre  $\alpha=1, \beta=1$ ;  $\alpha=1$  e  $\beta = 5$  e também  $\alpha=5$  e  $\beta=5$ . No modelo proposto considera-se  $\alpha=1$  e  $\beta=1$ , embora uma alteração do valor de  $\alpha$  durante o algoritmo possa ser benéfico, como se analisa no parágrafo seguinte.

Inicialmente a feromona global, conjuntamente com a visibilidade, contribuiu para construção da rota de modo aleatório, segundo uma distribuição de probabilidade. Após execução do algoritmo de pesquisa local – *fusão e trocas-entre-rotas* – e com o intuito incentivar ligações que se revelarem promissoras através da pesquisa local, adiciona-se uma constante às poupanças calculadas, evitando a presença de poupanças nulas e permitindo ligações que, embora tenham poupança nula, possam ser vantajosas

Um outro meio para incentivar ligações que se revelem vantajosas depois da pós-optimização consiste em reforçar a feromona, aumentando o valor do parâmetro  $\alpha$  na expressão 4.2. A Figura 5.2 ilustra a evolução da função objectivo numa situação em que as soluções iniciais são de baixa qualidade. A alteração do valor de  $\alpha$  após a primeira ocorrência do processo de pós-optimização (iteração onde a solução apresenta valores de maior qualidade, visíveis no gráfico da Figura 5.2 na iteração número 35) conduz rapidamente a pesquisa para soluções de qualidade. Este efeito é bem visível se for fraca a qualidade das soluções encontradas antes do processo de pós-optimização.

Facilmente se depreende que, quanto maior for o valor de  $\alpha$ , maior é o salto qualitativo das soluções futuras. Este salto é notório após o primeiro procedimento de pós-optimização que envolve troca de nós entre rotas, não sendo tão visível em aplicações posteriores em que as soluções já são de qualidade superior.

Nos casos estudados houve sempre uma boa evolução das soluções, não sendo necessário recorrer ao reforço da feromona por modificação do valor do parâmetro  $\alpha$  uma vez que os mecanismos inerentes ao próprio algoritmo se revelaram suficientes.



**Figura 5. 2:** A importância do parâmetro  $\alpha$

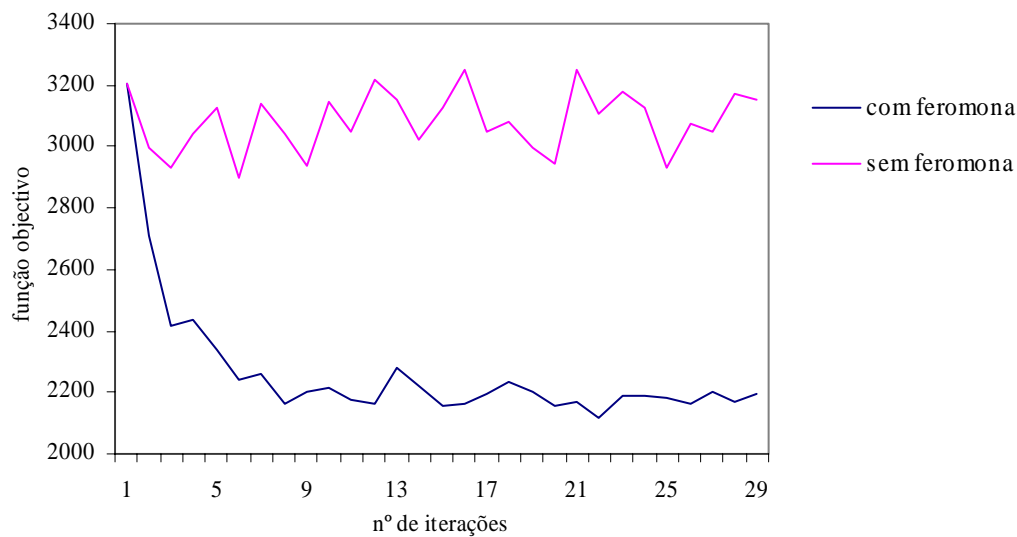
Diminuir a aleatoriedade na selecção das ligações entre clientes que constituem as rotas também foi uma hipótese que se nos afigurou potencialmente interessante explorar: em alternativa à selecção dos clientes 100% aleatória, seleccionam-se probabilisticamente de acordo com a expressão de probabilidade da equação (4.2) com uma probabilidade  $q$ , e deterministicamente com uma probabilidade  $(1-q)$ . A selecção determinística incide no cliente de maior probabilidade, ou seja, aquele com maior numerador da expressão de probabilidade apresentada na equação (4.2). Não se optou por este procedimento pois, apesar dos resultados obtidos serem semelhantes aos do modelo proposto, têm a desvantagem de introduzir mais um parâmetro no modelo – o parâmetro  $q$ .

### 5.1.2.3 A importância da feromona global

No início do processo iterativo ACO, como a feromona é igual em todas as ligações ( $i, j$ ) quaisquer que sejam os clientes  $i$  e  $j$ , a selecção de um cliente a inserir numa rota depende apenas probabilisticamente da poupança e da distância entre clientes. No decorrer do processo, algumas ligações vão ser realçadas através sucessivas actualizações da feromona, aumentando a participação da feromona na selecção dos clientes. Um aspecto interessante é perceber a importância da presença feromona na qualidade da solução. Comparou-se a evolução do algoritmo com e sem feromona (ver Figura 5. 3), sendo notória a influência



positiva da feromona neste tipo de algoritmos pois é através dela que se vai memorizando o passado.



**Figura 5. 3:** O efeito da feromona no algoritmo

#### 5.1.2.4 Validação da feromona global apresentada

Nesta secção pretende-se ilustrar o desempenho do procedimento de libertação de feromona apresentado nesta dissertação e o efeito da geração de apenas uma única formiga por iteração. Neste sentido, confronta-se o modelo desenvolvido com um modelo acreditado da literatura desenvolvido por Bullnheimer et al. (1999c).

Neste modelo proposto por Bullnheimer et al. (1999c), em cada iteração criam-se  $m$  formigas. A melhor solução é sempre utilizada na actualização da feromona, assim como as  $\sigma-1$  melhores soluções da última iteração. A actualização da feromona é representada pela expressão

$$\tau_{ij}(t+1) = \rho\tau(t)_{ij} + \sum_{\mu=1}^{\sigma-1} \Delta\tau_{ij}^{\mu} + \sigma\Delta\tau_{ij}^* \quad (5.1)$$

A primeira parcela refere-se à quantidade de informação perdida por evaporação, a segunda à actualização dos arcos pertencentes às soluções das  $\sigma-1$  melhores formigas da iteração através de uma quantidade  $\Delta\tau_{ij}^{\mu} = (\sigma - \mu)/L_{\mu}$  e, por último, são realçados todos os arcos

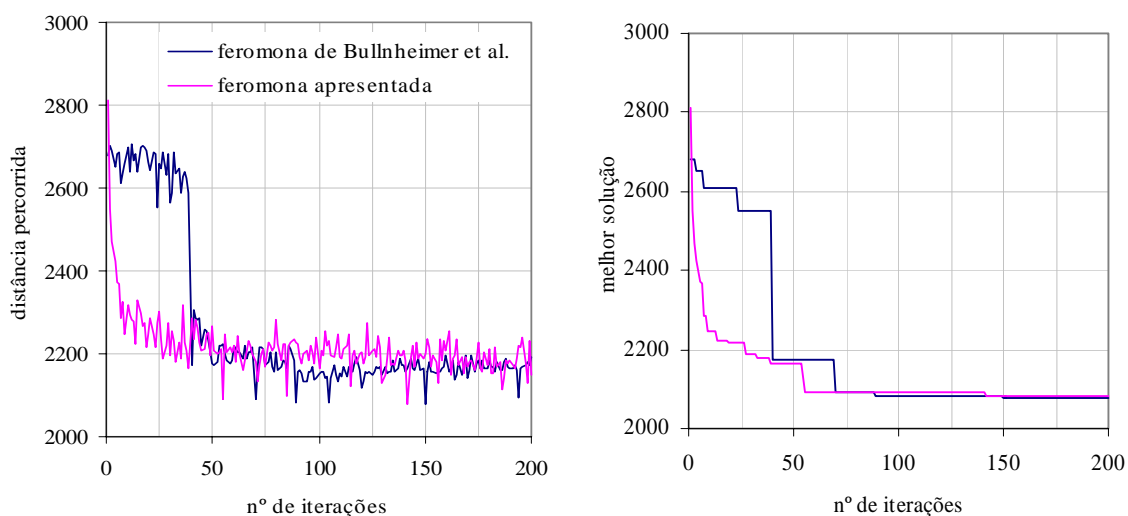
pertencentes à melhor solução até então encontrada através de  $\Delta\tau_{ij}^* = 1/L^*$ , onde  $L^*$  é o valor da função objectivo da melhor solução e  $L_\mu$  o valor da  $\mu$ -ésima melhor solução da iteração corrente.

Comparou-se graficamente a evolução das soluções dos dois algoritmos: o algoritmo proposto por Bullnheimer et al. (1999c) e o apresentado na primeira fase do Capítulo 4 desta dissertação aplicados a 2 exemplos da literatura (problema 8 com 100 clientes e o problema 30 com 153 clientes). Neste estudo são confrontados os resultados quando aplicada a formulação sugerida por Bullnheimer et al. ( $m=10$ ,  $\sigma=2$ ) e o nosso modelo sem qualquer tipo de reinicialização para 200 iterações.

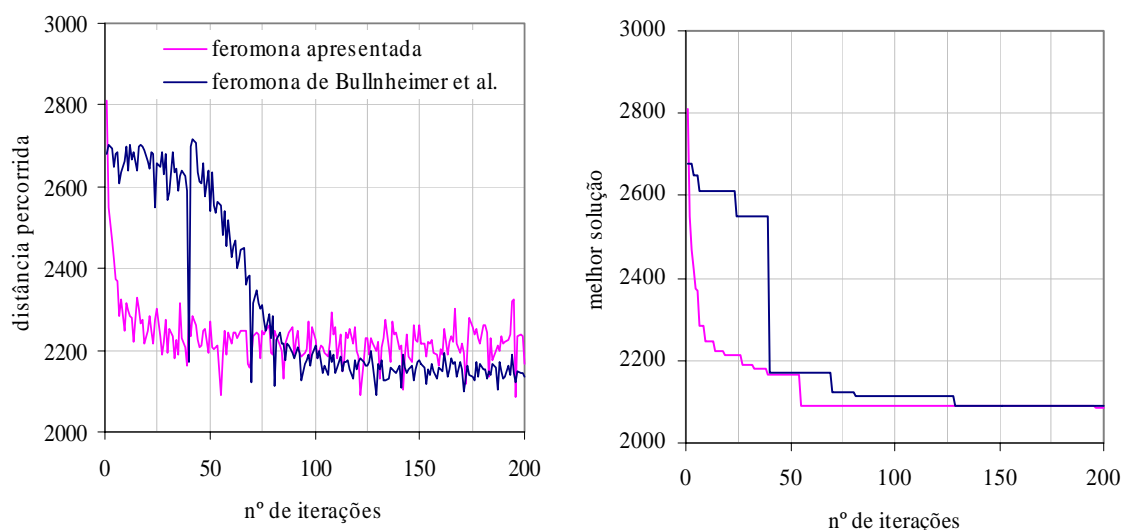
São consideradas duas situações distintas (A e B). Na situação A (ilustrada na Figura 5. 4 e na Figura 5. 6), após a primeira vez em que o processo de pós-optimização  *fusão e trocas-entre-rotas* ocorre, reforça-se a feromona, alterando o valor do parâmetro  $\alpha$  da expressão 4.2 (Capítulo 4) de 1 para 10, enquanto que na situação B (ilustrado na Figura 5. 5 e na Figura 5. 7) este parâmetro permanece sempre igual a 1.

Os gráficos da esquerda das quatro figuras que se seguem registam o valor da função objectivo obtido em cada iteração, enquanto que os da direita esboçam a evolução do valor óptimo da função objectivo.

#### Exemplo 8 da literatura – situação A: $\alpha=1 \rightarrow \alpha=10$



**Figura 5. 4:** Comparação das 2 estruturas de feromona ( $\alpha=1$  seguindo-se  $\alpha=10$ ) – exemplo nº 8

Exemplo 8 da literatura – situação B:  $\alpha=1$ 

**Figura 5. 5:** Comparação das 2 estruturas de feromona ( $\alpha=1$ ) – exemplo nº 8

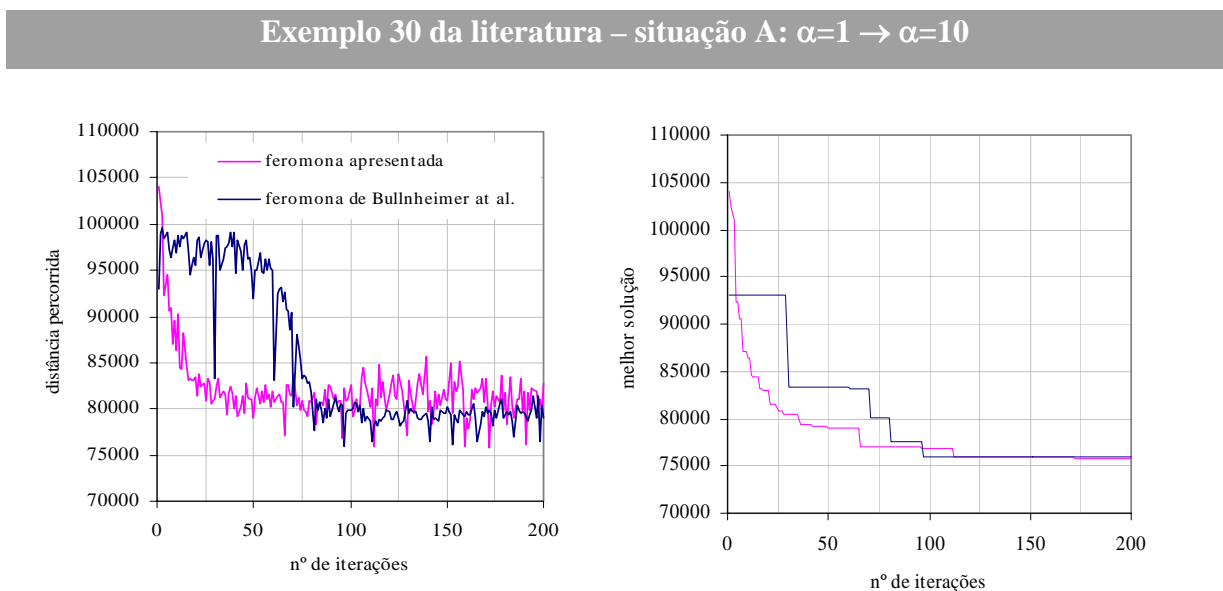
A observação dos gráficos relativos ao exemplo 8 permitem realçar alguns pontos importantes:

- i. Tanto na situação A como na situação B, apesar de não haver grandes diferenças no valor final da solução encontrada, o esforço computacional do modelo apresentado nesta dissertação é muito menor. Em cada iteração só se gera uma solução, ao contrário do modelo descrito em Bullnheimer et al. (1999c) onde se geram 10 soluções por iteração, registando-se nos gráficos o valor da função objectivo da melhor de entre as 10 soluções.
- ii. Quando observada a situação B, verifica-se que a modelo proposto conduz o processo para soluções de qualidade muito mais rapidamente quando comparado com o modelo referido em Bullnheimer et al. (1999c). Ao fim de 30 iterações (isto é, de se gerarem 30 soluções), as soluções encontradas pelo modelo proposto já atingem uma qualidade bastante razoável, enquanto que no modelo de Bullnheimer et al. só após 75 iterações (que significa após a geração de  $75 \times 10 = 750$  soluções) se atinge o mesmo nível. Contudo, após determinado número de iterações, os valores registados no gráfico quando aplicada a expressão de actualização da feromona de Bullnheimer et al.

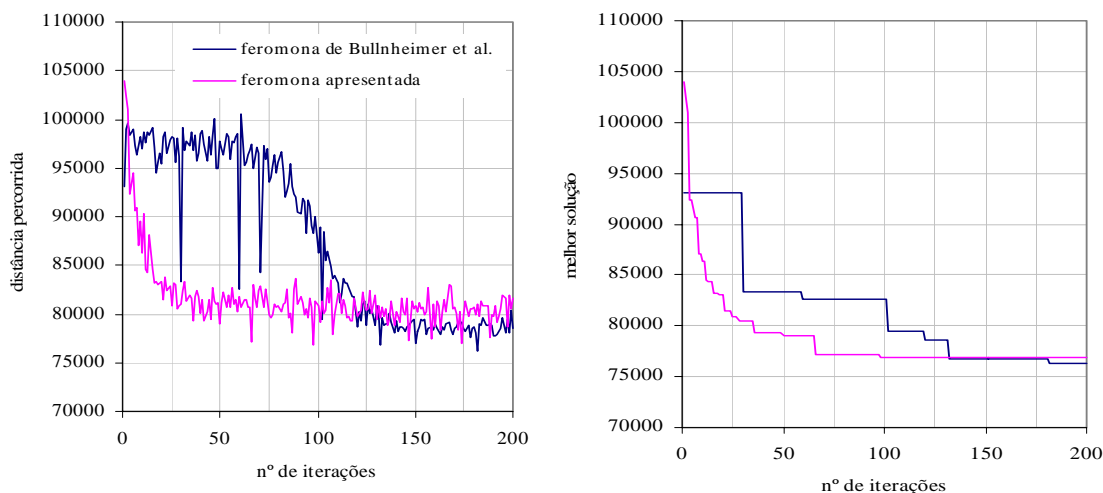
(1999c) são, de um modo geral, melhores. Tal aspecto é facilmente explicável pois, no modelo proposto por Bullnheimer et al. (1999c), em cada iteração regista-se o valor da função objectivo da melhor de entre 10 soluções geradas, enquanto que no modelo proposto se regista o valor da única solução gerada. Note-se, no entanto, que apesar de se verificarem estas diferenças, os melhores valores encontrados são semelhantes: 2086 no modelo proposto e 2090 no modelo de Bullnheimer.

- iii. Na situação A é valorizada a feromona após o processo de pós-optimização, alterando o valor do parâmetro  $\alpha$ . Nesta situação e para o modelo de Bullnheimer et al. (1999c) verifica-se uma evolução para pesquisa de soluções de qualidade logo após a iteração em que se procedeu à  *fusão* e à  *trocas-entre-rotas*, enquanto que se não se alterar o valor do parâmetro  $\alpha$  durante a execução do algoritmo (situação B), esse nível de qualidade das soluções só é atingido após algumas iterações.

As conclusões acima descritas também são observáveis nos gráficos das Figura 5. 6 e 5.7 onde se registam a evolução dos resultados para o exemplo referenciado com o número 30 na literatura.



**Figura 5. 6:** Comparação das 2 estruturas de feromona ( $\alpha=1$  seguindo-se  $\alpha=10$ ) – exemplo nº 30

Exemplo 30 da literatura – situação B:  $\alpha=1$ 

**Figura 5. 7:** Comparação das 2 estruturas de feromona ( $\alpha=1$ ) – exemplo nº 30

A evolução da qualidade das soluções do exemplo nº 30 da literatura resultante da aplicação do modelo descrito em Bullnheimer et al. (1999c) na situação em que o parâmetro  $\alpha$  é inalterado (cenário B) é lenta. Observa-se que neste exemplo da literatura são necessárias muito mais iterações para se começar a sentir os efeitos da feromona quando comparado com o número de iterações do exemplo nº 8 para a mesma situação.

A intensidade de feromona associada ao modelo de Bullnheimer et al. (1999c) é  $2/L^*$  para os arcos pertencentes à melhor solução até então encontrada e  $1/L_{\mu}$  para os arcos da melhor solução da iteração corrente. Ora, estes valores vão diferir de exemplo para exemplo, consoante a ordem de grandeza da função objectivo. No exemplo 8, as soluções encontradas no início do processo andam à volta de 2600 a 2700. Estes valores são muito menores que os valores das primeiras iterações do exemplo 30 (aproximadamente 95000 a 100000). Esta diferença faz com que a intensidade de feromona aplicada aos arcos do problema número 30 seja muito menor quando comparado com a quantidade a aplicar ao exemplo 8. Consequentemente, no problema nº 30, o efeito da feromona é sentido muito mais tarde, sendo necessário um número maior de iterações para se atingir um nível razoável de qualidade das soluções geradas. Com o nosso método este problema não se põe: em qualquer caso, aproximadamente à 25ª iteração, já são bem visíveis os efeitos da feromona.

Pode-se concluir que, além de um menor esforço computacional, a solução por nós apontada segue sempre o mesmo tipo de comportamento, não dependendo da ordem de grandeza do valor da função objectivo do problema em análise.

Esta conclusão, embora aqui ilustrada apenas com dois exemplos seleccionados, é também sustentada em análises idênticas para os restantes exemplos da literatura.

### 5.1.3 Construção de rotas Sequencial versus Paralelo

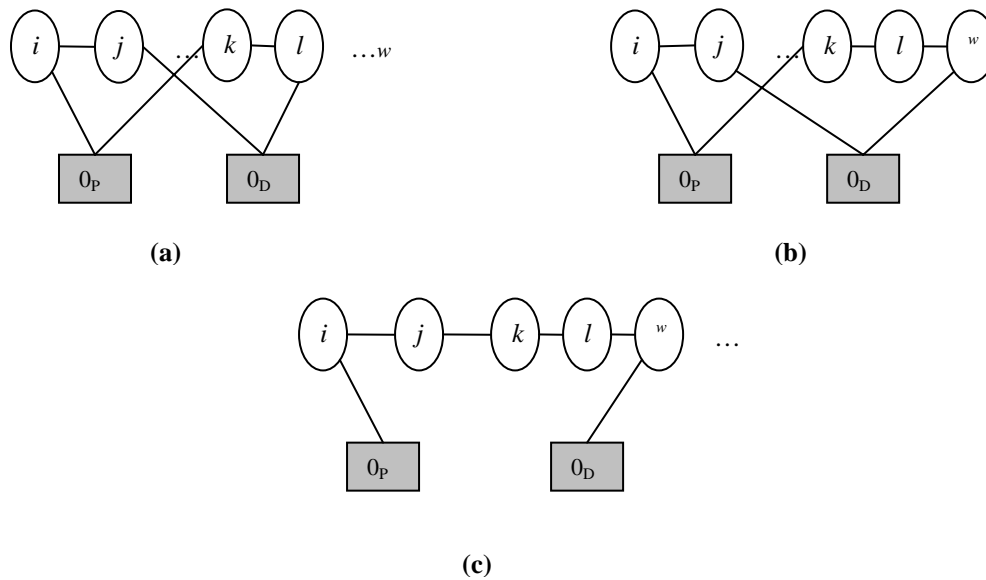
A construção das rotas em paralelo é uma das características que diferencia este trabalho das experiências de ACO relatadas na literatura: todos os ACO descritos na literatura aplicados a problemas de rotas procedem à construção sequencial das rotas.

Nesta secção são confrontadas as duas abordagens – construção de rotas em paralelo e construção de rotas sequencial – e analisados os efeitos da aplicabilidade das duas estruturas a um PVRP cuja configuração inicial foi alterada pela criação de réplicas dos clientes.

#### 5.1.3.1 Construção de rotas em Paralelo

Na construção das rotas em paralelo tem de se definir os critérios que permitem a união dos clientes. É com base nesses critérios que se constroem as rotas, que inicialmente são de pequena dimensão, podendo posteriormente ser ou não fundidas.

Para o caso em estudo, e pelo facto do ponto de partida não coincidir com o ponto de chegada, a visita do cliente  $i$  seguida do cliente  $j$ , poderá dar origem à rota  $R_i = [\text{Origem}, i, j, \text{Destino}]$ , analogamente a união dos pontos de visita  $k$  e  $l$  poderá gerar uma rota  $R_k = [\text{Origem}, k, l, \text{Destino}]$  (ver Figura 5. 8 (a)). Novas rotas podem ser criadas de modo semelhante, assim como novos clientes se podem ligar às rotas já construídas. Por exemplo,  $w$  pode-se ligar a  $l$ , ficando  $R_k = [\text{Origem}, k, l, w, \text{Destino}]$  (ver Figura 5. 8 (b)). A determinada altura da construção das rotas, se  $j \in \Omega_k$  e  $j$  ainda for extremo de  $R_i$ , pode ser vantajoso unir  $j$  a  $k$  através da ligação de  $R_i$  e  $R_k$  dando origem a uma única rota  $R_{ik} = [\text{Origem}, i, j, k, l, w, \text{Destino}]$  (ver Figura 5. 8 (c)).



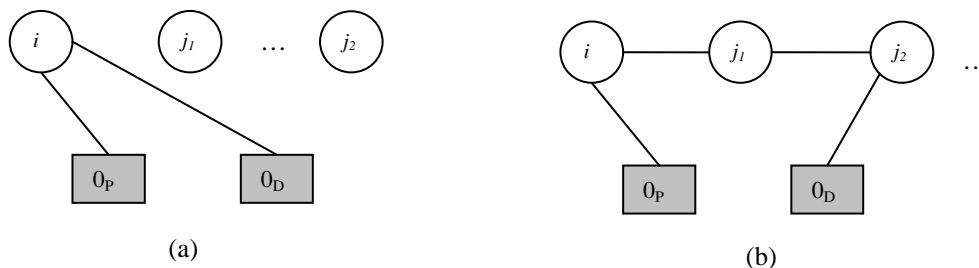
**Figura 5. 8:** Construção de rotas em paralelo

É importante definir os critérios intervenientes na escolha de  $i$ , isto é, da escolha do cliente extremidade, já inserido em alguma rota, que servirá de elo de ligação a outros clientes, assim como os critérios para a selecção do cliente que se irá visitar imediatamente a seguir a  $i$ , o cliente  $j$ . A selecção de  $j$  é feita probabilisticamente de acordo com a distribuição de probabilidade definida na equação (4.2). Mas para se usar essa regra de probabilidade tem que se conhecer antecipadamente o cliente  $i$ . O processo poderá ser descrito da seguinte forma: seleccionar um cliente  $i_1$ , depois escolher um cliente  $j_1$  de acordo com uma distribuição de probabilidade, ligando  $(i_1, j_1)$ . Seleccionar novamente um cliente  $i_2$ , e encontra-se  $j_2$  de acordo com a distribuição de probabilidade, ligando  $(i_2, j_2)$ . Este processo repete-se até não serem possíveis mais ligações.

Então, como seleccionar o cliente  $i$ ? Para responder a esta pergunta foram feitas diferentes simulações: escolher  $i$  aleatoriamente, seleccionar o cliente que tem a menor distância ( $d_{ij}$ ) associada, escolher o cliente com maior poupança associada (do tipo 1 ou 2). Entre estas alternativas, a que produziu melhores resultados, em extensivos ensaios realizados, foi a última.

### 5.1.3.2 Construção Sequencial das rotas

A construção sequencial das rotas inicia-se com a selecção de um cliente inicial  $i_1$ , que dará origem à rota  $R_i=[\text{Origem}, i_1, \text{Destino}]$  (ver Figura 5. 9 (a)). A construção dessa rota prossegue com a escolha um cliente  $j_1$ , visitado após  $i_1$ , seleccionado de acordo com a lei de probabilidade da equação 4.2. O passo seguinte consiste em seleccionar, de acordo com a mesma lei de probabilidade, um cliente  $j_2$  a visitar após  $j_1$ , dando origem à rota  $R_i =[\text{Origem}, i_1, j_1, j_2 \text{ Destino}]$  (ver Figura 5. 9 (b)). Este procedimento, que permite a expansão da rota, continua até que restrições de tempo ou capacidade sejam excedidas. Novas rotas são construídas por processo análogo, até que todos os clientes sejam inseridos numa rota.



**Figura 5. 9:**Construção sequencial de rotas

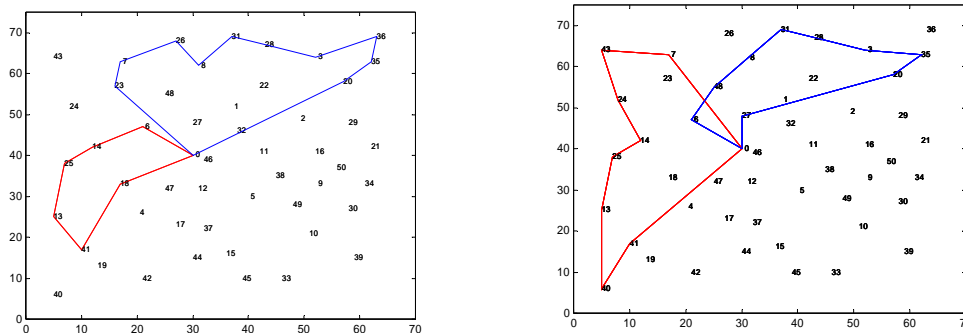
Neste tipo de construção, a primeira etapa passa pela escolha dos *clientes semente*. Os *clientes semente* são aqueles onde se iniciam a construção das rotas e é em torno deles que se constroem as rotas, que no seu conjunto vão formar uma solução. Estes clientes, designados por  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , podem ser gerados de diferentes modos. O nosso estudo passou por testar algumas alternativas para a selecção dos *clientes semente*:

- Um procedimento testado foi escolher pares de *clientes semente* geograficamente **afastados**, construindo rotas em torno de pontos geograficamente afastados. Através da matriz de distâncias escolhem-se dois clientes geograficamente afastados e constroem-se sequencialmente as rotas em torno deles. Dos clientes ainda não afectos às rotas já construídas, encontram-se outros dois pontos de visita geograficamente afastados, e constroem-se mais duas rotas a partir deles. O processo continua até estarem todos os clientes inseridos em alguma rota.



Este procedimento de escolha de *clientes semente* demonstrou uma fraqueza que se pode traduzir por uma “pesada herança” inicial, isto é, os clientes iniciais (*clientes semente*) podem estar muito afastados do depósito prejudicando a qualidade das soluções obtidas.

A Figura 5.10 ilustra os resultados de quatro rotas, do exemplo número 2 da literatura, obtidas sequencialmente partindo de clientes geograficamente afastados.



**rota 1:** 0 - 18 - 41 - 13 - 25 - 14 - 6 - 0

**rota 3:** 0-41-40-13 -25 -14-24-43-7-0

**rota 2:** 0 - 20 - 35 -36 - 3 - 28 - 31 - 8 -26 -7 - 23 -0

**rota 4:** 0 -6 -48-8-31-28-3-35-20-27-0

**Figura 5. 10:** Quatro rotas de uma solução construída sequencialmente

A “pesada herança” a que acima se refere pode ser observada nas rotas 2 e 3 da Figura 5.10 pois, em qualquer dos casos, são elevadas as distâncias que têm que ser percorridas na ligação ao depósito. A rota 2 inicia-se com a visita ao cliente número 20 percorrendo uma distância de 32.5 unidades. Note-se porém que, o cliente que deu início a esta rota na sua formação foi o número 36, ainda mais afastado do depósito mas que, por efeito da aplicação heurística 2-optimal, foi colocado não como ponto inicial de recolha mas em terceiro lugar. Analogamente, os clientes que deram origem às rotas 1, 3 e 4 foram os clientes 41, 40 e 20. Pode-se então concluir que, embora a “pesada herança” da escolha de clientes geograficamente afastados possa ser fortemente atenuada pela presença da heurística 2-optimal, ela ainda se verifica.

Na tentativa de diminuir as distâncias entre os últimos (ou primeiros) pontos de recolha e o depósito (ou origem), passou-se a admitir a possibilidade de ligações por ambas as extremidades. Dada uma rota [Origem, A, B, C, D, E, Destino], admitem-se ligações a partir do cliente A e a partir do cliente E. Em cada passo são avaliadas ambas as possibilidades e opta-se pela mais vantajosa.

Testados os dois métodos (aquele em que a ligação é feita apenas por uma extremidade, e o outro em que são permitidas ligações pelas duas extremidades), constatou-se que, na maior parte das vezes, são obtidos melhores resultados quando a ligação é bilateral. O acréscimo da qualidade das soluções pode atingir os 9% aproximadamente, dependendo dos exemplos – consultar Tabela 5. 4.

<i>Prob. nº</i>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>19</b>	<b>20</b>	<b>23</b>	<b>30</b>	<b>Caso estudo</b>
<i>x -Ligação por uma extremidade</i>	2153	1661	5100	9370	7119	76592	2066
<i>y - Ligação pelas duas extremidades</i>	2069	1647	4851	8488	6714	77015	2019
<i>Diferença % 100.(x-y)/x</i>	3.9%	0.8%	4.9%	9.4%	5.7%	-0.6%	2.3%

**Tabela 5. 4:** Soluções da construção sequencial das rotas partindo de nós geograficamente afastados

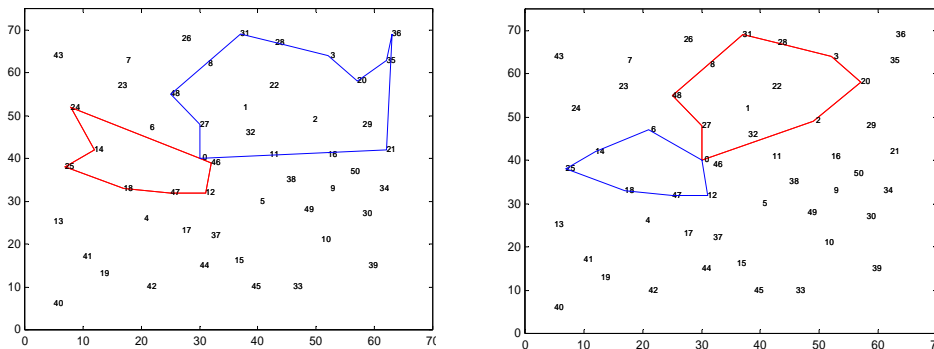
- Escolher os *clientes semente* **aleatoriamente** foi outra hipótese que se nos afigurou ter alguma potencialidade, pressupondo que deste modo se geram rotas bastante diversificadas.

No procedimento testado após escolha aleatória de um cliente, constrói-se uma rota sequencialmente a partir dele. Uma vez construída a primeira rota, escolhe-se aleatoriamente um outro ponto, de entre os clientes ainda não afectos a qualquer rota, construindo-se nova rota; e assim sucessivamente até que todos os clientes sejam inseridos em alguma rota.

À semelhança do ponto anterior, analisaram-se as ligações por uma e por duas extremidades tendo-se observado, para qualquer dos casos, soluções de pior qualidade quando comparadas com as do ponto anterior.

- Iniciar as rotas em pontos **próximos do depósito** foi outra hipótese estudada. Aqui, em vez de termos umas distâncias iniciais demasiado longas, como aconteceu na primeira abordagem, é no retorno ao depósito que existem penalizações.

A Figura 5. 11 ilustra a formação de quatro rotas construídas sequencialmente a partir de locais geograficamente perto do depósito. A rota 1 e 2, do exemplo número 2 da literatura, da são exemplo desse problema, onde os últimos pontos de visita estão bastante afastados do depósito. Mais uma vez, a presença da heurística 2-optimal com a troca de arcos, atenua esta distância.



**rota 1:** 0 – 46- 12 -47-18 - 25 -14 - 24 - 0

**rota 3:** 0 - 27 - 48 - 8 - 31 -28 - 3 - 20 - 2 - 0

**rota 2:** 0 -27 - 48 -8 -31 - 28 - 3- 20 – 35 – 36 – 21 - 0

**rota 4:** 0 – 12 – 47 – 18 – 25 – 14 – 6 – 0

**Figura 5. 11:** Quatro rotas de uma solução construída sequencialmente

Na Tabela 5. 5 observam-se os resultados da aplicação da construção sequencial das rotas quando a escolha dos clientes *semente* incide em locais próximos do depósito. São ilustrados os resultados admitindo ligações apenas por uma extremidade e também para soluções onde a expansão das rotas pode ser feita pelas duas extremidades. Tal como nos exemplos anteriores, obtêm-se melhores resultados quando se possibilita a ligação por ambas as extremidades.

<i>Prob. n°</i>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>19</b>	<b>20</b>	<b>23</b>	<b>30</b>	<b>Caso estudo</b>
<i>x -Ligação por uma extremidade</i>	2118	1692	5035	9251	6918	77457	2147
<i>y - Ligação pelas duas extremidades</i>	2108	1639	4951	9303	6808	74974	2018
<i>Diferença % 100.(x-y)/x</i>	0.5%	3.2%	1.7%	-0.6%	1.6%	3.2%	6.0%

**Tabela 5. 5:** Soluções da construção sequencial das rotas partindo de nós próximos do depósito

Em síntese, pode-se afirmar que, na construção sequencial das rotas, a ligação pelas duas extremidades apresenta vantagens quando comparada com a ligação por apenas uma extremidade. Adicionalmente, também se verifica que os clientes *semente* realmente influenciam a qualidade da solução final. No entanto, face às experiências efectuadas, é difícil indicar um melhor método de escolher as *sementes*, tendo-se verificado que os resultados

variam de exemplo para exemplo. Pode-se concluir sim que, de um modo geral, a ligação em paralelo produz resultados de melhor qualidade (consultar Tabela 5. 6).

Prob nº	Construção em paralelo	Construção Sequencial – tipo de inicialização		Diferença %
		Clientes <i>semente</i> afastados	Clientes <i>semente</i> próximos do depósito	
8	2045	2069	2108	1.2%
10	1580	1647	1639	3.7%
19	4822	4851	4951	0.6%
20	8367	8488	9303	1.5%
23	6584	6714	6808	2%
30	75570	77015	74974	-0.8%
Caso estudo	1929	2019	2018	4.6%

**Tabela 5. 6:** Resultados dos algoritmos: ligação em paralelo versus sequencial

## 5.1.4 O impacto das técnicas de pós-otimização

### 5.1.4.1 Os procedimentos 2-optimal e 3-optimal

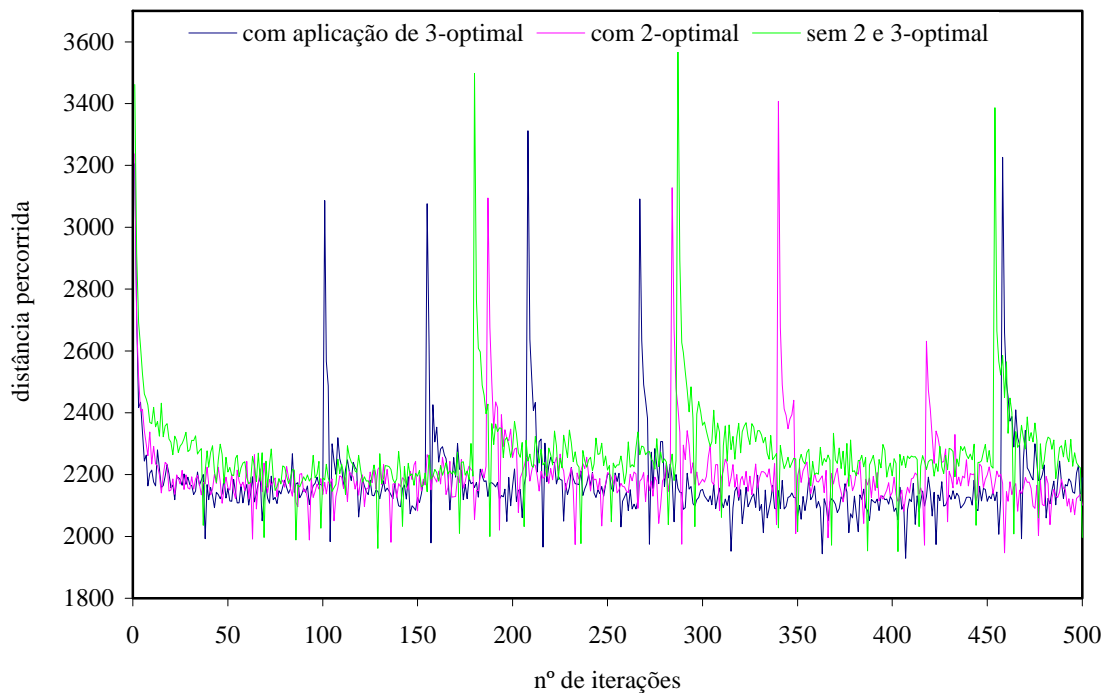
Nos ACO, tal com em outras técnicas meta-heurísticas, existem alguns mecanismos melhorativos que podem ser implementados. A eficácia de alguns procedimentos melhorativos é, durante um determinado período de tempo inicial, directamente proporcional ao seu tempo computacional, isto é, os melhores resultados estão normalmente associados a procedimentos com tempo computacional mais elevado. Isto levanta uma questão:

*- O que é preferível: aplicar frequentemente um procedimento rápido, mas com uma menor eficácia, ou menos vezes um procedimento mais demorado com uma maior eficácia?*

Nos problemas de estabelecimento de rotas resolvidos através dos ACO são frequentemente implementados procedimentos k-optimal que são executados em todas as iterações após construção das rotas e imediatamente antes da actualização de feromona.

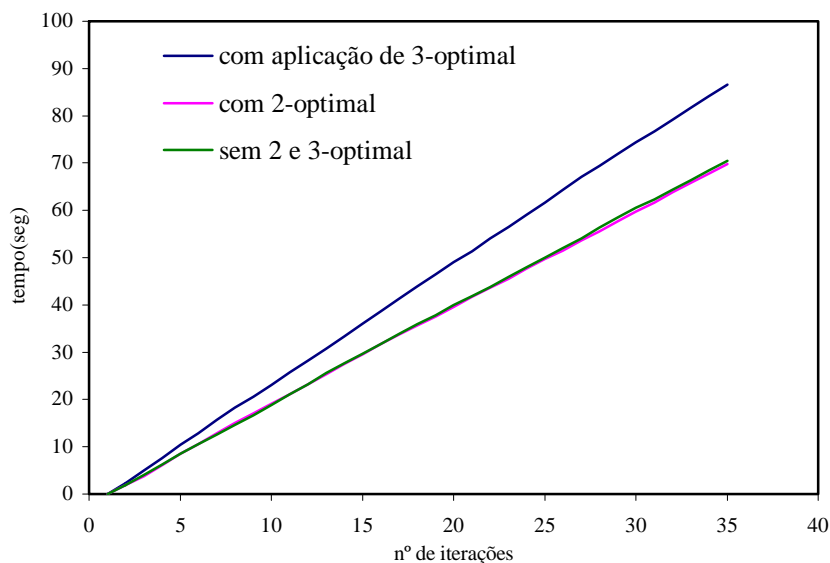
Na tentativa de perceber qual o procedimento mais indicado, foi feito um estudo comparativo do desempenho das heurísticas 2-optimal e 3-optimal quando aplicadas ao caso em estudo.

O gráfico da Figura 5.12 compara os efeitos da aplicação das heurísticas 2 e 3-optimal, com a não aplicação de qualquer heurística k-optimal. Note-se, que adicionalmente é activada periodicamente uma outra técnica de pós-optimização ( *fusão e trocas-entre-rotas*) dando origem a soluções de maior qualidade que se podem observar no gráfico da Figura 5.12 através de uns “picos” periódicos.



**Figura 5. 12:** O efeito da aplicação das heurísticas 2 e 3 optimal

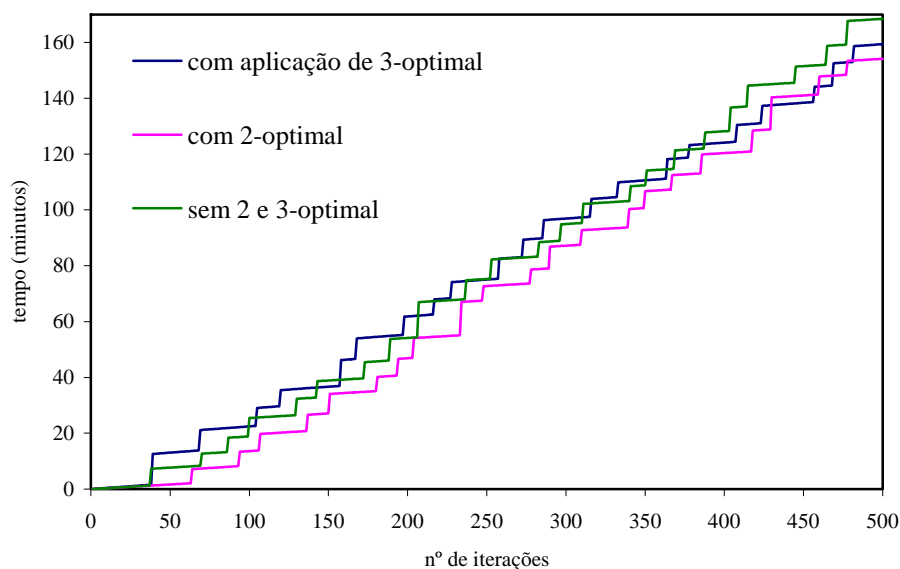
Embora os melhores resultados sejam conseguidos quando aplicada a heurística 3-optimal, tornam-se pouco perceptíveis as diferenças entre a aplicação das heurísticas 2 e 3-optimal. Em termos de tempos computacionais, e tal como seria de esperar, os procedimentos que envolvem a heurística 3-optimal são mais dispendiosos que a 2-optimal ou que a não aplicação de qualquer tipo de técnica melhorativa. Observando apenas as primeiras 35 iterações (gráfico da Figura 5. 13), onde não há qualquer outra técnica de pós-optimização, observa-se que a heurística 3-optimal consome mais tempo que a heurística 2-optimal. Contudo, quando abordada em conjunto com outras técnicas de pós-optimização, o tempo consumido torna-se pouco significativo.



**Figura 5. 13:** Comparação dos tempos execução

Na Figura 5. 14 registam-se os tempos de execução do algoritmo proposto aplicado ao caso de estudo em três alternativas de aplicação das técnicas k-optimal: no primeiro cenário aplica-se a heurística 3-optimal, no segundo aplicam-se apenas procedimentos de trocas de dois arcos (2-optimal) e por fim avalia-se a não aplicação de qualquer procedimento melhorativo entre iterações consecutivas. Em todos os cenários são aplicadas técnicas de pós-otimização complementares ( *fusão e trocas-entre-rotas*) à k-ésima melhor solução, se durante as últimas k iterações não tiverem ocorrido soluções de melhor qualidade.

O procedimento mais dispendioso em tempo computacional é, sem dúvida, o conjunto das técnicas de pós-otimização  *fusão e trocas-entre-rotas*, que se podem observar no gráfico da Figura 5. 14 através da representação de uns saltos. Como nos diferentes cenários esta técnica ocorre em momentos diferentes e um número diferente de vezes, é difícil ter a percepção de quanto “custa”, em termos de tempo de cálculo, a aplicação das diferentes heurísticas k-optimal em estudo.



**Figura 5. 14:** Tempos de execução dos procedimentos k-optimal

São observados comportamentos similares aos da Figura 5. 14 para os problemas da literatura. De um modo geral, as soluções finais provenientes da aplicação da heurística 3-optimal após cada iteração são de melhor qualidade, embora pouco diferentes das soluções resultantes da aplicação da heurística 2-optimal.

No sentido de melhorar a eficiência do algoritmo pensou-se na aplicação da pós-otimização 3-optimal apenas a soluções potencialmente boas, de modo que a pós-otimização incidisse apenas nas soluções que não diferissem mais de  $v$  unidades ( $v$  - um parâmetro) da melhor solução corrente. Esta medida justificar-se-ia se as soluções geradas apresentassem uma grande dispersão de resultados. Contudo, atendendo às características das soluções obtidas ao longo da execução do algoritmo, sabe-se que a partir da execução de algumas iterações as soluções são de bastante qualidade, não fazendo sentido a não aplicação deste processo melhorativo em qualquer uma delas.

#### 5.1.4.2 O procedimento *fusão*

A construção de rotas em paralelo, envolve procedimentos com difícil controlo do número total de rotas da solução.

Com o intuito de diminuir o número de rotas e, ao mesmo tempo, melhorar a qualidade da solução, desenvolveu-se um mecanismo de trocas que tenta inserir todos os

clientes de uma rota em outras rotas sem que isso prejudique a qualidade da solução. A este mecanismo chamou-se  *fusão*.

Neste procedimento tentam-se fundir, ou eliminar, as rotas com maior folga na restrição que condiciona o retorno ao depósito. No entanto muitas das tentativas de fusão são infrutíferas. Deste modo, só serão alvo de análise rotas com alguma folga na restrição que condiciona o retorno ao depósito. Após algumas experiências computacionais verificou-se que a folga deverá ser superior a 10%.

Com a  *fusão* também se melhora a qualidade da solução ao diminuir as folgas existentes nos recursos: cada rota passa a usar os seus recursos quase na totalidade. Em termos práticos este factor é muito importante. Analise-se o exemplo do caso de estudo em que cada turno tem a duração de quatro horas e meia. A existência de uma rota com três horas tem pouca utilidade, pois o tempo que sobra será desperdiçado, a não ser que haja uma outra rota de uma hora e meia. Com a fusão, no caso de existir a rota de duração de 1 hora e 30 minutos, ela irá desfazer-se e juntar-se a outras – eventualmente irá juntar-se, senão na totalidade em parte, à rota cuja duração era de 3 horas.

*Será que esta junção é vantajosa mesmo que se incremente ligeiramente o valor da função objectivo da solução?*

Após a fusão segue-se o procedimento que permite trocas entre rotas. Aqui também se põe outro problema:

*Se, por um lado, a fusão permite melhorar a qualidade das soluções, por outro, ao diminuir as folgas das restrições activas, impede alguns movimentos que poderiam trazer alguns benefícios. O que será mais vantajoso?*

Com o intuito de dar resposta a estas duas questões, testaram-se três diferentes formulações:

- 1ª formulação, onde se permite a  *fusão* (sem que isso prejudique o valor da função objectivo da solução) e posteriormente aplicação do procedimento  *trocas-entre-rotas*;
- 2ª formulação,  *trocas-entre-rotas* sem ocorrência da  *fusão*, permitindo uma maior mobilidade de movimentos entre rotas, devido à existência de maiores folgas;
- 3ª formulação, onde se permite a  *fusão* mesmo prejudicando a solução corrente (no caso de não se ter conseguido fundir nenhuma rota, não prejudicando a solução) e posterior  *trocas-entre-rotas*.



Na Tabela 5. 7 registam-se os resultados da aplicação das diferentes formulações a alguns exemplos da literatura, tendo como ponto de partida os resultados obtidos deterministicamente, isto é, na construção das rotas não se seleccionam os clientes probabilisticamente, seleccionando-se deterministicamente os clientes de maior probabilidade (equação 4.2).

Nº	Resultado Heurístico		<i>Fusão + Trocas-entre-rotas</i> (1ª formulação)		<i>Trocas-entre-rotas</i> (2ª formulação)		<i>Fusão + Trocas-entre-rotas</i> (3ª formulação)	
	Distância	Nº rotas	Distância	Nº rotas	Distância	Nº rotas	Distância	Nº rotas (distância)
1	562	6	560	5	562	6	-	
2	1388	15	1341	14	1359	15	-	
3	562	6	560	5	562	6	-	
4	872	11	859	11	859	11	1043	10 (920)
7	859	8	859	8	859	8	859.55	8
8	2177	22	2082	21	2105	22	-	
9	859	8	859	8	859	8	859.55	8
10	1701	17	1662	17	1662	17	1733.2	16 (1703)
17	1752	16	1665	13	1741	16	-	
18	3240	16	3215	16	3215	16	3361.2	14 (3260)

**Tabela 5. 7:** Aplicação da post-optimização *fusão* e *trocas-entre-rotas*

Da observação da Tabela 5. 7 pode-se concluir que, tal como seria de esperar, por vezes o procedimento de fusão não produz qualquer efeito, não conseguindo reduzir o número de rotas (exemplos 4, 7, 9, 10 e 18), por outro lado, quando produz efeitos, eles são positivos, não prejudicando as *trocas-entre-rotas*, isto é, apesar da provável diminuição de folgas, as trocas realizam-se, produzindo soluções de maior qualidade quando comparadas com o cenário em que a fusão não está presente (exemplos 1, 2, 3, 8 e 17). Adicionalmente, a fusão, ao diminuir o número de rotas pode tornar admissíveis soluções não admissíveis por se exceder o número de veículos disponíveis (exemplos 1 e 3). No entanto, isso nem sempre acontece - veja-se o exemplo do problema nº 4, cujo número máximo de rotas admissível é 10 e só se obtiveram soluções de 11 rotas.

Quando se admite fundir rotas mesmo que isso prejudique a solução encontrada – 3ª formulação – o procedimento de trocas que posteriormente vai actuar não é suficientemente

eficiente no sentido de compensar essa penalidade, pois verificou-se que as soluções finais apresentam sempre pior qualidade.

Face ao exposto, o método que se propõe vai no sentido de aplicar a  *fusão*, desde que não se prejudique a qualidade da solução, e posteriormente o mecanismo  *trocas-entre-rotas*.

A não aplicação da  *fusão* ao caso em estudo, aplicando-se apenas o procedimento de  *trocas-entre-rotas*, incrementa a solução final em 2.3% na distância percorrida mas, pior que isso, é a diferença do número de rotas, que passa de 78 para 84, gerando uma solução com grandes folgas na duração das rotas, inviabilizando a aplicabilidade da solução obtida.

Os resultados obtidos com este procedimento, não só permitem diminuir a distância a percorrer, como também reduzir o número de rotas. Talvez seja este o procedimento mais importante na redução do número de rotas, pois em qualquer dos exemplos da literatura testados a solução final nunca excedeu o número de rotas admissíveis por período, embora este controle nunca tenha uma abordagem directa e daí se incorrer no risco de se obter uma solução final inadmissível. No entanto, tal nunca aconteceu.

