View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Repositório Científico do Instituto Politécnico de Viseu

Carvalho, Tadeu Fernandes & D'Ottaviano, Itala Maria Loffredo (2011).
Ferramentas Lógicas e Matemáticas Contemporâneas. *Millenium, 41* (julho/dezembro). Pp. 17-35.

FERRAMENTAS LÓGICAS E MATEMÁTICAS CONTEMPORÂNEAS

TADEU FERNANDES DE CARVALHO [1]
ITALA MARIA LOFFREDO D'OTTAVIANO [2]

[1] Docente do Centro de Ciências Exatas, Ambientais
e de Tecnologias da Pontifícia Universidade Católica de Campinas (PUC-Campinas)
e Diretor da Faculdade de Matemática do mesmo Centro – Brasil.
(e-mail: tadeu_fc@puc-campinas.edu.br)
[2] Docente de Lógica e Fundamentos da Matemática
e membro fundador do Centro de Lógica, Epistemologia
e História da Ciência do IFCH – UNICAMP – Brasil. (e-mail: itala@cle.unicamp.br)

Resumo
Neste artigo apresentamos um panorama objetivo do surgimento e das características da Análise Não- Standard (ANS) de Abraham Robinson, da Lógica Paraconsistente e do Cálculo Diferencial Paraconsistente (CDP) de Newton Carneiro Affonso da Costa, entre outras considerações acerca das ferramentas lógicas e matemáticas contemporâneas. Destacamos o CDP como um Cálculo ainda em construção, intimamente relacionado com teorias que preservam as mais importantes propriedades do Cálculo clássico e que, da mesma forma, apresenta inegáveis potencialidades para aplicações concretas. De facto, o Cálculo Paraconsistente estende o Cálculo tradicional e aproxima ideias presentes na Análise Infinitesimal de Newton e Leibniz e na Análise Não-Standard de Robinson, sob o uso da lógica paraconsistente e de teorias paraconsistentes de conjuntos (ver Batens *et al.*, 2000; Robinson, 1996; da Costa, 1963, 1993; e D'Ottaviano, 1990).

Palavras-chave: Cálculo; Cálculo Paraconsistente; Análise Não-Standard; Lógica Paraconsistente; Aplicabilidade.

Abstract
In this paper we present an objective view of the arrival and characteristics of Abraham Robinson's Non-Standard Analysis, Newton Carneiro Affonso da Costa's Paraconsistent Logic and fundamental aspects of the Paraconsistent Differential Calculus, among other considerations about the contemporary mathematical and logical tools. A Calculus

under construction, closely related to theories that preserve the most important properties of classic Calculus and that, in the same way, presents undeniable potential for practical applications. In fact, Paraconsistent Calculus extends traditional Calculus and approximates ideas and concepts from Newton's and Leibniz's Infinitesimal Analysis and Robinson's Non-Standard Analysis, under Paraconsistent Logic and paraconsistent set theories (see Batens *et al.*, 2000; Robinson, 1996; da Costa, 1963, 1993; e D'Ottaviano, 1990).

Keywords: Calculus; Paraconsistent Calculus; Non-Standard Analysis; Paraconsistent Logic; Applicability.

1. Ferramentas lógicas e matemáticas contemporâneas

Apresentaremos neste trabalho uma breve descrição das características e dos caminhos que conduziram à Análise Não-Standard (ANS) e ao Cálculo Diferencial Paraconsistente (CDP) - uma extensão da ANS baseada na lógica paraconsistente. Parafraseando Hoyle, 2007 (2.6 NON-STANDARD PROOFS), se todos os resultados da Análise clássica estão presentes na ANS e no CDP, estes são, de facto, necessários? Devemos estudá-los? A resposta é *sim*, sem margem para dúvidas. O Cálculo, como mostra a sua história, embora possa ser classificado como a mais importante das teorias matemáticas, foi motivado, principalmente, por necessidades da Física, especialmente a partir dos trabalhos de Isaac Newton (1642-1727). Assim, como se não bastassem os procedimentos mais simples que apresentam para substituir procedimentos mais complexos do Cálculo baseado na teoria de limites, introduzem resultados novos que não existem nesse Cálculo clássico. No caso do Cálculo Paraconsistente, proposto pelo Matemático e Filósofo brasileiro Newton da Costa, para o qual introduzimos diversos resultados originais, incluindo um Teorema de Transferência pela primeira vez apresentado com sua demonstração em um periódico, destacamos a presença e a relevância da Lógica Paraconsistente e da Teoria Paraconsistente de Conjuntos. Dentre os ensaios de aplicações envolvendo modelos matemáticos associados a sistemas lógicos e conjuntistas paraconsistentes, destacamos aplicações à robótica e ao controle de tráfego aéreo, além de ensaios em outras áreas, como na Medicina e no Direito.

Abraham Robinson, em outubro de 1973, publicou a 2ª Edição de Non-Standard Analysis - versão revista da obra em que divulga sua notável e homônima *Análise Não-Standard (ANS).* No prefácio dessa edição, Robinson destaca a opinião de Kurt Gödel sobre essa sua teoria, através da qual promove o retorno dos *infinitésimos* ao cenário matemático contemporâneo, em bases reconhecidamente sólidas. Em moderada oposição às críticas eventuais contra essa nova análise, Gödel exalta seu poder de simplificação na demonstração de teoremas, elementares ou não, e sua adequação para interagir com outras teorias matemáticas. Conclui, com o cuidado requerido por se tratar de uma teoria ainda não consolidada, haver boas razões para considerá-la a *análise do futuro*.

Concebida por Robinson em 1960 e apresentada nos *Proceedings of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam* (ver Robinson, 1996, reedição revista da 1ª edição publicada em 1966), a partir da intuição de que o uso da lógica matemática contemporânea poderia ser um bom caminho para superar as dificuldades do passado no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral com o uso do *infinitésimo* (e do *infinito*), a ANS corresponde a uma moderna teoria do contínuo, baseada em uma extensão própria do conjunto N dos números naturais - *N -, e uma extensão própria, não-arquimediana, do corpo R dos números reais - *R. A abordagem modelo-teorética adotada por Robinson, envolvendo estruturas complexas como os ultrafiltros, e uma linguagem de 1ª ordem com restrições adequadas ao tratamento lógico-matemático de *N e *R, estão no foco da desconfiança com que, como toda teoria inovadora, a ANS foi recebida pela comunidade matemática. Howard Jerome Keisler, da Universidade de Wisconsin, simplificou sua axiomática e excluiu o uso da lógica para produzir, na obra *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*, uma versão didaticamente mais adequada ao ensino do Cálculo Elementar (Keisler, 1976a e Keisler, 1976b).

