

油圧駆動系動作方程式のレイリー方程式近似

大住 剛, 松本 幸生, 高瀬 博文, 加納 政雄

1. 緒 言

代表的な油圧駆動系において、低速度駆動に生ずるスティックスリップ現象は良く知られている^{(1),(2)}。また、この現象に対して自励振動モデルによる説明も行われている⁽³⁾。これらの文献によると、この振動に関与するものは主に油圧駆動系の摺動摩擦特性と流量調節弁の負荷～流量特性であることは明らかである。しかし、文献(3)によると、スティック部のない振動の生ずることが述べられている。

本報では、油圧流量調節弁として圧力補償型の流量調節弁を使用し、摩擦特性を3次関数と大きく近似することにより、負荷の動きをレイリー方程式に近似できることを示す。さらに、この解曲線の結果は静摩擦と境界潤滑摩擦を伴う著しい非線形的な摩擦特性における自励振動及びスティック部のない振動をも説明し得る可能性のあることを述べる。

2. 油圧駆動系の動作方程式

サーボ弁と直動型の操作シリンダーを使った代表的油圧駆動系は図1のように表わされる。油圧源から一定圧 p_s に調節された圧油は、サーボ弁を経て操作シリンダーを動かし負荷を移動させる。負荷は質量を有し、移動台は摺動摩擦が存在するため、ピストンの負荷として慣性力と摺動摩擦が作用することになる。したがって、この場合の動作方程式は文献(1)又は(3)に示す通りである。

この駆動系において、サーボ弁として圧力補償型の流量調節弁を使用した系を示すと図2のようになり、本報ではこの駆動系を対象として動作方程式を導くことにする。

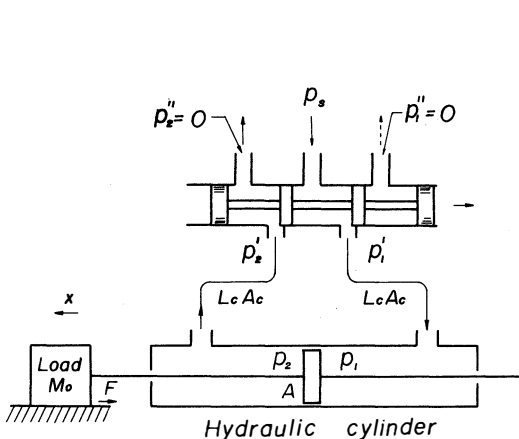


図1 油圧駆動機構

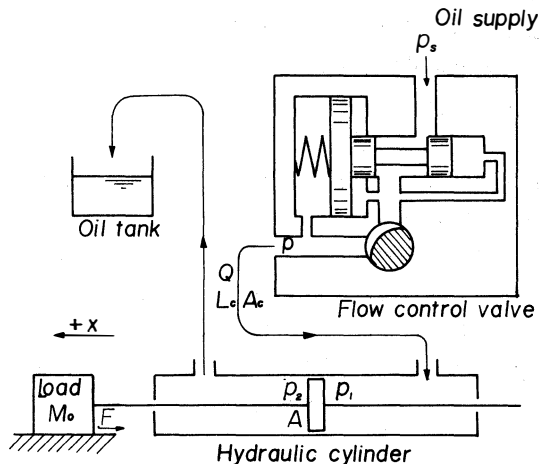


図2 油圧駆動機構(圧力補償型流量調節弁使用)

ピストンがシリンダー内の中心にあり左方向に動く場合を考えると、導管を通過する流量 Q はピストン変位 x と圧力 p の間に次の関係が得られる。

$$Q(\theta) = A(dx/dt) + \alpha G(dp/dt) \tag{1}$$

ここで、 A はシリンダー断面積、 G は調節弁出口からピストンの左側に含まれる油の容積、 α は圧縮率を表わす。圧力補償型の流量調節弁では、流量 Q は供給圧 p_s 又は弁の出口の圧力 p に無関係で弁の開度 θ のみの関数と考えてよい。