#### 5.1.4.3 O procedimento *trocas-entre-rotas*

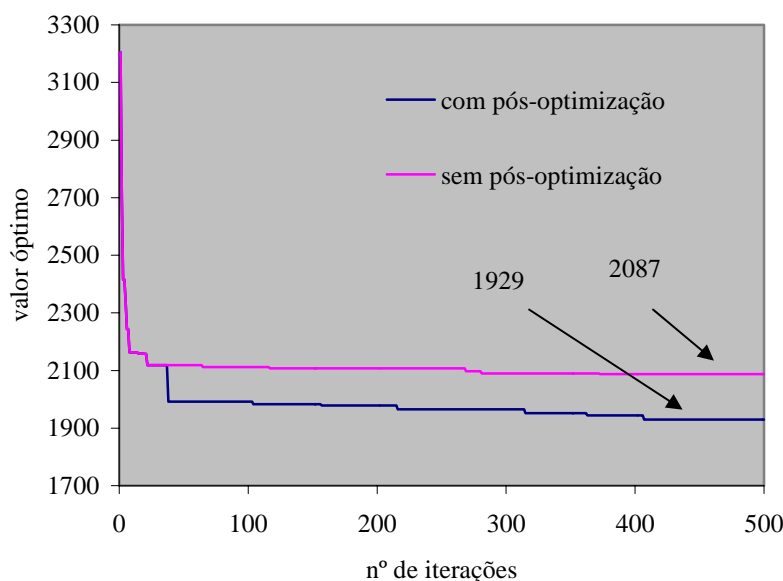
O procedimento denominado  *trocas-entre-rotas*, que é aplicado imediatamente a seguir ao procedimento  *fusão*, permite a troca entre clientes de duas rotas distintas (troca de um cliente por um outro distinto) e a inserção de clientes (saída de um cliente de uma rota e a sua inserção numa outra rota distinta). Este movimento de trocas ocorre iterativamente até não ser possível melhorar a solução. Quando se encontra uma solução sem benefícios para a solução, admitem-se trocas durante duas iterações, que degradem a solução no máximo em duas unidades por troca.

A aplicação do procedimento de pós-optimização ( *fusão* e  *trocas-entre-rotas*) a todas as soluções geradas durante o processo iterativo ACO seria incomportável em termos de tempos computacionais. Optou-se por aplicar esta pós-optimização apenas quando nas últimas  $k$  iterações não se verificarem quaisquer melhorias da solução. Pelas experiências efectuadas, constatou-se que  $k=30$  iterações seria um número razoável. A opção por um valor superior poderia reverter numa “perda de tempo” uma vez que, após a pós-optimização, e por se obterem soluções de qualidade superior, a busca é direccionada para soluções de maior qualidade. Por outro lado, um valor muito pequeno não permitiria nem a actuação da

feromona, nem a intensificação das soluções. Assim, se a pesquisa vai por bom caminho, isto é, se as soluções geradas vão melhorando ao longo do processo, não será activada a pós-optimização; se a pesquisa se está a desviar dos interesses do algoritmo, não havendo melhorias nas últimas soluções geradas, é accionado o processo de pós-optimização.

Note-se no entanto que, esta pós-optimização não incide necessariamente na solução gerada na iteração corrente: se é a primeira vez que a pós-optimização é accionada, será aplicada à melhor solução até então encontrada, caso contrário, é aplicada à melhor solução gerada entre a última pós-optimização e a iteração corrente.

A aplicação conjunta destas duas técnicas (*fusão e trocas-entre-rotas*) produz efeitos positivos na qualidade final das soluções obtidas. A título de exemplo, na Figura 5. 15, compara-se, para o caso de estudo, a evolução do óptimo global, que decorre da opção de se aplicar ou não estas técnicas de pós-optimização ilustrando os efeitos da sua aplicação (cerca de 8% melhores).



**Figura 5. 15:** Os efeitos dos procedimentos *fusão e trocas-entre-rotas*

São observados resultados similares quando comparados os mesmos cenários nos exemplos da literatura. A Tabela 5.8 apresenta uma síntese desse estudo, realçando as qualidades destes procedimentos de pós-optimização nos ACO. Nos problemas analisados, os procedimentos *fusão e trocas-entre-rotas* incrementam sempre a qualidade da solução que atinge valores que variam entre 1.9% a 38.5%.

<i>Prob. n°</i>	8	10	13	19	20	23	30	Caso de estudo
<i>x</i> - Com pós-otimização	2045	1580	3676	4822	8367	6584	75570	1929
<i>y</i> - Sem pós-otimização	2167	1672	5979	4915	8595	6912	80965	2087
Diferença % ( <i>y-x</i> )/ <i>y</i>	5.6%	5.5%	38.5%	1.8%	2.7%	4.8%	6.7%	7.6%

**Tabela 5. 8:** O efeito da pós-otimização  *fusão e trocas-entre-rotas*

### 5.1.5 Estratégias de intensificação e diversificação

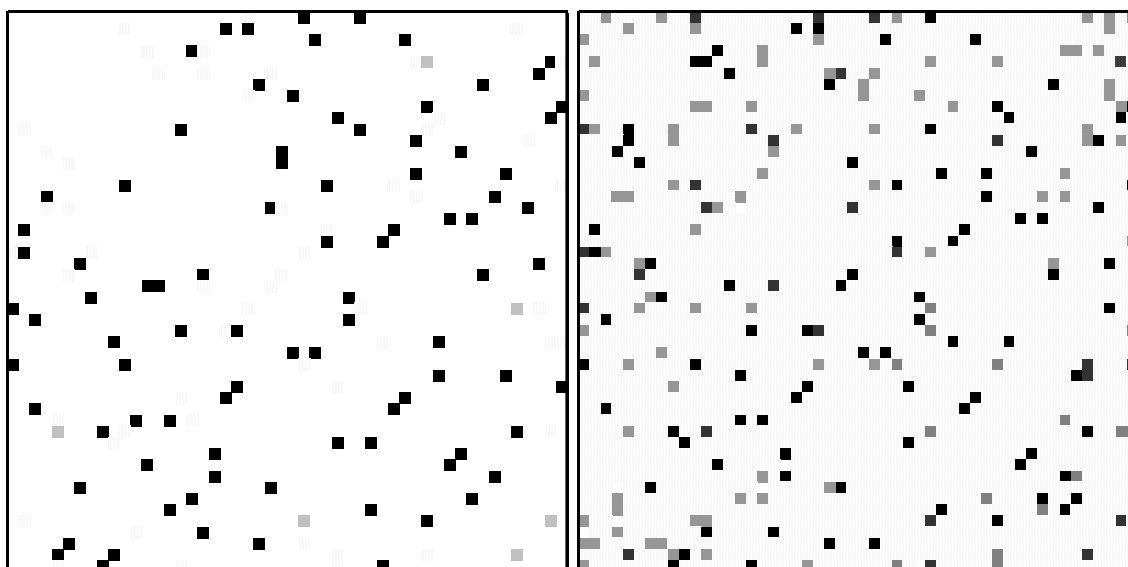
A necessidade de explorar um vasto conjunto de soluções e/ou concentrar a pesquisa na região de soluções promissoras é importante em qualquer tipo de meta-heurística. Nos ACO, a matriz da feromona tem um papel fulcral nestes procedimentos, podendo conduzir a pesquisa às mais diversificadas zonas, ou ao extremo da estagnação da solução na qual, iteração após iteração, são obtidas soluções muito semelhantes, impedindo a busca em novos espaços. É essencial que se evite a estagnação e se incentive ligações promissoras.

No algoritmo apresentado contribuem para a actualização de feromona, não só as ligações da melhor solução até então encontrada, como as ligações pertencentes à solução corrente. Este factor, conjuntamente com a reinicialização da matriz de feromona sempre que após 50 iterações não se verificarem melhorias da solução, evitam a estagnação do algoritmo ao mesmo tempo que permitem a exploração de novos espaços de soluções.

Para ilustrar a influência destes dois procedimentos, apresentam-se dois quadros (Figura 5. 16) que permitem a visualização da matriz de feromona em duas situações distintas para o exemplo n° 1 referenciado na literatura com 50 clientes: na imagem da esquerda, numa escala a preto e branco, apresenta-se a ordem de grandeza dos valores da matriz de feromona existentes, quando o problema está perante a centésima iteração. Nesta simulação não existe qualquer renicialização da matriz e só a melhor solução contribui para a actualização da feromona. Na imagem da direita – iteração n°150– além de se reinicializar a matriz sempre que nas últimas 50 iterações não se verificar uma evolução (para melhor) da solução encontrada, a actualização da feromona é feita com o contributo dos arcos pertencentes à melhor solução e com o contributo dos arcos pertencentes à solução corrente.

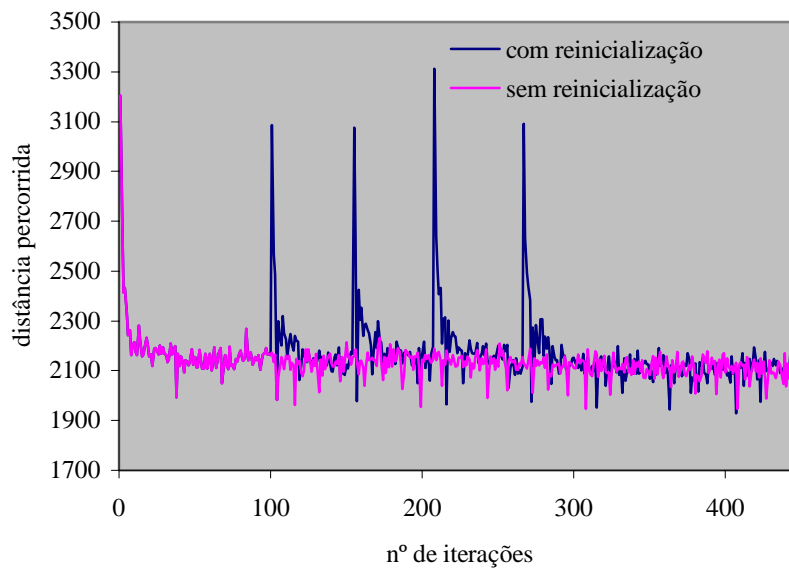
Observe-se a figura da esquerda: o recurso à escala preto e branco permite intuir que a solução gerada estará próxima de uma situação de estagnação, havendo arcos com valores de feromona muito elevados (representados a preto) e outros com valores muito baixos (representados a branco), sendo escassas as situações intermédias. Por cada linha, ou seja a cada ponto de visita, o número de pontos mais escuros são normalmente dois, havendo situações em que é um, o que nos leva a intuir, no caso em que são dois, que é o incentivo dado às ligações  $(i-1,i)$  e  $(i, i+1)$  e, no caso de ser um, será uma das ligações efectuada ao depósito.

Na figura da direita, além de existirem pontos que são fortemente incentivados (representados a preto), também existem muitos outros com vários tons de cinza, o que permite maior diversificação na construção de novas soluções.



**Figura 5. 16:** Visualização do efeito das estratégias de diversificação na matriz da feromona.

O gráfico da Figura 5. 17 ilustra a evolução da função objectivo, com e sem reinicialização, para o caso em estudo. Observa-se uma degradação da solução imediatamente a seguir à reinicialização da matriz de feromona que rapidamente é atenuada, conduzindo o processo a soluções de qualidade.



**Figura 5. 17:** O efeito da reinicialização no ACO

Na Tabela 5.9 apresentam-se, para um grupo de oito problemas distintos, valores que permitem mostrar os efeitos da reinicialização na solução final encontrada. Verificam-se soluções ligeiramente melhores quando aplicados procedimentos de reinicialização, registando-se variações que vão até aos 2.1% (exemplo nº 23 da literatura). Podiam esperar-se maiores incrementos na qualidade da solução final mas, face à qualidade das soluções após algumas iterações, é difícil melhorar significativamente essas soluções.

<i>Prob. nº</i>	8	10	13	19	20	23	30	Caso de estudo
Valores da função objectivo da solução								
$ACO_{(a)}$	2045	1603	3676	4846	8367	6725	75690	1946
$ACO_{(b)}$	2045 (0.0%)	<b>1580</b> (1.4%)	3676 (0%)	4822 (0.5%)	<b>8367</b> (0.0%)	<b>6584</b> (2.1%)	75570 (0.2%)	<b>1929</b> (0.9%)
$ACO_{(c)}$	<b>2041</b> (0.2%)	1589 (1.0%)	<b>3545</b> (3.6%)	<b>4821</b> (0.5%)	<b>8367</b> (0.0%)	<b>6584</b> (2.1%)	<b>75417</b> (0.4%)	1940 (0.3%)

$ACO_{(a)}$  - sem qualquer tipo de reinicialização durante o algoritmo,

$ACO_{(b)}$  – reinicializa sempre que ocorreram k iterações sem melhorias na solução,

$ACO_{(c)}$  – “iteração zero” (aplicação de “savings” determinístico), reinicializa sempre que ocorreram k iterações sem melhorias na solução

**Tabela 5. 9:** Reinicialização versus “iteração zero”

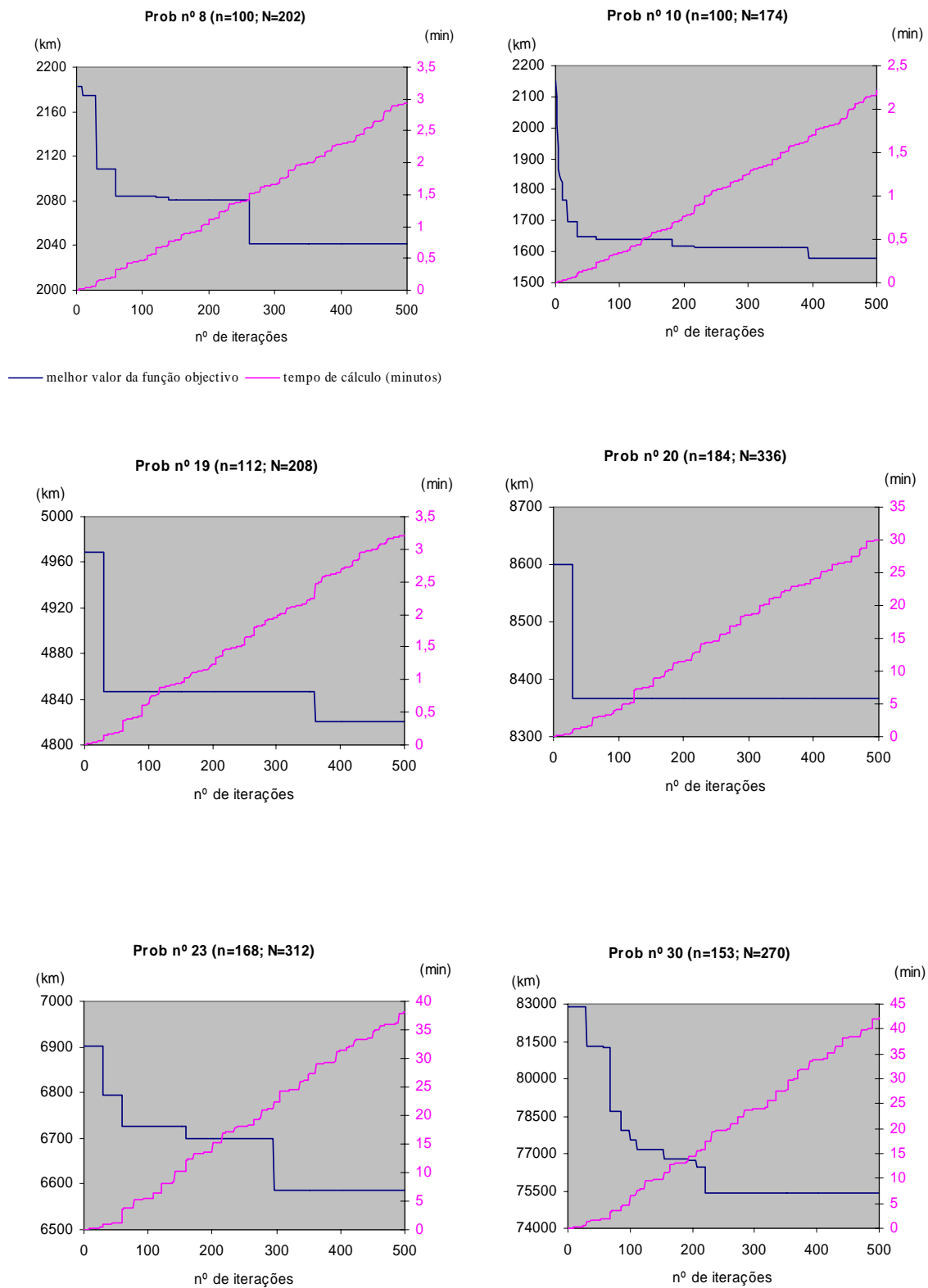
Na perspectiva de fornecer às formigas uma orientação logo desde o início do processo, implementou-se uma “iteração zero” construindo uma solução determinística com base nas poupanças. A solução calculada deterministicamente é de qualidade superior à solução da primeira iteração calculada probabilisticamente. Iniciar o processo iterativo com uma solução de maior qualidade leva a que, desde cedo, se efectuem depósitos de feromona em arcos promissores, guiando a pesquisa para o uso de ligações talvez mais promissoras. Na Tabela 5.9 apresentam-se os resultados da resolução de alguns problemas quando aplicada a “iteração zero” ( $ACO_{(c)}$ ). Comparando as duas últimas linhas (ambas englobam o processo de reinicialização) verifica-se que há situações em que a existência da “iteração zero” interfere (positivamente) na pesquisa da solução.

### 5.1.6 Critério de Paragem

Na aplicação de procedimentos ACO para resolução problema da rotas são apresentados na literatura resultados para  $n/2$ ,  $n$ ,  $2n$  iterações e para 100 iterações. Noutras técnicas meta-heurísticas, os processos param ou através da imposição de limites ao número de iterações ou de tempo de cálculo, ou também com número de iterações em que não houve melhorias no processo.

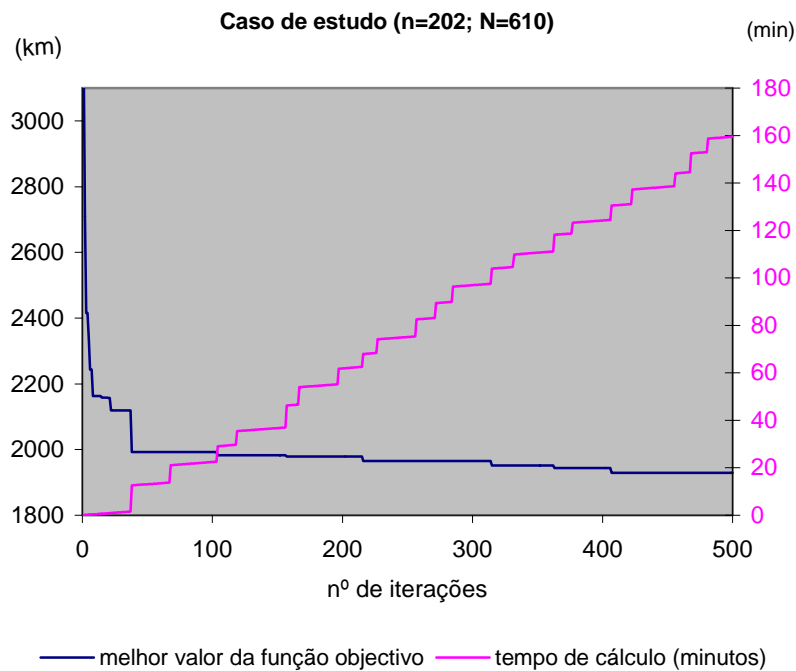
Os gráficos da Figura 5. 18 esboçam, para o caso em estudo e alguns exemplos da literatura, a evolução do valor óptimo e o tempo computacional quando geradas 500 iterações. Analisam-se problemas de dimensões diferentes e com taxas de replicação clientes elevadas, que vão desde 74% a 200% (consultar Tabela 5. 10).

A evolução do processo iterativo é muito semelhante: uma rápida evolução nas primeiras iterações (mais ou menos 60 iterações) que proporciona uma certa qualidade às soluções encontradas seguindo-se uma evolução mais lenta.



**Figura 5. 18:** Evolução dos valores óptimos versus tempo





**Figura 5.18 (continuação):** Evolução dos valores óptimos versus tempo

O tempo computacional consumido nas 500 iterações varia de exemplo para exemplo, havendo um problema em que são necessários cerca de 160 minutos (caso de estudo) enquanto que para outros bastam apenas 2 minutos – consultar Tabela 5. 10. Esta variação de tempo é explicada primordialmente pelo diferente número de clientes a visitar em cada problema reflectindo, num maior ou menor esforço nos procedimentos de pós-optimização.

Na tentativa de explicar a variação do tempo de cálculo em modelos com características semelhantes, recorreu-se a um modelo de regressão linear, concluindo-se que 95% da variação do tempo dispendido em 500 iterações (coeficiente de determinação,  $r^2=0.95$ ) é explicada pela variação do número de clientes a visitar no horizonte temporal em estudo (N). Consultar Tabela 5.11 onde se apresenta o modelo de regressão linear.

Prob n°	N° de clientes		Taxa de replicação (N-n)/n	N° de rotas	Tempo de 500 iterações (minutos)
	Original (n)	Com réplicas (N)			
8	100	202	102.0%	21	2.9
10	100	174	74.0%	16	2.2
19	112	208	85.7%	16	3.2
20	184	336	82.6%	16	30.0
23	168	312	85.7%	22	38.0
30	153	270	76.5%	44	42.1
Caso de estudo	202	610	202%	78	159.5

**Tabela 5. 10:** Tempo computacional referente à execução de 500 iterações

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0.976542
Quadrado de R	0.953635
Quadrado de R ajustado	0.944362
Erro-padrão	13.1146
Observações	7

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro-padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor P</i>
Intercepção	-70.5925	11.95226	-5.9062	0.001981
N° de clientes com réplicas (N)	0.365553	0.036047	10.14096	0.00016

**Tabela 5. 11:** Sumário do modelo de regressão linear (tempo computacional versus N)

Na Figura 5. 18 visualizam-se algumas situações em que o número de iterações parece excessivo (problema número 20 da literatura), enquanto que em outros parece deficiente (problema número 10 e o caso de estudo). No entanto, cada um dos exemplos foi testado para mais 500 iterações, não se tendo verificado qualquer evolução dos valores óptimos.

Definir o critério de paragem face ao número de iterações em que a solução não foi melhorada não nos pareceu o mais adequado pois se para uns exemplos parece ser o mais razoável (exemplo n° 20 da literatura), o mesmo não verifica noutros (exemplo n° 19 da literatura). Limitar pelo número de iterações, desde que o tempo computacional estimado (pelo modelo de regressão linear) seja compatível com a aplicabilidade do modelo, foi o que se nos pareceu mais razoável. Sendo os PVRP problemas de planeamento de natureza tática em que normalmente, uma vez encontrada a solução, ela será repetida por vários períodos, os tempos computacionais dispendidos em 500 iterações não pareceram excessivos para qualquer dos exemplos simulados.

## 5.2 Conclusões da análise do desempenho (1ª fase)

O modelo de construção de rotas construído com base nos Algoritmos de Optimização por Colónias de Formigas é bastante simples, fácil de testar e de implementar face ao pequeno número de parâmetros utilizados. Apresenta um bom desempenho na resolução deste tipo de problemas, embora se verifiquem algumas limitações na actuação da feromona dos ACO actuando sem a ajuda de procedimentos de pós-optimização. O desenvolvimento do algoritmo sem as estratégias de pós-optimização ( *fusão e trocas-entre-rotas*) leva a soluções de pouca qualidade, ficando claro que este tipo de algoritmos precisam de ser complementados com técnicas de pós-optimização com alguma complexidade.

A aplicação deste algoritmo a problemas de rotas de período único ( $t = 1$ ) não envolve qualquer tipo de adaptação, com a vantagem de as soluções obtidas nesta primeira fase do problema constituírem a solução final, uma vez que não existe qualquer tipo de calendarização nestes problemas. Aplicou-se o modelo ACO desenvolvido nesta dissertação a cinco problemas clássicos de rotas de período único (os clássicos VRP). Os problemas seleccionados encontram-se descritos em Christofides et al. (1979) e podem ser encontradas em <http://www.ms.ic.ac.uk/jeb/orlib/vrpinfo.html>. Comparam-se os resultados obtidos com outras técnicas que também recorrem aos algoritmos de formigas:  $AS_{rank}$ -CVRP de Bullnheimer et al. (1999b) e SbAS de Reimann et al. (2002), assim como aos melhores resultados até então publicados – ver Tabela 5.12.

Identificação	Número de clientes (n)	Capacidade (Q)	Melhor publicado	$AS_{rank}$ (1999)	SbAS (2002)	ACO
			valores da função objectivo			
C1	50	160	524.61 <sup>a</sup>	524.6	524.6	524.6
C2	75	140	835.26 <sup>a</sup>	844.3	838.6	839.2
C3	100	200	826.14 <sup>a</sup>	832.3	828.7	827.7
C4	150	200	1028.42 <sup>a</sup>	1061.6	1040.1	1041.4
C5	199	200	1291.45 <sup>b</sup>	1343.5	1303.5	1324.3

<sup>a</sup> Taillard, 1993

<sup>b</sup> Rochat e Taillard, 1995

**Tabela 5. 12:** Resultados do ACO desenvolvido aplicado a problemas de rotas (VRP) da literatura

A consulta da Tabela 5.12 permite constatar sobre o bom desempenho do algoritmo desenvolvido quando aplicado a VRP, obtendo-se resultados do mesmo nível ou melhores que os resultados obtidos noutros procedimentos ACO desenvolvidos por outros autores.

### **5.3 Análise da segunda fase do algoritmo**

Na segunda fase do algoritmo constrói-se um grafo a partir da solução da primeira fase: as rotas representam os vértices e as arestas os conflitos entre rotas (existe conflito entre duas rotas se elas tiverem um ou mais pontos de visita em comum).

Com o objectivo de ajustar a solução da primeira fase a uma solução que verifique a unicidade de visita diária a cada localidade e, se possível, que obedeça às restrições de espaçamento entre visitas consecutivas, é resolvido um problema de coloração de grafos (formulado no Capítulo 4). O problema de coloração de grafos pode ser resolvido sobre a solução final da primeira fase, ou sobre a solução que se obtém após uma fase de transição que incentiva a construção de rotas semelhantes diminuindo o número de arestas do grafo.

Nesta secção começa-se por avaliar os efeitos da fase de transição, seguindo-se uma secção onde se ilustram as características do problema de coloração de grafos.

#### **5.3.1 Aplicação da fase de transição**

Na fase de transição activa-se a feromona local que vai influenciar a construção das rotas, incentivando a construção de rotas semelhantes. Esta feromona torna-se activa após término da primeira fase, percorrendo um número de iterações com a feromona local activa. O objectivo desta fase é obter soluções estruturalmente mais vantajosas para a resolução do problema de coloração do grafo que se gera a partir da solução obtida.

A aplicação da feromona local pode levar à deterioração da solução. Na Tabela 5. 13 comparam-se, para alguns problemas, os resultados da aplicação desta fase, ilustrando o número de pares de rotas com 2 ou mais pontos de visitas em comum, os quais vão originar arestas fortes (indicadas na tabela por “F”), e os pares de rotas com 1 único ponto em comum, os quais vão originar arestas fracas (indicadas na tabela por f).

Prob nº	Sem fase transição			Com fase de transição		
	Valor da Solução	Características do grafo		Valor da Solução	Características do grafo	
		Vértices	Arestas		Vértices	Arestas
8	2041	21	49 F 16 f	2086	22	54 F 19 f
10	1580	16	11 F 21 f	1603	16	21 F 10 f
13	3545	61	7 F 24 f	3603	61	9 F 20 f
19	4821	16	24 F 6 f	4846	16	24 F 0 f
20	8367	16	24 F 0 f	8374	16	24 F 0 f
23	6584	24	40 F 24 f	6702	23	41F 14 f
30	75417	43	63 F 150 f	76677	43	56 F 177 f
Caso de estudo	1929	78	148 F 203 f	1933	78	150 F 175 f

**Tabela 5. 13:** Efeito da fase de transição

De um modo geral, a aplicação da fase de transição provoca uma ligeira degradação no valor da função objectivo e um aumento das arestas fortes em detrimento das arestas fracas. Este efeito diminui a necessidade de se recorrer à coloração do grafo relaxado para se obter um número de cores inferior ou igual ao comprimento do horizonte temporal. Adicionalmente, o número de pontos que após a coloração não obedecem aos padrões da calendarização é normalmente menor quando aplicada a fase de transição, facilitando conversão da solução para uma solução admissível. Estas características são ilustradas no Anexo D, onde se apresentam os resultados da aplicação do modelo de duas fases aos problemas da literatura.

### 5.3.2 O problema de coloração de grafos

O problema de coloração de grafos formulado no Capítulo 4 difere do problema clássico de coloração por conter um conjunto de variáveis e de restrições adicionais que garantem o equilíbrio entre o número de vértices de cada cor e, em simultâneo, a admissibilidade dos padrões da calendarização de clientes a visitar. Podendo ser impossível a resolução de um problema com este vasto conjunto de restrições, é dada prioridade ao cumprimento das restrições de calendarização aos clientes geograficamente mais afastados do depósito.

Na Tabela 5.14 é realçada a importância do conjunto de restrições acrescentadas ao problema clássico de coloração de grafos (restrições (4.23) a (4.28) da secção 4.2.2.3), por diminuírem significativamente o número de pontos a visitar com incumprimento do calendário de visita após a resolução do problema de coloração. São comparados os números de pontos de visita que não obedecem às restrições de calendarização, após a resolução do problema de coloração, quando se englobam (ou não) as restrições adicionais na formulação do problema de coloração.

<i>Prob. n°</i>	Número de “falhas”							Caso de estudo
	8	10	13	19	20	23	30	
<b>Sem</b> restrições (4.23) a (4.28)	27	27	8	12	0	42	14	27
<b>Com</b> as restrições (4.23) a (4.28) <i>(sem fase transição)</i>	14	25	6	12	0	40	2	11
<b>Com</b> as restrições (4.23) a (4.28) <i>(com fase transição)</i>	17	17	5	0	0	13	1	6

**Tabela 5. 14:** O efeito das restrições adicionais no problema de coloração de grafos

Os problemas de coloração de grafos são resolvidos recorrendo ao CPLEX Interactive Optimizer 8.1.0..

## 5.4 Aplicação do modelo de duas fases ao caso de estudo

A execução da primeira fase do modelo aplicada ao caso de estudo gerou uma solução com 78 rotas – consultar Anexo C – que engloba a visita a 202 locais de recolha um número diferenciado de vezes: 27 locais com 6 visitas semanais, 98 com 3 visitas semanais e os restantes 77 locais com 2 visitas. O total de contentores recolhidos é de 9248, percorrendo uma distância entre localidades de 1929 quilómetros.

A segunda fase pode incidir sob a solução final da primeira fase ou, em alternativa, incidir na solução obtida após a execução da fase de transição. Serão apresentados resultados que permitem comparar as duas alternativas: começa-se com a apresentação dos resultados sem aplicação da fase de transição e posteriormente os resultados provenientes da aplicação da fase de transição. No Anexo C são apresentados mais detalhes destes resultados.

### 5.4.1 Resolução da segunda fase sem aplicação da fase de transição

O grafo construído a partir da solução da primeira fase contém 78 vértices (nº de rotas) e 351 arestas sem qualquer componente desconexa, com número cromático igual a nove. Isto é, o número mínimo de cores necessárias para colorir o grafo de modo que nenhum par de vértices adjacente tenha a mesma cor é 9. Por se pretender um número de cores igual ao número de dias com recolha, procedeu-se à coloração do problema relaxado.

O grafo do problema relaxado é composto por 78 vértices e 148 arestas e engloba 8 componentes desconexas, o que permite a coloração independente de cada componente. Na Tabela 5.15 apresenta-se uma descrição sumária da constituição das componentes.

Componente	Descrição	Nº cromático
Subgrafo 1	10 rotas	5
Subgrafo 2	3 rotas	3
Subgrafo 3	29 rotas	7
Subgrafo 4	2 rotas	2
Subgrafo 5	16 rotas	5
Subgrafo 6	6 rotas	6
Subgrafo 7	2 rotas	2
Subgrafo 8	6 rotas	6

**Tabela 5.15:** Componentes desconexas do grafo relaxado do caso de estudo

Às 74 rotas distribuídas pelos 8 subgrafos acrescentam-se 4 rotas que, por conterem apenas a visita a um único local, não foram englobadas no conjunto de subgrafos desconexos do grafo.

A coloração dos subgrafos de menor dimensão é imediata. Os três subgrafos de maior dimensão foram resolvidos recorrendo CPLEX Interactive Optimizer 8.1.0. para obtenção da solução do problema de coloração formulado no Capítulo 4.

Os problemas que surgem devido à coloração de um problema relaxado só são relevantes se forem em locais com mais que um padrão admissível (locais com duas ou três recolhas semanais) pois aqueles em que só existe uma possibilidade de calendarização (que é o caso dos locais de visita diária) são de resolução imediata. A coloração gerou quatro problemas em locais com três visitas semanais e um num pondo de duas visitas. Aos 5 problemas que surgem por se ter colorido um problema relaxado acrescentam-se mais 11 locais onde não são satisfeitas as condições de espaçamento entre visitas: 3 com três visitas semanais e 9 com duas visitas semanais. Estes problemas foram solucionados redistribuindo a visita de modo admissível recorrendo aos procedimentos descritos na secção 4.2.3 que se baseiam em reorganizar as calendarizações com base nas calendarizações dos locais vizinhos.

Uma vez obtida uma calendarização admissível para todos os locais de visita resolveu-se para cada dia de semana um VRP usando o algoritmo ACO desenvolvido na primeira fase do modelo.

Com a resolução dos VRP para os diferentes dias da semana (Tabela 5.16) obtém-se uma solução com um total de 1945 quilómetros a percorrer entre localidades.

	<b>Seg.</b>	<b>Terça</b>	<b>Quarta</b>	<b>Qui.</b>	<b>Sex.</b>	<b>Sáb/Dom</b>	<b>Total</b>
<b>Contentores a recolher</b>	1837	1498	1544	1559	1865	945	<b>9248</b>
<b>Nº de localidades a visitar</b>	144	96	88	100	149	33	<b>610</b>
<b>Distância percorrida</b>	429	309	297	331	460	119	<b>1945</b>
<b>Nº de rotas</b>	16	13	13	13	16	8	<b>79</b>

**Tabela 5. 16:** Síntese dos resultados finais do caso de estudo (sem fase de transição)



### 5.4.2 Resolução da segunda fase com aplicação da fase de transição

A solução gerada após a fase de transição envolve 78 rotas com o valor da função objectivo igual a 1933 quilómetros. O grafo construído a partir desta solução contém 78 vértices, 325 arestas com 3 componentes desconexas. Uma componente com apenas 3 vértices, outra com 6 vértices e uma terceira com os restantes vértices (69). A coloração das duas primeiras componentes é imediata. A coloração da terceira componente gera uma solução de 8 cores, sendo necessário proceder à coloração do problema relaxado no sentido de se obter uma solução com menor número de cores.

Após coloração garante-se a unicidade de visita diária e uma calendarização admissível para um conjunto de 193 locais. A calendarização das restantes nove localidades é convertida em admissível reorganizando as visitas com base nas calendarizações dos locais vizinhos.

A solução final envolve 80 rotas distribuídas pelos diferentes dias da semana, com uma distância total a percorrer entre localidades de 1924 quilómetros. Na Tabela 5.17 apresenta-se um resumo da solução obtida.

	Seg.	Terça	Quarta	Qui.	Sex.	Sáb/Dom	Total
<b>Contentores a recolher</b>	1912	1708	1396	1732	1619	881	9248
<b>Nº de localidades a visitar</b>	139	134	71	121	118	27	610
<b>Distância percorrida</b>	443	395	257	406	331	92	1924
<b>Tempo total (horas)</b>	70.0	62.5	49.4	63.5	58.2	29.4	333.0
<b>Nº de rotas</b>	17	15	12	15	14	7	80

**Tabela 5. 17:** Síntese dos resultados do caso de estudo (com fase de transição)

Na Tabela 5. 18 ilustram-se os efeitos da fase de transição, evidenciando-se mais uma vez as conclusões referidas na secção anterior relativamente à aplicação da fase de transição (secção 5.3.1).

Sem fase de transição	Com fase de transição
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Solução antes da coloração = 1929 km;</li> <li>• Grafo de 351 arestas <ul style="list-style-type: none"> <li>- 148 fortes;</li> <li>- 203 fracas;</li> <li>- 0 componentes desconexas;</li> </ul> </li> <li>• Solução após coloração: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 27 problemas da relaxação (frequência=6);</li> <li>- 5 problemas da relaxação (frequência≠6);</li> <li>- 11 de inadmissibilidade do padrão;</li> </ul> </li> <li>• Solução final: 79 rotas <ul style="list-style-type: none"> <li>- 1945 km;</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Solução antes da coloração = 1933 km;</li> <li>• Grafo de 325 arestas <ul style="list-style-type: none"> <li>- 150 fortes;</li> <li>- 175 fracas;</li> <li>- 3 componentes desconexas;</li> </ul> </li> <li>• Solução após coloração: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 27 problemas da relaxação (frequência=6);</li> <li>- 3 problemas da relaxação (frequência≠6);</li> <li>- 6 de inadmissibilidade do padrão;</li> </ul> </li> <li>• Solução final: 80 rotas <ul style="list-style-type: none"> <li>- 1924 km;</li> </ul> </li> </ul>

**Tabela 5. 18:** A fase de transição no caso de estudo

O número de rotas da solução final excedeu em 2 o número de rotas obtido na primeira fase.

Observe-se na Tabela 5. 19 a solução proposta para a recolha do primeiro dia da semana, segunda-feira. Cada equipa de recolha dispõe de 4 horas e 30 minutos para execução da sua rota e recolha dos contentores que lhe estão afectos.

No total das 17 rotas propostas para a recolha dos resíduos de segunda-feira, dispõem-se de  $270 \times 17 = 4590$  minutos totais para a recolha. A solução apresentada despence um total 4200 minutos. O diferencial (390 minutos) é o resultado do somatório das folgas da restrição tempo da totalidade das rotas. Na prática verificam-se algumas folgas que chegam a ter duração superior a meia hora. Ora, na rota número 15 a folga é de 124 minutos, isto é, aproximadamente 2 horas. Se as equipas de recolha se confrontassem com uma situação destas, deveriam continuar com a recolha noutro ponto, mesmo que não ficasse totalmente efectuada. No caso desta ficar incompleta acabariam o serviço no dia seguinte, ou seria terminada nesse dia por outras equipas.

Nº rota	Contentores esvaziados	Duração da rota (minutos)	Rota
1	131	254	Vis, 140, depósito
2	106	267	Vis, 34, 32, 33, 20, 23, 24, 21, 22,17, 16, 15, 14, 13, 11, 10, depósito
3	108	266	Vis, 40, 35, 37, 30, 31, 27, 26, 25, 29, 28, 12, 19, 18, 9, 8, 7, 6, depósito
4	105	262	Vis,144,172,170,171,169,168,167,156,155,152,151,146, depósito
5	118	264	Vis, 69, 70, 71, 72, 74, 73, 90, 91, 199, 198, 126, 127, 128, 129, depósito
6	115	256	Vis, 54, 58, 56, depósito
7	101	268	Vis, 149, 166, 202, 157, 158, 159, 164, 163, 162, 161, 160, 112, 116, 115, depósito
8	131	267	Vis, 75, 77, 87, 88, depósito
9	86	229	Vis, 114, 113, 200, 111, 110, 109, 106, 105, 107, 108, 102, 104, 103, 100, 101, 124, 125, 123, 130, 131, depósito
10	131	265	Vis, 175, 174, 181, 173, 148, depósito
11	109	217	Vis, 176, 177, 147, depósito
12	115	268	Vis, 44, 57, 53, 48, 51, 50, 68, 52, depósito
13	126	255	Vis, 46, 47, 76, 142, 132, depósito
14	129	260	Vis, 2, 5, 3, 4, 1, 137, 138, depósito
15	72	146	Vis, 143, 145, 133, depósito
16	124	252	Vis, 45, 41, 42, 43, 178, 141, depósito
17	105	206	Vis, 139, 136, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>1912</b>	<b>4200</b>	<b>Recolha de 139 pontos</b>

**Tabela 5. 19:** Conjunto de 17 rotas para a recolha de segunda-feira

Sendo uma actividade que pode ser fraccionada, isto é, é possível repartir a recolha do contentores de uma localidade por diferentes equipas, uma modelação que permita pontualmente este fraccionamento pode levar a soluções mais próximas da realidade e também mais económicas.

Neste sentido, admitiu-se a possibilidade de fraccionamento da recolha no momento em que se dá a pós-optimização que tenta fundir rotas -  *fusão*- com posterior  *trocas-entre-rotas*. Como o interesse é diminuir o número de rotas, isto é, que a  *fusão* tenha sucesso, permite-se que essa fusão se efectue mesmo que a solução actual sofra um ligeiro agravamento. Na maior parte dos casos esta degradação é compensada na posterior fase de  *trocas-entre-rotas*.

Com a divisão da recolha da localidade identificada com o número 143 (engloba a recolha de 50 contentores) por 4 rotas obteve-se uma nova solução para recolha de segunda-feira (Tabela 5.20) com menos uma rota, diminuindo a folga total da restrição tempo e aumentando a distância a percorrer em 2 quilómetros.

Nº rota	Contentores esvaziados	Duração da rota (minutos)	Rota
1	131	254	Vis, 140, depósito
2	106	267	Vis, 34, 32, 33, 20, 23, 24, 21, 22,17, 16, 15, 14, 13, 11, 10, depósito
3	108	266	Vis, 40, 35, 37, 30, 31, 27, 26, 25, 29, 28, 12, 19, 18, 9, 8, 7, 6, depósito
4	110	270	Vis,178,177, 172, 170,171,169,168,167,156,155,152,151 depósito
5	118	264	Vis, 69, 70, 71, 72, 74, 73, 90, 91, 199, 198, 126, 127, 128, 129, depósito
6	120	268	Vis, 56, 58, 54, 143, depósito
7	101	268	Vis, 149, 166, 202, 157, 158, 159, 164, 163, 162, 161, 160, 112, 116, 115, depósito
8	131	267	Vis, 75, 77, 87, 88, depósito
9	107	269	Vis, 141, 114, 113, 200, 111, 110, 109, 106, 105, 107, 108, 102, 104, 103, 100, 101, 124, 125, 123, 130, 131, depósito
10	131	265	Vis, 175, 174, 181, 173, 148, depósito
11	135	268	Vis, 176, 147, 143, 146, depósito
12	115	268	Vis, 44, 57, 53, 48, 51, 50, 68, 52, depósito
13	126	255	Vis, 46, 47, 76, 142, 132, depósito
14	129	260	Vis, 2, 5, 3, 4, 1, 137, 138, depósito
15	119	247	Vis, 45, 41, 42, 43, 144, 143, 145, depósito
16	125	248	Vis, 143, 136, 139, 133, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>1912</b>	<b>4204</b>	<b>Recolha de 139 pontos</b>

**Tabela 5. 20:** Conjunto de 16 rotas para a recolha de segunda-feira

Situações deste tipo acontecem essencialmente em pontos cuja localização é, ou muito próxima do ponto de partida, ou do depósito. A localidade representada com o número 143 corresponde a uma localidade dos arredores de Viseu, localizada numa das principais saídas da cidade. Ora a recolha fraccionada não acarreta grandes acréscimos na distância percorrida pois as equipas não têm que fazer grandes desvios para lhe acederem.

Este procedimento provocou a diminuição de apenas uma rota para segunda-feira, pois é o dia em que a folga total da restrição tempo é superior. As folgas totais são agora de 116 minutos na segunda-feira, 298 minutos na terça-feira, 273 minutos na quarta-feira, 238 minutos na quinta-feira 290 minutos na sexta-feira e 126 minutos no domingo.

Na Tabela 5.21 apresenta-se uma síntese da solução final, com 79 de rotas e uma distância total de 1926 quilómetros. No Anexo C encontra-se uma descrição mais pormenorizada da solução final proposta.

	<b>Seg.</b>	<b>Terça</b>	<b>Quarta</b>	<b>Qui.</b>	<b>Sex.</b>	<b>Sáb/Dom</b>	<b>Total</b>
<b>Contentores a recolher</b>	1912	1708	1396	1732	1619	881	9248
<b>Nº de localidades a visitar</b>	139	134	71	121	118	27	610
<b>Distância percorrida</b>	445	395	257	406	331	92	1926
<b>Nº de rotas</b>	16	15	12	15	14	7	79

**Tabela 5. 21:** Síntese dos resultados finais do caso de estudo



---

## Capítulo 6

### Modelo de construção de rotas e calendarização em simultâneo

---

Os algoritmos de resolução de problemas periódicos de estabelecimento de rotas sugeridos pela maior parte dos autores (Russell e Igo (1979), Christofides e Beasley (1984), Tan e Beasley (1984), Russell e Gribbin (1991)) consistem em inverter as fases do algoritmo proposto no Capítulo 4. Na primeira fase, os autores apresentam procedimentos que levam à afectação dos pontos a visitar aos diferentes dias da semana, criando uma calendarização inicial admissível para cada local a visitar. Numa segunda fase, procedem à construção das rotas recorrendo à resolução de VRP's para os diferentes dias do período. Posteriormente, poderão aplicar-se mecanismos de trocas, mais ou menos elaborados, que visam melhorar as soluções iniciais.

A calendarização dos pontos a visitar é feita de modo a que cada dia corresponda à visita de um conjunto pontos de uma determinada zona geográfica, isto é, são sugeridas técnicas que permitem gerar rotas de um modo eficiente, recorrendo a uma afectação diária dos pontos a visitar, formada por grupos de clientes pertencentes a uma mesma área geográfica.

Mais recentemente, Chao et al. (1995), Vianna et al. (1999) apresentam algoritmos menos elaborados nas afectações dos pontos a visitar aos dias da semana. Os autores apenas se preocupam com a admissibilidade da calendarização e na distribuição equilibrada da carga de trabalho pelos diversos dias do período em estudo, com posteriores aplicações de procedimentos de trocas de clientes com intuito de melhorar a solução inicial.

Neste capítulo é apresentado um modelo de resolução de problemas periódicos de estabelecimento de rotas que, tal como nos trabalhos de Chao et al. (1995), Vianna et al. (1999), se procede inicialmente à construção de um conjunto de rotas para os diferentes dias do horizonte temporal em estudo (secção 6.1), que obedecem às restrições de calendarização das visitas visando o equilíbrio da carga de trabalho diária. A construção da solução inicial também visa a proximidade geográfica entre o conjunto de clientes de cada dia do período. À solução inicial segue-se a aplicação de um mecanismo de trocas de clientes que permite

alterações das calendarizações iniciais (apresentado na secção 6.2), com o objectivo de melhorar o conjunto de rotas da solução inicial.

A experimentação computacional deste modelo é apresentada na secção 6.3, seguindo-se a apresentação dos resultados da aplicação do modelo ao caso de estudo. Na secção 6.5 compara-se o desempenho dos dois modelos apresentados nesta dissertação e por fim, confronta-se a solução proposta para o caso de estudo com os resultados actualmente em vigor da recolha dos resíduos sólidos urbanos do concelho de Viseu.



## 6.1 Solução inicial

Nesta secção descrevem-se os procedimentos necessários à construção de um conjunto de rotas a serem realizadas nos diferentes dias do horizonte temporal. O conjunto de rotas é construído de modo a que os clientes sejam visitados um número diferenciado de vezes (tantas quantas as necessidades de visita no período em estudo), obedecendo às restrições de calendarização das visitas. Adicionalmente, pretende-se que na solução encontrada exista equilíbrio na carga de trabalho entre os dias do horizonte temporal e uma proximidade geográfica entre os locais a visitar em cada dia do período.

Para o caso em estudo, em termos práticos e reais, pareceu não haver motivo que justificasse condicionar a recolha diária a uma zona geográfica, pois tem sentido tal não acontecer, como por exemplo: “*À segunda-feira, porque não há-de ir uma brigada fazer a recolha a Norte do concelho e outra para Sul?*”

Inicialmente pensou-se ser um factor irrelevante; contudo, após alguns estudos mais cuidados, verificou-se que o desempenho do algoritmo melhorava consideravelmente se esse aspecto fosse contemplado. Esta análise será ilustrada na secção 6.3.2.3. Assim, aliámos a ideia das primeiras heurísticas propostas, onde havia a preocupação de criar uma calendarização dos locais a visitar de modo que a cada dia correspondesse uma determinada zona geográfica, com as ideias dos trabalhos mais recentes atrás referidos, que se baseiam em simplesmente arranjar uma solução inicial admissível com equilíbrio na carga laboral nos diferentes dias do período.

Note-se que, para a solução inicial ser admissível, além do cumprimento de todas as restrições associadas às rotas (tempo permitido por rota, capacidade do veículo, frequência de visita de cada cliente no período em estudo, etc), também é necessário que se verifiquem os intervalos temporais recomendáveis entre visitas consecutivas.

### 6.1.1 Equilíbrio da carga de trabalho

Para o caso em estudo, a carga de trabalho diário mede-se pelo tempo necessário para a realização das actividades inerentes à recolha. Estas actividades podem-se dividir pelos percursos entre localidades que o veículo de recolha tem que efectuar, e pela descarga dos

contentores existentes nas localidades. A recolha de cada contentor é uma tarefa que consome tempo. O tempo dispendido com a recolha de cada contentor é estimado em cerca de 1.8 minutos.

A título ilustrativo, observe-se a Tabela 6.1 referente à solução obtida no Capítulo 5 para o caso de estudo:

	Dias da semana					
	Seg.	Ter.	Qua.	Qui.	Sex.	Sáb/ Dom
Nº contentores recolhidos	1912	1708	1396	1732	1619	881
Nº de locais visitados	139	134	71	121	118	27
<b>Tempo</b> dispendido na <b>recolha</b> dos contentores (minutos)	3524	3148	2573	3192	2984	1624
Quilómetros percorridos	443	395	258	406	331	92
<b>Tempo</b> dispendido <b>entre localidades</b> (minutos)	677	604	394	620	506	141
Tempo Total diário	4200	3752	2966	3812	3490	1764
%(tempo recolha/tempo total)	83.9%	83.9%	86.7%	83.7%	85.5%	92.0%

**Tabela 6. 1:** Avaliação da carga de trabalho diária

Cerca de 85% do tempo é dispendido na visita e descarga dos contentores, sendo esta a parcela mais relevante do esforço laboral. Assim, a solução inicial para o caso de estudo será gerada de modo que haja equilíbrio no número de contentores a recolher por dia.

Nos exemplos da literatura, a solução inicial será gerada de modo análogo, isto é, visando um equilíbrio entre a quantidade de produtos diários recolhidos (ou distribuídos).

À quantidade total de produtos a recolher (ou a distribuir) durante o horizonte, que é dada pela expressão  $\sum_{i=1}^n q_i e_i$ , (onde  $q_i$  e  $e_i$  correspondem respectivamente à quantidade e frequência de visita do cliente  $i$ ), subtraem-se as parcelas dos clientes com visita diária obrigatória. O valor obtido, representado por  $H$ , deverá ser distribuído, do modo mais homogêneo possível, pelos diversos dias do período.

### 6.1.2 Construção das rotas com proximidade geográfica

São vários os algoritmos referenciados na literatura que permitem uma calendarização dos pontos a visitar de modo que cada dia corresponda à visita de pontos de uma determinada zona geográfica: Russel e Igo (1979) recorrem à criação *clusters* de clientes, gerando pontos, que o autor designa “nucleus”, em torno do qual se vão agregar outros clientes com base no cálculo de médias e variâncias de distâncias entre os clientes; Christofides e Beasley (1984) recorrem ao problema p-mediana e ao problema do caixeiro viajante; Tan e Beasley (1984) e Russel e Gribbin (1991) propõem heurísticas baseadas na formulação e algoritmo de Fisher e Jaikumar (1981).

A elevada complexidade das heurísticas em que está presente a componente geográfica e o bom desempenho e simplicidade do algoritmo das formigas descrito no Capítulo 4 na resolução de VRP, foram motivos que incentivaram o uso dos ACO neste modelo. O algoritmo ACO usado nesta secção é o apresentado na primeira fase do Capítulo 4 desta dissertação. A aplicação deste algoritmo nesta secção não contempla qualquer criação de réplicas dos clientes, sendo sempre usado para resolução problemas de período único, isto é, VRP em vez de PVRP.

Em termos genéricos, pode-se dizer que para cada dia da semana é resolvido um problema de estabelecimento de rotas abrangendo o conjunto de clientes com possibilidade de visita nesse dia, até que se atinja a carga de trabalho afecta a esse dia. Segue-se uma descrição mais detalhada usando o caso em estudo como exemplo ilustrativo.

Para o primeiro dia do período em estudo (segunda-feira) é resolvido um problema de estabelecimento de rotas recorrendo ao algoritmo ACO desenvolvido na primeira parte do Capítulo 4. Como no caso de estudo qualquer local pode ter recolha à segunda-feira, para este primeiro dia, em cada iteração, são construídas rotas livremente com qualquer ponto até que, na solução em curso, se encontre um conjunto de pontos para o qual o somatório dos contentores recolhidos, nos locais a visitar com 2 ou 3 três visitas semanais, atinja um número de contentores igual a H (H=792 contentores). A partir desse momento, a construção da rota continua, mas fica restrita à visita dos locais com visita diária obrigatória ainda não inseridos em alguma rota.

Após cada iteração é libertada a feromona, actualizando assim o “rasto” de feromona ou a memória no algoritmo.

Ao fim de 70 iterações, o processo iterativo pára. Como se teve oportunidade de verificar no ACO desenvolvido, após aproximadamente 70 iterações já é bem visível o efeito da feromona e o processo encontra-se numa fase estável (qualquer que seja a dimensão do problema). Adicionalmente, a solução pretendida vai ser alvo de grandes modificações não se lhe exigindo muita qualidade.