Henson & Keisler (1986) consideram que muitas das críticas à sua abordagem da ANS revelavam a incompreensão dos autores quanto ao significado do *Princípio de Transferência*:

> Toda proposição válida para uma ou mais de uma função real, vale, também, para suas extensões hiper-reais naturais.

Paralelamente aos esforços de Keisler na busca por uma simplificação da linguagem da ANS, considerada por seu próprio criador, Abraham Robinson, uma conveniência, Nelson (1976) introduz a Teoria Interna de Conjuntos, ou TIC (originalmente, IST, abreviando *INTERNAL SET THEORY: A NEW APPROACH TO NONSTANDARD ANALYSIS).* Ali encontramos, nas páginas 1165 e 1166, os 3 axiomas que Nelson acrescenta aos axiomas da teoria ZFC para descrever essa teoria de conjuntos que, por sua vez, caracteriza sua versão da ANS.

A ANS possui dois tipos de conjuntos: os *internos*, equivalentes pela transformação * a conjuntos da Análise convencional, e conjuntos *externos*. Um exemplo comummente usado para ilustrar diferenças singelas entre R e de *R é o intervalo [0, 1]: sob a transformação *, obtemos *[0, 1] que difere de [0,1] por conter os números reais ordinários e também os "números" infinitesimais. Os conjuntos internos são aqueles que estão no escopo dos princípios de equivalência. Teoremas envolvendo conjuntos externos, por outro lado, não possuem equivalentes entre os conjuntos internos.

Há outros modelos para a ANS, como a Análise Não-Standard construtiva de Palmgrem (1995). Sua axiomática se assemelha à TIC de Nelson, mantendo os axiomas (T) e (I), mas substituindo (S) (standardization) pelo conceito dito *underspill* (se uma proposição é válida no modelo não-standard para todos os elementos não-standard, então deve haver pelo menos um elemento standard para o qual a mesma é válida).

Baty *et al.* (2007) - grupo de pesquisadores de Los Alamos National Laboratory, NASA e da Universidade de Utah -, no artigo *Nonstandard Analysis and Shock Wave Jump Conditions in a One-Dimensional Compressible Gas* e Baty *et al.* (2008), no artigo *Nonstandard Analysis and Jump Conditions for Converging Shock Waves*, destacam as limitações da análise clássica e das equações diferenciais para colaborar no tratamento matemático da vasta quantidade de fenômenos físicos existentes, especialmente aqueles cujo estudo requer o uso de equações não-lineares. Sintetizam, ao longo dos artigos, propriedades da ANS e desenvolvem, a partir das mesmas, as equações necessárias para justificar suas proposições. Induzem-nos a pensar que o melhor tratamento para problemas afins, por ora, deve envolver alguma matemática não-standard, que permita a manipulação de suas quantidades infinitesimais e de quantidades infinitas como se fossem quantidades finitas ordinárias. Queremos dizer com *matemática não-standard*, não apenas a ANS e sim, de modo geral, todas as teorias afins, que apresentam propriedades lógicas e matemáticas consistentes, cujo alcance extrapola os limites da matemática convencional. É o caso do CDP, um Cálculo não-convencional proposto por Newton Carneiro Afonso da Costa em 2000, tendo como teoria de conjuntos subjacente uma teoria de conjuntos paraconsistente, construída sobre seu cálculo de predicados paraconsistente de primeira ordem com igualdade $C_1^=$. Uma teoria que aproxima ideias da Análise Infinitesimal de Isaac Newton (1642-1727) e Leibniz (1644-1716) - fundamentadas na lógica e na metafísica - à Análise Não-Standard de Robinson, que reintroduz os infinitésimos na matemática contemporânea (ver Carvalho, 2004 e Carvalho & D'Ottaviano, 2006).
Concluiremos este trabalho enunciando o equivalente ao Princípio de Transferência da TIC de Nelson, por sua vez, assim enunciado:

Princípio de Transferência: Seja Px uma expressão interna relativa a x. Px é válida para todo x se, e somente se, Px é válida para todo x standard.

Informalmente, o princípio a que nos referimos estabelece, entre o Cálculo Paraconsistente e o Cálculo Clássico, que *toda proposição válida no primeiro é também válida no segundo* e reciprocamente. Dito de outra forma, o princípio de transferência afirma que a Análise Standard e a Análise Não-Standard, mesmo que semanticamente distintas, são sintaticamente equivalentes.

2. O Cálculo Paraconsistente de Predicados $C_1^=$ e a Teoria de Conjuntos CHU_1 de da Costa

As hierarquias de cálculos lógicos para o estudo de teorias inconsistentes e não-triviais, criadas por da Costa em 1963 - as hierarquias C_n, $C_n^=$, D_n, NF_n, $1 \leq n \leq \omega$, de cálculos proposicionais, cálculos de predicados de primeira ordem com igualdade, cálculos de descrições e teorias de conjuntos paraconsistentes, respectivamente – podem ser vistas, por exemplo, em da Costa (1963, 1974 e 1993), Batens (2000) e D'Ottaviano (1990).

Motivado pela teoria de conjuntos clássica *CHU* de Church (ver Church, 1974) da Costa (1986) introduz uma nova hierarquia de teorias de conjuntos CHU_n, $1\leq n \leq \omega$, também inconsistentes e aparentemente não-triviais, cujos cálculos de predicados subjacentes são os seus sistemas correspondentes $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$.

Baseado na teoria clássica de conjuntos ZF, da Costa (2000) introduz o *anel dos números hiper-reais*, denotado por $\mathcal{A}$ (uma simplificação de $\mathcal{A}$(I, a), válida porque o intervalo I e seu ponto interior, a, estão fixados) e o *quase-anel dos números hiper-reais estendidos,* $\mathcal{A}^*$. As estruturas algébricas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ são extensões do corpo R dos números reais standard e os elementos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ são chamados, respectivamente, de números hiper-reais e números hiper-reais generalizados, ou simplesmente g-reais. Baseado em $\mathcal{A}^*$, da Costa propõe a construção do Cálculo Diferencial Paraconsistente $\mathbb{P}$, cuja linguagem é a linguagem $L^=$ do sistema $C_1^=$ e cuja teoria de conjuntos subjacente é CHU_1 estendida à linguagem de CHU_1, nas quais lidamos com os elementos de $\mathcal{A}^*$.

