

CREACION DE UN PORTAFOLIO DE INVERSION CONSTITUIDO POR
VALORES PRIMARIOS TRANSADOS EN LA BOLSA DE VALORES DE
COLOMBIA, EMPLEANDO OPTIMIZACION MULTI OBJETIVO

Ing. ALVIN ARTURO HENAO PEREZ

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
MAESTRIA EN INGENIERIA INDUSTRIAL
BARRANQUILLA
2007

CREACION DE UN PORTAFOLIO DE INVERSION CONSTITUIDO POR
VALORES PRIMARIOS TRANSADOS EN LA BOLSA DE VALORES DE
COLOMBIA, EMPLEANDO OPTIMIZACION MULTI OBJETIVO

Ing. ALVIN ARTURO HENAO PEREZ

Monografía de grado para optar al título de Magister en Ingeniería Industrial

Director
Carlos D. Paternina Arboleda, Ph.D.

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
MAESTRIA EN INGENIERIA INDUSTRIAL
BARRANQUILLA
2007

Nota de aceptación:

Ing. Carlos D. Paternina, Ph.D.
Director de Tesis

Ing. Luis Tarazona, MBA, MDU
Ph.D (En curso)
Jurado

Adm. Bernardo Bernardi, Ph.D.
Jurado

Ing. Angel León Gonzalez, Ph.D.
Coordinador programa
Maestría Ingeniería Industrial

Barranquilla, 8 de agosto de 2007

Para

Mi madre: Arelys.

Mi esposa: Mónica.

Mis hijos: Erick y Sara.

AGRADECIMIENTOS

Mis notas de agradecimiento dirigidas a Ing. Carlos Paternina, director de esta tesis quien sugirió el tema de investigación y que en su momento actuó como profesor formando mis bases en optimización.

Gracias al cuerpo de profesores de la maestría quienes con su conocimiento ampliaron mis horizontes profesionales.

A mis compañeros de estudio, quienes conocen de la angustia vivida durante la carrera, en especial al Ing. Carlos Ardila, profesor del Departamento de Ingeniería de Sistemas, quien de manera desinteresada facilitó mi entendimiento sobre algoritmos evolutivos y allanó el camino para la realización de esta tesis.

CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCION	12
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	15
1.1. IDENTIFICACION DEL PROBLEMA	15
1.2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION	18
1.3. ALTERNATIVAS DE SOLUCION PLANTEADAS	20
1.4. JUSTIFICACION	20
1.5. ALCANCE Y LIMITACIONES	21
2. MARCO DE REFERENCIA	26
2.1. MARCO TEORICO	26
2.2. MARCO CONCEPTUAL	69
3. DISEÑO METODOLOGICO	73
4. ANALISIS DE RESULTADOS	76
4.1. ANALISIS DE SERIES DE TIEMPO	77
4.1.1. Análisis de datos IGBC	77
4.1.2. Análisis de datos TRM	91
4.1.3 Análisis de datos ITES	97
4.2. ANALISIS DE PORTAFOLIO	102
4.2.1. Comportamiento real del portafolio	103
4.2.2. Optimización multiobjetivo del portafolio (MOP)	110
CONCLUSIONES	127
BIBLIOGRAFIA	134
ANEXOS	137

LISTA DE TABLAS

	Pag.
Tabla 1. Resultados de investigaciones realizadas sobre pronósticos de volatilidad	53
Tabla 2. Evaluación de pronóstico dlnIGBC	91
Tabla 3. Evaluación de pronóstico dlnTRM	97
Tabla 4. Matriz de varianzas y covarianzas. Periodo 1/2/2002-3/17/2006	104
Tabla 5. Estadísticos de las series analizadas en el periodo 01/02/2002 – 03/16/2006	104
Tabla 6. Rendimientos activos en 03/17/2006	108
Tabla 7. Portafolio real de 03/17/2006	109
Tabla 8. Resultados optimización tradicional	112
Tabla 9. Resultados optimización multiobjetivo con medias muestrales y homocedasticidad	114
Tabla 10. Resultados optimización multiobjetivo con 10 Generaciones	118
Tabla 11. Resultados optimización multiobjetivo con 20 Generaciones	121
Tabla 12. Resultados optimización multiobjetivo con 50 Generaciones	123
Tabla 13. Proporciones de inversión en activos	125
Tabla 14. Resultados de la optimización estocástica empleando GAMS	178
Tabla 15. Escenarios Estocásticos de varianza	179
Tabla 16. Rentabilidades estimadas a partir de las ecuaciones	180
Tabla 17. Resultados frecuentes en los escenarios	180

LISTA DE FIGURAS

	Pag
Figura 1. Arbol de Causa – Efecto	17
Figura 2. Arbol de Medios y Fines.	19
Figura 3. Integracion de agentes en los mercados financieros.	21
Figura 4. Ciclo principal SPEA2	66
Figura 5. Series de precios a analizar (IGBC, TRM e ITES)	78
Figura 6. Series de rendimientos de las series analizadas.	79
Figura 7. Serie IGBC sin transformación.	79
Figura 8. Serie IGBC transformada mediante el uso de la función logaritmo natural.	81
Figura 9. Correlograma de la serie lnIGBC	82
Figura 10. Prueba de Dickey Fuller sobre los valores de la serie lnIGBC	83
Figura 11. Prueba de Dickey Fuller sobre la serie lnIGBC diferenciada. (En adelante dlnIGBC)	84
Figura 12. Comportamiento de la serie diferenciada a lo largo del tiempo	85
Figura 13. Correlograma de los rendimientos de las acciones (serie dlnIGBC)	85
Figura 14. Correlograma del cuadrado de los rendimientos	86
Figura 15. Correlograma del valor absoluto de los rendimientos	87
Figura 16. Valores de las funciones de autocorrelación muestral para la serie dlnIGBC (rendimientos de acciones), rendimientos al cuadrado y valor absoluto de los rendimientos	88
Figura 17. Comportamiento del logaritmo del precio de TRM para el periodo analizado	92
Figura 18. Correlograma de la serie lnTRM.	93
Figura 19. Correlograma de la serie dlnTRM	94
Figura 20. Prueba de Dickey Fuller aplicada a la serie dlnTRM	95
Figura 21. Comportamiento de los rendimientos TRM en el tiempo.	96
Figura 22. Comportamiento del logaritmo del precio de ITES para el periodo analizado	98
Figura 23. Correlograma de la serie lnITES.	98
Figura 24. Prueba de Dickey Fuller aplicada sobre la serie lnITES	99
Figura 25. Correlograma de la serie dlnITES	100

Figura 26. Prueba de Dickey Fuller aplicada a la serie $\ln I T E S$	101
Figura 27. Frontera eficiente obtenida bajo optimización tradicional	107
Figura 28. Pesos de los activos para la frontera eficiente bajo optimización tradicional	107
Figura 29. Comportamiento del portafolio real 3/17/06	109
Figura 30. Composición del portafolio real 3/17/06	110
Figura 31. Frente de Pareto utilizando MOP y medias muestrales como parámetros	115
Figura 32. Proporciones de inversión en activos del Portafolio tradicional bajo MOP	116
Figura 33. Comparación entre SOP y MOP (Evaluación de métodos)	117
Figura 34. Frente de Pareto utilizando MOP y modelos GARCH (10 generaciones)	119
Figura 35. Comparación SOP con medias muestrales y MOP con modelos GARCH (10 generaciones)	120
Figura 36. Frente de Pareto utilizando MOP y modelos GARCH (20 generaciones)	122
Figura 37. Comparación SOP con medias muestrales y MOP con modelos GARCH (20 generaciones)	122
Figura 38. Frente de Pareto utilizando MOP y modelos GARCH (50 generaciones)	124
Figura 39. Comparación SOP con medias muestrales y MOP con modelos GARCH (50 generaciones)	125
Figura 40. Resultados del modelo $\ln i g b c$ para el periodo 01/02/2002 – 03/16/2006	138
Figura 41. Correlograma de los residuales de la media de $\ln I g b c$. Periodo 01/02/2002 03/16/2006.	139
Figura 42. Correlograma de los residuales cuadrados de $\ln I g b c$. Periodo 01/02/2002 03/16/2006.	140
Figura 43. Gráfica de Probabilidad Normal para residuales estandarizados de la serie $\ln I g b c$.	141
Figura 44. Pronóstico estático $\ln i g b c$ del periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007	142
Figura 45. Residuales cuadrados vs pronóstico de volatilidad $\ln I G B C$ en el periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007	143
Figura 46. Análisis de regresión de residuales cuadrados $\ln I g b c$ vs pronóstico estático de volatilidad.	144
Figura 47. Pronóstico dinámico de la volatilidad $i g b c$, periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007	145
Figura 48. Comparación gráfica del comportamiento de los residuales cuadrados vs pronóstico dinámico de la volatilidad, periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007	146
Figura 49. Análisis de regresión de residuales cuadrados vs pronóstico dinámico de volatilidad $\ln i g b c$.	147
Figura 50. Resultados del modelo $\ln i t r m$ para el periodo 01/02/2002 – 03/16/2006	149

Figura 51. Correlograma de los residuales de la media de LnTRM. Periodo 01/02/2002 – 03/16/2006	150
Figura 52. Correlograma de los residuales cuadrados de LnTRM. Periodo 01/02/2002 – 03/16/2006.	151
Figura 53. Gráfica de Probabilidad Normal para residuales estandarizados de la serie DlnTRM	152
Figura 54. Pronóstico estático dlnTRM del periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007	153
Figura 55. Residuales cuadrados vs pronóstico de volatilidad dlnTRM en el periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007	154
Figura 56. Análisis de regresión de residuales cuadrados dlnTRM vs pronóstico estático de volatilidad.	155
Figura 57. Pronóstico dinámico de la volatilidad TRM, periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007	156
Figura 58. Comparación gráfica del comportamiento de los residuales cuadrados vs pronóstico dinámico de la volatilidad, periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007	157
Figura 59. Análisis de regresión de residuales cuadrados vs pronóstico dinámico de volatilidad TRM.	158
Figura 60. Resultados del modelo dlnITES para el periodo 01/02/2002 – 03/16/2006	160
Figura 61. Correlograma de los residuales de la media de LnITES. Periodo 01/02/2002 – 03/16/2006.	161
Figura 62. Correlograma de los residuales cuadrados de LnITES. Periodo 01/02/2002 - 03/16/2006	162
Figura 63. Gráfica de Probabilidad Normal para residuales estandarizados de la serie dlnITES	163
Figura 64. Pronóstico estático dlnITES del periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007	164
Figura 65. Residuales cuadrados vs pronóstico de volatilidad dlnITES en el periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007	165

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo A	137
Anexo B	148
Anexo C	159
Anexo D	167
Anexo E	169
Anexo F	174
Anexo G	182

INTRODUCCION

El mercado de capitales se entiende como un conjunto de mercados formales e informales compuesto por agentes e instrumentos que permiten la transferencia, entre oferentes y demandantes, de recursos con los cuales se adelantan sus labores productivas. Dicha transferencia se realiza a través del mercado financiero y bursátil.

La Bolsa de valores es la institución del mercado de capitales que ofrece la mayor variedad de alternativas de inversión a través de los comisionistas de bolsa.

Sea que la inversión se efectúe en papeles al descuento, en papeles de renta fija, en títulos de rendimiento variable o se realicen operaciones especiales sobre títulos valores tales como derivados, strip de TES, operaciones simultáneas, operaciones de venta con pacto de recompra, operaciones SWAP y operaciones carrusel; todas presentan la característica, en algún momento de la inversión, de desconocer que rentabilidad que se puede generar. Esta dificultad está asociada a factores controlables o no, que afectan el comportamiento futuro de la inversión.

Esta incertidumbre ha sido objeto de estudio por aquellos que están en el mundo de los negocios, como también por parte de la academia. En este aspecto, diversas ciencias, en especial las financieras y económicas, se han ocupado de establecer métodos que faciliten el proceso de toma de decisiones. De igual manera, se han aplicado herramientas de Investigación de Operaciones que buscan optimizar la inversión que se efectúa.

En este trabajo de investigación se buscará construir un portafolio de inversión, a partir de valores primarios de acciones, bonos y dólares, negociados en la Bolsa de Valores de Colombia, empleando herramientas de optimización con el objeto

de establecer las proporciones de inversión en los activos que compondrán tal portafolio. Se empleará un modelo Mean Variance el cual se optimizará de diferentes formas, teniendo como restricciones comunes en cada una de ellas, no permitir ventas en corto (valores positivos de los pesos de los activos que componen el portafolio) y el presupuesto (los pesos de los activos suman uno). Las formas en que se optimizará el modelo consisten en:

- Optimización monoobjetivo, considerando la minimización del riesgo del portafolio (varianza) como función objetivo, para un nivel deseado de rentabilidad, el cual se tomará como restricción. Se utilizarán las medias muestrales de los rendimientos históricos de los activos individuales que componen el portafolio y la varianza muestral de tales rendimientos. Por lo que esta forma de optimizar se considerará determinista.
- Optimización multiobjetivo del portafolio, empleando para ello dos funciones objetivo: minimización del riesgo (varianza) y maximización de la rentabilidad del portafolio. Al igual que en el anterior caso, se tomarán las medias muestrales y las varianzas y covarianzas muestrales de las series de rendimientos de los activos a incluir en el portafolio. Para la optimización se empleará el algoritmo evolutivo conocido como SPEA.
- Optimización multiobjetivo del portafolio, empleando modelos estocásticos heterocedásticos de series de tiempo para describir el comportamiento de las series de rendimientos de los activos a incluir en el portafolio, en lugar de emplear valores de medias y varianzas muestrales.

Los resultados obtenidos en cada caso se compararán entre si para determinar si existen diferencias significativas entre cada metodología que justifiquen su uso posterior como herramienta de construcción de portafolios.

El trabajo de investigación se presentará así:

En el capítulo 1 se identificará el problema que se pretende analizar y se plantearán alternativas de solución. De igual manera se definirán los objetivos que impulsarán este trabajo y su justificación.

El capítulo 2 contendrá los elementos teóricos y conceptuales requeridos y que constituyen la base académica de los resultados que se obtendrán.

El capítulo 3 expondrá la metodología que se seguirá para realizar la investigación, se citarán los insumos requeridos y los resultados esperados de las actividades planteadas.

Los resultados del trabajo de investigación se encontrarán en el capítulo 4 con el respectivo análisis. En una primera sección se obtendrán las series de tiempo estocásticas para cada activo a incorporar en el portafolio y en una segunda sección se realizará un análisis del portafolio y se aplicarán los métodos de optimización citados líneas arriba.

Finalmente, se presentarán las conclusiones del trabajo y se propondrán nuevas líneas a investigar referentes al tema.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. IDENTIFICACION DEL PROBLEMA

Cuando una persona invierte, sea natural o jurídica, lo hace con la firme intención de ganar dinero. Esta sencilla premisa da lugar a toda una problemática que incluye interrogantes del tipo ¿Dónde invertir? ¿Es mejor esta opción que la otra?, ¿Se corre el riesgo de perder dinero?, ¿Cómo puedo evitar las pérdidas?

Una opción que se abre para la inversión de los excedentes financieros es la bolsa de valores. Sin embargo, como se mencionó en los antecedentes, la incertidumbre que rodea los resultados futuros, el desconocimiento en muchos casos de su forma de operación y las múltiples alternativas de inversión que ofrece, y si a esto se añade que el papel de los comisionistas de bolsa se remite solo a asesorar pero que en últimas la decisión de inversión recae sobre el dueño del dinero, produce entonces, un miedo natural a invertir en bolsa, lo que en definitiva se traduce en bajos niveles de inversión en esta alternativa para hacer crecer el dinero, comparado con otros países.

Adicional a esto, se creería, en principio, que cuando se invierte en bolsa se estaría buscando el título o activo que proporciona el mayor rendimiento, y esto no necesariamente es así. Dado que en bolsa existen variadas alternativas de inversión [CORREDORES, 2005], la naturaleza de las mismas permite decidir entre aquellas que ofrecen la mayor liquidez, o las que sean más seguras o las que ofrezcan mayor rentabilidad.

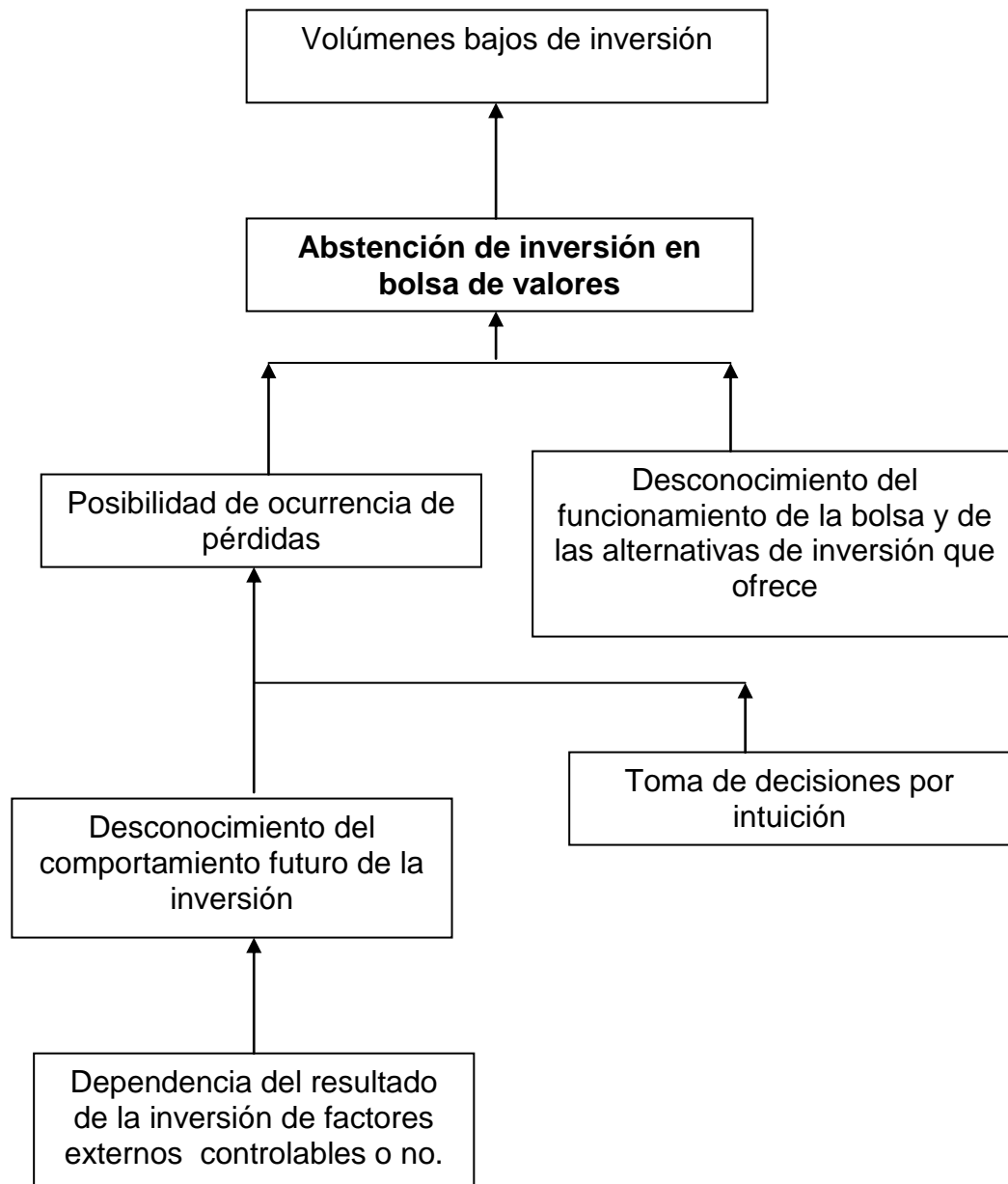
Atendiendo lo expuesto, un inversionista estaría interesado en maximizar estos objetivos, sin embargo, éstos riñen entre sí. Generalmente, la rentabilidad es mayor cuando el papel tiene menor liquidez y plazos más largos; de igual manera, el rendimiento será superior cuando la incertidumbre sobre el desempeño de la entidad emisora es mayor, lo que se traduce en menor seguridad. Si se quisiera mayor seguridad (menor riesgo) entonces, debería estarse dispuesto a sacrificar rentabilidad.

Encuentros entre académicos y profesionales del sector [ZENIOS, 1999] han permitido concluir que los modelos con suposiciones simples de gran valor académico, tienen poca simpatía entre los que se mueven en los mercados financieros del mundo real. Han concluido que es mejor proporcionar una aproximación de solución con un modelo completo siempre que sea posible, en lugar de obtener una solución elaborada a partir de un modelo aproximado pero sobresimplificado. Dada la complejidad de lo propuesto, herramientas como la simulación, modelos de optimización de varios tipos y las nuevas tecnologías computacionales son de enorme valor crítico.

Por lo anterior se presenta un reto en este sentido, los modelos desarrollados están basados en el comportamiento de los mercados internacionales y en los instrumentos financieros que allí se transan. ¿Qué hay del mercado colombiano, son aplicables? Si adicionalmente, se incluyen los propósitos citados líneas arriba, asociados con la búsqueda de rentabilidad, seguridad y liquidez, y la interdependencia de los mercados financieros, ¿puede obtenerse un modelo que ofrezca una solución aproximada al problema planteado, desde la óptica de construcción de un portafolio de inversión basado en instrumentos financieros primarios?

Estos interrogantes motivaron el trabajo de investigación que se desarrolla y se presentan de manera esquemática en la figura 1.

Figura 1. Arbol de Causa - Efecto



Fuente: Propio

1.2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION

Los objetivos que se plantean surgen a partir de la construcción del árbol de fines y medios descrito en la figura 2. Estos tendrán un sesgo hacia las ramas que se quieren explorar como son los modelos desarrollados para la descripción del funcionamiento de los mercados financieros.

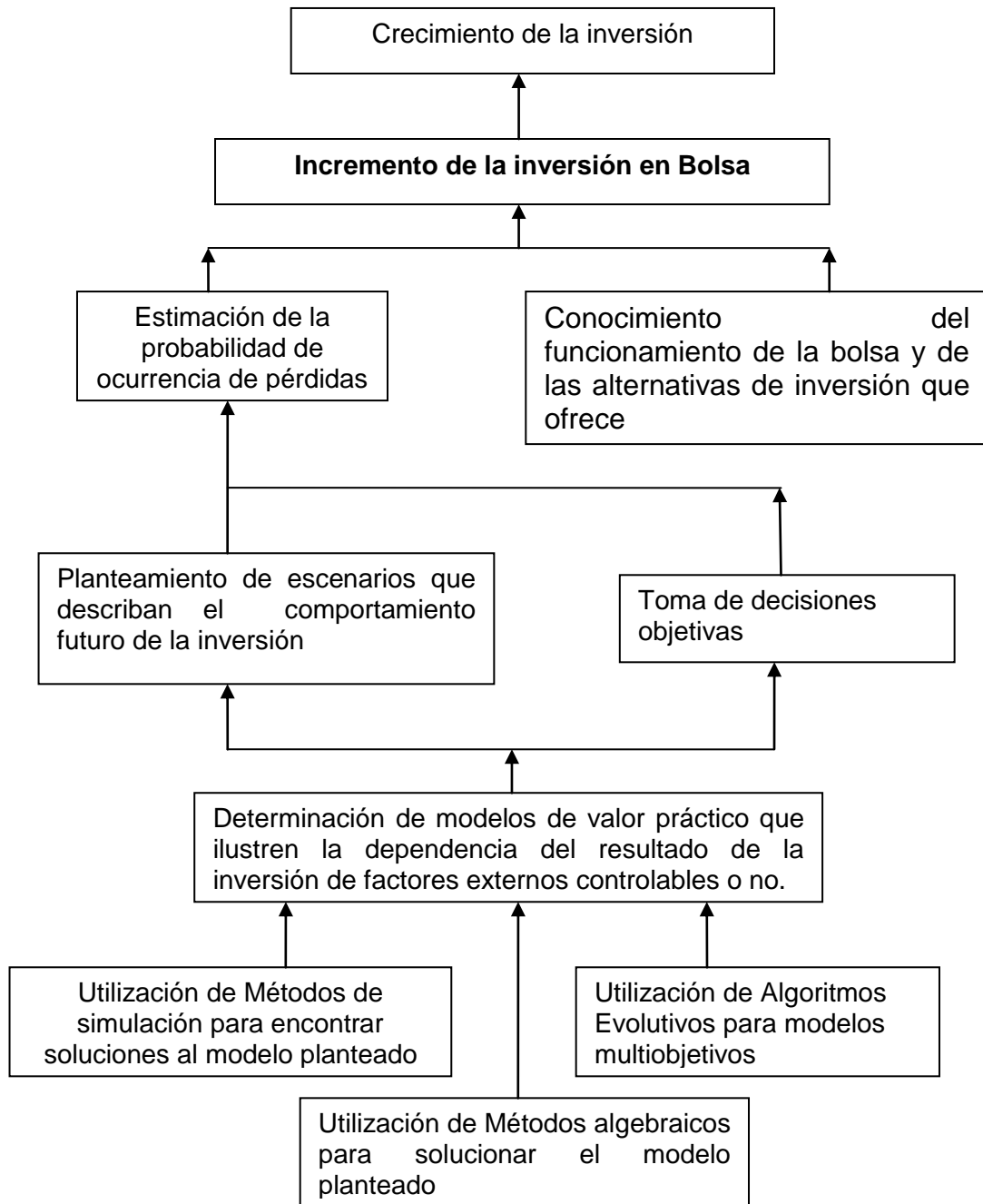
1.2.1. Objetivo General. Aplicar técnicas comparativas de optimización monoobjetivo y multiobjetivo en la construcción de portafolios de inversión basados en modelos Mean Variance y series de tiempo para proveer información que facilite el proceso de toma de decisiones de inversión en instrumentos financieros primarios transados en la Bolsa de Valores de Colombia.

1.2.2. Objetivos Específicos.

- Explicar el comportamiento de los rendimientos de los instrumentos financieros seleccionados en la Bolsa de Valores de Colombia, a través de series de tiempo
- Adaptar un modelo de optimización multiobjetivo, que represente el comportamiento de un portafolio de inversión constituido por instrumentos financieros primarios.
- Explorar los métodos de solución de los modelos matemáticos pertinentes con el fin de seleccionar el adecuado para el modelo que se adapte.
- Validar el modelo empleado, mediante datos históricos para generar confianza sobre su utilidad

En la figura 2. se muestra el diagrama de medios y fines propuesto.

Figura 2. Arbol de Medios y Fines.



Fuente: Propio

1.3. ALTERNATIVAS DE SOLUCION PLANTEADAS

A partir del árbol de medios y fines ilustrado en la figura 2, es evidente que para obtener un modelo de valor práctico, para el caso colombiano, que muestre la dependencia del resultado de la inversión de factores externos controlables o no, éste debe ser solucionable por cualquiera de los métodos de solución descritos, a saber: simulación, algoritmos evolutivos y/o métodos algebraicos.

