2項モデルと3項モデルとの関係
——Rubinstein(2000)論文の批判的検討——

高　見　茂　雄

要旨： Rubinstein(2000)論文のパラメータ設定を検討のところ，リターン期待値，分散の値に整合性がみられない。本稿は2項モデルと3項モデルとの関係に関し，Rubinstein(2000)の枠組みではどのような条件設定が考えられるかを検討し，リターン期待値，分散の値に整合性の観点からはJarrow & Rudd (1983)のモデルの方が適切であることを考察する。

キーワード：2項モデル，3項モデル，リターン期待値，分散

1．はじめに

Rubinstein(2000)は3項モデルをレビューし，一定の条件の下，3項モデルは2項モデルから合成されると主張している。その要点は以下の通りである[1]。

共通設定：
μ:リターンの期待値（年率）
σ:リターンの標準偏差（ボラティリティー；年率）
h:単位期間
T:期間の長さ、$T=1$は1期間、$T=2$は２期間（本稿ではこの2通りに限定する）

1　リスクフリーレートに関するパラメータ設定，マルチンゲール測度の取り方にも問題があると考えるが，議論の焦点を絞るため，その論点は捨象する。また，要点の説明は原典と異なった角度から行っている。

2 項モデルパラメータ：
u:アップサイドに1期間変化するときの1期後の相対価格
d:ダウンサイドに1期間変化するときの1期後の相対価格
$d=1/u$の関係を想定
p:アップサイドに1期間変化するときのリスク中立確率
$1-p$:ダウンサイドに1期間変化するときのリスク中立確率
2項モデルでは1期間の刻みはhである。

3 項モデルパラメータ：
U:アップサイドに1期間変化するときの1期後の相対価格
D:ダウンサイドに1期間変化するときの1期後の相対価格
$D=1/U$の関係を想定
M:ミッドサイドは1、すなわち現在の価格と変わらない
P_U:アップサイドに1期間変化するときのリスク中立確率
P_M:ミッドサイドに1期間変化するときのリスク中立確率
P_D:ダウンサイドに1期間変化するときのリスク中立確率
3項モデルでは1期間の刻みは$2h$である。

そして，さらに，3 項モデルではストレッチパラメータλが導入され，(1)～(4)式が成り立つと想定する。

$$U=e^{\lambda\sigma\sqrt{2h}} \qquad (1)$$

$$P_U=\frac{1}{2\lambda^2}+\frac{\mu\sqrt{2h}}{2\lambda\sigma} \qquad (2)$$

$$P_M=1-P_U-P_D \qquad (3)$$

$$P_D=\frac{1}{2\lambda^2}-\frac{\mu\sqrt{2h}}{2\lambda\sigma} \qquad (4)$$

以上の前提条件のもと，2 項モデルと 3 項モデルとの関係は，2 項モデルで 2 期間経過する状態が 3 項モデルで1期間経過する状態と想定，相対価格の関係から，(5)式が成り立つ。

$$u^2 = U = e^{\lambda\sigma\sqrt{2h}} \quad (5)$$

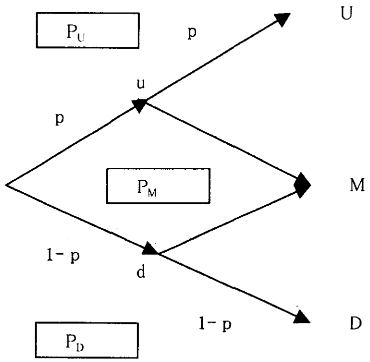

図 1　2項モデルと3項モデルとの関係のイメージ図

$\lambda > 0$ の想定のもと，これを変形すると，(6)式となる。ここで，3項モデルに柔軟性を持たせるストレッチパラメータ λ が厳格に制限されているのが確認できる。

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}\left(\log u\right)}{\sigma\sqrt{h}} \quad (6)$$