Uma vez encontrado o conjunto de locais a visitar para o primeiro dia do período e as respectivas rotas, têm que se impor algumas condições aos dias que se seguem. Localidades com duas únicas vistas semanais, se fazem parte da solução encontrada para segunda-feira, não poderão ser contemplados nos dois dias que lhe seguem; por outro lado, se não fazem parte da solução de segunda-feira, terão que, obrigatoriamente, fazer parte da solução de terça-feira, pois é-lhes exigido um intervalo mínimo entre visitas de dois dias. Passa-se uma situação análoga com os locais com três visitas semanais: se não estão contemplados na solução de segunda-feira, terão que fazer parte da solução de terça-feira pois a exigência de pelo menos um dia de intervalo no conjunto das três visitas obriga ao mínimo de quatro dias entre a primeira e a última visita. Uma vez definidas estas restrições e encontrada a solução correspondente, segue-se a actualização das novas restrições para os dias consecutivos, e assim sucessivamente até encontrarmos a solução do último dia. O último dia útil de recolha do caso em estudo é sexta-feira. Para o fim-de-semana também se procede à construção das rotas mas apenas com os clientes.

O processo de construção das rotas em paralelo (descrito no Capítulo 4) basicamente consiste em, a partir do cliente de poupança ( $s_{ij}$ ) mais elevada,  $i$ , escolher o cliente  $j$ , de entre o conjunto de todos os clientes possíveis com ligação a partir de  $i$  (conjunto  $\Omega$ ), de acordo com a distribuição de probabilidade definida na equação (4.2).

Os clientes “ $i_s$ ”, que servem de semente ao processo, não têm entre eles, qualquer proximidade geográfica. Este factor, adicionado à condição da construção de rotas em paralelo, permite a dispersão do conjunto de rotas pela área em estudo.

Numa tentativa de se continuar com uma heurística de construção em paralelo, onde as rotas sejam construídas com alguma proximidade geográfica entre elas, os pontos *semente* serão escolhidos por um critério diferente: o primeiro será escolhido aleatoriamente, seja  $i_1$ . A partir de  $i_1$ , e de acordo com a expressão de probabilidade, será escolhido o cliente  $j_1$  para construir a rota. Seja, [origem,  $i_1$ ,  $j_1$ , destino] ou [origem,  $j_1$ ,  $i_1$ , destino]. O próximo cliente “ $i$ ” a ser escolhido vai ser aquele que se localize mais perto de  $i_1$  e  $j_1$ . A partir dele escolher-se-á, probabilisticamente,  $j_2$  e assim sucessivamente. Isto é, à medida que se vão construindo as

rotas, a selecção do cliente *semente* é feita escolhendo o vizinho mais próximo entre o conjunto de clientes já inseridos em alguma rota. Deste modo evitamos a dispersão causada pela escolha do cliente  $i$  de maior poupança associada. Note-se, no entanto, que devido a restrições de calendarização, pode haver dias com exigências de visitas a clientes muito dispersos, não havendo qualquer possibilidade de criar zonas geográficas.

Na Figura 6.1 esquematiza-se o procedimento que permite encontrar uma solução inicial para qualquer problema de estabelecimento de rotas periódico. Seja  $t$  o comprimento do período em estudo e  $l = 1, \dots, t$  os diferentes dias do período e  $H$  a carga de trabalho a ser efectuada em cada dia, não contabilizando a carga comum a todas os dias ( $H$  não contempla o esforço laboral associado aos pontos de visita diária obrigatória).

---

**procedimento** solução inicial

**para**  $l=1$  até  $t$ :

Passo1: Seleccionar o conjunto de clientes  $\Omega_1$  com possibilidade de visita no dia  $l$

Passo2: Resolver VRP para o conjunto de clientes  $\in \Omega_1$  recorrendo ao modelo ACO

**enquanto** critério de paragem não for alcançado **fazer**

(A1) construir as rotas de entre os clientes do conjunto  $\Omega_1$  até se atingir  $H$ . Continuar a construção até contemplar todos os clientes de visita diária obrigatória.

(A2) Actualizar a feromona

(A3) Optimização local

**fim** {enquanto}

**fim** {ciclo  $l$ }

---

**Figura 6. 1:** O algoritmo para a solução inicial

## 6.2 Mecanismo de trocas

A solução inicial encontrada é submetida a um mecanismo de trocas de clientes entre rotas, que envolvem dias distintos, permitindo alteração da calendarização inicialmente estabelecida. Com este procedimento pretende-se melhorar a solução corrente.

Os movimentos entre clientes que envolvem mudança de padrão podem abranger mais que dois dias. Analise-se o seguinte exemplo do caso de estudo: seja  $i$  uma localidade com duas recolhas semanais, tendo a solução inicial afectado a visita da localidade  $i$  a dois dias da

semana (segunda-feira e quinta-feira). Uma tentativa de alteração da calendarização pode envolver dois dias ou três:

- Se o novo padrão de calendarização em avaliação envolve a visita à segunda-feira e sexta-feira, terá que se confrontar a poupança resultante de não se visitar a localidade  $i$  na quinta-feira com a visita de  $i$  na sexta-feira;
- Se o novo padrão contempla a visita à terça-feira e sexta-feira, terão que se confrontar os benefícios da remoção do cliente  $i$  na segunda-feira e na quinta-feira com os custos da inserção deste cliente no conjunto de rotas da terça-feira e da sexta-feira.

Levantam-se algumas questões:

- *Avaliam-se todas as possibilidades de padrões de calendarização?*
- *Como se contabiliza o custo da remoção de um cliente de um conjunto de rotas de um determinado dia?*
- *Como e onde se insere um cliente num conjunto de rotas de um determinado dia? E como se contabiliza o custo de inserção?*

As respostas a estas questões serão abordadas nas secções seguintes.

### **6.2.1 Lista de candidatos para as trocas do padrão da calendarização**

A avaliação de todas as possibilidades de troca poderá ser um processo muito moroso, principalmente se o número de padrões admissíveis for extenso, sendo necessário elaborar uma lista de movimentos candidatos.

Mais uma vez, e sem perda de generalidade, recorre-se ao caso de estudo para ilustrar os factores intervenientes na selecção da lista de movimentos candidatos.

No sistema de recolha de resíduos sólidos do concelho de Viseu, além das 77 localidades com recolha bissemanal, com três padrões de visita (segunda-feira e quinta-feira, segunda-feira e sexta-feira e, terça-feira e sexta-feira), existem 98 locais com três recolhas semanais, com 7 padrões de visita admissível, pois basta que as três visitas ocorram durante os cinco dias úteis de modo não consecutivo. Note-se que, em toda esta formulação, está-se a restringir a recolha dos pontos com 2 e 3 visitas aos dias úteis da semana, reservando para o fim-de-semana unicamente a recolha das localidades com seis visitas semanais, isto é das localidades com recolha diária dos contentores. Assim, não tem sentido incluir o fim-de-semana neste mecanismo de trocas pois em nada será afectado.

Atendendo à dimensão do problema e à multiplicidade de movimentos de trocas possíveis, os movimentos de troca ficam limitados àqueles que envolvam a alteração de apenas um dos dias do padrão da calendarização.

Na Tabela 6. 2 estão registados os números de movimentos de padrões entre os pontos com duas visitas semanais. Por exemplo, de A para C só há um movimento no padrão (de quinta-feira para sexta-feira), enquanto que de A para B existem duas alterações (de segunda-feira para terça-feira e de quinta-feira para sexta-feira).

	A: [1 0 0 1 0]	B: [0 1 0 0 1]	C: [1 0 0 0 1]
A: [1 0 0 1 0]	-	2	1
B: [0 1 0 0 1]	2	-	1
C: [1 0 0 0 1]	1	1	-

**Tabela 6. 2:** Número de movimentos entre padrões bissemanais

Na Tabela 6. 3 registam-se os movimentos entre padrões de clientes com três visitas semanais. Obviamente que estas tabelas são simétricas.

Ao avaliarem-se as trocas que envolvem apenas um movimento dos padrões simplifica-se o algoritmo, ao mesmo tempo que não se exclui nenhuma possibilidade pois, quer para os clientes com duas visitas semanais, quer para os clientes com três visitas, de um padrão atinge-se qualquer outro com sucessivos movimentos de apenas uma troca.

	[10101]	[10011]	[11010]	[11001]	[10110]	[01011]	[01101]
[10101]	-	1	2	1	1	2	1
[10011]	1	-	1	1	1	1	2
[11010]	2	1	-	1	1	1	2
[11001]	1	1	1	-	2	1	1
[10110]	1	1	1	2	-	2	2
[01011]	2	1	1	1	2	-	1
[01101]	1	2	2	1	2	1	-

**Tabela 6. 3:** Número de movimentos entre padrões trissemanais

Numa localidade com duas visitas semanais, com um calendário de visita expresso pelo padrão A, apenas será avaliada a troca para o padrão tipo C (pois para B envolveria movimento em dois dias). Se a troca se revelar vantajosa, ela será de imediato efectuada; caso contrário, ficará de reserva (desde que esse movimento não acarrete um custo superior a um valor a fixar). Se exceder esse valor, passa-se à análise da localidade seguinte. Se se procedeu à troca, o novo padrão passa agora a ser o C, e serão novamente avaliadas as novas possibilidades das trocas. Neste caso seriam avaliadas as possibilidades de troca para A ou para B, pois ambas envolvem apenas um movimento. No sentido de evitar ciclos, a possibilidade A será excluída. Se a troca é vantajosa, ou o saldo da primeira e segunda troca é positivo, efectua-se a troca e o processo termina (pois do padrão B só se atinge C, situação já avaliada); caso contrário, não se efectua a troca.

Este mecanismo, embora só admita movimentos de um único padrão de cada vez, permite de um padrão chegar a qualquer outro, passando por diferentes avaliações. Verifica-se situação análoga para locais com três visitas semanais, embora um pouco mais complexa, uma vez que o número de padrões é superior. Também para os locais com três visitas semanais qualquer padrão é atingível por sucessivas trocas de apenas um movimento do padrão.

Como no caso em estudo não existem locais a visitar com uma única visita semanal, e os pontos de recolha diária têm um padrão único, os movimentos em análise ficam restritos às localidades com duas ou três visitas semanais.

Para um determinado local de visita  $i$ , ao analisarem-se os possíveis movimentos que envolvem mudança de padrão, pode-se optar por proceder de imediato à primeira troca que se revele vantajosa ou, alternativamente, optar pela troca que revele maior benefício para a solução corrente. A nossa opção passou pela segunda estratégia, isto é, avaliam-se todas as trocas possíveis que envolvam apenas um movimento e opta-se pela mais vantajosa. Caso não exista nenhuma troca que acarrete benefício para a solução corrente, será efectuada a troca de reserva que menos penalize a solução actual desde que essa penalização não exceda um determinado valor  $v$  a definir. Ao permitir-se que um cliente mude de padrão mesmo penalizando ligeiramente a solução corrente consegue-se alcançar outros padrões, e o eventual acesso a soluções mais promissoras.

Numa tentativa de tornar menos moroso e mais simples o mecanismo de trocas, além de se analisarem apenas as trocas que envolvam uma alteração no padrão, não serão avaliadas exaustivamente todas as possibilidades. Só serão avaliadas as trocas entre dias de visita a



determinado cliente, se o conjunto de rotas do dia onde o cliente vai ser inserido tenha alguma proximidade geográfica com o cliente a inserir. Se uma localidade  $i$  é geograficamente afastada de qualquer rota do dia  $x$ , não será avaliada a inserção do local  $i$  nas rotas do dia  $x$ . A título ilustrativo observe-se o exemplo da Figura 6. 2, onde a tracejado estão representadas as rotas de um determinado dia da semana (por exemplo segunda-feira), e a contínuo as rotas de outro dia (por exemplo terça-feira). Uma análise de alteração no padrão do cliente  $i$  que envolvesse a hipótese de o inserir no conjunto de rotas de terça-feira, muito dificilmente se tornaria vantajosa pois todos os pontos pertencentes às rotas de terça-feira estão geograficamente bastante afastados do cliente  $i$ .

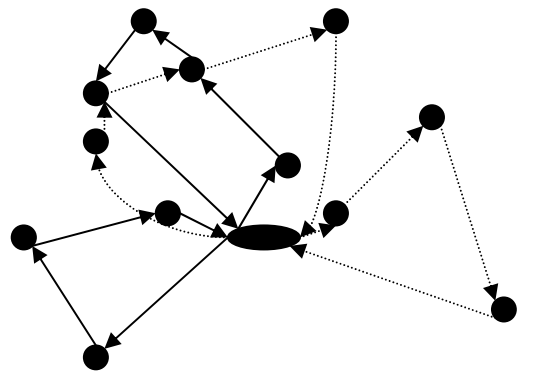


Figura 6. 2: Movimentos não analisados

Deste modo só serão avaliadas as trocas desde que, no conjunto de rotas pertencente ao dia do padrão receptor do cliente envolvido, existam pontos de visita *próximos* do cliente a inserir. Dois clientes  $a$  e  $b$  são considerados *próximos* se a distância que os une é menor ou igual a vez e meia a maior das menores distâncias entre dois clientes, isto é, se

$$d_{ab} \leq 1.5 \times \text{Max} \{ \min(d_{1j}), \min(d_{2j}), \dots, \min(d_{nj}), \forall j = \{ 1, \dots, n \} \} \tag{6.1}$$

Esta medida de proximidade permite a generalização para qualquer problema pois poderão existir problemas em que, pela sua concentração e distribuição geográfica, uma distância de 10 quilómetros seja muito grande, enquanto que noutros, com maior dispersão, esta mesma distância seja pequena.

Ao escolher-se a maior das menores distâncias de cada cliente, permite-se que cada cliente tenha pelo menos um cliente *próximo*. Para que o conjunto de clientes *próximos* de um determinado ponto não seja muito reduzido, afectou-se de 1.5 a medida acima referenciada, alargando o conjunto de clientes próximos. Por poderem existir situações em que este conjunto é composto por muitos elementos, limita-se o conjunto aos primeiros 10 vizinhos *próximos*.

A análise de troca de clientes que envolvem alguma proximidade geográfica, conjuntamente com a construção das rotas diárias afectas a zonas geográficas, exclui da análise um vasto conjunto de trocas, limitando a pesquisa do processo de trocas. O objectivo desta limitação centra-se em tornar menos exaustivo, logo menos demorado em termos de tempos de cálculo, o processo de trocas sem correr grandes riscos de excluir da análise trocas promissoras, mas tendo sempre consciência que esses riscos existem.

### 6.2.3 Remoção versus inserção

Para uma troca ser viável, considerou-se que o seu custo não poderá exceder um determinado valor a fixar  $v$ . O cálculo do custo das trocas depende do modo como se procede à remoção do cliente da rota inicial e como este se insere no conjunto de rotas do novo dia.

Chao et al. (1995), num trabalho onde também são analisados movimentos que envolvem trocas de padrões, avaliam os custos analisando todas as possibilidades de inserção. Por exemplo: um cliente com duas visitas cujas possibilidades de visita são segunda-feira e quarta-feira ou alternativamente terça-feira e quinta-feira, na mudança de padrão são avaliados os custos para todas as inserções possíveis. Considerem-se as rotas de terça-feira e de quinta-feira as representadas na Figura 6.3. Ao analisar a mudança de um cliente  $i$  que envolve a mudança de padrão de segunda-feira e quarta-feira para terça-feira e quinta-feira, os autores avaliam os custos de inserção do cliente  $i$  quando ele é visitado imediatamente após o depósito na rota A de terça-feira e após o cliente 1 e 2. Também é avaliada a inserção na rota B, avaliando-se os custos de inserção após o depósito, após o cliente 3, 4 e 5, sendo seleccionada a inserção de menor custo. Analogamente para quinta-feira são avaliados os custos de inserção do cliente  $i$  após o depósito, cliente 6, 7 ou 8 na rota C e também os custos de inserção após o depósito, cliente 9 e cliente 10 da rota D de quinta-feira, sendo

seleccionada a inserção de menor custo. O somatório dos dois custos menores (o menor de terça-feira e o menor de quinta-feira) totaliza o custo de inserção envolvido nesta troca.

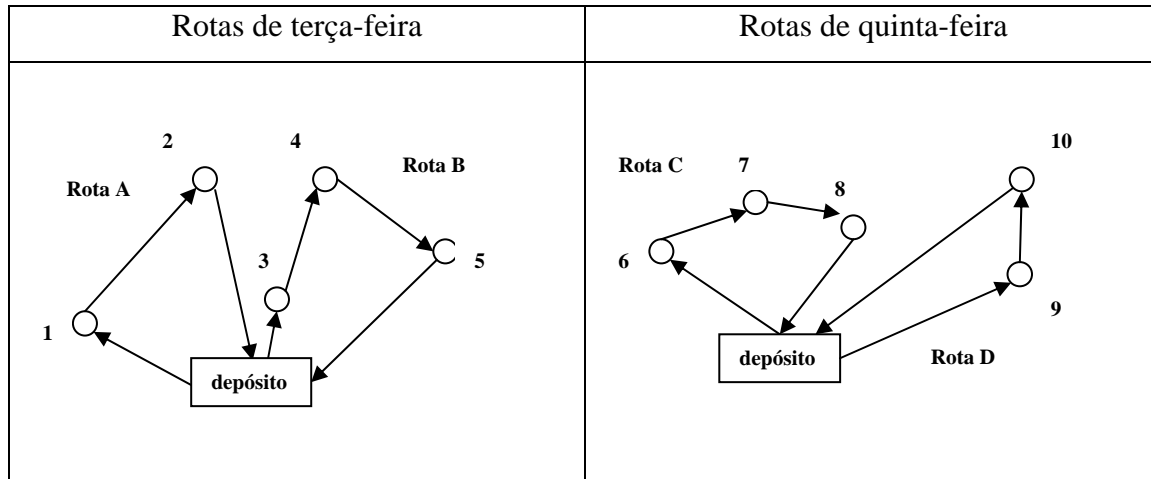


Figura 6. 3: Exemplo da avaliação proposta por Chao et al. (1995)

Nesta dissertação é apresentada uma alternativa ao modelo proposto por Chao et al. (1995).

Seja o cliente  $i$  pertencente à rota  $R_i = [0, \dots, i-1, i, i+1, \dots, 0]$  do dia  $\ell$  objecto de análise de mudança da padrão para o dia  $\ell+1$ . Será avaliada a troca se nas rotas do dia  $\ell+1$  existir um cliente que lhe seja próximo. Seja  $j \in R_j$  o cliente próximo tal que  $R_j = [0, \dots, j-1, j, j+1, \dots, 0]$ , sendo  $R_j$  uma rota do dia  $\ell+1$ .

Propõe-se uma avaliação que é composta por três etapas.

- Primeira etapa: calcular a poupança que advém da eliminação do cliente  $i$  da rota  $R_i$ , que pode ser representada pela expressão:

$$\text{Poupança} = (d_{i-1} + d_i + d_{i+1}) - (d_{i-1} + d_{i+1}) \tag{6.2}$$

- Segunda etapa: calcular o custo de inserção do cliente  $i$  na rota  $R_j$  quando o cliente  $i$  é inserido logo após o ponto de partida da rota, seguindo-se uma reordenação e optimização da rota  $R_j$  através de heurística 2-optimal. Designamos este custo por “C\_inserção 1”. Nesta etapa são ignoradas quaisquer restrições de capacidade do veículo ou de tempo permitido por rota.

Se o balanço dos custos não for inferior a um valor pré-definido  $\omega$ , é-se mais exigente no processo de inserção, e passa-se à terceira etapa.

- Terceira etapa: Reorganizam-se as rotas do dia receptor recorrendo ao mecanismo *troca-entre-rotas* descrito na secção 4.1.4 do Capítulo 4 que envolve trocas de clientes entre as diferentes rotas do dia  $\ell+1$ , gerando soluções de maior qualidade. Após a nova reorganização das rotas do dia  $\ell+1$  obtém-se, por comparação do custo da solução que não contempla  $i$ , o custo de inserção que designamos de “C\_inserção 2”.

Nestes movimentos de *trocac-entre-rotas* é permitido que se ultrapasse, de uma percentagem  $\gamma$ , os limites da admissibilidade das restrições de capacidade dos veículos ou/e tempo permitido por rota. Isto é, permite-se que na rota onde é inserido o cliente (rota  $R_j$ ), e em todas as rotas que estão envolvidas em trocas de clientes com  $R_j$ , se excedam ligeiramente os limites das restrições. Ao permitir-se a violação destas restrições, pretende-se obter uma maior flexibilidade na troca de clientes entre rotas, aumentando consequentemente a análise de padrões e assim obter melhores resultados.

Para cada cliente são efectuadas sucessivas mudanças de padrão até que o lucro associado à melhor troca não seja inferior ao valor  $\upsilon$  actualizando sucessivamente a solução. Se não forem encontradas trocas que envolvam benefícios ou que apresentem custos superiores a  $\upsilon$ , segue-se para a análise do cliente seguinte. O processo repete-se para todos os clientes. Se após a análise de mudança de padrão de todos os clientes a solução final melhora, todo este processo é repetido.

A terceira etapa, com a reavaliação que envolve o mecanismo de *troca-entre-rotas*, é a mais dispendiosa de todo o algoritmo (em termos de tempo de cálculo), daí a necessidade de se recorrer à segunda etapa que funciona como um filtro de passagem, uma vez que reduz o número de movimento sujeito à reavaliação da última etapa. Mais uma vez se está a restringir o número de trocas a analisar, correndo-se o risco de excluir de análise trocas promissoras. Pretende-se com este “filtro” que o risco seja pequeno e será, evidentemente, tanto menor quanto menor for  $\omega$ , havendo sempre a possibilidade de testar este parâmetro.

Na Figura 6.4 esquematizam-se os procedimentos acima descritos onde  $C_i$  representa o conjunto de padrões admissíveis do cliente  $i$ ,  $\ell_1$  o dia da remoção da visita,  $\ell_2$  o dia da inserção da visita e  $S_{\ell_i}$  o conjunto de rotas do dia  $\ell_i$ .

---

```

procedimento trocas de padrões de calendarização
definir valores para os parâmetros  $\Theta$  e  $\mathcal{U}$ 

Para  $i=1$  até  $n$  {ciclo dos clientes}
  Se  $i$  não tem visita diária então
     $A := \mathcal{U}$ ;
    Repete até  $A \geq \mathcal{U}$  {ciclo B}
      Para todos os padrões  $C_i$  com 1 movimento no padrão fazer{ciclo dos padrões}
        Se existe um cliente  $j \in R_j: R_j \in S_{\ell_2}$  próximo de  $i$  então
          Calcular a Poupança da remoção do cliente  $i$  de  $S_{\ell_1}$ 
          Aplicar 2-optimal a  $R_j \cup \{i\}$ ; calcular  $C_{inserção1}$ 
          Se  $Poupança - C_{inserção1} > \Theta$  então
            Aplicar troca-entre-rotas a  $S_{\ell_2} \cup \{i\}$ ; calcular  $C_{inserção2}$ 
             $A_1 = Poupança - C_{inserção2}$ 
            Se  $(A_1 > \mathcal{U})$  e  $(A_1 > A)$  e (as restrições de capacidade veículo e duração
              de rota não excedem  $Q_x\% \gamma$  e  $D_x\% \gamma$ ) então
                 $A := A_1$ ; e guarda o movimento mais vantajoso
            Fim {ciclo dos padrões}
          Se  $A > \mathcal{U}$  então
            efectua a troca associado ao valor  $A$  (mais vantajosa);
            actualiza a solução
          Fim {ciclo B}
        Fim {ciclo dos clientes}
      Fim (procedimento)

```

---

**Figura 6. 4:** O procedimento de trocas de padrões da calendarização

## 6.2.4 Conversão de solução inadmissível em admissível

Quando se permite construir rotas que ultrapassem os limites de admissibilidade das restrições de capacidade e de tempo permitido por rota, é possível que a heurística produza soluções inadmissíveis por violarem aquelas restrições.

Para converter uma solução inadmissível numa solução admissível resolvem-se sucessivos VRP's, um para cada dia do período em estudo. Para resolução do VRP recorre-se, mais uma vez, ao algoritmo ACO descrito no Capítulo 4 que, como tivemos oportunidade de mostrar, tem um bom desempenho na resolução deste tipo de problemas. À resolução dos múltiplos VRP's, e no sentido de melhorar a solução admissível obtida, segue-se o mecanismo de trocas, mas agora sem qualquer relaxação das restrições.

A vantagem deste mecanismo é a sua simplicidade e fácil aplicabilidade, conjuntamente com a garantia de que é sempre possível encontrar uma solução admissível.

Uma consequência que é inerente a todos os modelos que procedem a este tipo de conversão é o risco de poderem gerar soluções de baixa qualidade.

Para atenuar este efeito propõe-se se vá reduzindo as quantidades em que se permite extrapolar os limites das restrições à medida que decorre o algoritmo, sem nunca considerar valores demasiado altos.

Na Figura 6. 5 ilustram-se os passos fundamentais do modelo proposto para resolução do PVRP.

---

**Passo 1:** Inicialização

Gera uma solução inicial admissível recorrendo ao algoritmo ACO  
 Solução final:=Solução inicial  
 $\nu:=0$

**Passo 2:** Trocas

Define a taxa de relaxação ( $\gamma$ )  
 Para a Solução final:  
 Procede às trocas de padrões da calendarização

**Passo 3:** Conversão

Converte a solução do passo 2 numa solução admissível (se necessário)

**Passo 4:** Avaliação

**Se** (Solução obtida no passo 3 < Solução final) **então**  
 Solução final = Solução do passo 3  
 Volta ao passo 2

**Caso contrário**

**Se**  $\nu=0$  **então**

define um valor para o parâmetro  $\nu$   
 Volta ao passo 2

**Caso contrário** Pára

---

**Figura 6. 5:** Algoritmo de resolução de PVRP

### 6.3 Experimentação computacional

Nesta secção apresentam-se e analisam-se os resultados computacionais do modelo de resolução de problemas de rotas periódicos descrito neste capítulo.

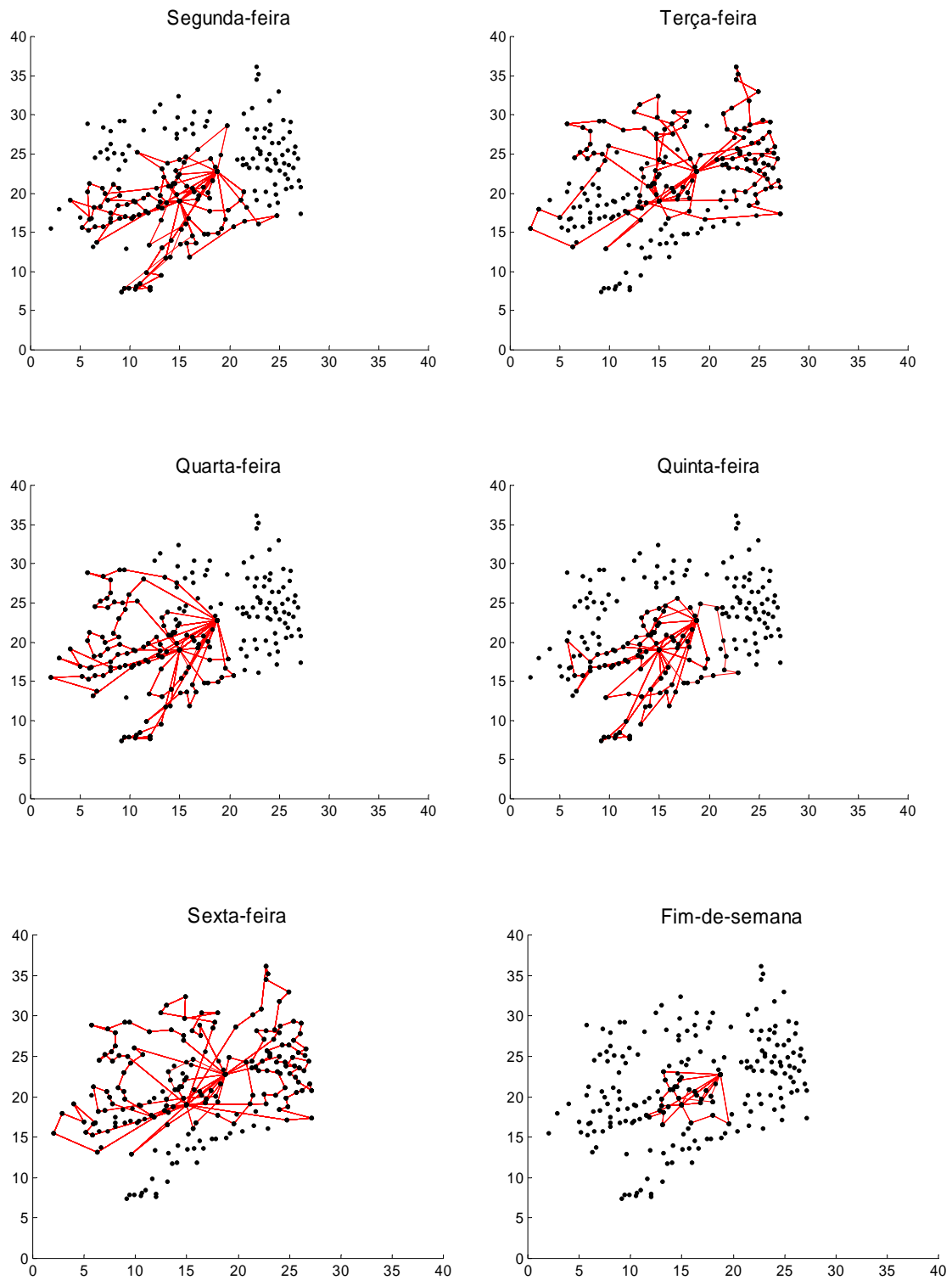
Inicia-se com uma análise da solução inicial onde são avaliados os efeitos da geração de conjuntos de rotas diárias com alguma proximidade geográfica. Segue-se um estudo do mecanismo de trocas que envolve mudanças de clientes entre dias, sendo feita uma análise da lista de movimentos candidatos à mudança de padrão, nomeadamente uma análise ao parâmetro  $\omega$  que filtra alguns movimentos. Também o parâmetro  $\% \gamma$ , que determina o quanto se permite que se ultrapassem os limites de admissibilidade das restrições capacidade e duração da rota, é estudado.

#### 6.3.1 Solução inicial

A solução inicial foi construída recorrendo ao algoritmo ACO de resolução de problemas de estabelecimento de rotas apresentados no Capítulo 4, tendo sido feitas algumas modificações no sentido de gerar conjuntos de rotas com alguma afinidade geográfica.

Quando se comparam os valores da função objectivo das soluções iniciais com e sem incentivo de proximidade geográfica, verifica-se que têm valores muito semelhantes (a título de exemplo no caso de estudo a função objectivo da solução inicial com incentivo geográfico é de 2099, contra 2111 sem incentivo geográfico). É após os movimentos de trocas de padrões que estas diferenças se vão realçar.

A Figura 6. 6 permite visualizar a solução inicial obtida para o caso de estudo. No caso de estudo, ao fim-de-semana apenas se visitam os pontos de visita diária obrigatória que correspondem a um grupo de localidades muito próximos do centro da cidade, localizados em torno da cidade de Viseu (consultar Figura 2.5 atrás ou gráfico da Figura 6. 6, correspondente ao fim-de-semana).

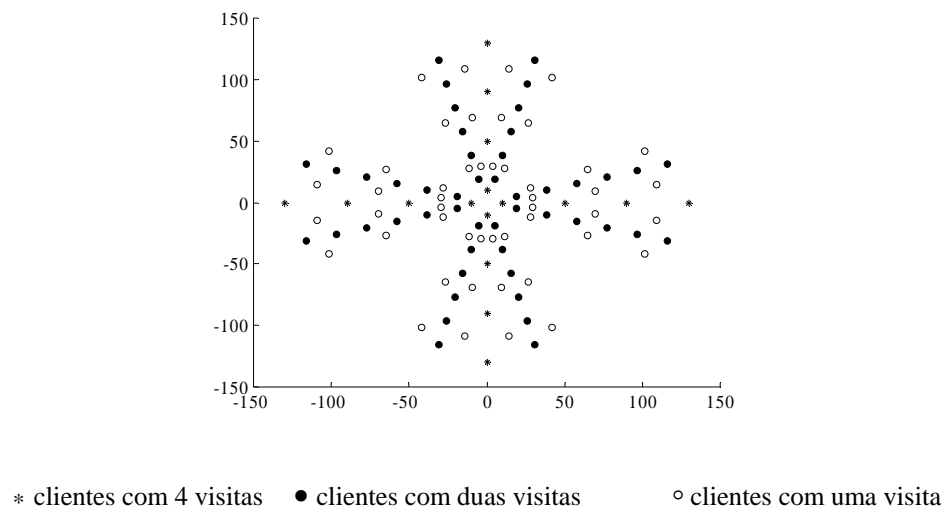


**Figura 6. 6:** Visualização das rotas da solução inicial do caso de estudo

Há situações, nomeadamente em alguns exemplos da literatura, em que existe uma grande dispersão geográfica dos pontos com visita diária obrigatória. A título de exemplo, podem-se referir os problemas da literatura apresentados por Chao et al. (1995) em que a



distribuição e frequência de visita apresentam uma configuração espacial que obedece a um padrão (a título de exemplo consultar a Figura 6. 7 referente à dispersão dos pontos do problema com o número 19 da literatura, com horizonte temporal igual a 4). Nestas situações é difícil, ou mesmo impossível, gerar soluções diárias afectas a zonas geográficas, pelo menos se existirem elas não são tão visíveis como em outras situações.



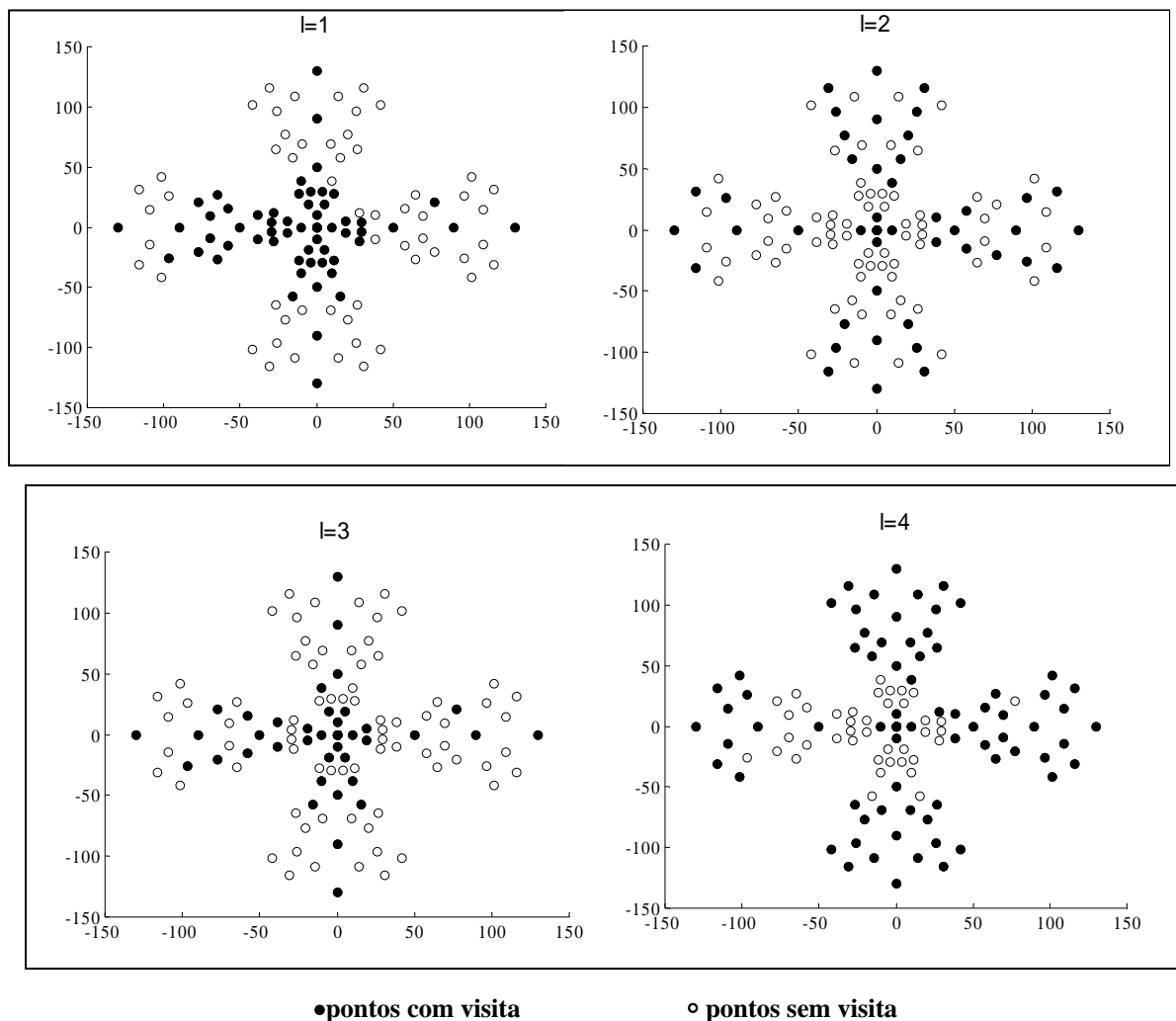
**Figura 6. 7:** Distribuição geográfica dos clientes do problema nº 19 da literatura

O procedimento de construção das soluções iniciais pode conduzir a soluções não tão equilibradas quanto o desejado. As restrições impostas pela calendarização podem implicar a obrigatoriedade de visita de uns clientes em alguns dias e a impossibilidade de visita noutros dias. Isto deve-se à simplicidade do procedimento proposto que funciona com soluções diárias estáticas: uma vez encontrada a solução do primeiro dia, esta não será mais alterada, mas influenciará determinantemente as soluções dos dias seguintes. A título de exemplo, analise-se uma situação comum dos exemplos da literatura de horizonte temporal igual a 4: os clientes de duas visitas são visitados no primeiro e terceiro dia, ou alternativamente, no segundo e quarto dia. Se um destes clientes foi visitado no primeiro dia, nunca poderá ser visitado no segundo nem no quarto dia, e obrigatoriamente terá visita no terceiro dia. Um conjunto de imposições análogas a esta pode provocar alguns desequilíbrios na carga de trabalho e soluções iniciais inadmissíveis ao gerar soluções com mais rotas do que o permitido. As soluções iniciais que não obedecem ao limite do número de rotas diário são admitidas pois, na fase de trocas que se segue à fase da construção da solução inicial, este problema de inadmissibilidade será colmatado.

A título de exemplo, observe-se a Tabela 6. 4 e a Figura 6.8 nas quais se ilustra a distribuição dos pontos da solução inicial para os 4 dias ( $l=1, \dots, 4$ ) do exemplo nº 19 da literatura.

	l=1	l=2	l=3	l=4	Total
Distância percorrida	1323.7	1361.2	1114.9	1789.7	<b>5589.6</b>
Quantidade recolhida/distribuída	141	134	122	163	<b>560</b>
nº de rotas	4	4	4	5	<b>21</b>
nº de localidades visitadas	56	43	37	72	<b>208</b>

**Tabela 6. 4:** A solução inicial do problema nº 19 da literatura



**Figura 6. 8:** Visualização das rotas da solução inicial do problema nº 19 da literatura

A solução inicial do problema nº 19 é inadmissível pois o dia de visita 4 ( $l=4$ ) contém 5 rotas e apenas há 4 veículos disponíveis por dia. Note-se no entanto que a solução inicial admite soluções com este tipo de violações.

### 6.3.2 Mecanismo de trocas

O mecanismo de trocas é um procedimento que melhora a solução inicial envolvendo movimentos de clientes entre rotas de dias distintos com a possibilidade de mudança de calendarização dos pontos de visita.

#### 6.3.2.1 Lista dos movimentos de trocas a avaliar

Seria muito dispendioso em termos de tempos computacionais avaliar todas as trocas entre clientes que envolvessem todas as alternativas entre padrões admissíveis. No sentido de restringir o conjunto de trocas a avaliar impõem-se três (ou duas como teremos oportunidade de ver no próximo parágrafo) condições que seleccionam os movimentos a avaliar:

- Na secção 6.2 referiu-se, dando como exemplo o caso em estudo, que seriam avaliados os movimentos que envolvessem apenas uma troca, pois com sucessivos movimentos admissíveis deste tipo, qualquer padrão admissível seria atingível. Podem existir problemas cujos padrões de calendarização não tenham características que permitam esta propriedade. Nestes casos esta condição não poderá ser imposta. A título ilustrativo retome-se mais uma vez o exemplo nº 19 da literatura. Este problema contém os seguintes grupos de clientes:
  - Um grupo de 16 clientes com visita diária obrigatória. Estes têm apenas um padrão admissível, logo não são sujeitos à qualquer análise de mudança de padrão;
  - Um grupo de 48 clientes com uma única visita em qualquer dos dias do período;
  - Um grupo de 48 clientes têm duas visitas, cujos 2 padrões de visita admissíveis podem ser representados por  $[1, 0, 1, 0]$  e  $[0, 1, 0, 1]$ . Qualquer alteração de padrão deste conjunto de clientes envolverá necessariamente dois movimentos. Ao

admitir-se apenas movimentos que envolvam uma troca, este grupo de clientes não seria alvo de avaliação.

A avaliação do modelo exposto neste capítulo passou pela aplicação do modelo a um grupo de 7 problemas da literatura (consultar Anexo B). Tal como no exemplo referenciado pelo nº 19, todos os outros têm características que os diferenciam do problema em estudo, no sentido em que não contemplam uma vasta gama de padrões de calendarização que permitam aceder aos padrões com sucessivas trocas unitárias. Nestes casos, e em todos os problemas em que não seja possível atingir os padrões admissíveis com apenas um movimento, serão avaliados os movimentos necessários para lhes permitir aceder aos padrões admissíveis.

- Só serão avaliadas as trocas entre clientes se no conjunto de rotas do dia receptor existir pelo menos um ponto com alguma proximidade do cliente a inserir. Esta condição conjuntamente com a construção de soluções em zonas geográficas diárias exclui de avaliação um vasto grupo de trocas, principalmente se as zonas geográficas forem bem definidas. Pela observação da Figura 6. 6, conclui-se que no caso de estudo muito dificilmente serão avaliadas trocas que envolvam a visita das localidades a Nordeste do concelho para quarta-feira; analogamente as localidades a Norte também não serão envolvidas em trocas para padrões que contemplem a visita à quinta-feira.
- A terceira e última barreira que filtra as trocas em avaliação está condicionada por um parâmetro – o **parâmetro  $\omega$** . O conjunto das trocas que cumprem os dois critérios acima mencionados passa por uma primeira e rápida avaliação. É avaliada a poupança associada à remoção e o custo inicial de inserção:  $C_{inserção1}$ . Se o balanço desta primeira análise “grosseira” não ultrapassar  $\omega$  ( $\omega \leq 0$ ), passa-se à verdadeira avaliação da troca que envolve o mecanismo *troca-entre-rotas*; caso contrário a troca fica excluída de avaliação.

Se  $\omega$  for um valor muito pequeno todas as trocas que cumprem os dois primeiros critérios são avaliadas; se for zero ou positivo, só serão avaliadas trocas que se revelaram vantajosas na primeira análise, sendo que na maioria dos casos são muito poucas as trocas nestas condições. Se o número de trocas possíveis que cumprem as duas primeiras condições não for muito extenso, considera-se para  $\omega$  um valor muito

pequeno, pois considera-se importante a aplicação deste “filtro” em exemplos, como o do caso em estudo, onde é muito grande o número de trocas que cumprem as duas primeiras condições. Caso contrário, o valor de  $\omega$  deverá variar de problema para problema dependendo da distribuição espacial dos clientes. Pode haver problemas em que  $\omega=-10$  funcione quase como  $\omega=0$ , impedindo a avaliação de um número excessivamente grande de trocas, como também problemas em que  $\omega=-10$  funcione como  $\omega=-\infty$ , isto é seja excessivamente pequeno permitindo a avaliação de todas as trocas. Uma boa medida é considerar

$$\omega = \frac{U}{2} + \frac{V}{n} \quad (6.3)$$

sendo,

$$U = \text{Max}\{\min(d_{1j}), \min(d_{2j}), \dots, \min(d_{nj}), \forall j=(1, \dots, n)\},$$

$$V = \sum_{i=1}^n (\min(d_{ij}), \forall j = (1, \dots, n)),$$

Para todos os pontos a visitar avalia-se a distância do ponto mais próximo.  $U$  corresponde à maior dessas distâncias, e  $V$  à soma dessas parcelas. Deste modo, a segunda parcela da expressão 6.2 corresponde à média das menores distâncias dos clientes. Por um acaso geográfico, valor de  $U$  pode ser muito superior ao dos restantes valores mínimos dos outros pontos. No sentido de atenuar o valor de  $\omega$  para esta eventual possibilidade divide-se por dois a primeira parcela.

### 6.3.2.2 A relaxação – o parâmetro $\gamma$ e o parâmetro $\upsilon$

O mecanismo de trocas permite que as restrições de capacidade ou tempo permitido por rotas sejam violadas. Relaxam-se estas restrições, de uma percentagem  $\gamma$ , no sentido de aumentar a mobilidade dos padrões, isto é, aumentar a possibilidade de movimentos que envolvam trocas dos pontos a visitar pelos diferentes dias da semana entre os padrões de calendarização admissíveis.

Põem-se então as questões: *Como relaxar? Quando relaxar? Quanto relaxar?*

Chao et al. (1995) sugerem relaxar as restrições referentes à capacidade dos veículos pois, nos exemplos em que o autor aplica este procedimento, são estas as restrições que condicionam o retorno ao depósito. Cada rota pode englobar um conjunto de clientes cuja quantidade total recolhida exceda em 10% a capacidade do veículo de recolha. No entanto, este procedimento só é aplicado desde que, o conjunto de rotas da solução corrente tenha uma folga total nas restrições de capacidade inferior a 10%.

No caso em estudo, a restrição que condiciona o retorno ao depósito é o tempo permitido por rota. É então neste conjunto de restrições que se vai permitir que os limites de admissibilidade sejam excedidos. Os exemplos da literatura referentes ao PVRP não contemplam o conjunto de restrições associadas ao tempo de cada rota, apenas existem restrições de capacidade dos veículos. Nestes casos, permite-se que a capacidade dos veículos ultrapasse os seus limites.

Ao contrário do proposto em Chao et al. (1995), onde a relaxação é acessível ou a todo o conjunto de rotas semanais, ou a nenhum (dependendo do valor da folga total da restrição), apenas se vão admitir relaxações nas restrições correspondentes às rotas onde se insere o cliente e em todas as rotas envolvidas em trocas com a rota de receptora do cliente.

No mecanismo de trocas nas primeiras iterações apenas se permitem movimentos que não penalizem a solução actualmente em vigor, isto é, o parâmetro  $\nu$  assume o valor zero. Neste conjunto de iterações admitem-se soluções que ultrapassem as fronteiras da admissibilidade ( $\gamma \neq 0$ ). Após encontrada uma iteração sem se encontrarem trocas que melhorem a solução corrente, o parâmetro  $\nu$  passa a assumir um valor menor que zero, isto é, passa-se a admitir trocas de clientes entre rotas que degradem a solução corrente ( $\nu < 0$ ). Neste conjunto de iterações  $\gamma = 0$ . Este procedimento iterativo ocorre até não serem encontradas soluções que melhorem a solução corrente, após o que o parâmetro  $\nu$  reassume o valor zero e  $\gamma$  pode assumir novamente valores diferentes de zero. Em síntese, pode-se afirmar que o parâmetro  $\gamma$  assume valores diferentes de zero durante os períodos em que  $\nu = 0$ .

Em resposta à questão de “quanto relaxar”, sabe-se que quanto maior for percentagem que se permite relaxar, maior será a mobilidade entre os pontos e, conseqüentemente, maior redução no valor final da distância a percorrer da solução inadmissível. Contudo, não se pode esquecer que a solução obtida após o procedimento de trocas é inadmissível, e que o retorno à admissibilidade é tão mais difícil quanto maior foi a extrapolação dos limites. Sendo, em

alguns casos, poucas ou nenhuma das melhorias obtidas na solução final. Esta situação será tão mais evidente quanto maior for a qualidade da solução de partida.

No sentido de ilustrar as vantagens da permissão do alargamento dos limites de admissibilidade e em simultâneo avaliar a sensibilidade do modelo às alterações do parâmetro  $\gamma$ , apresentam-se os resultados para o caso de estudo em 3 diferentes formulações:

**1ª Formulação** - Não se permite que os limites da admissibilidade sejam excedidos, isto é,  $\gamma = 0\%$  durante todo o algoritmo.

**2ª Formulação** - Permite-se ultrapassar os limites de tempo permitido por rota em 10% durante as várias iterações do algoritmo. Quando a solução da iteração corrente não é melhor que a solução da iteração imediatamente anterior, a taxa de relaxação decresce para 5% ao longo das várias iterações do algoritmo.

**3ª Formulação** - Percentagem de relaxação é de 50% durante o número de iterações em que há melhorias na solução.

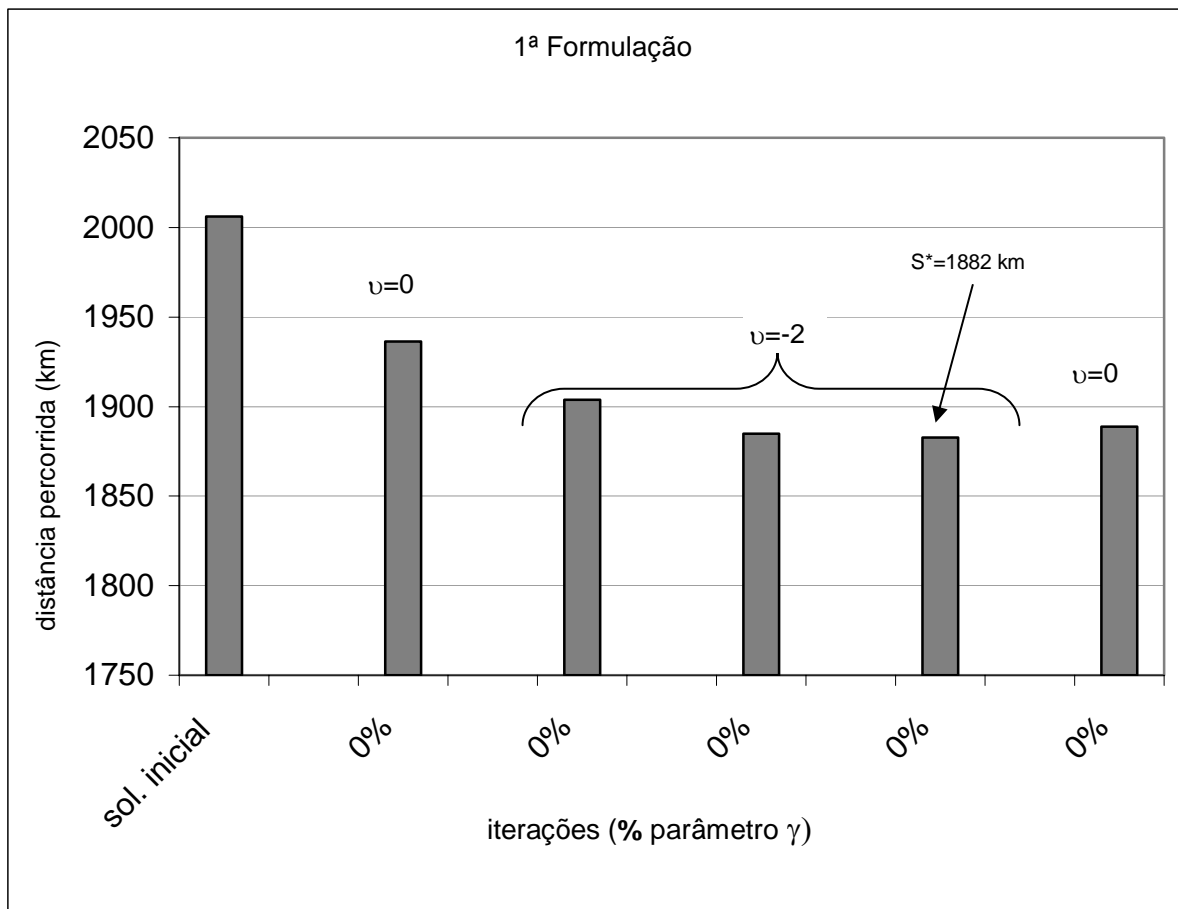
A solução inicial (apresentada na Tabela 6.5 e ilustrada na Figura 6.6), correspondente aos 5 dias úteis da semana (dias em que há possibilidade de mobilidade de clientes, pois ao fim-de-semana apenas se recolhem os contentores das localidades de visita diária obrigatória), engloba um conjunto de 75 rotas cuja distância total percorrida é de 2006 quilómetros.

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Total
<b>Contentores a recolher</b>	1734	1579	1733	1677	1644	8367
<b>Nº de localidades a visitar</b>	106	129	111	92	145	583
<b>Distância percorrida</b>	389	441	393	312	471	2006
<b>Nº de rotas</b>	15	15	16	14	15	75

**Tabela 6.5:** Solução inicial

A Figura 6. 9 representa a evolução das soluções durante o processo iterativo da primeira formulação na qual não são permitidas trocas que ultrapassem a fronteira de admissibilidade. No eixo horizontal indica-se, para as diferentes iterações do algoritmo, os valores do parâmetro  $\gamma$  da iteração corrente.

Quando não se permitem extrapolações dos limites das restrições ( $\gamma=0\%$ ), todas as soluções encontradas são admissíveis. No exemplo analisado, no primeiro período onde se procedem a trocas que não degradem a solução ( $\nu=0$ ), o número de trocas que é sujeito a uma primeira avaliação é de 803, das quais apenas 401 são avaliadas (por terem um  $C_{\text{inserção}} < \omega$ ) e destas, apenas 20 são efectuadas por envolverem trocas sem custos para a solução corrente. Após este conjunto de trocas, o valor da função objectivo da solução obtida é de 1936 km. Na segunda iteração já se admitem movimentos que degradem a solução, desde que não ultrapasse  $\nu$  ( $\nu=-2$ ). Nesta fase, em que  $\nu < 0$ , do conjunto de 3991 trocas sujeitas a análise, são avaliadas 1965 e efectuadas apenas 115. A melhor solução obtida corresponde a uma distância total de 1882 km.