En el caso de este trabajo de investigación se explorarán soluciones empleando algoritmos evolutivos dado el carácter multiobjetivo del problema planteado.

1.4. JUSTIFICACION

En tiempos recientes, herramientas aportadas por la investigación de operaciones han alcanzado un estado de madurez y sofisticación que han llamado la atención de los profesionales y académicos del sector financiero, dado el impacto significativo que podrían tener en esta área. De igual manera, los avances tecnológicos computacionales facilitan el desarrollo y validación de modelos. Como resultado de esto, los modelos de optimización se han convertido en herramientas indispensables en diversos campos de las operaciones financieras.

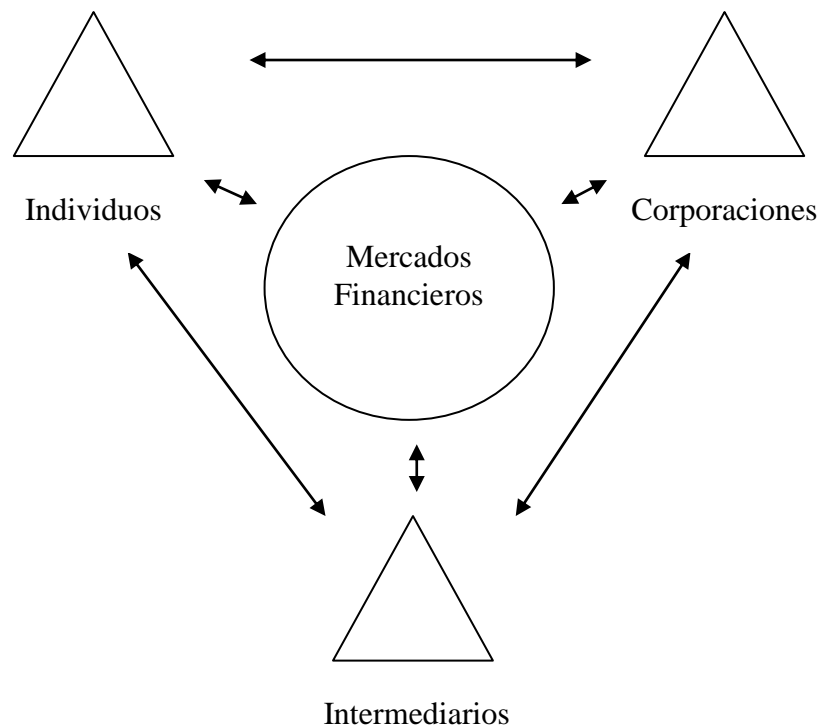
Conocedores del tema [ZENIOS, 1999] consideran que la optimización financiera promete ser un área de aplicación comparable al uso de modelos administrativos en logística, transporte y producción.

Considerando el potencial descrito antes y la pertinencia de su aplicación al mercado de valores de Colombia, se justifica, entonces, la realización de esta investigación.

1.5. ALCANCE Y LIMITACIONES

1.5.1. Alcance. Para efectos de definir el alcance de este trabajo de investigación, se partirá del modelo planteado en [SHIRYAEV, 2004], en el cual se muestran los objetos básicos y estructuras de la teoría financiera que definen y explican la naturaleza específica de los problemas, objetivos y herramientas de la matemática e ingeniería financiera, integrados de la manera descrita en la siguiente figura:

Figura 3. Integración de agentes en los mercados financieros.



Fuente: Tomada de [SHIRYAEV, 2004]

La ilustración sugiere que cualquiera de los elementos reseñados en ella, puede servir como eje de análisis. Para el caso específico de este trabajo, su alcance se limita al planteamiento del modelo desde la óptica de los individuos.

Ello implica considerar que las actividades financieras de éstos, pueden ser descritas en términos del dilema consumo – inversión. La ambivalencia de su comportamiento, consumir más ahora ó invertir ahora para conseguir más a futuro a costa del consumo presente, plantea el problema de optimización formulado en economía matemática como consumo-ahorro y toma de decisiones de portafolio. El primer problema se analiza bajo los postulados del comportamiento racional de los individuos bajo incertidumbre, en el marco de la Teoría de Utilidad, fuera del alcance de este trabajo. El problema de Tomada de Decisiones de Portafolio que enfrentan los individuos, puede describirse, en términos generales, como la mejor asignación (inversión) de fondos (con atención a los posibles riesgos) entre diferentes valores [SHIRYAEV, 2004].

Lo anterior conduce al individuo a buscar alternativas de inversión donde pueda colocar sus recursos. Una fuente particular que ofrece alternativas diversas de inversión es la Bolsa de Valores; donde confluyen oferentes y demandantes para vender y comprar títulos valores a un precio acordado.

La Bolsa de Valores de Colombia es un establecimiento privado autorizado por el Gobierno nacional donde se reúnen física o “virtualmente” los miembros que conforman la Bolsa con el fin de realizar las operaciones de compra-venta de valores.

Dado que los mercados sobre los que se toman decisiones de inversión en la Bolsa de Valores de Colombia tienen que ver con¹:

¹ Tomado de la presentación “Temas estratégicos del mercado de valores” realizada por el presidente de la Bolsa de Valores de Colombia, Juan Pablo Córdoba, en la Universidad del Norte, septiembre 28 de 2006.

- Acciones.
- Deuda privada.
- Deuda pública.
- Derivados.
- Cambiario.

Entonces la tarea es identificar las ecuaciones apropiadas para calcular las rentabilidades y riesgos asociados a los títulos negociados en estos mercados.

Sin embargo, el análisis que se realizará en este trabajo girará en torno a decisiones de inversión que busquen maximizar la rentabilidad del individuo con el mínimo riesgo, sobre instrumentos financieros primarios o tradicionales, es decir, acciones, moneda extranjera (dólares) y Títulos de Tesorería.

Se dejan por fuera del alcance, los títulos de rendimiento mixto y las operaciones especiales sobre títulos valores: Derivados, Operaciones a plazo de cumplimiento efectivo (OPCE), operaciones a plazo de cumplimiento financiero (OPCF), Opciones, Strip de Tes, operaciones simultáneas, operaciones de venta con pacto de recompra (REPO), operaciones SWAP y cualquier otra operación no explícita en el alcance descrito.

De igual manera, en el ámbito de la modelación se busca establecer una comparación entre optimización monobjetivo y optimización multiobjetivo. No se pretende comparar los diferentes métodos de optimización multiobjetivo.

A manera de resumen, el alcance de este trabajo comprende la construcción de un modelo matemático que permita crear un portafolio de inversión (considerando la máxima rentabilidad y el mínimo riesgo) por parte de un individuo, con el objeto de invertir estos recursos en alternativas de inversión sobre instrumentos financieros primarios (acciones, bonos, mercado cambiario) negociadas en el

mercado secundario de la Bolsa de Valores de Colombia, teniendo en cuenta las limitaciones adelante señaladas.

El modelo desarrollado no considera pago de comisiones a intermediarios, ni impuestos tales como el Cuatro por Mil, retención en la Fuente o impuesto de renta, tampoco considera restricciones reales dentro del esquema colombiano que afectan las inversiones en bolsa.

1.5.2. Limitaciones. Un modelo explícito que considere la gran variedad de instrumentos financieros primarios² negociados en el mercado secundario de la Bolsa de Valores de Colombia, haría supremamente compleja su elaboración y su posterior solución.

Por esta razón el modelo que se plantea se hace sobre la base de indicadores que reflejan la tendencia general de un grupo de títulos en particular. Tales indicadores son: ITES, IGBC y TRM. El primero, desarrollado por el grupo Bancolombia, agrupa los títulos emitidos por el gobierno nacional; el segundo, corresponde al Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia, que reúne a las acciones de mayor bursatilidad y finalmente la TRM, es la Tasa Representativa del Mercado que muestra el comportamiento de la tasa de cambio del dólar a pesos.

Debido a esto, el modelo sugerirá que fracción del portafolio resultante estará constituida por papeles del Estado, por acciones y por Dólares, atendiendo la frontera eficiente, pero no especificará nombres de títulos particulares.

² Papeles al descuento, de renta fija a tasa fija, de renta fija a tasa variable, títulos de participación como inversión en acciones o participación en fondos de valores, e inversiones en dólares y euros.

Por otra parte, dentro de los supuestos considerados se tienen el no contemplar comisiones de venta o compra pagadas a los intermediarios, ni gravámenes tales como impuesto de renta, retención en la fuente o gravamen a los movimientos financieros (4 por mil). Este supuesto permitirá establecer una igualdad entre el precio de compra, el precio de registro y el precio de venta de cualquier valor negociable, facilitándose de esta manera el análisis de los rendimientos.

Las restricciones de optimización en el caso monoobjetivo tendrán que ver con el establecimiento de una rentabilidad del portafolio deseada, ventas en corto no permitidas (valores de los pesos de los activos positivos) y la suma de las proporciones de inversión en cada activo es uno. No existen restricciones asociadas al manejo de otros riesgos tales como el de liquidez o el del sector, o cualquier otra restricción diferente a las señaladas explícitamente.

Este trabajo de investigación empleará modelos GARCH para el análisis de la volatilidad de las series bajo estudio, dado que este tipo de modelos explican los clusters de volatilidad y las colas gruesas observados en las series de tiempo financieras. Aunque se sabe que se han propuesto otros modelos que pretenden explicar el comportamiento de estas series, tales como IGARCH, GARCH-M, EGARCH, TGARCH, CHARMA y los modelos de volatilidad estocástica; cuyas diferencias se basan en la manera como expresan la evolución de la volatilidad.

Debido a las limitaciones propias de las series de tiempo, los pronósticos efectuados solo podrán realizarse un día hacia delante. Pronósticos superiores a este lapso, bajo los modelos empleados, son de poco interés práctico, tal como ha sido reseñado en la literatura pertinente y como se sustentará en este documento en la sección respectiva.

2. MARCO DE REFERENCIA

2.1. MARCO TEORICO

2.1.1. Indicadores utilizados en Bolsa de Valores de Colombia. Se hará una presentación breve de los aplicables a este trabajo de investigación.

- ITES [BANCOLOMBIA, 2007]: Este es un índice que representa el mercado de deuda pública interna elaborado por BANCOLOMBIA y SUVALOR. Propuesto por ellos como un medio para facilitar el análisis de las tendencias de los títulos emitidos por el gobierno colombiano, acorde con su estrategia de implementar una estrategia de mayor endeudamiento interno y menor endeudamiento externo, dada su variedad y consolidación como una atractiva alternativa de inversión.

El ITES es un índice que resulta del análisis cuantitativo de una canasta de los títulos de tesorería (TES) a tasa fija que representan más del 95% del promedio diario de las operaciones totales de títulos por el Sistema Electrónico de Negociación (SEN) que administra el Banco de la República. El índice involucra tanto la liquidez del papel como la volatilidad del precio limpio para calcular su participación dentro de la canasta. Se emplea el precio limpio, dado que éste no está afectado por el cupón causado desde el último pago a la fecha de operación. Es decir, aquel que no involucra el efecto de la cercanía del pago de los cupones y es una medida más exacta del precio del papel ante la estabilidad de la tasa de rendimientos en el mercado secundario.

- IGBC, Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia [‡] [BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA, 2007]. Mide la variación de los precios de las acciones más representativas del mercado, es decir, las más transadas, para que a partir del mismo se pueda construir un portafolio con las acciones del índice, base fundamental para productos derivados.

El número de acciones que compone el índice es variable, se calcula trimestralmente y empieza a regir para el trimestre siguiente. El índice se calcula cada instante de las negociaciones y su valor definitivo corresponde al calculado 30 minutos después del cierre del mercado.

Las acciones que permiten el cálculo del índice se establecen con base en el cumplimiento de un conjunto de criterios definidos sobre la información requerida por cada acción inscrita en Bolsa, la cual tiene que ver con la liquidez o rotación de la acción, frecuencia de negociación, cantidades diarias transadas en el año inmediatamente anterior al cálculo del índice, último precio de cotización oficial disponible y el valor nominal de la acción en cada periodo de tiempo. Para más detalles puede consultarse la referencia citada

- TRM, Tasa Representativa del Mercado. La tasa de cambio mide la cantidad en pesos que se debe pagar por una unidad de moneda extranjera. En el caso colombiano se toma como base el dólar porque es la divisa más usada en el país para las transacciones con el exterior. La tasa de cambio sube o baja dependiendo de la oferta y la demanda. Cuando la oferta es mayor que la demanda, es decir, hay abundancia de dólares en el mercado y pocos compradores la tasa baja. Caso contrario, abundancia de demanda y poca oferta (escasez de dólares) la tasa sube [BANCO DE LA REPUBLICA, 2007].

[‡] Tomado del documento: Definición del Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC) y de sus índices sectoriales, elaborado por la Bolsa de Valores de Colombia, disponible en: <http://www.bvc.com.co/bvcweb/administracion/editor/homeFiles/Normatividad/Manuales/IGBC.pdf>. Marzo 22 de 2007

La Tasa Representativa del Mercado es el promedio ponderado de las operaciones de compra y venta de dólares sin incluir las operaciones de ventanilla (conocidas como aquellas que se realizan en el next day o mercado de compra y venta de dólares que funciona entre las 14:30 y 16:30 horas) y derivados sobre divisas que llevan a cabo los establecimientos de crédito (sin incluir las compañías de financiamiento comercial) en las cuatro principales ciudades del país (Bogotá, Cali, Medellín y Barranquilla). Las operaciones cambiarias pueden efectuarse entre las mismas entidades de crédito y otros intermediarios del mercado cambiario y conformando el mercado interbancario. Las transacciones pueden efectuarse en efectivo, cheque o transferencia bancaria [GRUPO DE INVESTIGACIONES ECONOMICAS DE CORFINSURA, 2007].

2.1.2. Rendimiento de activos. Aunque en las bases de datos que guardan información sobre el comportamiento de los activos transados en Bolsa, es frecuente encontrar la evolución de sus precios diarios, la mayoría de los estudios financieros se basan en los rendimientos de tales activos. Según [Tsay, 2005] existen dos razones principales para ello:

- Le da al inversionista promedio un resumen completo y libre de escalas (no depende de si está en pesos, dólares, centavos, etc) de la oportunidad de inversión.
- Las series de rendimientos son más fáciles de manejar que las series de precios porque las primeras tienen propiedades estadísticas más atractivas.

Lo anterior conduce a precisar el concepto de rendimiento de un activo. En [RUPPERT, 2004], se encuentra una presentación sencilla de los distintos tipos de rendimientos que se pueden dar:

- Rendimiento neto de un activo. La expresión matemática que lo representa para el periodo de retención de la inversión desde el tiempo t-1 hasta el tiempo t, viene dada por:

Ec. 2.1:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

En la que P_t es el precio del activo en el tiempo t y no se pagan dividendos. La diferencia en el numerador indica las utilidades o pérdidas según el signo obtenido y el denominador corresponde a la inversión inicial en el punto de partida del periodo de retención de la inversión. De acuerdo con esto las utilidades (o pérdidas) de la inversión vendrían dados por:

Utilidad (Pérdida) = Inversión inicial * Rendimiento neto

- Rendimiento Bruto de un activo. A partir de la ecuación 1 se puede establecer el rendimiento bruto:

Ec. 2.2:

$$R_t + 1 = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Si se desea calcular el rendimiento bruto obtenido en un lapso de k periodos, entonces éste se obtiene a partir del producto de los rendimientos brutos de cada periodo k (desde el tiempo t-k hasta el tiempo t):

Ec. 2.3:

$$1 + R_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right) \dots \left(\frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \right) = (1 + R_t) \cdot (1 + R_{t-1}) \cdot \dots \cdot (1 + R_{t-k+1})$$

- Log returns (logaritmo del rendimiento o log rendimiento por su traducción al español). Esta expresión corresponde a un interés compuesto continuo, denotado por r_t y definido como:

Ec. 2.4:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1}$$

En la que p_t se define como $\ln(P_t)$ y se llama logaritmo del precio o simplemente Log precio.

[Ruppert, 2004], demuestra que r_t es aproximadamente igual al rendimiento y señala que una de las ventajas del uso de log returns es su simplicidad para rendimientos multiperiodos, dado que log rendimiento para k periodos es simplemente la suma de los log rendimientos de cada uno de los k periodos simples, en lugar de un producto de rendimientos:

$$\begin{aligned} r_t &= \ln(1 + R_t) \\ &= \ln(1 + R_t) \cdots (1 + R_{t-k+1}) \\ &= \ln(1 + R_t) + \cdots + \ln(1 + R_{t-k+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1} \end{aligned}$$

- Rendimiento de un Portafolio. [Tsay, 2005] señala que el rendimiento de un portafolio, p , constituido por N activos es simplemente un promedio ponderado de los rendimientos netos de los activos involucrados, en el que la ponderación corresponde al porcentaje del valor del portafolio invertido en el activo i. Por lo que la ecuación que sigue representa el rendimiento neto de un portafolio, p , en el tiempo t:

Ec. 2.5:

$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^N w_i R_{i,t}$$

El autor citado, indica que el rendimiento compuesto continuo (log rendimiento) no exhibe la anterior propiedad. Sin embargo, señala que si los R_{it} , son todos pequeños en magnitud, entonces puede realizarse la siguiente aproximación:

Ec. 2.6:

$$r_{p,t} \approx \sum_{i=1}^N w_i r_{i,t}$$

La cual es frecuentemente usada en los estudios referidos a rendimientos de portafolios.

2.1.3. Modelos de Series de Tiempo. [Pindyck, 2001] Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones de una variable x_t , cada una de las cuales ha sido registrada en un tiempo específico t . En esta clase de modelos se supone no saber nada sobre la causalidad que afecta a la variable que se analiza o se pretende pronosticar; dado que explicar el movimiento de la variable por medio de un modelo estructural puede ser difícil o imposible, ya sea porque no se dispone de datos para aquellas variables explicativas que se cree afectan a x_t . O si se dispone de datos, la estimación de un modelo de regresión para x_t puede dar como resultado errores estándares tan grandes que hacen insignificantes a la mayor parte de los coeficientes estimados y al error estándar de pronóstico inaceptablemente grande.

En lugar de ello, se examina el comportamiento pasado de la serie de tiempo, con el objeto de inferir algo acerca de su comportamiento futuro. Los métodos empleados para producir un pronóstico pueden implicar el uso de un modelo

determinista simple como una extrapolación lineal o el uso de un modelo estocástico complejo para pronóstico adaptable.

Cuando se analizan series de tiempo estocásticas resulta de interés determinar si el proceso subyacente que generó la serie es invariable con respecto al tiempo. De ser así se denominará estacionaria y podrá modelarse el proceso a través de una ecuación con coeficientes fijos que pueden estimarse de datos pasados. Caso contrario, se llamará no estacionaria y por lo general será difícil modelarla, durante intervalos de tiempo pasados y futuros, con un modelo algebraico simple.

El procedimiento general para analizar una serie de tiempo consiste en:

- Graficar la serie y examinar sus características generales, chequeando en particular si existe:
 - Tendencia
 - Componentes estacionales.
 - Cambios abruptos en el comportamiento
 - Outliers.

- Se deben remover componentes estacionales y tendenciales para conseguir residuales estacionarios. Para lograr este objetivo, con frecuencia será necesario aplicar una transformación preliminar a los datos. Por ejemplo, si las magnitudes de las fluctuaciones crecen linealmente con el nivel de la serie, entonces, la serie transformada $\{\ln X_1, \dots, \ln X_t\}$ tendrá fluctuaciones de magnitud menos variable. Existen otras maneras en las que la tendencia y estacionalidad se pueden remover, algunas de las cuales consisten en estimar los componentes y sustraerlos de los datos, y otras dependen de la diferenciación de los datos, es decir, reemplazando la serie original $\{X_t\}$ por $\{Y_t$

= $X_t - X_{t-d}$ para algún entero positivo d . Cualquiera de los métodos empleados, apunta a conseguir series estacionarias.

- Los valores transformados se pronostican y luego se invierte la transformación descrita antes para obtener el pronóstico de la serie original $\{X_t\}$.

El objetivo de la transformación de datos descrita antes, es producir una serie sin desviación aparente de la estacionariedad y sin aparente tendencia o estacionalidad. Suponiendo que esto se consigue, el próximo paso es modelar la secuencia de ruido estimada (es decir, los valores transformados por diferenciación de datos o por estimación y sustracción de los componentes tendenciales y estacionales). Si no hay dependencia entre estos residuales, entonces puede considerárseles como observaciones de variables aleatorias independientes y no se requerirán posteriores modelos excepto para calcular la media y la varianza. Sin embargo, si existe dependencia significativa entre estos residuales, se necesitan contemplar modelos de series de tiempo más complejos, que tengan en cuenta esta interrelación. Esto se convertirá en una ventaja, dado que la dependencia quiere decir en particular que observaciones pasadas de la secuencia de ruido pueden asistir en la predicción de valores futuros [BROCKWELL, 2002].

De [BROCKWELL, 2002] se obtienen las siguientes definiciones:

Sea $\{X_t\}$ una serie de tiempo con $E(X_t^2) < \infty$. La función Media de $\{X_t\}$ es:

$$\mu_x(t) = E(X_t).$$

La función covarianza de $\{X_t\}$ es:

$$\gamma_x(r, s) = \text{Cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - \mu_x(r))(X_s - \mu_x(s))]$$

Para todos los enteros r y s .

$\{X_t\}$ es (débilmente) estacionaria si

1. $\mu_x(t)$ es independiente de t .
2. $\gamma_x(t+h, t)$ es independiente de t para cada h .

Sea $\{X_t\}$ una serie de tiempo estacionaria. La función de autocovarianza de $\{X_t\}$ en el rezago h es

$$G_x(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t).$$

La función de autocorrelación de $\{X_t\}$ con rezago h es

$$\rho_x(h) \equiv \frac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)}$$

Las cuales serán útiles para el proceso de obtención de una serie de tiempo estocástica.

También son útiles los siguientes conceptos:

- Ruido Blanco: si X_t es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas, cada una con media cero y varianza σ^2 , entonces X_t es estacionaria con función de covarianza igual al del ruido iid. Tal secuencia se conoce como ruido blanco (con media cero y varianza σ^2). Su notación es: $\{X_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$

- Función de autocorrelación muestral: Empleada para evaluar el grado de dependencia en los datos de una serie de tiempo y seleccionar un modelo para ellos. Si se cree que los datos son una realización de una serie de tiempo estacionaria $\{X_t\}$, entonces la función de autocorrelación muestral proporciona un estimado de la función de autocorrelación de $\{X_t\}$

- Pruebas para verificar estacionariedad de la Serie [BROCKWELL, 2002]. Las siguientes pruebas permiten verificar si los valores observados de una serie, provienen de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Si la secuencia de ruido tiene coeficientes de autocorrelación muestral significativamente diferentes de cero, se puede tomar ventaja de esta dependencia serial para pronosticar los valores futuros en términos de los valores pasados mediante la modelación del ruido como una serie de tiempo estacionaria.

1. Análisis de la Función de autocorrelación muestral: Para n grandes, los coeficientes de autocorrelación muestral de una secuencia iid Y_1, \dots, Y_n con varianza finita son aproximadamente iid con distribución $N(0, 1/n)$. Por consiguiente, si y_1, \dots, y_n es una realización de tal secuencia iid, alrededor del 95% de la autocorrelación muestral caería entre los límites $\pm 1.96/\sqrt{n}$. Si se calcula la autocorrelación muestral hasta un rezago de 40 y se encuentra que más de dos o tres valores caen fuera de los límites o que un valor cae bastante lejos de los límites, se puede rechazar la hipótesis nula de iid.
2. Test Portmanteau: En lugar de chequear si cada coeficiente de autocorrelación muestral cae dentro de los límites definidos en el numeral anterior, es posible considerar la siguiente estadística:

Ec. 2.7:

$$Q = n \sum_{j=1}^h \hat{\rho}^2(j)$$

Si Y_1, \dots, Y_n es una secuencia iid de varianza finita, entonces, por el mismo resultado del numeral anterior, Q es aproximadamente distribuido como la suma de cuadrados de variables aleatorias independientes $N(0,1)$, por lo que $\sqrt{n}\hat{\rho}(j)$, $j = 1, \dots, h$, se distribuye como Chi-cuadrado con h grados de

libertad. Un valor grande de Q sugiere que la función de autocorrelación muestral de los datos es muy grande para que los datos provengan de una secuencia iid. Por consiguiente, se rechazaría la hipótesis al nivel de significancia α si $Q > \chi^2_{1-\alpha}(h)$. Donde $\chi^2_{1-\alpha}(h)$ es el $1-\alpha$ cuantil de la distribución Chi cuadrado con h grados de libertad.

Un refinamiento de esta prueba, formulado por Ljung y Box (1978) reemplaza Q por:

Ec. 2.8:

$$Q_{LB} = \frac{n(n+2) \sum_{j=1}^h \hat{\rho}^2(j)}{(n-j)}$$

Cuya distribución se aproxima mejor a distribución Chi cuadrado con h grados de libertad.

Existen otras pruebas que pretenden verificar que los valores observados provienen de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, las cuales pueden consultarse en la referencia citada.

- Series De Tiempo No Estacionarias Con Raiz Unitaria [TSAY, 2005]. Las series de tiempo financieras (tasas de interés, tasas de cambio, o series de precios de un activo) tienden a ser no estacionarias. Estas series son llamadas series de tiempo no estacionarias de raíz unitaria. Uno de estos modelos se conoce como caminata aleatoria.

1. Caminata aleatoria. Una serie de tiempo sigue una caminata aleatoria si satisface:

$$p_t = p_{t-1} + a_t$$

Donde p_0 , es un número real que representa el valor inicial del proceso y $\{a_t\}$ es ruido blanco. Si a_t tiene una distribución simétrica alrededor de cero, entonces el valor condicional de p_t en p_{t-1} tiene una probabilidad 50-50 de subir o bajar, implicando que cambiará aleatoriamente. Obsérvese que el coeficiente de p_{t-1} es la unidad. Una serie de tiempo que sigue caminata aleatoria, no satisface la condición de estacionariedad débil de un modelo AR(1), el cual se explicará más adelante. Por esta razón, una serie que tiene este comportamiento se denomina serie de tiempo no estacionaria de raíz unitaria, no permitirá la predicción de valores futuros por lo que no revierte a la media:

$$\hat{p}_h(1) = E(p_{h+1} | p_h, p_{h-1}, \dots) = p_h$$

El cual es el valor en el origen de pronóstico. Tal pronóstico no tiene valor práctico. De igual forma, para horizontes de pronósticos superiores, el valor pronosticado es el mismo.