次に、系の慣性負荷を含む可動部の運動方程式を導く。ピストンに接続した質量を M_0 とし、 (dx/dt) の関数である摺動部摩擦力を $f\{dx/dt\}$ で表わすと運動方程式は

$$M_0(d^2x/dt^2) + f\{dx/dt\} = A(p_1 - p_2) \tag{2}$$

となる。

弁出口からシリンダーに至る右側の導管の圧力降下 $(p - p_1)$ および左側シリンダーからタンク間の圧力降下 $(p_2 - 0)$ は、油による慣性力と粘性による摩擦損失⁽¹⁾の和とすると

$$\begin{aligned} p - p_1 = p_2 - 0 &= \left\{ 8\pi\nu\gamma L_c / (A_c^2 g) \right\} A(dx/dt) + (\gamma L_c A_c / g) A(d^2x/dt^2) \\ &= \left\{ M_e / (2A) \right\} (d^2x/dt^2) + \left\{ F / (2A) \right\} (dx/dt) \end{aligned} \tag{3}$$

となる。ただし、 $M_e = (2A^2 / A_c^2) (\gamma L_c A_c / g)$ 、 $F = 16\pi\nu\gamma L_c A^2 / (A_c^2 g)$ 、 ν ：油の動粘度、 γ ：油の比重とする。

式(2)に式(3)を代入し、整理すると

$$M(d^2x/dt^2) + f\{dx/dt\} + F(dx/dt) = Ap \tag{4}$$

となる。ただし、 $M = M_0 + M_e$ とする。式(1)および式(4)を書き換えると

$$dp/dt = \left\{ A / (\beta G) \right\} \left\{ Q(\theta) / A - (dx/dt) \right\} \tag{5}$$

$$d^2x/dt^2 = (A/M) [p - \{f\{dx/dt\} + F(dx/dt)\} / A] \tag{6}$$

となる。式(5)において、圧力補償型の流量調節弁を使っているので $Q(\theta) / A$ は弁の開度によって決まる定数と考えられる。また、式(6)における $\{f\{dx/dt\} + F(dx/dt)\} / A$ はパイプ内の粘性抵抗を含む全摩擦特性と定義することができ、 (dx/dt) の関数である。

全摩擦特性は実験によると、図3に示すような $dx/dt=0$ 近傍で急激な微係数変化をする特性を有する。これを大きく近似して3次関数と仮定する。近似のあてはまらない部分、特に速度の大きいところで摩擦特性が極値を持たないほど微小な微係数で非対称な関数であるにもかかわらず3次関数にした点が問題であり、これが本報の検討課題の一つであり、後ほどこの点について検討をおこなうことにする。すなわち、

$$\begin{aligned} f\{dx/dt\} + F(dx/dt) \\ = a + b(dx/dt) + c(dx/dt)^2 + d(dx/dt)^3 \end{aligned}$$

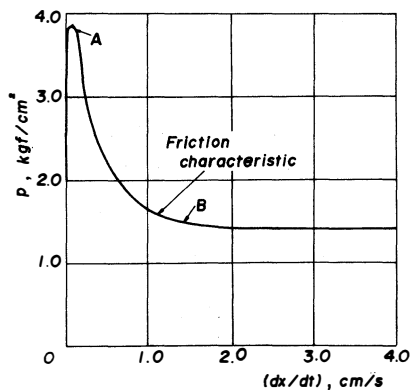


図3 摩擦特性

とすると、式(6)は次式となる。

$$d^2x/dt^2 = (A/M) \{ p - \{ a + b(dx/dt) + c(dx/dt)^2 + d(dx/dt)^3 \} \} \quad (6)'$$