そして，さらに，Rubinstein(2000)では2項モデルと3項モデルとのリスク中立確率相互の関係(7)式から，(4)式を用い，(6)式で λ を消去，複雑ではあるが，(8)，(9)式が成り立たなくてはならないとする。これが，Rubinstein(2000)の結論である。

$$(1-p)^2 = P_D \quad (7)$$

$$u = \exp\sqrt{\sigma^2 h - \mu^2 h^2} \quad (8)$$

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2(\sigma^2 h - \mu^2 h^2)} + \frac{\mu\sqrt{2h}}{\sigma\sqrt{\sigma^2 h - \mu^2 h^2}}} \quad (9)$$

2. Rubinstein (2000) 論文へのコメント

2 項モデルと 3 項モデルはそれぞれ別個に研究されているなか，Rubinstein (2000)は両者の関係を整理し，(8), (9)式の新たなパラメータ設定を導出したことには意義がある。しかし，(8), (9)式を用い，リターン期待値，分散を計算しても，整理された結果にはならないという問題点が指摘できる。

たとえば，2 項モデルの1期のリターン期待値 $E_1\{\log(\tilde{x})\}$ は以下の(10)式で表現されるが，これ以上簡単にはならない。

$$\begin{aligned} E_1\{\log(\tilde{x})\} &= p\log u + (1-p)(-\log u) = (2p-1)(\log u) \\ &= \left\{\sqrt{\frac{1}{2(\sigma^2 h - \mu^2 h^2)} + \frac{\mu\sqrt{2h}}{\sigma\sqrt{\sigma^2 h - \mu^2 h^2}}} - 1\right\}\sqrt{\sigma^2 h - \mu^2 h^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\sigma^2 h - \mu^2 h^2}} + \frac{\mu\sqrt{2h}}{\sigma}} - 1 \end{aligned} \quad (10)$$

ところが，パラメータμの整合性から(10)の左辺は 1 期間の平均値μhとなるべきである。また，リターン分散についても問題を残す。

ところで，3 項モデルでのパラメータの整合性はどうなっているだろうか，3 項モデルの時間間隔は $2h$ であるので，$T = 2h$時点のリターン平均値，リターン分散を計算すると，(11), (12)式となり，uの関数の形に依存せずに整合性がとれている。

$$
\begin{aligned}
E_2\{\log(\tilde{x})\} &= P_U\lambda\sigma\sqrt{2h} + P_M(0) + P_D\left(-\lambda\sigma\sqrt{2h}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{2h}}{2\lambda\sigma}\right)\lambda\sigma\sqrt{2h} - \left(\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{2h}}{2\lambda\sigma}\right)\lambda\sigma\sqrt{2h} \\
&= 2\mu h = \mu(2h)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
Var_2\{\log(\tilde{x})\} &= P_U\left(\lambda\sigma\sqrt{2h}\right)^2 + P_M(0)^2 + P_D\left(-\lambda\sigma\sqrt{2h}\right)^2 - \left(E_2\{\log(\tilde{x})\}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{2h}}{2\lambda\sigma}\right)\left(\lambda\sigma\sqrt{2h}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{2h}}{2\lambda\sigma}\right)\left(-\lambda\sigma\sqrt{2h}\right)^2 - (2\mu h)^2 \\
&= 2\sigma^2 h - 4\mu^2 h = \left(\sigma\sqrt{2h}\right)^2 - \left(\mu(2h)\right)^2
\end{aligned}
\tag{12}
$$

すなわち，リターン期待値は年率の期待値パラメータに時間間隔 $2h$ を加味した表現になっており，整合性が取れている。(12)式のリターン分散であるが，第 2 項を除けば，ボラティィリティーの平方根時間倍という表現になっておりこれも整合性はとれている。なお，第 2 項の問題については次節で検討するが，Cox & Rubinstein (1985)が示すように，離散時間 h を0に近づけた連続時間で考え，$\mu h \to 0$ を導き，$Var\{\tilde{x}\} \to \sigma^2 h$ が成立することで問題を解決し，離散時間における分散パラメータの整合性はあまり議論しないのが伝統的である[2]。また，3 項モデルではBoyle (1988), Kamrad and Ritchken(1991), Ritchken (1995)などの研究があるが，(1)～(4)式でパラメータ設定を行うのが基本であり，離散時間での分散パラメータの整合性は保たれていない。しかし，本節では(12)式で分散パラメータの整合性は保たれているとして，この 3 項モデルに対応する $T = h$ 時点の 2 項モデルの場合に立ち返り，成り立つべき条件(13), (14)について検討する。