2. Caminata Aleatoria Con Tendencia. El modelo que lo describe es el siguiente:

$$p_t = \mu + p_{t-1} + a_t$$

Donde $\mu = E(p_t - p_{t-1})$ y $\{a_t\}$ es ruido blanco. La constante μ es muy importante en los estudios financieros. Esta representa la tendencia en el tiempo de la serie. Si se asume que p_0 es el valor inicial de la serie, se tiene:

$$\begin{aligned} P_1 &= \mu + p_0 + a_1 \\ P_2 &= \mu + p_1 + a_2 = 2\mu + p_0 + a_2 + a_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$P_t = t\mu + p_0 + a_t + a_{t-1} + \dots + a_1$$

Esta última ecuación muestra que la serie consiste de una tendencia temporal $t\mu$ y un proceso puro de caminata aleatoria $a_t + a_{t-1} + \dots + a_1$

3. Series De Tiempo Estacionarias Con Tendencia. Un modelo relacionado estrechamente con el citado antes, es el siguiente:

$$p_t = \beta_0 + \beta_1 t + r_t$$

Donde r_t es una serie de tiempo estacionaria. En este caso p_t crece linealmente en el tiempo a una tasa β_1 y por ello puede exhibir un comportamiento similar al de caminata aleatoria con tendencia. Sin embargo, existe una diferencia primordial entre ambos modelos: La caminata aleatoria con tendencia asume que la media es:

$$E(p_t) = p_0 + \mu t, \text{ y la varianza,}$$

$\text{Var}(p_t) = t\sigma_a^2$, ambos dependientes del tiempo. Por otra parte, el modelo estacionario con tendencia asume que la media es:

$$E(p_t) = \beta_0 + \beta_1 t, \text{ el cual depende del tiempo y la varianza:}$$

$$\text{Var}(p_t) = \text{Var}(r_t), \text{ el cual es finito e invariante en el tiempo.}$$

La serie estacionaria con tendencia puede ser transformada en una serie estacionaria únicamente removiendo la tendencia temporal a través de un análisis de regresión lineal simple.

4. Prueba De La Raiz Unitaria (Dickey Fuller Test). Una manera concluyente de verificar estacionariedad es aplicando la prueba de Dickey-Fuller aumentada. En esta prueba se parte del siguiente modelo:

Ec. 2.9:

$$\Delta y_t = \alpha y_{t-1} + x_t' \delta + \varepsilon_t$$

Donde $\alpha = \rho - 1$, x_t' es un regresor exógeno que puede consistir de una constante, o una constante y tendencia, ρ y δ son parámetros a estimar y ε_t se asume ruido blanco. Si $|\rho| < 1$, y_t es una serie estacionaria. Así, la hipótesis de estacionariedad puede evaluarse considerando si el valor absoluto de ρ es estrictamente menor que 1.

Las hipótesis a probar son:

Ho: $\alpha = 0$

H1: $\alpha < 0$

Aceptar la hipótesis nula implica reconocer que el modelo tiene raíz unitaria, por consiguiente la serie no es estacionaria.

2.1.4. Modelos lineales de Series de Tiempo. [BROCKWELL, 2002] [PINDYCK, 2001] [RUPPERT, 2004] [TSAY, 2005]. Existe vasta información al respecto por lo que puede ampliarse, en cualquiera de las referencias citadas, la información siguiente.

Una serie r_t se dice lineal si puede escribirse como:

$$r_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i}$$

Donde μ es la media de r_t , $\psi_0 = 1$ y $\{a_t\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y una distribución bien definida. La variable a_t denota la nueva información en el tiempo t de la serie de tiempo y frecuentemente se conoce como la innovación o shock en el tiempo t .

- Modelos Simples Autorregresivos (modelos AR). Estos modelos tienen la estructura:

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_p r_{t-p} + a_t$$

Donde a_t se asume es una serie ruido blanco con media cero y varianza σ_a^2 , p es un entero no negativo. Este modelo dice que los p valores pasados r_{t-i} ($i=1, \dots, p$) conjuntamente determinan la expectativa condicional de r_t dados los datos pasados. Este modelo tiene la misma forma que un modelo de regresión lineal múltiple con los valores rezagados desempeñando el papel de variables explicativas y r_t es la variable dependiente.

- Modelos De Promedio Movil Simple (MA). La forma general de un modelo MA(q) es en la forma:

$$r_t = c_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

ó

$$r_t = c_0 + \left(-\theta_1 B - \dots - \theta_q B^q \right) \hat{a}_t$$

donde $q > 0$.

- Modelos ARMA. En algunas ocasiones los modelos AR y MA presentados en las secciones previas son incómodos de manejar porque se requieren modelos de orden superior con muchos parámetros que describan la naturaleza dinámica de los datos. Esta dificultad se supera con los modelos autorregresivos de promedio móvil (ARMA). Un modelo ARMA combina la idea de modelos AR y MA en una forma compacta de tal forma que el número de parámetros usados se mantiene constante. Para series de rendimientos en finanzas, la oportunidad de utilizar modelos ARMA es bajo, pero el concepto de modelos ARMA es altamente relevante en la modelación de la volatilidad.

Como hecho concreto, el modelo heterocedastico condicional autorregresivo generalizado (GARCH) puede considerarse un modelo ARMA.

Una serie r_t sigue un modelo ARMA (p,q) si satisface:

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i}$$

Donde $\{a_t\}$ es una serie ruido blanco. El segundo término del lado izquierdo de la ecuación anterior, es el componente AR del modelo y el cuarto término es el componente MA. El término constante es ϕ_0 .

2.1.5. Series De Tiempo Financieras

[PREMARATNE, 2001] cita que las series de tiempo financieras presentan ciertas características comunes tales como: exceso de curtosis, clusters de volatilidad, asimetría y efectos leverage y estos hechos motivaron a que Engle propusiera su modelo ARCH enfocado en el segundo momento.

En general, los modelos ARCH asumen que las innovaciones tienen una distribución normal condicional y consideran la varianza condicional como una función lineal de los cuadrados de los residuales pasados. Esta especificación proporciona un segundo momento condicional que depende del tiempo, mientras que el segundo momento incondicional es independiente del tiempo. La naturaleza dependiente del tiempo del segundo momento condicional permite la captura de los clusters de volatilidad, que consiste en que los cambios grandes de precios son seguidos por grandes cambios en la dirección aleatoria.

Dado que bajo los procesos ARCH, la distribución incondicional tiene colas gruesas, la clase de modelos ARCH son apropiados para el análisis de datos financieros. En la publicación a la que se hace referencia, se describe el modelo matemático ARCH propuesto por Engel donde se observa a que se refiere con innovaciones que siguen una distribución normal condicional. También se observan las restricciones del modelo en cuanto los valores que pueden tomar los coeficientes para garantizar que la varianza sea positiva y finita.

El autor de la publicación consultada, comenta que la distribución normal condicional del modelo ARCH para la innovación en el periodo t genera una distribución incondicional de colas gruesas para la misma innovación haciéndolo atractiva para modelar datos financieros leptocúrticos. Hace referencia al modelo GARCH propuesto por Bollerslev el cual presenta como característica cambios más suaves en la varianza, con menor número de parámetros para calcular, cuyo éxito ha permitido la proposición de varias extensiones. Una de estas extensiones es el modelo propuesto por Glosten, Jagannathan y Runkle (GJR) para incluir asimetría en la varianza condicional o efectos leverage, cuando el precio de una acción cae (sube), la volatilidad de su rendimiento usualmente se incrementa (cae). Esto es menos igualdad implica más asimetría y más riesgo financiero.

También comenta que muchos investigadores han encontrado que el grado de leptocurtosis generado de la distribución normal condicional no parece capturar satisfactoriamente las colas gruesas de los datos financieros. Esto ha conducido a la consideración de supuestos alternativos a la normalidad condicional, entre los que se cita la distribución t de student propuesta por Bollerslev (1987), distribución de error generalizado propuesto por Nelson (1991). De igual manera cita los estudios que se han hecho para considerar la asimetría en los datos.

El autor considera que estas investigaciones no son capaces de recoger los hechos reales y por eso propone un nuevo marco general. Su enfoque está basado en la consideración de la teoría de utilidad del consumidor de tal forma

que se tenga en cuenta las preferencias del individuo en la toma de decisiones de inversión y considera que una mejor descripción de los datos financieros, desde el punto de vista del exceso de curtosis y la asimetría, contribuirá en la determinación del premio al riesgo que debe analizarse.

Según el investigador, la importancia de los modelos ARCH en la modelación de los datos financieros se debe a su versatilidad para caracterizar clusters de volatilidad, colas gruesas, efectos leverage y co-movimientos frecuentemente observados en los datos. Aun con errores condicionales normales, los modelos ARCH permiten exceso de curtosis presente en una distribución incondicional. Sin embargo muchos estudios empíricos han demostrado que el grado de leptocurtosis provocado por la normalidad condicional frecuentemente no captura todo el exceso de curtosis presente en los datos.

Lo anterior ha conducido a la proposición de modelos de distribución no normales tales como la distribución t de Bollerslev (1987), distribución de error generalizado de Nelson (1991) y distribución de Pearson tipo IV (Premaratne y Bera, 2000). Las cuales han sido más efectivas en muchos casos.

En los modelos ARCH, los errores de especificación pueden provenir de la media condicional, la varianza condicional o en la distribución básica. Por consiguiente la selección de los modelos ARCH debe hacerse con pruebas cuidadosamente seleccionadas para conseguir el mejor producto. Además, el funcionamiento de las pruebas depende de un conjunto de suposiciones fundamentales, las cuales si son violadas el producto obtenido debería ser revisado con cuidado.

Estos antecedentes invitan a incluir en este marco teórico aspectos relacionados con los modelos citados en la publicación aludida.

- Modelos Condicionales Heterocedasticos. En esta sección se presentan métodos estadísticos y econométricos para la modelación de la volatilidad de los rendimientos de un activo.

La volatilidad es una característica importante en la negociación de opciones. Por volatilidad se entiende la desviación estándar condicional del rendimiento del activo subyacente. La volatilidad tiene otras aplicaciones financieras importantes, dado que permite una aproximación simple para el cálculo del Valor en Riesgo, VaR, de una posición financiera en la administración del riesgo. También desempeña un rol importante en la asignación de activos bajo el esquema mean – variance. Además, la modelación de la volatilidad de una serie de tiempo puede mejorar la eficiencia en la estimación de los parámetros y la precisión del pronóstico de intervalo.

En esta sección se presentan únicamente los modelos univariados de volatilidad:

1. Modelo de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva (ARCH) propuesto por Engel (1982).
2. Modelo generalizado de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva (GARCH) propuesto por Bollerslev (1968).

Otras derivaciones de estos modelos básicos pueden consultarse en la bibliografía pertinente [TSAY, 2005].

Estructura del modelo:

Sea r_t el rendimiento de un activo en el tiempo t . La idea básica detrás de los estudios de volatilidad es que la serie $\{r_t\}$ o es serialmente no correlacionada o tiene un orden bajo de correlación serial, pero es una serie dependiente.

Si se considera que la media condicional y la varianza de r_t , dado F_{t-1} son:

$$\mu_t = E(r_t | F_{t-1}), \quad \sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | F_{t-1}) = E[(r_t - \mu_t)^2 | F_{t-1}],$$

En la que F_{t-1} , representa el conjunto de información disponible en el tiempo $t-1$ y consiste de todas las funciones lineales de los rendimientos pasados. Se espera que la ecuación de μ_t sea sencilla y se asume que r_t sigue un modelo simple de serie de tiempo tal como un modelo estacionario ARMA (p, q) con algunas variables explicativas. En otros términos:

$$r_t = \mu_t + a_t, \quad \mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{it} + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i}$$

Donde k , p y q son enteros no negativos y x_{it} son variables explicativas. El orden (p, q) del modelo ARMA puede depender de la frecuencia de la serie de rendimientos. Por ejemplo, rendimientos diarios de un índice de mercado, frecuentemente muestra algún tipo de correlación serial. Pero los rendimientos mensuales del índice pueden no contener ninguna correlación serial significativa.

Si se combinan las ecuaciones anteriores:

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | F_{t-1}) = \text{Var}(a_t | F_{t-1}) = \text{Var}(a_t | F_{t-1})$$

Los modelos de heterocedasticidad condicional se refieren a la evolución de la volatilidad (σ_t^2). La forma como σ_t^2 evoluciona en el tiempo diferencia entre si los modelos de volatilidad.

Los modelos de volatilidad pueden clasificarse en dos grandes categorías. Aquellos de la primera categoría usan una función exacta que gobierna la evolución de (σ_t^2) , mientras que en la segunda categoría se usa una ecuación estocástica para describir (σ_t^2) . Los modelos GARCH pertenecen a la primera categoría mientras que los modelos de volatilidad estocástica son de la segunda categoría.

Construcción del modelo

El procedimiento consiste de cuatro etapas:

1. Especificar una ecuación para la media y probar la dependencia serial en los datos. Si es necesario, construir un modelo econométrico (Modelo ARMA) para remover cualquier dependencia lineal.
2. Usar los residuales de la ecuación de la media para probar efectos ARCH.
3. Especificar un modelo de volatilidad si los efectos ARCH son estadísticamente significativos y ejecutar una estimación conjunta de las ecuaciones para la media y la volatilidad.
4. Chequear cuidadosamente el modelo ajustado y refinar si es necesario.

Para la mayoría de las series de rendimientos de activos las correlaciones seriales son débiles, si las hay. Por lo tanto, solo se construyen ecuaciones para la media si las medias muestrales son significativamente diferentes de cero.[TSAY, 2005]

Prueba de efectos ARCH

Para facilidad de notación, sea $a_t = r_t - \mu_t$, los residuales de la ecuación de la media. La serie cuadrada a_t^2 , se empleará para chequear la

heterocedasticidad condicional, la cual se conoce también como efectos ARCH. Para ello se utilizan dos pruebas: La estadística Ljung – Box (ya explicada) y la segunda es la prueba del multiplicador de Lagrange de Engle (1982). Para más detalles consultar [TSAY, 2005]

- El Modelo ARCH. Las ideas básicas de los modelos ARCH son:
 1. El shock a_t del rendimiento de un activo no está serialmente correlacionado pero es dependiente.
 2. La dependencia de a_t puede describirse por una función cuadrática simple de sus valores rezagados.

Específicamente un modelo ARCH asume que:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2$$

Donde $\{\varepsilon_t\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza 1, $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_i \geq 0$ para $i > 0$. El coeficiente α_i debe satisfacer algunas condiciones de regularidad para asegurar que la varianza incondicional de a_t sea finita. En la práctica, es frecuente asumir que ε_t sigue una distribución normal o una distribución estandarizada t – student o una distribución de error generalizada.

De la estructura del modelo se observa que grandes shocks pasados a_{t-i}^2 implican una gran varianza condicional σ_t^2 para la innovación a_t . Consecuentemente, a_t tiende a asumir valores grandes (en módulo). Esto quiere decir que bajo el esquema ARCH, grandes shocks tienden a ser seguidos por otro shock grande. Se usa la palabra “tienden” porque una gran variación no necesariamente produce una gran realización. Únicamente

pretende decir que la probabilidad de obtener una gran variación es mayor que una variación más pequeña. Esta característica es similar a los clusters de volatilidad observadas en los rendimientos de los activos.

Otras características del modelo ARCH, así como sus debilidades pueden ser consultadas en [TSAY, 2005]

- El Modelo GARCH. Una desventaja de los modelos ARCH es que frecuentemente requieren muchos parámetros para describir adecuadamente los procesos de volatilidad de un activo. Atendiendo esta situación, Bollerslev (1986) propuso una extensión útil conocida como modelo ARCH Generalizado (GARCH).

Para una serie de rendimientos r_t , sea $a_t=r_t-\mu_t$, la innovación en el tiempo t . Entonces, a_t sigue un modelo GARCH si:

Ec.10:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Donde $\{\varepsilon_t\}$ es una secuencia de variables aleatorias iid, con media cero y varianza 1, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$. Aquí es entendido que $\alpha_i=0$ para $i>m$ y $\beta_j=0$ para $j>s$. La última restricción sobre $\alpha_i + \beta_i$ implica que la varianza condicional de a_t es finita, mientras su varianza condicional σ_t^2 evoluciona con el tiempo. Como antes, ε_t se asume que tiene una distribución normal estándar o t-student estandarizada o una distribución de error generalizado. La ecuación 10 se reduce a un modelo ARCH puro si $s=0$. Los coeficientes α_i y β_i se conocen como parámetros ARCH y GARCH respectivamente.

Las fortalezas y debilidades del modelo GARCH se hacen evidentes analizando el modelo más simple GARCH (1,1):

Ec. 2.11:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad 0 \leq \alpha_1, \beta_1 \leq 1, (\alpha_1 + \beta_1) < 1$$

Primero un valor grande de a_{t-1}^2 o σ_{t-1}^2 producen valores grandes de σ_t^2 . Esto quiere decir que un valor grande de a_{t-1}^2 tiende a ser seguido por otro valor grande de a_t^2 , generándose el comportamiento de los clusters de volatilidad en las series de tiempo financieras.

Segundo, [TSAY, 2005] afirma que si:

$$1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 > 0, \text{ entonces}$$

$$\frac{E(a_t^4)}{[E(a_t^2)]^2} = \frac{3[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3$$

Consecuentemente, similar a un modelo ARCH, la distribución de las colas de un proceso GARCH(1,1) es más gruesa que la de una distribución normal.

Tercero, el modelo proporciona una función paramétrica simple que puede usarse para describir la evolución de la volatilidad.

Los pronósticos de un modelo GARCH pueden obtenerse por métodos similares a las de los modelos ARMA. Considérese el modelo GARCH(1,1) y asúmase que el origen de pronóstico es h. Para el pronóstico de un solo paso hacia delante, se tiene:

$$\sigma_{h+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$$

Donde a_h y s_h^2 son conocidas en el tiempo h . Por consiguiente el pronóstico un paso adelante es:

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$$

Para pronósticos múltiples pasos adelante, se tiene $a_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2$ y se describe la ecuación de volatilidad de la ecuación 11 como:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_t^2 + \alpha_1 \sigma_t^2 (\varepsilon_t^2 - 1)$$

Cuando $t=h+1$, la ecuación se convierte en:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{h+1}^2 + \alpha_1 \sigma_{h+1}^2 (\varepsilon_{h+1}^2 - 1)$$

Dado que $E(\varepsilon_{h+1}^2 - 1 | F_h) = 0$, el pronóstico de la volatilidad dos pasos adelante del origen de pronóstico h , satisface la ecuación:

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_h^2(1)$$

En general, se tiene

Ec 12.

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_h^2(l-1), \quad l > 1$$

Este resultado es exactamente el mismo que un modelo ARMA (1,1) con el polinomio AR: $1 - (\alpha_1 + \beta_1)B$. Por repetidas sustituciones en la ecuación 12, se obtiene el pronóstico h – pasos adelante:

$$\sigma_h^2(l) = \frac{\alpha_0 [1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1}]}{1 - \alpha_1 - \beta_1} + (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1} \sigma_h^2(1)$$

Teniendo en cuenta que $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Consecuentemente, el pronóstico de volatilidad de un modelo GARCH (1,1) converge a la varianza incondicional de a_t en la medida en que el horizonte de pronóstico se incrementa, probándose así que $\text{Var}(a_t)$ existe.

Evaluación de pronósticos

[BOLLERSLEV, 1998] señala que aunque una forma común de juzgar la relevancia práctica de cualquier modelo es comparar las predicciones implicadas con las realizaciones posteriores, en el caso de la volatilidad, dado que esta variable no es directamente observable, esta aproximación no es aplicable inmediatamente para la evaluación de pronósticos. Por lo anterior se busca un procedimiento alternativo. Para ello, el modelo planteado para el rendimiento tiene la forma:

$$r_t = \sigma_t \cdot z_t$$

Donde z_t representa un proceso estocástico independiente de varianza unitaria y media cero, entonces el tomar valores esperados:

$$E[r_t^2] = E[\sigma_t^2 \cdot z_t^2] = \sigma_t^2$$

Sugeriría justificar el uso de los rendimientos cuadrados sobre el horizonte relevante como una aproximación para evaluar la volatilidad *ex post*. Ello implica

realizar un análisis de regresión expost de los residuales cuadrados contra la volatilidad:

Ec. 2.13.

$$r_{(m),t+1}^2 = a_{(m)} + b_{(m)}\sigma_{(m),t+1}^2 + u_{(m),t+1}$$

En este análisis se supone que la media condicional es cero; si no es así los autores sugieren reemplazar r^2 por $(r-\mu)^2$, es decir, a^2 , donde μ representa la media condicional y a^2 los residuales al cuadrado.

De acuerdo con este procedimiento, el coeficiente de determinación, R^2 , proporciona una evaluación directa de la variabilidad de los rendimientos cuadrados expost que es explicada por el estimado particular de la varianza. Por esto el R^2 es interpretado como una medida de la predictibilidad en los procesos de volatilidad y del potencial significado económico del pronóstico de volatilidad. Sin embargo, este uso del R^2 es problemático porque la toma de decisiones financieras racionales descansa en la volatilidad futura anticipada y no sobre los rendimientos cuadrados realizados.

Los investigadores citados, aplican esta metodología a un conjunto de datos de análisis y encuentran valores bajos del coeficiente de determinación R^2 (0.047 y 0.026 para las tasas de cambio de marcos y yenes a dólares respectivamente). Sin embargo, anotan que estos resultados están alineados con otros estudios similares para otros rendimientos especulativos y periodos muestrales y citan los investigadores que las han realizado (la mayoría con regresiones aplicadas sobre la muestra analizada, mientras que los autores de la publicación consultada, aplican la regresión sobre datos fuera de muestra).

La tabla siguiente resume las investigaciones citadas por [BOLLERSLEV, 1998]:

Tabla 1. Resultados de investigaciones realizadas sobre pronósticos de volatilidad

Investigador	Fecha	Rendimientos analizados	R2 obtenidos
Day and Lewis	1992	Rendimientos semanales del Índice S&P100 1983-1989 con modelo GARCH (1,1)	0.039
Pagan and Schwert	1990	Rendimientos de Monthly aggregate U.S. market 1835 – 1925 con modelo GARCH (1,2)	0.067
Jorion	1996	Rendimientos diarios de DM-\$ desde 1985-1992 con el mismo modelo especificado por el autor del paper.	0.024
Cumby y otros	1993	Volatilidades semanales de mercados de acciones y bonos en USA y Japón 1977-1990, empleando un modelo EGARCH.	0.003 – 0.106
West and Cho	1995	Diferentes rendimientos sobre tasas de cambio semanales de dólares 1973-1989, modelo empleado GARCH (1,1)	0.001-0.045

Fuente: [BOLLERSLEV, 1998]

Otros investigadores relacionados por los autores de la publicación en comentario que han obtenido resultados similares sin dar más detalles son: Akgiray (1989), Boudoukh y otros (1997), Brailsford y Faff (1996), Canina y Figlewski (1997), Dimson y Marsh (1990), Freenberg y Hanson (1996), Figlewski (1997), Heynen y Kat (1994), Jorion (1995), Schwert (1989) y Schwert y Seguin (1999). Los cuales al obtener valores bajos para el R^2 han conducido a la percepción que los modelos de volatilidad estándar pueden ser incorrectos en su especificación, proporcionan pronósticos pobres de volatilidad y por consiguiente son de limitado uso si se aplican.

[TSAY, 2005], con respecto al procedimiento señalado, comenta que si bien a_{h+1}^2 , es un estimado consistente de σ_{h+1}^2 , no es preciso porque una observación simple de una variable aleatoria con un valor medio conocido no puede proporcionar una estimación precisa de su varianza. Esto explica el porque se presenta un coeficiente de determinación bajo.

Por su parte [EBENS, 2001], señala que el procedimiento anterior no es una medida apropiada debido a que es muy ruidoso. Inclusive con el pronóstico de un solo día hacia delante, la correlación tiende a ser baja, por lo que los pronósticos que abarcan plazos mayores no son tenidos en cuenta. Por esta razón prefiere evaluar los pronósticos realizando una regresión por mínimos cuadrados entre la varianza real y la pronosticada y toma como referente para medir la bondad de ajuste el R^2 .

En [BOLLERSLEV, 1998] explican la anterior situación comentando que aunque las innovaciones cuadradas proporcionan un estimado insesgado, la presencia del error aleatorio z_i^2 puede producir estimados ruidosos. Este componente muestra una gran variación entre observaciones relativas a σ_i^2 , interpretándose baja la fracción del variación del rendimiento cuadrado atribuible al proceso de volatilidad.

Consecuentemente, la pobre potencia predictiva de los modelos de volatilidad, cuando es juzgada por el criterio estándar usando r_i^2 como una medida para la volatilidad expost, es una consecuencia inevitable del ruido inherente en el proceso de generación de rendimientos.

Esta es la razón que exhiben estos investigadores para los resultados de muchos estudios que muestran que pese a que los modelos basados en volatilidad estándar son altamente significativos en la muestra, explican muy

poco la variabilidad de los rendimientos cuadrados *expost* (Cumby - 1993, Figlewsky - 1997, Jorion – 1995, 1996), lo cual sugeriría que estos modelos tienen poco valor práctico.

En su publicación, [BOLLERSLEV, 1998] muestra que un modelo de volatilidad bien especificado proporciona notables pronósticos precisos de volatilidad, señalan que no existe contradicción entre buenos pronósticos de volatilidad y pobre potencia predictiva para rendimientos cuadrados diarios.

Estos investigadores analizan el porque de esta equivocada percepción, partiendo del supuesto que la curtosis condicional ($E[z^4]$) de las innovaciones estandarizadas es finita (el momento de cuarto orden incondicional subyacente de la regresión rendimiento cuadrado – volatilidad es finito) -, a través de un conjunto de demostraciones matemáticas llegan a la conclusión que el R^2 tendrá valores límites a tomar que no superarán el inverso del valor esperado de la curtosis condicional de término de error independiente. De manera particular, con un modelo GARCH (1,1) bien especificado con los errores condicionales gaussianos, el R^2 tendrá un límite superior de 1/3, mientras que si tiene colas gruesas este límite será menor. Es más, con valores de los parámetros a y b reales, los valores obtenidos para el estadístico R^2 serán menores que estos límites superiores. De acuerdo con esto, concluyen que los valores bajos de R^2 no son una anomalía sino una consecuencia directa de los modelos de volatilidad estándar, por lo tanto son consistentes con los modelos de volatilidad estándar.

También, demuestran como los datos de alta frecuencia intradiaria pueden usarse para construir mejores medidas y pronósticos de la volatilidad intradiaria. En teoría como la frecuencia de observaciones incrementa de diario a un intervalo infinitesimal, esto convergerá a una medida genuina del factor de volatilidad latente, aunque esto infactible en la práctica por restricciones citadas

en el documento. Sin embargo, el incrementar la frecuencia de los datos observados, reduce significativamente el ruido. Encuentran que cuando estos modelos se evalúan explican alrededor de la mitad del factor de volatilidad. Reconocen que la explicación de los valores bajos de R^2 aunque coherentes con los modelos de volatilidad estándar, no son suficientes para afirmar si sirven o no para pronóstico y para responder esta inquietud recurren a un marco de volatilidad estocástica de tiempo continuo, con la propiedad que las series de tiempo muestreadas discretamente obedecen a una así llamada forma débil de los modelos GARCH (1,1). Esta aproximación tiene la ventaja adicional que muchos modelos de valoración de activos y la mayoría de las teorías de valoración de derivados son escogidos en este marco. Demuestra que los pronósticos ARCH diarios de tiempo discreto son ineficientes en términos del Error Cuadrático Medio con respecto a los pronósticos óptimos basados en una trayectoria de muestra continua. Ellos prueban que trabajando con datos de alta frecuencia, mejoran las estimaciones de R^2 , entre más alta sea esta frecuencia más alto es el valor estimado de R^2 .