Carvalho (2004) e Carvalho & D'Ottaviano (2006) estudam e desenvolvem o cálculo proposto por da Costa. Baseado em da Costa (2000), Carvalho introduz definições generalizadas para os conceitos básicos, prova diversos teoremas que generalizam importantes resultados clássicos e apresenta algumas aplicações desses resultados. Apresenta, entre outros, a definição de *função hiper-real*, $f\colon A \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$; *limite* de uma função hiper-real, *função contínua* e *função paracontínua* em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$; *derivada* de uma função hiper-real e a definição de *integral* de uma função em um intervalo [a, b]. Diversas extensões de resultados clássicos são demonstradas. Introduz, também, os conceitos de *superestrutura paraconsistente* sobre um conjunto X de átomos de CHU_1, e de *monomorfismo* entre superestruturas paraconsistentes, com base em Robinson e Zakon (1967) e Stroyan & Luxemburg (1976).

Na impossibilidade de desenvolvermos aqui essas hierarquias, apenas apresentamos alguns de seus objetos mais relevantes.

A linguagem $L^=$ dos sistemas paraconsistentes $C_n^=$ de da Costa, $1 \leq n \leq \omega$, tem como símbolos primitivos, variáveis proposicionais, os conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, e $\supset$ (ou $\rightarrow$), o símbolo de predicado de igualdade, os quantificadores existencial ($\exists$) e universal ($\forall$) e parênteses, mais famílias, predicados e funções.

As noções de fórmula e teorema, bem como as convenções gerais e notações são as usuais, como as adotadas por Kleene (1952).

O sistema $C_1^=$, por sua vez, constitui a lógica subjacente ao CDP.

A teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 pode ser vista como uma extensão da teoria de conjuntos *CHU* de Church (1974), que corresponde à teoria CHU_0 da hierarquia CHU_n, $0 \leq n \leq \omega$, de teorias de conjuntos introduzidas por da Costa em 1986. A relação de CHU_1 com o sistema *NF* de Quine e resultados sobre a relação entre a hierarquia de teorias de conjuntos paraconsistentes de da Costa e CHU_1 podem ser encontrados em da Costa (1998), Carvalho (2004) e da Costa & French (2003).

A lógica subjacente a CHU_1 é, também, a lógica paraconsistente $C_1^=$. Os axiomas da teoria CHU_1 são os axiomas de CHU_0, nos quais a negação usual $\neg$ é substituída pela negação forte $\sim_k$ de $C_1^=$, acrescidos de um axioma que assegura a existência do *complemento fraco* e um axioma que assegura a existência das relações de Russell em CHU_1.

A linguagem de CHU_1 é a *linguagem do sistema ZF de Zermelo-Fraenkel, com o símbolo de descrição* ι, que tanto pode ser introduzido contextualmente, como através de um símbolo primitivo da linguagem $L^=$ estendida.

A Lógica Paraconsistente, utilizada em um contexto associado a graus de crença decorrentes de evidências, é caracterizada como Lógica Paraconsistente Anotada (LPA). A LPA encontra cada vez mais aplicações em Sistemas de Programação, Circuitos de Controle e Inteligência Artificial, entre outras áreas que lidam com incertezas, contradições e paradoxos. Exemplo disso foi dado por Silva Filho (1999), Tese de Doutorado. Esse trabalho, denominado "Métodos de Aplicações da Lógica Paraconsistente Anotada de Anotação com dois valores LPA2v com construção de Algoritmo e Implementação de Circuitos Eletrônicos", resultou na construção do robô Emmy, primeiro no mundo com controle associado à Lógica Paraconsistente, desenvolvido no Instituto Politécnico da USP – Universidade de São Paulo. Bonesso e

Silva Filho (2007, pp.19-21), apresentam, por sua vez, um simulador de robôs com controle paraconsistente.

O robô Emmy

Figura 1 – Robô Móvel Autônomo Emmy – primeiro Robô com Controle Lógico Paraconsistente[1]

[1] O robô móvel autônomo Emmy consiste de uma plataforma móvel de alumínio de formato circular de 30 cm de diâmetro e 60 cm de altura especialmente projetada para pesquisas de aplicação das lógicas paraconsistentes anotadas em Robótica. O robô foi projetado em módulos sobrepostos separados por função de cada um deles no sistema de controle. Desta forma é permitida uma fácil visualização da ação de cada módulo no controle de movimentação do robô. A Figura 2 mostra as partes principais do robô Emmy onde são destacados os módulos que compõem todo o sistema de controle - João Inácio da Silva Filho é Coordenador do GLPA - Grupo de Lógica Paraconsistente Aplicada e membro do Grupo de Lógica e Teoria da Ciência do IEA - Instituto de Estudos Avançados da USP. O Professor Da Silva Filho, em 1999, doutorou-se em Engenharia Eletrica pela POLI/USP na área de Sistemas Digitais, e em 1997 tinha feito mestrado em Microeletronica pela mesma Instituição. Em 2009 fez seu Pós-doutoramento no INESC – Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores do Porto, em Portugal. Criador do primeiro Robô a funcionar com Controlador Lógico Paraconsistente (Robô Emmy), atualmente se dedica às pesquisas sobre aplicações das Redes Neurais Artificiais Paraconsistentes em Sistemas Especialistas e Robótica.

