A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

HÉLIO BERNARDO LOPES*

INTRODUÇÃO

As primeiras noções do que é uma equação surgem logo nos primeiros anos do ensino secundário, onde se estudam as equações algébricas dos primeiro e segundo graus. Para lá do carácter formativo de tais conceitos, a verdade é que a grande maioria dos alunos que prosseguem estudos superiores onde a Matemática continua a ser estudada, não mais voltam a abordar o aperfeiçoamento do que vem já de trás, muito em especial as equações do tipo algébrico, completas e de grau superior ao segundo.

É certo que, mesmo ao nível do ensino secundário, são ainda estudados alguns tipos simples de equações trigonométricas, embora os últimos anos venham mostrando uma lamentável tendência para uma redução perigosa da extensão do estudo da Trigonometria.

Ora, de um modo extremamente geral, quando se prosseguem estudos superiores, se se exceptuar o caso do Curso de Licenciatura em Matemática, jamais se volta a tocar nesta problemática, mau grado chegarem mesmo a tratar-se outros tipos de equações, como são os casos das equações diferenciais, das equações integrais, ou das equações às diferenças, mas sem que se consiga deixar no aluno uma visão geral e abrangente da noção de equação.

Em certos casos, infelizmente também hoje em vias de grande minimização, nem mesmo se vêm a frequentar disciplinas de Métodos Numéricos, onde era tradicional abordar o problema da resolução de uma equação algébrica de grau inteiro e positivo qualquer. E a consequência desta situação é a criação de um lastro de desconhecimento e de ignorância e, concomitantemente, uma insensibilidade profunda e perigosa perante a compreensão do comportamento fenomenológico e, logo, da capacidade para modelar e parametrizar fenómenos correntes.

A presença, no mercado e na vida profissional, de instrumentos de trabalho com elevada capacidade para a resolução veloz e com um grau de exactidão extremamente elevado deste tipo de equações, faz com que a tendência que se refere

---

* Jornalista.

acima se acentue, deixando como espólio, contudo, uma ignorância grande e uma insensibilidade profunda dos profissionais desses instrumentos perante o que estão a tratar e, muitas vezes, perante os próprios resultados que esses meios potentes vão fornecendo.

É para contornar esta tendência, que se escreve este texto simples, mas que visa fornecer uma visão abrangente e despistante da problemática em jogo.

A NOÇÃO DE EQUAÇÃO

As equações mais simples que podem encontrar-se são as equações algébricas dos primeiro e segundo graus, redutíveis, respectivamente, aos formatos:

$$ax + b = 0 \qquad \wedge \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

onde $a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0$.

Nestes casos, os coeficientes das equações são números reais, mas poderiam não o ser. E nelas, para lá dos coeficientes, encontra-se a **incógnita**, x, ligada àqueles através das operações de multiplicação e adição, bem como as suas inversas, por sua vez englobadas numa expressão igualada a zero.

Para estas equações é possível encontrar os valores das incógnitas à custa de operações elementares - adição, subtracção, multiplicação, divisão e extracção de raiz de índice inteiro - sobre os coeficientes das equações, usando o que se designa por **fórmulas resolventes**, que são, respectivamente:

$$x = -\frac{b}{a} \qquad \wedge \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

As equações algébricas dos terceiro e quarto graus são, respectivamente, as redutíveis às formas:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad \wedge \qquad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

com $a, b, c, d, e \in \mathbf{R},\ a \neq 0$, para cada uma das quais existe também uma fórmula resolvente. Em qualquer dos casos, essa fórmula resolvente é já muito mais complicada, levando a que as mesmas, quando aparecem, acabem por ser resolvidas por outros meios, que não essas fórmulas.

Um sonho natural, hoje claramente ultrapassado no plano científico, mas que a tal ignorância inicialmente referida pode levar a tomar-se, junto de quem estuda, como uma realidade possível, é o de que, para cada tipo de equação algébrica haverá uma fórmula resolvente. Ou seja, para a equação algébrica de grau n, $n \in \mathbf{N}$:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

onde $a_i \in$ **R**, $(i = 0,\cdots,n)$, $a_0 \neq 0$, haveria uma fórmula resolvente. Infelizmente - ou não...- a verdade é que não é assim.