2.1.6. Optimización Financiera. En [ZENIOS, 1999] se encuentra un compendio de los diferentes modelos usados para optimizar decisiones de inversión.

Estos pueden agruparse en las siguientes categorías:

- Modelo de inmunización de un portafolio de bonos.
- Modelo de inmunización de un factor.
- Modelo de dedicación de bonos.
- Análisis de peor caso de posición de opciones.
- Modelos Mean – Variance.
- Modelos de Utilidad.
- Modelos de planeación estocástica, multiperiodo

En esencia estos modelos buscan administrar los riesgos financieros y que la referencia señala como:

- Riesgos de mercado.
- Riesgos de forma en los mercados de renta fija.
- Riesgo de volatilidad.
- Riesgo del sector.
- Riesgo de tasa de cambio.
- Riesgo crediticio
- Riesgo de liquidez.
- Riesgos residuales o específicos.

[Zenios, 1999] hace una interesante reflexión sobre el papel de la optimización en el mundo financiero y plantea el siguiente interrogante ¿Qué optimizar? ¿Minimizar el costo de construcción del portafolio o maximizar el retorno esperado? Señala que la teoría moderna del portafolio dicta que los riesgos sistemáticos son premiados en una forma que hace que los retornos instantáneos esperados son iguales en todos los activos en equilibrio, y todos los activos con los mismos atributos tendrían el mismo retorno esperado para eliminar el arbitraje. La consecuencia es que altos retornos esperados implican exposiciones a altos niveles de riesgo. Así, la maximización de retornos o la minimización de los costos tienen la propiedad oculta de maximización de riesgos no controlados.

Aun cuando describe el alcance de los diferentes modelos citados, en este documento solo se hace referencia al modelo MEAN VARIANCE

Sean:

Q: La matriz de varianzas y covarianzas $\{q_{ij}\}$ entre activos i, j

μ_i , retorno esperado del activo i

μ_p , retorno deseado del portafolio.

X_i , fracción del portafolio invertida en el activo i

El portafolio de mínima varianza cuando son posibles préstamos ilimitados, se logra al resolver el modelo:

Ec. 2.14.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_{ij} X_i X_j \\ X & \in R^I \\ \text{s.a.} \quad & \sum_i \mu_i X_i = \mu_p \\ & \sum X_i = 1 \end{aligned}$$

A partir de este modelo plantea otras modificaciones que pueden consultarse en la referencia.

2.1.7. Optimización multiobjetivo. En [ARDILA, 2006] y [DUARTE, 2004] se encuentra una amplia presentación sobre los orígenes y fundamentos de la optimización multiobjetivo y sobre los algoritmos desarrollados para su solución. Se extraen de tales trabajos los siguientes elementos de relevancia:

Un Problema de Optimización Multiobjetivo (*Multiobjective Optimization Problem: MOP*) general incluye un conjunto de n parámetros (variables de decisión), un conjunto de k funciones objetivo, y un conjunto de m restricciones. Las funciones objetivo y las restricciones son funciones de las variables de decisión. Luego, el *MOP* puede expresarse como:

$$\begin{array}{ll}
\text{Optimizar} & y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)) \\
\text{sujeto a} & e(x) = (e_1(x), e_2(x), \dots, e_m(x)) \geq 0 \\
\text{donde} & x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \\
& y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in Y
\end{array}$$

Siendo x el vector de decisión e y el vector objetivo. El espacio de decisión se denota por X , y al espacio objetivo por Y . Optimizar, dependiendo del problema, puede significar igualmente, minimizar o maximizar. [MORA, 2001] señala que maximizar es minimizar el negativo de la función original.

El conjunto de restricciones $e(x) \geq 0$ determina el conjunto de soluciones factibles X_f y su correspondiente conjunto de vectores objetivo factibles Y_f .

Por lo anterior, el conjunto de soluciones factibles X_f se define como el conjunto de vectores de decisión x que satisface los requerimientos $e(x)$:

$$X_f = \{x \in X \mid e(x) \geq 0\}$$

La imagen de X_f , es decir, la región factible del espacio objetivo, se denota por

$$Y_f = f(X_f) = \bigcup_{x \in X_f} \{y = f(x)\}$$

De estas definiciones se tiene que cada solución del *MOP* en cuestión consiste de una n -tupla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que conduce a un vector objetivo $y = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$, donde cada x debe cumplir con el conjunto de restricciones $e(x) \geq 0$. El problema de optimización consiste en hallar la x que tenga el “mejor valor” de $f(x)$. En general, no existe un único “mejor valor”, sino un conjunto de soluciones. Entre éstas, ninguna se puede considerar mejor a las demás si se tienen en cuenta todos los objetivos al mismo tiempo. Este hecho deriva de que puede existir –y generalmente existe– conflicto entre los diferentes objetivos que componen el problema. Por ende, al tratar con *MOPs* se precisa de un nuevo concepto de

“óptimo”. Es el caso analizado en este trabajo cuando se pretende minimizar el riesgo del portafolio (medido por su varianza) y maximizar el rendimiento. Se sabe que el riesgo va de la mano con la rentabilidad, por lo que a mayor rentabilidad, mayor riesgo.

En la optimización de un solo objetivo el conjunto de variables de decisión factibles está completamente ordenado mediante una función objetivo f . Es decir, dadas dos soluciones $a, b \in X_f$, se cumple una sola de las siguientes proposiciones: $f(a) > f(b)$, $f(a) = f(b)$ o $f(b) > f(a)$. El objetivo consiste en hallar la solución (o soluciones) que tengan los valores óptimos (máximos o mínimos) de f . Cuando se trata de varios objetivos, sin embargo, la situación cambia. X_f , en general, no está totalmente ordenada por los objetivos; el orden que se da suele ser parcial (i.e. existen vectores de decisión a y b con los que $f(a)$ no puede considerarse mejor que $f(b)$ y tampoco $f(b)$ puede considerarse mejor que $f(a)$).

En el contexto multiobjetivo, Dados 2 vectores de decisión $u \in X$ y $v \in X$,

$$f(u) = f(v) \text{ si y sólo si } \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}: f_i(u) = f_i(v)$$

$$f(u) \geq f(v) \text{ si y sólo si } \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}: f_i(u) \geq f_i(v)$$

$$f(u) > f(v) \text{ si y sólo si } f(u) \geq f(v) \wedge f(u) \neq f(v)$$

Las relaciones \leq y $<$ se definen de manera similar.

Por lo expuesto, se tiene que dos vectores de decisión x_1 y x_2 de un *MOP* pueden cumplir solo una de tres condiciones posibles: $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_2) > f(x_1)$ o $f(x_1) \not\geq f(x_2) \wedge f(x_2) \not\geq f(x_1)$. Esta situación se expresa con los siguientes símbolos y términos:

- Dominancia Pareto en un contexto de Maximización. Para dos vectores objetivo a y b ,

$$\begin{array}{ll}
 a \succ b \text{ (} a \text{ domina a } b\text{)} & \text{si y solo si } a > b \\
 b \succ a \text{ (} b \text{ domina a } a\text{)} & \text{si y solo si } b > a \\
 a \sim b \text{ (} a \text{ y } b \text{ no son comparables)} & \text{si y solo si } a \not\geq b \wedge b \not\geq a
 \end{array}$$

- Dominancia Pareto en un contexto de Minimización. Para dos vectores objetivos a y b ,

$$\begin{array}{ll}
 a \succ b \text{ (} a \text{ domina a } b\text{)} & \text{si y solo si } a < b \\
 b \succ a \text{ (} b \text{ domina a } a\text{)} & \text{si y solo si } b < a \\
 a \sim b \text{ (} a \text{ y } b \text{ no son comparables)} & \text{si y solo si } a \not\leq b \wedge b \not\leq a
 \end{array}$$

- Optimalidad Pareto. Dado un vector de decisión $x \in X_f$ y su correspondiente vector objetivo $y = f(x) \in Y_f$, se dice que x es no dominado respecto a un conjunto $A \subseteq X_f$ si y solo si

$$\forall a \in A : (x \succ a \vee x \sim a)$$

En caso que x sea no dominado respecto a todo el conjunto X_f , y solo en ese caso, se dice que x es una solución Pareto óptima ($x \in X_{true}$ –el conjunto Pareto óptimo real–). Mientras que la y correspondiente es parte del frente Pareto óptimo real Y_{true} . Esto se define a continuación.

- Conjunto Pareto óptimo y frente Pareto óptimo. Dado el conjunto de vectores de decisión factibles X_f . Se denomina X_{true} al conjunto de vectores de decisión no dominados que pertenecen a X_f , es decir:

$$X_{true} = \{ x \in X_f \mid x \text{ es no dominado con respecto a } X_f \}$$

El conjunto X_{true} también es conocido como el conjunto Pareto óptimo. Mientras que el conjunto correspondiente de vectores objetivo $Y_{true} = f(X_{true})$ constituye el frente Pareto óptimo.

- Algoritmos Evolutivos. [ARDILA, 2006], Los algoritmos evolutivos están inspirados en la Teoría Evolutiva propuesta por Charles Darwin, en la cual se explica el origen y evolución de las especies, en esta teoría, Darwin introduce tres componentes principales de la evolución: replicación, variación y selección natural.

Un *Algoritmo Evolutivo* es un método de optimización estocástico, en el cual un grupo de estructuras de datos, son sometidas a una serie de operadores que simulan el proceso evolutivo, propuesto por Charles Darwin. Las estructuras de datos (individuos), representan las soluciones del problema que se está resolviendo. En cada ciclo (generación) del algoritmo se seleccionan las mejores soluciones. Estas soluciones, se reproducen entre sí, combinando sus características y generando así nuevas soluciones que serán evaluadas en la siguiente generación del Algoritmo.

Básicamente un algoritmo evolutivo presenta el siguiente esquema:

Inicio

generar_población_inicial()

```
mientras que(no se cumpla criterio de paro) haga  
  calcular_fitness()  
  selección()  
  crossover()  
  mutación()  
fin mientras que  
fin
```

A continuación se describe cada uno de los componentes que intervienen en un algoritmo evolutivo:

1. Individuo: Es la representación de una solución del espacio de soluciones factibles de un problema. Un individuo es una estructura de datos tal como una cadena de bits, un árbol, un grafo, etc.
2. Población: La población en un algoritmo evolutivo es un conjunto de individuos o soluciones. Se espera que a través la aplicación de los operadores de Cruzamiento y Mutación en un Algoritmo Evolutivo se encuentren las soluciones óptimas del problema de optimización. La población inicial es generada aleatoriamente.
3. Función de Aptitud o Fitness: Es un valor dado a un individuo que mide que tan bien éste está adaptado al entorno o problema, en otras palabras, el fitness mide que tan bueno es un individuo dentro de la población en la que se encuentre y por tanto, determina la posibilidad de ser seleccionado para cruzamiento.
4. Operadores Genéticos. Estos operadores son los que simulan el comportamiento evolutivo de las especies y se aplican sobre los individuos de la población con el fin de mejorarla. Los operadores más comunes son:
 - a. Selección: En esta etapa se escogen o seleccionan los individuos más aptos para el cruzamiento y la mutación, con el fin de generar

una nueva población. Existen varios métodos para realizar la selección, a continuación explicaremos algunos de ellos:

Método de la Ruleta:

Sea Θ el conjunto de soluciones factibles (en nuestro caso individuos), y $F: \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ la función de aptitud o fitness, entonces la probabilidad de que un individuo $x_i \in \Theta$ sea seleccionado es igual a:

Ec. 2.15.

$$P(x_i) = \frac{F(x_i)}{\sum_{j=1}^n F(x_j)}$$

Donde n es el tamaño de la población, x un individuo y $F(x_j)$ el fitness del j -ésimo individuo de la población.

Luego de haber calculado para cada individuo de la población, esta probabilidad, se genera en forma aleatoria un número $y \in [0, 1]$. Se suman los $P(x_i)$ obtenidos hasta que se rebase el número y , el elemento que rebasó el número generado, es escogido.

Método del Torneo:

Sea Θ el conjunto de soluciones factibles (en nuestro caso individuos), y $F: \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ la función de aptitud o fitness,. Dado el conjunto $\psi \subset \Theta$, entonces se selecciona el elemento $x \in \psi$ que satisfaga $F(x) = \max(F(y))$ para todo $y \in \psi$. Es decir, se seleccionan j elementos de la población aleatoriamente conformando con ello un subconjunto y luego se escoge de allí, aquel elemento que tenga mejor fitness. Una vez realizada la escogencia, elementos no escogidos son devueltos a la población, para que puedan ser seleccionados una vez más. Cuando $j = 2$, se denomina *Torneo Binario*.

- b. Cruzamiento: El Cruzamiento es un operador en el que dado dos individuos de la población (padres), se genera uno o más individuos (hijos) con la particularidad que ellos “heredan” características de ambos padres.
- c. Mutación: La Mutación es un operador en el que dado un individuo, se modifica algo de él para crear otro individuo, este operador es necesario para mantener la heterogeneidad de la población.
- d. Elitismo: El elitismo consiste en tomar a los mejores individuos de cada población y agregarlos directamente a la siguiente población sin necesidad de que pasen necesariamente por el cruzamiento. El elitismo es opcional en un algoritmo evolutivo.

- Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2 (SPEA 2). El SPEA 2 es un algoritmo evolutivo utilizado para Optimización Multiobjetivo creado por Zitzler, Laumanns y Thiele en el año 2001.

SPEA 2 mantiene una población elitista en la que guarda los mejores elementos de la población en cada generación. Los elementos de la población elitista pueden estar conformados por elementos no dominados exclusivamente, o por la combinación de elementos no dominados y los mejores elementos dominados, esto se debe a que en el SPEA 2 la población elitista es de tamaño fijo.

A continuación, la figura 4 muestra el ciclo principal del algoritmo SPEA2

Figura 4. Ciclo principal SPEA2

Entrada:	N	(Tamaño de la Población)
	\bar{N}	(Tamaño del archivo)
	T	(Número máximo de Generaciones)
Salida:	A	(Conjunto no dominado)
Paso 1:	Inicialización: Generar la población inicial P_0 y crear el archivo vacío (Conjunto Externo) $\bar{P}_0 = \phi$. Colocar $t=0$	
Paso 2:	Asignación de Fitness: Calcular los valores de fitness de los individuos en P_t y \bar{P}_t	
Paso 3:	Selección Ambiental: Copiar todos los individuos no dominados de P_t y \bar{P}_t a \bar{P}_{t+1} . Si el tamaño de \bar{P}_{t+1} excede a \bar{N} , reducir \bar{P}_{t+1} mediante el operador de truncamiento, de lo contrario, si el tamaño de $\bar{P}_{t+1} < \bar{N}$, entonces llenar \bar{P}_{t+1} con individuos dominados de P_t y \bar{P}_t .	
Paso 4:	Terminación: Si $t \geq T$ o se satisface otro criterio de paro entonces retorne el conjunto A de soluciones no dominadas tomadas de \bar{P}_{t+1} .	
Paso 5:	Selección: Realizar torneo binario con reemplazo en \bar{P}_{t+1} para llenar el conjunto de apareamiento.	
Paso 6:	Cruzamiento: Aplicar los operadores de recombinación y cruzamiento al conjunto de apareamiento y construir P_{t+1} . Incrementar $t=t+1$ e ir al paso 2.	

Fuente: [ARDILA, 2006]

El SPEA 2 tiene los siguientes pasos:

- Inicialización: La inicialización de los individuos del SPEA 2 es de manera aleatoria.
- Asignación de Fitness: El fitness de un individuo en el SPEA 2 es igual a

Ec. 2.16.

$$F(i) = R(i) + D(i)$$

Donde $R(i)$ es una función llamada *Raw Fitness* (Fitness Bruto) y $D(i)$ es una función de estimación de Densidad al vecino k -ésimo vecino mas cercano.

$R(i)$ se calcula de la siguiente manera:

Ec. 2.17.

$$R(i) = \sum_{j \in Pt(i)} S(j)$$

Donde $S(i)$ se define como

Ec.18.

$$S(i) = |\{j \in P \cup \bar{P} \mid i \prec j\}|$$

$|\cdot|$ denota la cardinalidad del conjunto y a $S(i)$ se le denomina *Strength*.

$D(i)$ es una función que adapta el método del k -ésimo vecino mas cercano, donde la densidad en un punto es una función (decreciente) de la distancia al k -ésimo vecino mas cercano. En el SPEA 2 se toma el inverso de la distancia como la estimación de densidad.

De esta manera, $D(i)$ es igual a :

Ec. 2.19.

$$D(i) = \frac{1}{\sigma_i^k + 2}$$

σ_i^k es la distancia al k -ésimo vecino mas cercano y $k = \sqrt{N + \bar{N}}$. N es el tamaño de la población P y \bar{N} el tamaño de la población elitista.

- Selección Ambiental: En la etapa de selección ambiental, se copian primero todos los elementos no dominados. Éstos son aquellos cuyo fitness es menor

que 1, es decir, $\bar{P}_{t+1} = \{i \mid i \in P_t \cup \bar{P}_{t+1} \wedge F(i) < 1\}$. Si el tamaño del frente no dominado es igual a \bar{N} , el procedimiento de selección ambiental termina. De lo contrario, pueden ocurrir dos posibilidades: Si el tamaño es menor que \bar{N} , se copian los mejores individuos de la población P_t , es decir, aquellos individuos de P_t cuyo fitness sea más bajo hasta que el tamaño de la población elitista sea igual a \bar{N} . Si el tamaño de la población elitista es mayor que \bar{N} , entonces se invoca el procedimiento de truncamiento el cual remueve iterativamente individuos de \bar{P}_{t+1} hasta que el tamaño de $|\bar{P}_{t+1}| = \bar{N}$. En cada iteración del procedimiento de truncamiento, un individuo i es escogido para ser removido si cumple con $i \leq_d j$, para todos los $j \in \bar{P}_{t+1}$.

$$i \leq_d j \Leftrightarrow \forall 0 < k < |\bar{P}_{t+1}| : \sigma_i^k = \sigma_j^k \vee \exists 0 < k < |\bar{P}_{t+1}| : \forall 0 < l < k : \sigma_i^k = \sigma_i^l$$

Donde σ_i^k denota la distancia de i a su k -ésimo vecino mas cercano. En otras palabras, el individuo que tiene la distancia mínima a otro individuo es escogido en cada etapa. Si hay varios con la distancia mínima, el empate se rompe considerando las segundas menores distancias y así se continúa.

- Terminación: Si se cumple con el criterio de paro del algoritmo, se devuelve como respuesta la población elitista \bar{P}_{t+1} .
- Selección de Elementos para Cruzamiento: La selección de los elementos para cruzamiento se realiza mediante torneo binario con reemplazo sobre la población elitista \bar{P}_{t+1} , es decir, todos los padres se escogen de la población elitista. Se realiza esta selección hasta que se llene el conjunto de elementos para cruzamiento.
- Variación: Se aplican los operadores de cruzamiento y mutación para generar la población P_{t+1} siguiente.

2.2. MARCO CONCEPTUAL

2.2.1. Bonos. Títulos que representan una parte de un crédito constituido a cargo de una entidad emisora. Su plazo mínimo es de un año. En retorno de su inversión se recibe una tasa de interés que fija el emisor de acuerdo con las condiciones de mercado al momento de realizar la colocación de los títulos. Por sus características, estos títulos son considerados de renta fija.

2.2.2. Liquidez. Se dice que un título tiene alta liquidez cuando el periodo de vencimiento hasta convertirlo nuevamente en efectivo es corto, o cuando es fácilmente negociable a través de la bolsa de valores; la inversión es de baja liquidez cuando el título tiene un plazo de maduración bastante largo y es casi imposible o muy difícil negociarlo.

2.2.3. Mercado Primario. Se refiere a la colocación de títulos que se emiten o salen por primera vez al mercado. A éste recurren las empresas y los inversionistas para obtener recursos y para realizar sus inversiones.

2.2.4. Mercado Secundario. Se refiere a la compra y venta de valores ya emitidos y en circulación. Proporciona liquidez a los propietarios de los títulos. Las operaciones se realizan entre inversionistas.

2.2.5. Operaciones Carrusel. Las operaciones Carrusel consisten en el compromiso de varios inversionistas de turnarse la posesión de un título de renta fija, de manera que la suma de los periodos en que cada uno de los participantes en la operación lo posee, coincide con el total del plazo de maduración del título. El papel del comisionista de bolsa es conseguir la cadena de inversionistas que participen sucesivamente en la propiedad y tenencia del título.

2.2.6. Operaciones De Venta Con Pacto De Recompra (Repo). Es un acuerdo o contrato de compra-venta de títulos mediante el cual el comprador inicial adquiere la obligación de transferir nuevamente al vendedor inicial los mismos títulos objeto de la negociación, dentro de un plazo no superior a 90 días y bajo las condiciones fijadas de antemano en el negocio inicial. El vendedor inicial, recomprador final del título objeto del repo, se compromete a otorgar una rentabilidad al comprador inicial. Las condiciones del negocio se pactan desde el mismo día en que se registra la operación en bolsa. Se realizan sobre títulos de renta fija y sobre acciones de alta bursatilidad.

2.2.7. Operaciones Simultáneas. Son aquellas compuestas por dos operaciones de compraventa, la primera denominada operación de salida y la segunda operación de regreso, celebradas en un mismo momento, sobre el mismo valor nominal y título de la misma clase y especie, y por los mismos agentes, quienes asumen en la operación de regreso la posición contraria que han asumido en la operación de salida y las respectivas obligaciones de comprar y vender según corresponda.

La operación de regreso se debe cumplir dentro del plazo determinado, máximo 365 días, y bajo las condiciones previamente convenidas a la celebración simultánea.

Las dos operaciones de compraventa conllevan el traspaso efectivo de la propiedad de los valores entre el vendedor y el comprador.

2.2.8. Operaciones Swap. Es aquella que está compuesta por un conjunto de operaciones individuales, realizadas en modalidad de contado o a plazo efectivo, realizadas para un cliente identificado como originador, mediante las cuales se concreta el intercambio de flujos futuros de títulos valores asociados al negocio, para el logro de un objetivo específico preestablecido. Las operaciones que

conforman un SWAP realizadas por una sociedad comisionista de bolsa deberán celebrarse o registrarse y cumplirse en Bolsa. Al realizar una operación SWAP es posible efectuar la reestructuración financiera de uno o varios valores pertenecientes al portafolio del originador. En el SWAP se trabajan principalmente las variables de emisor, liquidez, tasa y plazo.

2.2.9. Portafolio De Inversion. Combinación de activos financieros en poder de una persona natural o jurídica. Se denomina diversificado cuando en el conjunto de activos se combinan especies con rentabilidades, emisores, modalidades de pago de intereses y riesgos diferentes.

2.2.10. Precio De Mercado: Precio al cual se cotiza un título valor en la bolsa de valores. Está determinado por las fuerzas de oferta y demanda.

2.2.11. Strip De Tes. Es una operación que se realiza con Títulos de Tesorería de tasa fija en la cual el “título completo” compuesto por el principal y los cupones, se negocia en operaciones independientes que separan el principal y los cupones a fin de que cada uno de ellos se pueda negociar individualmente, convirtiéndose cada una de estas operaciones en una operación de descuento.

2.2.12. Titulos De Tesoreria. TES. Son emitidos por el gobierno colombiano y administrados por el Banco de la República para cubrir momentáneamente el déficit fiscal. Se tienen TES a tasa fija y a tasa variable.

Los TES tasa fija se han emitido con plazos a uno, dos, tres, cinco y siete años. Todos los TES de tasa fija salen al mercado con un cupón determinado que representa la tasa de interés que paga año vencido sobre su valor nominal. Su valor nominal está dado en pesos y la tasa que reconoce es fija en pesos.

Dentro de los TES de tasa variables se tienen:

Los TES indexados a IPC, emitidos por el gobierno a cinco, siete y diez años. Su valor nominal está dado en pesos y su tasa es variable pagando intereses año vencido.

TES en dólares a uno, dos, tres, cinco y ocho años; especifican la tasa que pagarán al vencimiento del título sobre su valor nominal. Su valor nominal está dado en dólares y reconocen una tasa fija igualmente en dólares. La rentabilidad en pesos varía dependiendo de la devaluación causada durante el periodo de tenencia del papel.

TES representados en UVR's. Estos títulos son una variación de la estructura de los TES indexados a IPC. Pagan los rendimientos año vencido y están relacionados con el IPC. Su principal característica es que están denominados en Unidades de Valor Real Constante (UVR), creada el 15 de mayo de de 1999 con un valor inicial de 100 y cuyo valor nominal evoluciona de acuerdo con la inflación total a consumidores mensual rezagada. Para efectos de valoración y negociación se trabajan de manera similar a los títulos representados en moneda extranjera como los TES en dólares.

La primera tasa cupón con la que salieron emitidos fue de 6.5% año vencido. Los flujos se proyectan en UVR's. Igualmente, el valor presente se determina en UVR's y se multiplica por el valor de la UVR del día de la negociación. El valor diario de la UVR es publicado por el Banco de la República.

Los TES se negocian base 365.

3. DISEÑO METODOLOGICO

El presente trabajo de investigación se inicia con la obtención de información sobre el funcionamiento de la Bolsa de Valores de Colombia, los títulos negociados en ella y sobre cuales de ellos existen datos históricos. Ello implica visitar la página en internet de la Bolsa de Valores de Colombia y bases de datos que almacenan los precios históricos de los activos a analizar tales como la del Banco de la República y el Grupo de Investigaciones Económicas de Bancolombia. Se reúne información sobre los indicadores empleados en la Bolsa para representar la evolución de los precios y se seleccionan los pertinentes para este trabajo de investigación.

Se investiga sobre modelos de series de tiempo, consultando libros y publicaciones especializadas disponibles en bases de datos, con el objeto de encontrar los que permitan describir el comportamiento de los datos históricos registrados. También se investiga sobre los paquetes econométricos disponibles en la Universidad que facilitan la selección y evaluación de modelos, encontrando que Eviews reúne las características deseadas, conllevando el aprendizaje de su uso.

Seleccionados los modelos apropiados, se entra a definir el conjunto de ecuaciones de rentabilidad y riesgo de los activos seleccionados, implica realizar ajustes de los datos a series de tiempo o regresión y realizar pruebas de hipótesis sobre el comportamiento de los datos.

Se investiga sobre los diferentes modelos que se han empleado previamente para la optimización financiera, sus similitudes, ventajas y desventajas. Se hace especial énfasis en modelos estocásticos. Se plantea un modelo preliminar, teniendo como base la maximización de la rentabilidad y la minimización de riesgos. Se reúne información sobre los métodos de resolución del modelo.