$$E_1\{\log(\tilde{x})\} = \mu h \tag{13}$$

$$Var_1\{\log(\tilde{x})\} = \sigma^2 h - \mu^2 h^2 \tag{14}$$

2　次節で検討するJarrow & Rudd (1983)のモデルは離散時間での分散パラメータの整合性を保証する。

Rubinstein(2000)は条件(15)式を明示的に示しているものの，計算過程では(7)式 $(1-p)^2 = P_D$ のみを用いている。しかし，2項モデル2期分で3項モデルを合成させるためには，(7), (15)式が連立して成り立たなくてはならない[3]。

$$p^2 = P_U \qquad (15)$$

(6)式 $\lambda = \frac{\sqrt{2}(\log u)}{\sigma\sqrt{h}}$ を用い，(15),(7)式を整理すると，(16), (17)式となる。

$$p = \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{h}}{2\lambda\sigma}} = \sqrt{\frac{\sigma\sqrt{h}}{4(\log u)} + \frac{\mu h}{2\log u}} \qquad (16)$$

$$1 - p = \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{h}}{2\lambda\sigma}} = \sqrt{\frac{\sigma\sqrt{h}}{4(\log u)} - \frac{\mu h}{2\log u}} \qquad (17)$$

ところで，Rubinstein(2000)のモデル体系では3項モデルとの対応関係から，(13), (14)式が成り立たなくてはならない。

(13), (14)式それぞれに(16), (17)式を代入して整理すると，(18), (19)式が得られる。

$$\sqrt{\sigma^2 + 2(\log u)\mu} - \sqrt{\sigma^2 - 2(\log u)\mu} = 2\mu\sqrt{h} \qquad (18)$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 2(\log u)\mu} + \sqrt{\sigma^2 - 2(\log u)\mu} = \frac{2\sigma^2\sqrt{h}}{\log u} \qquad (19)$$

(18), (19)式は連立して成り立たなくてはならないが，未知数が4つであり，2つの変数 μ, h を固定して整理すると，(20), (21)式がえられる。

3　ud = Mについては log u + (-log u) = 0が恒等的に成り立ち、追加的な条件は必要ない。

$$\log u = \sigma\sqrt{h} \qquad (20)$$

$$\sigma = \mu\sqrt{h} \qquad (21)$$

(20), (21)式の意味を考察すれば，(20)式は伝統的なCRR 2 項モデルパラメータ設定そのものである。すなわち，Rubinstein(2000)のモデル体系は (21)式の厳格な条件のもとで，初めて成り立つことを意味するが，実務的に期間を小さくとるとボラティリティーが小さい値しか許容できなくなる点で問題である。

3．離散時間分散パラメータ再考

最後に，2節で指摘した離散時間での分散パラメータの整合性の問題を検討し，3 項モデルの場合に当てはまるかを検討する。

Jarrow & Rudd(1983, p.188)の 2 項モデルは離散時間の範囲内で問題を解決し，ポピュラーなCRRモデルとは異なった(22)～(24)式のパラメータ設定を提示している。

$$u = \exp\left(\mu h + \sigma\sqrt{h}\right) \qquad (22)$$

$$d = \exp\left(\mu h - \sigma\sqrt{h}\right) \qquad (23)$$

$$p = 1/2 \qquad (24)$$

(24)式でリスク中立確率とはいえ1/2に限定している点は柔軟性の意味で問題がある。しかしながら，リターン期待値，分散の整合性の意味では離散時間の範囲内で保証される優れたモデルであると評価する。期間 $T = h$ の 2 項モデルの場合を確認すると，(25)式のみならず，(12)式右辺第 2 項がない(26)式も成り立つ。

$$E_1\{\log(\widetilde{x})\}=\frac{1}{2}\left(\mu h+\sigma\sqrt{h}\right)+\frac{1}{2}\left(\mu h-\sigma\sqrt{h}\right) \quad (25)$$

