

Vamos Jogar no Totoloto?

ANA CRISTINA BICO MATOS

CARLA HENRIQUES

Departamento de Matemática,
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Tendo como objectivo despertar o interesse dos alunos pelo cálculo de probabilidades, as autoras desta sessão de trabalho, pegaram num tema bem conhecido de todos, o jogo do Totoloto, e fizeram dele um tema de trabalho em probabilidades para cerca de uma hora.

As autoras começaram por despertar nos alunos a curiosidade por saber quais são as chances de ganhar o 1º, 2º, 3º, 4º e 5º prémio, no jogo do Totoloto, fazendo apenas uma aposta. Para alguns, o cálculo da probabilidade de ganhar o 1º prémio já não era novidade, mas o mesmo já não se passava no que diz respeito aos 2º, 3º, 4º e 5º prémios.

A sessão destinava-se a alunos do 12º ano de escolaridade, pois só estes dispunham das ferramentas necessárias ao cálculo das referidas probabilidades.

Foram apresentadas duas formas diferentes de fazer o cálculo das probabilidades. Numa primeira fase, abordou-se o problema sem recorrer ao cálculo combinatório, apenas fazendo uso do conceito clássico de probabilidade e da chamada regra da multiplicação. Posteriormente, resolveu-se o problema recorrendo ao cálculo combinatório.

Relembremos o conceito clássico de probabilidade: dada uma experiência aleatória com n resultados possíveis, todos equiprováveis, a probabilidade de ocorrência de um acontecimento aleatório é igual ao número de resultados favoráveis a esse acontecimento sobre n .

A regra da multiplicação, para três acontecimentos aleatórios, traduz-se da seguinte maneira:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

isto é, a probabilidade da ocorrência simultânea de A , B e C , $P(A \cap B \cap C)$, é igual ao produto da probabilidade de ocorrência de A , $P(A)$, pela probabilidade de ocorrência de B sabendo que ocorreu A , $P(B|A)$, e pela probabilidade de ocorrência de C sabendo que ocorreram simultaneamente A e B , $P(C|A \cap B)$. Para n acontecimentos aleatórios a regra da multiplicação é:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Vamos então supor que fazemos apenas uma aposta no Totoloto. Para ganhar o 1º prémio é necessário acertar nos seis números sorteados.

Consideremos os seguintes acontecimentos aleatórios:

$A_1 \equiv$ "Acertar no 1º número extraído no sorteio"

$A_2 \equiv$ "Acertar no 2º número extraído no sorteio"

⋮

$A_6 \equiv$ "Acertar no 6º número extraído no sorteio"

$A_7 \equiv$ "Acertar no número suplementar"

Então, a probabilidade de ganhar o 1º prémio é, usando a regra da multiplicação,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) &= \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_6 | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_5) = \\ &= \frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{2}{45} \times \frac{1}{44} = \frac{1}{13983816} = 0.00000007151 \end{aligned}$$

O 2º prêmio é atribuído a quem acertar em cinco números e no número suplementar, então,

$$\begin{aligned}
 P(\text{"Ganhar o 2º prêmio"}) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \bar{A}_6 \cap A_S) + \\
 &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5 \cap A_6 \cap A_S) + \\
 &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_S) + \\
 &+ P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_S) + \\
 &+ P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_S) + \\
 &+ P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_S)
 \end{aligned}$$

onde \bar{A}_i representa o complementar de A_i , isto é,

$$\bar{A}_i \equiv \text{"Não acertar no } i\text{-ésimo número extraído no sorteio"}.$$

Calculemos a primeira parcela da soma anterior.