Se investiga sobre los paquetes computacionales que permiten la solución del modelo de portafolio seleccionado, encontrando que Matlab y Gams son herramientas útiles para este propósito.

Se consulta bibliografía sobre algoritmos evolutivos y se estudia su aplicación al caso analizado. Se adapta el algoritmo evolutivo SPEA para encontrar el frente de Pareto Óptimo del modelo planteado.

El modelo planteado se resuelve por los diferentes métodos que se definan y se realiza una comparación de los resultados obtenidos.

Dado el procedimiento descrito, el tipo de estudio adelantado tiene características de exploratorio en lo pertinente a la optimización multiobjetivo aplicada a la construcción de portafolios dado que no se encuentran antecedentes de este tipo; descriptivo, al buscar representar el comportamiento de los datos históricos a través de modelos de series de tiempo y también tiene características de correlacional porque los modelos desarrollados se emplearán para efectuar pronósticos los cuales se emplearán para la construcción del portafolio.

Se emplea el método de análisis dado que se estudian por separado los activos a incluir en el portafolio y se desarrollan modelos que explican los registros históricos de precios. También se hace uso de la síntesis al construir un portafolio integrando los activos analizados empleando diversos métodos de optimización.

Las fuentes de recolección de información son libros, documentos, y páginas de Internet acerca del tema de esta investigación. Asimismo, se emplea como técnica la observación simple, debido a que en el proyecto se realiza el registro de la información procedente de sitios públicos en Internet.

De manera detallada se presentan los pasos que se seguirán:

- Selección de acciones, dólares y bonos emitidos por el gobierno colombiano, para la construcción de un portafolio de inversión
- Selección de los indicadores IGBC, TRM e ITES como representativos de la evolución de los precios de los activos seleccionados.
- Consulta de modelos de series de tiempo y modelos de volatilidad heterocedástica condicional. Selección de modelos GARCH.
- Determinación de ecuaciones para las series de precios del IGBC, TRM e ITES, obteniéndose por construcción las ecuaciones de rendimientos para los activos analizados, empleando Eviews. Validación de las ecuaciones.
- Investigación sobre modelos de optimización financiera y medición de riesgos de mercado.
- Utilización del modelo Mean Variance para el desarrollo de la investigación. Formas de solución, empleando GAMS y MATLAB
- Investigación sobre Optimización Multiobjetivo y sus métodos de solución. Especial énfasis en algoritmos evolutivos.
- Adaptación del algoritmo SPEA a la solución multiobjetivo del portafolio de inversión bajo el modelo Mean Variance.
- Comparación de resultados obtenidos por los diferentes métodos de solución.
- Elaboración de conclusiones y definición de nuevas líneas de investigación.
- Presentación de resultados.

4. ANALISIS DE RESULTADOS

Los datos a utilizar en este trabajo de investigación, comprendidos entre enero 2 de 2002 a marzo 16 de 2007, fueron tomados de la base de datos perteneciente al grupo Bancolombia [BANCOLOMBIA, 2006]. Estos datos corresponden a los indicadores ITES, TRM e IGBC y son analizados utilizando el software econométrico Eviews para efectos de determinar los modelos de series de tiempo estocásticos que pretenden describir las características aleatorias de los valores registrados.

Datos anteriores a enero de 2002, pese a estar disponibles no se consideran debido a que la Bolsa de Valores de Colombia nació el 31 de julio de 2001, a partir de la integración de las Bolsas de Bogotá, Medellín y Occidente. Por lo que se supone un periodo posterior a esta fecha, de estabilización del mercado y antes de esta fecha, como datos afectados por variables diferentes a las existentes después del nacimiento de la bolsa de valores.

Se pretende construir un portafolio empleando diversos métodos disponibles, dentro de los cuales se encuentran los basados en series de tiempo estocásticas, por ello primero se explorarán estos modelos y luego se analizará el tema del portafolio.

La metodología a seguir para el tratamiento de los datos consiste de manera general en:

Se revisará si las series de datos presentan o no estacionariedad[§], en el evento que alguna no lo sea, ésta se diferenciará tantas veces como se requiera para buscar la estacionariedad [BROCKWELL, 2002] [PINDYCK, 2001], siempre y cuando sea una serie no estacionaria homogénea. Verificada la estacionariedad de la serie, se procede entonces a estimar el modelo de volatilidad heterocedástica que la represente. En el cuerpo del trabajo se presenta el análisis de estacionariedad y los modelos de volatilidad obtenidos, en los anexos se muestra el detalle del proceso de obtención de tales modelos junto con la validación de los supuestos referidos a la distribución de probabilidad que siguen los residuales y la validación de los pronósticos expost.

En la figura 5 se observa el comportamiento de las series originales (precios) a través del tiempo. Nótese el carácter poco volátil de las series TRM e ITES. Esta volatilidad se aprecia mejor en las series de rendimientos de los activos bajo análisis (Figura 6), más adelante se indica como se obtienen estas series de rendimientos.

Obsérvese que en la gráfica 6, se presenta un periodo de alta volatilidad posterior a marzo de 2006 para las tres series.

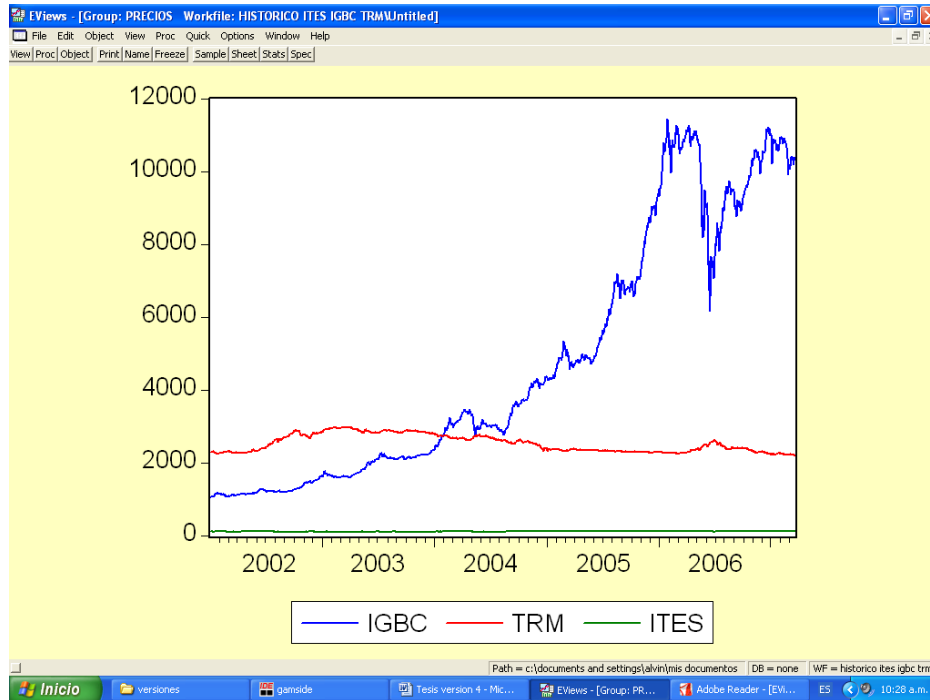
4.1. ANALISIS DE SERIES DE TIEMPO

4.1.1. Análisis de datos IGBC. El comportamiento del indicador IGBC en el periodo enero 2 de 2002 a marzo 16 de 2007, se aprecia en la figura 7. En ella se observa una tendencia ascendente en el tiempo, lo que sugiere que la serie tiene

[§] Es decir, si es posible suponer que el proceso estocástico subyacente que generó la serie es invariable con respecto al tiempo, dado que así podrá modelarse el proceso a través de una ecuación con coeficientes fijos que pueden estimarse a partir de datos pasados.

un comportamiento no estacionario. Aparte de esto presenta cambios abruptos en los valores de la serie, los cuales pueden ser suavizados recurriendo a una transformación logarítmica de los valores originales de la serie.

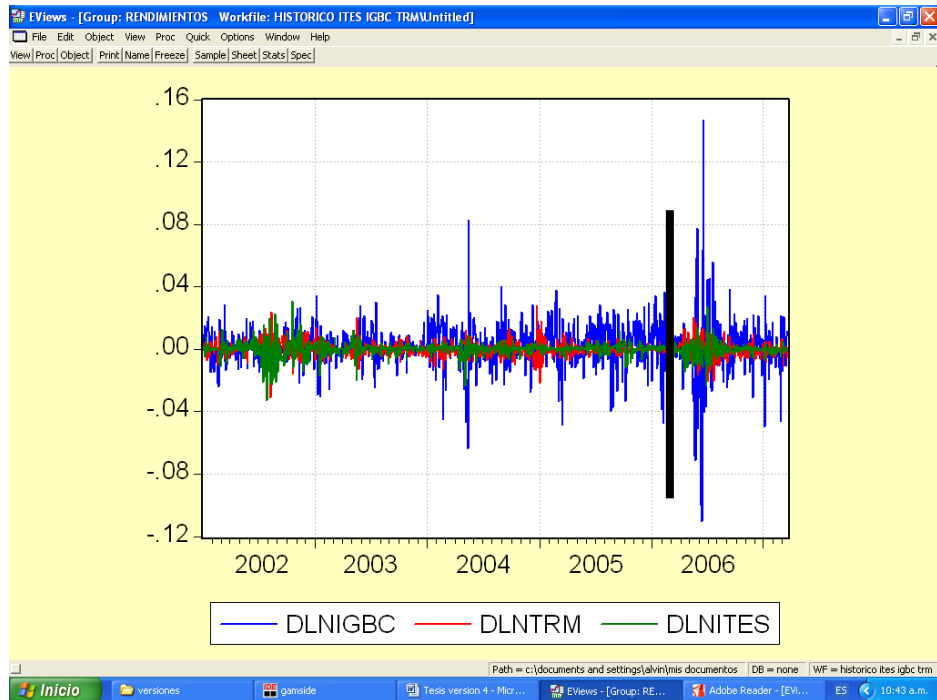
Figura 5. Series de precios a analizar (IGBC, TRM e ITES)



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

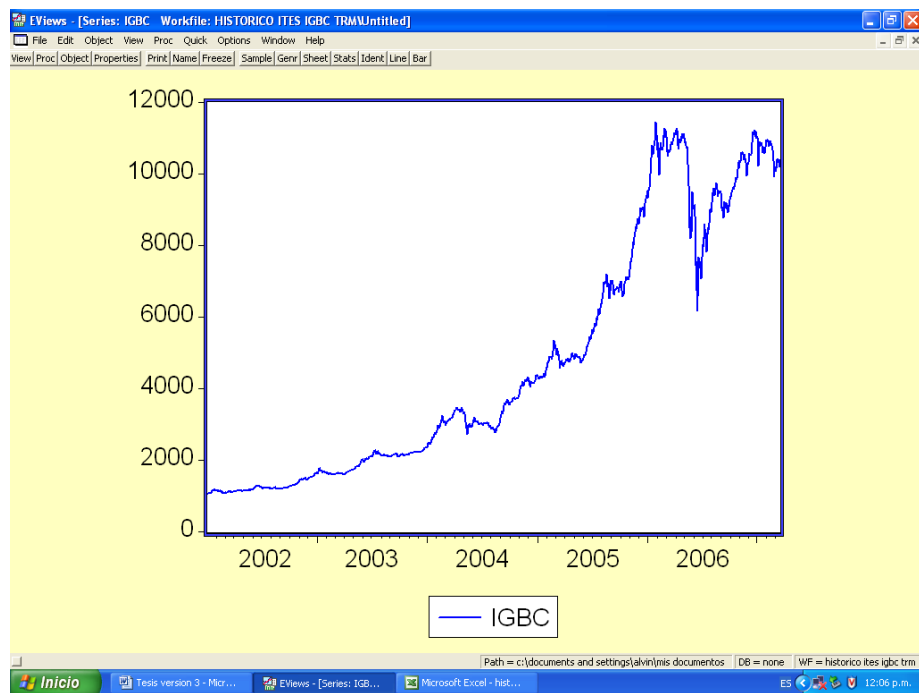
Los valores de la serie original transformados mediante el uso de la función logaritmo natural, se observan en la figura 8. Como se puede notar, presentan cambios más suaves en las magnitudes de los valores de la serie.

Figura 6. Series de rendimientos de las series analizadas.



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Figura 7. Serie IGBC sin transformación.



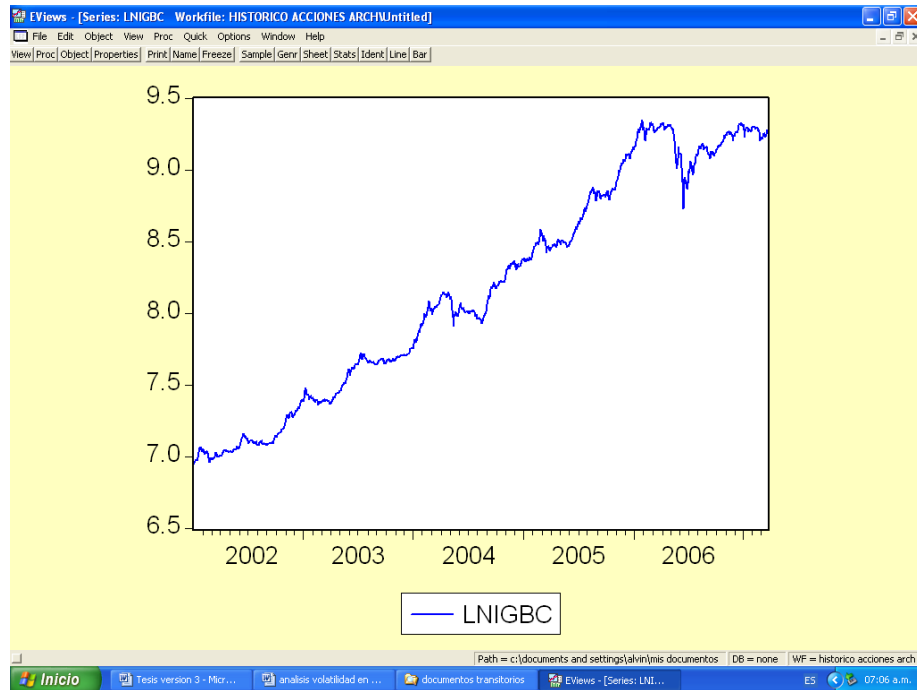
Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Otra razón importante para usar logaritmos es que, como se verá, las series originales de precios frecuentemente no son estacionarias, por lo que se requiere diferenciarlas para obtener una serie estacionaria. La serie obtenida después de este procedimiento, corresponde a una diferencia de logaritmos de precios de un tiempo t y un tiempo $t-1$, esta diferencia por definición es logaritmo del rendimiento, log rendimiento o interés compuesto continuo, r_t . Para más detalles sobre esto consúltese el marco teórico de este trabajo.

Para aclarar el párrafo anterior, se muestran los primeros datos de la serie IGBC, se aprecia en la primera columna la fecha a la que corresponde el dato, la segunda columna el precio que se registró para el IGBC, la tercera columna corresponde al logaritmo natural del precio del IGBC y la cuarta columna se obtiene mediante la resta entre valores consecutivos de la tercera columna, siendo el minuendo el dato del tiempo t y el sustraendo el dato del tiempo $t-1$

FECHA	IGBC	lnigbc	dlnigbc
2-Ene-02	1040,81	6,94775454	
3-Ene-02	1050,16	6,95669781	0,00894328
4-Ene-02	1051,64	6,95810613	0,00140832
8-Ene-02	1058,81	6,96490091	0,00679479
9-Ene-02	1074,67	6,97976892	0,014868
10-Ene-02	1071,00	6,97634807	-0,00342085
11-Ene-02	1070,63	6,97600254	-0,00034553
14-Ene-02	1067,17	6,97276556	-0,00323698
15-Ene-02	1074,25	6,97937802	0,00661246
16-Ene-02	1089,10	6,99310695	0,01372892
17-Ene-02	1108,65	7,01089834	0,01779139
18-Ene-02	1127,37	7,02764277	0,01674443
21-Ene-02	1151,02	7,04840378	0,02076102
22-Ene-02	1164,21	7,05979802	0,01139424
23-Ene-02	1166,22	7,06152303	0,001725
24-Ene-02	1170,15	7,06488722	0,0033642
25-Ene-02	1166,95	7,06214879	-0,00273844
28-Ene-02	1149,77	7,0473172	-0,01483159
29-Ene-02	1133,43	7,03300371	-0,01431349
30-Ene-02	1143,02	7,04142916	0,00842545
31-Ene-02	1159,68	7,05589938	0,01447022

Figura 8. Serie IGBC transformada mediante el uso de la función logaritmo natural.

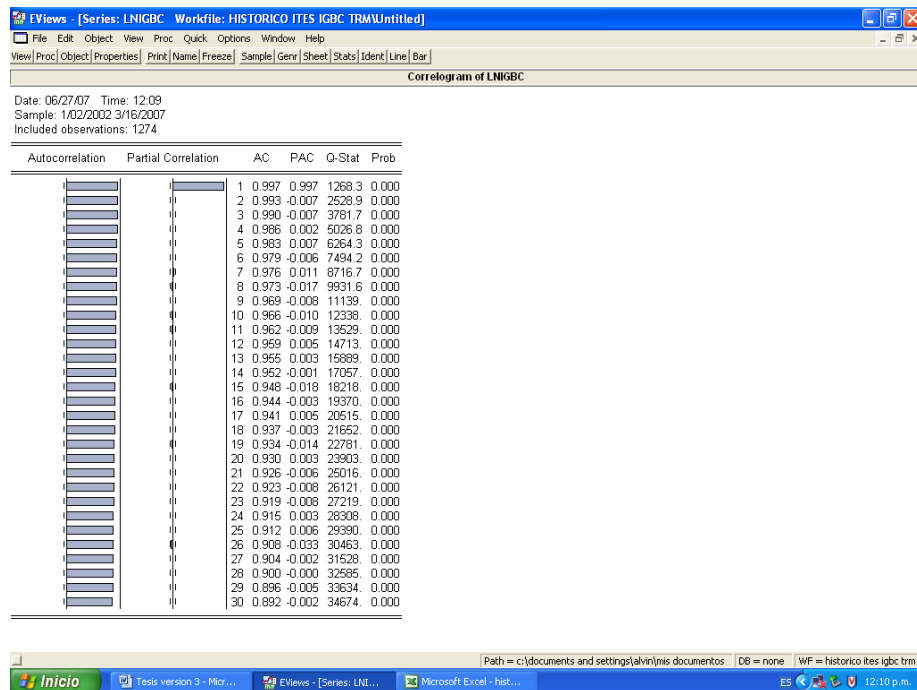


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Los datos que contienen tendencia, exhiben una caída lenta en el valor del coeficiente de autocorrelación muestral conforme el rezago se incrementa [BROCKWELL, 2002], tal como se observa en las barras que representan la autocorrelación en el correlograma de la serie transformada. Por lo que se puede concluir que la serie es no estacionaria (Figura 9.)

En la figura 9, la columna Prob indica el valor p de la prueba Ljung Box, donde se prueba si todos los coeficientes de autocorrelación para rezagos inferiores al analizado, son cero (hipótesis nula: $\rho_i = 0$, para $i = 1, 2, \dots, K$. Hipótesis alterna: Al menos un ρ_i es diferente de cero). Dado que la columna arroja valores p iguales a cero, permite rechazar la hipótesis nula, lo que es consistente con la anterior conclusión.

Figura 9. Correlograma de la serie InIGBC

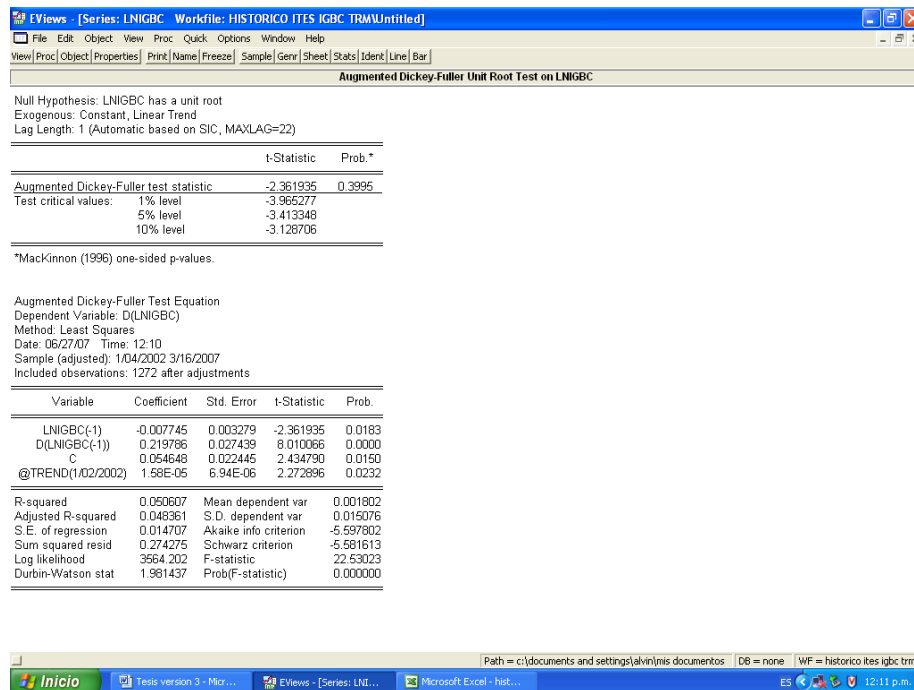


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

La prueba confirmatoria de no estacionariedad es el test de Dickey Fuller aumentado. En la figura 10. se observan los resultados obtenidos. De acuerdo con éstos, la hipótesis nula de raíz unitaria no puede ser rechazada, por lo que esta serie es no estacionaria.

Debe determinarse si la serie puede ser estacionaria mediante diferenciación de los valores de la serie. A la serie diferenciada se le aplica nuevamente la prueba de Dickey Fuller. A través del software Eviews se tienen los resultados registrados en la figura 11. Obsérvese que el valor de probabilidad para la prueba de Dickey Fuller es menor que el nivel de significancia del 5%, por lo que se concluye que a través del procedimiento de primera diferencia puede obtenerse una serie estacionaria.

Figura 10. Prueba de Dickey Fuller sobre los valores de la serie lnIGBC

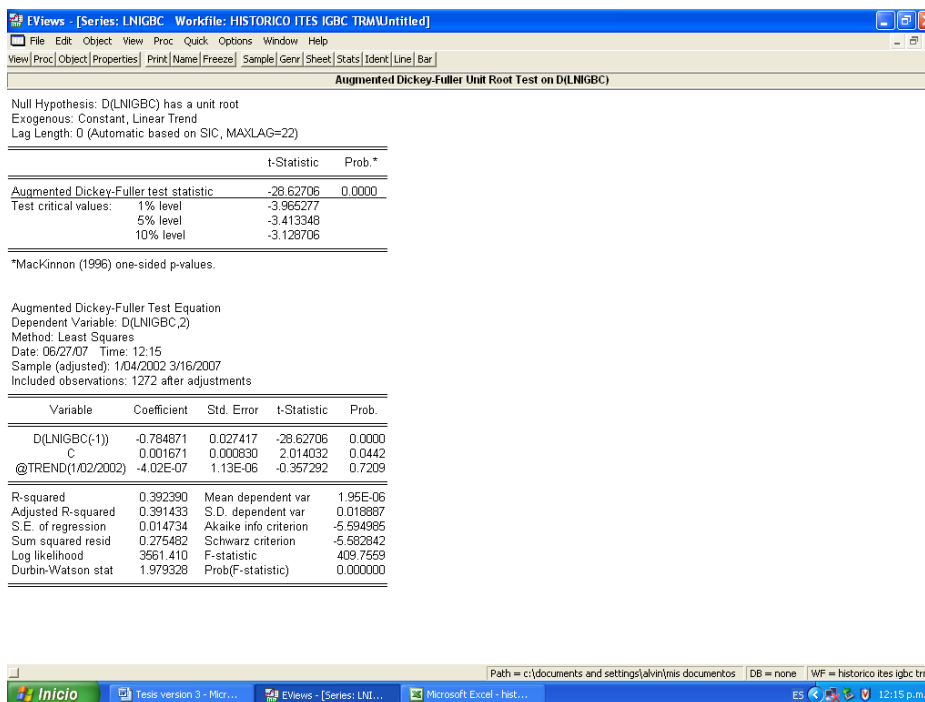


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

A partir de la serie diferenciada del logaritmo natural del IGBC se construirá el modelo de serie de tiempo pertinente. Para ello se observa el comportamiento a lo largo del tiempo de la serie diferenciada, por medio de la figura 12. En esta serie, aun cuando presenta una media constante en el tiempo, se tiene que la varianza no es constante, existiendo clusters de volatilidad, susceptibles de ser modelados a través de modelos ARCH y GARCH:

Una manera adicional de sustentar porque emplear este tipo de modelos, es a través del análisis de los correlogramas. Para ello se obtendrán el correlograma de la serie diferenciada (rendimientos de las acciones), de los rendimientos al cuadrado (serie $\ln IGBC$ al cuadrado) y del valor absoluto de los rendimientos (serie valor absoluto de $\ln IGBC$). Ver figuras 13, 14 y 15.