Os matemáticos Evaristo Galois e Henrique Abel demonstraram esta proposição simples, verdadeira e dolorosa.

Não é possível obter fórmulas resolventes para equações algébricas completas de grau superior a quatro.

Houve, pois, necessidade de encontrar outros meios para atingir o objectivo de resolver uma equação qualquer deste tipo. E hoje pode dizer-se, à laia de resumo simples, que são dois os caminhos para atingir este desiderato:

métodos numéricos, essencialmente manuais, embora podendo socorrer-se de máquinas de fazer contas elementares;

métodos globais de cálculo, quer através de máquinas de calcular potentes, quer de meios computacionais.

No segundo caso, basta apenas indicar o tipo de equação e os valores dos coeficientes, que o instrumento de trabalho fornece, de imediato, os valores aproximados das soluções e com a aproximação quase tão elevada quanto se deseje.

TIPOS DE EQUAÇÕES

Estas **equações**, que até aqui se trataram, são designadas de **algébricas**, visto os seus coeficientes e a incógnita se encontrarem ligados pelas operações elementares antes referidas. Mas dizem-se também **racionais**, dado que a incógnita nunca aparece no radicando de um qualquer radical, e **inteiras**, por a mesma nunca aparecer num qualquer denominador.

Diferente é o caso da equação:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = 0$$

com $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$, $d \neq 0$, que será uma **equação algébrica racional fraccionária**, dado que a incógnita aparece em denominador.

E do mesmo modo, uma equação do tipo:

$$\sqrt{ax + b} = cx + d$$

$a \neq 0$, dir-se-á uma **equação algébrica irracional**, uma vez que a incógnita surge no radicando de um radical.

Todas são, porém, algébricas, dado que apenas envolvem as operações elementares que se referem ao início. Pelo contrário, se envolverem também, directa ou indirectamente, a operação de passagem ao limite, a equação toma o nome de **equação transcendente**, como acontece com as equações:

$$sen(x) = x \qquad \wedge \qquad \frac{\log(x)}{x} = 7$$

uma vez que as funções seno e logarítmica são funções transcendentes, susceptíveis de se expressar por desenvolvimentos em série de potências de x:

$$sen(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!}$$

.

$$\log(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{(x-1)^p}{p}$$

Para estas equações, como se torna evidente, não existem fórmulas resolventes. Tal boniteza fica-se pelo domínio algébrico e, mesmo aí, foge-se a tal via nos casos dos terceiro e quarto graus.

Ora, em todas estas equações, a incógnita é a variável x, definida em certo domínio. Mas pode não ser assim, como acontece com a condição:

$$f'(x) = f(x)$$

onde a incógnita é a função $f(x)$: *qual é a função que é igual à sua derivada?* Trata-se, pois, de uma **equação diferencial**, envolvendo certa função - a incógnita - com a sua primeira derivada. Mas poderiam igualmente considerar-se derivadas de outras ordens.

Da mesma forma, pode também considerar-se uma expressão do tipo:

$$\int_{1}$$

onde $f(x)$ é a incógnita. Tal equação toma o nome de **equação integral**.

E podem ainda considerar-se equações do tipo:

$$\Delta^2 f(x) + \Delta f(x) + f(x) = 3$$

onde Δ representa o operador diferença finita, sendo, pois, uma **equação às diferenças finitas**. E também aqui a incógnita é a função $f(x)$.

Todas estas equações tomam o nome genérico de **equações funcionais**, precisamente porque a incógnita é uma função, definida em certo domínio.

OS MÉTODOS NUMÉRICOS

Não é possível estabelecer uma doutrina geral, susceptível de aplicação à resolução de uma equação qualquer. E por ser assim, tendo em conta o objectivo deste texto, referem-se neste ponto apenas as equações algébricas racionais inteiras, também designadas, por vezes, por **equações polinomiais**.