ここで、 (dx/dt) および p を式(7),式(8)のように置き換えて、 t , ϵ , β を式(9)のように定義すると、式(5)と式(6)'を V , P に関する式(10), (11)に置き換えられる。

$$dx/dt - Q(\theta)/A = \sqrt{-\{ b + 2c(Q(\theta)/A) + 3d(Q(\theta)/A)^2 \} / (3d) \cdot V} \quad (7)$$

$$p = \{ a + b(Q(\theta)/A) + c(Q(\theta)/A)^2 + d(Q(\theta)/A)^3 \} / A \\ - \sqrt{-\{ b + c(Q(\theta)/A) + 3d(Q(\theta)/A)^2 \} M / (3d\alpha G) \cdot P} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} t &= \alpha GM/A^2 \cdot \tau \\ \epsilon &= -\alpha G / (A^2 M) \cdot \{ b + 2c(Q(\theta)/A) + 3d(Q(\theta)/A)^2 \} \\ \beta &= \{ \{ c + 3d(Q(\theta)/A) \} (3d) \cdot 3d / [-\{ b + 2c(Q(\theta)/A) + 3d(Q(\theta)/A)^2 \}] \} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

すなわち、 V , P に関する式は次のようになる。

$$dP/d\tau = V \quad (10)$$

$$dV/d\tau = \epsilon(1 - \beta V - V^2/3)V - P \quad (11)$$

式(10), 式(11)を P について整理すれば、レイリー方程式、式(12)又は式(12)'が得られる。

$$d^2P/d\tau^2 = \epsilon \{ dP/d\tau - \beta(dP/d\tau)^2 - (dP/d\tau)^3/3 \} - P \quad (12)$$

$$d^2P/d\tau^2 = \epsilon \{ d - \beta V^2 - V^3/3 \} - P \quad (12)'$$

全摩擦特性の3次関数 $p = a + b(dx/dt) + c(dx/dt)^2 + d(dx/dt)^3$ の極値および変曲点を与える (dx/dt) はそれぞれ

$$(dx/dt)_{1,2} = \{ -c \pm \sqrt{c^2 - 3bd} \} / (3d) \text{ および, } (dx/dt) = -c / (3d)$$

である。これらの値を式(7),式(8)に代入すると式(11)の3次関数 $P = \epsilon(1 - \beta V - V^2/3)V$ の極値を与える V の値は $V_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 1}$, また変曲点を与える V の値は $V = -\beta$ に一致することがわかる。また、式(7), 式(8)より (dx/dt) の増加は V の減少となり、 p の増加は P の減少となることがわかる。したがって、式(5),式(6)'の $p \sim (dx/dt)$ 位相平面上の解曲線の検討は極値と変曲点が一致した3次曲線を持つ式(10),式(11)の $P \sim V$ 位相平面上の解曲線を検討することと一致し、解曲線の時間的経過の方向が反対であることがわかる。

3. 位相平面上の解曲線

前章で述べた p と P , (dx/dt) と V の関係、3次関数 $a + b(dx/dt) + c(dx/dt)^2 + d(dx/dt)^3$ と $(1 - \beta V - V^2/3)V$ の極値、変曲点の関係を考慮すると、式(5),式(6)'の位相平面 $p \sim (dx/dt)$ と式(10),式(11)の位相平面 $P \sim V$ の解曲線の関係は対応する。

式(10), 式(11)の解曲線を図4(a)の $P \sim V$ 位相平面によって考えると、式(10)において $dP/d\tau = V = 0$ より P 軸上では時間による変化がない。また、第1象限と第4象限では P が増加し、第2象限と第3象限では P は減少する。また、式(11)より $P = \epsilon(1 - \beta V - V^2/3)V$ 上では V の時間変化がない。 $P > \epsilon(1 - \beta V - V^2/3)V$ では時間の経過により V は減少し、 $P < \epsilon(1 - \beta V - V^2/3)V$ では V は増加する。