**Figura 6. 9:** Resultados para  $\gamma = 0 \%$



A Figura 6. 10 representa a evolução das soluções durante o processo iterativo na segunda formulação onde são permitidas trocas que ultrapassem em 10% a fronteira de admissibilidade. Tal como na figura anterior, no eixo horizontal faz-se referência ao valor de  $\gamma$  da iteração corrente, registando-se agora, não só o valor da solução admissível, como também o valor da solução inadmissível.

Durante o período em que apenas se admitem trocas sem prejuízo para a solução corrente ( $\nu=0$ ), das cerca de 2500 trocas que são avaliadas são efectuadas 120. O número de trocas é muito superior quando comparado com o da primeira formulação, o que se justifica pela maior mobilidade entre clientes devido ao alargamento das fronteiras de admissibilidade. No entanto, estas trocas estão associadas a soluções inadmissíveis. À excepção da primeira iteração, em que a solução ainda não teria provavelmente grande qualidade, o retorno à admissibilidade, envolve uma solução com pior valor da função objectivo quando comparado com o valor da função objectivo da solução inadmissível.

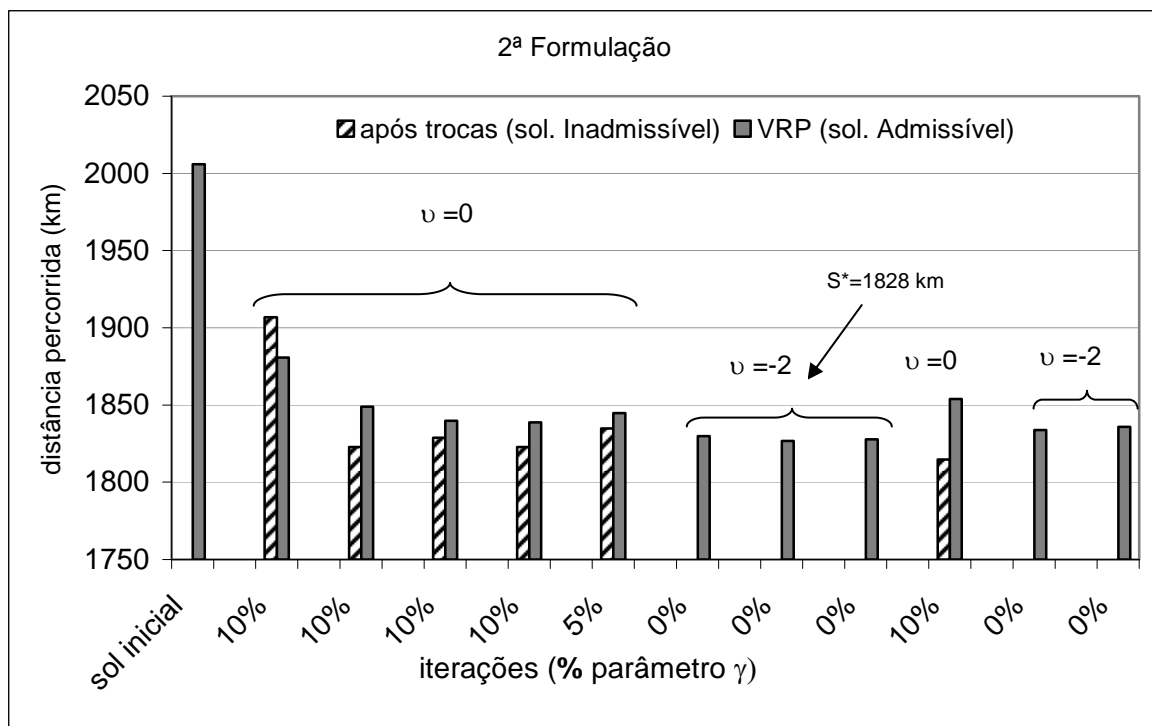


Figura 6. 10: Resultados da 2ª formulação

A melhor solução da segunda formulação ( $S^*=1828$ ) é encontrada após permissão de trocas com movimentos que degradem a solução, contudo esta fase apenas melhora a solução cerca de 0.7% (passa de 1839 com  $\nu=0$ , para 1828, com  $\nu=-2$ ).

Quando testado a segunda formulação, mas agora com  $\gamma=20\%$ , obtém-se uma evolução do processo iterativo muito idêntico ao anterior, com resultados finais da função objectivo muito semelhantes ( $S^*=1830$ ). O resultado final obtido na terceira formulação é  $S^*=1828$ , portanto igual ao valor obtido na segunda formulação. A diferença entre estas duas últimas formulações é no número de iterações, enquanto que para  $\gamma=10\%$  há evolução da solução durante 4 iterações, efectuando-se 120 trocas; para  $\gamma=50\%$ , numa única iteração, são efectuadas um número semelhante de trocas, gerando uma solução comparável à obtida para  $\gamma=10\%$ .

Em alguns exemplos a evolução da solução quando  $\upsilon < 0$  é mais relevante. A título de exemplo, ilustra-se na Figura 6. 11 a evolução do problema nº 23 da literatura quando sujeito ao processo de trocas. Observam-se sucessivas melhorias da função objectivo durante as iterações em que são admitidas trocas que degradem a solução (que coincidem com as iteração em que  $\gamma=0$ ), que no seu conjunto se traduzem por uma melhoria de cerca de 1.4%.

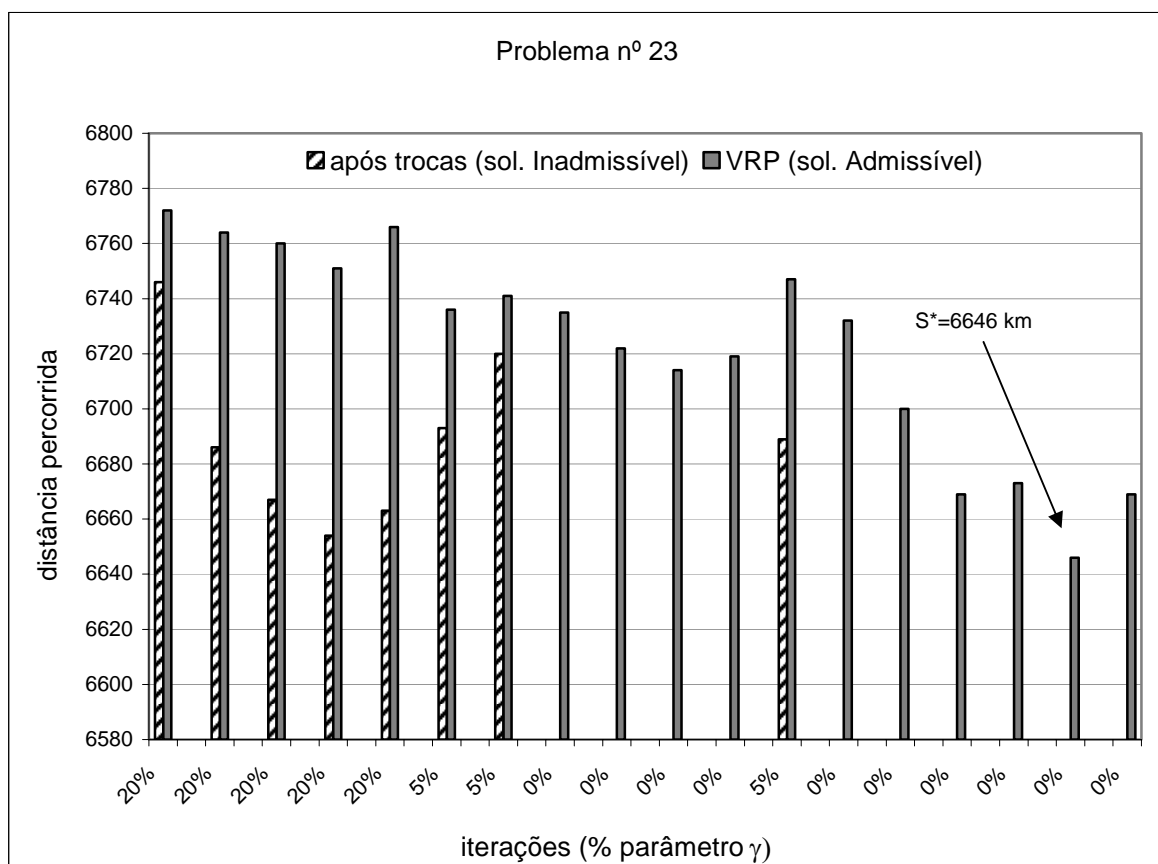


Figura 6. 11: Aplicação dos movimentos de trocas (problema nº 23)

O valor do parâmetro  $\upsilon$  também é determinante na obtenção de bons resultados durante as iterações em que são admissíveis trocas que degradem a solução. Um valor de  $\upsilon$  muito elevado pode, por um lado aumentar a mobilidade dos clientes, e por outro, degradar excessivamente a solução podendo ser difícil a sua reconversão para uma solução de qualidade. Um valor de  $\upsilon$  baixo, não degrada excessivamente a solução corrente mas também pode restringir em demasia os movimentos tendo um efeito praticamente nulo no algoritmo.

Torna-se então necessário encontrar um valor para o parâmetro  $\upsilon$  que, mais uma vez, varia de problema para problema, dependendo da distribuição geográfica dos clientes e das distâncias que os separam. Nos vastos ensaios realizados assumiram-se valores de  $\upsilon$  iguais a 2, 5 e 10. Nos exemplos em que os clientes se encontram mais próximos uns dos outros obtiveram-se bons resultados com  $\upsilon=2$ , nos exemplos com clientes um pouco dispersos obtiveram-se bons resultados com  $\upsilon=5$  e aqueles onde os clientes se encontravam mais dispersos obtiveram-se bons resultados por  $\upsilon=10$ .

Um bom indicador do parâmetro é a média das distâncias mínimas entre clientes. Assim sugere-se que,

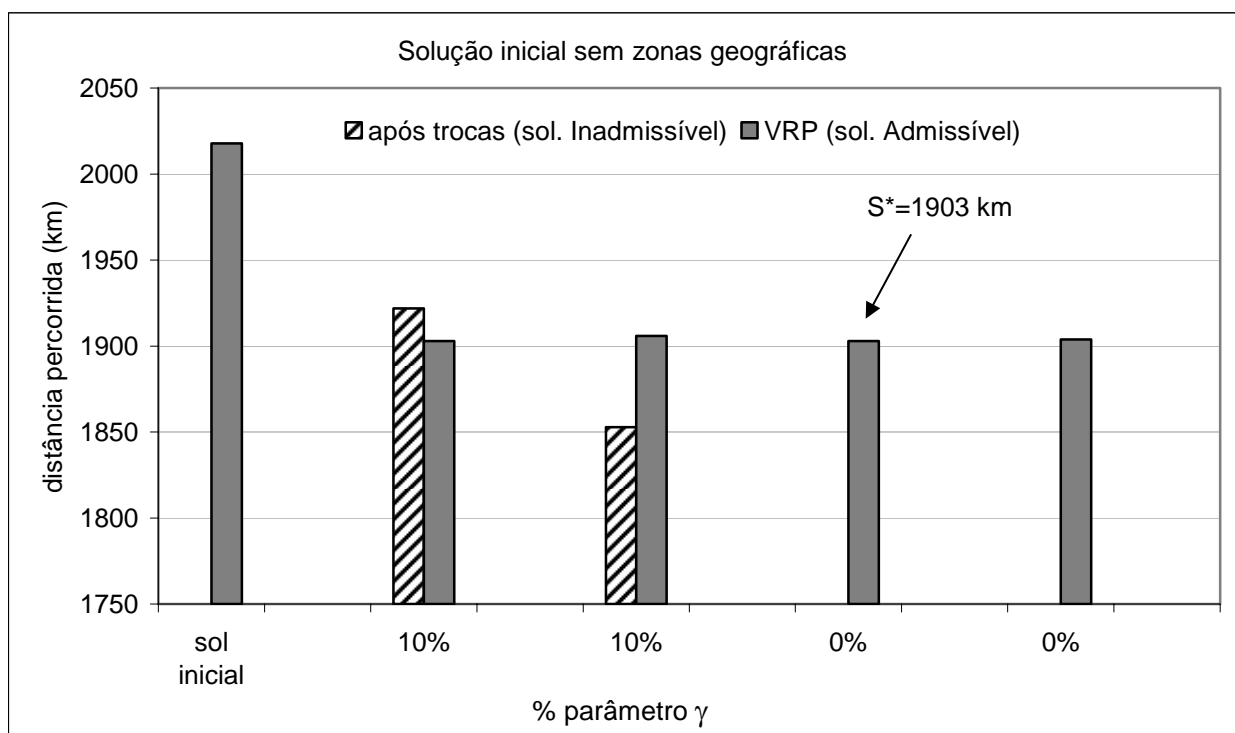
$$\begin{aligned} \upsilon=2 & \text{ se } \frac{\sum_{i=1}^n (\min(d_{ij}), \forall j = 1, \dots, n)}{n} < 6 \quad , \\ \upsilon=5 & \text{ se } 6 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (\min(d_{ij}), \forall j = 1, \dots, n)}{n} < 20 \quad , \\ \upsilon=10 & \text{ se } \frac{\sum_{i=1}^n (\min(d_{ij}), \forall j = 1, \dots, n)}{n} \geq 20 \end{aligned} \quad (6.4)$$

### 6.3.2.3 Retorno à admissibilidade das soluções

Ao permitir trocas que envolvam soluções que ultrapassem as fronteiras da admissibilidade (que ocorrem quando  $\gamma > 0$ ) obtêm-se soluções inadmissíveis. Retorna-se à admissibilidade através da resolução de VRP's diários. Nas primeiras iterações, pelo facto de a solução não ser de grande qualidade, o retorno à admissibilidade pode trazer benefícios para a solução corrente (ver Figura 6. 10). No entanto, rapidamente se assiste a uma degradação da solução quando se compara a solução inadmissível com a solução admissível.

Quando se começou a desenvolver o modelo descrito neste capítulo, as soluções iniciais eram geradas sem qualquer preocupação de afectar os locais de visita de cada dia a uma zona geográfica. Acontecia que na conversão das soluções inadmissíveis em admissíveis obtinham-se rapidamente soluções piores quando comparadas com as soluções das iterações anteriores. A título de exemplo, ilustra-se na Figura 6. 12 a evolução das soluções geradas pelo modelo aplicado ao caso de estudo nestas condições. Logo na segunda iteração o retorno à admissibilidade envolve uma solução pior que a solução da iteração anterior. Na fase em que  $\gamma > 0$  não se conseguem soluções tão boas quando comparadas com as soluções onde há a preocupação das zonas geográficas diárias, e conseqüentemente a solução final é de pior qualidade.

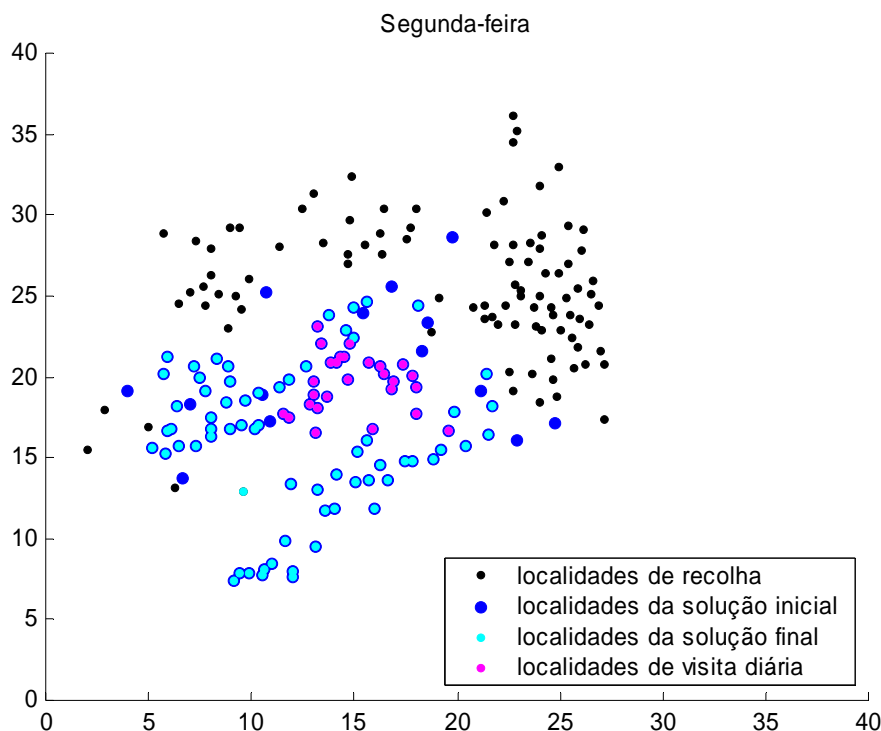
Ao consentir que se ultrapassem os limites de admissibilidade, permite-se a existência de rotas que integrem a visita a um maior número de clientes. O retorno à admissibilidade deste tipo de rotas pode implicar a construção de uma rota adicional naquela área, implicando um acréscimo nas distâncias totais. Ora, se os pontos estiverem todos mais ou menos concentrados numa área geográfica, as rotas reorganizam-se de modo a não incorrer em custos adicionais excessivos.



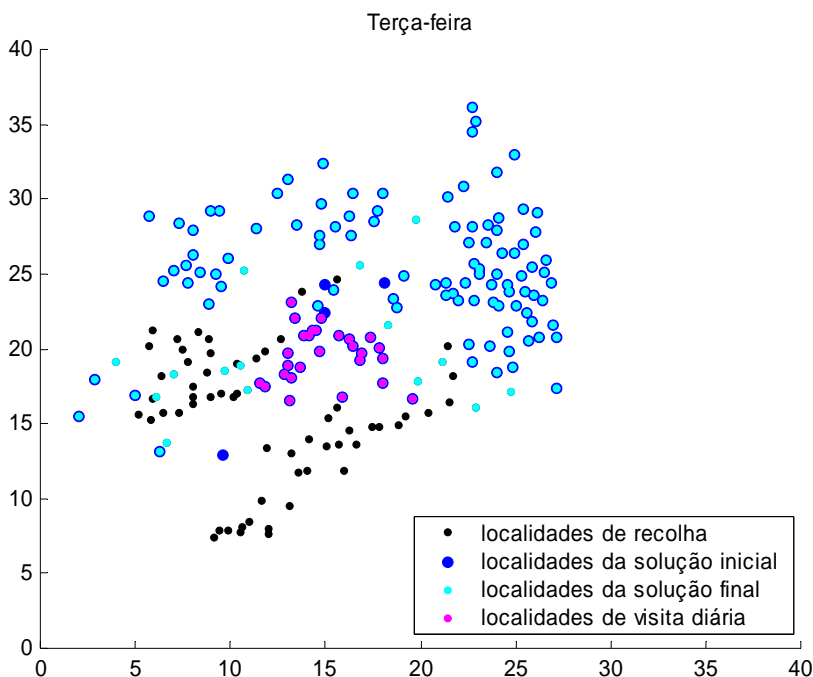
**Figura 6. 12:** A evolução da solução gerada pelo modelo (caso de estudo)

Durante a execução do algoritmo, o único factor que pode desacelerar o descontrolo da organização geográfica imposta na solução inicial é o facto de apenas se admitirem trocas entre clientes *próximos*. Contudo, após algumas trocas é possível obter-se uma diferente reorganização se ela se revelar promissora, isto é, se houver diminuição na distância total semanal percorrida.

Quando comparadas as distribuições geográficas dos clientes a visitar pelos diferentes dias da semana na solução inicial e solução final, verifica-se que são mantidas as organizações geográficas, havendo até uma ligeira tendência para acentuar esse reagrupamento. Na Figura 6. ilustra-se, para o caso de estudo, a distribuição geográfica do conjunto de clientes da solução inicial e final de segunda-feira e terça-feira.



**Figura 6. 13:** Distribuição geográfica dos clientes



**Figura 6. 13 (continuação):** Distribuição geográfica dos clientes

#### 6.4 Aplicação do modelo ao caso de estudo

No caso em estudo, a parcela mais significativa da carga de trabalho é a do tempo dispendido na descarga dos contentores. A solução inicial é gerada de modo que haja algum equilíbrio no número de contentores a recolher por dia.

Dos 9248 contentores a que é necessário recolher semanalmente, 881 têm recolha diária e, admitindo que ao fim-de-semana só se recolhem estes 881 contentores, resta distribuir pelos 5 dias úteis a recolha de 8367 contentores. Se se distribuírem igualmente pelos dias úteis da semana estes 8367 contentores, fica-se com cerca de 1674 contentores a recolher diariamente. Nestes 1674 estão incluídos os 881 que têm visita diária e então, além daqueles cuja visita é obrigatória (porque são de visita diária), devem-se recolher-se diariamente mais 793 contentores.

Podia-se tentar equilibrar a carga de trabalho diária, não pelos contentores, mas pelo número de localidades visitadas. Não se optou por tal procedimento porque existe uma grande dispersão do número de contentores nas localidades a visitar. Tanto existem localidades com 131 contentores como lugares com apenas um contentor, em função, evidentemente, da

população aí residente. Também é verdade que as localidades com maior número de contentores correspondem aos locais mais urbanizáveis, isto é, arredores próximos da cidade e que estes têm, normalmente, recolha diária. Mesmo assim, ainda é grande a variação do número de contentores entre os locais que não têm recolha diária pois existem desde locais com 40 contentores e outros com um único contentor.

Deste modo, para cada dia é necessário determinar as localidades a visitar de modo que o número de contentores diários recolhidos seja, aproximadamente, 1673.

A solução inicial (apresentada na Tabela 6.5 e ilustrada na Figura 6.6), correspondente aos 5 dias úteis da semana, engloba um conjunto de 75 rotas com um total de 2006 quilómetros percorridos entre localidades.

Limita-se para o fim-de-semana a visita dos locais com recolha diária obrigatória, sendo necessário um conjunto de 7 rotas (num total de 92 quilómetros) para a recolha dos 881 contentores distribuídos pelas 27 localidades de visita.

Na Tabela 6.6 apresenta-se solução final do caso de estudo que é obtida após 7 iterações onde decorrem trocas. Engloba um conjunto de 73 rotas, às quais está associada uma distância total de 1828 quilómetros para os 5 dias úteis da semana. No total, o procedimento de trocas permitiu melhorar a função objectivo em cerca de 9%.

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Total
<b>Contentores a recolher</b>	<b>1657</b>	<b>1637</b>	<b>1729</b>	<b>1544</b>	<b>1800</b>	<b>8367</b>
<b>Nº de localidades a visitar</b>	<b>93</b>	<b>140</b>	<b>108</b>	<b>81</b>	<b>161</b>	<b>583</b>
<b>Distância percorrida</b>	<b>297</b>	<b>425</b>	<b>373</b>	<b>259</b>	<b>474</b>	<b>1828</b>
<b>Nº de rotas</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>15</b>	<b>13</b>	<b>16</b>	<b>73</b>

**Tabela 6.6:** Solução obtida após trocas (caso de estudo)

À semelhança do Capítulo 5, também aqui, para a solução final do caso de estudo, permite-se que a recolha dos contentores existentes em cada localidade seja repartida por várias equipas. Permite-se que uma rota visite uma localidade e a equipa de trabalho esvazie não todos, mas apenas parte dos contentores aí existentes. Os restantes contentores serão recolhidos no mesmo dia mas integrados numa outra rota. Isto vai ao encontro da realidade e com a natureza do problema, uma vez que as equipas podem recolher parte dos contentores de

cada localidade. Este procedimento visa diminuir as folgas existentes na restrição tempo, evitando do retorno antecipado ao depósito.

Como resultado desta possibilidade, no conjunto de rotas de terça-feira houve redução de uma rota, implicando um custo adicional de 4 km.

Na Tabela 6.7 apresenta-se um resumo da solução semanal final, que envolve 72 rotas durante os dias úteis da semana e um conjunto de 7 rotas ao fim-de-semana, envolvendo uma distância total percorrida entre localidades de 1924 quilómetros. No Anexo F expõe-se a solução obtida, apresentando todas as características das rotas e sua constituição.

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Fim-de-semana	Total
<b>Contentores a recolher</b>	<b>1657</b>	<b>1637</b>	<b>1729</b>	<b>1544</b>	<b>1800</b>	<b>881</b>	<b>9248</b>
<b>Nº de localidades a visitar</b>	<b>93</b>	<b>140</b>	<b>108</b>	<b>81</b>	<b>161</b>	<b>27</b>	<b>610</b>
<b>Distância percorrida</b>	<b>297</b>	<b>429</b>	<b>373</b>	<b>259</b>	<b>474</b>	<b>92</b>	<b>1924</b>
<b>Nº de rotas</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>13</b>	<b>16</b>	<b>7</b>	<b>79</b>

**Tabela 6. 7:** Solução final (caso de estudo)

## 6.5 Comparação dos dois modelos apresentados nesta dissertação

Quando se comparam desempenhos de diferentes heurísticas é comum compararem-se a qualidade das soluções, o tempo computacional, a robustez, a simplicidade dos modelos em avaliação, entre outros.

Rardin e Uzsoy (2001) num artigo sobre avaliação experimental de heurísticas, dividem em três grupos as tarefas de optimização no que diz respeito ao tempo consumido para encontrar uma solução de um problema.

Num extremo colocam os problemas, designados pelos autores de “design”, que englobam problemas que são resolvidos raramente e respondem a questões que cobrem um largo período de tempo. Os problemas de desenho de redes de telecomunicações são um exemplo deste tipo de tarefas. Neste tipo de problemas é comum despender-se muito tempo em desenvolver boas soluções e o tempo computacional pode demorar várias horas ou mesmo dias.



Num outro extremo, os autores colocam problemas de controlo, que englobam problemas que são resolvidos muito frequentemente e envolvem decisões relativas a um curto horizonte temporal (por exemplo, problemas de “*shop-floor scheduling*” ou de transmissão de dados multimédia numa rede de computadores). Normalmente são problemas resolvidos por procedimentos heurísticos em fracções de segundos, ainda que em detrimento da qualidade da solução. Embora possam existir procedimentos de resolução exacta, opta-se frequentemente por heurísticas rápidas uma vez que as respostas têm de ser encontradas em tempo real.

Os problemas de planeamento ocupam uma posição intermédia em termos de frequência de revisão de soluções e de tempo disponível para encontrar essas soluções. A resposta deve ser dada num espaço de tempo de modo a que ela seja útil e praticável. A qualidade da solução é uma característica mais importante quando comparada com o tempo computacional.

Os PVRP's encontram-se nesta posição intermédia. São problemas de planeamento e a necessidade da execução dos procedimentos heurísticos para encontrar diferentes soluções é pouco frequente. Um aspecto fundamental comum a muitos problemas de recolha de resíduos é a natureza periódica da solução pretendida: devem planear-se rotas para vários dias de operação dos veículos ao longo de um período, de uma semana ou mais, que depois se repetirão sem alteração todos os períodos. Neste sentido, não foi dada grande relevância ao tempo de execução computacional dos modelos desenvolvidos.

As soluções obtidas através dos dois modelos desenvolvidos nesta dissertação para o problema do caso de estudo são muito semelhantes. A distância a percorrer entre localidades é quase coincidente (1926 quilómetros no modelo de duas fases, e 1924 quilómetros no último modelo apresentado) assim com o número de rotas semanais (79). Um factor que os pode distinguir é a distribuição das rotas pelos dias úteis da semana, sendo menos homogénea no modelo de duas fases.

Na aplicação dos dois modelos aos casos da literatura são sentidas algumas diferenças quanto à qualidade da solução obtida.

Na Tabela 6.8 apresentam-se os resultados que se obtiveram usando os dois modelos desenvolvidos. Também são apresentados resultados de outros desenvolvimentos heurísticos referenciados na literatura. Identifica-se por 2FASES-ACO o modelo de duas fases desenvolvido e AM-ACO o segundo modelo desenvolvido. Os resultados dos trabalhos referenciados na literatura identificam-se por: CGW - apresentado por Chao, Golden, e Wasil (1995); CGL - de Cordeau, Gendreau e Laporte (1997). As três primeiras linhas da tabela

referem-se respectivamente, ao número com que o problema é identificado na literatura, o número de clientes ( $n$ ) e o número de clientes a visitar no horizonte temporal ( $N$ ).

Pela observação das três últimas linhas da Tabela 6.8 pode-se concluir que, de um modo geral, o segundo modelo desenvolvido apresenta soluções de maior qualidade. Na última linha quantificam-se as diferenças percentuais entre a solução do segundo modelo desenvolvido com a melhor solução registada na literatura. Verificam-se pequenas diferenças percentuais, o que permite concluir sobre o bom desempenho do modelo AM-ACO face à resolução de um diferente número de problemas.

Prob nº	8	10	13	19	20	23	30
n	100	100	417	112	184	168	153
N	202	174	457	208	336	312	270
CGW	2075.1	1633.2	3629.8	<b>4846.5</b>	<b>8367.4</b>	6769.0	80982.1
CGL	<b>2054.0</b>	<b>1629.9</b>	<b>3602.6</b>	4902.4	<b>8367.4</b>	<b>6620.5</b>	<b>77179.3</b>
2FASES-ACO	2141.0	1692.8	3667.9	<b>4846.3</b>	<b>8367.4</b>	6856.0	78931.5
AM_ACO	2085.2	1634.7	3625.9	<b>4846.3</b>	<b>8367.4</b>	6646.6	78182.8
(AM_ACO-L*)/ AM-ACO	1.5%	0.3%	0.6%	0.0%	0.0%	0.3%	1.3%

**Tabela 6. 8:** Comparação dos resultados

Nas secções onde se expõem as experimentações computacionais dos modelos mostra-se que ambos os modelos são pouco sensíveis à mudança de parâmetros sendo pequeno o número de parâmetros utilizados.

Ambos os modelos são simples e fáceis de aplicar, embora o modelo de duas fases, pela facto de conter duas fases que englobam procedimentos muito distintos e de recorrer a um programa externo (CPLEX) para resolução de uma das fases, poder causar maiores dificuldades de implementação. Neste sentido, pode considerar-se o segundo modelo, aquele em que a construção das rotas e calendarização é feita em simultâneo, mais simples e fácil de implementar e de um modo geral com resultados de qualidade superior, quando comparados com os resultados obtidos pelos modelos de duas fases.

## **6.6 O caso de estudo: comparação da solução proposta com a situação actualmente em vigor**

A solução proposta para a recolha dos resíduos sólidos do concelho de Viseu envolve 79 rotas a efectuar semanalmente e um total 1924 quilómetros a percorrer entre localidades. Por ser uma solução com maior equilíbrio no número de rotas, aconselha-se a solução do segundo modelo, apresentada com detalhe em Anexo F.

Presentemente, o sistema de colecta no concelho de Viseu afecto à Câmara Municipal de Viseu funciona através de giros percorrendo-se, em média, 3750 quilómetros por semana.

A solução dos modelos desenvolvidos apenas contempla os quilómetros a percorrer entre localidades, não tendo sido contabilizados as distâncias fixas percorridas entre a garagem e Cabanões (onde se localizam os contentores no início e no fim de cada turno) e entre a estação de transferência e Cabanões. Nestes percursos estão envolvidos 15 quilómetros fixos (garagem, Cabanões, 3 km; estação de transferência, Cabanões, 9 km) que cada rota tem que efectuar. Adicionando esta distância fixa à solução obtida totalizam-se 3109 quilómetros semanais.

Também é necessário contabilizar os quilómetros percorridos dentro de cada localidade. Nas localidades com poucos contentores é praticamente desprezável o acréscimo de quilómetros percorridos pois os contentores estão localizados estrategicamente no sentido de facilitar as rotas de recolha. Nas localidades de maior dimensão, estima-se que as distâncias percorridas nos percursos interiores das localidades representarão cerca de 500 quilómetros por semana.

Adicionando estes 500 km aos acima referidos totalizam-se cerca de 3608 km semanais.

A solução sugerida apresenta um conjunto de rotas envolvendo uma poupança de cerca de 140 quilómetros a percorrer por semana que, contabilizado ao fim de largos períodos, tem vantagens económicas não desprezáveis. Mas, mais importante que a redução do número de quilómetros é a realidade que o modelo contempla que é desejável ser praticada pelas equipas de trabalho, e que se sabe que dificilmente são cumpridos na prática.

No funcionamento actual do sistema em estudo, as equipas de trabalho fazem o percurso que lhes parece melhor ou o que estão habituadas a fazer, encontrando-se por vezes contentores a transbordar. É frequente o não cumprimento das frequências de visita indicadas

pelos serviços, como também nas visitas às localidades com muitos contentores é comum não se proceder à descarga de todos os contentores aí existentes.

A solução apresentada pelo modelo é importante não só por otimizar os percursos das rotas envolvendo menores distância a percorrer pelos veículos, com as consequentes vantagens económicas daí decorrentes, mas também por conseguir desenhar um conjunto de rotas que cumprem a frequência de visita desejada de todas as localidades com a descarga de todos contentores aí existentes. Deste modo a solução encontrada permite reduzir os custos de operação e, em simultâneo, elevar os níveis de serviço e padrões de limpeza.

---

## Capítulo 7

### Síntese e Conclusões

---

Neste trabalho apresentam-se e comparam-se dois modelos de apoio a decisões de planeamento em sistemas de recolha ou distribuição, mais especificamente no estabelecimento de rotas dos veículos. Envolvem um planeamento de carácter tático a aplicar num horizonte temporal alargado e, uma vez definida a solução, esta será executada repetitivamente por longos períodos e só será revista face a alterações significativas no sistema.

O trabalho centrou-se no caso de estudo de recolha de resíduos sólidos urbanos do concelho de Viseu que envolve a recolha de 2336 contentores espalhados por uma área com cerca de 490 Km<sup>2</sup> com frequências de visita variáveis. Existem contentores que devem ser esvaziados diariamente enquanto que outros, em zonas de menor densidade populacional, são apenas esvaziados duas vezes por semana. É necessário elaborar um planeamento semanal da recolha, definindo os percursos a efectuar pelos veículos de recolha e o calendário de visita dos contentores, garantindo um espaçamento entre recolhas consecutivas de modo a serem cumpridos e garantidos adequados padrões de higiene e limpeza da área em estudo.

O elevado número de contentores a recolher semanalmente, a configuração simples da rede viária e a distribuição dos contentores por zonas ou localidades permitiu agrupar os contentores pelas localidades onde eles se localizam e deste modo reduzir a dimensão do problema. Neste sentido, o problema é estruturado não como um problema de visita aos contentores, mas de visita às localidades. Cada localidade é caracterizada por um número diferenciado de contentores, todos com igual frequência de visita. Com este agrupamento conseguiu-se reduzir a dimensão do problema de 2336 contentores a visitar um número diferenciado de vezes por semana para 202 localidades a visitar com frequências diferenciadas.

Estes tipos de problemas, identificados na literatura como problemas periódicos de estabelecimentos de rotas, são uma extensão dos problemas clássicos de

estabelecimento de rotas. São problemas com uma dificuldade acrescida quando comparados com os problemas de rotas clássicos, pois não só visam encontrar um conjunto de rotas, como também a definição de uma calendarização de visita dos clientes que minimize os custos operacionais do sistema.

O problema em estudo apresenta uma particularidade que o distingue do PVRP pois o último local a visitar (estação de transferência) não coincide com o ponto de partida (Cabanões). Neste sentido o problema resolvido nesta dissertação consiste numa variante do PVRP clássico.

Os problemas periódicos de estabelecimento de rotas aparecem na literatura com dois diferentes tipos abordagens: uma abordagem de duas fases, em que são resolvidos os problemas de calendarização das visitas e estabelecimento de rotas em fases distintas; ou numa única fase, tratando os dois problemas em simultâneo. Um dos propósitos deste trabalho consiste em comparar estas duas formulações no sentido de perceber quais as vantagens e desvantagens das duas abordagens.

Os modelos de duas fases foram os primeiros a serem desenvolvidos com resultados obtidos através de procedimentos heurísticos de menor qualidade, quando comparados com os modelos de fase única. Estes últimos, em alguns casos, recorrem a procedimentos meta-heurísticos.

A abordagem mais privilegiada dos modelos de duas fases trata num primeiro estágio o problema da calendarização das visitas e posteriormente o problema de estabelecimento de rotas. Esta é uma formulação em que a qualidade das soluções pode ser fortemente influenciada pelas decisões de calendarização. Para ultrapassar esta deficiência entendeu-se apostar na abordagem alternativa de tratar numa primeira fase do problema de estabelecimento de rotas e numa segunda fase o problema de calendarização. O desafio com esta abordagem reside na dificuldade de encontrar uma calendarização admissível na segunda fase, tendo-se encontrado uma formulação que permite resolver este problema, e conseguido superar este desafio, ainda que com o inconveniente de ter que se recorrer a um pacote de PLI, isto é, um procedimento externo.

Neste sentido, o primeiro modelo apresentado nesta dissertação contempla duas fases: na primeira fase aborda-se o problema de estabelecimento de rotas e na segunda fase o problema da calendarização.

Sendo o problema de rotas abordado um problema periódico que abrange um horizonte temporal que inclui vários dias, recorreu-se à replicação dos clientes, no sentido de

criar um problema em que cada cliente aparece tantas as vezes quantas as suas necessidades de visita no horizonte temporal em estudo. O problema a resolver é um problema clássico de estabelecimento de rotas, ao qual se adiciona um conjunto de restrições no sentido de cada rota ser construída de modo a que um cliente e uma sua réplica nunca apareçam numa mesma rota.

Foi desenvolvido um modelo para a resolução deste tipo de problemas recorrendo à meta-heurística de optimização por colónias de formigas (ACO) com algumas características que se distinguem dos procedimentos ACO aplicados à resolução de problemas de estabelecimento de rotas.

No modelo desenvolvido constroem-se as rotas em paralelo, em alternativa à construção sequencial das rotas (procedimento sempre seguido na aplicação dos ACO aos VRP). Em oposição aos procedimentos ACO existentes que geram um número de  $m$  formigas em cada iteração, é apresentada uma estrutura que gera apenas uma formiga por iteração, permitindo reduzir significativamente o número de soluções a gerar, sem prejudicar a qualidade da solução final. Adicionalmente, desenvolveu-se um inovador processo de actualização da feromona que, conjuntamente com a geração de uma única formiga por iteração, se traduzem por um menor número soluções pesquisadas para a obtenção de bons resultados, com reflexos na diminuição do esforço computacional.

O modelo ACO incorpora procedimentos de pós-optimização 2 e 3 optimal. Adicionalmente são implementados dois procedimentos melhorativos que actuam em conjunto. Um dos procedimentos, designado de  *fusão* , apresenta características que se distinguem dos métodos existentes ao tentar fundir ou eliminar rotas. Este revelou-se um procedimento muito importante no controle e redução do número de rotas diminuindo significativamente as folgas das restrições que condicionam o retorno ao depósito. Muitas aplicações reais dos problemas de rotas contêm restrições que normalmente condicionam o retorno ao depósito, sendo desejável minimizar as folgas e produzir conjuntos de rotas homogéneos com características semelhantes. A título de exemplo, veja-se o caso de recolha de resíduos sólidos em estudo: não é desejável haver rotas cuja realização envolva duas horas de laboração e outras, por exemplo, com quatro horas. As rotas deverão ter duração semelhante no sentido equilibrar o trabalho das equipas de recolha e não reduzir o horário laboral, ao mesmo tempo que se diminui o número de rotas e se optimiza a utilização dos recursos existentes.

Assim, à diminuição de custos associados ao procedimento  *fusão*, acrescenta-se uma estruturação da solução mais vantajosa em termos práticos que vai ao encontro das necessidades reais.

O outro procedimento melhorativo, que actua em conjunto com a fusão, refere-se ao movimento de clientes entre rotas apresentadas por Osman (1993) e designadas de  $\lambda$ -interchange. São implementadas adaptações aos movimentos de inserção e de troca de cliente entre rotas.

Os dois procedimentos melhorativos (fusão e troca de clientes entre rotas) funcionam em conjunto: a solução sujeita à pós-optimização passa inicialmente pela tentativa de fusão de algumas das suas rotas e posteriormente é sujeita aos movimentos de trocas, que se repetem enquanto existirem trocas vantajosas para a solução em curso. A partir do momento em que estes procedimentos não encontram trocas que conduzam a uma melhoria da solução em curso, são permitidos movimentos que degradem ligeiramente a solução durante um determinado número de iterações.

A incorporação destes dois procedimentos no algoritmo de optimização por colónias de formigas revelou-se muito importante na qualidade das soluções finais. Mais, pode-se afirmar que a eficácia do modelo ACO desenvolvido deveu-se em boa parte aos procedimentos de pós-optimização implementados, sem o qual os resultados diminuiriam significativamente de qualidade. A exploração do espaço de soluções atingiu um alcance maior devido aos procedimentos de pós-optimização implementados, tendo-se verificado que na ausência deste tipo de procedimentos o espaço de soluções explorado é limitado.

O modelo ACO desenvolvido, além de resolver problemas de rotas com replicação de clientes, também resolve os mesmos problemas sem replicação e neste sentido trata-se de um modelo também capaz de resolver problemas de VRP clássicos, com resultados do mesmo nível ou melhores que os obtidos com outros procedimentos ACO desenvolvidos por outros autores.

A segunda fase do modelo visa afectar o conjunto de rotas construídas na primeira fase aos diferentes dias do horizonte temporal, de modo a que as visitas dos clientes obedeam a um conjunto de restrições de calendarização. Neste sentido desenvolveu-se um procedimento que permite ultrapassar as dificuldades inerentes a estes problemas. A partir da solução da primeira fase constrói-se um grafo onde as rotas representam os vértices e a



presença de algum cliente em comum entre duas rotas implica a presença de uma aresta. Formulou-se em programação linear inteira um problema de coloração de grafos que se distingue do problema de coloração clássico por conter um conjunto adicional de restrições e diferente função objectivo que permite uma coloração de modo a minimizar o número de cores e, em simultâneo, gerar uma solução com um equilíbrio entre o número de vértices de cada cor e maximizando o número de clientes que cumprem as restrições de calendarização. Quando a solução do problema de coloração envolve algum cliente para o qual as restrições de calendarização não são satisfeitas, implementa-se um mecanismo de trocas que garante a admissibilidade da calendarização. Como resultado obtém-se um calendário admissível de visita para todos os clientes.

Uma vez definida a calendarização das visitas, recorre-se de novo ao modelo ACO desenvolvido na primeira fase para estabelecer as rotas para os diferentes dias do período.

O segundo modelo apresentado nesta dissertação para a resolução de problemas periódicos de estabelecimento de rotas aborda em simultâneo os problemas de estabelecimento de rotas e de calendarização. Assenta em procedimentos meta-heurísticos recorrendo, em diferentes etapas do procedimento, ao algoritmo ACO desenvolvido para a resolução de VRP's.

Esta nova abordagem para a resolução de problemas periódicos de estabelecimento de rotas distingue-se dos modelos apresentados na literatura em alguns aspectos. Inicia-se com a construção de um conjunto de rotas para os diferentes dias do horizonte temporal que obedecem às restrições de calendarização das visitas, visando o equilíbrio da carga de trabalho diária e a proximidade geográfica entre o conjunto de clientes para cada dia do período. Os procedimentos baseiam-se na optimização por colónias de formigas e combinam duas ideias antigas (gerar soluções diárias afectas a zonas geográficas e gerar soluções com equilíbrio na carga laboral). A obtenção desta solução inicial é simples e rápida, não se exigindo muito esforço no sentido de minimizar o total das distâncias.

A solução inicial é submetida a um mecanismo de trocas de clientes entre rotas que envolvem dias distintos, permitindo alteração da calendarização inicialmente estabelecida. Estes procedimentos de trocas envolvem características associadas à inserção e remoção dos clientes das rotas que se diferenciam das apresentadas na literatura e permitem melhorar a

solução corrente ao admitirem o alargamento das fronteiras de admissibilidade e movimentos que degradem a solução corrente

A experimentação computacional e avaliação dos modelos desenvolvidos não se cingiu ao caso de estudo, tendo sido seleccionado um conjunto de problemas de teste, retirados da literatura, para essas análises. O critério de selecção dos problemas de teste foi a dimensão dos mesmos, pois tendo qualquer dos modelos sido desenvolvidos na perspectiva de resolver problemas com um grande número de clientes, optou-se por escolher os problemas da literatura com maior número de clientes. As análises comparativas realizadas permitiram concluir que os modelos desenvolvidos nesta tese têm, de um modo geral, um desempenho comparável ao dos melhores algoritmos de ACO descritos na literatura.

As meta-heurísticas utilizadas na resolução de problemas de optimização contêm, no geral, um conjunto elevado de parâmetros de difícil afinação. Segundo Golden et al. (1998), existem meta-heurísticas com mais de 25 parâmetros. O normal é determinar os seus valores por tentativa e erro dentro de um determinado intervalo ou através de uma análise de sensibilidade.

O modelo ACO implementado apresenta três parâmetros associados à actualização da feromona, tendo-se demonstrado que o modelo não é muito sensível a alterações dos parâmetros dentro de intervalos definidos. Os procedimentos de pós-optimização que englobam a fusão e trocas de clientes entre rotas envolvem dois parâmetros que também se revelaram fáceis de calibrar.

Aos movimentos de trocas do modelo que aborda o problema da calendarização e definição de rotas em simultâneo estão associados a três parâmetros. Através da avaliação e experimentação computacional ilustrou-se que dois deles ( $\omega$  e  $\upsilon$ ) são fáceis de estimar, pois dependem da distribuição espacial dos clientes e o terceiro tem características que conferem robustez às soluções obtidas, as quais não são muito sensíveis a variações deste parâmetro dentro da gama de valores sugerida.

Em síntese pode-se afirmar que os dois modelos desenvolvidos são simples, com um reduzido número de parâmetros e fáceis de implementar. No entanto, a necessidade de recorrer a réplicas para resolver a primeira fase do problema de estabelecimento de rotas (do modelo de duas fases) aumenta significativamente a dimensão do problema e portanto o esforço computacional, acrescido ao inconveniente de se ter que recorrer a um pacote de PLI externo para se resolver a segunda fase do problema, tornam o primeiro modelo desenvolvido menos atraente.

Verifica-se também uma qualidade superior no conjunto de soluções do último modelo exposto que aborda os dois problemas em simultâneo tendo-se obtido, neste caso, para qualquer dos problemas em estudo soluções comparáveis com as melhores soluções encontradas na literatura. Desta forma, o modelo “integrado” revelou-se uma abordagem superior.

A solução obtida para o caso de recolha de resíduos sólidos urbanos em estudo engloba um conjunto de rotas que envolvem uma poupança de cerca 7% quando comparada com os quilómetros percorridos na situação actualmente em vigor. Note-se no entanto que esta melhoria deve ser avaliada à luz do facto do esquema de operação estar “otimizado” por anos de prática.

Talvez mais importante que a redução da distância percorrida, com os benefícios económicos com ela relacionados, é o planeamento de um conjunto de rotas que, com os recursos existentes, garante a visita a todas as localidades com a frequência definida pelos responsáveis pelo sistema, sem incorrer em custos adicionais. Na verdade, há claros indícios que na operação actual não são cumpridas as frequências de recolha especificadas, o que obviamente degrada os padrões de higiene e limpeza. Deste modo, ao permitir elaborar um planeamento semanal para a recolha dos resíduos cumprindo as frequências de visita e descarga dos contentores especificadas pelos responsáveis, sem incorrer em custos adicionais, a solução proposta pelo modelo apresenta a vantagem adicional de elevar os níveis de serviço.

Deste modo, julga-se que o modelo desenvolvido cumpre os objectivos para que foi concebido.

Os desenvolvimentos a nível das meta-heurísticas de optimização por colónias de formigas mostraram-se eficazes na resolução de problemas de estabelecimento de rotas. É interessante explorar no futuro a aplicação destas técnicas inovadoras dentro de outra classe de problemas, por exemplo em outras variantes do VRP e outros problemas combinatórios (escalamento da produção, afectação quadrática ou coloração de grafos, por exemplo), no sentido de avaliar o seu real potencial na resolução de problemas de grandes dimensões.

Estender o campo das aplicações do modelo desenvolvido é um trabalho que também se pretende desenvolver no futuro. Por exemplo, adaptar o modelo para sistemas de recolha selectiva, isto é, de resíduos sólidos recicláveis. Neste tipo de problemas é necessário, para além de definir o calendário de visitas e o estabelecimento de rotas, decidir também sobre a melhor política operativa: recolha uni-produto ou multi-produto. A recolha uni-produto obriga a repetir os circuitos para os diferentes tipos de materiais, enquanto que a multi-produto obriga a que os veículos estejam preparados para esta situação, com divisão da caixa por secções, diminuindo a capacidade do veículo para os diferentes materiais. Também estender o problema à recolha ou distribuição cobrindo áreas mais alargadas e para os quais a “compartimentação geográfica” é desejável, ou então problemas com largos horizontes temporais cobrindo um ou dois meses. O primeiro caso envolve o problema adicional da divisão geográfica da área, e o segundo problemas adicionais de calendarização.

Avaliar o potencial dos ACO na resolução de extensões de PVRP e debruçar-se sobre diferentes abordagens é um trabalho que se pretende desenvolver.

Na avaliação de soluções alternativas para a operação de sistemas logísticos de distribuição e/ou recolha há que ter em conta dois objectivos contraditórios: a minimização dos custos operacionais, e a maximização da qualidade do serviço prestado. Os problemas em que se pretende obter a melhor solução de compromisso entre objectivos conflituosos requerem uma abordagem multi-objectivo. Neste sentido, julga-se do maior interesse vir a desenvolver um modelo que explore as potencialidades de uma abordagem multi-objectivo para o problema de estabelecimento de rotas periódico.

---

## Bibliografia

---

ALEGRE J., LAGUNA, M. e PACHECO, J. (submetido para publicação Nov. 2004) – Optimizing the Periodic Pick-up of Raw Materials for a Manufacturer of Auto Parts. European Journal of Operational Research.

ANGELELLI, E. e SPERANZA, M.G. (2002) – The periodic vehicle routing with intermediate facilities. European Journal of Operational Research, 137: 233-247.

ASSAD, A. e GOLDEN, B. (1995) – Arc routing methods and applications. In: Ball, M., Magnanti, T., Monma, C. e Nemhauser, G. (eds.) – Network Routing, Handbooks in Operations Research and Management Science 8. North Holland, Amsterdam.

BALDACCI, R., HADJICONSTANTINO, E. A. e MINGOZZI, A. (2004) – An exact algorithm for the capacitated vehicle routing problem based on a two-commodity network flow formulation. Operations Research, 52 (5): 723-738.

BALL, M. (1988) – Allocation/routing: Models and algorithms. In: Golden, B. e Assad, A. (eds.) – Vehicle Routing: Methods and Studies. North Holland, Amsterdam.

BECKERS, R., DENEUBOURG, J.-L. e GOSS, S. (1993) – Modulation of trail laying in the ant *Lasius niger* (hymenoptera: Formicidae) and its role in the collective selection of food source. Journal of Insect Behavior, 6 (6): 751-759.

BELTRAMI, E. J. e BODIN, L.D. (1974) – Networks and vehicle routing for municipal waste collection. Networks, 4: 65-94.

BERGER, J. e BARKAOUI, M. (2004) – A new hybrid genetic algorithm for the capacitated vehicle routing problem. Journal of the Operational Research Society, 54: 1254-1262.

BERGER, J., BARKAOUI, M. e BRÄYSY, O. (2003) – A route-directed hybrid genetic approach for the vehicle routing problem with time windows. Information Systems and Operations Research, 41: 179-194.

BLAKELEY, F., BOZKAYA, B., CAO, B., HALL, W. e KNOLMAJER, J. (2003) – Optimizing Periodic Maintenance Operations for Schindler Elevator Corporation. Interfaces, 33 (1): 67-79.

BLUM, C. (2003) – An ant colony optimization algorithm to tackle shop scheduling problems. Technical report TR/IRIDIA/2003-1, IRIDIA, Université Libre de Bruxelles, Brussels.

- BLUM, C., e BLESÁ, M. J. (2003) – Metaheuristics for the edge-weighted k-cardinality tree problem. Technical report LSI-03-1-R, Departament de Llenguatges I Sistemes Informàtics, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.
- BODIN, L. e GOLDEN, B. (1981) – Classification in vehicle routing and scheduling. Networks, 11: 97-108.
- BODIN, L., GOLDEN, B., ASSAD, A. e BALL, M. (1983) – Routing and scheduling of vehicles and crews – the state of the art. Computers and Operations Research, 10: 63-211.
- BULLNHEIMER, B., HARTL, R. F. e STRAUSS, C. (1999a) – An improved ant system algorithm for the vehicle routing problem. Annals of Operations Research, 89: 319-328.
- BULLNHEIMER, B., HARTL, R.F. e STRAUSS, C. (1999b) – Applying the Ant System to the Vehicle Routing Problem. In: Voss, S., Martello, S., Osman, I. H., e Roucairol, C. (eds.) – Meta-Heuristics: Advances and Trends in Local Search Paradigms for Optimization: 285-296. Kluwer, Boston.
- BULLNHEIMER, B., HARTL, R. F. e STRAUSS, C. (1999c) – A new rank-based version of the Ant System: a computational study. Central European Journal for Operations Research and Economics, 7 (1): 25-38.
- BURKE, E. K., ELLIMAN D. G. e WEARE, R. A. (1994) – University Timetabling System based on Graph Colouring and Constraint Manipulation. Journal of Research on Computing in Education, 27 (1): 1-19.
- CARTER, M. W., FARVOLDEN, J. M., LAPORTE, G. e XU, J. (1996) – Solving an integrated logistics problem arising in grocery distribution. INFOR, 34: 290-306.
- CHAO, I. M., GOLDEN, B. L. e WASIL, E. A. (1995) – An Improved heuristic for the period vehicle routing problem. Networks, 26: 25-44.
- CHIANG, W.-C. e RUSSELL, R. A. (1996) – Simulated annealing metaheuristics for the vehicle routing problem with time windows. Annals of Operations Research, 63: 3-27.
- CHRISTOFIDES, N., MINGOZZI, A. e TOTH, P. (1979) – The vehicle routing problem. In: Christofides, N., Mingozi, A. e Toth, P. (eds.) – Combinatorial Optimization: 315-338. Wiley, Chichester.
- CHRISTOFIDES, N. e BEASLEY, J. E. (1984) – The period routing problem. Networks 14: 237-256.
- CLARKE, G. e WRIGHT, J.W. (1964) – Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. Operations Research, 12 (4): 568-581.