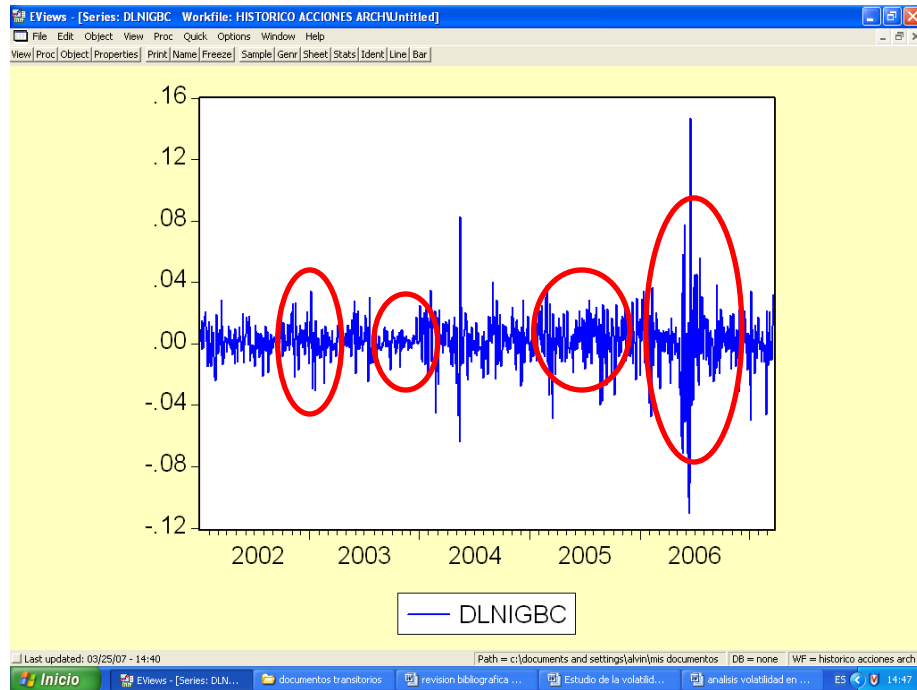
Figura 11. Prueba de Dickey Fuller sobre la serie lnIGBC diferenciada. (En adelante dlnIGBC)



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

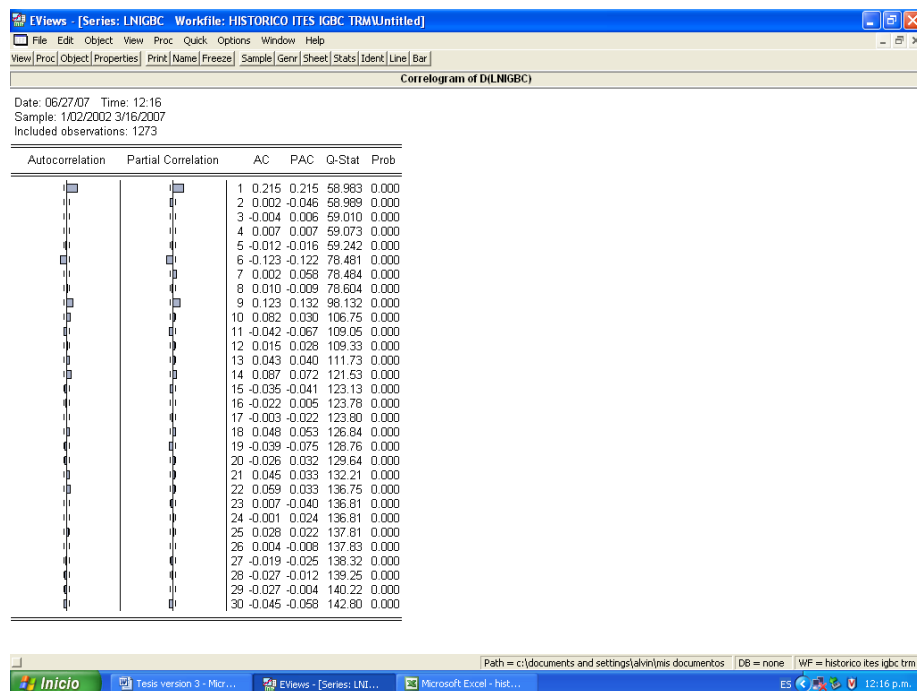
Se aprecia que la función de autocorrelación muestral de la serie dlnIGBC presenta correlación serial de orden bajo (grado de asociación lineal entre los rezagos de los errores), siendo posible corregirla (obtener independencia de los valores rezagados) mediante un modelo lineal de serie de tiempo apropiado.

Figura 12. Comportamiento de la serie diferenciada a lo largo del tiempo



Fuente. Elaborado con ayuda de Eviews

Figura 13. Correlograma de los rendimientos de las acciones (serie dlNIGBC)

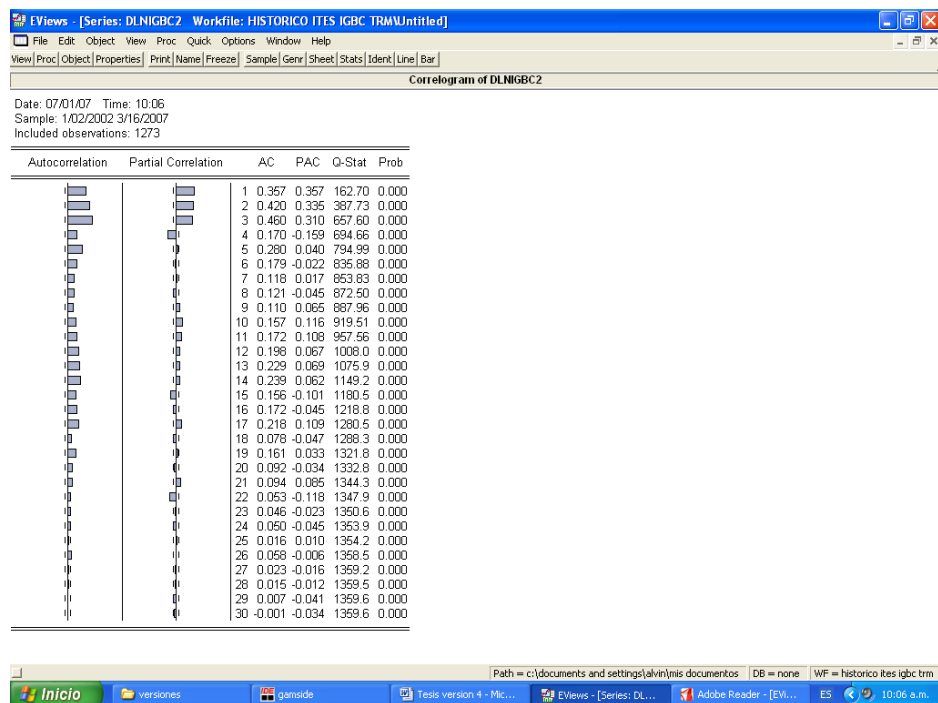


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Sin embargo, si se revisan los correlogramas de las funciones no lineales (cuadrado, figura 14 y valor absoluto, figura 15) aplicadas a la serie, se concluye que además de la correlación serial, existe también dependencia serial como lo confirman los valores, diferentes de cero, de la función de autocorrelación muestral en cada rezago considerado.

Esto se puede apreciar más claramente en la figura 16, obtenida por medio de Excel, empleando los valores de las funciones de autocorrelación de la serie diferenciada, de los rendimientos al cuadrado y del valor absoluto de los rendimientos.

Figura 14. Correlograma del cuadrado de los rendimientos



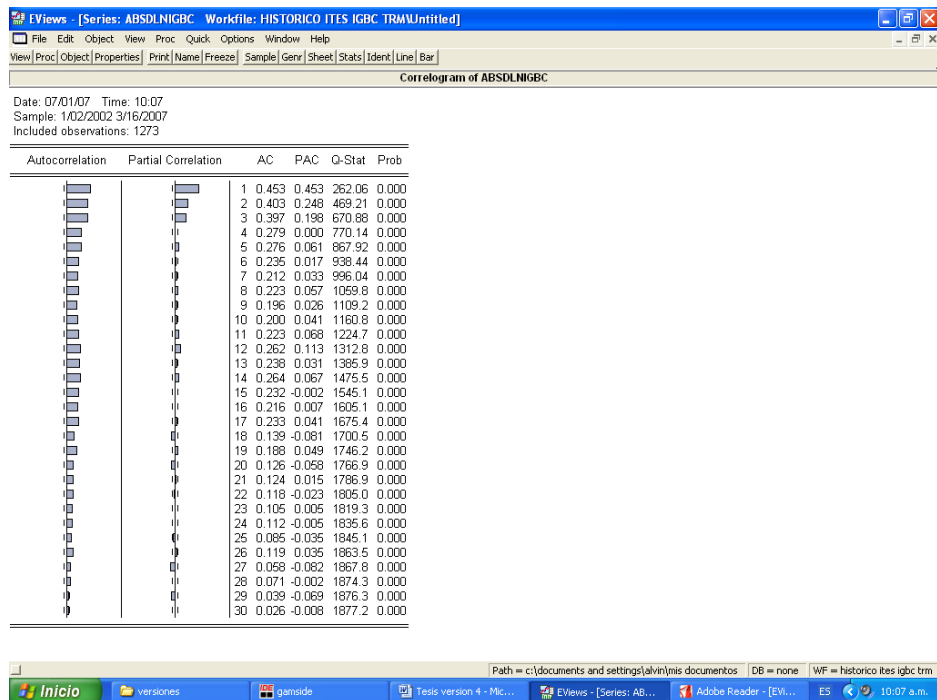
Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

En la figura 16 se observa que la serie dlNIGBC oscila alrededor de un valor central, lo que sugiere estacionariedad y que a partir del modelo lineal apropiado puede conseguirse que los errores se comporten como ruido blanco

(independientes e idénticamente distribuidos). Pero no ocurre lo mismo con los valores de las funciones no lineales donde se aprecia que existe dependencia entre los rezagos.

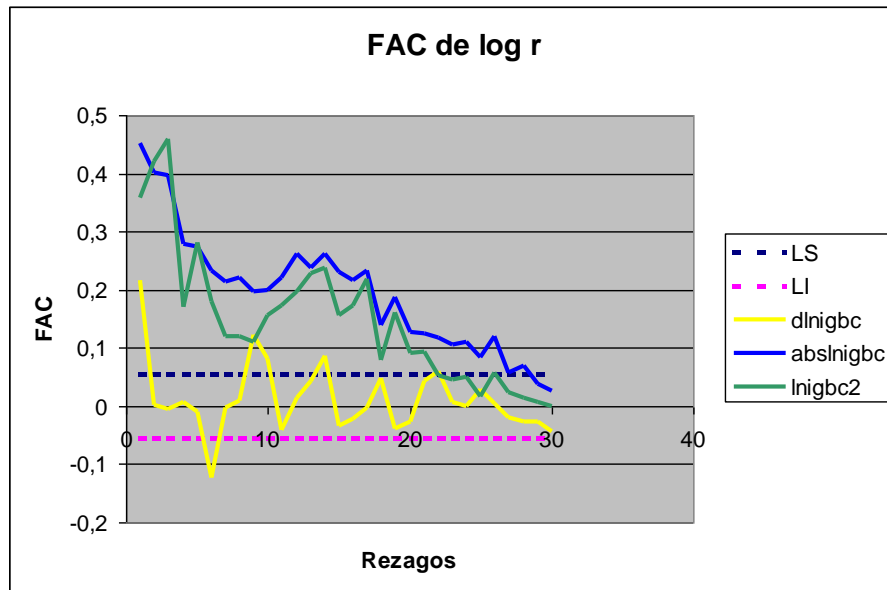
Los modelos de volatilidad intentan capturar tal dependencia en las series de rendimientos. [PREMARATNE, 2001] [TSAY, 2005]

Figura 15. Correlograma del valor absoluto de los rendimientos



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Figura 16. Valores de las funciones de autocorrelación muestral para la serie $\ln I_{GBC}$ (rendimientos de acciones), rendimientos al cuadrado y valor absoluto de los rendimientos



Fuente: Elaborado con ayuda de Excel

En esta investigación se trabajó con el modelo GARCH, debido a que las publicaciones consultadas muestran que éste tiene mejor comportamiento que los modelos ARCH. En [POON, 2005] hacen una comparación de las diferentes metodologías para el pronóstico de la volatilidad, mediante una revisión de las diferentes publicaciones que al respecto se han hecho, encontrando que la volatilidad implícita en acciones supera los modelos de series de tiempo para el pronóstico de la volatilidad y entre estos últimos, el siguiente sería el orden: volatilidad histórica, modelos GARCH y finalmente volatilidad estocástica. Aunque reconocen que los modelos GARCH siguen jugando un papel importante en el pronóstico de volatilidad. Con respecto al modelos de heterocedasticidad condicional autorregresiva los modelos GARCH superan los modelos ARCH, igualmente encuentran que el modelo GARCH es superado por modelos EGARCH y GJRGARCH (“GJR” de Glosten, Jagannathan, y Runkle).

Se tomará una submuestra de los datos disponibles (enero 2 de 2002 – marzo 16 de 2007), para encontrar el modelo. La submuestra a emplear es el periodo enero 2 – marzo 16 de 2006. La razón se observa en la figura 3.2., en la que posterior a esta última fecha se aprecia un periodo de alta volatilidad en las series de rendimientos, se aprovechará este fenómeno para evaluar si el pronóstico de volatilidad es capaz de replicar estas variaciones. El resto de datos, conocidos como datos fuera de muestra o para pronóstico *ex post*, se emplearán para validar el modelo hallado. En los anexos se encuentra una descripción detallada del procedimiento seguido con Eviews, para encontrar el modelo. Finalmente, las ecuaciones que describen el comportamiento de los datos de la serie analizada fueron obtenidas con ayuda de Eviews. Tales ecuaciones son las siguientes:

Ecuación para la media:

$$d \ln IGBC_t = 0.001796 + 0.306107 * d \ln IGBC_{t-1} + 0.083462 * d \ln IGBC_{t-9} + a_{t,IGBC}$$

(Ec. 3.1.)

En donde:

$$a_{t,IGBC} = \sigma_{t,IGBC} * \varepsilon_{t,IGBC} \quad \text{(Ec. 3.2.)}$$

Ecuación para la varianza condicional:

$$\sigma_{t,IGBC}^2 = 5.65 * 10^{-6} + 0.187788 * a_{t-1,IGBC}^2 + 0.778226 * \sigma_{t-1,IGBC}^2 \quad \text{(Ec. 3.3)}$$

- Limitaciones del modelo hallado El objetivo de las ecuaciones halladas es realizar pronósticos. Los modelos de series de tiempo son limitados en su uso para pronósticos a largo plazo [PINDYCK, 2001]. En el caso particular de los modelos GARCH, en la literatura existe una amplia discusión sobre sus bondades y defectos, además de modificaciones que se proponen para corregir

sus fallas [EBENS, 2001] [POON, 2005] [PREMARATNE, 2001] [TSAY, 2005]. En [BOLLERSLEV, 1998] se analiza el porque de las críticas, los detalles se pueden consultar en el marco teórico pero fundamentalmente tienen que ver con los resultados del coeficiente de determinación obtenido del análisis de regresión que se realiza :

$$r_t = \sigma_t \cdot z_t$$

z_t , puede asumirse iid $N[0,1]$

$$E[r_t^2] = E[\sigma_t^2 \cdot z_t^2] = \sigma_t^2$$

De donde se justifica el uso de rendimientos cuadrados como medio de pronóstico:

$$r_{(m),t+1}^2 = a_{(m)} + b_{(m)} \sigma_{(m),t+1}^2 + u_{(m),t+1}$$

En el mismo documento se plantea que si la media no es cero se reemplaza r^2 por $(r-\mu)^2$, es decir, a^2 , donde μ representa la media condicional y a^2 los residuales al cuadrado. La discusión sobre la pertinencia del procedimiento tiene que ver con la magnitud del coeficiente de determinación (valores muy bajos).

Este procedimiento se aplica para evaluar los pronósticos obtenidos a partir de estos modelos. El criterio es comparar los resultados de un pronóstico estático y un pronóstico dinámico. Las diferencias entre estos tipos de pronóstico pueden consultarse en [PINDYCK, 2001].

Los resultados del modelo obtenido para dlnIGBC indican que el pronóstico estático supera el pronóstico dinámico, dicho de otra forma, el modelo solo tiene capacidad para pronosticar un día adelante.

La tabla siguiente muestra los valores del coeficiente de determinación para ambos tipos de pronóstico. Para más detalles sobre su obtención, remitirse a los anexos:

Tabla 2. Evaluación de pronóstico dlnIGBC

Activo	Pronóstico (coeficiente de determinación, prueba de significación de la variable)	
	Estático	Dinámico
dlnIGBC	0.308431 Volatilidad significativa	0.000714 Volatilidad no significativa

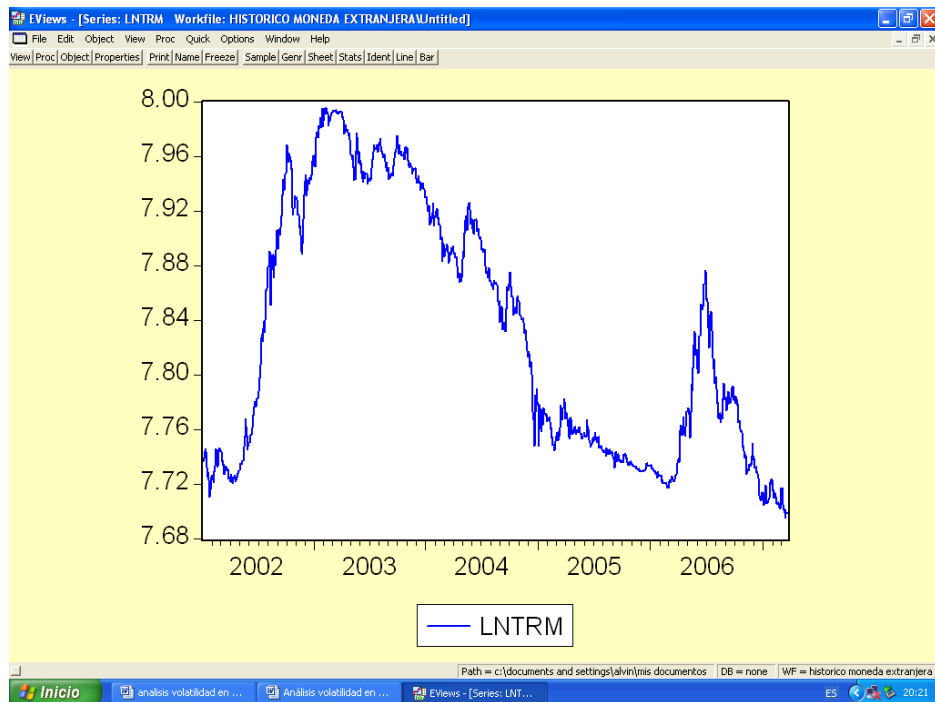
Fuente: Propio

Por esta razón los modelos obtenidos se emplean para pronósticos de un día adelante.

4.1.2. Análisis de datos Tasa Representativa del Mercado (TRM). El procedimiento de análisis de estacionariedad de los datos de Tasa Representativa del Mercado sigue la misma mecánica observada en la sección anterior para el IGBC.

Se grafica el comportamiento de los logaritmos de los datos para la muestra seleccionada enero 2 de 2002 – marzo 16 de 2007. La justificación de porque se usa logaritmos fue dada en la sección anterior.

Figura 17. Comportamiento del logaritmo del precio de TRM para el periodo analizado

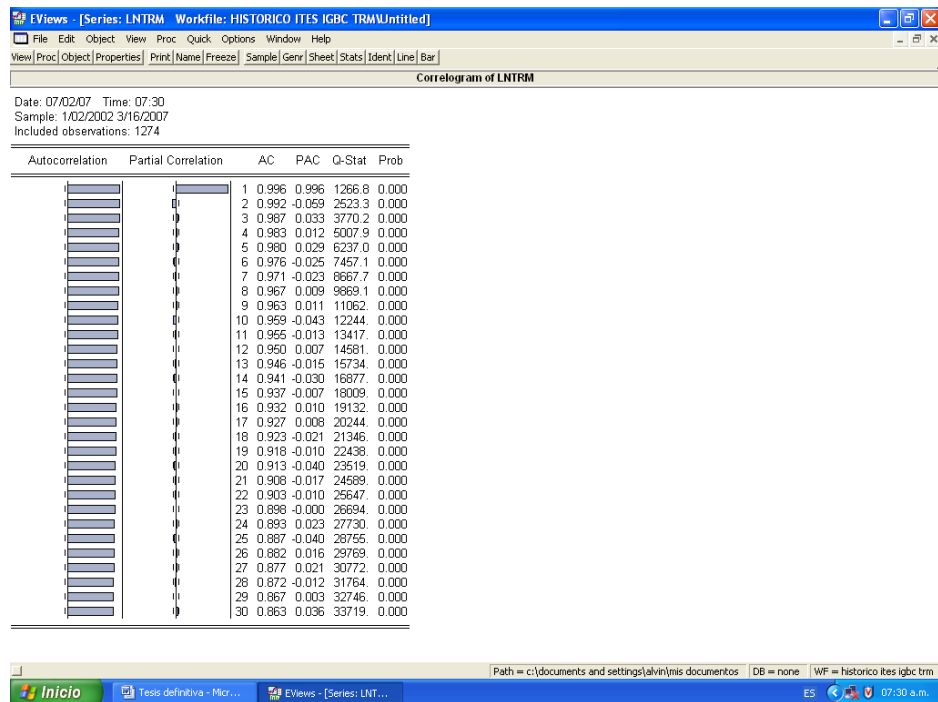


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Tal como se aprecia, si se toman submuestras dentro de la muestra analizada se puede concluir que no existe una media constante a lo largo del tiempo, por lo que la serie es no estacionaria.

Una manera alternativa, algo más formal que el procedimiento anterior implica observar el comportamiento de la función de autocorrelación muestral, para ello se recurre al correlograma:

Figura 18. Correlograma de la serie lnTRM.

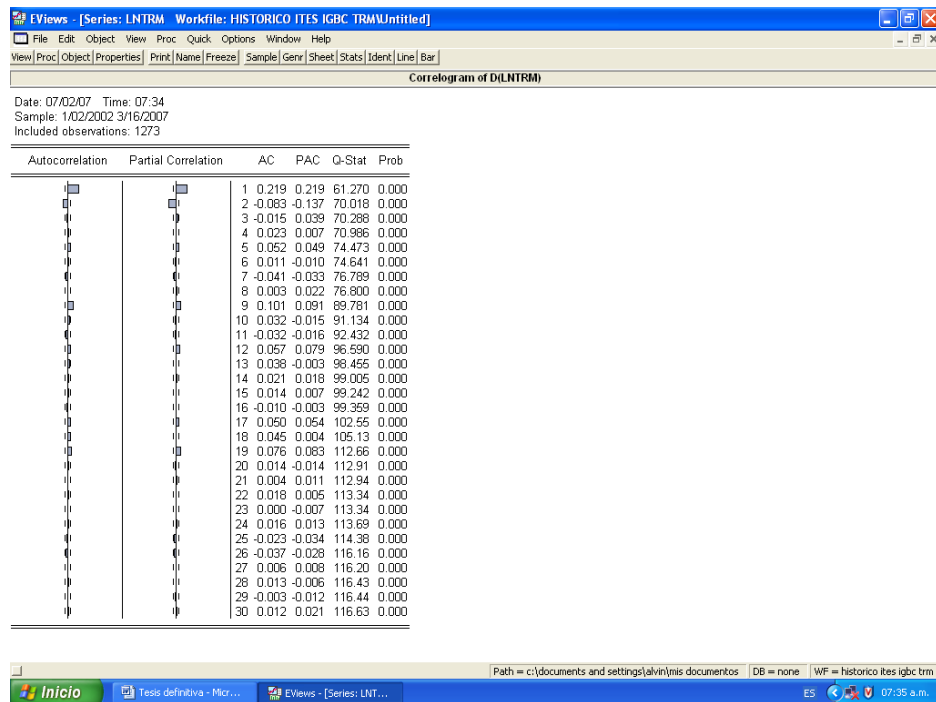


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Debido al lento descenso observado en los valores de los coeficientes de autocorrelación muestral se ratifica lo expresado mediante el análisis gráfico. De igual manera, es confirmado por los valores obtenidos en el valor de probabilidad de la prueba Ljung Box, que permiten rechazar la hipótesis nula de no existencia de correlación serial entre los rezagos ($\rho_i = 0$, para $i = 1,2,\dots,K$) a favor de la hipótesis alterna: Al menos un ρ_i es diferente de cero.

Si la serie se diferencia, entonces el correlograma sería el siguiente:

Figura 19. Correlograma de la serie $\ln TRM$



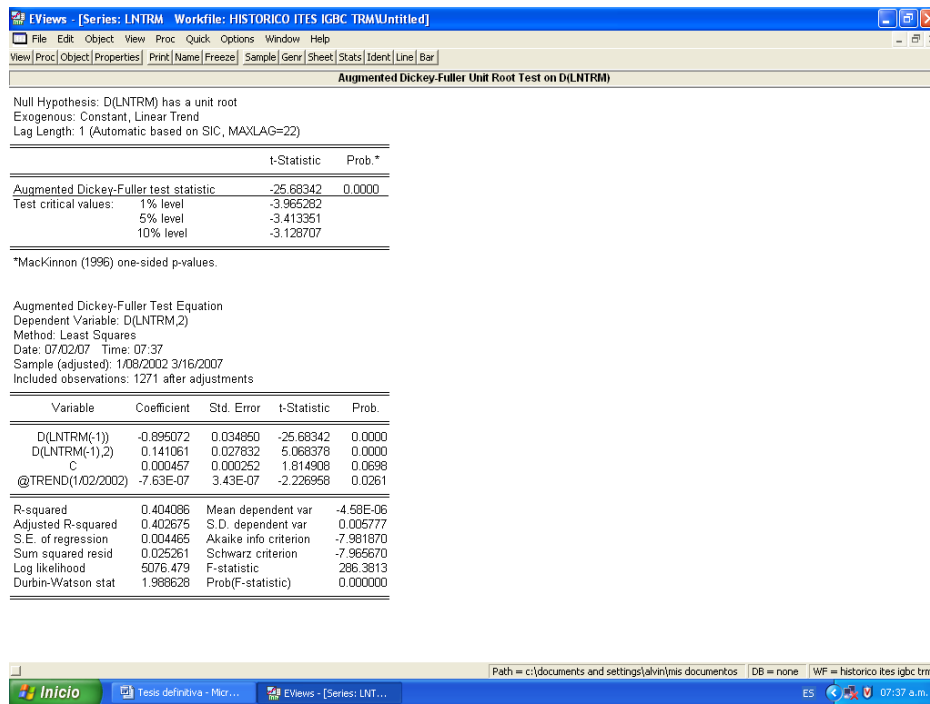
Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Los valores oscilando alrededor de una media, sugieren que la primera diferenciación conduce a una serie estacionaria, por lo que se presume que la serie es no estacionaria homogénea de primer orden.

Para confirmar esta suposición se emplea la prueba de Dickey Fuller a la primera diferencia de la serie logaritmo de TRM.

La cual permite rechazar la hipótesis nula que consiste en que la primera diferencia de la serie logaritmo TRM tiene raíz unitaria, por lo que el proceso de diferenciación conduciría a una serie estacionaria con tendencia temporal.

Figura 20. Prueba de Dickey Fuller aplicada a la serie $\ln TRM$

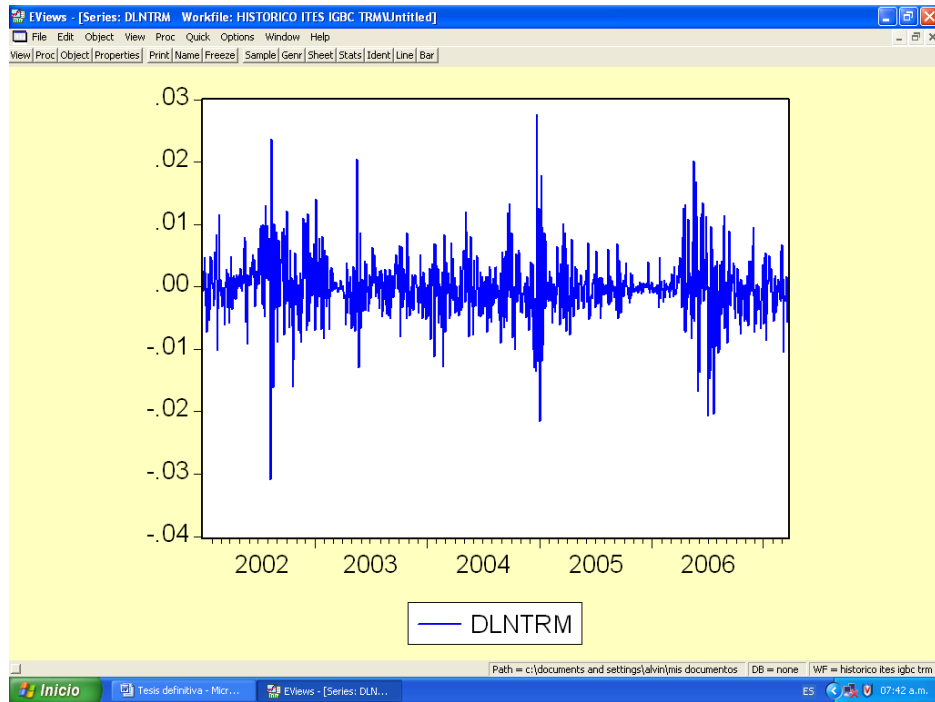


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Esta primera diferencia corresponde entonces a los rendimientos de la serie TRM, atendiendo lo establecido en el marco teórico.