以上の関係より解曲線の様子は図4(a)のようになる。同様の考え方により $p \sim (dx/dt)$ 位相平面上

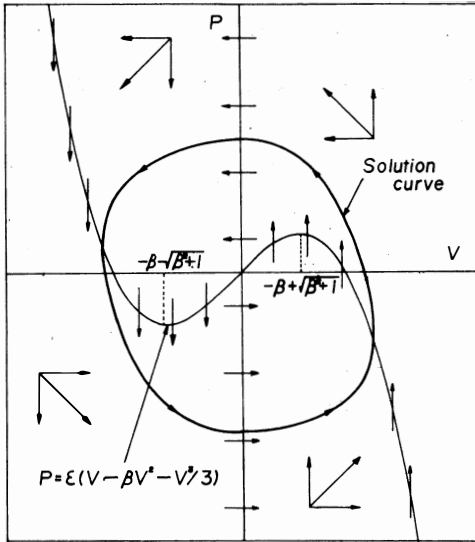


図4(a) P~V位相平面

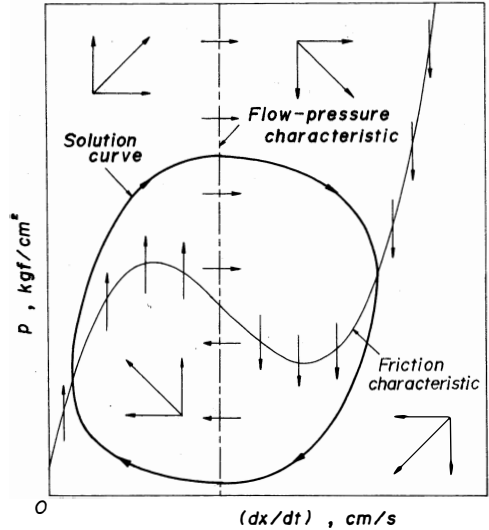


図4(b) p~(dx/dt)位相平面

での解曲線の対応は図4(b)となる。

本章ではP~V位相平面上での解曲線を検討することにより、一航的なレイリー方程式の解曲線を検討する。この位相平面方程式(10)と式(11)より(ε, β)の組合せによって解の性質が決まる。そこで、この(ε, β)をパラメータとし周期解(リミットサイクル)をデジタル計算機を使ってルンゲ・クッタ法により計算し、周期解のV_{max}とV_{min}を求め、dV/dτ=0となる3次曲線P = ε(1-βV-V²/3)Vの極値を与えるV_{1,2} = -β ± √(β²+1)と共に図5に示し、それらの大小関係を検討する。この大小関係を検討することにより、計算した周期解が必要とする3次曲線のVの範囲がわかる。特に、3次曲線が極値をとるV₁, V₂の範囲を必要とするかどうか又は2つの極値を持つ特性を必要とするか否かがわかる。

図は横軸にβを縦軸に周期解(リミットサイクル)のV_{max}とV_{min}をεをパラメータとして示す。図より周期解の性質は原点に対して点対称であり、β ≥ 0の範囲を考えればβ < 0の場合はV_{max}とV_{min}が反対となったことを想定すればよい。βの増加につれてV_{max}は次第に増加し、V₁より大きいことがわかる。一方、V_{min}の絶対値はβの増加により増加し、βの大きいところではεに関係なくなる。また、βの小さい所ではV_{min}の絶対値がV₂の絶対値より大であることがわかる。このようにV₁とV_{max}, V₂とV_{min}の大小比較から、(ε, β)の組み合わせによって解曲線のVの振幅と3次曲線の極値との関係が良くわかる。