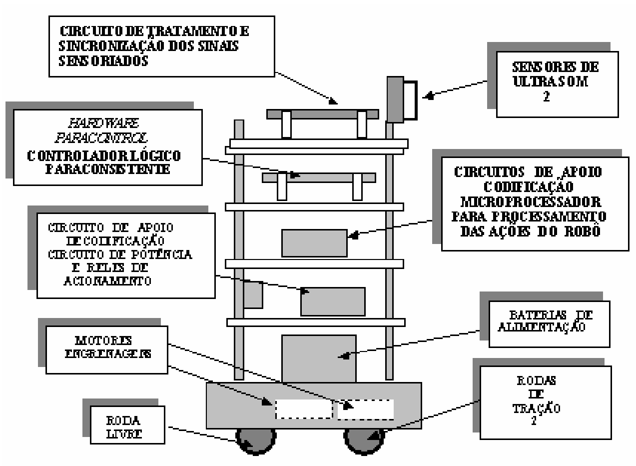

Figura 2 - Destaque das partes principais do robô Emmy

Da Costa & Abe (2000) tratam do significado e relevância das *cadeias semânticas*, *frames* e *modelagem de sistemas*, em particular, das possibilidades de aplicação da lógica na descrição e representação do conhecimento no âmbito da ciência computacional. Quando se referem à lógica, querem dizer os novos sistemas lógicos, ou sistemas heterodoxos de lógicas não-clássicas, que surgiram a partir do início do século XX, como resultado de investigações sobre a natureza e indiscutibilidade dos princípios aristotélicos. E destacam, naturalmente, os *sistemas paraconsistentes*, cujo fundador é, conforme anteriormente dito, o seu primeiro autor, Newton da Costa.

Outro trabalho recente, desenvolvido em Los Angeles e que ganhou destaque na mídia Norte Americana, ilustra como teorias lógicas e matemáticas podem interagir com outras teorias para, juntas, enfrentarem problemas concretos, cuja solução pode resultar em melhores condições de vida para toda uma população. Trata-se de uma pesquisa voltada à segurança pública, que contou com a atuação de estatísticos, matemáticos, antropólogos e criminalistas da Universidade da Califórnia, e que ganhou destaque na *The New York Times Magazine* - 10th Annual Year in Ideas e na *DISCOVER Magazine* - Top 100 Stories of 2010:

> *UCLA Mathematics collaborative research that uses sophisticated mathematics in predictive policing made The New York Times Magazine 10th Annual Year in Ideas and DISCOVER Magazine Top 100 Stories of 2010. Two different models were developed by UCLA mathematicians and statisticians in conjunction with anthropologists and criminologists. Work by former UCLA Math postdoc George Mohler (Santa Clara University), UCLA Math Assistant Adjunct Professor Martin Short, UCLA anthropologist Jeffrey Brantingham, UCLA Statistics Associate Professor Frederic Schoenberg and criminologist George Tita (UC Irvine) on self-exciting point process models was included in The Times' selection of ingenuity and innovation. Joint work by UCLA Math Professor Andrea Bertozzi, Short and Brantingham that applies bifurcation theory to crime hot spot models was number 60 (Fighting Crime with Mathematics) on the DISCOVER top stories list.*

As pesquisas aqui relatadas ilustram como os grandes avanços científicos e tecnológicos observados nas últimas décadas fomentaram o surgimento de novas teorias físicas, lógicas e matemáticas e fortaleceram os vínculos entre a academia e centros avançados de pesquisa. Dessa aproximação surge, em decorrência de mais pesquisas, a esperança de novas e maiores conquistas sociais.

Na sequência apresentaremos, embora de forma sucinta, aspectos básicos do CDP. Outras versões para o Cálculo Infinitesimal, tendo como lógicas subjacentes sistemas lógicos não clássicos, distintos da lógica paraconsistente, foram sugeridos nas duas últimas décadas, como os de Chris Mortensen (ver Mortensen**,** 1995, Capítulo 5, em que diferentes lógicas são utilizadas em abordagens não-clássicas dessa teoria). Bell (2008) apresenta, na *Smooth Infinitesimal Analysis* (SIA), outra interessante abordagem do Cálculo com o uso dos infinitésimos, em substituição à teoria de limites. Diferentemente da Análise Não-Standard e analogamente ao Cálculo Paraconsistente, mas adotando a lógica intuicionista sem a *lei do terceiro excluído* (toda proposição lógica deve ser verdadeira ou falsa), a SIA se mostra uma teoria de grande interesse por seus aspectos formais e sua aplicabilidade.

3. Cálculo Diferencial Paraconsistente: um novo modelo para o Cálculo Infinitesimal, tendo a lógica paraconsistente como lógica subjacente

Na construção de da Costa para o CDP, a extensão $\mathcal{A}$ do corpo $\mathbb{R}$ dos números reais constitui um contínuo não-arquimediano, sem números infinitos, e a extensão $\mathcal{A}^*$ do mesmo corpo constitui um contínuo não-arquimediano com infinitésimos e infinitos (ver da Costa *et al*., 1998). Simplificando, $\mathbb{R}$ compreende o conjunto dos números reais e certas estruturas algébricas que tanto explicitam, quanto permitem operar com suas melhores propriedades, no contexto de outras teorias da matemática e da física. A extensão $\mathcal{A}$, embora guarde muita semelhança com $\mathbb{R}$, tem como importante diferença, a presença de objetos menores do que qualquer número real não nulo, que são os infinitésimos. Já $\mathcal{A}^*$, além dos infinitésimos, possui objetos infinitamente grandes, maiores do que qualquer número real.

3.1. O anel $\mathcal{A}$ dos números hiper-reais

É possível, a partir dos elementos apresentados daqui em diante, ter uma visão abrangente dos objetos lógico-matemáticos que tomam parte na construção do Cálculo sobre uma extensão do conjunto dos reais contendo números infinitesimais, além dos próprios reais, e do conjunto estendido deste pela inclusão dos números infinitos. Nossa intenção, no entanto, é, principalmente, divulgar o assunto entre leitores de diferentes perfis, incluindo aqueles interessados especialmente em seus aspectos conceituais - que poderão aprofundá-lo com a leitura de textos mais adequados para isso, incluindo os que indicamos nas Referências - e aqueles especialmente interessados em conhecer sua aplicabilidade.

Entre os principais objectos da extensão do conjunto dos números reais, sobre os quais o Cálculo de Newton pode ser estendido a novos modelos clássicos, destacam-se os que apresentamos a seguir.