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \bar{A}_6 \cap A_S) &= \\
 &= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \\
 &\quad \cdot P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot P(A_5 | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cdot \\
 &\quad \cdot P(\bar{A}_6 | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cdot \\
 &\quad \cdot P(A_S | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \bar{A}_6) \\
 &= \frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{2}{45} \times \frac{43}{44} \times \frac{1}{43}
 \end{aligned}$$

Como facilmente se pode verificar todas as restantes parcelas têm o mesmo valor, donde,

$$\begin{aligned}
 P(\text{"Ganhar o 2º prêmio"}) &= 6 \times \left(\frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{2}{45} \times \frac{43}{44} \times \frac{1}{43} \right) = \\
 &= \frac{6}{13983816} = 0.000000429.
 \end{aligned}$$

O 3º prêmio vai para quem acertar em cinco números sorteados e não acertar no número suplementar. Então,

$$\begin{aligned}
 P(\text{"Ganhar o 3º prêmio"}) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \bar{A}_6 \cap \bar{A}_5) + \\
 &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5 \cap A_6 \cap \bar{A}_5) + \\
 &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap \bar{A}_5) + \\
 &+ P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap \bar{A}_5) + \\
 &+ P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap \bar{A}_5) + \\
 &+ P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap \bar{A}_5)
 \end{aligned}$$

Tal como anteriormente, todas as parcelas têm o mesmo valor, donde

$$\begin{aligned}
 P(\text{"Ganhar o 3º prêmio"}) &= 6 \times \left(\frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{2}{45} \times \frac{43}{44} \times \frac{42}{43} \right) \\
 &= 0.000018.
 \end{aligned}$$

Para calcular a probabilidade de ganhar o 4º ou o 5º prêmio, o raciocínio é semelhante.

$$\bullet P(\text{"Ganhar o 4º prêmio"}) = P(\text{"Acertar em quatro números sorteados"}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6) + \\
 &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5 \cap \bar{A}_6) + \\
 &+ P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \bar{A}_6) + \Lambda + \\
 &+ P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6)
 \end{aligned}$$

O número de parcelas na soma anterior é C_2^6 (combinações de seis dois a dois).

Assim,

$$\begin{aligned} P(\text{"Ganhar o 4º prêmio"}) &= C_2^6 \times \left(\frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{43}{45} \times \frac{42}{44} \right) = \\ &= 0.000969. \end{aligned}$$

• $P(\text{"Ganhar o 5º prêmio"}) = P(\text{"Acertar em três números sorteados"}) =$

$$\begin{aligned} &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6) + \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5 \cap \bar{A}_6) + \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6) + \Lambda + \\ &\quad + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6). \end{aligned}$$

Agora temos C_3^6 parcelas, logo

$$\begin{aligned} P(\text{"Ganhar o 5º prêmio"}) &= C_3^6 \times \left(\frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{43}{46} \times \frac{42}{45} \times \frac{41}{44} \right) = \\ &= 0.001765. \end{aligned}$$

As mesmas probabilidades podem ser calculados usando cálculo combinatório.

O número de resultados possíveis na extracção dos números do Totoloto é $C_6^{49} \times 43$, sendo C_6^{49} , as possibilidades para os primeiros seis números sorteados, e 43 as possibilidades para o número suplementar. Então,

$$P(\text{"Ganhar o 1º prêmio"}) = \frac{43}{C_6^{49} \times 43} = 0.00000007151;$$

$$P(\text{"Ganhar o 2º prêmio"}) = \frac{6 \times 43}{C_6^{49} \times 43} = 0.000000429;$$

$$P(\text{"Ganhar o 3º prêmio"}) = \frac{6 \times 42 \times 43}{C_6^{49} \times 43} = 0.000018;$$

$$P(\text{"Ganhar o 4º prêmio"}) = \frac{C_2^6 \times C_2^{43} \times 43}{C_6^{49} \times 43} = 0.000969;$$

$$P(\text{"Ganhar o 5º prêmio"}) = \frac{C_3^6 \times C_3^{43} \times 43}{C_6^{49} \times 43} = 0.01765.$$

Assim, os alunos tomaram contacto com uma das inúmeras aplicações práticas do cálculo de probabilidades e sentiram a flexibilidade do mesmo, constatando que por dois processos diferentes se chegam aos mesmos resultados.