$$=\mu h$$

$$Var_1\{\log(\widetilde{x})\}=\frac{1}{2}\left(\mu h+\sigma\sqrt{h}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\mu h-\sigma\sqrt{h}\right)^2-\mu^2h^2 \quad (26)$$

$$=\sigma^2 h$$

そこで，$T=2h$の場合の 3 項モデルの場合を調べてみる。

$$E_2\{\log(\widetilde{x})\}=\frac{1}{2^2}2\left(\mu h+\sigma\sqrt{h}\right)+2\frac{1}{2}\frac{1}{2}2\mu h+\frac{1}{2^2}2\left(\mu h-\sigma\sqrt{h}\right) \quad (27)$$

$$=2\mu h$$

$$Var_2\{\log(\widetilde{x})\}=\frac{1}{2^2}2^2\left(\mu h+\sigma\sqrt{h}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}2(2\mu h)+\frac{1}{2^2}2^2\left(\mu h-\sigma\sqrt{h}\right)^2-4\mu^2h^2$$

$$=2\sigma^2 h \quad (28)$$

計算結果は(27)，(28)式であり，この場合もリターン平均値，分散パラメータの整合性が離散時間の範囲内で確認できる。

4. 結論と課題

われわれはRubinstein(2000)論文を通して，2 項モデルと 3 項モデルとの関係を検討した。Rubinstein(2000)のモデルは両者の関係を統合している点で評価すべきものであるが，連立方程式を解く過程において，未知数の数と方程式の数をあまり念頭においていないものと思われる。また，2 項の場合のリターン期待値，分散パラメータの整合性の観点から問題があると思われる。

一方，その点を改善するJarrow & Rudd(1983, p.188)の 2 項モデルはリスク中立確率を1/2と定める点で自由度が低いという難点はあるものの，計算結果において，Rubinstein(2000)が意図した，2 項モデルの合成による 3 項モデルの提示に成功していることが確認できた。

一般に，リターン期待値，分散パラメータの整合性を離散時間にて保証する

ためには，パラメータ設定において，どこかに制限を課さなければならなくなる。拙稿(2001)は2項モデルでアップダウン非対称に定めた方法を示しているが，極端に歪度の絶対値の大きなリスク中立確率測度を創出する可能性がある。今後は，本稿で整理した論点を発展させ，パラメータの整合性を保ちつつも，無理のない，パラメータ設定を研究して行きたい。

参考文献

Boyle, Phelim (1988), "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State ariables," Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.23, No.1, p.1-12.

Cox, John C. and M. Rubinstein (1985), Options Market, Prentice-Hall, Inc.

Jarrow, Robert A. and A. Rudd (1983), Option Pricing, Richard D. Irwin, Inc.

Kamrad, Bardia and P.Ritchken (1991), "Multinominal Approximating Models for Options with k State variables," Management Science, Vol. 37, No.12, p.1640-1652.

Ritchken, Peter (1995), "On Pricing Barrier Options," Journal of Derivatives, Winter 1995, p.19-28.

Rubinstein, Mark (2000), "On the Relation between Binominal and Trinominal Option Pricing Models," Journal of Derivatives, Winter 2000, p.47 - 50.

ラムベルトン,D., B.ラペール(2000),「ファイナンスへの確率解析」(森平爽一郎監訳，原書，"Introduction au Calcul stochastique Appliqué à la Finance," 1997) 朝倉書店

ネフィツィ，S. N. (1999),「ファイナンスへの数学」(投資工学研究会訳，原書，"An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives," 1996) 朝倉書店

高見茂雄 (2001),「拡張2項モデルによるリアル・オプション評価」, JAFEE 2001年冬季大会予稿集，p.197-213.

富大経済論集　第48巻第1号　正誤表

頁	行	誤	正
76	2～3行目	その低落は特に激しく，長引くことにならざるを得ない。	その低落は特に激しく，長引くことにならざるを得ない。
221	参考文献 1行目	Two State ariables,"	Two State Variables,"
〃	参考文献 6行目	State variables,"	State Variables,"