Sejam **I** um intervalo real fixado e **a** um elemento do interior de I. Assim definimos os primeiros e mais significativos elementos da extensão $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$:

- Uma *variável infinitesimal* é uma função real $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Esta representação formal pode ser assim traduzida: f é uma aplicação entre um subconjunto I de $\mathbb{R}$ e o próprio $\mathbb{R}$, que gera "números" cada vez menores, à medida em que x se aproxima mais e mais de um ponto fixo **a** de I. Como ocorre com as funções reais ordinárias, as variáveis infinitesimais também podem ser usadas na interpretação de fenômenos numéricos, nos casos, porém, em que envolvam as quantidades infinitesimais. Denotamos o conjunto das variáveis infinitesimais por *V*.

- O *conjunto dos números hiper-reais*, denotado por $\mathcal{A}$, é assim definido:

$$\mathcal{A} =_{\text{def}} \{\langle r, f\rangle : r \in \mathbb{R} \text{ e } f \in V\}.$$

Os números do conjunto $\mathfrak{A}$ são também chamados *números reais generalizados*, ou, simplesmente, *g-reais*. Todo número real r, $r \in \mathbb{R}$, pode ser identificado com o hiper-real da forma $\langle r, 0\rangle$, que é dito um *número real standard.*

- Um *infinitésimo* é qualquer número hiper-real da forma $\langle 0, f\rangle$, em que f é uma variável infinitesimal.

Para cada $r \in \mathbb{R}$, o conjunto dos hiper-reais da forma $\langle r, f\rangle$ é dito *mónada* de r, denotado por [r]. A mónada do zero é o conjunto constituído pelos infinitésimos.

- A *igualdade*, ou *identidade*, de dois números hiper-reais de $\mathfrak{A}$, denotada por "=", é definida por:

$$\langle r, f\rangle = \langle s, g\rangle \text{ se, e somente se, } r = s \text{ e } f = g.$$

- A *adição* (+) e a *multiplicação* (×) de dois números hiper-reais de $\mathfrak{A}$, são definidas por:

(i) $\langle r, f\rangle + \langle s, g\rangle =_{def} \langle r + s,\ f + g\rangle$; (ii) $\langle r, f\rangle \times \langle s, g\rangle =_{def} \langle rs, rg + fs + fg\rangle$.

Para qualquer hiper-real $\langle r, f\rangle$, podemos escrever: $\langle r, f\rangle = \langle r, 0\rangle + \langle 0, f\rangle$.

Pode-se demonstrar que a estrutura $\langle \mathfrak{A}, +, \times, 0, 1\rangle$, em que "0" e "1" representam, respectivamente, o hiper-real nulo $\langle 0, 0\rangle$ e o hiper-real $\langle 1, 0\rangle$, constitui o que na matemática se classifica como anel comutativo com unidade.

A estrutura de corpo $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ pode ser vista como um subanel de $\langle \mathfrak{A}, +, \times, 0, 1\rangle$, pela identificação de todo par da forma $\langle r, 0\rangle$ com o número real r.

A relação de ordem <, de $\mathbb{R}$, pode ser estendida ao anel $\mathfrak{A}$, onde é não-linear e permite estabelecer as seguintes relações entre números hiper-reais:

- $\langle r, f\rangle < \langle s, g\rangle$ se, e somente se, $r < s$, ou $r = s$ e $f(x) < g(x)$, $\forall x \in I$.

- Carvalho (2004)). A *ordem* de um infinitésimo qualquer, $\langle 0, g\rangle$, relativamente a um infinitésimo $\langle 0, f\rangle$, é definida por:

a) $\langle 0, f\rangle$ e $\langle 0, g\rangle$ possuem *mesma ordem* se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = b$, sendo b um número real standard diferente de zero;

b) A ordem de $\langle 0, f\rangle$ é *superior* à de $\langle 0, g\rangle$ se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;

c) $\langle 0, f\rangle$ é de *ordem* $k \in \mathbb{N}$ relativamente a $\langle 0, g\rangle$ se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{[g(x)]^k} = b$, para b um número real standard diferente de zero.

Dada uma função racional qualquer f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esta pode ser facilmente estendida a uma *hiperfunção* f: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Ainda, dado um número hiper-real $r \in \mathcal{A}$, como $r = \langle r', g\rangle = \langle r', 0\rangle + \langle 0, g\rangle$, podemos escrever $f(r) = f(r' + \varepsilon)$, sendo f, assim, uma função de r' e de $\varepsilon = \langle 0, g\rangle$.

Podemos expressar naturalmente a noção de limite da análise clássica na linguagem dos infinitésimos, usando-a para caracterizar uma variável infinita:

Dada uma função hiper-real f: $B \subseteq \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\lim\limits_{x\to r} f(x) = b$ se, e somente se, $x \in [r]$ implica que $f(x) \in [b]$. Ou seja, dizer que o número hiper-real b é o limite dos valores de f em x, quando x tende ao número hiper-real r, equivale a dizer que f(x) será um elemento da mónada de b sempre que x for um elemento da mónada de r.

Uma variável infinita é uma função v: $I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$.

Podemos, agora, definir os objetos que compõem a extensão $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{A}$:

- Um *número hiper-real infinito* é um par da forma $\langle v, 0\rangle$, em que v é uma variável infinita.

- O *conjunto dos números hiper-reais estendidos*, denotado por $\mathcal{A}^*$, é definido por: $\mathcal{A}^* = \{a: a \in \mathcal{A}$ ou a é um hiper-real infinito$\}$.

As operações de adição e multiplicação e a relação de igualdade (identidade) de $\mathcal{A}$ podem ser estendidas a $\mathcal{A}^*$, de tal modo que a estrutura $\langle \mathcal{A}^*, +, \times, 0, 1\rangle$ conserve algumas das propriedades algébricas importantes do hiperanel $\langle \mathcal{A}, +, \times, 0, 1\rangle$. Como, porém, falham algumas cláusulas da definição de anel, nós a denominamos um *quase-anel.* Através de $\mathcal{A}^*$ é que delineamos uma teoria paraconsistente para o cálculo diferencial.

3.2. O Cálculo Diferencial Paraconsistente

O CDP $\mathbb{P}$ de da Costa, introduzido por Carvalho (2004), onde são apresentados os principais conceitos que aparecerão à frente, é interpretado na estrutura clássica $\mathcal{A}^*$. Este é *não-trivial* - mas *inconsistente* -, se a análise clássica for consistente.