COLORNI, A., DORIGO, M. e MANIEZZO, V. (1991) – Distributed optimization by ant colonies. In: Varela, F. e Bourguine, P. (eds.) – Proceedings of the European Conference on Artificial Life (ECAL'91): 134-142. Amsterdam: Elsevier Publishing.

COLORNI, A., DORIGO, M., MANIEZZO, V. e TRUBIAN, M. (1994) – Ant System for Job-Shop Scheduling. Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science, 34 (1): 39-53.

CORDEAU, J.-F., LAPORTE, G. e MERCIER, A. (2004) – An improved tabu search algorithm for the handling of route duration constraints in vehicle routing problems with time windows. Journal of the Operational Research Society, 55: 542-546.

CORDEAU, J.-F., GENDREAU, M., HERTZ, A. e LAPORTE, G. (1997) – A tabu search heuristic for periodic and multi-depot vehicle routing problems. Networks, 30: 105-119.

CORDEAU, J.-F., GENDREAU, M., HERTZ, A., LAPORTE, G. e SORMANY, J.-S. (2005) – New Heuristics for the Vehicle Routing Problem. Langevin, A. e Riopel, D. (eds.) – Logistics Systems. Design and Optimization. Springer.

COSTA, D. e HERTZ, A. (1997) – Ants can colour graphs. Journal of the Operational Research Society, 48: 295-305.

DOERNER, K., GRONALT, M., HARTL, R. F., REIMANN, M., STRAUSS e STUMMER, M. (2002): Savings Ants for the Vehicle Routing Problem. Proceedings of the EvoWorkshops 2002, Springer LNCS.

DORIGO, M. (1992) – Optimization, Learning, and Natural Algorithms. PhD thesis, Dip. Elettronica, Politecnico di Milano, Italy (in Italian).

DORIGO, M. e DI CARO, G. (1999) – The ant colony optimization meta-heuristic. In: Corne, D., Dorigo, M. e Glover, F. (eds.) – New Ideas in Optimization: 11-32. London, McGraw Hill.

DORIGO, M., DI CARO, G. e GAMBARDELLA, L. M. (1999) – Ant algorithms for discrete optimization. Artificial Life, 5(2): 137-172.

DORIGO, M., MANIEZZO, V. e COLORNI, A. (1996) – Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part B, 26 (1): 29-42.

DORIGO, M. e STÜTZLE, T. (2004) – Ant Colony Optimization. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.

- DOWSLAND, K. A. (1996) – Genetics algorithms – a tool for or ?. Journal of the Operational Research Society, 47: 550-561.
- DROR, M. e BALL, M. (1987) – Inventory/routing: Reduction from an annual to a short-period problem. Naval Res. Log. Q., 34: 891-905.
- DRUMMOND, L.M.A., OCHI, L.S. e VIANNA, D.S. (2001) – An asynchronous parallel metaheuristic for the period vehicle routing problem. Future Generation Computer Systems, 17 (4): 379-386.
- DUECK, G. (1993) – New optimization heuristics: The great deluge algorithm and the record-to-record travel. Journal of Computational Physics, 104: 86-92.
- EILON, S., GANDY, W. e CHRISTOFIDES, N. (1971) – Distribution Management: Mathematical Modeling and Practical Analysis. Griffin, London.
- FISHER, M. L. (1994) – Optimal solution of vehicle routing problems using minimum  $k$ -trees. Operations Research, 42 (4): 626-642.
- FISHER, M. L. e JAIKUMAR, R. (1981) – A generalized assignment heuristic for the vehicle routing. Networks, 11 (1): 109-124.
- FUKASAWA, R., LYSGAARD, J., POGGI, A. M., REIS, M., UCHOA, E. e WERNECK, R. F. (2004) – Robust branch-and-cut-and-price for the capacitated vehicle routing problem. In: Nemhauser, G. e Bienstock, D. (eds.) – Integer Programming and Combinatorial Optimization 10. Lecture Notes in Computer Science, vol 3064: 1-15. SpringerVerlag.
- GAMBARDELLA, L. M., TAILLARD, É. D. e AGAZZI, G. (1999) – MACS- VRPTW: A multiple ant colony system for vehicle routing problems with time windows. In: Corne, D., Dorigo, M. e Glover, F. (eds.) – New Ideas in Optimization: 63-76. London, McGraw Hill.
- GAUDIOSO, M. e PALETTA, G. (1992) – A heuristic for the periodic vehicle routing problem. Transportation Science, 26: 86-92.
- GASKELL, T. (1967) – Bases for the vehicle fleet scheduling. Operations Research Quarterly, 18: 281-295.
- GENDREAU, M., HERTZ, A. e LAPORTE, G. (1992) – New insertion and postoptimization procedures for the traveling salesman problem. Operations Research, 40 (6): 1086-1094.
- GENDREAU, M., HERTZ, A. e LAPORTE, G. (1994) – A tabu search heuristic for the vehicle routing problem. Management Science, 40: 1276-1290.



GLOVER, F. (1986) – Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. Computers & Operations Research, 13: 533-549.

GLOVER, F. e LAGUNA, M. (1997) – Tabu Search. Boston, Kluwer Academic Publishers.

GOLDEN, B. L. e WASIL, E. (1987) – Computerized vehicle routing in the soft drink industry. Operations Research, 35: 6-17.

GOLDEN, B. L., WASIL, E. A., KELLY, J. P. e CHAO, I. M. (1998) – Metaheuristics in vehicle routing. In: Crainic, T. G. e Laporte, G. (eds.) – Fleet Management and Logistics: 33- 56. Kluwer, Boston.

HADJICONSTANTINOY, E., CHRISTOFIDES, N. e MINGOZZI, A. (1995) – A new exact algorithm for the vehicle routing problem based on  $q$ -Paths and  $k$ -Shortest paths relaxations. Annals of Operations Research, 61: 21-43.

HJORRING, C. A. (1995) – The vehicle routing problem and local search meta-heuristic. Ph. D. Thesis, Department of Engineering Science, The University of Auckland, NZ.

HOLLAND, J. H. (1975) – Adaptation in Natural and Artificial Systems, Ann Arbor: The University of Michigan Press.

JANSSENS, G. K. e VAN BREEDAM, A. (1995) – A simulated annealing postprocessor for the vehicle routing problem. In: Rayward-Smith (eds.) – Applications of Modern Heuristic Methods. Alfred Waller, Henley-on-Thames.

KIRPATRICK, S., GELAT, C. D. J. e VECCHI, M. P. (1983) – Optimisation by simulated annealing. Science, 220: 671-680.

KOPFER, H., PANKRATZ, G. e ERKENS, E. (1994) – Development of a hybrid genetic algorithm for vehicle-routing. OR Spektrum, 16, 21.

LAPORTE, G. (1992) – The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms. European Journal of Operational Research, 59: 345-358.

LAPORTE, G., GENDREAU, M., POTVIN, J.-Y. e SEMET, F. (2000) – Classical and modern heuristics for the vehicle routing problem. International Transactions in Operational Research, 7: 285-300.

LAPORTE, G. e OSMAN, I. H. (1995) – Routing problems: A bibliography. Annals of Operations Research, 61: 227-262.

- LENSTRA, J. K. e RINNOY KAN, A. H. G. (1981) – A complexity of vehicle routing and scheduling problems. Networks, 11:221-227.
- LI, F., GOLDEN, B. L. e WASIL, E. A. (2005) – Very large-scale vehicle routing: new test problems, algorithms, and results. Computers & Operations Research, 32: 1165-1179.
- LIN, S. (1965) – Computer solutions of the traveling salesman problem. Bell System Technical Journal, 44: 2245-2269.
- LIN, S. e KERNIGHAN, B. (1973) – An effective heuristic algorithm for the travelling-salesman problem. Operations Research, 21:498-516.
- MANIEZZO, V., COLORNI, A. e DORIGO, M. (1994) – The Ant System applied to the Quadratic Assignment Problem. Technical Report IRIDIA/94-28, Universite Libre de Bruxelles, Belgium.
- MATOS, A. (1996) – Optimização de um Sistema de Recolha de Resíduos Sólidos. Dissertação para obtenção do grau de mestre em Investigação Operacional e Engenharia de Sistemas, IST-UTL, Portugal.
- MATOS, A. e OLIVEIRA, R. (2004) – An experimental Study of the Ant Colony System for the Period Vehicle Routing Problem. In: Dorigo, M., Birattari, M., Blum, C., Gambardella, L., Mondada, F., Stützle, T. (eds.) – Ant Colony Optimization and Swarm Intelligence, Lecture Notes in Computer Science, vol.3172: 286-293. Heidelberg, Springer-Verlag.
- MERKLE, D. e MIDDENDORF, M. (2002) – Ant colony optimization with the relative pheromone evaluation method. In: Gagnoni, S., Gottlieb, J., Hart, E., Middendorf, M. e Raidl, G. (eds.) – Applications of Evolutionary Computing, Lecture Notes in Computer Science, vol. 2279: 325-333. Berlin, Springer-Verlag.
- MILLER, D. L. (1995) – A matching based exact algorithm for capacitated vehicle routing problems. ORSA Journal on Computing, 7: 1-9.
- MILLER, C. E., TUCKER A. W. e ZEMLIN, R.A. (1960) – Integer programming formulations and traveling salesman problems. Journal of the Association for Computing Machinery, 7: 326-329.
- MONTEMANNI, R., GAMBARDELLA, L.M., RIZZOLI, A.E. e DONATI, A.V. (2004) – A new algorithm for a dynamic vehicle routing problem based on ant colony system. Technical Report TR-23-02, IDSIA, Galleria 2, Manno, 6928, Switzerland, 2004.
- NADDEF, D. e RINALDI, G. (2002) – Branch-and-cut algorithms for the capacitated VRP. In: Toth, P. e Vigo, D.(eds.) – The Vehicle Routing Problem. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Philadelphia.

- OR, I. (1976) – Traveling salesman-type combinatorial optimization problems and their relation to the logistics of regional blood banking. Ph. D. dissertation, Northwestern University, Evanston, IL.
- OSMAN, I. H. (1993) – Metastrategy simulated annealing and tabu search algorithms for the vehicle routing problem. Annals of Operations Research, 41: 421-451.
- PAESSENS, H.(1988) – The savings algorithm for the vehicle routing problem. European Journal and Operations Research, 34: 336-344.
- POTVIN, J.-Y., e ROBILLARD, C. (1995) – Clustering for vehicle routing with a competitive neural network. Neurocomputing, 8, 125.
- PRINS, C. (2004) - A simple and effective evolutionary algorithm for the vehicle routing problem. Computers & Operations Research, 31: 1985-2002.
- RALPHS, T., KOPMAN, L., PULLEYBLANK, W. e TROTTER JR., L. (2003) – On the capacitated vehicle routing problem. Mathematical Programming, 94: 343-359, 2003.
- RARDIN, R.L. e UZSOOY, R. (2001) – Experimental Evaluation of Heuristic Optimization Algorithms: A tutorial. Journal of Heuristics, 7: 261-304.
- REGO, C. e ROUCAIROL, C. (1996) – A parallel tabu search algorithm using ejection chains for the vehicle routing problem. In: Meta-Heuristics: Theory and Applications , pp.661-675, Kluwer, Boston.
- REIMANN, M., DOERNER, K. e HARTL, R. F. (2004) – D-Ants: Savings based ants divide and conquer the vehicle routing problem. Computers & Operations Research, 31 (4): 563-591.
- REIMANN, M., STUMMER e DOERNER, K. (2002) – A savings based ant system for the vehicle routing problem. In: Langdon W. B. et al. (eds.) – Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO- 2002): 1317-1325. San Francisco, Morgan Kaufmann.
- REIMANN, M., SHTOVBA, S. e NEPOMUCENO, E. (2001): A hybrid ACO-GA approach to solve Vehicle Routing Problems. Student Papers of the Complex Systems Summer School, Budapest July 15 - August 9 2001, Santa Fe Institute.
- RENAUD, J., BOCTOR, F., F. e LAPORTE, G. (1996) – A fast composite heuristic for the symmetric traveling salesman problem. INFORMS Journal on Computing, 8: 134-143.

ROCHAT, Y. e TAILLARD, É.D. (1995) – Probabilistic diversification and intensification in local search for vehicle routing. Journal of Heuristics, 1: 147-167.

RUSSELL, R. A. (1977) – An effective heuristic for the M-TOUR Traveling Salesman Problem with some side conditions. Operations Research, 21 (3): 517-524.

RUSSELL, R.A. e GRIBBIN, D. (1991) – A multiphase approach to the period routing problem. Networks, 21: 747-765.

RUSSELL, R. A. e IGO, W. (1979) – An assignment routing problem. Networks 9: 1-17.

SCHMITT, L. J. (1994) – An emphasis on TSP and VRPTC. Ph. D. Dissertation, Department of Management Information Systems and Decision Sciences, University of Memphis, Tennessee.

SCHUMANN, M. e RETZKO, R. (1995) – Self-organizing maps for vehicle routing problems – minimizing an explicit cost function. In: Fogelman-Soulie, F. (eds.) – Proceedings of the International Conference on Artificial Neural Networks: 401-406. Paris.

STÜTZLE, T. e DORIGO, M. (1999) – ACO algorithms for traveling salesman. In: Miettinen, K. et al. (eds.) – Evolutionary Algorithms in Engineering and Computer Science: 163-183. Chichester U K, John Wiley & Sons.

STÜTZLE, T. e HOOS, H.H. (1997) – The *MAX-MIN* Ant System and local search for the traveling salesman problem. In: Bäck, T., Michalewicz, Z. e Yao, X. (eds.) – Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Evolutionary Computation (ICEC'97). Piscataway, NJ, IEEE Press.

STÜTZLE, T. e HOOS, H.H. (2000) – The *MAX-MIN* Ant System. Future Generation Computer Systems, 16 (8): 889-914.

TAILLARD, E.D., GAMBARDELLA, L.-M., GENDREAU, M. e POTVIN, J.-Y. (1998) – Adaptive memory programming : a unified view of metaheuristics. Technical Report IDSIA, Lugano, first version published in EURO XVI Conference Tutorial on Research Reviews Booklet (semi-plenary session), Brussels (July 1998).

TAN, C. C. R. e BEASLEY, J. E. (1984) – A heuristic algorithm for the period vehicle routing problem. Omega, 12: 497-504.

TARANTILIS, C.-D. e KIRANOUDIS, C. T. (2002) – Bone Route: An adaptive memory-based method for effective fleet management. Annals of Operations Research, 115: 227-241.

THOMPSON, P. M. e PSARAFTIS, H. N. (1993) – Cyclic transfer algorithms for the multivehicle routing and scheduling problems. Operations Research, 41: 935-946.

TOTH, P. e VIGO, D. editors. (2002a) – The vehicle routing problem. Monographs on Discrete Mathematics and Applications. S.I.A.M., Philadelphia, PA.

TOTH, P. e VIGO, D. (2002b) – Models, relaxations and exact approaches for the capacitated vehicle routing problem. Discrete Applied Mathematics, 123: 487-512.

TOTH, P. e VIGO, D. (2003) – The granular tabu search and its application to the vehicle routing problem. INFORMS Journal on Computing, 15: 333-346.

YELLOW, P. (1970) – A computational modification to the savings method of vehicle scheduling. Operations Research Quarterly, 21: 281-283.



---

## Anexo A

### Caracterização dos pontos de recolha

---

Neste anexo é apresentada uma tabela (Tabela A.1) onde são caracterizadas as localidades do município de Viseu com recolha afecta à CMV. Cada localidade é quantificada no que diz respeito ao número de contentores, número de recolhas semanais dos contentores, população e giro a que pertencem actualmente. Também são apresentados os resultados do ajuste linear do número de contentores em função da população na tentativa de verificar se a distribuição e número de contentores em vigor está de acordo com as necessidades de cada localidade.

Nº nó	Localidade	População residente	Nº de contentores	Nº de recolhas semanais	Giro
1	Vildemoinhos	1021	31	6	2
2	S. Salvador	566	17	6	2
3	Póvoa da Medronhosa	295	9	6	2
4	Santarinho	409	12	6	2
5	Tondelinha	736	22	6	2
6	Chãos	139	5	3	6
7	Casal Mau	71	3	3	6
8	Sarzedelo	221	9	3	6
9	Portela (Sarzedelo)	119	5	3	6
10	Ferrocinto	205	8	3	6
11	Passos (Ferrocinto)	88	3	3	6
12	Magarelas	69	3	3	6
13	Escouras	91	4	3	6
14	Casal (Torredeita)	98	4	3	6
15	Novais	59	2	3	6
16	Várzea	137	5	3	6
17	Boaldeia	589	23	3	6
18	Farminhão	358	14	3	6
19	Real	326	13	3	6
20	Carqueijal	98	4	3	6

**Tabela A. 1:** Caracterização dos locais de recolha de RSU da área em estudo

Nº nó	Localidade	População residente	Nº de contentores	Nº de recolhas semanais	Giro
21	Routar	301	12	3	6
22	Vila Chã do Monte	287	11	3	6
23	Torredeita	311	12	3	6
24	Salgueiral	56	2	3	7
25	Vila Nova	86	3	3	7
26	Dade	207	6	3	7
27	Portela (Couto Cima)	191	6	3	7
28	Mosteirinho	315	9	3	7
29	Couto de Baixo	117	3	3	7
30	Couto de Cima	224	7	3	7
31	S. Cosmado	254	8	3	7
32	Figueiró	251	7	3	7
33	Cariça	63	2	3	7
34	Canelas	243	7	3	7
35	Poives	154	5	3	7
36	Vil de Soito	424	13	3	7
37	Carvalhais	30	1	3	7
38	Masgalos	149	4	3	7
39	Sampaio	69	2	3	7
40	Travassós de Orgens	274	8	3	7
41	S. Martinho	924	27	3	7
42	Quintela	370	11	3	7
43	Orgens	967	29	6	2
44	Paradinha	795	24	6	2
45	Qt. de Belém	396	12	6	2
46	Bairro da Misericórdia	697	22	3	4
47	Cabanões	241	8	3	4
48	Teivas	568	18	3	4
49	Lourosa de Cima	479	15	3	4
50	S. João de Lourosa	374	12	3	5
51	Vilela	218	7	3	5
52	Póvoa de Moscoso	133	4	3	5
53	Rebordinho	369	11	3	4
54	Oliveira de Barreiros	907	29	3	5
55	Báuca de Oliveira	132	4	3	5
56	Vila Chã de Sá	1798	56	3	4
57	Faíl	778	24	3	4
58	Passos de Silgueiros	925	30	3	5

**Tabela A.1 (continuação):** Caracterização dos locais de recolha de RSU da área em estudo



Nº nó	Localidade	População residente	Nº de contentores	Nº de recolhas semanais	Giro
59	Pindelo	557	18	3	5
60	Loureiro de Silgueiros	387	12	3	5
61	Bairro da Bela Vista	60	2	3	5
62	Falorca	180	6	3	5
63	Casal Jusão	363	12	3	5
64	Porrinheiro	327	11	3	5
65	Lajes de Silgueiros	455	15	3	5
66	Casal Meão	90	3	3	5
67	Silvares	246	8	3	5
68	Lourosa de Baixo	467	15	3	5
69	Cumieira	54	2	3	4
70	Coimbrões	373	12	3	4
71	Espadanal	210	7	3	4
72	Fragosela de Cima	1367	43	3	4
73	Fragosela de Baixo	282	9	3	4
74	Caçador	379	17	6	3
75	Póvoa de Sobrinhos	1604	73	6	3
76	Ranhados	866	40	6	3
77	Barbeita	1302	40	3	4
78	Prime	288	9	2	13
79	Pinheiro	369	12	2	13
80	Ponte de Fagilde	80	3	2	13
81	Santos Evos	232	7	2	13
82	Nesprido	563	18	2	13
83	Vila Corça	252	8	2	13
84	Vilar de Ordem	213	7	2	13
85	Outeiro (Povolide)	55	2	2	13
86	Povolide	277	9	2	13
87	Carragoso	390	12	2	13
88	Sernada	191	6	2	13
89	Dornelas	43	1	2	13
90	Corvos à Nogueira	392	12	2	13
91	Remonde	26	1	2	13
92	Povoação	28	1	2	12
93	Cadimas	174	5	2	13
94	Nespereira (Povolide)	228	7	2	13
95	Cabril	123	4	2	13
96	S. Cristovão	69	2	2	12

**Tabela A.1 (continuação):** Caracterização dos locais de recolha de RSU da área em estudo

Nº nó	Localidade	População residente	Nº de contentores	Nº de recolhas semanais	Giro
97	Casaldeiro	37	1	2	12
98	Covelo	46	2	2	12
99	Souto Chão	43	2	2	12
100	Bassim	80	3	2	12
101	Carvalhal	106	4	2	12
102	Figueiredo	138	5	2	12
103	Fornição	37	1	2	12
104	Casal do Esporão	137	5	2	12
105	Carcavelos	81	3	2	12
106	Brufe	61	2	2	11
107	Barraca	46	2	2	12
108	Travassos	203	7	2	12
109	Barreiros	183	6	2	11
110	Coucineiro	90	3	2	11
111	Cepões	430	15	2	11
112	Nogueira de Baixo	66	2	2	11
113	Canidelo	53	2	2	11
114	Vila Chã (Cepões)	61	2	2	11
115	Aviuges	266	9	2	11
116	Bretelhe	169	6	2	11
117	Nogueiredo	32	1	2	12
118	Passos de Cavernães	92	3	2	12
119	Junçal	116	4	2	12
120	Casal de Cavernães	51	2	2	12
121	Silvares (Cavernães)	77	3	2	12
122	Taboadelo	44	2	2	12
123	Outeiro	102	4	2	12
124	Lamaçais	155	6	2	12
125	Moimenta	41	1	2	12
126	Ermida	66	2	2	12
127	Corredoura	51	2	2	12
128	Carragosela	63	2	2	12
129	Alvelos	49	2	2	12
130	Cavernães	250	8	3	8
131	Vendas de Moita	92	3	3	8
132	Mundão	905	30	3	8
133	Nespereira (Mundão)	213	7	3	8
134	Póvoa do Mundão	143	5	3	8

**Tabela A.1 (continuação):** Caracterização dos locais de recolha de RSU da área em estudo

Nº nó	Localidade	População residente	Nº de contentores	Nº de recolhas semanais	Giro
135	Britamontes	152	5	3	8
136	Travassós de Cima	1541	38	6	1
137	S. João da Carreira	451	11	6	1
138	Travassós de Baixo	1113	27	6	1
139	Rio de Loba	1466	67	6	3
140	Gumirães	2859	131	6	3
141	Esculca	842	21	6	1
142	Santiago	1045	26	6	1
143	Póvoa de Abraveses	2025	50	6	1
144	Bairro de St. Rita	770	19	6	1
145	Moure de Carvalhal	452	15	3	8
146	Casal de Mundão	290	9	3	8
147	Abraveses E.N.2	1215	30	6	1
148	Moure de Madalena	954	31	3	8
149	Bassar	149	5	3	8
150	Campo	810	26	3	8
151	Aeródromo	20	1	2	10
152	Folgosa	221	7	2	10
153	Bairro Norad	135	4	3	8
154	Vilar de Baixo	45	2	2	10
155	Vilar (Lordosa)	48	2	2	10
156	Sanguinhedo Maçãs	400	13	2	10
157	Nelas	184	6	2	11
158	Couto de Cepões	27	1	2	10
159	Silvares (Côta)	74	3	2	11
160	Vouguinha	101	4	2	11
161	Nogueira (Côta)	388	13	2	11
162	Sanguinhedo de Côta	241	8	2	11
163	Vila de um Santo	340	12	2	11
164	Zonho	136	5	2	11
165	Paçô	220	6	3	9
166	Bigas	281	9	2	10
167	Almargem	230	8	2	10
168	Várzea de Calde	391	13	2	10
169	Póvoa de Calde	217	7	2	10
170	Calde	369	12	2	10
171	Vilar do Monte	190	6	2	10

Tabela A.1 (continuação): Caracterização dos locais de recolha de RSU da área em estudo

Nº nó	Localidade	População residente	Nº de contentores	Nº de recolhas semanais	Giro
172	Paraduça	251	8	2	10
173	Vila Nova do Campo	850	28	3	8
174	Pascoal	569	17	6	2
175	Alto de Abraveses	444	11	6	1
176	Abraveses	2841	70	6	1
177	Es. vllh de Abraveses	374	9	6	1
178	Av. da Bélgica	968	24	6	1
179	Galifonge	121	4	3	9
180	Lustosa	560	16	3	9
181	Moselos	1461	44	6	2
182	Seganhos	69	2	3	9
183	Ribafeita	277	8	3	9
184	Casal (Ribafeita)	167	5	3	9
185	Gumiei	300	9	3	9
186	Lufinha	89	3	3	9
187	Bodiosa a Velha	182	5	3	9
188	Oliveira de Baixo	457	13	3	9
189	Bodiosa C. F.	117	3	3	9
190	Bodiosa a Nova	127	4	3	9
191	Pereiras	262	8	3	9
192	Silgueiros (Bodiosa)	284	8	3	9
193	Aval	239	7	3	9
194	Travanca de Bodiosa	433	13	3	9
195	Oliveira de Cima	416	12	3	9
196	Queirela	594	17	3	9
197	Lobagueira	39	1	3	7
198	Povidal	28	1	2	12
199	Guimarães	160	6	2	12
200	Nogueira de Cima	110	4	2	11
201	Pousa Maria	40	1	2	10
202	Lajeosa	535	18	2	10
<b>TOTAL</b>		<b>72962</b>	<b>2336</b>	<b>610</b>	

**Tabela A.1 (continuação):** Caracterização dos locais de recolha de RSU da área em estudo

Na tentativa explicar a diferente distribuição dos contentores, que depende evidentemente das quantidades de resíduos produzidas, estando estas dependentes da

população residente, ajustou-se uma recta de regressão à população versus contentores, verificando-se uma forte correlação linear ( $r=0.95$ ).

#### SUMÁRIO DOS RESULTADOS

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0.95
Quadrado de R	0.91
Quadrado de R ajustado	0.91
Erro-padrão	4.38
Observações	202

#### ANOVA

	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significância</i>
Regressão	1	40453.12	40453.12	2107.49	0.000
Residual	201	3858.17	19.19		
Total	202	44311.29			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro-padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor P</i>
Intercepção	0			
População residente	0.032	0.001	59.286	0.000

**Tabela A.2:** Resultados do modelo de regressão linear



---

## Anexo B

### Problemas de teste existentes na literatura de PVRP

---

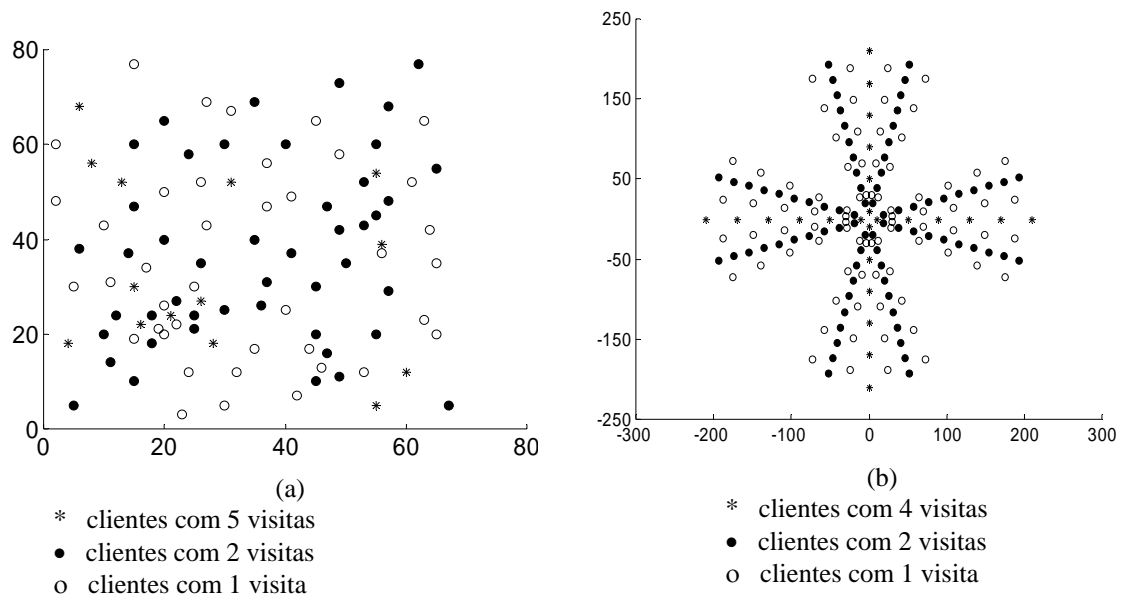
Na literatura científica sobre modelos para resolução de problemas combinatórios é comum existirem comparações de resultados para um conjunto de problemas tipo, denominados problemas de teste (*benchmark problems* na terminologia inglesa).

Para os problemas de estabelecimento de rotas periódicos, o número de problemas de teste é 32, tendo características que os diferenciam principalmente quando são propostos por autores diferentes.

Na Tabela B.1 encontram-se as principais características destes problemas: os primeiros 10 problemas de teste foram introduzidos por Eilon et al. (1971) e adaptados para o PVRP por Christofides e Beasley (1984), o 11º foi proposto por Russell e Igo (1979), o 12º e 13º problema foram sugeridos por Russell e Gribbin (1991) e os últimos 19 (do 14º ao 32º) apresentados em Chao et al. (1995).

Os primeiros 13 problemas variam entre 50 a 417 clientes a visitar ( $n$ ) com horizontes temporais ( $t$ ) que vão dos dois aos 10 dias. Nestes problemas, a distribuição geográfica dos clientes é mais ou menos homogênea, ao contrário dos últimos problemas de teste gerados por Chao et al. (1995) que apresentam uma configuração espacial dos clientes com padrão definido que dependente da frequência de visita de cada cliente – ver a título de exemplo os gráficos da Figura B.1.

O número de veículos disponíveis por período ( $m$ ) variam entre 1 e 9 e a capacidade dos veículos ( $Q$ ) entre 20 a 2000 unidades de volume.



**Figura B.1:** Distribuição geográfica dos clientes do exemplo nº 8 da literatura (a) e do exemplo nº 20 da literatura (b)

Nº do problema	$n$	$m$	$t$	$Q$	Códigos admissíveis
1	50	3	2	160	1,2
2	50	3	5	160	1,2,3,4,5,11,12,13,28
3	50	1	5	160	1,2,3,4,5
4	75	5	2	140	1,2
5	75	6	5	140	1,2,3,4,5,11,12,13,28
6	75	1	10	140	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
7	100	4	2	200	1,2
8	100	5	5	200	1,2,3,4,5,11,12,13,28
9	100	1	8	200	1,2,3,4,5,6,7,8
10	100	4	5	200	1,2,3,4,5,11,12,13,17,18,19
11	126	4	5	235	1,2,3,4,5,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28
12	163	3	5	140	1,2,3,4,5,11,12,13,17,18,19
13	417	9	7	2000	1,2,3,4,5,6,7,14,15,16,29,30,31,32
14	20	2	4	20	1,2,3,4,11,12,23
15	38	2	4	30	1,2,3,4,11,12,23
16	56	2	4	40	1,2,3,4,11,12,23
17	40	4	4	20	1,2,3,4,11,12,23
18	76	4	4	30	1,2,3,4,11,12,23
19	112	4	4	40	1,2,3,4,11,12,23
20	184	4	4	60	1,2,3,4,11,12,23
21	60	6	4	20	1,2,3,4,11,12,23
22	114	6	4	30	1,2,3,4,11,12,23
23	168	6	4	40	1,2,3,4,11,12,23
24	51	3	6	20	1,2,3,4,5,6,14,16,30,33
25	51	3	6	20	1,2,3,4,5,6,14,16,30,33
26	51	3	6	20	1,2,3,4,5,6,14,16,30,33

**Tabela B. 1:** Dimensões dos problemas de teste existentes na literatura de PVRP



Nº do problema	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>Q</i>	Códigos admissíveis
27	102	6	6	20	1,2,3,4,5,6,14,16,30,33
28	102	6	6	20	1,2,3,4,5,6,14,16,30,33
29	102	6	6	20	1,2,3,4,5,6,14,16,30,33
30	153	9	6	20	1,2,3,4,5,6,14,16,30,33
31	153	9	6	20	1,2,3,4,5,6,14,16,30,33
32	153	9	6	20	1,2,3,4,5,6,14,16,30,33

Tabela B. 2 (continuação): Dimensões dos problemas de teste existentes na literatura de PVRP

Os 33 códigos da Tabela B.2 indicam os dias em que a visita pode ser efectuada. Por exemplo, o código 1 indica que o serviço é efectuado no dia 1, enquanto que o código 12 indica que o serviço pode ser efectuado nos dias 2 e 4. Na última coluna da Tabela B.1 registam-se os códigos admissíveis de cada problema teste.

Código	dias									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x									
2		x								
3			x							
4				x						
5					x					
6						x				
7							x			
8								x		
9									x	
10										x
11	x		x							
12		x		x						
13			x		x					
14	x			x						
15	x				x					
16		x			x					
17	x		x		x					
18	x	x		x						
19		x		x	x					
20	x	x			x					
21	x		x	x						
22		x	x		x					
23	x	x	x	x						
24	x	x	x		x					
25	x	x		x	x					
26	x		x	x	x					
27		x	x	x	x					
28	x	x	x	x	x					
29		x				x				
30			x			x				
31			x				x			
32				x			x			
33	x	x	x	x	x	x				

Tabela B.2: Códigos dos dias de visita

O problema em estudo é um problema com muitos clientes a visitar, podendo-se considerar um problema de grande dimensão. Os modelos desenvolvidos nesta dissertação têm em vista a resolução de PVRP de grande dimensão. Por este motivo, seleccionou-se um conjunto de problemas da literatura de grande dimensão (ver Tabela B.3) para experimentação computacional, pois seriam os que mais se poderiam identificar com o problema em estudo. Os problemas seleccionados têm dimensões que variam entre a visita de 100 a 417 clientes e um horizonte temporal que varia entre 4 a 7 dias. O número de visitas durante o horizonte temporal ( $N$ ) variam entre 174 a 457 clientes.

Características Gerais					
<i>Prob. n°</i>	<i>n</i>	<i>N</i>	<i>t</i>	<i>m</i>	<i>Q</i>
8	100	202	5	5	200
10	100	174	5	4	200
13	417	457	7	9	2000
19	112	208	4	4	40
20	184	336	4	4	60
23	168	312	4	6	40
30	153	270	6	9	20

**Tabela B.3:** Problemas de teste seleccionados para estudo

---

## **Anexo C**

### **Resultados da aplicação do modelo de duas fases ao caso de estudo**

---

Apresentam-se neste anexo as soluções provenientes da aplicação do modelo de duas fases ao caso de estudo. No ponto C1 expõe-se a solução da primeira fase e o no ponto C2 a solução da segunda fase quando não aplicada a fase de transição. Nos pontos C3 e C4 apresentam-se, respectivamente, as soluções da primeira e segunda fase, mas com aplicação da fase de transição.

**C1.** A execução da primeira fase do modelo deu origem a 78 rotas que englobam a visita a 202 locais de recolha um número diferenciado de vezes: 27 locais com 6 visitas, 98 com 3 visitas e os restantes 77 com 2 visitas. O número de contentores totais recolhidos é de 9248, percorrendo entre localidades um total de 1929 quilómetros.

Na Tabela C. 1 apresenta-se a constituição das 78 rotas obtidas após 500 iterações do modelo da primeira fase. Na primeira coluna da Tabela C. 1 indica-se o número da rota, seguindo-se o número total de contentores (cont), quilómetros percorridos entre localidades (km) e duração em minutos de cada rota (minutos).

Nº	Cont.	Km	minutos	rotas																			
1	131	7.95	253.6	140																			
2	131	7.95	253.6	140																			
3	131	7.95	253.6	140																			
4	131	7.95	253.6	140																			
5	114	37.65	267.6	60	61	63	64	65	66	67	58	141											
6	104	48.61	265.9	11	12	13	14	15	16	17	22	21	24	23	20	25	33	32	34				
7	104	48.61	265.9	11	12	13	14	15	16	17	22	21	24	23	20	25	33	32	34				
8	98	50.15	257.3	39	38	197	196	195	194	187	184	186	185	183	182	180	151						
9	108	38.6	258.0	54	55	59	60	61	62	64	65	66	67										
10	106	46.86	266.9	34	32	33	20	23	24	21	22	17	16	15	14	13	12	10					
11	110	43.89	269.8	54	55	59	63	62	58	51	52												
12	98	46.57	251.9	149	165	202	172	171	170	169	167	168	156	155									
13	102	44.35	255.8	188	189	191	192	193	190	187	184	186	185	183	182	180	179	165	201				
14	106	45.52	264.9	149	172	171	170	169	167	168	156	202	166	152									
15	104	42.48	256.6	8	19	18	28	29	25	26	27	31	30	37	35	40	45						
16	109	39.02	260.5	64	65	66	67	62	63	61	60	59	55	48									
17	105	45.5	263.0	74	80	83	82	84	85	86	94	154	95	93	92	96	97	98	99	124	123	121	122
18	117	30.72	262.6	69	70	71	72	73	78	79	81	89	90	91	129								
19	110	42.9	268.3	194	187	190	193	192	191	189	188	196	195	179	166	133							
20	116	35.37	267.8	44	57	53	50	68	52	49	137												
21	131	16.75	267.0	75	77	87	88																
22	130	15.02	262.6	175	174	181	173	150	153														
23	123	28.18	269.7	44	57	56	53	47															
24	112	23.88	242.9	46	69	70	71	72	73	74													
25	117	32.23	264.9	2	5	6	7	8	18	19	10	9	3	4									
26	130	19	268.6	75	74	77																	
27	130	17.95	267.0	76	74	75																	
28	131	16.75	267.0	75	77	87	88																
29	123	28.18	269.7	44	57	56	53	47															

Tabela C. 1: Solução da primeira fase do algoritmo – conjunto de rotas





**C2.** Na segunda fase do modelo procede-se à resolução de um problema de coloração de grafos. Constrói-se um grafo a partir da solução da primeira fase: as rotas representam os vértices e as arestas os conflitos entre rotas. No caso de estudo, o número máximo de conflitos que um grafo desta natureza pode ter é de 776 (cada local com recolha diária gera 15 conflitos uma vez que terão de pertencer a 6 rotas distintas mutuamente adjacentes, analogamente, os locais com 3 visitas semanais geram 3 conflitos e os de 2 visitas semanais geram 1 conflito).

O grafo construído a partir da solução da primeira fase apresenta 78 vértices (78 rotas) que são ligados por 351 arestas, sem nenhuma componente desconexa. A resolução do problema de coloração deu origem a uma solução com 9 cores. Pretende-se colorir o grafo com um número máximo de 6 cores, sendo necessário proceder à coloração do problema relaxado.

O grafo gerado a partir do problema relaxado inclui 78 vértices, 148 arestas e é constituído por 8 componentes desconexas, o que permite uma coloração independente de cada componente.

Na Tabela C.2 apresenta-se a composição das 8 componentes desconexas (subgrafos), que no conjunto englobam 74 rotas. As quatro rotas que faltam para perfazer o conjunto das 78 da solução obtida, são as primeiras 4 rotas que, por serem compostas por um único ponto a visitar, são componentes isoladas com um único vértice.

Subgrafo	Rotas (vértices)	Total de rotas
1	5-9-11-16-20-23-29-31-32-51	10
2	6-7-10	3
3	8-13-15-19-22-25-33-35-36-37-38-39-40-44-46-47-48-49-50-52-53-54-55-58-60-65-66-72	29
4	12-14	2
5	17-18-24-30-34-41-42-43-57-59-64-67-68-73-77-78	16
6	21-26-27-28-56-61	6
7	62-63	2
8	69-70-71-74-75-76	6
<b>Total</b>		<b>74</b>

**Tabela C. 2:** Composição das componentes desconexas

A coloração das componentes com um número de rotas inferior ou igual a seis é imediata, pois formam grafos completos, sendo o número de cores igual ao número de vértices que os constituem. A título de exemplo observe-se o subgrafo 8 constituído pelas rotas:  $R_{69} = [139 - 136 - 135]$ ,  $R_{70} = [139 - 136 - 135]$ ,  $R_{71} = [139 - 136 - 135]$ ,  $R_{74} = [139 - 136]$ ,  $R_{75} = [139$

– 136 – 138],  $R_{76} = [139 - 136 - 138]$ . Todas incluem um ponto (que neste caso até são dois, o ponto 139 e ponto 136) com visita diária obrigatória, logo cada vértice é adjacente a todos os outros. O grafo é completo, o que implica necessariamente a coloração com um número mínimo de cores igual a seis.

A coloração dos subgrafos 1, 3 e 5 é feita recorrendo ao CPLEX Interactive Optimizer 8.1.0. para resolução do problema formulado no Capítulo 4. As variáveis  $C_i$  e  $G_{i,j}$  com valor igual a um destacam-se na Tabela C. 3 ( $C_i$  - variável binária que toma o valor 1 se a cor  $i$  for usada e 0 caso contrário;  $G_{i,j}$  - variável binária que toma o valor 1 se a cor  $j$  for atribuída à rota  $i$  e zero caso contrário).

No subgrafo 3, por se obter um grafo com número cromático igual a sete, teve que se eliminar as arestas fracas provenientes de pontos com 6 visitas semanais.

Subgrafo1	Subgrafo 3	Subgrafo 5
$C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=1$	$C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=C_6=1$	$C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=1$
$G_{5_2}=1$	$G_{8_5}=1$	$G_{17_1}=1$
$G_{9_1}=1$	$G_{13_1}=1$	$G_{18_1}=1$
$G_{11_5}=1$	$G_{15_3}=1$	$G_{24_3}=1$
$G_{16_4}=1$	$G_{19_3}=1$	$G_{30_1}=1$
$G_{20_4}=1$	$G_{22_4}=1$	$G_{34_5}=1$
$G_{23_2}=1$	$G_{25_6}=1$	$G_{41_4}=1$
$G_{29_5}=1$	$G_{33_1}=1$	$G_{42_5}=1$
$G_{31_3}=1$	$G_{35_2}=1$	$G_{43_4}=1$
$G_{32_1}=1$	$G_{36_1}=1$	$G_{57_3}=1$
$G_{51_3}=1$	$G_{37_5}=1$	$G_{59_5}=1$
	$G_{38_5}=1$	$G_{64_2}=1$
	$G_{39_2}=1$	$G_{67_2}=1$
	$G_{40_1}=1$	$G_{68_1}=1$
	$G_{44_6}=1$	$G_{73_2}=1$
	$G_{45_6}=1$	$G_{77_4}=1$
	$G_{46_3}=1$	$G_{78_3}=1$
	$G_{47_1}=1$	
	$G_{48_5}=1$	
	$G_{49_3}=1$	
	$G_{50_4}=1$	
	$G_{52_3}=1$	
	$G_{53_6}=1$	
	$G_{54_5}=1$	
	$G_{55_5}=1$	
	$G_{58_4}=1$	
	$G_{60_4}=1$	
	$G_{65_6}=1$	
	$G_{66_2}=1$	
	$G_{72_4}=1$	

**Tabela C. 3:** Coloração das componentes desconexas



O problema de coloração é formulado de modo a equilibrar o número de rotas pelas diferentes cores – realmente este equilíbrio é obtido nos problemas resolvidos. Acrescentando aos três subgrafos coloridos através do CPLEX os resultados dos outros subgrafos, obtém-se uma solução com 15 rotas para segunda-feira e sexta-feira, 14 para quarta-feira e quinta-feira, 12 para terça-feira e 8 para o fim-de-semana – consultar Tabela C. 4.

	cores					
	1 segunda-feira	2 terça-feira	3 quarta-feira	4 quinta-feira	5 sexta-feira	6 sáb/dom
Subgrafo 1	R <sub>9</sub> , R <sub>32</sub>	R <sub>5</sub> , R <sub>23</sub>	R <sub>31</sub> , R <sub>51</sub>	R <sub>16</sub> , R <sub>20</sub>	R <sub>11</sub> , R <sub>29</sub>	
Subgrafo 2	R <sub>6</sub>		R <sub>10</sub>	R <sub>7</sub>		
Subgrafo 3	R <sub>13</sub> , R <sub>33</sub> , R <sub>36</sub> , R <sub>40</sub> , R <sub>47</sub>	R <sub>35</sub> , R <sub>39</sub> , R <sub>28</sub>	R <sub>15</sub> , R <sub>19</sub> , R <sub>46</sub> , R <sub>49</sub> , R <sub>52</sub>	R <sub>22</sub> , R <sub>50</sub> , R <sub>58</sub> , R <sub>60</sub> , R <sub>72</sub>	R <sub>8</sub> , R <sub>37</sub> , R <sub>38</sub> , R <sub>48</sub> , R <sub>54</sub> , R <sub>55</sub>	R <sub>25</sub> , R <sub>44</sub> , R <sub>45</sub> , R <sub>53</sub> , R <sub>65</sub>
Subgrafo 4		R <sub>14</sub>			R <sub>12</sub>	
Subgrafo 5	R <sub>17</sub> , R <sub>18</sub> , R <sub>30</sub> , R <sub>68</sub>	R <sub>64</sub> , R <sub>67</sub> , R <sub>73</sub>	R <sub>24</sub> , R <sub>57</sub> , R <sub>78</sub>	R <sub>41</sub> , R <sub>43</sub> , R <sub>77</sub>	R <sub>34</sub> , R <sub>42</sub> , R <sub>59</sub>	
Subgrafo 6	R <sub>26</sub>	R <sub>21</sub>	R <sub>61</sub>	R <sub>56</sub>	R <sub>28</sub>	R <sub>27</sub>
Subgrafo 7		R <sub>62</sub>			R <sub>63</sub>	
Subgrafo 8	R <sub>74</sub>	R <sub>69</sub>	R <sub>75</sub>	R <sub>70</sub>	R <sub>71</sub>	R <sub>76</sub>
Outras	R <sub>1</sub>		R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>		R <sub>4</sub>
<b>Total</b>	<b>15</b>	<b>12</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>8</b>

**Tabela C. 4:** Número de rotas afecta a cada cor

A solução obtida após coloração do problema relaxado é inadmissível na medida em que não se verificam todas as restrições de calendarização: existem cinco problemas de inadmissibilidade em locais com três ou duas visitas semanais (consultar Tabela C.5) e 27 em locais de visita diária, pelo facto de se ter colorido um grafo relaxado onde foram eliminadas as arestas “fracas”. Adicionalmente, tem-se 11 locais com problemas de inadmissibilidade por incumprimento do espaçamento entre visitas; 3 locais com três visitas semanais e 8 locais com 2 visitas semanais.

A título de exemplo, observe-se o ponto de visita com o número 155. Este ponto pertence à rota número 12 e à rota 59, sendo o único ponto de visita comum nestas duas rotas. O problema relaxado não inclui aresta entre estas duas rotas, tendo a resolução do problema de coloração encontrado uma solução com igual cor para ambas as rotas – cor 5.

<b>Rota</b>	<b>Rota</b>	<b>Local</b>	<b>Nº de visitas semanais</b>
<b>12</b>	<b>59</b>	<b>155</b>	<b>2</b>
<b>24</b>	<b>31</b>	<b>46</b>	<b>3</b>
<b>48</b>	<b>59</b>	<b>145</b>	<b>3</b>
<b>64</b>	<b>73</b>	<b>132</b>	<b>3</b>
<b>12</b>	<b>54</b>	<b>149</b>	<b>3</b>

**Tabela C. 5:** Identificação inadmissibilidades na calendarização devido à coloração de um problema relaxado

Para resolução deste conjunto de problemas de inadmissibilidade recorreu-se ao procedimento que os converte em admissíveis por comparação dos padrões dos vizinhos próximos.

A solução de calendarização final admissível, apresentada na Tabela C. 7, envolve a recolha de 144 locais na segunda-feira, 96 para terça-feira, 88 na quarta-feira, 100 na quinta-feira, 149 na sexta-feira e 33 para domingo. Na primeira coluna da Tabela C.7 apresenta-se o número com que cada local é identificado seguindo-se o calendário de visita e o número de visitas semanais (representado por F). O calendário de visita é caracterizado por uma sequência de 6 dígitos, correspondendo cada um a cada dia útil da semana e fim de semana. O primeiro corresponde à segunda-feira seguindo-se terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira e fim de semana. O valor um indica que o local tem recolha no dia a que corresponde a posição, e zero a ausência de recolha no dia.

A solução final é obtida após resolução dos problemas de estabelecimento de rotas (VRP) para cada dia da semana. O problema é resolvido recorrendo ao procedimento ACO desenvolvido na primeira fase do modelo.

Na Tabela C.6 apresenta-se um sumário da solução final que envolve 79 rotas e uma distância total entre localidades de 1945 quilómetros.