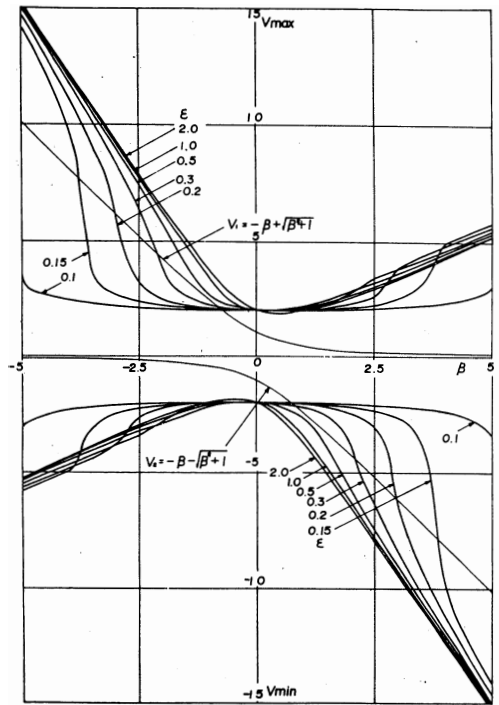


図5 解曲線の振幅の最大値と最小値

例えば、 $\beta = 2.5$, $\epsilon = 1.0$ の場合、 $V_{max} \doteq 3.2$, $V_{min} \doteq -7.8$ に対し $V_1 = 0.2$, $V_2 = -5.2$ である。したがって、 $V_{max} > V_1$, $V_{min} < V_2$ となって3次曲線の極値を含んだ周期解を描く。しかし、 $\epsilon = 0.1$ とすると $V_{max} \doteq 2.1$, $V_{min} \doteq -2.1$ であるので、 $V_{max} > V_1$, $V_{min} > V_2$ となり V_{max} は極値の外にあるが V_{min} は極値の内側にある状態となる。このように、 (ϵ, β) の組み合わせにより周期解が特性曲線(3次曲線)の極値を必要とするか否かが図5からよくわかる。

そこで、 $\beta = 2.5$ とし ϵ を変化した周期解を位相平面上に表示したものを図6に示す。図のように、 $\epsilon = 0.1, 0.2$ の場合3次関数の1つの極値のみを含んでいた周期解が ϵ が増加した $\epsilon = 1.0$ では2つの極値を含んだ周期解となる。この場合の $V \sim \tau$ の関係の1例を図7(a)(b)に示す。図より $\epsilon = 0.1$ の時は正弦波に近い波形になるのに対し、 $\epsilon = 1.0$ となると弛張的な波形となる。

$\epsilon = 0.1$ と一定とし、 β を変化した位相平面上的周期解を図8に示す。図より β の増加により、3次曲線の極値を1つ含んでいたものが、 $\beta = 6.0$ では2つの極値を含む周期解となる。この場合も、1つの極値を持つ関数および2つの極値を持つ関数を特性曲線とする周期解が存在することがわかる。

4.2 2次曲線による周期解の検討

図6, 図8において $V_2 < V_{min}$ の周期解が (ϵ, β) の組み合わせにより存在することを例示した。そこで、極値が1つ存在する関数として、周期解の V の

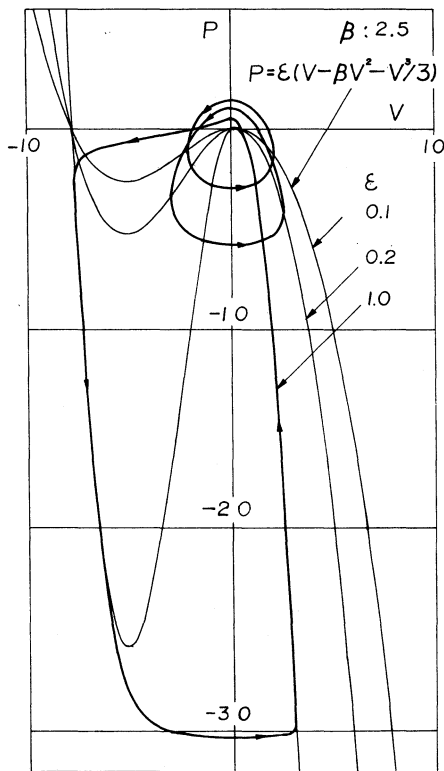


図6 周期解(ϵ の影響)