A *linguagem* L de $\mathbb{P}$ é a linguagem $L^=$ de $C_1^=$, estendida à linguagem de CHU_1, com símbolos funcionais; constantes especiais para nomear os indivíduos da estrutura $\mathcal{A}^*$; o predicado <; as operações de $\mathcal{A}^*$; e três espécies de variáveis individuais, para denotarem, respectivamente, hiper-reais finitos - r, s, ... -, infinitésimos - δ, ε, ... -, e infinitos.

A lógica subjacente a $\mathbb{P}$ é o cálculo paraconsistente de predicados de primeira ordem com igualdade $C_1^=$, e a teoria de conjuntos subjacente é a teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 de da Costa. Omitimos, em favor da fluência do texto, alguns complementos lógicos que justificam propriedades do Cálculo Diferencial Paraconsistente, como a *C_1 – valoração* $v : \mathfrak{F} \rightarrow \{0, 1\}$, que é uma função do conjunto $\mathfrak{F}$ de fórmulas de C_1 em $\{0,1\}$. De toda forma, precisamos caracterizar o predicado " ≡ " que representa um predicado de igualdade generalizado, necessário para a comparação de *números* que diferem entre si apenas *infinitesimalmente*.

Vejamos algumas de suas principais definições.

- O predicado de *igualdade generalizada*, ou *identidade generalizada*, denotado por " ≡ ", é definido por: $t_1 \equiv t_2 =_{def} t_1 - t_2 = \varepsilon$, com t_1 e t_2 termos da linguagem, ε infinitésimo, e = o predicado primitivo de igualdade de L.

Definimos $\neg(t_1 \equiv t_2)$, o que denotamos por $t_1 \not\equiv t_2$, por: $t_1 \not\equiv t_2 =_{def} t_1 \neq t_2$.

Um conceito de valoração paraconsistente pode ser estendido à linguagem L.

As propriedades de uma C_1- valoração incluem:

$v(t_1 = t_2) = 1$, se $t_1 = t_2$ é válida em $\mathcal{A}^*$ e $v(t_1 = t_2) = 0$, em caso contrário;

$v(t_1 < t_2) = 1$, se $t_1 < t_2$ é válida em $\mathcal{A}^*$ e $v(t_1 < t_2) = 0$, em caso contrário;

$v(t_1 \equiv t_2) = 1$, se $t_1 - t_2 = \varepsilon$ é válida em $\mathcal{A}^*$, com ε infinitesimal e $v(t_1 \equiv t_2) = 0$, em caso contrário;

Se $t_1 \not\equiv t_2$ (isto é, $\neg(t_1 \equiv t_2)$), $v(t_1 \not\equiv t_2) = 1$, se $t_1 \neq t_2$ (isto é, $\neg(t_1 = t_2)$) é válida em $\mathcal{A}^*$ e $v(t_1 \not\equiv t_2) = 0$, em caso contrário.

Observação. A relação de ordem **<** é *quase-linear* em $\mathcal{A}$ e em $\mathcal{A}^*$, em relação à identidade $\equiv$, o que podemos caracterizar pela fórmula seguinte, para t_1 e t_2 termos quaisquer: $(t_1 < t_2) \vee (t_2 < t_1) \vee (t_1 \equiv t_2)$.

- Uma *função hiper-real* (ou *hiperfunção*) é uma função f cujo domínio é um subconjunto do conjunto $\mathcal{A}$ de hiper-reais, com valores em $\mathcal{A}^*$: $f: B \subseteq \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$.

- Uma *sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais* é uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número real $f(n) = x_n$.

- Uma *sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$* de *números hiper-reais*, ou *hipersequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, é uma *hiperfunção* $f: \mathbb{N} \to \mathcal{A}^*$, com domínio no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e contradomínio no quase-anel $\mathcal{A}^*$, que a cada número natural n associa um número hiper-real $f(n) = a_n$ (com $a_n = \langle r_n, f_n \rangle$, ou $a_n = \langle u_n, 0 \rangle$, sendo u_n uma variável infinita).

Temos na análise clássica, a seguinte definição para convergência de uma sequência de números reais:

- Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais converge para um número real r se, e somente se, para todo número real $\varepsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que, para todo $n > n_0$, temos que $|a_n - r| < \varepsilon$.

Podemos ver em Carvalho (2004) uma definição de valor absoluto em $\mathcal{A}$, a sua extensão a $\mathcal{A}^*$ e a generalização desta e de outras propriedades de sequências reais para hipersequências ($\langle r_n, f_n \rangle$).

A definição de *limite* de uma função hiper-real f(x), quando x tende a um número real standard, é a usual.

- Dada uma função hiper-real $f: B \subseteq \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ e números reais standard r e b, temos: $\lim\limits_{x\to r} f(x) = b$ se, e somente se, $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < |x - r| < \delta \to |f(x) - b|) < \varepsilon$.

O teorema seguinte faz uso do predicado de igualdade generalizado apresentado acima, e ilustra como a linguagem infinitesimal é mais simples do que a linguagem clássica dos ε's e δ's.

- **(Teorema)** Dada uma função hiper-real f: $B \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$, temos que:

  $\lim_{x \to r} f(x) = k$ se, e somente se, $(\forall x \in B)\ ((x \equiv r) \rightarrow (f(x) \equiv k))$.

Podemos introduzir, na linguagem L, os conceitos de limite de uma função hiper-real nos casos em que x, ou f(x), tende para infinito.

- Dada uma função hiper-real f: $B \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ e um real standard b, temos:

  $\lim_{x \to \langle u, 0\rangle} f(x) = b$ se, e somente se, $(\exists\ \langle v, 0\rangle \in \mathcal{A}^*)\ (\forall x)\ ((|x| > |\langle v, 0\rangle|) \rightarrow (f(x) \equiv b))$.

Os outros casos de limites infinitos são definidos analogamente.

- Uma função hiper-real f: $U \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ é *contínua* em um hiper-real $\langle r, g\rangle \in U$ se, e somente se,
  $(\forall\ \langle s, h\rangle \in U)\ (\langle r, g\rangle \equiv \langle s, h\rangle \rightarrow f(\langle r, g\rangle) \equiv f(\langle s, h\rangle))$. Caso contrário, f é *descontínua* em $\langle r, g\rangle$.