	<b>Seg.</b>	<b>Terça</b>	<b>Quarta</b>	<b>Qui.</b>	<b>Sex.</b>	<b>Sáb/Dom</b>	<b>Total</b>
<b>Contentores a recolher</b>	1837	1498	1544	1559	1865	945	<b>9248</b>
<b>Nº de localidades a visitar</b>	144	96	88	100	149	33	<b>610</b>
<b>Distância percorrida</b>	429	309	297	331	460	119	<b>1945</b>
<b>Nº de rotas</b>	16	13	13	13	16	8	<b>79</b>

**Tabela C. 6:** Sumário dos resultados do caso de estudo

Nº	Calendário da visita	F	Nº	Calendário da visita	F
1	1 1 1 1 1 1	6	50	1 0 1 1 0 0	3
2	1 1 1 1 1 1	6	51	1 0 1 0 1 0	3
3	1 1 1 1 1 1	6	52	1 0 0 1 1 0	3
4	1 1 1 1 1 1	6	53	0 1 0 1 1 0	3
5	1 1 1 1 1 1	6	54	1 0 1 0 1 0	3
6	0 1 1 0 1 0	3	55	1 0 0 1 1 0	3
7	0 1 1 0 1 0	3	56	0 1 1 0 1 0	3
8	0 0 1 1 0 1	3	57	0 1 0 1 1 0	3
9	0 0 1 1 0 1	3	58	0 1 1 0 1 0	3
10	0 0 1 1 0 1	3	59	1 0 0 1 1 0	3
11	1 1 0 1 0 0	3	60	1 1 0 1 0 0	3
12	1 0 1 1 0 0	3	61	1 1 0 1 0 0	3
13	1 0 1 1 0 0	3	62	1 0 0 1 1 0	3
14	1 0 1 1 0 0	3	63	0 1 0 1 1 0	3
15	1 0 1 1 0 0	3	64	1 1 0 1 0 0	3
16	1 0 1 1 0 0	3	65	1 1 0 1 0 0	3
17	1 0 1 1 0 0	3	66	1 1 0 1 0 0	3
18	0 0 1 1 0 1	3	67	1 1 0 1 0 0	3
19	0 0 1 1 0 1	3	68	1 0 1 1 0 0	3
20	1 0 1 1 0 0	3	69	1 0 1 1 0 0	3
21	1 0 1 1 0 0	3	70	1 0 1 1 0 0	3
22	1 0 1 1 0 0	3	71	1 0 1 1 0 0	3
23	1 0 1 1 0 0	3	72	1 0 1 1 0 0	3
24	1 0 1 1 0 0	3	73	1 0 1 1 0 0	3
25	1 0 1 1 0 0	3	74	1 1 1 1 1 1	6
26	0 1 1 0 1 0	3	75	1 1 1 1 1 1	6
27	0 1 1 0 1 0	3	76	1 1 1 1 1 1	6
28	0 1 1 0 1 0	3	77	1 1 0 0 1 0	3
29	0 1 1 0 1 0	3	78	1 0 0 0 1 0	2
30	0 1 1 0 1 0	3	79	1 0 0 1 0 0	2
31	0 1 1 0 1 0	3	80	1 0 0 0 1 0	2
32	1 0 1 1 0 0	3	81	1 0 0 1 0 0	2
33	1 0 1 1 0 0	3	82	1 0 0 0 1 0	2
34	1 0 1 1 0 0	3	83	1 0 0 0 1 0	2
35	1 0 1 0 1 0	3	84	1 0 0 0 1 0	2
36	1 1 0 0 1 0	3	85	1 0 0 0 1 0	2
37	1 0 1 0 1 0	3	86	1 0 0 0 1 0	2
38	1 0 1 0 1 0	3	87	0 1 0 0 1 0	2
39	1 0 0 1 1 0	3	88	0 1 0 0 1 0	2
40	1 0 1 0 1 0	3	89	1 0 0 1 0 0	2
41	1 0 0 1 1 0	3	90	1 0 0 1 0 0	2
42	1 0 0 1 1 0	3	91	1 0 0 1 0 0	2
43	1 1 1 1 1 1	6	92	1 0 0 0 1 0	2
44	1 1 1 1 1 1	6	93	1 0 0 0 1 0	2
45	1 1 1 1 1 1	6	94	1 0 0 0 1 0	2
46	1 0 1 1 0 0	3	95	1 0 0 0 1 0	2
47	1 1 0 0 1 0	3	96	1 0 0 0 1 0	2
48	1 0 1 1 0 0	3	97	1 0 0 0 1 0	2
49	1 0 1 1 0 0	3	98	1 0 0 0 1 0	2

Tabela C. 7: Calendário de visita

Nº	Calendário da visita	F	Nº	Calendário da visita	F
99	1 0 0 0 1 0	2	148	0 1 1 0 1 0	3
100	0 1 0 0 1 0	2	149	1 0 0 1 1 0	3
101	0 1 0 0 1 0	2	150	1 0 0 1 1 0	3
102	0 1 0 0 1 0	2	151	1 0 0 0 1 0	2
103	0 1 0 0 1 0	2	152	0 1 0 0 1 0	2
104	0 1 0 0 1 0	2	153	1 1 0 1 0 0	3
105	0 1 0 0 1 0	2	154	1 0 0 0 1 0	2
106	0 1 0 0 1 0	2	155	0 1 0 0 1 0	2
107	0 1 0 0 1 0	2	156	0 1 0 0 1 0	2
108	0 1 0 0 1 0	2	157	1 0 0 0 1 0	2
109	0 1 0 0 1 0	2	158	1 0 0 0 1 0	2
110	0 1 0 0 1 0	2	159	1 0 0 0 1 0	2
111	0 1 0 0 1 0	2	160	1 0 0 0 1 0	2
112	1 0 0 0 1 0	2	161	1 0 0 0 1 0	2
113	1 0 0 0 1 0	2	162	1 0 0 0 1 0	2
114	0 1 0 0 1 0	2	163	1 0 0 0 1 0	2
115	1 0 0 0 1 0	2	164	1 0 0 0 1 0	2
116	0 1 0 0 1 0	2	165	1 0 0 1 1 0	3
117	0 1 0 0 1 0	2	166	1 0 0 0 1 0	2
118	0 1 0 0 1 0	2	167	0 1 0 0 1 0	2
119	0 1 0 0 1 0	2	168	0 1 0 0 1 0	2
120	0 1 0 0 1 0	2	169	0 1 0 0 1 0	2
121	1 0 0 0 1 0	2	170	0 1 0 0 1 0	2
122	1 0 0 0 1 0	2	171	0 1 0 0 1 0	2
123	1 0 0 0 1 0	2	172	0 1 0 0 1 0	2
124	1 0 0 0 1 0	2	173	1 1 0 1 0 0	3
125	0 1 0 0 1 0	2	174	1 1 1 1 1 1	6
126	0 1 0 0 1 0	2	175	1 1 1 1 1 1	6
127	0 1 0 0 1 0	2	176	1 1 1 1 1 1	6
128	0 1 0 0 1 0	2	177	1 1 1 1 1 1	6
129	1 0 0 1 0 0	2	178	1 1 1 1 1 1	6
130	1 1 0 0 1 0	3	179	1 0 1 1 0 0	3
131	1 1 0 0 1 0	3	180	1 0 0 1 1 0	3
132	0 1 1 0 1 0	3	181	1 1 1 1 1 1	6
133	0 1 1 0 1 0	3	182	1 0 0 1 1 0	3
134	1 1 0 0 1 0	3	183	1 0 0 1 1 0	3
135	0 1 0 1 1 0	3	184	1 0 0 1 1 0	3
136	1 1 1 1 1 1	6	185	1 0 0 1 1 0	3
137	1 1 1 1 1 1	6	186	1 0 0 1 1 0	3
138	1 1 1 1 1 1	6	187	1 0 1 0 1 0	3
139	1 1 1 1 1 1	6	188	1 0 1 1 0 0	3
140	1 1 1 1 1 1	6	189	1 0 1 1 0 0	3
141	1 1 1 1 1 1	6	190	1 0 1 1 0 0	3
142	1 1 1 1 1 1	6	191	1 0 1 1 0 0	3
143	1 1 1 1 1 1	6	192	1 0 1 1 0 0	3
144	1 1 1 1 1 1	6	193	1 0 1 1 0 0	3
145	1 0 0 0 1 1	3	194	1 0 1 0 1 0	3
146	1 0 1 0 1 0	3	195	1 0 1 0 1 0	3
147	1 1 1 1 1 1	6	196	1 0 1 0 1 0	3

Tabela C.7 (continuação): Calendário de visita

Nº	Calendário da visita	F
197	1 1 0 0 1 0	3
198	0 1 0 0 1 0	2
199	0 1 0 0 1 0	2

Nº	Calendário da visita	F
200	1 0 0 0 1 0	2
201	1 0 0 1 0 0	2
202	0 1 0 0 1 0	2

**Tabela C.7 (continuação):** Calendário de visita

**C3.** Nas páginas anteriores apresentaram-se os resultados quando a primeira fase não é sujeita à fase de transição. Em alternativa, pode-se optar pela execução da fase de transição e posterior resolução do problema de coloração de grafos. Neste caso, a solução obtida após a fase de transição envolve 78 rotas e uma distância total entre localidades de 1933 quilómetros (ver Tabela C. 9).

**C4.** O grafo construído a partir da solução apresentada na Tabela C. 9 contém 78 vértices, 325 arestas e engloba 3 componentes desconexas: a primeira com 6 vértices, a segunda com 3 vértices e a terceira com 69 vértices – consultar Tabela C.8.

Subgrafo	Rotas (vértices)	Total de rotas
1	1-2-3-4-5-6	6
2	11-12-13	3
3	7-8-9-10-14-15-16-17-18-19-20-21-22-23-24-25-26-27-28-29-30-31-32-33-34-35-36-37-38-39-40-41-42-43-44-45-46-47-48-49-50-51-52-53-54-55-56-57-58-59-60-61-62-63-64-65-66-67-68-69-70-71-72-73-74-75-76-77-78	69
<b>Total</b>		<b>78</b>

**Tabela C. 8:** Composição das componentes desconexas (com fase de transição)

A coloração das duas primeiras componentes desconexas é imediata pois, qualquer delas forma grafos completos. Para resolução do problema de coloração da terceira componente recorreu-se ao CPLEX, obtendo-se uma solução com 8 cores. No sentido de obter uma solução com um número máximo de cores igual a seis, recorreu-se à coloração do problema relaxado.

Nº	Cont.	Km	minutos	rotas																				
1	131	8.0	253.6	140																				
2	131	8.0	253.6	140																				
3	131	8.0	253.6	140																				
4	131	8.0	253.6	140																				
5	131	8.0	253.6	140																				
6	131	8.0	253.6	140																				
7	115	28.6	255.6	54	58	56																		
8	107	47.6	269.9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	22	21	24	23	20	33	34					
9	106	46.9	267.0	10	12	13	14	15	16	17	22	21	24	23	20	33	32	34						
10	106	46.9	267.0	34	32	33	20	23	24	21	22	17	16	15	14	13	12	10						
11	101	44.4	253.9	188	189	191	192	193	190	187	184	186	185	183	182	180	179	165						
12	102	44.4	255.8	188	189	191	192	193	190	187	184	186	185	183	182	180	179	165	201					
13	102	44.4	255.8	188	189	191	192	193	190	187	184	186	185	183	182	180	179	165	201					
14	104	41.8	255.6	6	7	18	19	28	29	25	26	27	31	30	36	35	3							
15	108	44.2	266.6	40	36	37	30	31	27	26	25	29	28	11	18	19	8	135						
16	99	38.9	241.8	55	67	66	65	64	62	63	61	60	59	47										
17	125	22.7	265.0	71	72	74	77	87	88															
18	125	22.7	265.0	71	72	74	77	87	88															
19	106	45.5	264.9	149	172	171	170	169	167	168	156	202	166	152										
20	106	45.5	264.9	149	172	171	170	169	167	168	156	202	166	152										
21	109	39.0	260.5	55	61	62	63	64	67	66	65	60	59	48										
22	101	47.1	258.0	71	73	80	83	82	84	85	86	94	154	95	93	92	96	97	98	99	125	121	130	
23	103	45.9	259.9	73	78	80	83	82	84	85	86	94	154	95	93	92	96	97	98	99	123	121	122	131
24	85	52.1	236.2	155	157	158	159	161	162	164	163	160	111	112	113	115	131							
25	113	38.9	267.6	59	60	65	66	67	64	61	63	62	55	46										
26	116	29.0	258.0	49	68	50	52	51	53	48	47	142												
27	110	39.2	262.6	42	41	5	39	38	197	196	195	194	151											
28	114	36.9	266.5	5	6	7	8	9	32	36	39	38	197	196	195	194	151							
29	101	32.8	236.2	77	81	79	89	90	91	199	198	126	127	128	120	119	118	117	134					

Tabela C. 9: Solução após a fase de transição – conjunto de rotas



Nº	Cont.	Km	minutos	rotas					
60	137	11.3	269.8	176	177	144	147	146	
61	122	29.3	269.7	54	58	56	133		
62	122	29.3	269.7	54	58	56	133		
63	108	27.4	240.9	57	44	2	1	4	
64	117	25.6	254.8	57	44	2	1	141	
65	131	14.6	263.7	45	43	144	143	141	
66	135	9.9	263.9	143	141	142	137	138	
67	123	11.9	244.9	178	177	144	143	141	
68	121	11.6	240.7	178	143	142	141		
69	134	15.0	269.9	175	174	181	173	153	132
70	121	14.9	245.8	174	181	150	153	132	
71	125	9.6	245.0	143	141	137	136	135	
72	110	16.6	228.1	2	1	4	45	43	177
73	132	8.7	256.6	139	136	138			
74	132	8.7	256.6	139	136	138			
75	132	8.7	256.6	139	136	138			
76	132	8.7	256.6	139	136	138			
77	132	8.7	256.6	139	136	138			
78	102	7.9	200.1	139	135	132			
Tot.	9248	1933.2	19997.9	57	44	2	1	141	

Tabela C. 9 (continuação): Solução após a fase de transição – conjunto de rotas



Na Tabela C.10 apresentam-se os valores da coloração dos vértices do problema relaxado, conjuntamente com a coloração das 2 componentes desconexas de menor dimensão.

<b>nº rota</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	16	17	18	19	20	21
cor	1	2	3	4	5	6	1	4	2	1	3	2	5	4	2	2	4	1	1	4	3
<b>nº rota</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>25</b>	<b>26</b>	<b>27</b>	<b>28</b>	<b>29</b>	<b>30</b>	<b>31</b>	<b>32</b>	<b>33</b>	<b>34</b>	<b>35</b>	<b>36</b>	<b>37</b>	<b>38</b>	<b>39</b>	<b>40</b>	<b>41</b>	<b>42</b>
cor	2	5	1	5	4	3	5	5	2	1	1	1	2	3	4	1	2	4	6	1	3
<b>nº rota</b>	<b>43</b>	<b>44</b>	<b>45</b>	<b>46</b>	<b>47</b>	<b>48</b>	<b>49</b>	<b>50</b>	<b>51</b>	<b>52</b>	<b>53</b>	<b>54</b>	<b>55</b>	<b>56</b>	<b>57</b>	<b>58</b>	<b>59</b>	<b>60</b>	<b>61</b>	<b>62</b>	<b>63</b>
cor	2	5	5	6	1	1	5	4	5	6	2	3	2	5	4	1	4	3	3	4	1
<b>nº rota</b>	<b>64</b>	<b>65</b>	<b>66</b>	<b>67</b>	<b>68</b>	<b>69</b>	<b>70</b>	<b>71</b>	<b>72</b>	<b>73</b>	<b>74</b>	<b>75</b>	<b>76</b>	<b>77</b>	<b>78</b>						
cor	3	5	6	4	2	5	2	3	4	2	3	4	5	6	1						

**Tabela C. 10:** Resultados do problema de coloração de grafos

A solução obtida após coloração do problema é inadmissível pois não se verificam todas as restrições de calendarização: existem 3 problemas de inadmissibilidade em locais com três ou duas visitas semanais e 27 em locais de visita diária, pelo facto de se ter colorido um grafo relaxado onde foram eliminadas as arestas “fracas”. Acrescentam-se 6 locais com problemas de inadmissibilidade por incumprimento do espaçamento entre visitas.

Para resolução deste conjunto de problemas de inadmissibilidade recorreu-se ao procedimento que os converte em admissíveis por comparação dos padrões dos vizinhos próximos. A solução de calendarização final admissível, apresentada na Tabela C.12, envolve a recolha de 139 locais na segunda-feira, 134 locais na terça-feira, 71 na quarta-feira, 121 na quinta-feira, 118 na sexta-feira e 27 no fim-de-semana.

A solução final é obtida após resolução dos problemas de estabelecimento de rotas (VRP) para cada dia da semana. O problema é resolvido recorrendo ao procedimento ACO desenvolvido na primeira fase do modelo.

Na Tabela C.11 apresenta-se um sumário da solução final que envolve 80 rotas e uma distância total entre localidades de 1924 quilómetros.

	Seg.	Terça	Quarta	Qui.	Sex.	Sáb/Dom	Total
Contentores a recolher	1912	1708	1396	1732	1619	881	9248
Nº de localidades a visitar	139	134	71	121	118	27	610
Distância percorrida	443	395	257	406	331	92	1924
Nº de rotas	17	15	12	15	14	7	80

**Tabela C. 11:** Sumário dos resultados do caso de estudo (com fase de transição)

Resolvendo os problemas de estabelecimento de rotas diários com permissão do fraccionamento dos contentores de uma localidade por diferentes equipas, o número de rotas totais semanais diminui de 80 para 79, obtendo-se uma solução mais próxima da realidade e diminuindo as folgas existentes na restrição “duração da rota”.

Nº	Calendário da visita	F	Nº	Calendário da visita	F
1	1 1 1 1 1 1	6	29	1 1 0 1 0 0	3
2	1 1 1 1 1 1	6	30	1 1 0 1 0 0	3
3	1 1 1 1 1 1	6	31	1 1 0 1 0 0	3
4	1 1 1 1 1 1	6	32	1 1 0 0 1 0	3
5	1 1 1 1 1 1	6	33	1 1 0 1 0 0	3
6	1 0 0 1 1 0	3	34	1 1 0 1 0 0	3
7	1 0 0 1 1 0	3	35	1 1 0 1 0 0	3
8	1 1 0 0 1 0	3	36	0 1 0 1 1 0	3
9	1 0 0 1 1 0	3	37	1 1 0 1 0 0	3
10	1 1 0 1 0 0	3	38	0 1 1 0 1 0	3
11	1 1 0 1 0 0	3	39	0 1 1 0 1 0	3
12	1 1 0 1 0 0	3	40	1 1 0 0 1 0	3
13	1 1 0 1 0 0	3	41	1 0 1 0 1 0	3
14	1 1 0 1 0 0	3	42	1 0 1 0 1 0	3
15	1 1 0 1 0 0	3	43	1 1 1 1 1 1	6
16	1 1 0 1 0 0	3	44	1 1 1 1 1 1	6
17	1 1 0 1 0 0	3	45	1 1 1 1 1 1	6
18	1 1 0 1 0 0	3	46	1 1 0 0 1 0	3
19	1 1 0 1 0 0	3	47	1 1 0 1 0 0	3
20	1 1 0 1 0 0	3	48	1 0 1 1 0 0	3
21	1 1 0 1 0 0	3	49	0 1 0 1 1 0	3
22	1 1 0 1 0 0	3	50	1 1 0 1 0 0	3
23	1 1 0 1 0 0	3	51	1 1 0 1 0 0	3
24	1 1 0 1 0 0	3	52	1 1 0 1 0 0	3
25	1 1 0 1 0 0	3	53	1 0 0 1 1 0	3
26	1 1 0 1 0 0	3	54	1 0 1 1 0 0	3
27	1 1 0 1 0 0	3	55	0 1 1 0 1 0	3
28	1 1 0 1 0 0	3	56	1 0 1 1 0 0	3

**Tabela C. 12:** Calendário de visita (solução com fase de transição)

Nº	Calendário da visita	F	Nº	Calendário da visita	F
57	1 0 1 0 1 0	3	107	1 0 0 1 0 0	2
58	1 0 1 1 0 0	3	108	1 0 0 1 0 0	2
59	0 1 1 0 1 0	3	109	1 0 0 1 0 0	2
60	0 1 1 0 1 0	3	110	1 0 0 1 0 0	2
61	0 1 1 0 1 0	3	111	1 0 0 1 0 0	2
62	0 1 1 0 1 0	3	112	1 0 0 1 0 0	2
63	0 1 1 0 1 0	3	113	1 0 0 1 0 0	2
64	0 1 1 0 1 0	3	114	1 0 0 1 0 0	2
65	0 1 1 0 1 0	3	115	1 0 0 1 0 0	2
66	0 1 1 0 1 0	3	116	1 0 0 1 0 0	2
67	0 1 1 0 1 0	3	117	0 1 0 0 1 0	2
68	1 1 0 1 0 0	3	118	0 1 0 0 1 0	2
69	1 1 0 0 1 0	3	119	0 1 0 0 1 0	2
70	1 1 0 0 1 0	3	120	0 1 0 0 1 0	2
71	1 1 0 1 0 0	3	121	0 1 0 0 1 0	2
72	1 1 0 1 0 0	3	122	0 1 0 0 1 0	2
73	1 1 0 1 0 0	3	123	1 0 0 0 1 0	2
74	1 1 1 1 1 1	6	124	1 0 0 1 0 0	2
75	1 1 1 1 1 1	6	125	1 0 0 0 1 0	2
76	1 1 1 1 1 1	6	126	1 0 0 0 1 0	2
77	1 0 0 1 1 0	3	127	1 0 0 0 1 0	2
78	0 1 0 0 1 0	2	128	1 0 0 0 1 0	2
79	0 1 0 0 1 0	2	129	1 0 0 0 1 0	2
80	0 1 0 0 1 0	2	130	1 1 0 1 0 0	3
81	0 1 0 0 1 0	2	131	1 0 0 1 1 0	3
82	0 1 0 0 1 0	2	132	1 1 0 0 1 0	3
83	0 1 0 0 1 0	2	133	1 0 1 1 0 0	3
84	0 1 0 0 1 0	2	134	0 1 0 1 1 0	3
85	0 1 0 0 1 0	2	135	0 1 1 0 1 0	3
86	0 1 0 0 1 0	2	136	1 1 1 1 1 1	6
87	1 0 0 1 0 0	2	137	1 1 1 1 1 1	6
88	1 0 0 1 0 0	2	138	1 1 1 1 1 1	6
89	0 1 0 0 1 0	2	139	1 1 1 1 1 1	6
90	1 0 0 0 1 0	2	140	1 1 1 1 1 1	6
91	1 0 0 0 1 0	2	141	1 1 1 1 1 1	6
92	0 1 0 0 1 0	2	142	1 1 1 1 1 1	6
93	0 1 0 0 1 0	2	143	1 1 1 1 1 1	6
94	0 1 0 0 1 0	2	144	1 1 1 1 1 1	6
95	0 1 0 0 1 0	2	145	1 1 0 1 0 0	3
96	0 1 0 0 1 0	2	146	1 0 1 1 0 0	3
97	0 1 0 0 1 0	2	147	1 1 1 1 1 1	6
98	0 1 0 0 1 0	2	148	1 0 0 1 1 0	3
99	0 1 0 0 1 0	2	149	1 1 0 1 0 0	3
100	1 0 0 1 0 0	2	150	0 1 1 0 1 0	3
101	1 0 0 1 0 0	2	151	1 0 0 1 0 0	2
102	1 0 0 1 0 0	2	152	1 0 0 1 0 0	2
103	1 0 0 1 0 0	2	153	0 1 1 0 1 0	3
104	1 0 0 1 0 0	2	154	0 1 0 0 1 0	2
105	1 0 0 1 0 0	2	155	1 0 0 1 0 0	2
106	1 0 0 1 0 0	2	156	1 0 0 1 0 0	2

Tabela C.12 (continuação): Calendário de visita (solução com fase de transição)

Nº	Calendário da visita	F	Nº	Calendário da visita	F
157	1 0 0 1 0 0	2	180	0 1 1 0 1 0	3
158	1 0 0 1 0 0	2	181	1 1 1 1 1 1	6
159	1 0 0 1 0 0	2	182	0 1 1 0 1 0	3
160	1 0 0 1 0 0	2	183	0 1 1 0 1 0	3
161	1 0 0 1 0 0	2	184	0 1 1 0 1 0	3
162	1 0 0 1 0 0	2	185	0 1 1 0 1 0	3
163	1 0 0 1 0 0	2	186	0 1 1 0 1 0	3
164	1 0 0 1 0 0	2	187	0 1 1 0 1 0	3
165	0 1 1 0 1 0	3	188	0 1 1 0 1 0	3
166	1 0 0 1 0 0	2	189	0 1 1 0 1 0	3
167	1 0 0 1 0 0	2	190	0 1 1 0 1 0	3
168	1 0 0 1 0 0	2	191	0 1 1 0 1 0	3
169	1 0 0 1 0 0	2	192	0 1 1 0 1 0	3
170	1 0 0 1 0 0	2	193	0 1 1 0 1 0	3
171	1 0 0 1 0 0	2	194	0 1 1 0 1 0	3
172	1 0 0 1 0 0	2	195	0 1 1 0 1 0	3
173	1 0 1 0 1 0	3	196	0 1 1 0 1 0	3
174	1 1 1 1 1 1	6	197	0 1 1 0 1 0	3
175	1 1 1 1 1 1	6	198	1 0 0 0 1 0	2
176	1 1 1 1 1 1	6	199	1 0 0 0 1 0	2
177	1 1 1 1 1 1	6	200	1 0 0 1 0 0	2
178	1 1 1 1 1 1	6	201	0 1 0 0 1 0	2
179	0 1 1 0 1 0	3	202	1 0 0 1 0 0	2

**Tabela C.12 (continuação):** Calendário de visita (solução com fase de transição)

A solução final resume-se na Tabela C.13 seguindo-se uma apresentação mais pormenorizada das rotas de cada dia da semana. Ilustra-se a solução de cada dia de recolha com uma tabela que descreve a sequência dos clientes a visitar, o número de contentores e a duração de cada rota (Tabela C.14 para segunda-feira, Tabela C.15 para terça-feira, C.16 para quarta-feira, C.17 para quinta-feira, C.18 para sexta-feira e C.19 para o fim-de-semana).

	Seg.	Terça	Quarta	Qui.	Sex.	Sáb/Dom	Total
<b>Contentores a recolher</b>	1912	1708	1396	1732	1619	881	9248
<b>Nº de localidades a visitar</b>	139	134	71	121	118	27	610
<b>Distância percorrida</b>	445	395	257	406	331	92	1926
<b>Nº de rotas</b>	16	15	12	15	14	7	79

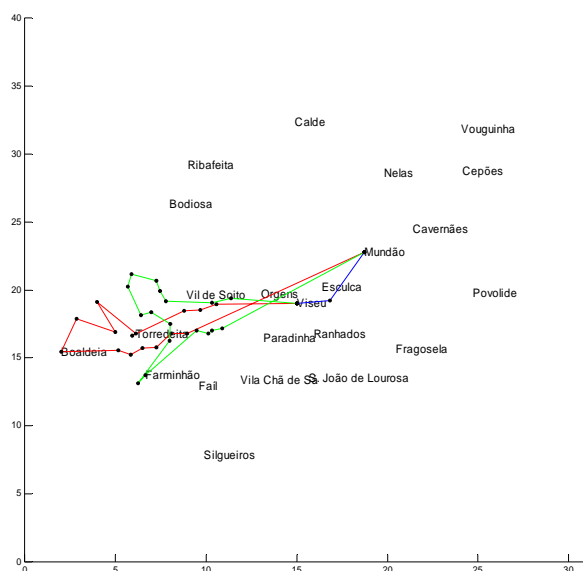
**Tabela C. 13:** Resultados do caso de estudo

**Rotas de segunda-feira:**

Nº rota	Contentores recolhidos	Duração da rota (minutos)	Rota
1	131	254	Vis, 140, depósito
2	106	267	Vis, 34, 32, 33, 20, 23, 24, 21, 22,17, 16, 15, 14, 13, 11, 10, depósito
3	108	266	Vis, 40, 35, 37, 30, 31, 27, 26, 25, 29, 28, 12, 19, 18, 9, 8, 7, 6, depósito
4	110	270	Vis,178,177, 172, 170,171,169,168,167,156,155,152,151 depósito
5	118	264	Vis, 69, 70, 71, 72, 74, 73, 90, 91, 199, 198, 126, 127, 128, 129, depósito
6	120	268	Vis, 56, 58, 54, 143, depósito
7	101	268	Vis, 149, 166, 202, 157, 158, 159, 164, 163, 162, 161, 160, 112, 116, 115, depósito
8	131	267	Vis, 75, 77, 87, 88, depósito
9	107	269	Vis, 141, 114, 113, 200, 111, 110, 109, 106, 105, 107, 108, 102, 104, 103, 100, 101, 124, 125, 123, 130, 131, depósito
10	131	265	Vis, 175, 174, 181, 173, 148, depósito
11	135	268	Vis, 176, 147, 143, 146, depósito
12	115	268	Vis, 44, 57, 53, 48, 51, 50, 68, 52, depósito
13	126	255	Vis, 46, 47, 76, 142, 132, depósito
14	129	260	Vis, 2, 5, 3, 4, 1, 137, 138, depósito
15	119	247	Vis, 45, 41, 42, 43, 144, 143, 145, depósito
16	125	248	Vis, 143, 136, 139, 133, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>1912</b>	<b>4204</b>	<b>Recolha de 139 locais</b>

**Tabela C. 14:** Solução de segunda-feira

Nas figuras que se seguem representa-se esquematicamente o conjunto de rotas do primeiro dia da semana definindo a sequência dos locais a visitar ligados por segmentos de recta, não reflectindo, obviamente, a rede viária e portanto os percursos efectuados.



Rota nº 1: 8 km ;

Viseu, Gumirães; Mundão

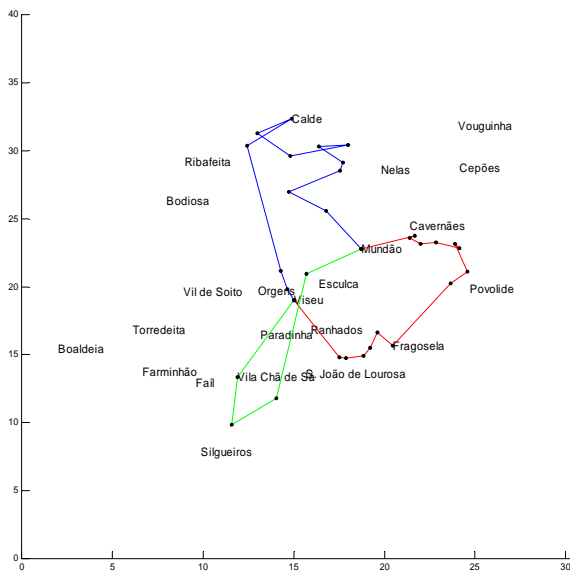
Rota nº 2: 47 km;

Viseu, Canelas, Figueiró, Carqueijal, Torredeita, Salgueiral, Routar, Vila Chã, Boaldeia, Várzea, Novais, Casal, Escouras, Passos, Ferrocinto, Mundão

Rota nº 3: 44 km

Viseu, Travassós, Poives, Carvalhais, Couto C<sup>ma</sup>, S.Cosmado, Portela, Dade, Vila Nova, Couto B<sup>xo</sup>, Mosteirinho, Magarelas, Real, Farminhão, Portela, Sarzedelo, Casal Mau, Tondelinha, Mundão

**Figura C.1:** Representação esquemática das rotas de segunda-feira



**Rota nº 4:** 44 km

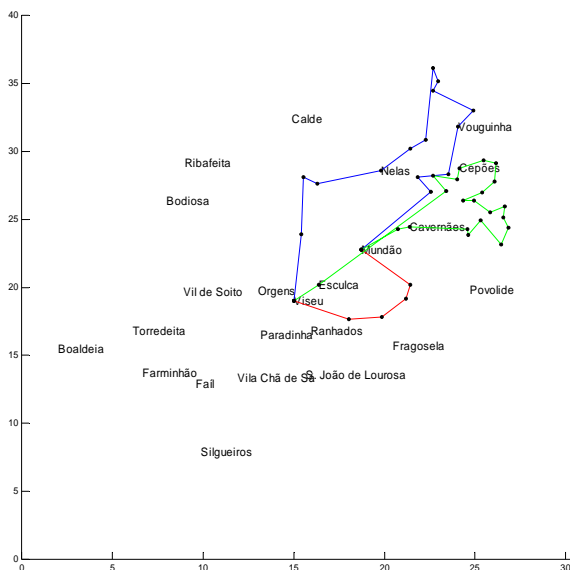
Viseu, Av. Bélgica, Est. Velha Abrv., Paraduça, Calde, Vilar do M<sup>te</sup>, Póvoa Calde, Várzea de Calde, Almargem, Sanguinhedo, Vilar, Folgosa, Aérodromo, Mundão

**Rota nº 5:** 31 km;

Viseu, Cumieira, Coimbrões, Espadanal, Fragosela de C<sup>ma</sup>, Caçador, Fragosela de B<sup>xo</sup>, Corvoa à Nogueira, Remonde, Gumirães, Povoidal, Ermida, Corredoura, Alvelos, Mundão

**Rota nº 6:** 31 km

Viseu, Vila Chã de Sá, Passos de Silgueiros, Oliveira de Barreiros, Póvoa de Abraveses, Mundão



**Rota nº 7:** 53 km

Viseu, Bassar, Bigas, Lageosa, Nelas, Couto de Cepões, Silvares, Zonho, Vila de um Santo, Sanguinhedo de Cota, Nogueira de Côtã, Vouguinha, Nogueira de Baixo, Bretelhe, Aviuges, Mundão

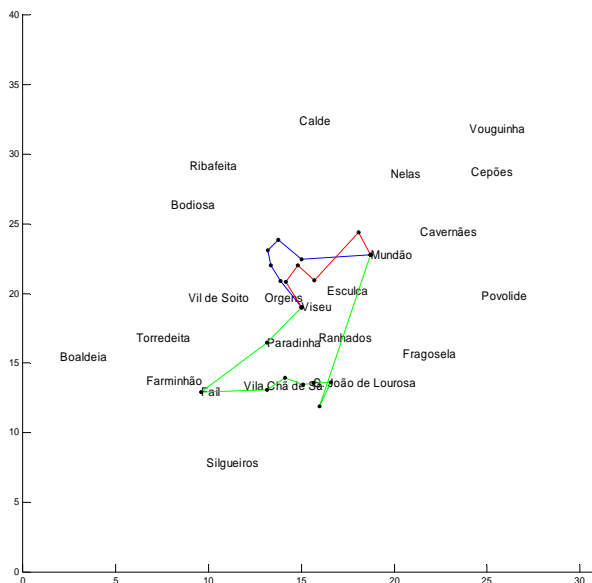
**Rota nº 8:** 17 km;

Viseu, Póvoa de Sobrinhos, Barbeita, Carragoso, Sernada, Mundão

**Rota nº 9:** 47 km

Viseu, Esculca, Vila Chã, Canidelo, Nogueira de Cima, Cepões, Coucinheiro, Barreiros, Brufe, Carcavelos, Barraca, Travassos, Figueiredo, Casal do Esporão, Forniçô, Bassin, Carvalhal, Lamaçais, Moimenta, Outeiro, Cavernães, Venda de Moita, Mundão

**Figura C.1 (continuação):** Representação esquemática das rotas de segunda-feira



**Rota nº 10:** 16 km

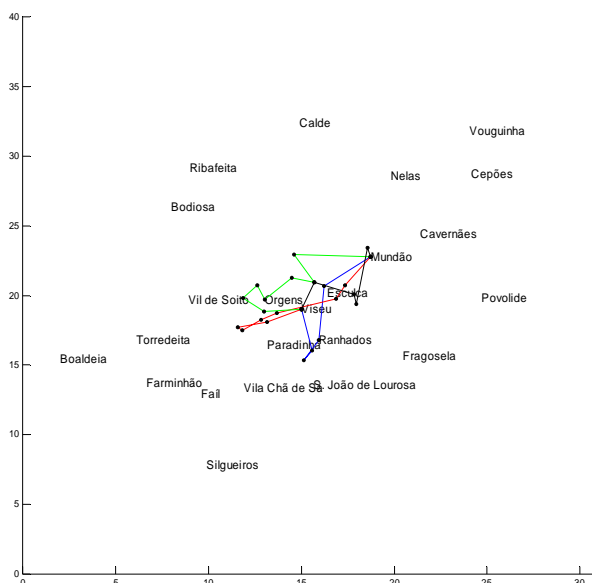
Viseu, Alto de Abraveses, Pascoal, Moselos, Vila Nova do Campo, Moure de Madalena, Mundão

**Rota nº 11:** 12 km;

Viseu, Abraveses, Abraveses EN2, Póvoa de Abraveses, Casal do Mundão, Mundão

**Rota nº 12:** 37 km

Viseu, Paradinha, Faíl, Rebordinho, Teivas, Vilela, S. João de Lourosa, Lourosa de Baixo, Póvoa de Moscoso, Mundão



**Rota nº 13:** 15 km

Viseu, Bairro da Misericórdia, Cabanões, Ranhados, Santiago, Mundão, Mundão

**Rota nº 14:** 15 km;

Viseu, S. Salvador, Tondelinha, Póvoa da Medronhosa, Santarinho, Vildemoinhos, S. João da Carreira, Travassós de Baixo, Mundão

**Rota nº 15:** 18 km

Viseu, Quinta de Belém, S. Martinho, Quintela, Orgens, Bairro Sta Rita, Póvoa de Abraveses, Moure de Carvalho, Mundão

**Rota nº 16:** 12 km;

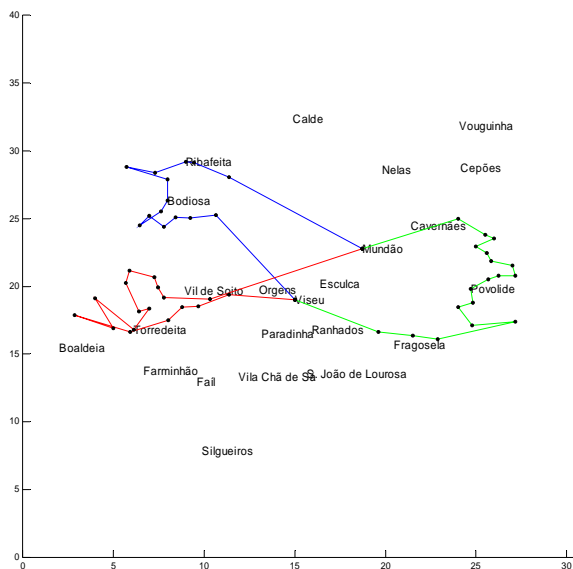
Viseu, Póvoa de Abraveses, Travassós de Cima, Rio de Loba, Nespereira, Mundão

**Figura C.1 (continuação):** Representação esquemática das rotas de segunda-feira

## Rotas de terça-feira

Nº rota	Contentores recolhidos	Duração da rota (minutos)	Rota
1	104	261	Vis, 194, 188, 189, 191, 193, 192, 190, 187, 184, 186, 185, 183, 182, 180, depósito
2	106	270	Vis, 40, 32, 33, 28, 20, 22, 21, 24, 23, 29, 25, 26, 27, 31, 30, 37, 35 depósito
3	101	255	Vis, 74, 78, 80, 83, 82, 84, 85, 86, 94, 93, 154, 95, 92, 96, 97, 98, 99, 122, depósito
4	102	246	Vis, 55, 62, 63, 61, 67, 66, 65, 64, 60, 59, 137, depósito
5	114	254	Vis, 69, 70, 71, 72, 73, 79, 81, 89, 121, 120, 119, 118, 117, 130, depósito
6	109	261	Vis, 3, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 4, depósito
7	123	265	Vis, 49, 68, 50, 52, 51, 47, 46, 76, depósito
8	106	249	Vis, 2, 5, 34, 36, 39, 38, 197, 196, 195, 179, 165, 201, depósito
9	127	255	Vis, 43, 176, 177, 144, depósito
10	114	235	Vis, 45, 1, 44, 142, 141, depósito
11	100	206	Vis, 143, 147, 145, 134, depósito
12	131	266	Vis, 178, 175, 174, 181, 149, 150, 153, depósito
13	136	264	Vis, 140, 135, depósito
14	130	260	Vis, 75, 138, 132, depósito
15	105	206	Vis, 139, 136, depósito
TOTAL	1708	3752	<b>Recolha de 134 locais</b>

Tabela C. 15: Solução de terça-feira



Rota nº 1: 45 km ;

Viseu, Travanca de Bodiosa, Oliveira de Baixo, Bodiosa CF, Pereiras, Aval, Silgueiros, Bodiosa a Nova, Bodiosa Velha, Casal, Lufinha, Gumiei, Ribafeita, Seganhos, Lustosa, Mundão

Rota nº 2: 49 km;

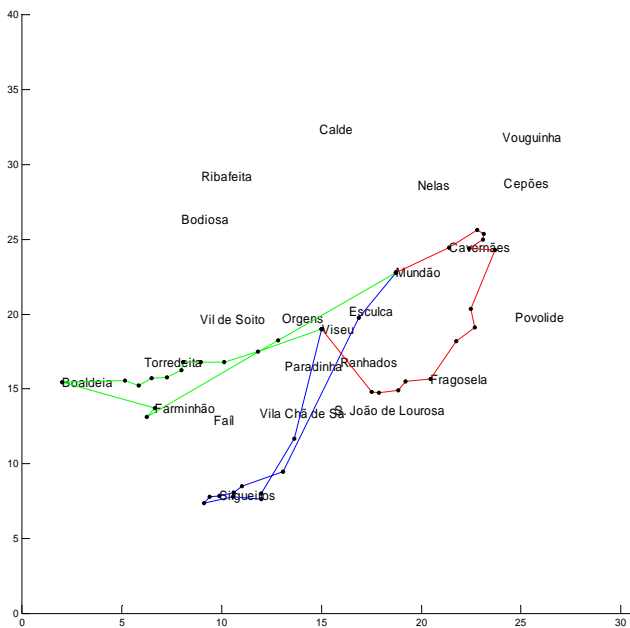
Viseu, Travassós de Orgens, Figueiró, Carriça, Mosteirinho, Carqueijal, Vila Chã do Monte, Routar, Salgueiral, Torredeita, Couto de Baixo, Vila Nova, Dade, Portela, S. Cosmado, Couto de Cima, Carvalhais, Poives, Mundão

Rota nº 3: 45 km

Viseu, Caçador, Prime, Ponte Fagilde, Vila Corça, Nesprido, Vilar de Ordem, Outeiro, Povolide, Nespereira, Cadimas, Vilar de Baixo, Cabril, Povoação, S. Cristóvão, Casalheiro, Covelo, Souto Chão, Taboado, Mundão

Figura C.2: Representação esquemática das rotas de terça-feira





Rota nº 4: 38 km

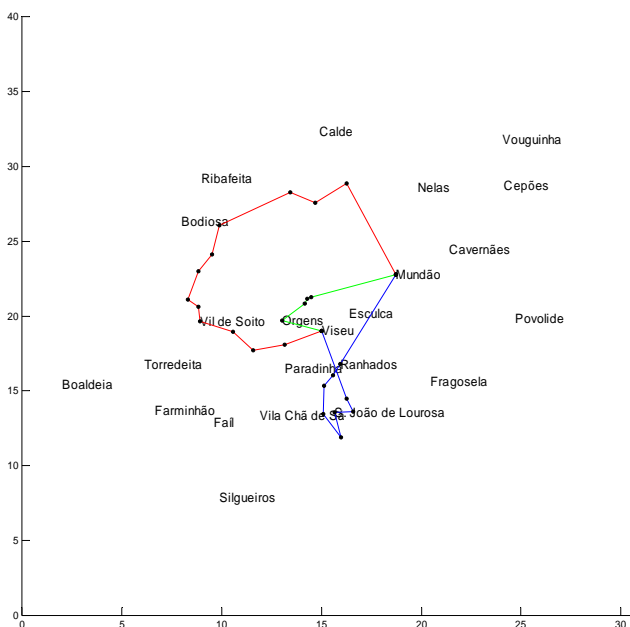
Viseu, Baíuca de Oliveira, Folarca, Casal Jusão, Bº Bela Vista, Silvares, Casal Meão, Lajes de Silgueiros, Porrinho, Loureiro de Silgueiros, Pindelo, S. João da Carreira, Mundão

Rota nº 5: 28 km;

Viseu, Cumieira, Coimbrões, Espadanal, Fragosela de C<sup>ma</sup>, Fragosela de B<sup>xo</sup>, Pinheiro, Santos Evos, Dornelas, Silvares, Casal de Cavernães, Juncal, Passos de Cavernães, Nogueiredo, Cavernães, Mundão

Rota nº 6: 39 km

Viseu, Póvoa da Medronhosa, Sarzedelo, Ferrocinto, Passos, Magarelas, Escouras, Casal (Torredeita), Novais, Várzea, Boaldeia, Farnilhão, Real, Santarinho, Mundão



Rota nº 7: 25 km

Viseu, Lourosa de Cima, Lourosa de Baixo, S. João de Lourosa, Póvoa de Moscoso, Vilela, Cabanões, Bairro da Misericórdia, Ranhados, Mundão

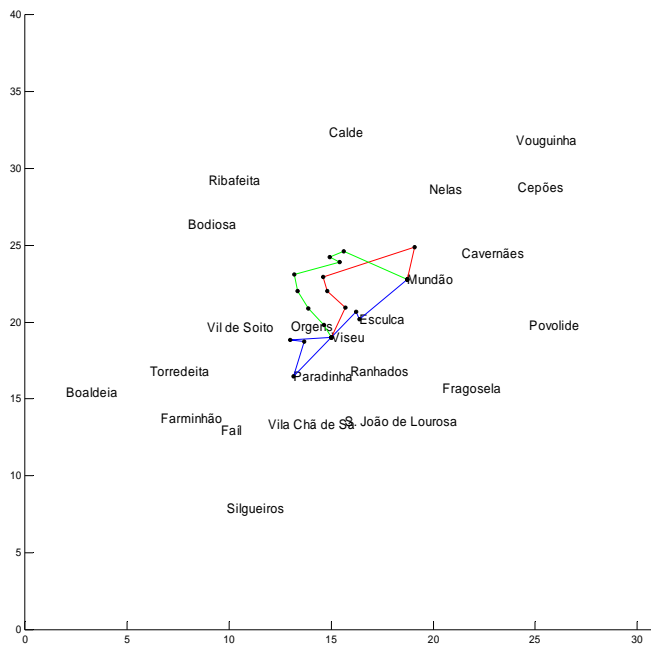
Rota nº 8: 35 km;

Viseu, S. Salvador, Santarinho, Canelas, Sampaio, Masgalos, Lobagueira, Queirela, Oliveira de Cima, Galifonge, Paçô, Pousa Maria, Mundão

Rota nº 9: 14 km

Viseu, Orgens, Abraveses, Est. Velha Abraveses, Bairro de Santa Rita, Mundão

Figura C.2 (continuação): Representação esquemática das rotas de terça-feira



Rota nº 10: 24 km

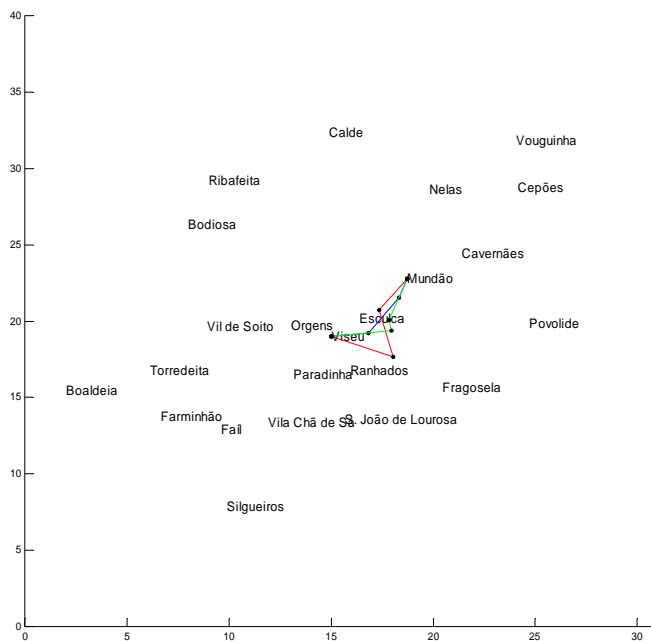
Viseu, Qt. Belém, Vilemoinhos, Paradinha, Santiago,  
Esculca, Mundão

Rota nº 11: 21 km;

Viseu, Póvoa Abraveses, Abraveses EN2, Moure de  
Carvalho, Póvoa do Mundão, Mundão

Rota nº 12: 27 km

Viseu, Av. Bêlgica, Alto de Abraveses, Pascoal,  
Moselos, Bassar, Campo, Bairro Norad, Mundão



Rota nº 13: 26 km

Viseu, Gumirães, Britamontes, Mundão

Rota nº 14: 26 km;

Viseu, Póvoa de Sobrinhos, Travassós de Baixo,  
Mundão, Mundão

Rota nº 15: 21 km

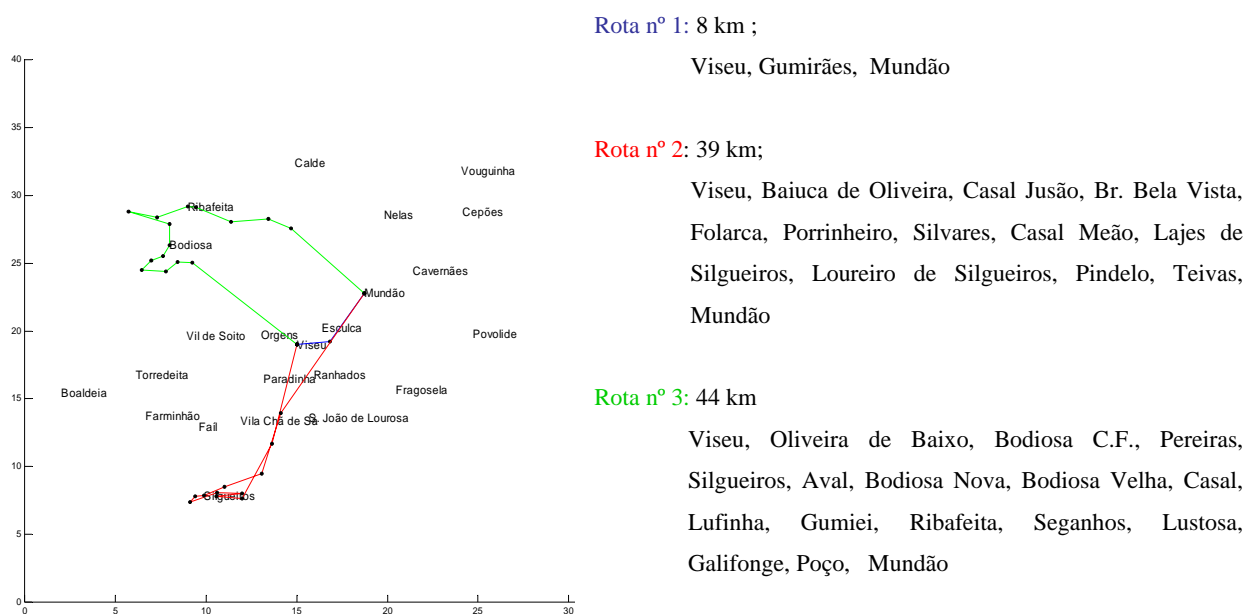
Viseu, Rio de Loba, Travassós de Cima, Mundão

Figura C.2 (continuação): Representação esquemática das rotas de terça-feira

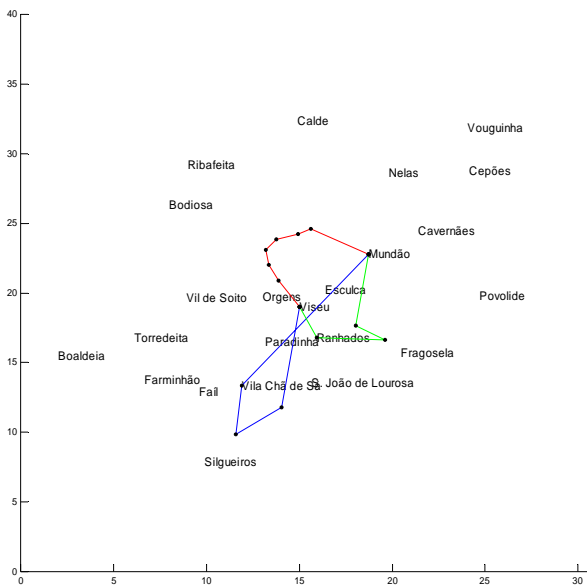
## Rotas de quarta-feira

Nº rota	Contentores recolhidos	Duração da rota (minutos)	Rota
1	131	254	Vis, 140, depósito
2	109	261	Vis, 55, 63, 61, 62, 64, 67, 66, 65, 60, 49, 48, depósito
3	101	254	Vis, 188, 189, 191, 192, 193, 190, 187, 184, 186, 185, 183, 182, 180, 179, 165 depósito
4	115	256	Vis, 54, 58, 56, depósito
5	130	263	Vis, 175, 174, 181, 173, 150, 153, depósito
6	130	267	Vis, 76, 74, 75, depósito
7	128	253	Vis, 176, 177, 144, 147, depósito
8	123	265	Vis, 57, 44, 2, 1, 138, depósito
9	129	262	Vis, 45, 41, 42, 43, 178, 142, depósito
10	108	253	Vis, 4, 3, 5, 39, 38, 197, 196, 195, 194, 146, 133, depósito
11	82	165	Vis, 143, 141, 137, depósito
12	110	215	Vis, 139, 136, 135, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>1396</b>	<b>2966</b>	<b>Recolha de 71 locais</b>

**Tabela C. 16:** Solução de quarta-feira



**Figura C.3:** Representação esquemática das rotas de quarta-feira



Rota nº 4: 29 km

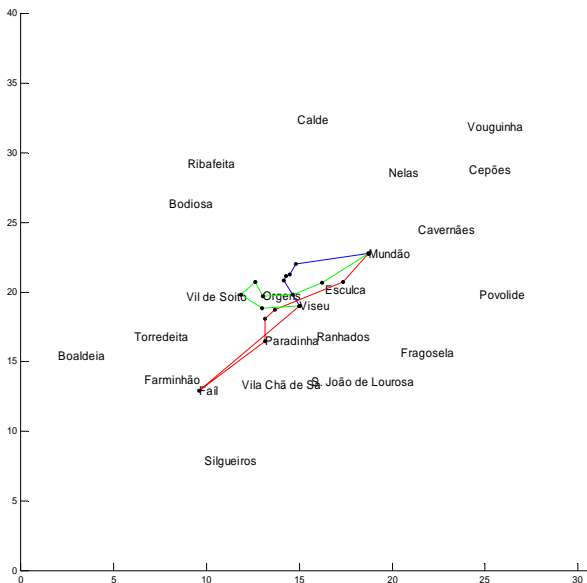
Viseu, Oliveira de Barreiros, Passos de Silgueiros, Vila Chã de Sá, Mundão

Rota nº 5: 15 km;

Viseu, Alto de Abreveses, Pascoal, Moselos, Vila Nova do Campo, Campo, Br. Norad, Mundão

Rota nº 6: 18 km

Viseu, Ranhados, Caçador, Póvoa de Sobrinhos, Mundão



Rota nº 7: 11 km

Viseu, Abraveses, Est. Velha Abraveses, Br. Sta. Rita, Abraveses EN2, Mundão

Rota nº 8: 25 km;

Viseu, Faíl, Paradinha, S. Salvador, Vildemoinhos, Travassós de Baixo, Mundão

Rota nº 9: 16 km

Viseu, Qt. de Belém, S. Martinho, Quintela, Orgens, Av. da Bélgica, Santiago, Mundão

**Figura C.3 (continuação):** Representação esquemática das rotas de quarta-feira

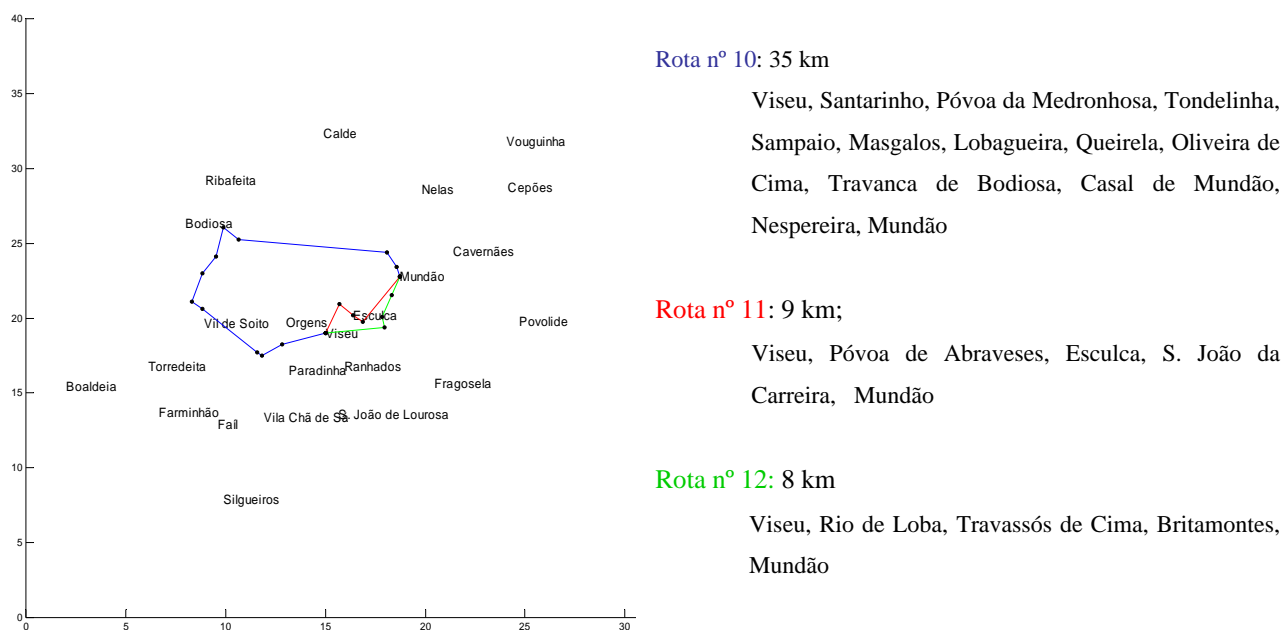
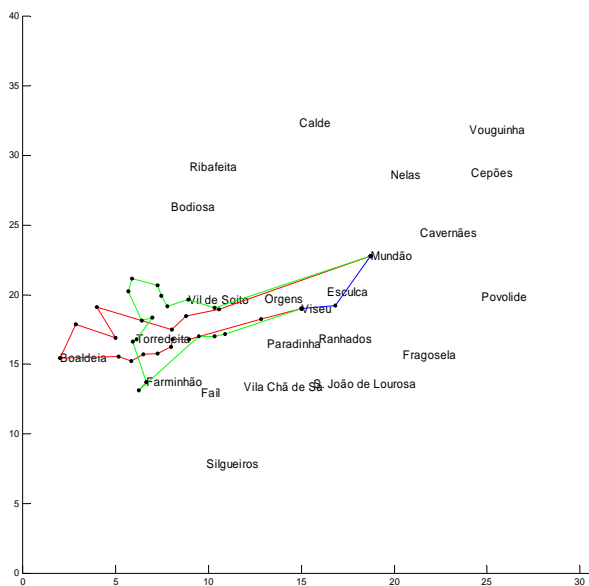