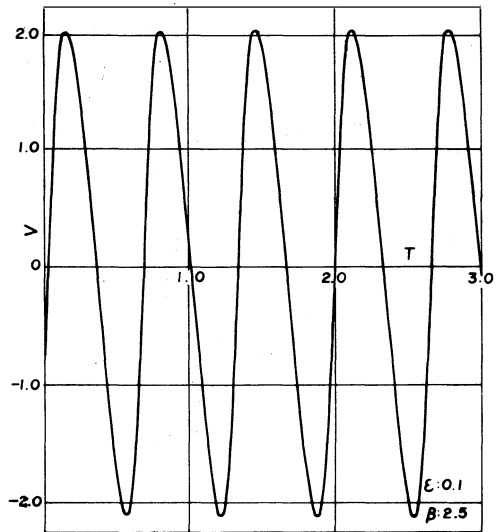


図7(a) $V \sim \tau$ の関係($\epsilon = 0.1, \beta = 2.5$)

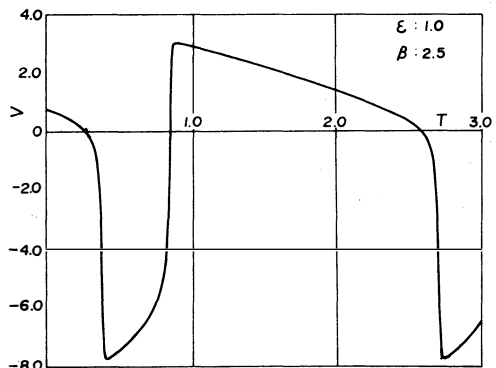


図7(b) $V \sim \tau$ の関係($\epsilon = 1.0, \beta = 2.5$)

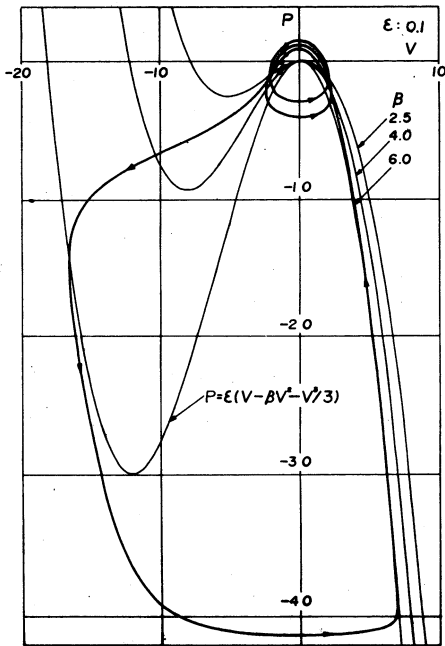


図8 周期解(β の影響)

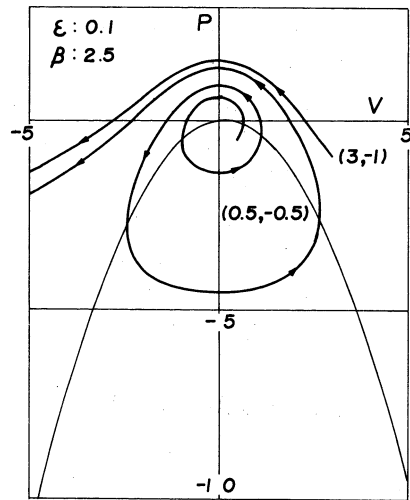


図9 解曲線(2次関数による特性曲線)