A metodologia geral para a resolução de uma equação deste tipo obedece aos passos seguintes:

determinação das raízes inteiras;

determinação das raízes fraccionárias;

determinação das raízes irracionais;

determinação das raízes imaginárias.

A título de exemplo, considere-se a equação do sexto grau, completa, na incógnita x:

$$3x^6 - 7x^5 - x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 14x - 4 = 0.$$

Em primeiro lugar, há que ter presente que, *sendo reais todos os coeficientes da equação, se existirem raízes imaginárias, elas terão de ser em número par e conjugadas duas a duas*.

Para pesquisar a existência de *raízes inteiras*, há que ter em conta que, *se existirem, elas terão de ser divisores do termo independente*, ou seja, terão de ser do conjunto:

$$\{-4,-2,-1,1,2,4\}.$$

Recorrendo à Regra de Ruffini, percebe-se que a única raiz inteira existente é 2, sobrando, pois, a equação do quinto grau:

$$3x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 - 6x + 2 = 0$$

(1)

que já só possui raízes fraccionárias, irracionais ou imaginárias.

Para agora determinar as raízes fraccionárias desta equação, o que se faz é substituir x por x^{-1}, obtendo-se a equação:

$$\frac{2x^5 - 6x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^5} = 0$$

ou seja:
$$\frac{3}{x^5}-\frac{1}{x^4}-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}+2=0$$

isto é:
$$2x^5-6x^4+x^3-3x^2-x+3=0 \qquad \wedge \qquad x\neq 0.$$

Ora, as soluções fraccionárias que se pretendem encontrar são os inversos das soluções inteiras - se existirem - desta última. Dado que as raízes inteiras desta última terão de ser divisores do termo independente, elas serão do conjunto:

$$\{-3,-1,1,3\}.$$

Aplicando de novo a Regra de Ruffini, constatar-se-á que a única existente é 3, pelo que a equação (1) - e, logo, a inicial - apresenta a solução fraccionária $1/3$. Acaba, assim, por chegar-se à equação do quarto grau em x:

$$3x^4-3x^2-6=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^4-x^2-2=0$$

que é uma **equação biquadrada**: *só tem termos dos graus 4, 2 e 0.* A sua resolução pode fazer-se, substituindo x^2 por y, obtendo-se a equação em y:

$$y^2-y-2=0$$

cujas soluções, muito fáceis de achar, são:

$$y=2 \qquad \wedge \qquad y=-1.$$

Dado que $y=x^2$, virá:

$$x^2=2 \quad \vee \quad x^2=-1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=\pm\sqrt{2} \quad \vee \quad x=\pm i$$

resolvendo, pois, completamente a equação inicialmente dada.

Foi assim possível determinar facilmente as soluções irracionais e imaginárias pelo facto da equação a que se chegou ser biquadrada. Se assim não fosse, contudo, haveria, para encontrar as raízes irracionais, que seguir a seguinte metodologia:

determinar intervalos, em cada um dos quais se sabe estar apenas uma raiz irracional;

para cada uma delas, deitar mão de um processo recursivo, que permite sucessivas aproximações à raiz procurada.

Embora simples e muito diversos, não é agora o lugar para abordar uma tal problemática. Em todo o caso, fica uma ideia da metodologia a seguir, podendo ampliar-se facilmente a dominância de um tal problema através de algumas obras de qualidade que o mercado técnico e científico português já inclui.

CONCLUSÃO

Como foi possível mostrar com o presente texto simples, o aluno estudioso e interessado encontra nesta problemática da resolução de equações um importante e mui interessante alfobre de motivação para a dominância de um tema que é de permanente utilização e de grande elegância intelectual. A seu montante encontra-se esse baluarte do conhecimento matemático, que é a sempre actual **Teoria da Resolubilidade Algébrica**, enunciada e tratada por Galois e Abel. Um tema que requer já um nível intelectual de verdadeira excelência, mas que se constitui num extraordinário passeio do espírito. Procure você mesmo, aluno interessado e desejoso da excelência, realizar esse passeio. Só pela extraordinária dificuldade que vai encontrar, vale a pena.