- A *derivada* de uma função hiper-real f: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$, em um número real standard r, denotada por f'(r), é um número real standard, denotado por f'(r), tal que $f(r + \varepsilon) - f(r) = f'(r) \times \varepsilon + \delta$, onde ε é um infinitésimo arbitrário, e δ é um infinitésimo com ordem superior à de ε, do qual depende.

Observação. De acordo com a definição, D será o valor da derivada de f em um número real standard r, isto é, D = f'(r), se tivermos $f(r + \varepsilon) - f(r) \equiv D \times \varepsilon$.

A presença das quantidades infinitesimais no anel $\mathcal{A}$, e das quantidades infinitesimais e quantidades infinitas no quase-anel $\mathcal{A}^*$, e as propriedades da teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1, permitem que consideremos a "função" delta como um objeto do CDP, como no exemplo abaixo, introduzido por Carvalho (2004, pp. 130-135):

$$\psi_j(t - 1/j) = \begin{cases} 0, \text{ se } t \in (-\infty, a - \frac{1}{j}] \cup [a - \frac{1}{j^2}, a + \frac{1}{j^2}] \cup [a + \frac{1}{j}, +\infty), \\[2ex] \dfrac{t j^3}{2 - \frac{3}{j}} - \dfrac{j^3 (a - \frac{1}{j})}{2 - \frac{3}{j}}, \text{ se } t \in [a - \frac{1}{j}, a - \frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}], \\[2ex] \dfrac{j}{2 - \frac{3}{j}}, \text{ se } t \in [a - \frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}, a - \frac{1}{j^2}] \cup [a + \frac{1}{j}, a + \frac{1}{j} - \frac{1}{j^2}], \\[2ex] \dfrac{- t j^3}{2 - \frac{3}{j}} + \dfrac{j^3 (a + \frac{1}{j})}{2 - \frac{3}{j}}, \text{ se } t \in [a + \frac{1}{j} - \frac{1}{j^2}, a + \frac{1}{j}]. \end{cases}$$

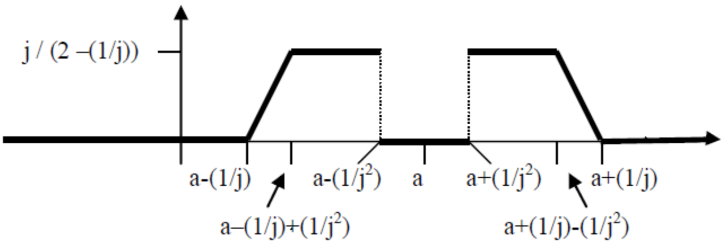

Figura 3. Gráfico de ψ_j

Embora não possamos detalhar aqui os objetos que comparecem na fórmula e na Figura 3 observamos que no modelo proposto as funções ψ_j representam aproximações para funções de probabilidade associadas a uma variável aleatória t, utilizada para a descrição de algum fenômeno quantificado em CHU_1- Teoria Paraconsistente de Conjuntos anteriormente vista. Quando t e j^2 são hiper-reais infinitos de mesma ordem, podemos considerar que ψ_j torna-se equivalente a uma função δ_j, assim definida:

$$\delta_j(t - a) = \begin{cases} 0, \ \text{se } t \leq a - 1/j, \ \text{ou } \ t \geq a + 1/j, \\ j/2, \ \text{se } \ a - 1/j \leq t \leq a \ + 1/j. \end{cases}$$

Obtemos daí, como caso limite das funções δ_j, uma espécie de extensão da função delta em $\mathcal{A}^*$, que denotamos por δ^* e que apresenta um comportamento inconsistente em uma região em torno do ponto a, ou, conforme Carvalho (2004, p. 94), região difusa denotada por **?a**. Neste exemplo comparecem diversas teorias, entre clássicas e não-clássicas, particularmente a Lógica, a Teoria de Conjuntos e o Cálculo paraconsistentes.

4. Considerações Finais.

O CDP estende, assim como ocorre com a ANS, os limites do Cálculo Diferencial e Integral Clássico, uma vez que pode lidar com problemas envolvendo quantidades infinitesimais e quantidades infinitas. Nos limites dos problemas clássicos, porém, podemos considerar que se equivalem. É o que garante o chamado "Teorema de Transferência", que existe entre o Cálculo usual e a ANS e, igualmente, entre o Cálculo usual e o CDP, pelo qual *uma fórmula T é um teorema do Cálculo Diferencial Clássico se, e somente se, existe uma "interpretação" de T que é um teorema do Cálculo Diferencial Paraconsistente*. Motivado pela Análise Não-Standard de Robinson (1996) (edição revista da primeira edição, publicada em 1966), Robinson & Zakon (1967) e Stroyan & Luxemburg (1976), seu enunciado e demonstração, cujo detalhamento foge ao escopo do presente trabalho, podem ser encontrados em Carvalho (2004, pp. 177-80). Podemos, porém, acrescentar que na abordagem semântica e infinitesimal de Robinson e seguidores, $\mathbb{R}$ continua simbolizando o Universo e a construção de sua extensão $\mathbb{R}^*$ tem como objectivo principal estudar, com igual ou maior eficiência e maior simplicidade, factos relevantes desse universo. No desenvolvimento do CDP, a construção das extensões $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ sobre a teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1, tendo a lógica paraconsistente $C_1^=$ como lógica subjacente, preserva esta ideia. Alternativamente, poderíamos ter optado por outras teorias lógicas e conjuntistas não-clássicas, mas a opção pelas teorias de da Costa pareceu-nos a mais segura. O CDP, embora ainda em construção, já se encontra desenvolvido o suficiente para ser avaliado em ensaios teóricos e modelos concretos, tendo o caminho aberto para ser estendido ao *Cálculo Integral Paraconsistente* e às *Equações Diferenciais Paraconsistentes*. Com isso, ampliar-se-ia o conjunto de ferramentas matemáticas aplicáveis à modelagem de problemas de diversas áreas, não necessariamente das ditas ciências exactas, que não encontrem na Análise Clássica e na Análise Não-Standard, o suporte adequado. Como no caso das pesquisas desenvolvidas no Brasil e em outros países, que vão da área médica e do Direito, à robótica e à física contemporânea, apontando para o crescimento de sua presença nas áreas científicas e tecnológicas do novo milénio.