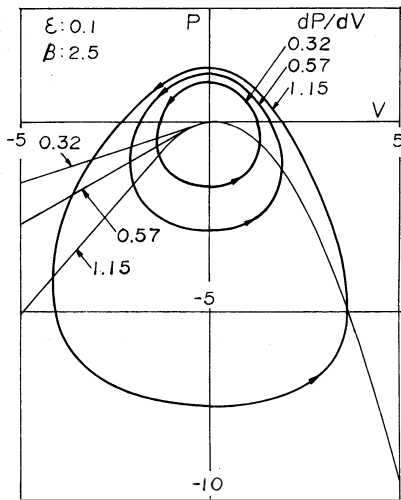


図10(a) 解曲線

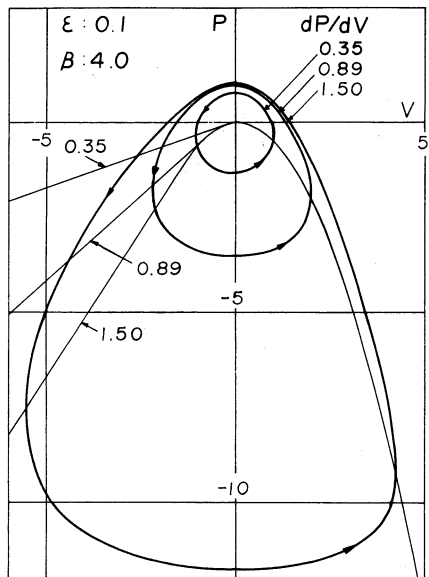


図10(b) 解曲線

範囲内のみが3次関数と一致する2次曲線を考え、周期解の存在と解の形を図6と図8の(ϵ , β)について検討することにする。

例えば、図6の $\epsilon = 0.1$, $\beta = 2.5$ の周期解のVの振幅の範囲内での3次関数を2次関数に近似し解曲線を計算すると、図9のように解曲線は不安定となり周期解は得られない。そこで、 $dP/dV > 0$ の領域で種々の dP/dV が一致する直線を接続した特性曲線を考える。この特性曲線に対して図6、図8の極値を1つ含む場合に対応する解曲線の幾つかを図10(a)(b)(c)に示す。図中、 dP/dV が小さいほど、P, Vの振幅の小さな周期解となる。

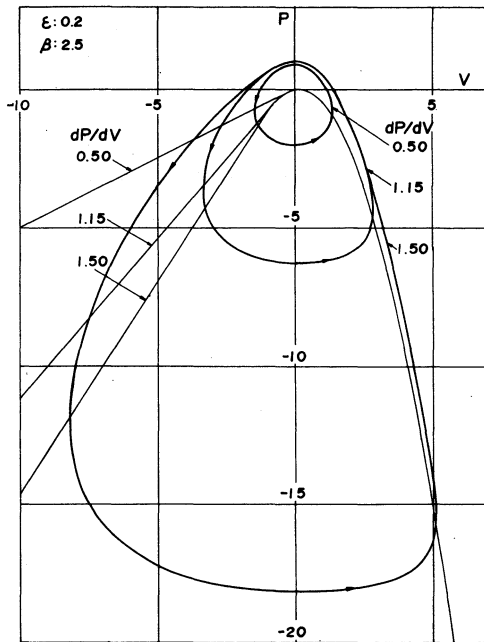


図10(c) 解曲線

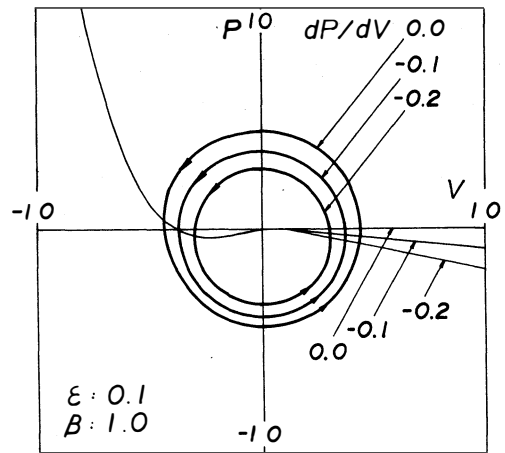


図11 解曲線

式(7),式(8)によると, (dx/dt) が小のときにはVが大となることより図3のA部の $(dx/dt) = 0$ の近傍における摩擦特性の急激な変動の様子を図10に対応させ得ることができる。そして図10の周期解の存在が図3のA部の $(dx/dt) = 0$ の近傍での周期解の可能性を表わすものと考えられる。

