

Rocha, J. (1999). Um modelo para o sistema presa-predador. *Millenium*, 16

---

---

## UM MODELO PARA O SISTEMA PRESA-PREDADOR

**JORGE ROCHA**

Departamento de Matemática Pura

Faculdade de Ciências

Universidade do Porto

Observando dados anuais relativos à percentagem de peixes predadores (peixes que se alimentam de outros peixes) no total de peixes pescados num porto italiano, dados esses relativos ao período 1914 - 23, nota-se claramente um aumento desta percentagem durante o período da primeira guerra mundial. A primeira explicação apresentada pelo biólogo Umberto D'Anconna baseava-se na diminuição da actividade da pesca verificada nesse período. No entanto, se a diminuição da actividade da pesca favorece a população de peixes predadores por disporem de mais peixes presa, também será verdade que o número destes aumenta com a diminuição da pesca.

O matemático Vito Volterra propôs um modelo para este sistema dividindo a população de peixes em dois grupos, os peixes-presa e os peixes predadores, e tomando em consideração que:

- i) a variação instantânea da população de peixes-presa deverá ser proporcional ao tamanho dessa população nesse mesmo instante descontando o efeito dos predadores, efeito esse que se entende proporcional ao número possível de encontros presa/predador,
- ii) a variação instantânea da população de peixes predadores deverá ser proporcional ao número possível de encontros presa/predador, descontando um factor proporcional ao tamanho desta população, já que os predadores competem entre si pelos recursos.

Estas considerações conduzem ao seguinte sistema de equações diferenciais

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \quad e \quad y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

onde  $x(t)$  representa o número de presas no instante  $t$ ,  $y(t)$  representa o número de predadores no instante  $t$ , e  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$  são números reais positivos.

Uma análise qualitativa deste sistema de equações diferenciais permite concluir que:

- na ausência de peixes predadores a população de peixes presa cresce indefinidamente,
- na ausência de peixes presa as espécies de peixes predadores tendem a extinguir-se,
- admitindo como ponto de partida a existência de  $x$  presas e  $y$  predadores, e excluindo um ponto de equilíbrio, a solução correspondente é periódica, isto é, ao fim de um certo tempo  $T$ , e apesar da interacção entre eles, volta-se a obter uma população constituída por  $x$  presas e  $y$  predadores (solução periódica de período  $T$ ).

Por outro lado, como os dados obtidos no porto italiano correspondem a médias anuais, é natural considerar médias ao longo das órbitas periódicas. Essas médias são

$$x_0 = \frac{c}{d} \quad e \quad y_0 = \frac{a}{b}$$

Resta introduzir no sistema o efeito (moderado) da pesca. Sempre que há actividade de pesca a população total de peixes diminui e entende-se que essa diminuição afecta de igual modo peixes-presa e peixes predadores. Assim, instantaneamente, o efeito da pesca diminui em  $\varepsilon$   $x(t)$  a população de peixes-presa e diminui em  $\varepsilon$   $y(t)$  a população de peixes predadores, onde  $\varepsilon$  é um factor positivo que aumenta se a actividade da pesca aumenta e que diminui se a actividade da pesca diminui.

Considerando agora este efeito obtemos um sistema de equações diferenciais análogo ao anterior, trocando a constante  $a$  por  $a-\varepsilon$  e a constante  $c$  por  $c+\varepsilon$ . As médias ao longo das órbitas periódicas são agora

$$x_1 = \frac{c+\varepsilon}{d} \quad e \quad y_1 = \frac{a-\varepsilon}{b}$$

Assim, assumindo que o peixe pescado é uma amostragem da população, se a actividade da pesca diminui (isto é  $\varepsilon$  diminui), como aconteceu durante a primeira grande guerra, a média

observável  $x_1$  diminui, a média observável  $y_1$  aumenta, e portanto a percentagem de peixes predadores na população total aumenta, explicando as observações de Umberto D'Anconna.

Nota: esta exposição é inteiramente baseada na secção 10 do quarto capítulo do livro "Differential Equations and their applications" de Martin Braun, páginas 441 a 449.