Cabe observar, aqui, que a Lógica Clássica não foi, e provavelmente jamais o será, derrogada por outros sistemas lógicos, pois se adequa muito bem à maioria dos fenômenos físicos e naturais mais conhecidos. Podemos mesmo dizer que embora seja uma ferramenta tão antiga e tão bem conhecida, poderia ser mais e melhor utilizada. Há problemas, porém, que só podem ser bem conhecidos e satisfatoriamente resolvidos com o uso combinado de ferramentas inovadoras, mesmo que não plenamente desenvolvidas, como é o caso da Lógica Paraconsistente e de teorias afins, como a Teoria Paraconsistente de Conjuntos e o Cálculo Diferencial Paraconsistente. Um bom exemplo de centro de pesquisa inserido nessa nova realidade é o ***The Logic Systems Laboratory***, *School of Computer and Communication Sciences, Swiss Federal Institute of Technology - Lausanne*, cujas pesquisas vão do aperfeiçoamento do hardware convencional ao estudo do robô inspirado na complexa neurofisiologia animal.

Finalmente, registramos que algumas das ideias aqui apresentadas foram discutidas pelos autores em congressos nacionais e internacionais, como o "2nd Indian International Conference on Artificial Intelligence, 2005"; "XIV Encontro Brasileiro de Lógica, 2006, Itatiaia"; "XIII Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática, 2006, Oaxaca, México"; "Workshop Semantics and meanings, 2005, Campinas, CLE-UNICAMP" e "CLE/AIPS Event – Science, Truth and Consistency, 2009, UNICAMP, Campinas".

REFERÊNCIAS BLIBLIOGRÁFICAS

- Batens *et al.* (Eds.). (2000). *Frontiers of Paraconsistent Logic* (Studies in Logic and Computation), Baldock: Research Studies Press.
- Baty, R. S. *et al.* (2007). Nonstandard Analysis and Shock Wave Jump Conditions. In: a One-Dimensional Compressible Gas. *Aeroacoustics Branch, NASA Langley Research Center, Hampton*.
- Baty, R. S *et al.* (2008). Nonstandard Analysis and jump conditions for converging shock waves. *J. Math. Phys*. (49).
- Bell, J. L. (2008). *A Primer of Infinitesimal Analysis*. (2ª ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Bonesso, G. A. & Silva Filho, J. I. (2007). O simulador de Robôs com controle Lógico Paraconsistente - Para - Sim. *Revista Seleçao Documental: Inteligência Artificial e novas Tecnologias*, (5), (pp. 19-2) .
- Carvalho, T. F. (2004). *Sobre o cálculo diferencial paraconsistente de da Costa*. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas: Tese de Doutorado.
- Carvalho, T. F. & D'Ottaviano, I. M. L. (2006). Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. *Educação matemática pesquisa*, (8) - n.º 1. Revista de Estudos pós-graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Church, A. A. (1974). Formulation of the simple theory of types. *Journal of Symbolic Logic*, (5), (pp.56-68).

- Da Costa, N. C. A. (1963). *Sistemas formais inconsistentes (Inconsistent formal systems).* Tese – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- Da Costa, N. C. A. (1986). On paraconsistent set theory**.** *Logique et Analyse*, (115), (pp.361-371).
- Da Costa, N. C. A. (1993). *Sistemas formais inconsistentes (Inconsistent formal systems).* Curitiba: Editora UFPR.
- Da Costa, N. C. A. (2000). Paraconsistent mathematics. In: I World Congress on Paraconsistency, 1998, Ghent, Belgium. *Frontiers in paraconsistent logic:* proceedings. Edited by D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, J. P. van Bendegen. London: King's College Publications, (pp. 165-179).
- Da Costa, N. C. A. *et al.* (1998). *Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos*. Campinas: Unicamp / CLE. (Coleção CLE, v. 23).
- Da Costa, N. C. A. & Abe, J. M. (2000). Paraconsistência em informática e inteligência artificial. *Estud. av.,* v. 14, n.º 39, Aug. 2000, São Paulo.
  Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142000000200012&lng=en&nrm=iso>. Access on 30 jan. 2011. http://dx.doi.org/10.1590/S0103-40142000000200012.
- Da Costa, N. C. A. & French, S. (2003). *Science and Partial Truth: a unitary approach to models and scientific reasoning.* Oxford: Oxford University Press.
- D'Ottaviano, I. M. L. (1990). On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. *The Journal of Non-Classical Logic*, (7), (pp. 89-152).
- Henson, C. W. & Keisler, H. J. (1986). On the Strength of Nonstandard Analysis, *The Journal of Symbolic Logic*, (51), n.º 2, (pp. 377-386).
- Hoyle, J. W. (2007). *Infinitesimals in modern mathematics*. Mathematical Association of America Seaway Section Conference, Rochester, New York October (20).
- Keisler, H. J. (1976a). *Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt.
- Keisler, H. J. (1976b). *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach.* Boston: Prindle, Weber & Schmidt.
- Kleene, S. C. (1952). *Introduction to metamathematics*. Amsterdam: North Holland; New York: Van Nostrand.
- Mortensen, C. (1995). *Inconsistent mathematics*. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers, Mathematics and its Applications, (312).
- Nelson, E. (1976). Internal Set Theory: a new approach to non-Standard Analysis, *Bulletin of American Mathematical Society*, (83), n.º 6.
- Palmgren, E. (1995). A constructive approach to nonstandard analysis**.** *Ann. Pure and Appl. Logic* (73), (pp. 297-325).
- Robinson, A. (1996). *Non-standard analysis*. (Reviewed re-edition of the 1st edition of 1966). Princeton: Princeton University Press.
- Robinson, A. & Zakon, E. (1967). A set theoretical characterization of enlargements. *Applications of model theory to algebra, analysis and probability*. C.I.T, Holt, Rinehart, and Winston, (pp. 109-122).
- Silva Filho, J. I. (1999). *Métodos de Aplicações da Lógica Paraconsistente Anotada de Anotação com dois valores LPA2v com construção de Algoritmo e Implementação de Circuitos Eletrônicos*. Tese de Doutorado. *EPUSP*, São Paulo.
- Stroyan, K. D. & Luxemburg, W. A. J. (1976). *Introduction to the theory of infinitesimals*. New York: Academic Press.

Recebido: 14 de fevereiro de 2011.

Aceite: 9 de setembro de 2011.