図3は極値が1つしか存在しないか、2つ存在しても1つは近似的にないと考えられる特性で、必ずしも3次関数と近似し難く、図6,図8および図10(a)(b)(c)の解曲線の存在は図3の摩擦特性における $(dx/dt) = 0$ の近傍における周期解の存在を裏付けることとなる。また、これらの周期解より、スティック部のない単なる振動の可能性をも意味すると考えられる。図3の $Q(\theta)/A$ を大きくしたB部では、平衡点での (dx/dt) の微係数 d^2x/dt^2 は零か正であり、その値は非常に小さい。図11はこの部分に相当する解曲線で、 $dP/dV = 0.0, -0.1, -0.2$ の場合を示す。 $dP/dV = -0.2$ の場合が 0.0 の場合に比べて、周期解の振幅が小さい。この解曲線の中にはやはりスティック部のない単なる振動を示すものがある可能性がある。

5. 結 言

油圧駆動系の動作方程式は圧力補償型の流量調節弁を使用すれば、摩擦特性を速度の3次関数と仮定することにより、レイリーの方程式で表わされることが導けた。このレイリー方程式の解曲線を検討することにより、周期解の振幅と特性曲線である3次関数の極値の大小関係が検討できた。それによると、3次関数は極値を2つ持つ次数の最低の関数の代表として使用しているが、極値が1つであっても解曲線が得られることがレイリー方程式の (ϵ, β) に対する検討からわかった。したがって、摩擦特性は2つの極値を持つものとする大胆な定性的近似をおこなったが、比較的摩擦特性に近い1つの極値を持つ曲線を特性曲線と考えることによっても、周期解の存在が可能であることがわかった。さらに、この摩擦特性において、スティック部のない単なる振動も存在する可能性があることがわかった。

参考文献

- (1) 松崎・橋本, 機論, 28-194 (S37-10), 1394。
- (2) 加藤・松林, 機論, 35-273 (S44-5), 1138。
- (3) 明石・中川・大住, 機論, 45-390 (S54-2), 195。

本論文は昭和62年11月3日, 機械学会北陸信越支部北陸地方講演会(富山)で発表したものに加筆詳述した。

Rayleigh Equation Approximating Equation of Motion in Hydraulic Drive System

Tsuyoshi OHSUMI, Yukio MATSUMOTO
Hirofumi TAKASE, Masao KANO

In a hydraulic drive system, stick-slip motion at low speed of operation is well known. Incidentally, in reference (3), it is shown that there is a vibration without stick part.

In this report, in the hydraulic drive system using a pressure compensated flow control valve, the equation of its motion is approximately reduced to Rayleigh equation on the assumption that the friction characteristic is a third order function approximately. Then, it will be possible to explain the existence of the vibration without stick part, judging from its solution curves.

[英文和訳]

油圧駆動系動作方程式のレイリー方程式近似

大住 剛, 松本 幸生, 高瀬 博文, 加納 政雄

油圧駆動系において、低速駆動に生ずるスティックスリップ動作は良く知られている。また、文献(3)によると、スティック部のない振動が生じることが示されている。

本報では、圧力補償型流量調節弁を使用し、摩擦特性を3次関数と近似的に仮定すると、動作方程式はレイリー方程式で近似できる。そして、この解曲線から判断すると、スティック部の無い振動の存在を説明しうる可能性がある。

(1988年10月31日受理)