Figura C.3 (continuação): Representação esquemática das rotas de quarta-feira

**Rotas de quinta-feira**

Nº rota	Contentores recolhidos	Duração da rota (minutos)	Rota
1	131	254	Vis, 140, depósito
2	107	267	Vis, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 21, 24, 28, 33, 34 depósito
3	108	266	Vis, 6, 7, 9, 19, 18, 20, 23, 29, 25, 26, 27, 31, 30, 37, 36, 35, depósito
4	131	267	Vis, 75, 77, 87, 88, depósito
5	108	269	Vis, 149, 166, 202, 168, 167, 172, 170, 171, 169, 156, 155, 152, depósito
6	116	251	Vis, 76, 71, 72, 73, 74, depósito
7	127	258	Vis, 178, 175, 174, 181, 148, depósito
8	75	217	Vis, 151, 157, 158, 159, 161, 164, 163, 162, 160, 113, 116, 115, 134, depósito
9	117	258	Vis, 47, 48, 53, 51, 50, 68, 52, 49, 138, depósito
10	122	270	Vis, 54, 58, 56, 133, depósito
11	107	269	Vis, 142, 114, 200, 112, 111, 110, 109, 106, 105, 107, 108, 102, 104, 103, 100, 101, 124, 130, 131, depósito
12	114	237	Vis, 1, 5, 3, 2, 44, 137, depósito
13	133	261	Vis, 176, 177, 147, 145, 146, depósito
14	131	264	Vis, 45, 43, 144, 143, 141, depósito
15	105	206	Vis, 139, 136, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>1732</b>	<b>3812</b>	<b>Recolha de 121 locais</b>

Tabela C. 17: Solução de quinta-feira



Rota nº 1: 8 km

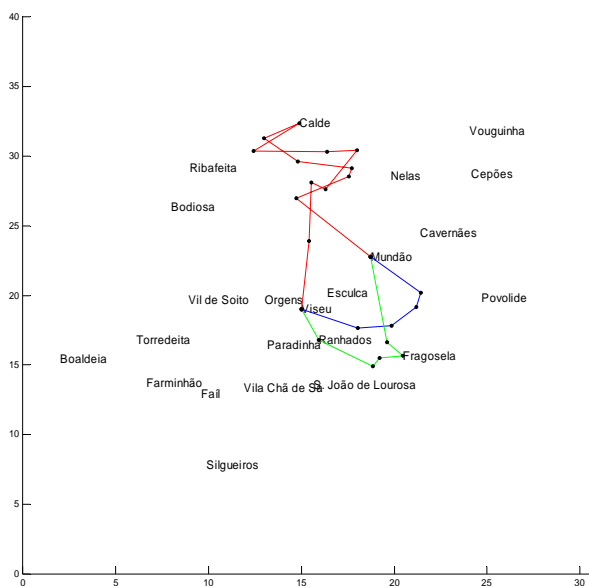
Viseu, Gumirães, Mundão

Rota nº 2: 46 km;

Viseu, Santarinho, Ferrocinto, Passos, Magarelas, Escouras, Casal, Novais, Várzea, Boaldeia, Vila chá do Monte, Routar, Salgueiral, Mosteirinho, Carriça, Canelas, Mundão

Rota nº 3: 44 km

Viseu, Chãos, Casal Mau, Portela, Real, Farminhão, Carqueijal, Torredeita, Couto de Baixo, Vila Nova, Dade, Portela, S. Cosmado, Couto de Cima, Carvalhais, Vil de Soito, Poives Mundão



Rota nº 4: 17 km

Viseu, Póvoa de Sobrinhos, Barbeita, Carragoso, Sernada, Mundão

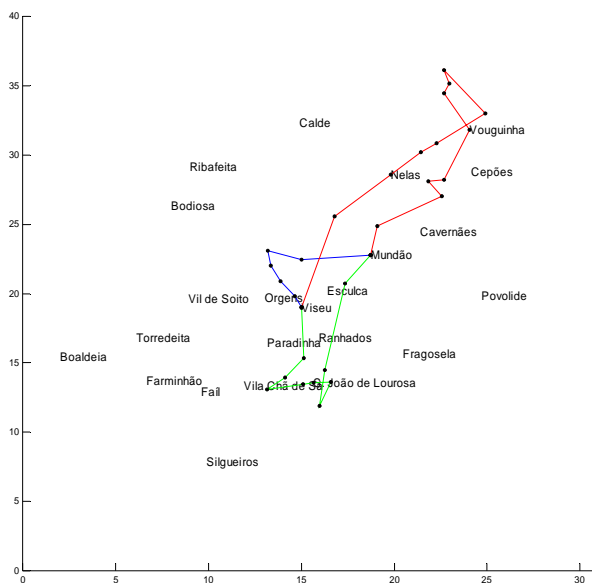
Rota nº 5: 46 km;

Viseu, Bassar, Bigas, Lageosa, Várzea de Calde, Almargem, Paraduça, Calde, Vilar do Monte, Póvoa de Calde, Sanguinhedo Maças, Vilar, Folgosa, Mundão

Rota nº 6: 24 km

Viseu, Ranhados, Espadanal, Fragosela de Cima, Fragosela de Baixo, Caçador, Mundão

Figura C.4: Representação esquemática das rotas de quinta-feira



Rota nº 7: 16 km

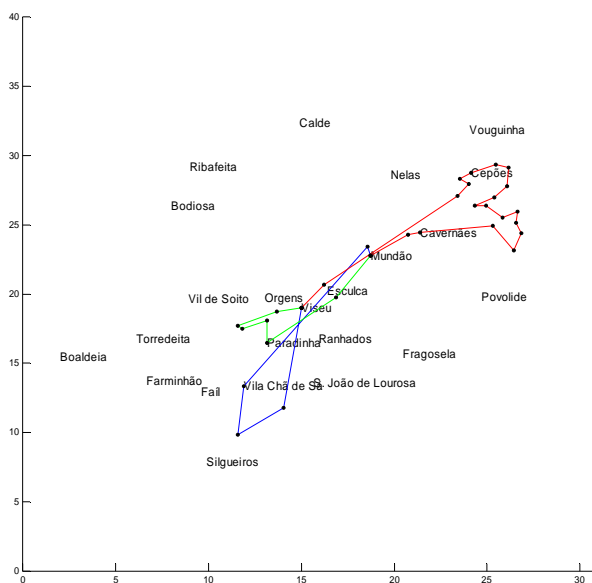
Viseu, Av. da Bélgica, Alto de Abraveses, Pascoal, Moselos, Moure de Madalena, Mundão

Rota nº 8: 52 km;

Viseu, Aeródromo, Nelas, Couto de Cepões, Silvares, Nogueira, Zonho, Vila de um Santo, Sanguinhedo de Côtã, Vouguinha, Canidelo, Bretelhe, Aviuges, Póvoa do Mundão, Mundão

Rota nº 9: 28 km

Viseu, Cabanões, Teivas, Rebordinho, Vilela, S. João de Lourosa, Lourosa de Baixo, Póvoa de Moscoso, Lourosa de Cima, Travassós de Baixo, Mundão



Rota nº 10: 29 km

Viseu, Oliveira de Barreiros, Passos de Silgueiros, Vila Chã de Sá, Nespereira, Mundão

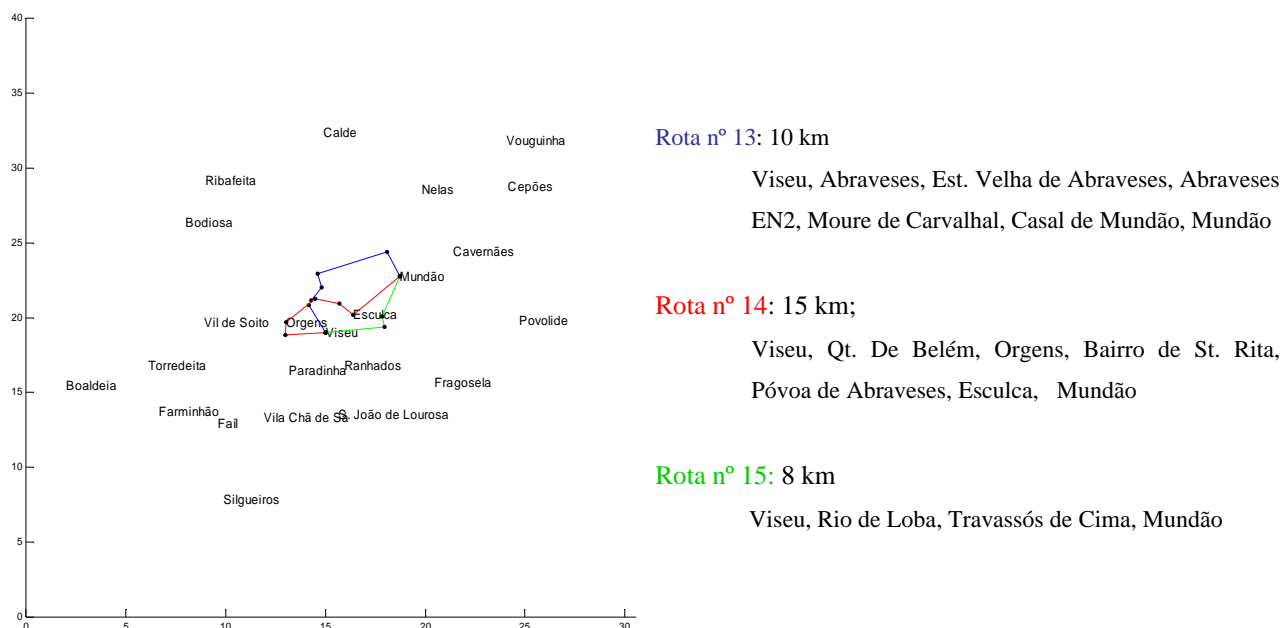
Rota nº 11: 47 km;

Viseu, Santiago, Vila Chã, Nogueira de Cima, Nogueira de Baixo, Cepões, Coucinheiro, Barreiros, Brufe, Carcavelos, Barraca, Travassos, Figueiredo, Casal do Esporão, Forniçô, Bassin, Carvalho, Lamaçais, Cavernães, Vendas de Moita, Mundão

Rota nº 12: 17 km

Viseu, Vildemoinhos, Tondelinha, Póvoa da Medronhosa, S. salvador, Paradinha, S. João da Carreira, Mundão

Figura C.4 (continuação): Representação esquemática das rotas de quinta-feira



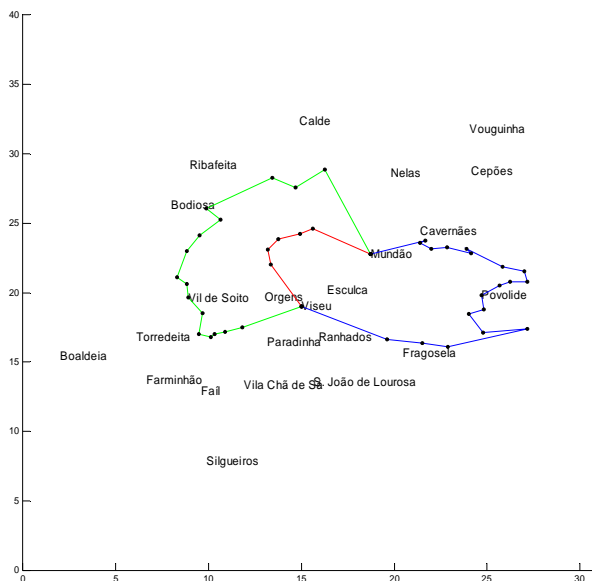
**Figura C.4 (continuação):** Representação esquemática das rotas de quinta-feira

### Rotas de sexta-feira

Nº rota	Contentores recolhidos	Duração da rota (minutos)	Rota
1	107	260	Vis, 74, 78, 80, 83, 82, 84, 85, 86, 94, 93, 154, 95, 92, 199, 198, 126, 127, 128, 129, depósito
2	119	242	Vis, 174, 181, 173, 150, 153, depósito
3	111	262	Vis, 3, 6, 7, 8, 9, 32, 36, 39, 38, 197, 196, 194, 195, 179, 165, 201 depósito
4	113	230	Vis, 76, 75, depósito
5	121	253	Vis, 4, 5, 40, 41, 42, 43, 45, depósito
6	102	256	Vis, 175, 188, 189, 191, 193, 192, 190, 187, 184, 186, 185, 183, 182, 180, depósito
7	110	252	Vis, 44, 57, 53, 49, 69, 70, 46, depósito
8	111	222	Vis, 143, 147, 148, depósito
9	91	226	Vis, 55, 63, 62, 61, 64, 67, 66, 65, 60, 59, depósito
10	108	257	Vis, 77, 81, 79, 89, 90, 91, 96, 97, 98, 99, 125, 123, 122, 121, 120, 119, 118, 117, 131, 134, depósito
11	122	242	Vis, 178, 176, 177, 144, depósito
12	136	264	Vis, 140, 135, depósito
13	135	261	Vis, 139, 136, 132, depósito
14	133	264	Vis, 2, 1, 141, 142, 137, 138, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>1619</b>	<b>3490</b>	<b>Recolha de 118 locais</b>

**Tabela C. 18:** Solução de sexta-feira





**Rota nº 1: 41 km**

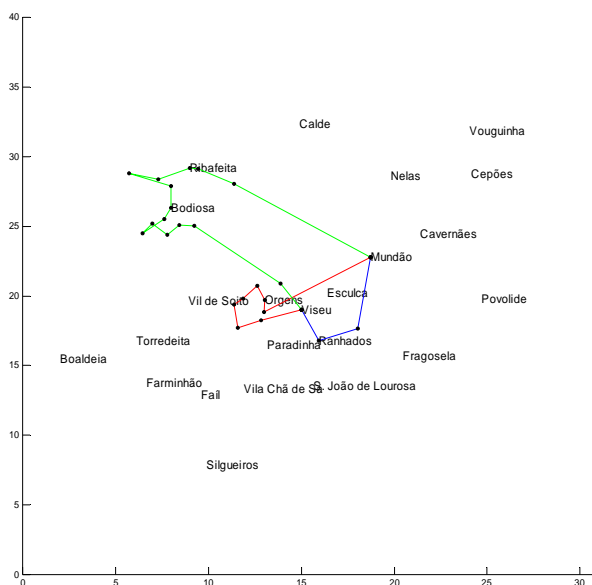
Viseu, Caçador, Prime, Ponte de Fagilde, Vila Corça, Nesprido, Vilar de Ordem, Outeiro, Povolide, Nespereira, Cadimas, Vilar de Baixo, Cabril, Povoação, Guimarães, Povidal, Ermida, Corredoura, Carragosela, Alvelos, Mundão

**Rota nº 2: 15 km;**

Viseu, Pascoal, Moselos, Vila Nova do Campo, Campo, Bairro Norad, Mundão

**Rota nº 3: 38 km**

Viseu, Póvoa da Medronhosa, Chãos, Casal Mau, Sarzedelo, Portela, Figueiró, Vil de Soito, Sampaio, Masgalos, Lobagueira, Queirela, Travanca de Bodiosa, Oliveira de Cima, Galifonge, Paçô, Pousa Maria, Mundão



**Rota nº 4: 14 km**

Viseu, Ranhados, Póvoa de Sobrinhos, Mundão

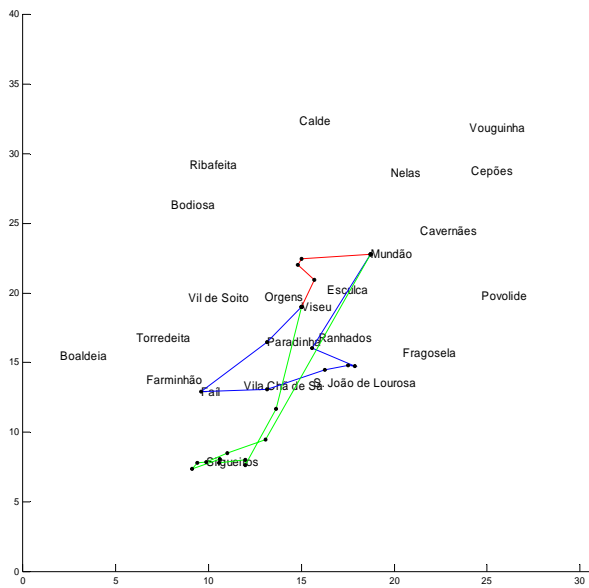
**Rota nº 5: 19 km;**

Viseu, Santarinho, Tondelinha, Travassós de Orgens, S. Martinho, Quintela, Orgens, Qt. De Belém, Mundão

**Rota nº 6: 44 km**

Viseu, Alto de Abraveses, Oliveira de Baixo, Bodiosa C. F. ,Pereiras, Aval, Silgueiros, Bodiosa a Nova, Bodiosa a Velha, Casal, Lufinha, Gumiei, Ribafeita, Seganhos, Lustosa, Mundão

**Figura C.5:** Representação esquemática das rotas de sexta-feira



Rota nº 7: 32 km

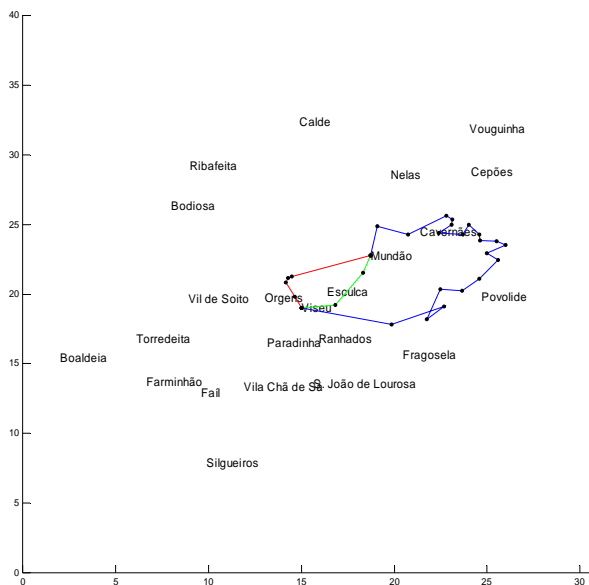
Viseu, Paradinha, Faíl, Rebordinho, Lourosa de Cima, Cumieira, Coimbrões, Bairro da Misericórdia, Mundão

Rota nº 8: 11 km;

Viseu, Póvoa de Abraveses, Abraveses EN2, Moure de Madalena, Mundão

Rota nº 9: 38 km

Viseu, Baiuca de Oliveira, Casal Jusão, Falorca, Bairro da Bela Vista, Porrinheiro, Silvares, Casal Meão, Lajes de Silgueiros, Loureiro de Silgueiros, Pindelo, Mundão



Rota nº 10: 38 km

Viseu, Barbeita, Santos Evos, Pinheiro, Dornelas, Corvos à Nogueira, Remonde, Casaldeiro, Covelo, Souto Chão, Moimenta, Outeiro, Taboadelo, Silvares, Casal de Cavernães, Juncal, Passos de Cavernães, Nogueiredo, Vendas de Moita, Póvoa do Mundão, Mundão

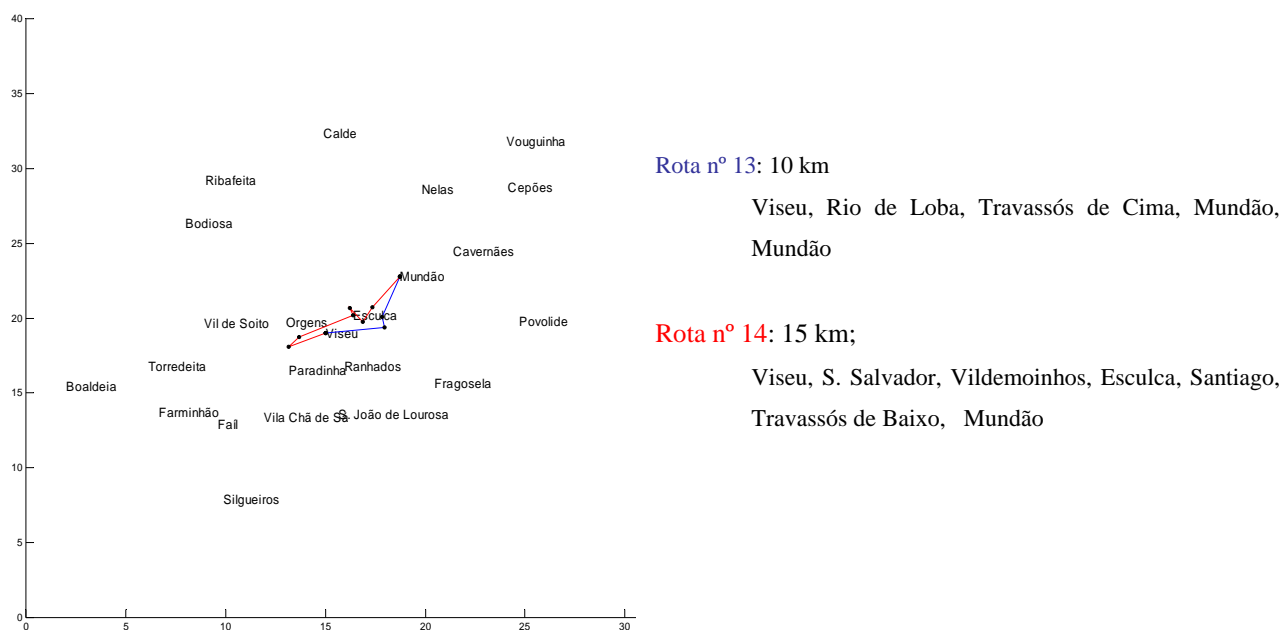
Rota nº 11: 11 km;

Viseu, Av. da Bélgica, Abraveses, Est. Velha de Abraveses, Bairro de St. Rita, Mundão

Rota nº 12: 9 km

Viseu, Gumirães, Britamontes, Mundão

Figura C.5 (continuação): Representação esquemática das rotas de sexta-feira



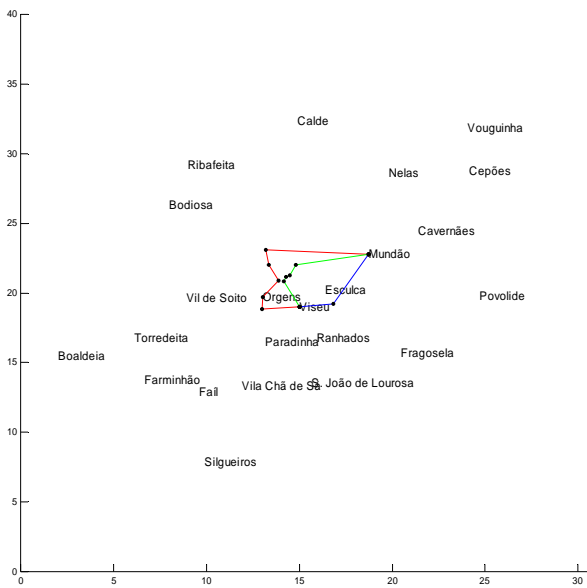
**Figura C.5 (continuação):** Representação esquemática das rotas de sexta-feira

### Rotas do fim-de-semana

Nº rota	Contentores recolhidos	Duração da rota (minutos)	Rota
1	131	254	Vis, 140, depósito
2	113	236	Vis, 45, 43, 175, 174, 181, depósito
3	128	253	Vis, 176, 177, 144, 147, depósito
4	115	239	Vis, 44, 2, 3, 5, 4, 1, depósito
5	130	267	Vis, 76, 75, 74, depósito
6	135	264	Vis, 143, 141, 142, 137, 138, depósito
7	129	253	Vis, 178, 139, 136, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>881</b>	<b>1766</b>	<b>Recolha de 27 locais</b>

**Tabela C. 19:** Solução de fim-de-semana

As rotas que definidas para o fim-de-semana podem ser efectuadas ao sábado, ao domingo, ou repartidas indiferentemente pelos dois dias. Actualmente existem quatro equipas a operar ao sábado e três ao domingo.



**Rota nº 1:** 32 km

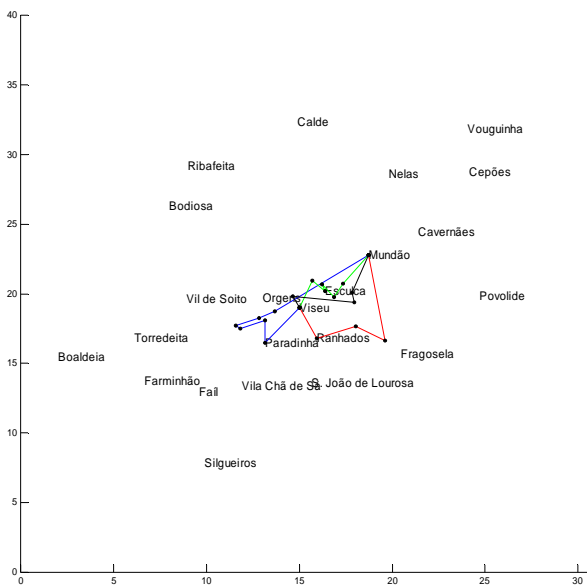
Viseu, Gumirães, Mundão

**Rota nº 2:** 11 km;

Viseu, Qt. de Belém, Orgens, Alto de Abraveses,  
Pascoal, Moselos, Mundão

**Rota nº 3:** 38 km

Viseu, Abraveses, Est. Velha Abraveses, Bairro  
de St. Rita, Abraveses EN2, Mundão



**Rota nº 4:** 38 km

Viseu, Paradinha, S. Salvador, Póvoa da  
Medronhosa, Tondelinha, Santarinho, Mundão

**Rota nº 5:** 11 km;

Viseu, Ranhados, Póvoa de Sobrinhos, Caçador,  
Mundão

**Rota nº 6:** 9 km

Viseu, Póvoa de Abraveses, Esculca, Santiago, S.  
João da Carreira, Travassós de Baixo, Mundão

**Rota nº 7:** Viseu, Av. da Bélgica, Rio de Loba, Santiago,  
Mundão

**Figura C.6** Representação esquemática das rotas do fim-de-semana

---

## Anexo D

---

### Resultados da aplicação do modelo de duas fases aos exemplos da literatura

---

Neste anexo apresentam-se os resultados da aplicação do modelo de duas fases a um grupo de 7 problemas existentes na literatura de PVRP. Os problemas da literatura têm características que os diferenciam, diferindo no comprimento do período, nas frequências de visita, nos padrões de calendarização admissíveis, número de clientes, entre outros.

Do grupo de 7 problemas de literatura apresentados na Tabela D.1, à exceção do problema nº 13, que tem uma taxa de replicação de clientes muito pequena (9.6%), os movimentos de trocas de clientes entre duas rotas na pós-otimização *trocas-entre-rotas* só são avaliados, se nas duas rotas em análise existir algum cliente em comum. Esta característica permite reduzir o número de movimentos avaliados e deste modo reduzir o tempo de cálculo destes procedimentos. A aplicação desta restrição ao problema nº 13 reduziria excessivamente o número de movimentos conduzindo a uma solução de muito pouca qualidade. Deste modo, neste problema avaliam-se todas as trocas possíveis quando executados os procedimentos de pós-otimização.

Os resultados obtidos da aplicação da primeira fase do algoritmo aos exemplos da literatura correspondem, em alguns casos, a soluções com um valor da função objectivo inferior aos apontados na literatura. Note-se que os resultados desta fase não contemplam as restrições de calendarização, tratando-se por isso de uma solução do problema relaxado, não podendo fazer-se de imediato um juízo comparativo real. Na Tabela D.1 comparam-se os resultados obtidos usando a primeira fase do nosso algoritmo (identificado por AM-ACO<sup>1</sup>) com os resultados dos seguintes trabalhos: CGW - apresentado por Chão, Golden, e Wasil (1995), CGL- de Cordeau, Gendreau e Laporte (1997).

<i>Prob. nº</i>	8	10	13	19	20	23	30
CGW	2075	1633	3630	4847	8367	6769	80982
CGL	2034	1596	3512	4834	8367	6621	77179
AM-ACO <sup>1</sup>	2041	1580	3545	4821	8367	6584	75417

**Tabela D.1:** Resultados da primeira fase do algoritmo aplicada aos problemas da literatura

Na primeira fase obtém-se um conjunto de rotas que, posteriormente, são afectas aos diferentes dias do período, obedecendo às restrições de calendarização. Para se proceder à afectação das rotas obtidas na primeira fase, constrói-se um grafo a partir da solução da primeira fase: as rotas representam os vértices e as ligações entre os vértices existem se as rotas tiverem algum ponto de visita em comum. Pretende-se que o grafo seja colorido com um número de cores inferior ou igual ao comprimento do período  $t$  e simultaneamente com um maior número de pontos a obedecer às restrições de calendarização. Para isso é resolvido um problema de coloração de grafos formulado em Programação Linear recorrendo ao CPLEX Interactive Optimizer 8.1.0.

Visando obter grafos com número de arestas reduzido pode-se aplicar a fase de transição na qual se incentiva a construção de rotas semelhantes.

Na Tabela D.2 são comparados os resultados da afectação das rotas aos diferentes dias do período quando efectuadas a partir de soluções distintas: os primeiros resultados (colunas 3 e 4) correspondem aos resultados provenientes da coloração do grafo da solução obtida na primeira fase, enquanto que as duas últimas colunas correspondem aos resultados da coloração do grafo obtido após a fase de transição.

A primeira coluna da Tabela D.2 indica o número com que o problema aparece referenciado na literatura, o comprimento do período ( $t$ ) e o número de veículos disponíveis ( $m$ ). A segunda coluna apresenta uma breve caracterização do problema, referindo o número de clientes ( $n$ ) e o número de visitas no período em estudo (representados por  $per$ ), dando uma ideia do número máximo de conflitos (arestas) de cada problema de coloração.

A existência de componentes desconexas no grafo permite a coloração independente de cada componente diminuindo a complexidade do problema de coloração aumentando a flexibilidade de uma posterior afectação aos dias da semana. Em alguns exemplos da literatura existem subgrafos desconexos sendo essa informação caracterizada na tabela pela presença de diferentes subgrafos.

Tal como aconteceu para o caso em estudo, em alguns problemas da literatura foi impossível colorir o grafo gerado com um número de cores inferior ou igual ao comprimento do período, mesmo recorrendo à fase de transição. Nestes casos procede-se à coloração do problema relaxado que se obtém por eliminação das arestas fracas. Uma aresta de conexão de duas rotas designa-se fraca se ela depende de apenas a presença de um ponto de recolha em comum nas duas rotas. Na Tabela D.2 também é fornecida a informação do número de arestas fortes e fracas presentes nos diferentes grafos obtidos existindo ou não a fase de transição.

A necessidade de recorrer à relaxação do problema pode provocar problemas de admissibilidade quanto à unicidade da visita diária de cada cliente. Adicionalmente existem problemas de não cumprimento das restrições de calendarização. Esta informação também se encontra na Tabela D.2: por “falhas” designam-se os problemas que surgem da inadmissibilidade do padrão e por “relaxar” os problemas que advêm da relaxação.

Prob. n°	Caracterização	<u>Sem fase de transição</u>		<u>Com fase de transição</u>	
		Características do grafo	Após coloração	Características do grafo	Após coloração
8 t=5 m=5	n=100 40 per=1 46 per=2 14 per=5 } 186 conflitos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=2041</math></li> <li>• 21 vértices</li> <li>• 65 arestas: - 49 fortes - 16 fracas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=2153</math></li> <li>• problemas - 9 relaxar - 12 falhas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=2086</math></li> <li>• 22 vértices</li> <li>• 73 arestas: - 54 fortes - 19 fracas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=2141</math></li> <li>• problemas - 11 relaxar (per=5) - 12 falhas</li> </ul>
10 t=5 m=4	n=100 40 per=1 46 per=2 14 per=3 } 88 conflitos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=1580</math></li> <li>• 16 vértices</li> <li>• 33 arestas: - 11 fortes - 21 fracas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=1693</math></li> <li>• problemas - 25 falhas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=1603</math></li> <li>• 16 vértices</li> <li>• 31 arestas: - 21 fortes - 10 fracas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=1703</math></li> <li>• problemas - 17 falhas</li> </ul>
13	n=417 377 per=1 40 per=2 } 40 conflitos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=3545</math></li> <li>• 61 vértices</li> <li>• 31 arestas: - 7 fortes - 24 fracas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=3668</math></li> <li>• problemas - 5 falhas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=3603</math></li> <li>• 61 vértices</li> <li>• 29 arestas: - 9 fortes - 20 fracas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=3698</math></li> <li>• problemas - 5 falhas</li> </ul>

**Tabela D. 2** Resultados da aplicação da segunda fase do algoritmo aos exemplos referenciados na literatura

19 t=4 m=4	n=112 48 per=1 48 per=2 16 per=4 } 144 conflitos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=4821</math></li> <li><u>Subgrafo 1:</u></li> <li>• 8 vértices</li> <li>• 18 arestas: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 12 fortes</li> <li>- 6 fracas</li> </ul> </li> <li><u>Subgrafo 2:</u></li> <li>• 4 vértices</li> <li>• 6 arestas: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 6 fortes</li> <li>- 0 fracas</li> </ul> </li> <li><u>Subgrafo 3:</u></li> <li>• 4 vértices</li> <li>• 6 arestas: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 6 fortes</li> <li>- 0 fracas</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=4853</math></li> <li>• problemas <ul style="list-style-type: none"> <li>- 1 relaxar</li> <li>- 12 falhas</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=4846</math></li> <li><u>Subgrafo 1, 2, 3, 4:</u> (todos semelhantes)</li> <li>• 4 vértices</li> <li>• 6 arestas: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 6 fortes</li> <li>- 0 fracas</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=4846</math></li> <li>• problemas <ul style="list-style-type: none"> <li>- 0 falhas</li> </ul> </li> </ul>
20 t=4 m=4	n=184 80 per=1 80 per=2 24 per=4 } 224 conflitos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=8367</math></li> <li><u>Subgrafo 1, 2, 3, 4:</u> (todos semelhantes)</li> <li>• 4 vértices</li> <li>• 6 arestas: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 6 fortes</li> <li>- 0 fracas</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=8367</math></li> <li>• problemas <ul style="list-style-type: none"> <li>- 0 falhas</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=8374</math></li> <li><u>Subgrafo 1, 2, 3, 4:</u> (todos semelhantes)</li> <li>• 4 vértices</li> <li>• 6 arestas: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 6 fortes</li> <li>- 0 fracas</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=8378</math></li> <li>• problemas <ul style="list-style-type: none"> <li>- 0 falhas</li> </ul> </li> </ul>
23 t=4 m=6	n=168 72 per=1 72 per=2 24 per=4 } 216 conflitos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=6584</math></li> <li>• 24 vértices</li> <li>• 64 arestas: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 40 fortes</li> <li>- 24 fracas</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=6856</math></li> <li>• problemas <ul style="list-style-type: none"> <li>- 4 relaxar (per=4)</li> <li>- 40 falhas</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=6702</math></li> <li>• 23 vértices</li> <li>• 55 arestas: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 40 fortes</li> <li>- 15 fracas</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=6882</math></li> <li>• problemas <ul style="list-style-type: none"> <li>- 5 relaxar (per=4)</li> <li>- 35 falhas</li> </ul> </li> </ul>
30 t=6 m=9	n=153 108 per=1 27 per=2 18 per=6 } 297 conflitos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=75417</math></li> <li>• 43 vértices</li> <li>• 213 arestas: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 63 fortes</li> <li>- 150 fracas</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=78931</math></li> <li>• problemas <ul style="list-style-type: none"> <li>- 21 relaxar (per=6)</li> <li>- 2 falhas</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_1^*=76677</math></li> <li>• 43 vértices</li> <li>• 223 arestas: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 56 fortes</li> <li>- 167 fracas</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>S_2^*=81248</math></li> <li>• problemas <ul style="list-style-type: none"> <li>- 34 relaxar (per=6)</li> <li>- 1 falhas</li> </ul> </li> </ul>

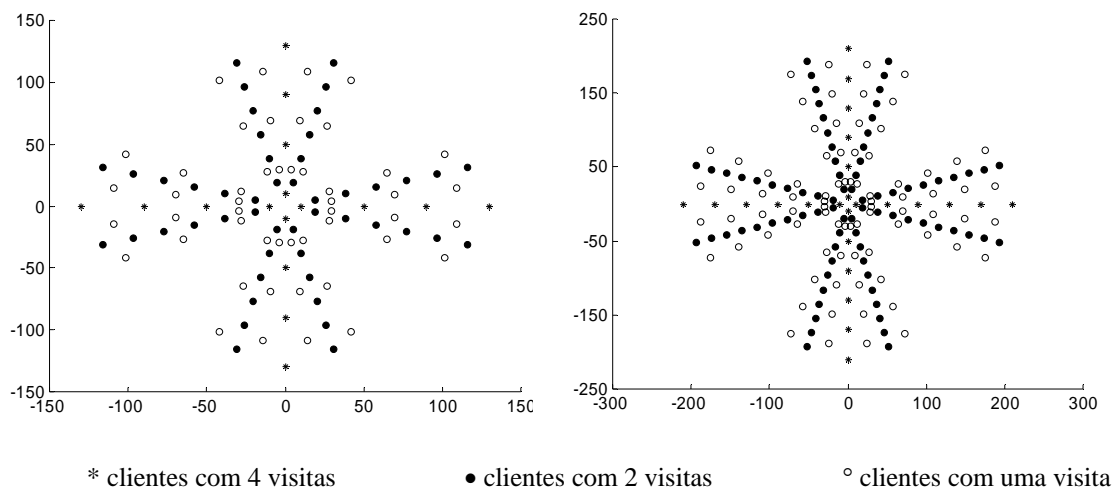
**Tabela D. 2 (continuação):** Resultados da aplicação da segunda fase do algoritmo aos exemplos referenciados na literatura



Ao aplicar a fase de transição aos casos da literatura em estudo observam-se algumas semelhanças com o comportamento do caso real de estudo:

- Ao aplicar-se a fase de transição o valor da função objectivo (representada por  $S_1^*$ ), aumenta ligeiramente,
  
- De um modo geral, o número de conflitos das soluções geradas com a fase de transição é inferior, existindo uma diferença entre o número de ligações fortes e fracas quando se aplica, ou não, a fase de transição. Por exemplo: a existência de 31 conflitos no exemplo número 10 quando aplicada a fase de transição implica a coloração de um grafo de 31 arestas, das quais 21 são fortes (correspondem a rotas com 2 ou mais pontos de visita em comum) e somente 10 correspondem a ligações entre rotas com um único ponto em comum. Quando é inexistente a fase que incentiva a semelhança entre rotas verificam-se 11 rotas com 2 ou mais pontos em comum, portanto arestas fortes, e 21 rotas com arestas devido à presença de um único nó em comum entre elas. Estas diferenças revelam que a fase de transição realmente exerce efeito na estrutura das rotas construídas. Este efeito permite por vezes colorir o grafo sem ter de recorrer à eliminação das arestas fracas. Nos casos em que se procede à eliminação das arestas fracas, no sentido de obter uma coloração com um número de cores igual ao comprimento do período, o número de arestas a eliminar é muito menor, conseguindo-se colorir o grafo e diminuindo os problemas que advêm dessa mesma eliminação.

O comportamento análogo entre os problemas 19 e 20 deve-se à extrema semelhança que existe entre estes dois exemplos, não só na distribuição geográfica dos pontos como também das necessidades de recolha ao longo do período em análise (que em ambos os exemplos é 4). Os gráficos da Figura D.1 ilustram bem estas semelhanças.



**Figura D. 1:** Visualização geográfica dos clientes dos exemplos 19 e 20 da literatura

Após coloração é accionado um mecanismo de trocas de padrões que visa a admissibilidade de todos os padrões *danificando* o menos possível a solução encontrada. Para todos estes problemas da literatura o mecanismo de trocas de padrões baseou-se na selecção de algumas combinações de padrões admissíveis, optando pela combinação com melhor solução.

Para alguns exemplos da literatura o número de falhas pareceu-nos excessivo, mas tal sucedeu devido ao pequeno número de possibilidades de cada padrão, quando comparado com o caso de recolha de resíduos sólidos em estudo. Nos exemplos em que  $t=5$  e  $t=6$  (isto é, o período em estudo é 5 ou 6 respectivamente) tanto os pontos com 2 visitas, como os de 3 visitas por período, têm apenas três padrões possíveis. Mais grave é nos exemplos em que  $t=4$  onde os pontos de 2 recolhas por período têm apenas 2 padrões. Estas restrições de calendarização são muito mais exigentes do que as do caso em estudo. Isto faz com que, não só seja grande o número de falhas, como a sua resolução poder degradar a boa solução encontrada na primeira fase.

---

## Anexo E

### Resultados da aplicação do modelo de definição simultânea de rotas e calendarização aos exemplos da literatura

---

Neste anexo apresentam-se os resultados da aplicação do modelo descrito no Capítulo 6 a um grupo de 7 problemas existentes na literatura de PVRP. Os problemas da literatura têm características que os diferenciam, diferindo no comprimento do período, nas frequências de visita, nos padrões de calendarização admissíveis, entre outras.

Para um conjunto de 7 problemas da literatura, apresenta-se um quadro onde se resumem as características da solução inicial do modelo, seguindo-se um quadro com a solução final. A solução final é obtida após execução dos movimentos de trocas de padrões.

Nos resultados apresentados neste anexo, respeitantes às aplicações dos movimentos de trocas aos exemplos da literatura, o parâmetro que filtra as trocas ( $\omega$ ), assume um valor muito pequeno, na prática é um parâmetro inactivo. Recorde-se que o parâmetro  $\omega$  restringe o conjunto de potenciais movimentos de trocas, dependendo da primeira avaliação que ocorre do balanço dos custos da remoção com a inserção seguida do movimento de trocas 2-optimal.

Os exemplos de PVRP referenciados na literatura apenas contemplam restrições de capacidade dos veículos e de número de veículos disponíveis, sendo inexistentes limitações dos tempos de execução das rotas. O parâmetro  $\gamma$ , que quantifica a taxa de extrapolação dos limites de admissibilidade das restrições, vai actuar sobre as restrições de capacidade dos veículos. Este parâmetro  $\gamma$  assume o valor de 20% durante o conjunto de iterações em que ocorrerem melhorias da solução, decrescendo para 5% após a primeira iteração sem efeitos melhorativos da solução final. Nas iterações em que o parâmetro  $\upsilon$  assume um valor diferente de zero,  $\gamma$  será zero, isto é, nas iterações em que se permitem trocas que degradem a solução corrente não serão permitidas extrapolações dos limites de admissibilidade das restrições de capacidade dos veículos.

- **Exemplo número 8 da literatura:**

Solução inicial						
	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	Total
Distância percorrida	488	594	467	438	398	2385
Carga laboral	795	810	936	700	697	3938
Nº rotas	5	5	5	4	4	23
Nº clientes	41	46	45	30	40	202

Solução final						
	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	Total
Distância percorrida	348	545	351	529	312	2085
Carga laboral	657	972	748	980	581	3938
Nº rotas	4	5	4	5	3	21
Nº clientes	31	52	36	56	27	202

**Tabela E2:** Solução final do exemplo nº 8

- **Exemplo número 10 da literatura:**

Solução inicial						
	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	Total
Distância percorrida	333	340	469	293	551	1987
Carga laboral	627	505	737	468	751	3088
Nº rotas	4	3	4	3	4	18
Nº clientes	42	24	42	18	48	174

**Tabela E3:** Solução inicial do exemplo nº 10

Solução final						
	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	Total
Distância percorrida	226	240	484	238	446	1635
Carga laboral	393	575	768	570	782	3088
Nº rotas	2	3	4	3	4	16
Nº clientes	22	28	54	28	42	174

**Tabela E4:** Solução final do exemplo nº 10

• Exemplo número 13 da literatura:

Solução inicial								
	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$	$\ell=7$	Total
Distância percorrida	904	847	1056	772	844	811	880	6115
Carga laboral	16729	16941	16824	14918	16175	16529	17858	115974
Nº rotas	10	11	10	9	10	10	11	71
Nº clientes	67	61	63	62	65	64	75	457

**Tabela E5:** Solução inicial do exemplo nº 13

Solução final								
	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$	$\ell=7$	Total
Distância percorrida	341	448	623	672	624	345	573	3626
Carga laboral	16654	16951	16849	14978	16205	16429	17908	115974
Nº rotas	9	8	9	9	9	8	9	61
Nº clientes	62	59	64	68	70	60	74	457

**Tabela E6:** Solução final do exemplo nº 13

• Exemplo número 19 da literatura:

Solução inicial					
	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	Total
Distância percorrida	1324	1361	1115	1790	5590
Carga laboral	141	134	122	163	560
Nº rotas	4	4	4	5	17
Nº clientes	56	43	37	72	208

**Tabela E7:** Solução inicial do exemplo nº 19

Solução final					
	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	Total
Distância percorrida	1215	1255	1207	1169	4846
Carga laboral	138	147	140	135	560
Nº rotas	4	4	4	4	16
Nº clientes	50	59	52	47	208

**Tabela E8:** Solução final do exemplo nº 19

- **Exemplo número 20 da literatura:**

Solução inicial					
	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	Total
Distância percorrida	2435	2379	1951	3232	9997
Carga laboral	221	213	189	257	880
Nº rotas	4	4	4	5	17
Nº clientes	91	71	59	115	336

**Tabela E9:** Solução inicial do exemplo nº 20

Solução final					
	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	Total
Distância percorrida	2028	2105	2176	2058	8367
Carga laboral	217	221	227	215	880
Nº rotas	4	4	4	4	16
Nº clientes	81	85	91	79	336

**Tabela E10:** Solução final do exemplo nº 20

- **Exemplo número 23 da literatura:**

Solução inicial					
	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	Total
Distância percorrida	1913	1883	1555	2165	7516
Carga laboral	220	204	187	229	840
Nº rotas	6	6	6	6	24
Nº clientes	91	69	58	94	312

**Tabela E11:** Solução inicial do exemplo nº 23

Solução final					
	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	Total
Distância percorrida	1535	1790	1551	1770	6647
Carga laboral	188	232	192	228	840
Nº rotas	5	6	5	6	22
Nº clientes	65	91	69	87	312

**Tabela E12:** Solução final do exemplo nº 23

• Exemplo número 30 da literatura:

	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$	Total
Distância percorrida	14978	13938	15988	14005	13726	18169	90804
Carga laboral	138	138	123	136	138	137	810
Nº rotas	8	8	7	7	8	8	46
Nº clientes	48	47	37	47	47	44	270

**Tabela E13:** Solução inicial do exemplo nº 30

	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$	Total
Distância percorrida	10281	10743	17777	10527	11934	16921	78183
Carga laboral	111	116	170	111	132	170	810
Nº rotas	7	6	9	6	7	9	44
Nº clientes	35	37	59	35	45	59	270

**Tabela E14:** Solução final do exemplo nº 30





---

## Anexo F

### Resultados da aplicação do modelo de definição simultânea de rotas e calendarização ao caso de estudo

---

Neste anexo apresentam-se as soluções provenientes da aplicação do modelo descrito no Capítulo 6 ao caso de recolha de resíduos sólidos urbanos em estudo. Apresentam-se duas tabelas onde se sintetizam as características da solução inicial e final (respectivamente, Tabela F.1 e Tabela F.2) seguindo-se, para cada dia do período em estudo, uma tabela onde se apresentam as características da solução e uma representação esquemática do conjunto de rotas.

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Total
<b>Contentores a recolher</b>	1734	1579	1733	1677	1644	8367
<b>Nº de localidades a visitar</b>	106	129	111	92	145	583
<b>Distância percorrida</b>	389	441	393	312	471	2006
<b>Nº de rotas</b>	15	15	16	14	15	75

**Tabela F. 1:** Solução inicial do caso de estudo

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Fim-de-semana	Total
<b>Contentores a recolher</b>	1657	1637	1729	1544	1800	881	9248
<b>Nº de localidades a visitar</b>	93	140	108	81	161	27	610
<b>Distância percorrida</b>	297	429	373	259	474	92	1924
<b>Nº de rotas</b>	14	14	15	13	16	7	79

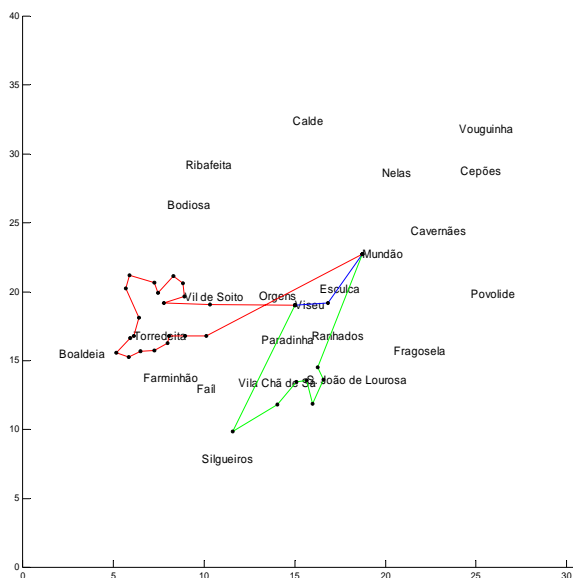
**Tabela F. 2:** Solução final do caso de estudo

Nas figuras que se seguem representa-se esquematicamente os conjuntos de rotas dos diferentes dias da semana definindo a sequência dos locais a visitar ligados por segmentos de recta, não reflectindo, obviamente, a rede viária e portanto os percursos efectuados.