El comportamiento de estos rendimientos en el tiempo se aprecia en la figura 21. Cuyos valores oscilan alrededor de un valor medio. A partir de este paso empieza el proceso de modelación. Obsérvese que al igual que en el caso de la serie del indicador IGBC, en la gráfica existen clusters de volatilidad, entendiendo éstos como a un periodo de alta variación de rendimientos, le sigue otro igual o a un periodo de baja volatilidad tiende a seguirle también un periodo de calma. Estas características son adecuadamente recogidas por los modelos GARCH y todas sus extensiones. Por lo que éstos serán los modelos empleados.

Figura 21. Comportamiento de los rendimientos TRM en el tiempo.



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

El detalle del procedimiento que se sigue, se describe en los anexos. Este procedimiento permitió obtener las siguientes ecuaciones para la media y para la volatilidad (varianza condicional):

Ecuación para la media:

$$d \ln TRM_t = 0.25293 d \ln TRM_{t-1} + 0.920396 d \ln TRM_{t-2} - 0.21715 d \ln TRM_{t-3} + \dots \\ \dots + a_{t,TRM} - 1.041369 a_{t-2,TRM} + 0.127822 a_{t-4,TRM} \quad (\text{Ec. 3.4.})$$

En donde:

$$a_{t,TRM} = \sigma_{t,TRM} * \varepsilon_{t,TRM} \quad (\text{Ec. 3.5.})$$

Ecuación para la varianza condicional:

$$\sigma_{t,TRM}^2 = 2.50 * 10^{-7} + 0.355628 * a_{t-1,TRM}^2 + 0.705396 * \sigma_{t-1,TRM}^2 \quad (\text{Ec. 3.6.})$$

- Limitaciones del modelo. Los comentarios realizados para el modelo dlnIGBC, aplica igual para este activo. En este caso, la comparación del pronóstico estático y dinámico se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 3. Evaluación de pronóstico dlnTRM

Activo	Pronóstico (coeficiente de determinación, prueba de significación de la variable)	
	Estático	Dinámico
dlnTRM	0.062076 Volatilidad significativa	0.013176 Volatilidad no significativa

Fuente: Propio

Por esta razón se emplea un pronóstico de un periodo adelante. Ver anexos para más detalles.

4.1.3. Análisis de datos ITES. La modelación sigue el mismo procedimiento descrito en las dos series anteriores, es decir primero se establece la estacionariedad de la serie y posteriormente se realiza la búsqueda del modelo que mejor explique su comportamiento.

La muestra a analizar comprende de enero 2 de 2002 a marzo 16 de 2007. El comportamiento de la serie ITES transformada mediante logaritmos se aprecia en la figura 22.

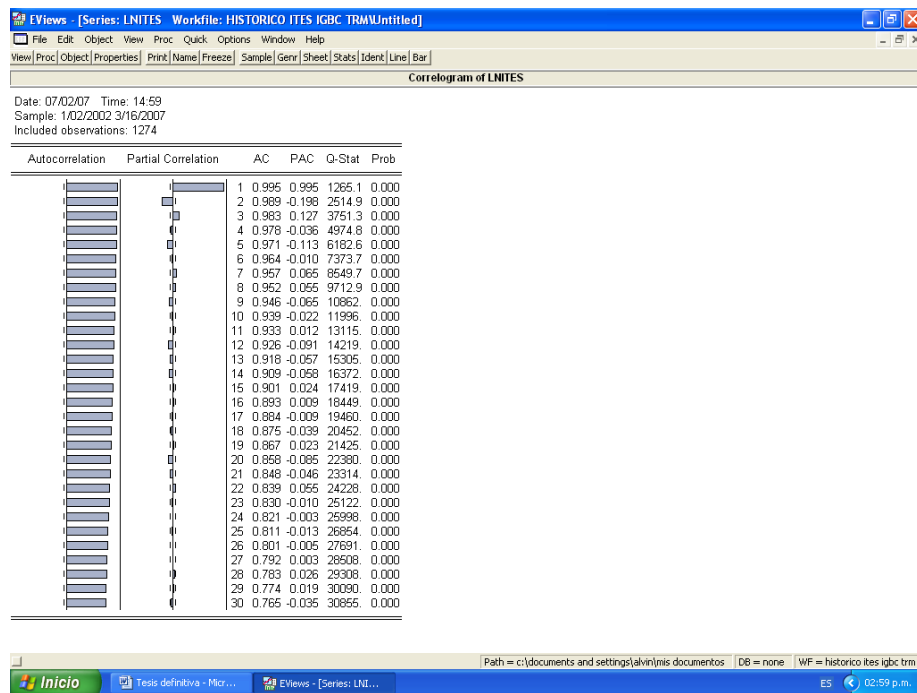
El análisis del correlograma de esta serie es el que se aprecia en la figura 23. En ella se observa una disminución muy lenta de los valores del coeficiente de autocorrelación lo que sugiere que la serie es no estacionaria.

Figura 22. Comportamiento del logaritmo del precio de ITES para el periodo analizado



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

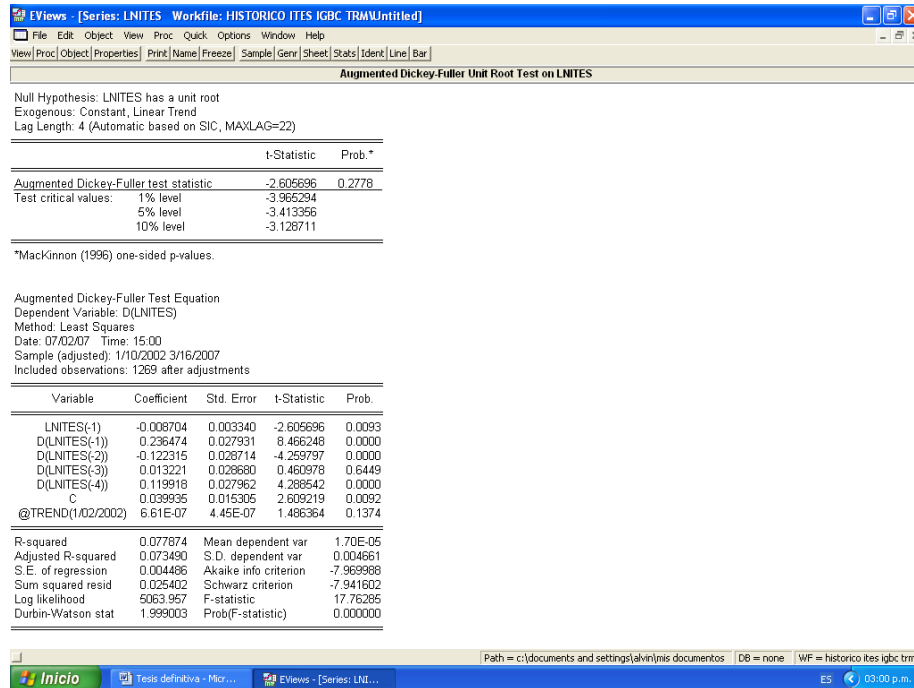
Figura 23. Correlograma de la serie LNITES.



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Los resultados de la prueba de Dickey Fuller se muestran en la figura 24. De acuerdo con ellos, no es posible rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria.

Figura 24. Prueba de Dickey Fuller aplicada sobre la serie lnITES

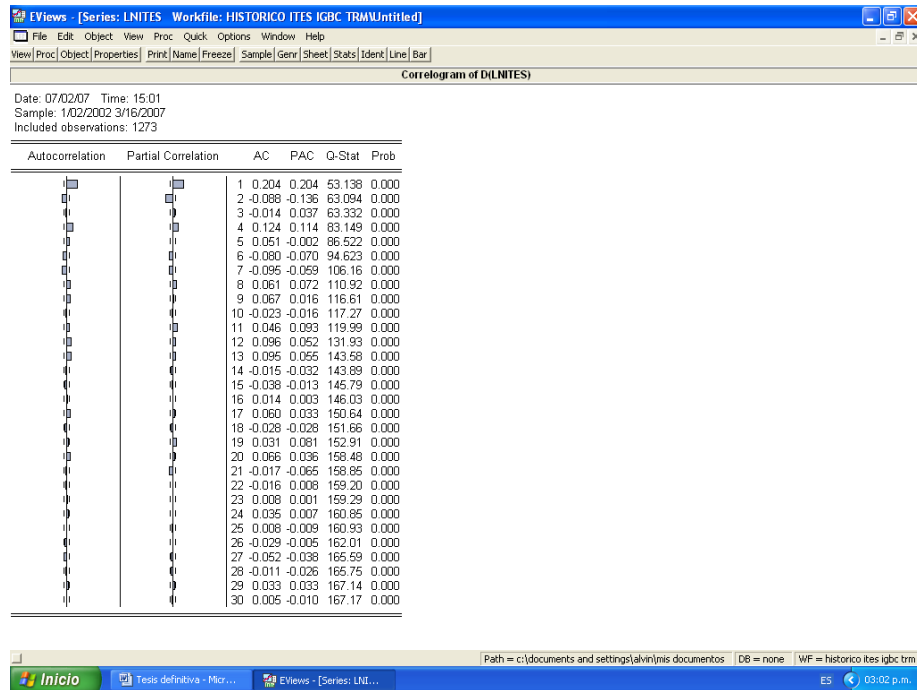


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Se comprueba ahora si la primera diferencia es estacionaria (dlnITES a partir de ahora):

Correlograma de la primera diferencia:

Figura 25. Correlograma de la serie dlnITES



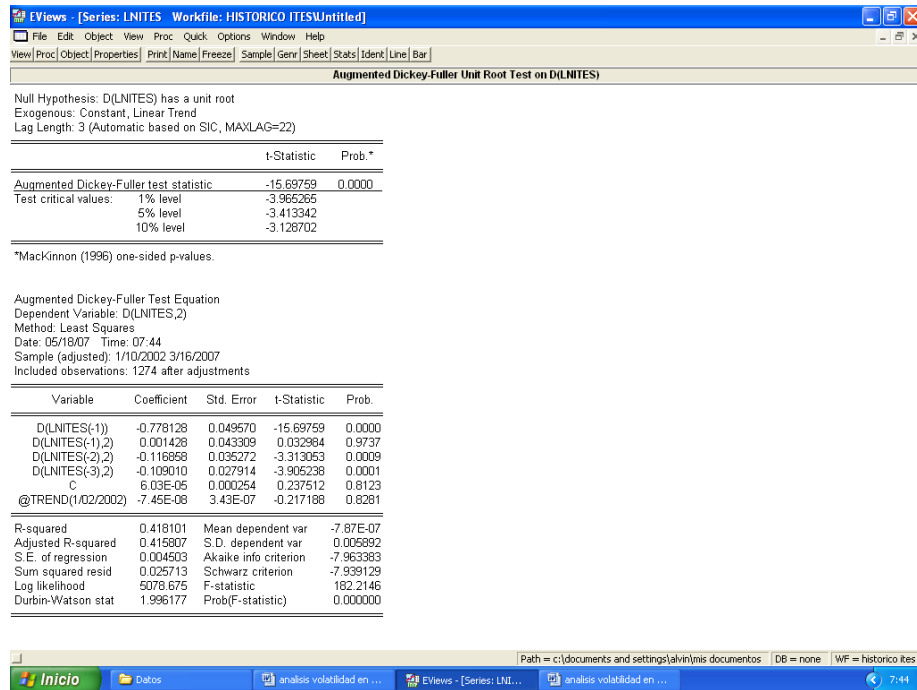
Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Donde se observa que los valores de la función de autocorrelación muestral oscilan alrededor de un punto central, por lo que podría pensarse en una serie estacionaria.

Para confirmar esta sospecha, se emplea la prueba de Dickey Fuller: Los resultados de la prueba se muestran en la figura 26.

Que indica que la hipótesis nula de raíz unitaria se rechaza, por lo que la primera diferencia es estacionaria. Esta diferencia es la que se procede a modelar, según lo descrito en los anexos de este trabajo.

Figura 26. Prueba de Dickey Fuller aplicada a la serie dlnITES



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Los modelos obtenidos al finalizar este proceso, son los que siguen:

Ecuación para la media:

$$d \ln ITES_t = 0.000357 + 0.058825 d \ln ITES_{t-3} + 0.07287 d \ln ITES_{t-4} + a_{t, ITES} + \dots + 0.181583 a_{t-1, ITES}$$

(Ec. 3.7.)

En donde:

$$a_{t, ITES} = \sigma_{t, ITES} * \varepsilon_{t, ITES} \quad (\text{Ec. 3.8})$$

Ecuación para la varianza condicional:

$$\sigma_{t, ITES}^2 = 4.86 * 10^{-7} + 0.314728 a_{t-1, ITES}^2 + 0.695107 \sigma_{t-1, ITES}^2 \quad (\text{Ec. 3.9})$$

- Limitaciones del modelo hallado. Solo se emplea para el pronóstico un periodo adelante por las razones expuestas en los anteriores activos analizados.

4.2. ANALISIS DE PORTAFOLIO

La teoría del portafolio se basa en dos principios fundamentales [RUPPERT, 2004]:

- Maximización del retorno esperado, $E(R)$.
- Minimización del riesgo, σ_R .

Los cuales están en oposición dado que a mayor rentabilidad mayor riesgo. Los modelos de optimización basados en estas funciones objetivo caen en la categoría de modelos del tipo mean variance [ZENIOS, 1999].

La pretensión es construir un portafolio de inversión a partir de los instrumentos primarios analizados: acciones (indicador IGBC), dólares (indicador TRM) y Títulos de Tesorería del gobierno colombiano (indicador ITES).

La manera tradicional de resolver los modelos mean variance, implica determinar las proporciones a invertir en cada activo, considerando una sola de las funciones objetivo señaladas y empleando la otra como una restricción [BRANDIMARTE, 2002]. Los valores empleados para $E(R)$ y σ_R de los activos que conforman el portafolio, pueden obtenerse de series de tiempo de rendimientos pasados calculando sus medias muestrales y desviaciones estándar. Esta forma de resolver el problema cae en el campo de la optimización determinista [RAMOS,

2005], en la que los parámetros del problema se conocen con certeza o al menos sus valores medios.

El modelo a desarrollar considerando optimización de un objetivo es el siguiente:

$$\min \mathbf{w}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{w} \quad \mathbf{Ec} \text{ (3.10)}$$

s.a

$$\mathbf{w}^T \mathbf{R} = \mu_p$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$$

Donde,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{d \ln igbc} \\ R_{d \ln trm} \\ R_{d \ln ites} \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} Var(R_{d \ln igbc}) & Cov(R_{d \ln igbc}, R_{d \ln trm}) & Cov(R_{d \ln igbc}, R_{d \ln ites}) \\ Cov(R_{d \ln trm}, R_{d \ln igbc}) & Var(R_{d \ln trm}) & Cov(R_{d \ln trm}, R_{d \ln ites}) \\ Cov(R_{d \ln ites}, R_{d \ln igbc}) & Cov(R_{d \ln ites}, R_{d \ln trm}) & Var(R_{d \ln ites}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{d \ln igbc} \\ w_{d \ln trm} \\ w_{d \ln ites} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.2.1. Comportamiento Real del Portafolio. A partir de los datos reales de los activos analizados en el periodo enero 2 de 2002 a marzo 17 de 2007, se tomó la submuestra: enero 2 de 2002 marzo 16 de 2006, cuyas estadísticas son:

Tabla 4. Matriz de varianzas y covarianzas. Periodo 1/2/2002-3/17/2006

	DLNIGBC	DLNTRM	DLNITES
DLNIGBC	0.000142	-8.49E-07	1.17E-05
DLNTRM	-8.49E-07	1.91E-05	-4.37E-07
DLNITES	1.17E-05	-4.37E-07	2.09E-05

Fuente: Calculada con la ayuda de Eviews

Tabla 5. Estadísticos de las series analizadas en el periodo 01/02/2002 – 03/16/2006

Date: 07/06/07

Time: 05:48

Sample: 1/02/2002 3/16/2006

	DLNIGBC	DLNTRM	DLNITES
Mean	0.002271	-1.35E-05	0.000137
Median	0.002105	-0.000105	0.000398
Maximum	0.082866	0.027640	0.030668
Minimum	-0.063733	-0.030864	-0.032525
Std. Dev.	0.011921	0.004374	0.004576
Skewness	-0.259272	0.193321	-0.693882
Kurtosis	7.120995	9.229876	12.57752
Jarque-Bera	741.0952	1673.693	4023.250
Probability	0.000000	0.000000	0.000000
Sum	2.341087	-0.013910	0.141055
Sum Sq. Dev.	0.146366	0.019702	0.021564
Observations	1031	1031	1031

Fuente: Calculada con la ayuda de Eviews

A partir del modelo descrito por las ecuaciones 3.10 y las tablas 4 y 5. se construirá un portafolio óptimo de referencia:

- Construcción de un portafolio de manera tradicional. Para el caso analizado se tiene que los valores esperados del vector aleatorio de

rendimientos de los activos corresponden a las medias muestrales de las series manipuladas:

$$E(\mathbf{R}) = \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{d \ln igbc} \\ \mu_{d \ln trm} \\ \mu_{d \ln ites} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.002271 \\ -1.35E - 05 \\ 0.000137 \end{bmatrix}$$

Se define $\Omega_{i,j}$ como la covarianza entre R_i y R_j y como el elemento i y j de Ω , la matriz de covarianza de \mathbf{R} . También, se tiene que $\sigma_i = \sqrt{\Omega_{ii}}$ la desviación estándar de R_i .

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \begin{bmatrix} \text{Var}(R_{d \ln igbc}) & \text{Cov}(R_{d \ln igbc}, R_{d \ln trm}) & \text{Cov}(R_{d \ln igbc}, R_{d \ln ites}) \\ \text{Cov}(R_{d \ln trm}, R_{d \ln igbc}) & \text{Var}(R_{d \ln trm}) & \text{Cov}(R_{d \ln trm}, R_{d \ln ites}) \\ \text{Cov}(R_{d \ln ites}, R_{d \ln igbc}) & \text{Cov}(R_{d \ln ites}, R_{d \ln trm}) & \text{Var}(R_{d \ln ites}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.000142 & -8.49E - 07 & 1.17E - 05 \\ -8.49E - 07 & 1.91E - 05 & -4.37E - 07 \\ 1.17E - 05 & -4.37E - 07 & 2.09E - 05 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sea \mathbf{w} la matriz de pesos del portafolio, dada por:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{d \ln igbc} \\ w_{d \ln trm} \\ w_{d \ln ites} \end{bmatrix}$$

El rendimiento esperado del portafolio conformado por estos activos viene dado por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i = w_{d \ln igbc} * \mu_{d \ln igbc} + w_{d \ln trm} * \mu_{d \ln trm} + w_{d \ln ites} * \mu_{d \ln ites}$$

Para el caso del riesgo, medido por la varianza del rendimiento del portafolio, se tiene:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{w} \quad \text{Ec. 3.12.}$$

El portafolio eficiente minimiza esta última ecuación, para un valor dado del rendimiento del portafolio, μ_p . Se tienen como restricciones:

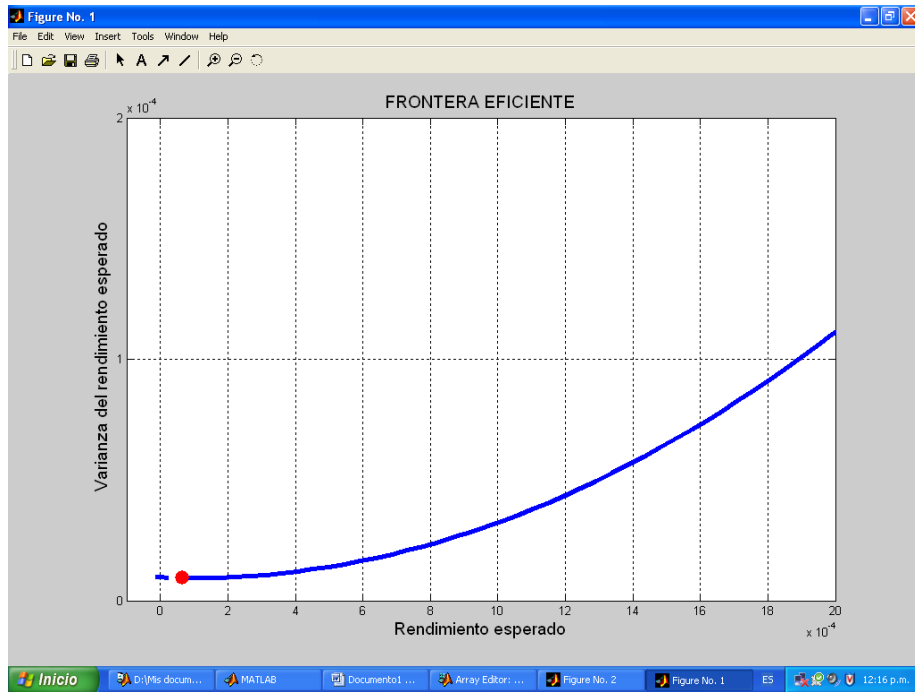
$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} &= \mu_p \\ \mathbf{w}^T \mathbf{1} &= 1 \end{aligned}$$

En [RUPPERT, 2004], se encuentra una descripción analítica y detallada del procedimiento de solución de este modelo, basado en multiplicadores de Lagrange. Adicionalmente, se encuentra el algoritmo y su código en Matlab que resuelve el problema de optimización planteado, es decir los valores de w_i que minimizan la función. Este código adaptado al caso analizado, se encuentra en el anexo y al ser ejecutado en el entorno Matlab, produce la frontera eficiente que se observa en la figura 27.

Esta forma de optimizar produce un punto donde se alcanza el mínimo y es el señalado con rojo en la gráfica, el resto de puntos se obtienen modificando los valores esperados del rendimiento del portafolio, donde para cada ocasión se obtiene la varianza mínima del portafolio, bajo el parámetro especificado.

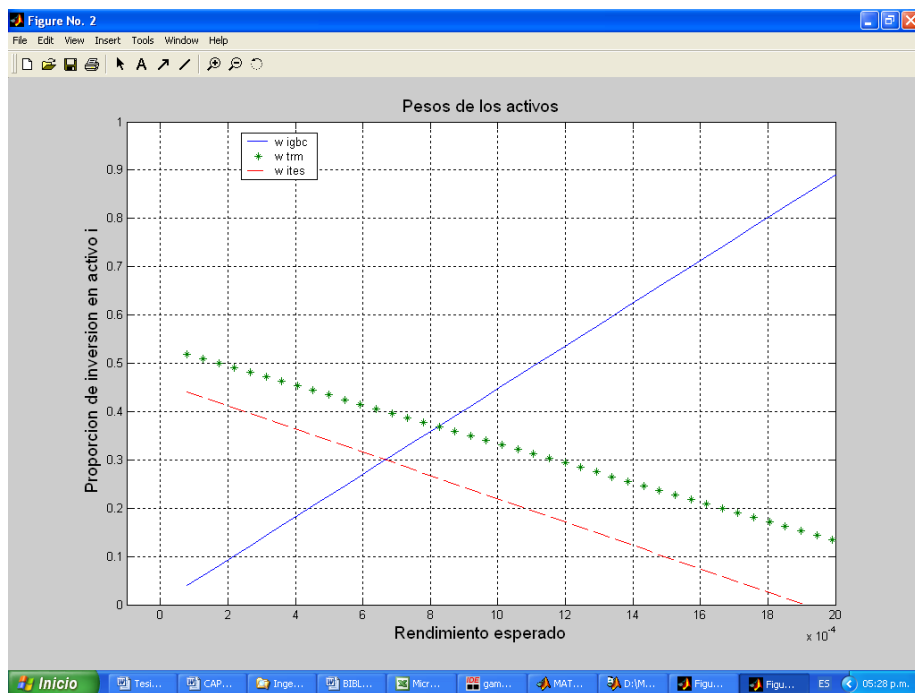
Los pesos de los activos calculados bajo este método se muestran en la figura 28.

Figura 27. Frontera eficiente obtenida bajo optimización tradicional



Fuente: Elaborado con ayuda de Matlab.

Figura 28. Pesos de los activos para la frontera eficiente bajo optimización tradicional



Fuente: Elaborado con ayuda de Matlab

La solución obtenida es estática, dado que considera la misma solución para el futuro mientras se mantengan los valores de los parámetros de entrada, en este caso, las medias de rendimientos históricos y la matriz de varianzas y covarianzas de las series analizadas.

Se pretende evaluar si la optimización multiobjetivo y la utilización de ecuaciones estocásticas de series de tiempo, mejoran estos resultados o presentan resultados diferentes.

Para el día 17 de marzo de 2006, fecha de pronóstico, los rendimientos de los activos fueron:

Tabla 6. Rendimientos activos en 03/17/2006

Fecha	dlnIGBC	dlnTRM	dlnITES
Marzo 17 de 2006	0,00712006	-0,0006729	0,00034683

Fuente: [BANCOLOMBIA, 2007]

Con estos datos, se calcula el portafolio óptimo, empleando GAMS como optimizador, minimizando la varianza y para diferentes niveles de rentabilidad. Las ecuaciones 3.10. se emplearon para el cálculo, además se empleó la matriz de varianzas y covarianzas de la tabla 4.