### Rotas de segunda-feira:

Nº rota	Contentores recolhidos	Duração da rota (minutos)	Rota
1	131	254	Vis, 140, depósito
2	109	265	Vis, 35, 37, 36, 39, 38, 30, 31, 27, 26, 25, 23, 20, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 8 depósito
3	112	262	Vis, 58, 54, 51, 50, 52, 68, 49, depósito
4	123	269	Vis, 5, 7, 9, 28, 33, 32, 40, 41, 42, 43, depósito
5	109	261	Vis, 55, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61, 60, 59, 48, depósito
6	119	245	Vis, 75, 77, 88, depósito
7	130	263	Vis, 175, 174, 181, 173, 150, 153, depósito
8	127	250	Vis, 178, 176, 177, 145, 146, depósito
9	130	258	Vis, 143, 144, 147, 148, depósito
10	111	245	Vis, 69, 70, 71, 72, 74, 73, 78, 79, depósito
11	123	270	Vis, 44, 57, 56, 53, 47, depósito
12	105	206	Vis, 139, 136, depósito
13	128	260	Vis, 45, 1, 2, 3, 4, 142, 141, depósito
14	100	202	Vis, 46, 76, 137, 138, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>1657</b>	<b>3507</b>	<b>Recolha de 93 locais</b>

Tabela F. 3: Solução de segunda-feira



#### Rota nº 1: 8 km

Viseu, Gumirães, Mundão

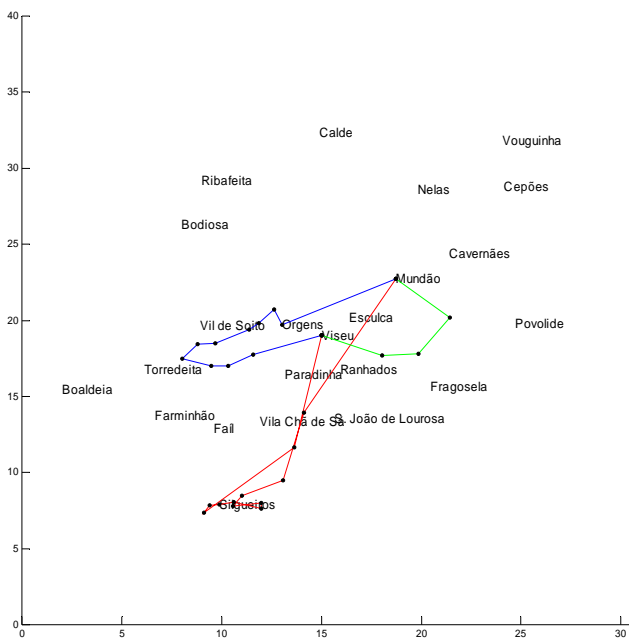
#### Rota nº 2: 42 km;

Viseu, Poives, Carvalhais, Vil de Soito, Sampaio, Masgalos, Couto de Cima, S. Cosmado, Portela, Dade, Vila Nova, Torredeita, Várzea, Novais, Casal, Escouras, Magarelas, Passos, Ferrocinto, Sarzedelo, Mundão

#### Rota nº 3: 36 km

Viseu, Passos de Silgueiros, Oliveira de Barreiros, Vilela, S. João de Lourosa, Póvoa de Moscoso, Lourosa de Baixo, Lourosa de Cima, Mundão

Figura F. 1: Representação esquemática das rotas de segunda-feira



**Rota nº 4:** 27 km

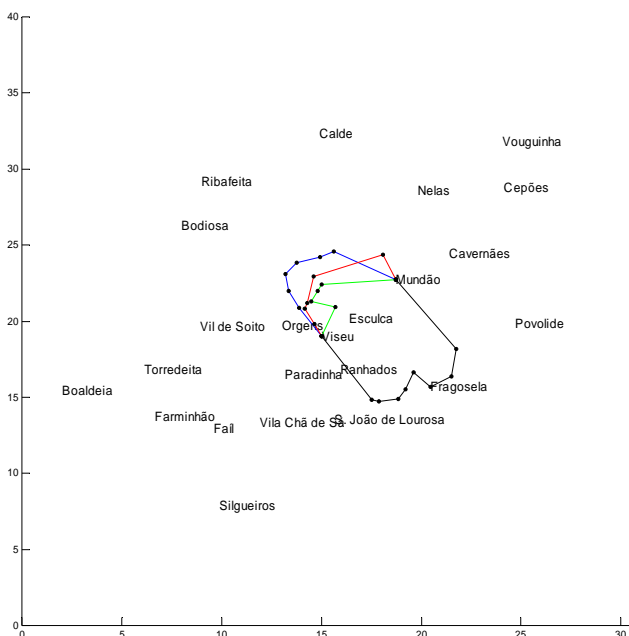
Visu, Tondelinha, Casal Mau, Portela, Mosteirinho, Carriça, Figueiró, Travassós de Orgens, S. Martinho, Quintela, Orgens, Mundão

**Rota nº 5:** 39 km;

Visu, Baiuca de Oliveira, Silvares, Casal Meão, Lajes de Silgueiros, Porrinho, Casal Jusão, Folarca, Bairro da Bela Vista, Loureiro de Silgueiros, Pindelo, Teivas, Mundão

**Rota nº 6:** 17 km

Visu, Póvoa de Sobrinhos, Barbeita, Sernada, Mundão



**Rota nº 7:** 15 km

Visu, Alto de Abraveses, Pascoal, Moselos, Vila Nova do Campo, Campo, Bairro Norad, Mundão

**Rota nº 8:** 10 km;

Visu, Av. da Bélgica, Abraveses, Es. Velha de Abraveses, Moure de Carvalho, Casal de Mundão, Mundão

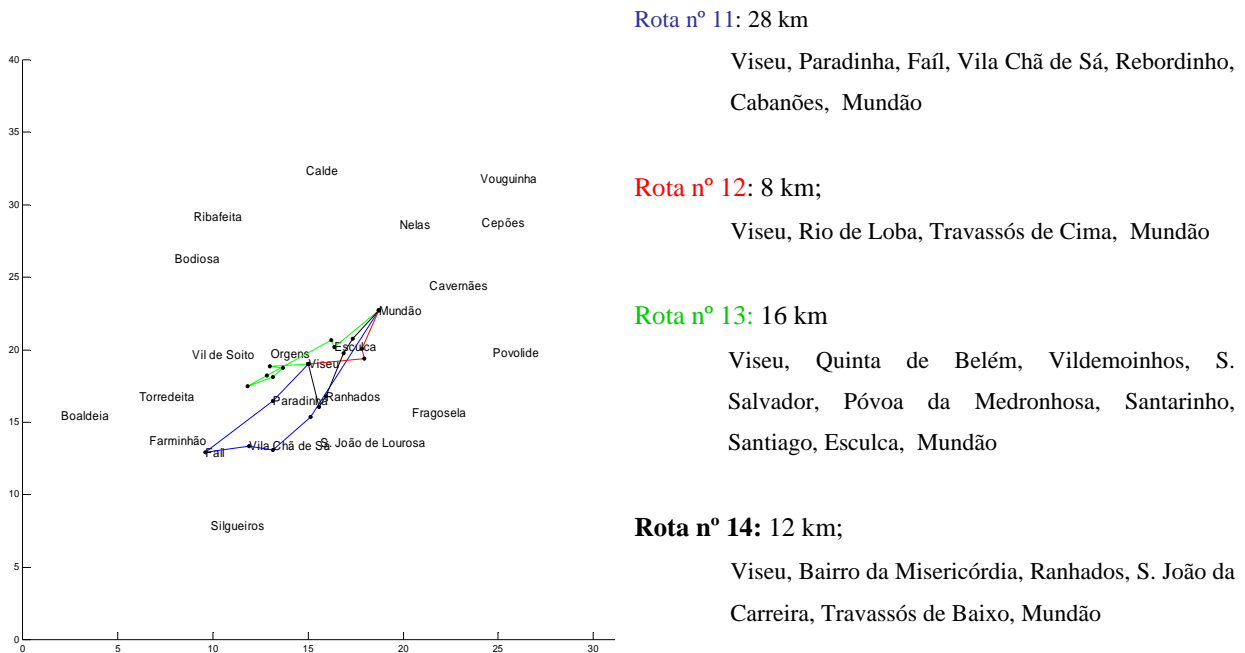
**Rota nº 9:** 12 km

Visu, Póvoa de Abraveses, Bairro de St. Rita, Abraveses EN2, Moure de Madalena, Mundão

**Rota nº 10:** 26 km;

Visu, Cumieira, Coimbrões, Espadanal, Fragosela de Cima, Caçador, Fragosela de Baixo, Prime, Pinheiro, Mundão

**Figura F. 1 (continuação):** Representação esquemática das rotas de segunda-feira

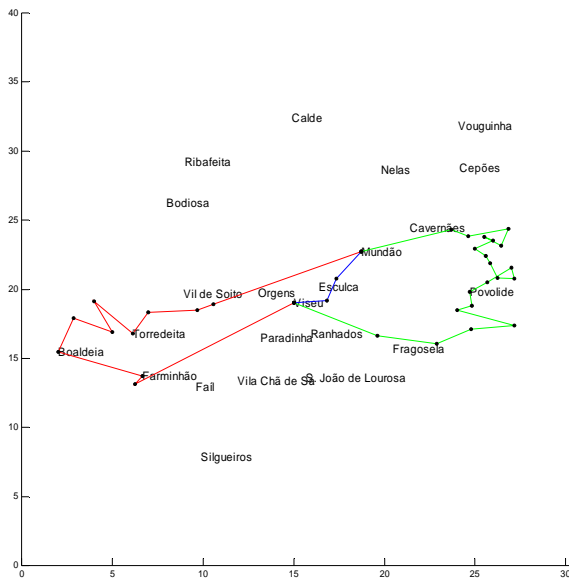


**Figura F. 1 (continuação):** Representação esquemática das rotas de segunda-feira

### Rotas de terça-feira

Nº rota	Contentores recolhidos	Duração da rota (minutos)	Rota
1	137	265	Vis, 140, 138, depósito
2	104	265	Vis, 19, 18, 17, 22, 21, 24, 23, 29, 32, 34, depósito
3	101	265	Vis, 74, 80, 83, 83, 84, 85, 86, 94, 95, 154, 93, 92, 96, 97, 98, 99, 101, 100, 125, 121, depósito
4	102	256	Vis, 188, 189, 191, 193, 192, 190, 187, 184, 186, 185, 183, 182, 180, 179, 165, 201, depósito
5	110	270	Vis, 176, 175, 149, 166, 171, 170, 172, 169, 168, 167, 156, 155, 152, depósito
6	105	269	Vis, 144, 131, 120, 119, 118, 117, 115, 114, 116, 113, 112, 200, 111, 110, 109, 106, 105, 107, 108, 104, 103, 102, 124, 123, 122, depósito
7	118	268	Vis, 176, 174, 195, 196, 197, 194, 181, 151, depósito
8	136	269	Vis, 176, 177, 144, 143, 145, 132, depósito
9	120	251	Vis, 44, 2, 6, 5, 3, 4, 1, depósito
10	108	240	Vis, 77, 87, 81, 89, 90, 91, 199, 198, 126, 127, 128, 129, 130, 134, 133, depósito
11	103	269	Vis, 176, 147, 202, 157, 158, 159, 164, 163, 162, 161, 160, depósito
12	134	267	Vis, 144, 141, 139, 136, 135, depósito
13	124	250	Vis, 76, 75, 137, depósito
14	135	269	Vis, 45, 43, 176, 178, 142, 138, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>1637</b>	<b>3672</b>	<b>Recolha de 140 locais</b>

**Tabela F. 4:** Solução de terça-feira



Rota nº 1: 8 km ;

Viseu, Gumirães, Travassós de Baixo, Mundão

Rota nº 2: 48 km;

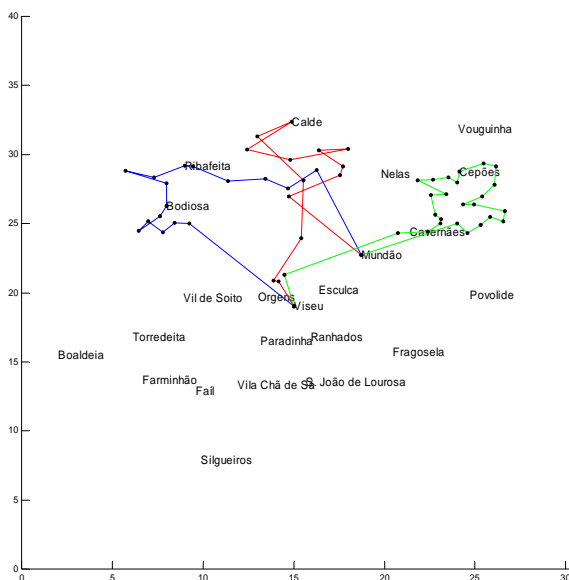
Viseu, Real, Farminhão, Boaldeia, Vila Chã do Monte, Rutar, Salgueiral, Torredeita, Couto de Baixo, Figueiró, Canelas, Mundão

Rota nº 3: 52 km

Viseu, Caçador, Ponte Fagilde, Nesprido, Vila Corça, Vilar de Ordem, Outeiro, Povolide, Nespereira, Vilar de Baixo, Cadimas, Povoação, S. Cristóvão, Casalheiro, Covelo, Souto Chão, Carvalho, Bassin, Moimenta, Silvares, Mundão

Rota nº 4: 44 km

Viseu, Oliveira de Baixo, Bodiosa C F, Pereiras, Aval, Silgueiros, Bodiosa a Nova, Bodiosa a Velha, Casal, Lufinha, Gumiei, Ribafeita, Seganhos, Lustosa, Galifonge, Paçô, Pousa Maria, Mundão



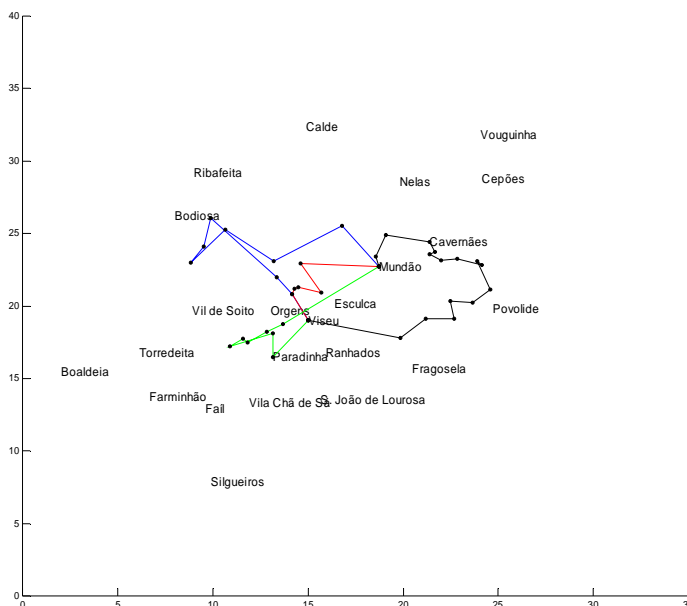
Rota nº 5: 44 km;

Viseu, Abraveses, Alto de Abraveses, Bassar, Bigas, Vilar do Monte, Calde, Paraduça, Póvoa de Calde, Várzea de Calde, Almargem, Sanguinhedo Maçãs, Vilar, Folgosa, Mundão

Rota nº 6: 49 km

Viseu, Bairro St. Rita, Vendas de Moita, Casal de Cavernães, Juncal, Passos de Cavernães, Nogueiredo, Aviuges, Vila Chã, Bretelhe, Canidelo, Nogueira de Baixo, Nogueira de Cima, Cepões, Coucinheiro, Barreiros, Brufe, Carcavelos, Barraca, Travassos, Casal do Esporão, Forniçô, Figueiredo, Lamaçais, Outeiro, Taboadelo, Mundão

Figura F.2: Representação esquemática das rotas de terça-feira



**Rota nº 7:** 33 km

Viseu, Abraveses, Pascoal, Oliveira de Cima, Queirela, Lobagueira, Travanca de Bodiosa, Moselos, Aérodromo, Mundão

**Rota nº 8:** 12 km;

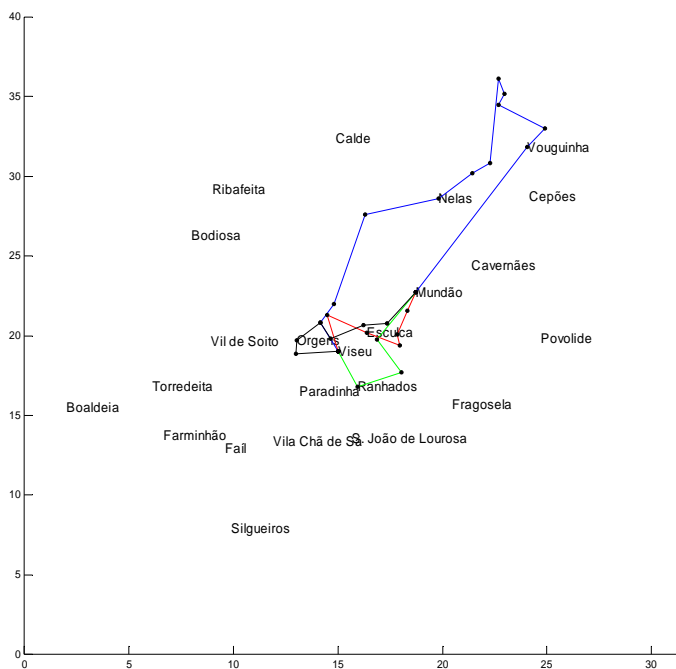
Viseu, Abraveses, Est. Velha de Abraveses, Bairro de St. Rita, Póvoa de Abraveses, Moure de Carvalho, Mundão, Mundão

**Rota nº 9:** 20 km

Viseu, Paradinha, S. Salvador, Chãos, Tondelinha, Póvoa da Medronhosa, Santarinho, Vildemoinhos, Mundão

**Rota nº 10:** 27 km

Viseu, Barbeita, Carragoso, Santos Evos, Dornelas, Corvos à Nogueira, Remonde, Guimarães, Povidal, Ermida, Carragosela, Alvelos, Cavernães, Póvoa do Mundão, Nespereira, Mundão



**Rota nº 11:** 51 km;

Viseu, Abraveses, Abraveses EN2, Lageosa, Nelas, Couto de Cepões, Silvares, Zonho, Vila de um Santo, Sanguinhedo de Cta, Nogueira, Vouguinha, Mundão

**Rota nº 12:** 13 km

Viseu, Bairro de St. Rita, Esculca, Rio de Loba, Travassós de Cima, Britamontes, Mundão

**Rota nº 13:** 14 km

Viseu, Ranhados, Póvoa de Sobrinhos, S. João da Carreira, Mundão

**Rota nº 14:** 14 km;

Viseu, Qt. de Belém, Orgens, Abraveses, Av. da Bélgica, Santiago, Travassós de Baixo, Mundão

**Figura F.2 (continuação):** Representação esquemática das rotas de terça-feira

### Rotas de quarta-feira

Nº rota	Contentores recolhidos	Duração da rota (minutos)	Rota
1	254	131	Vis, 140, depósito
2	267	103	Vis, 19, 18, 17, 22, 21, 24, 20, 16, 15, 14, 13, 8, depósito
3	269	116	Vis, 54, 55, 58, 51, 50, 68, 52, 49, depósito
4	253	105	Vis, 65, 66, 67, 64, 63, 61, 62, 60, 59, 48, depósito
5	154	70	Vis, 174, 181, 149, 153, depósito
6	265	115	Vis, 41, 40, 35, 37, 30, 31, 27, 26, 25, 29, 28, 11, 9, 7, 3, 4, depósito
7	258	111	Vis, 2, 5, 36, 39, 38, 197, 196, 194, 195, 179, 165, depósito
8	256	102	Vis, 175, 188, 189, 191, 193, 192, 190, 187, 184, 186, 185, 183, 182, 180, depósito
9	222	103	Vis, 46, 69, 70, 71, 72, 74, depósito
10	242	122	Vis, 178, 176, 177, 144, depósito
11	270	123	Vis, 44, 57, 56, 53, 47, depósito
12	265	133	Vis, 1, 45, 43, 147, 148, depósito
13	258	125	Vis, 76, 75, 133, 134, depósito
14	261	135	Vis, 139, 136, 132, depósito
15	264	135	Vis, 143, 142, 141, 137, 138, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>3756</b>	<b>1729</b>	<b>Recolha de 108 locais</b>

Tabela F. 5: Solução de quarta-feira

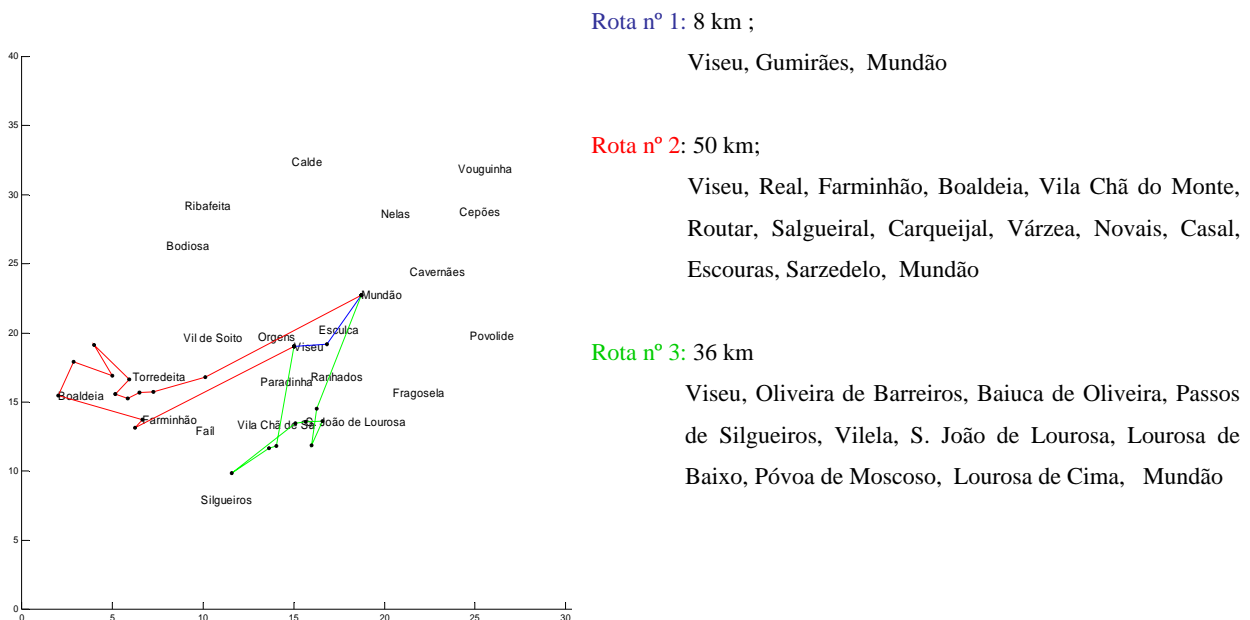
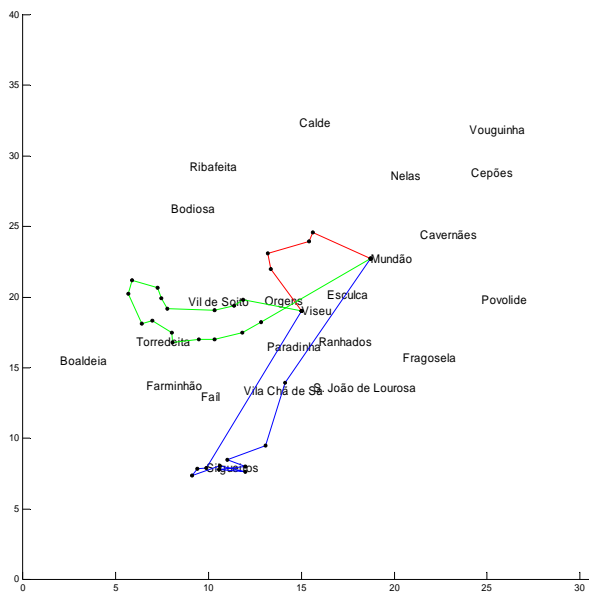


Figura F. 3: Representação esquemática das rotas de quarta-feira

**Rota nº 4:** 39 km

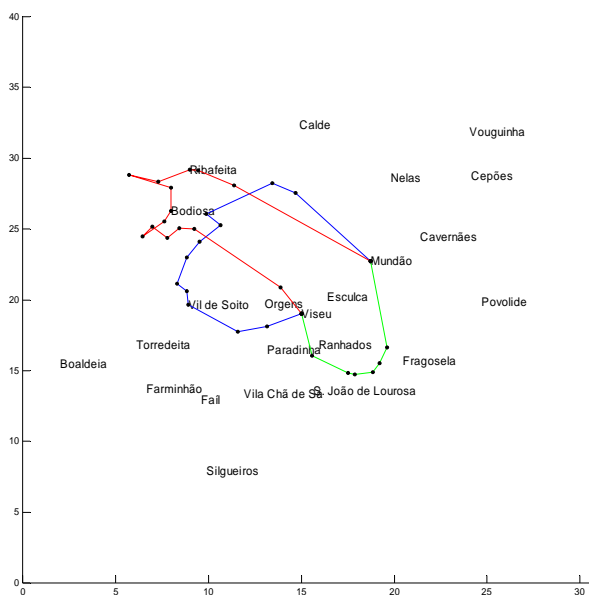
Viseu, Lajes de Silgueiros, Casal Meão, Silvares, Porrinheiro, Casal Jusão, Bairro da Bela Vista, Falorca, Loureiro de Silgueiros, Pindelo, Teivas, Mundão

**Rota nº 5:** 16 km;

Viseu, Pascoal, Moselos, Bassar, Bairro Norad, Mundão

**Rota nº 6:** 35 km

Viseu, S. Martinho, Travassós de Orgens, Poives, Carvalhais, Couto de Cima, S. Cosmado, Portela, Dade, Vila Nova, Couto de Baixo, Mosteirinho, Passos, Portela (Sarzedelo), Casal Mau, Póvoa da Medronhosa, Santarinho, Mundão

**Rota nº 7:** 35 km

Viseu, S. Salvador, Tondelinha, Vil de Soito, Sampaio, Masgalos, Lobagueira, Queirela, Travanca de Bodiosa, Oliveira de Cima, Galifões, Paçô, Mundão

**Rota nº 8:** 44 km;

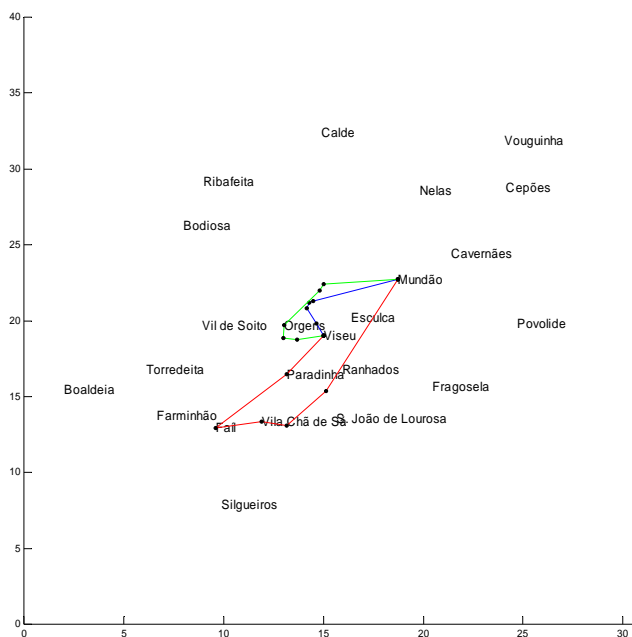
Viseu, Alto de Abraveses, Oliveira de Baixo, Bodiosa CF, Pereiras, Aval, Silgueiros, Bodiosa a Nova, Bodiosa a Velha, Casal, Lufinha, Gumiei, Ribafeita, Seganhos, Lustosa, Mundão

**Rota nº 9:** 21 km

Viseu, Bairro de Misericórdia, Cumieira, Coimbrões, Espadanal, Fragosela de Cima, Caçador, Mundão

**Figura F. 3 (continuação):** Representação esquemática das rotas de quarta-feira





**Rota nº 10:** 11 km

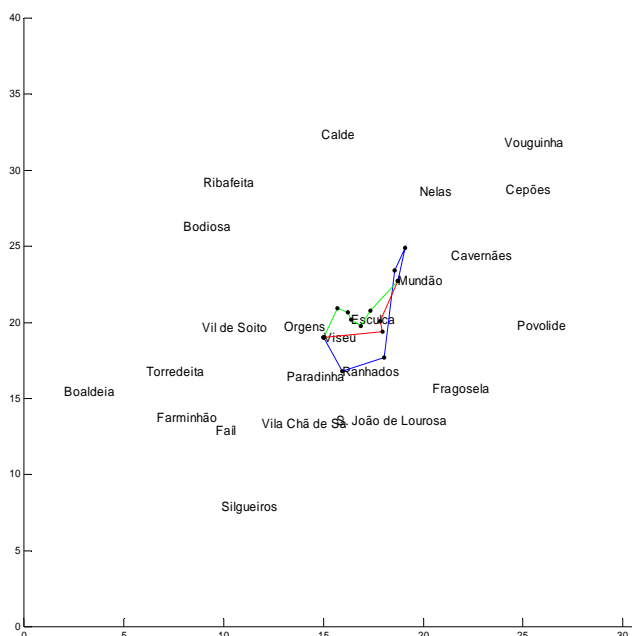
Viseu, Av. da Bélgica, Abraveses, Est. Velha de Abraveses, Bairro de S. Rita, Mundão

**Rota nº 11:** 28 km;

Viseu, Paradinha, Faíl, Vila Chã de Sá, Rebordinho, Cabanões, Mundão

**Rota nº 12:** 13 km

Viseu, Vildemoinhos, Qt. de Belém, Orgens, Abraveses EN2, Moure de Madalena, Mundão



**Rota nº 13:** 17 km

Viseu, Ranhados, Póvoa de Sobrinhos, Nespereira, Póvoa do Mundão, Mundão

**Rota nº 14:** 8 km;

Viseu, Rio de Loba, Travassós de Cima, Mundão, Mundão

**Rota nº 15:** 10 km

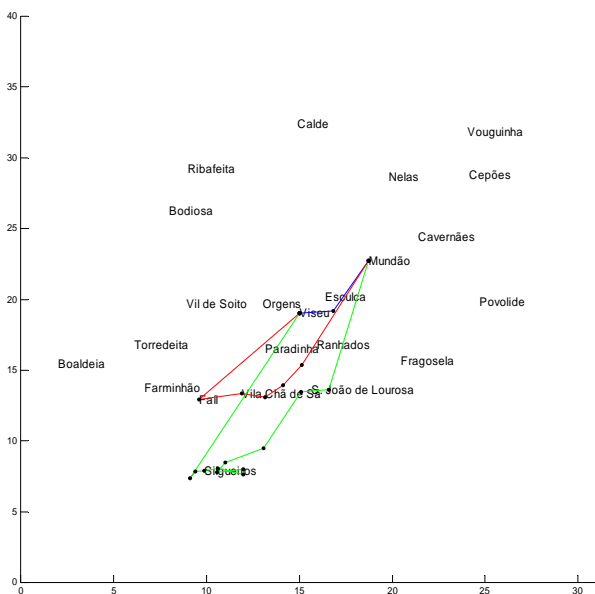
Viseu, Póvoa de Abraveses, Santiago, Esculca, S. João da Carreira, Travassós de Baixo, Mundão

**Figura F. 3 (continuação):** Representação esquemática das rotas de quarta-feira

## Rotas de quinta-feira

Nº rota	Contentores recolhidos	Duração da rota (minutos)	Rota
1	131	254	Vis, 140, depósito
2	117	257	Vis, 57, 56, 53, 48, 47, depósito
3	109	264	Vis, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61, 60, 59, 51, 68, depósito
4	116	266	Vis, 58, 55, 54, 50, 52, 49, 46, depósito
5	122	265	Vis, 69, 70, 71, 72, 74, 73, 78, 79, 130, 131, depósito
6	118	266	Vis, 4, 3, 34, 32, 33, 23, 20, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 8, 6, 5, depósito
7	130	263	Vis, 175, 174, 181, 173, 150, 153, depósito
8	110	224	Vis, 44, 2, 1, 137, 138, depósito
9	129	262	Vis, 45, 41, 42, 43, 178, 142, depósito
10	120	238	Vis, 143, 147, 148, 146, depósito
11	113	230	Vis, 76, 75, depósito
12	119	236	Vis, 176, 177, 144, 141, depósito
13	110	215	Vis, 139, 136, 135, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>1544</b>	<b>3241</b>	<b>Recolha de 81 locais</b>

Tabela F. 6: Solução de quinta-feira



Rota nº 1: 8 km ;

Viseu, Gumirães, Mundão

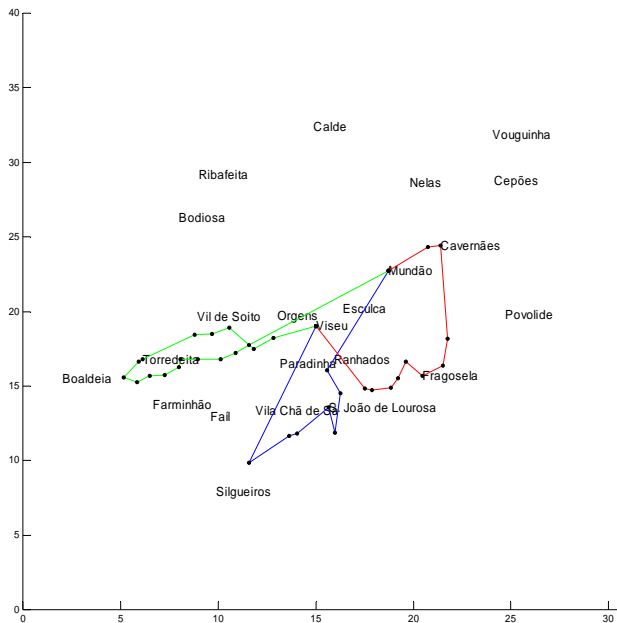
Rota nº 2: 27 km;

Viseu, Faíl, Vila Chã de Sá, Rebordinho, Teivas, Cabanões, Mundão

Rota nº 3: 41 km

Viseu, Silvares, Casal Meão, Lajes de Silgueiros, Porrinho, Casal Jusão, Falorca, Bairro da Bela Vista, Loureiro de Silgueiros, Pindelo, Vilela, Lourosa de Baixo, Mundão

Figura F. 4: Representação esquemática das rotas de quinta-feira



Rota nº 4: 34 km

Viseu, Passos de Silgueiros, Baiuca de Oliveira, Oliveira de Barreiros, S. João de Lourosa, Póvoa de Moscoso, Lourosa de Cima, Bairro de Misericórdia, Mundão

Rota nº 5: 27 km;

Viseu, Cumieira, Coimbrões, Espadanal, Fragosela de Cima, Caçador, Fragoela de Baixo, Prime, Pinheiro, Cavernães, Vendas de Moita, Mundão

Rota nº 6: 32 km

Viseu, Santarinho, Póvoa da Medronhosa, Canelas, Figueiró, Carriça, Torredeita, Carqueijal, Várzea, Novais, Casal, Escouras, Magarelas, Passos, Ferrocinto, Sarzedelo, Chãos, Tondelinha, Mundão

Rota nº 7: 15 km

Viseu, Alto de Abraveses, Pascoal, Moselos, Vila Nova do Campo, Campo, Bairro Norad, Mundão

Rota nº 8: 14 km;

Viseu, Paradinha, S. Salvador, Vildemoinhos, S. João da Carreira, Travassós de Baixo, Mundão

Rota nº 9: 16 km

Viseu, Qt. de Belém, S. Martinho, Quintela, Orgens, Av. da Bélgica, Santiago, Mundão

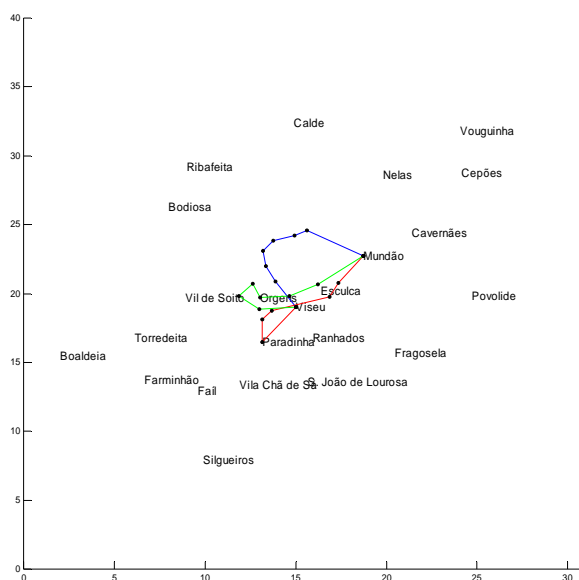
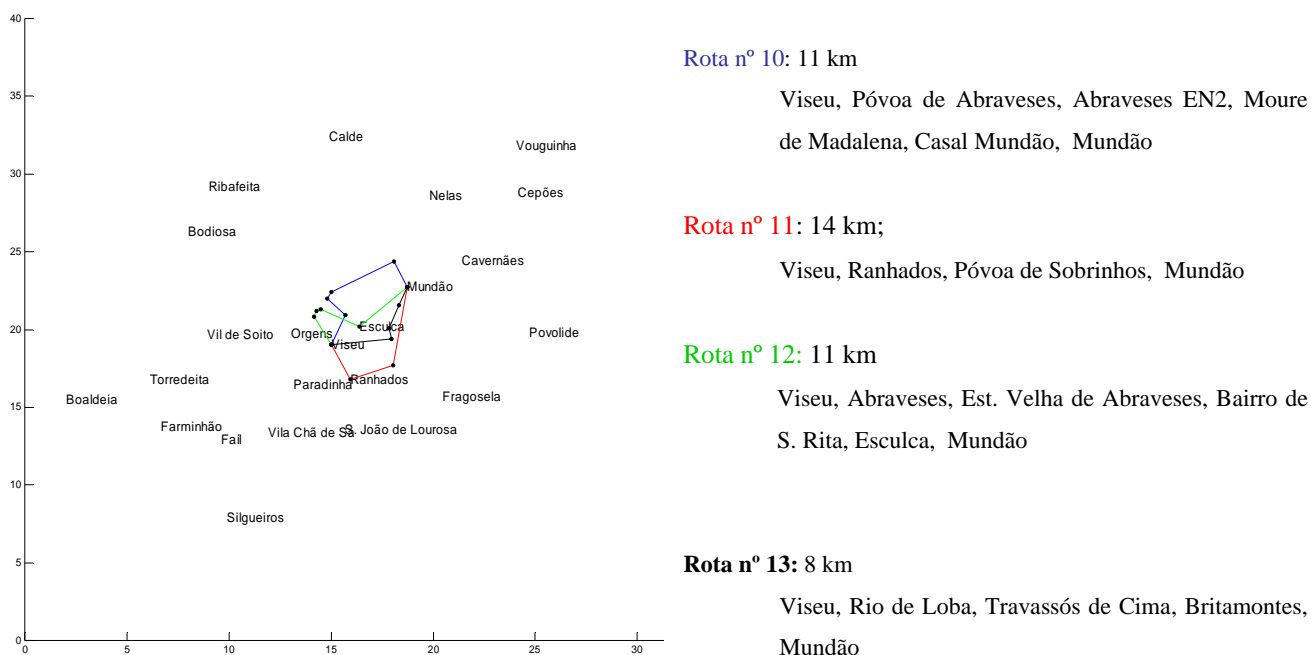


Figura F. 4 (continuação): Representação esquemática das rotas de quinta-feira

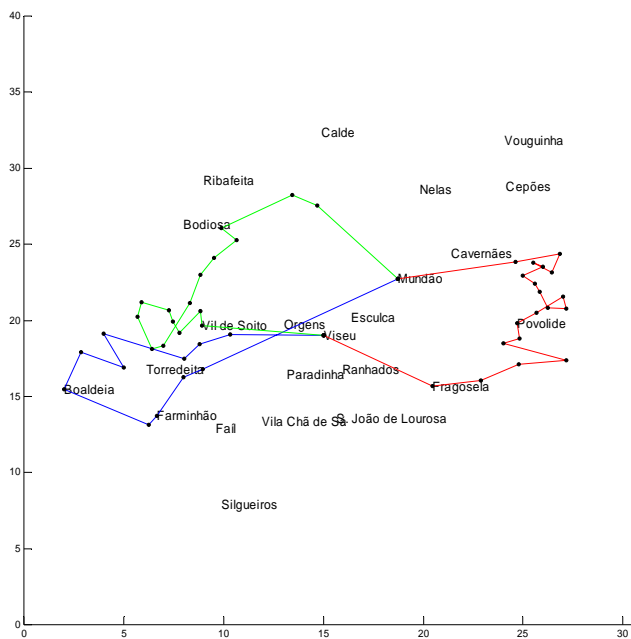


**Figura F. 4 (continuação):** Representação esquemática das rotas de quinta-feira

### Rotas de sexta-feira

Nº rota	Contentores recolhidos	Duração da rota (minutos)	Rota
1	102	263	Vis, 35, 33, 28, 24, 21, 22, 17, 19, 18, 12, 10, depósito
2	90	246	Vis, 73, 80, 82, 83, 84, 85, 86, 94, 95, 154, 93, 92, 96, 97, 98, 99, 101, 100, 125, depósito
3	106	267	Vis, 36, 39, 37, 30, 31, 27, 26, 25, 29, 38, 197, 196, 194, 195, 179, 165, depósito
4	107	269	Vis, 155, 202, 156, 171, 170, 172, 169, 168, 167, 166, 201, 151, 146, depósito
5	111	250	Vis, 74, 77, 88, 87, 81, 89, 90, 91, 199, 198, 126, 127, 128, 129, depósito
6	102	254	Vis, 134, 120, 119, 118, 117, 115, 112, 200, 111, 110, 109, 106, 105, 107, 108, 104, 103, 102, 124, 123, 122, 121, 130, depósito
7	98	248	Vis, 188, 189, 191, 192, 193, 190, 187, 184, 186, 185, 183, 182, 180, 152, depósito
8	131	266	Vis, 175, 174, 181, 173, 150, 149, depósito
9	122	254	Vis, 1, 45, 34, 40, 42, 43, 178, depósito
10	113	230	Vis, 76, 75, depósito
11	80	226	Vis, 145, 157, 158, 159, 164, 163, 162, 161, 160, 113, 116, 114, 131, depósito
12	138	268	Vis, 140, 133, depósito
13	128	253	Vis, 176, 177, 144, 147, depósito
14	110	215	Vis, 139, 136, 135, depósito
15	138	269	Vis, 143, 141, 142, 137, 132, depósito
16	124	264	Vis, 44, 2, 3, 9, 7, 6, 5, 4, 138, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>1800</b>	<b>4042</b>	<b>Recolha de 161 locais</b>

**Tabela F. 7:** Solução de sexta-feira



**Rota nº 1: 48 km**

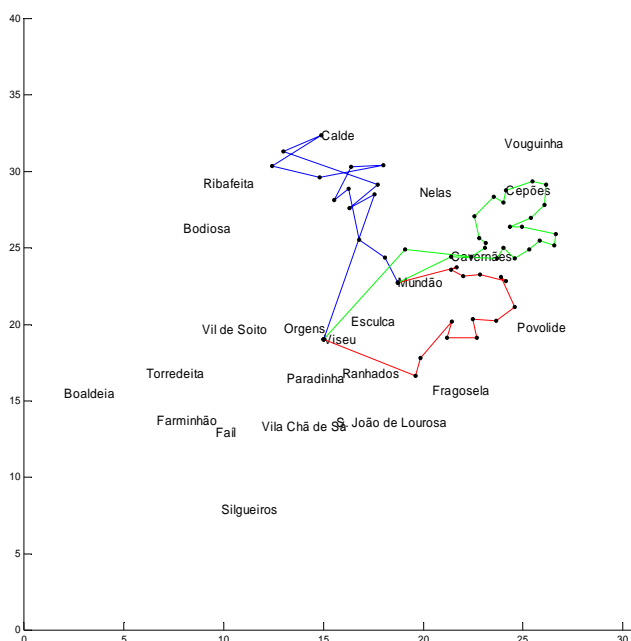
Viseu, Poives, Carriça, Mosteirinho, Salgueiral, Rutar, Vila Chã do Monte, Boaldeia, Real, Farminhão, Magarelas, Ferrocinto, Mundão

**Rota nº 2: 52 km;**

Viseu, Fragosela de Baixo, Ponte de Fagilde, Nesprido, Vila Corça, Vilar de Ordem, Outeiro, Povolide, Nespereira, Cabril, Vilar de Baixo, Cadimas, Povoação, S. Cristóvão, Casaldeiro, Covelo, Souto Chão, Carvalho, Bassim, Moimenta, Mundão

**Rota nº 3: 47 km**

Viseu, Vil de Soito, Sampaio, Carvalhais, Couto de Cima, S. Cosmado, Portela, Dade, Vila Nova, Couto de Baixo, Masgalos, Lobagueira, Queirela, Travanca de Bodiosa, Oliveira de Cima, Galifonge, Paçô, Mundão



**Rota nº 4: 47km**

Viseu, Vilar, Lajeosa, Sanguinhedo Maçãs, Vilar do Monte, Calde, Paradaça, Póvoa de Calde, Várzea de Calde, Almargem, Bigas, Pousa Maria, Aérodromo, Casal de Mundão, Mundão

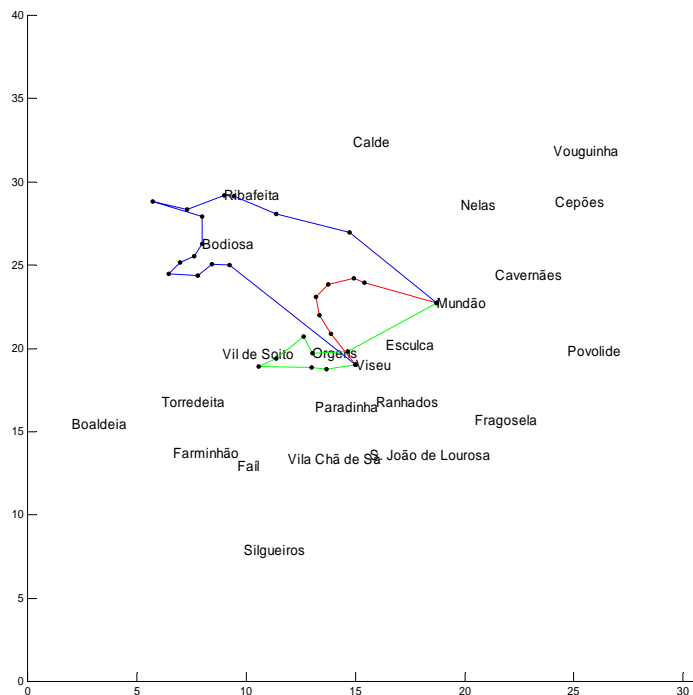
**Rota nº 5: 30 km;**

Viseu, Caçador, Barbeita, Sernada, Carragoso, Santos Evos, Dornelas, Corvos à Nogueira, Remonde, Guimarães, Povidal, Ermida, Corredoura, Carragosela, Alvelos, Mundão

**Rota nº 6: 44 km**

Viseu, Póvoa do Mundão, Casal de Cavernães, Juncal, Passos de Cavernães, Nogueiredo, Aviúges, Nogueira de Baixo, Nogueira de Cima, Cepões, Coucinheiro, Barreiros, Brufe, Carcavelos, Barraca, Travassos, Casal do Esporão, Forniçô, Figueiredo, Lamaçais, Outeiro, Taboadelo, Silvares, Cavernães, Mundão

**Figura F. 5:** Representação esquemática das rotas de sexta-feira



**Rota nº 7:** 44 km

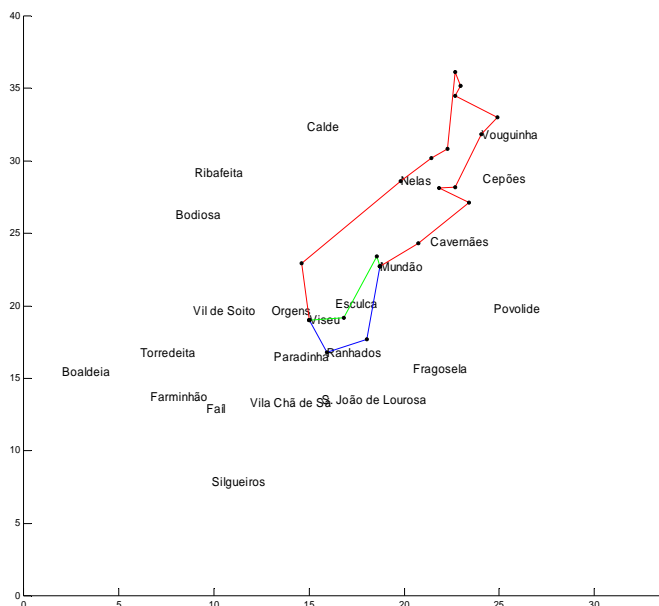
Viseu, Oliveira de Baixo, Bodiosa CF, Pereiras, Silgueiros, Aval, Bodiosa a Nova, Bodiosa a Velha, Casal, Lufinha, Gumiei, Ribeifeita, Seganhos, Lustosa, Folgosa, Mundão

**Rota nº 8:** 16 km;

Viseu, Alto de Abraveses, Pascoal, Moselos, Vila Nova do Campo, Campo, Bassar, Mundão

**Rota nº 9:** 19 km

Viseu, Vildemoinhos, Qt. de Belém, Canelas, Travassós de Orgens, Quintela, Orgens, Av. da Bélgica, Mundão



**Rota nº 10:** 14 km

Viseu, Ranhados, Póvoa de Sobrinhos, Mundão

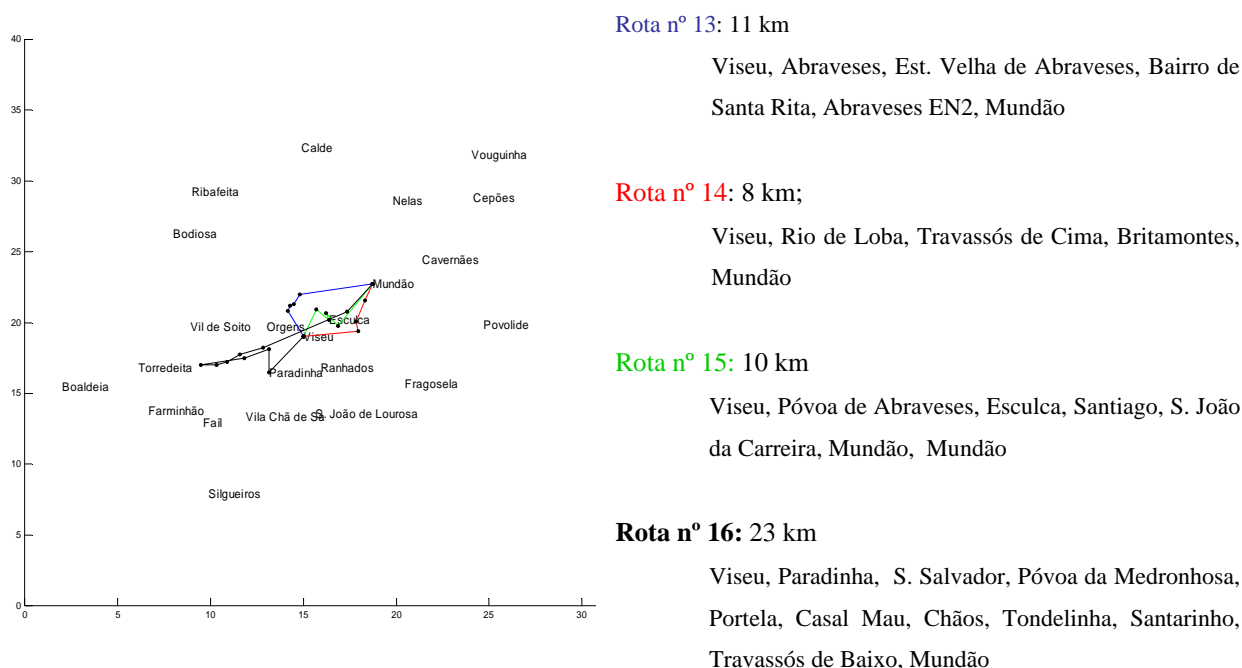
**Rota nº 11:** 51 km;

Viseu, Moure de Carvalho, Nelas, Couto de Cepões, Silvares, Zonho, Vila de um Santo, Sanguinhedo de Côta, Nogueira, Vouguinha, Canidelo, Bretelhe, Vila Chã, Vendas de Moita, Mundão

**Rota nº 12:** 9 km

Viseu, Gumirães, Nespereira, Mundão

**Figura F. 5 (continuação):** Representação esquemática das rotas de sexta-feira



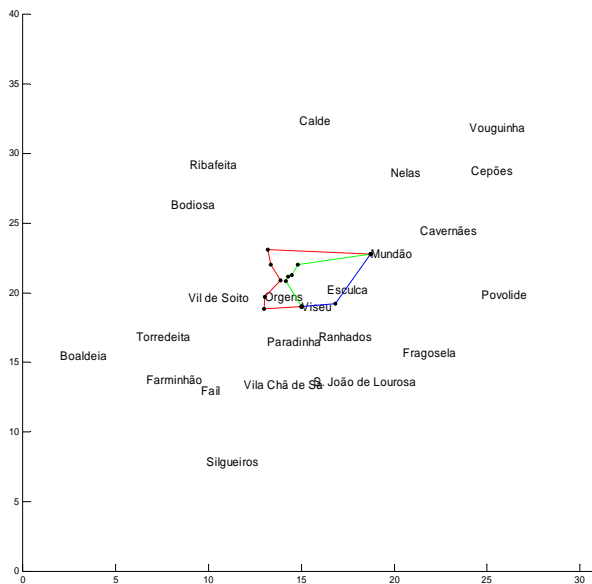
**Figura F. 5 (continuação):** Representação esquemática das rotas de sexta-feira

### Rotas do fim-de-semana

Nº rota	Contentores recolhidos	Duração da rota (minutos)	Rota
1	131	254	Vis, 140, depósito
2	113	236	Vis, 45, 43, 175, 174, 181, depósito
3	128	253	Vis, 176, 177, 144, 147, depósito
4	115	239	Vis, 44, 2, 3, 5, 4, 1, depósito
5	130	267	Vis, 76, 75, 74, depósito
6	135	264	Vis, 143, 141, 142, 137, 138, depósito
7	129	253	Vis, 178, 139, 136, depósito
<b>TOTAL</b>	<b>881</b>	<b>1766</b>	<b>Recolha de 27 locais</b>

**Tabela F. 8:** Solução de fim-de-semana

As rotas que definidas para o fim-de-semana podem ser efectuadas ao sábado, ao domingo, ou repartidas indiferentemente pelos dois dias. Actualmente existem quatro equipas a operar ao sábado e três ao domingo.



Rota nº 1: 32 km

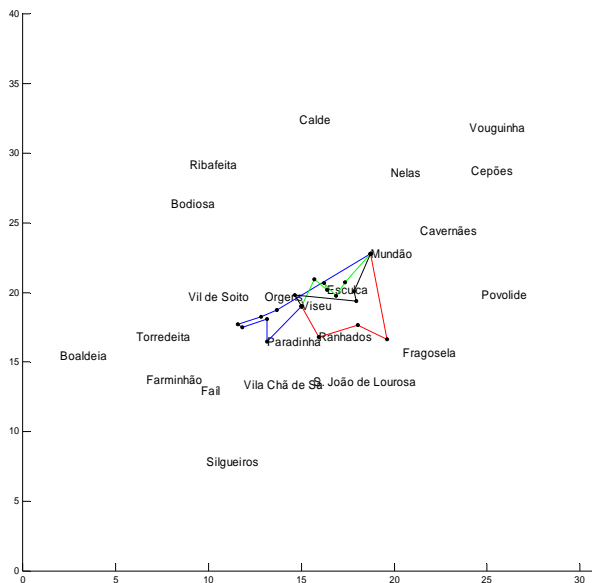
Viseu, Gumirães, Mundão

Rota nº 2: 11 km;

Viseu, Qt. de Belém, Orgens, Alto de Abraveses, Pascoal, Moselos, Mundão

Rota nº 3: 38 km

Viseu, Abraveses, Est. Velha Abraveses, Bairro de St. Rita, Abraveses EN2, Mundão



Rota nº 4: 38 km

Viseu, Paradinha, S. Salvador, Póvoa da Medronhosa, Tondelinha, Santarinho, Mundão

Rota nº 5: 11 km;

Viseu, Ranhados, Póvoa de Sobrinhos, Caçador, Mundão

Rota nº 6: 9 km

Viseu, Póvoa de Abraveses, Esulca, Santiago, S. João da Carreira, Travassós de Baixo, Mundão

Rota nº 7: Viseu, Av. da Bélgica, Rio de Loba, Santiago, Mundão

Figura F. 6 Representação esquemática das rotas do fim-de-semana