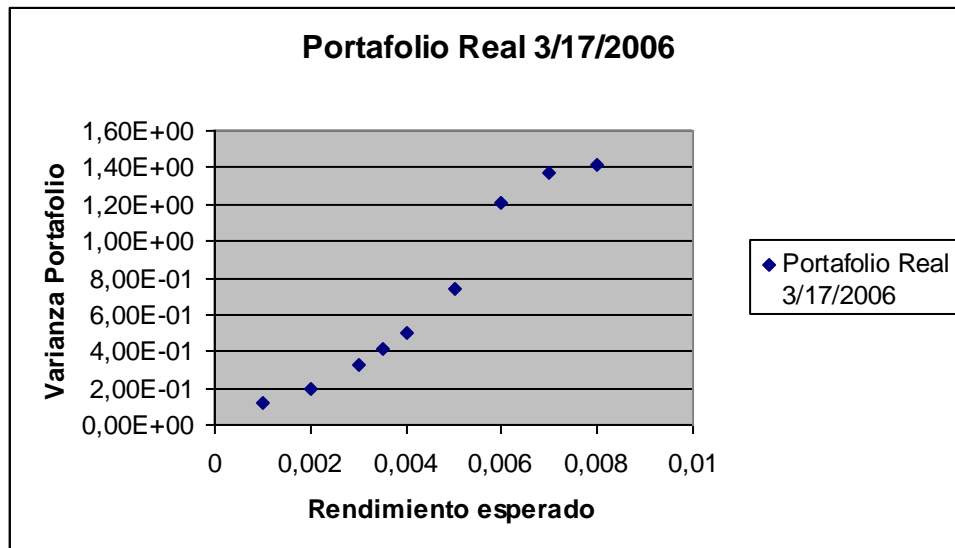
Tabla 7. Portafolio real de 03/17/2006

Varianza mínima	Rendimiento esperado	Peso dlngbc	Peso dlntm	Peso dlnites
1.1983E-5	0.0010	0.160	0.425	0.414
1.9605E-5	0.0020	0.294	0.331	0.375
3.2480E-5	0.0030	0.427	0.237	0.336
4.0888E-5	0.0035	0.494	0.190	0.316
5.0608E-5	0.0040	0.561	0.143	0.297
7.3989E-5	0.0050	0.694	0.048	0.257
1.2072E-4	0.0060	0.835	-	0.165
1.3742E-4	0.0070	0.982	-	0.018
1.4200E-4	0.0080	1.00	-	-

Fuente: Calculada con ayuda de GAMS

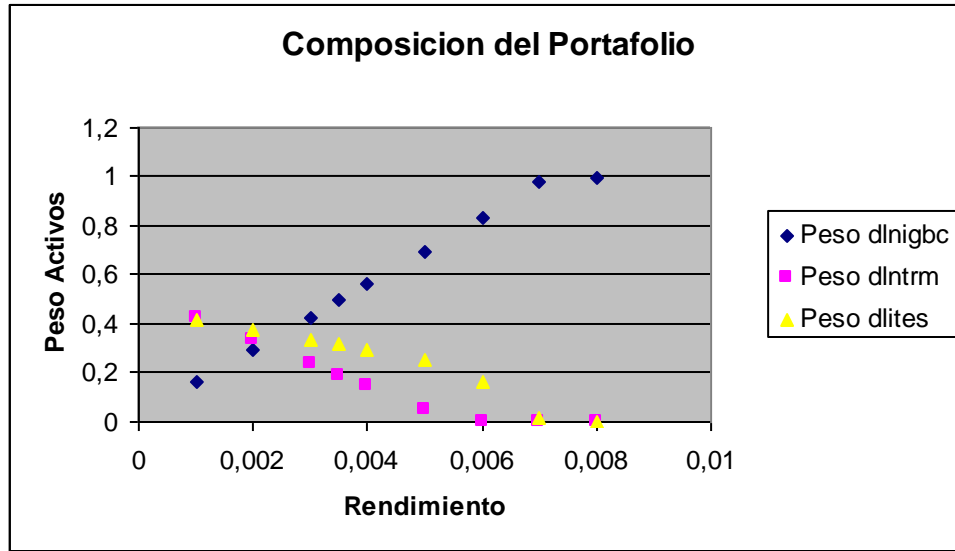
Cuyo comportamiento gráfico se observa gracias a Excel, la figura 29 muestra el frente de Pareto y la figura 30 las combinaciones de pesos que lo originan.

Figura 29. Comportamiento del portafolio real 3/17/06



Fuente: Elaborado con ayuda de Excel

Figura 30. Composición del portafolio real 3/17/06



Fuente: Elaborado con ayuda de Excel

Obsérvese la similitud de esta gráfica con la registrada en la figura 28. Esto es simplemente una referencia y que al ser una realización de una variable aleatoria como es el rendimiento de los activos, debería estar cubierto por los modelos de series de tiempo estocásticos que pretenden recoger el comportamiento de la distribución de probabilidad de tal variable. Sin embargo, está señalando cuales debieron ser los pesos que debieron considerarse para los activos involucrados teniendo en mente los objetivos buscados.

Pudiera ensayarse una optimización estocástica, asumiendo la realización de escenarios futuros y verificar los resultados obtenidos, aun cuando este propósito no está contemplado en este trabajo de investigación, en los anexos E y F se encuentra un procedimiento iniciado, el cual puede mejorarse o aun corregirse para efectos de comparar sus respuestas con el portafolio de referencia.

4.2.2. Optimización multiobjetivo del portafolio (MOP). En la optimización multiobjetivo, contrario a como se ha resuelto el problema hasta ahora,

se considera la búsqueda simultánea de óptimos para las funciones que se analizan, en este caso varianza y rendimiento del portafolio.

Estos objetivos son opuestos minimizar varianza (riesgo) implica disminuir rentabilidad y maximizar rentabilidad aumenta la varianza. Por la naturaleza de esta operación la optimización multiobjetivo resulta pertinente.

Para efectos de facilidad de cálculo ambas funciones serán minimizadas, recurriendo al hecho que maximizar una función es minimizar el negativo de dicha función [MORA, 2001]

$$\max_{x \in A} \varphi(x)$$

Equivale a

$$\min_{x \in A} f(x) = -\varphi(x)$$

De acuerdo con este contexto en esta sección se registran los resultados obtenidos empleando Matlab como herramienta de optimización. En el anexo G se incluye el código utilizado [ARDILA, 2006].

El algoritmo empleado es de tipo evolutivo, conocido con el nombre de SPEA (Strength Pareto Evolutionary Algorithm) [ARDILA, 2006]. La optimización parte de la generación aleatoria de una población inicial de pesos de activos a incluir, atendiendo la restricción que no hay venta en corto (los pesos de los activos son positivos) y la suma de los pesos generados debe ser uno. Los pesos son evaluados a la luz de las funciones objetivos a optimizar y los resultados arrojados por los individuos evaluados permiten establecer un ordenamiento de acuerdo con su grado de aptitud, adaptabilidad o "fitness". Entre menor fitness tenga el elemento evaluado mejores resultados produce. Posteriormente el algoritmo

plantea un “cruzamiento” y “mutación” de algunos individuos con el fin de determinar si este procedimiento permite obtener elementos con mejor fitness, el propósito es simular una cadena evolutiva tal como ocurre en la naturaleza y de allí su nombre genérico.

Los criterios de optimización fueron:

Máxima población a generar: 100

(Es un vector 1x3, donde las columnas son los pesos de los activos, los cuales suman uno)

Máxima población elitista: 20 (Vector 1x3 que recoge los individuos con mejor fitness)

Máximo de Generaciones, se hicieron pruebas con 10, 20 y 50 generaciones

- Resultados obtenidos y comparación con la optimización tradicional. Se tomará como referencia la optimización tradicional, en la que se toma una sola función objetivo (minimizar varianza) y la otra se toma como restricción (maximizar portafolio) considerando los parámetros de rentabilidad y matriz de varianzas y covarianzas constantes en el tiempo.

Los resultados de las variables constituyen la matriz ilustrada a continuación,

Tabla 8. Resultados optimización tradicional

RESULTADOS OPTIMIZACION TRADICIONAL				
RENTABILIDAD	VARIANZA	PESO IGBC	PESO TRM	PESO ITES
-1,3500E-05	9,7906E-02	-1,4464E-03	5,3749E-01	4,6396E-01
3,3122E-01	9,5621E-02	1,9198E-02	5,2810E-01	4,5270E-01
7,9745E-01	9,4558E-02	3,9842E-02	5,1871E-01	4,4145E-01
1,2637E-04	9,4718E-02	6,0486E-02	5,0932E-01	4,3019E-01
1,7299E-04	9,6100E-06	8,1130E-02	4,9993E-01	4,1894E-01
2,1961E-04	9,8705E-02	1,0177E-01	4,9054E-01	4,0768E-01

2,6623E-04	1,0253E-01	1,2242E-01	4,8115E-01	3,9643E-01
3,1286E-04	1,0758E-01	1,4306E-01	4,7177E-01	3,8517E-01
3,5948E-04	1,1385E-01	1,6371E-01	4,6238E-01	3,7392E-01
4,0610E-04	1,2135E-01	1,8435E-01	4,5299E-01	3,6266E-01
4,5272E-04	1,3007E-01	2,0499E-01	4,4360E-01	3,5141E-01
4,9935E-04	1,4001E-01	2,2564E-01	4,3421E-01	3,4015E-01
5,4597E-04	1,5117E-01	2,4628E-01	4,2482E-01	3,2890E-01
5,9259E-04	1,6356E-01	2,6693E-01	4,1543E-01	3,1764E-01
6,3921E-04	1,7716E-01	2,8757E-01	4,0604E-01	3,0639E-01
6,8584E-04	1,9199E-01	3,0821E-01	3,9665E-01	2,9513E-01
7,3246E-04	2,0805E-01	3,2886E-01	3,8727E-01	2,8388E-01
7,7908E-04	2,2532E-01	3,4950E-01	3,7788E-01	2,7262E-01
8,2570E-04	2,4382E-01	3,7015E-01	3,6849E-01	2,6137E-01
8,7233E-04	2,6354E-01	3,9079E-01	3,5910E-01	2,5011E-01
9,1895E-04	2,8449E-01	4,1143E-01	3,4971E-01	2,3885E-01
9,6557E-04	3,0665E-01	4,3208E-01	3,4032E-01	2,2760E-01
1,0122E-03	3,3004E-01	4,5272E-01	3,3093E-01	2,1634E-01
1,0588E-03	3,5465E-01	4,7337E-01	3,2154E-01	2,0509E-01
1,1054E-03	3,8049E-01	4,9401E-01	3,1216E-01	1,9383E-01
1,1521E-03	4,0754E-01	5,1465E-01	3,0277E-01	1,8258E-01
1,1987E-03	4,3582E-01	5,3530E-01	2,9338E-01	1,7132E-01
1,2453E-03	4,6532E-01	5,5594E-01	2,8399E-01	1,6007E-01
1,2919E-03	4,9605E-01	5,7659E-01	2,7460E-01	1,4881E-01
1,3386E-03	5,2799E-01	5,9723E-01	2,6521E-01	1,3756E-01
1,3852E-03	5,6116E-01	6,1788E-01	2,5582E-01	1,2630E-01
1,4318E-03	5,9556E-01	6,3852E-01	2,4643E-01	1,1505E-01
1,4784E-03	6,3117E-01	6,5916E-01	2,3704E-01	1,0379E-01
1,5250E-03	6,6801E-01	6,7981E-01	2,2766E-01	9,2538E-02
1,5717E-03	7,0607E-01	7,0045E-01	2,1827E-01	8,1282E-02
1,6183E-03	7,4535E-01	7,2110E-01	2,0888E-01	7,0027E-02
1,6649E-03	7,8585E-01	7,4174E-01	1,9949E-01	5,8772E-02
1,7115E-03	8,2758E-01	7,6238E-01	1,9010E-01	4,7517E-02
1,7582E-03	8,7053E-01	7,8303E-01	1,8071E-01	3,6262E-02
1,8048E-03	9,1470E-02	8,0367E-01	1,7132E-01	2,5007E-02

1,8514E-03	9,6010E-02	8,2432E-01	1,6193E-01	1,3751E-02
1,8980E-03	1,0067E-04	8,4496E-01	1,5254E-01	2,4962E-03
1,9446E-03	1,0546E-04	8,6560E-01	1,4316E-01	-8,7590E-03
1,9913E-03	1,1036E-04	8,8625E-01	1,3377E-01	-2,0014E-02
2,0379E-03	1,1539E-04	9,0689E-01	1,2438E-01	-3,1269E-02
2,0845E-03	1,2054E-04	9,2754E-01	1,1499E-01	-4,2525E-02
2,1311E-03	1,2581E-04	9,4818E-01	1,0560E-01	-5,3780E-02
2,1778E-03	1,3121E-04	9,6882E-01	9,6211E-02	-6,5035E-02
2,2244E-03	1,3673E-04	9,8947E-01	8,6822E-02	-7,6290E-02
2,2710E-03	1,4237E-04	1,0101E+04	7,7433E-02	-8,7545E-02

Fuente: Calculada con ayuda de Matlab y Excel

Las gráficas de este análisis se mostraron en las figuras 27 y 28:

Para efectos de comparar si la optimización multiobjetivo aporta algo diferente a las soluciones obtenidas, se realiza este procedimiento considerando los parámetros de rentabilidad y matriz de varianzas y covarianzas constantes. Los resultados son ahora la siguiente matriz, tomándose 50 generaciones:

Tabla 9. Resultados optimización multiobjetivo con medias muestrales y homocedasticidad

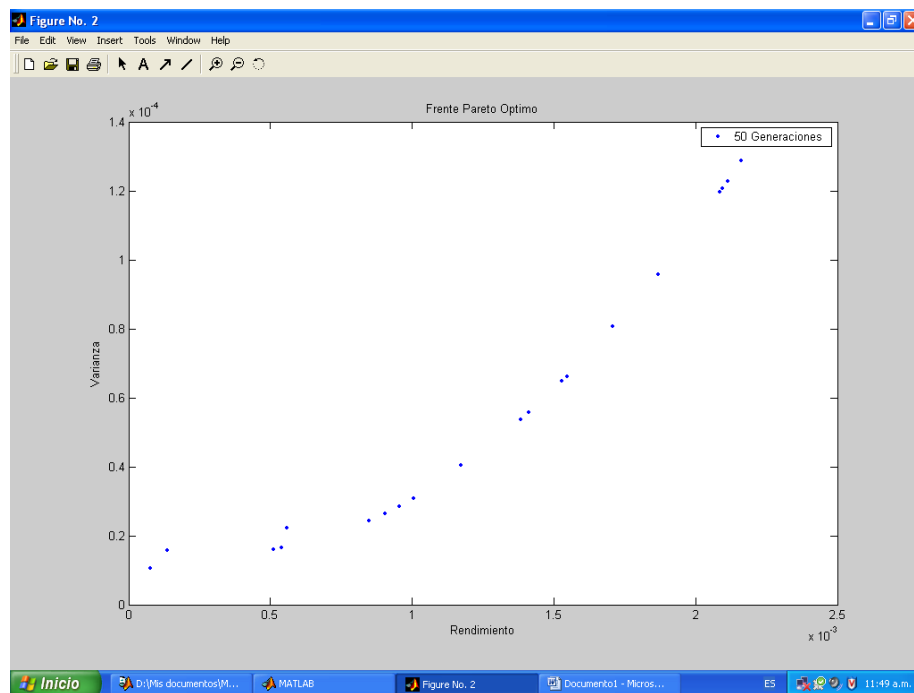
RESULTADOS OPTIMIZACION MULTIOBJETIVO CON MEDIAS MUESTRALES Y HOMOCEDASTICIDAD				
RENTABILIDAD	VARIANZA	PESO IGBC	PESO TRM	PESO ITES
2,1618E-03	1,2875E-04	9,5013E-01	1,8504E-02	3,1367E-02
1,8676E-03	9,5690E-02	8,2141E-01	1,4823E-01	3,0358E-02
1,4106E-03	5,5610E-02	6,1543E-01	2,6398E-01	1,2059E-01
2,0953E-03	1,2065E-04	9,2181E-01	5,8755E-02	1,9432E-02
9,5585E-04	2,8321E-01	4,0571E-01	3,1182E-01	2,8247E-01
2,0850E-03	1,1950E-04	9,1690E-01	5,7891E-02	2,5204E-02
8,4923E-04	2,4163E-01	3,5287E-01	2,7106E-01	3,7608E-01
1,3714E-04	1,5607E-01	9,8613E-03	1,3889E-01	8,5125E-01
5,3979E-04	1,6439E-01	2,0277E-01	1,9872E-01	5,9851E-01
1,3845E-03	5,3693E-01	6,0379E-01	2,7219E-01	1,2402E-01

5,5897E-04	2,2144E-01	1,9881E-01	1,5274E-02	7,8591E-01
1,7083E-03	8,0626E-01	7,4679E-01	1,4837E-01	1,0485E-01
2,1153E-03	1,2281E-04	9,3181E-01	6,7549E-02	6,3630E-04
1,5293E-03	6,4688E-01	6,7214E-01	2,7937E-01	4,8490E-02
7,6379E-01	1,0624E-01	1,9640E-02	6,8128E-01	2,9908E-01
9,0508E-04	2,6362E-01	3,7948E-01	2,7727E-01	3,4325E-01
1,1744E-03	4,0292E-01	5,0281E-01	2,3649E-01	2,6070E-01
1,0064E-03	3,0761E-01	4,2889E-01	3,0462E-01	2,6649E-01
5,1261E-04	1,6067E-01	1,8965E-01	1,9343E-01	6,1692E-01
1,5473E-03	6,6153E-01	6,8222E-01	3,0276E-01	1,5012E-02

Fuente: Calculada con ayuda de Matlab y Excel

El frente de Pareto de estas soluciones se presenta a continuación:

Figura 31. Frente de Pareto utilizando MOP y medias muestrales como parámetros

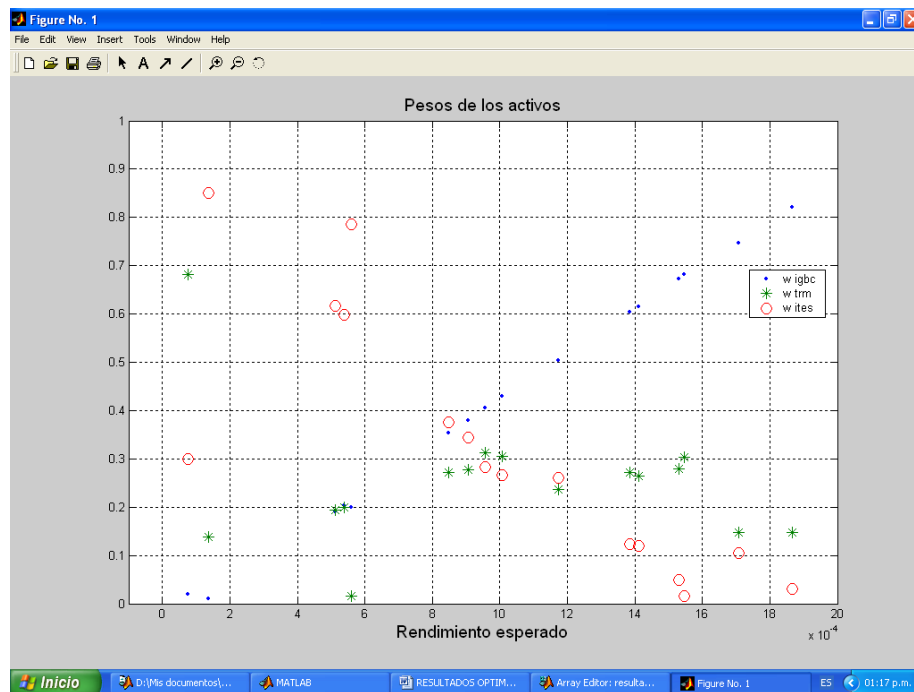


Fuente: Elaborado con ayuda de Matlab

La grafica de pesos de esta optimización (Figura 32), sigue aproximadamente el mismo patrón que la ilustrada en la Figura 28.

El paso que falta es comparar si estos resultados difieren de los entregados por la optimización monoobjetivo (SOP), dado que la diferencia entre ambos procedimientos radica en el método usado para hallar la solución, en el evento que exista será atribuida a la optimización multiobjetivo. La Figura 33. muestra las gráficas superpuestas de SOP y MOP.

Figura 32. Proporciones de inversión en activos del Portafolio tradicional bajo MOP

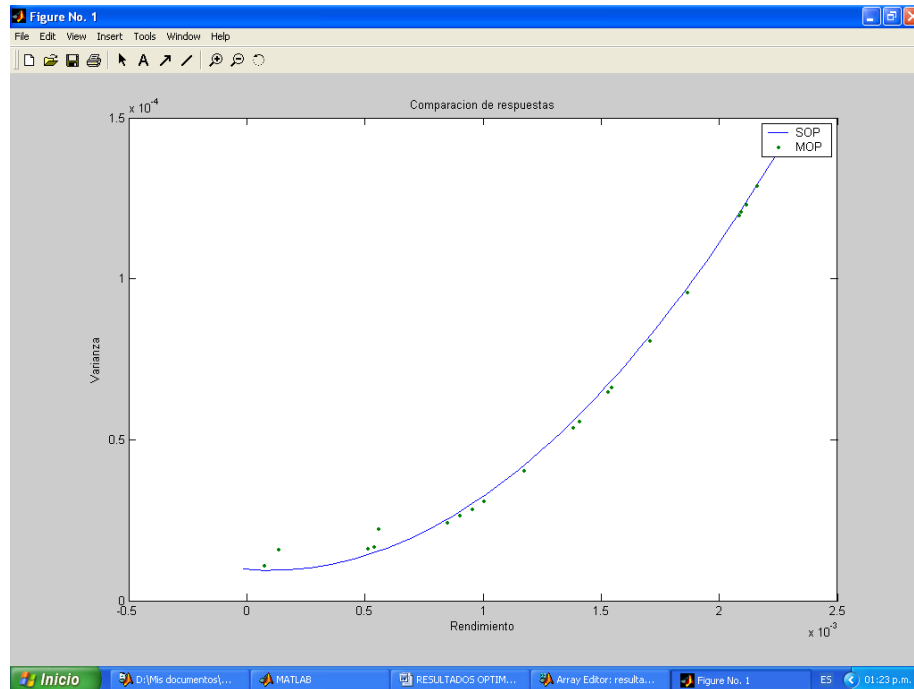


Fuente: Elaborado con ayuda de Matlab.

Como se observa en la figura 33., las fronteras prácticamente coinciden, por lo que se concluye que la optimización multiobjetivo entrega los mismos resultados que la optimización monoobjetivo considerando una de las funciones objetivo como restricción (método clásico de resolver problemas Multiobjetivos). En este caso, el plantear un problema multiobjetivo puede resolverse de manera alternativa como un problema monoobjetivo con la otra

función actuando como restricción. Esta conclusión no puede generalizarse y solo es aplicable al caso considerado.

Figura 33. Comparación entre SOP y MOP (Evaluación de métodos)



Fuente: Elaborado con ayuda de Matlab.

Se verifica ahora si los modelos estocásticos financieros entregan información nueva que permita encontrar diferencias entre el uso de medias muestrales y el uso de valores esperados mediante pronóstico estocástico por series de tiempo.

Para ello, se analiza primero la optimización multiobjetivo con 10 generaciones:

Los resultados de las variables se observan en la tabla 10:

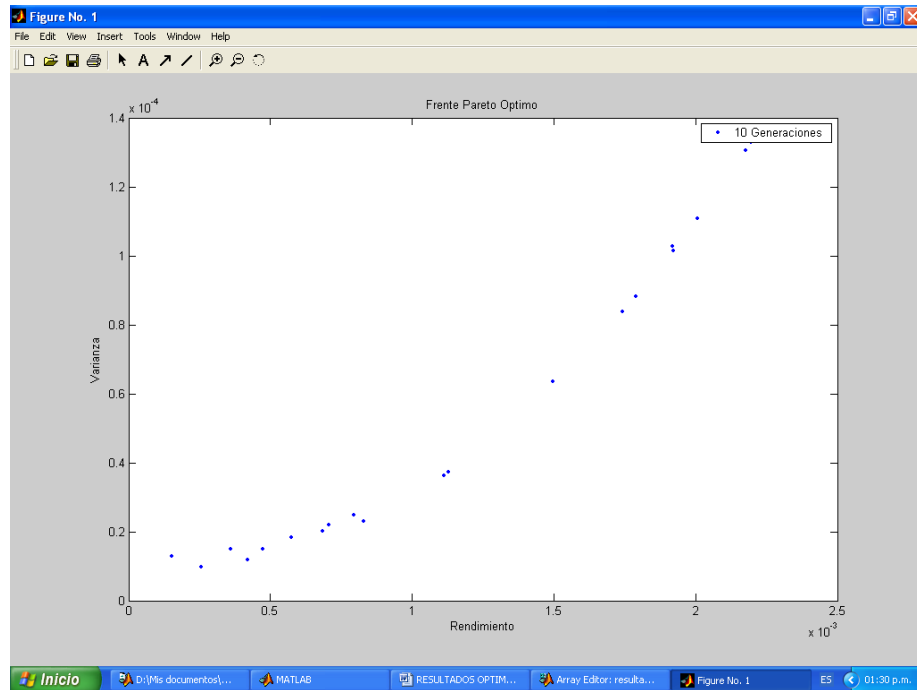
Tabla 10. Resultados optimización multiobjetivo con 10 Generaciones

RESULTADOS OPTIMIZACION MULTI OBJETIVO 10 G				
RENTABILIDAD	VARIANZA	PESO IGBC	PESO TRM	PESO ITES
1,5174E-04	1,2918E-01	2,3220E-02	2,3130E-01	7,4548E-01
2,5740E-04	9,7652E-02	9,3948E-02	5,3213E-01	3,7392E-01
3,5938E-04	1,4919E-01	1,1580E-01	1,6436E-01	7,1984E-01
4,2043E-04	1,1746E-01	1,6017E-01	3,8787E-01	4,5196E-01
4,7243E-04	1,4912E-01	2,0748E-01	7,1311E-01	7,9413E-02
5,7553E-04	1,8413E-01	2,1570E-01	1,4468E-01	6,3962E-01
6,8480E-04	2,0227E-01	3,0480E-01	6,8209E-01	1,3101E-02
7,0700E-04	2,1940E-02	2,7634E-01	1,3097E-01	5,9268E-01
7,9382E-04	2,4714E-01	3,1673E-01	1,2672E-01	5,5655E-01
8,2837E-04	2,3032E-01	3,4546E-01	3,0455E-01	3,4999E-01
1,1125E-03	3,6218E-01	4,7984E-01	3,2236E-01	1,9780E-01
1,1282E-03	3,7273E-01	4,9483E-01	4,3033E-01	7,4844E-02
1,4959E-03	6,3462E-01	6,4471E-01	1,1235E-01	2,4293E-01
1,7430E-03	8,3865E-01	7,6240E-01	1,3917E-01	9,8430E-02
1,7885E-03	8,8123E-01	7,8354E-01	1,3658E-01	7,9885E-02
1,9186E-03	1,0260E-04	8,3553E-01	9,1712E-03	1,5530E-01
1,9216E-03	1,0130E-04	8,4526E-01	1,2770E-01	2,7039E-02
2,0078E-03	1,1079E-04	8,8244E-01	8,1799E-02	3,5764E-02
2,1777E-03	1,3064E-04	9,5737E-01	1,5381E-02	2,7254E-02
2,1977E-03	1,3289E-04	9,6722E-01	2,2242E-02	1,0542E-02

Fuente: Calculado con ayuda de Matlab y Excel

Estos resultados permiten graficar rentabilidad vs varianza del portafolio, lo cual se observa en la figura siguiente

Figura 34. Frente de Pareto utilizando MOP y modelos GARCH (10 generaciones)

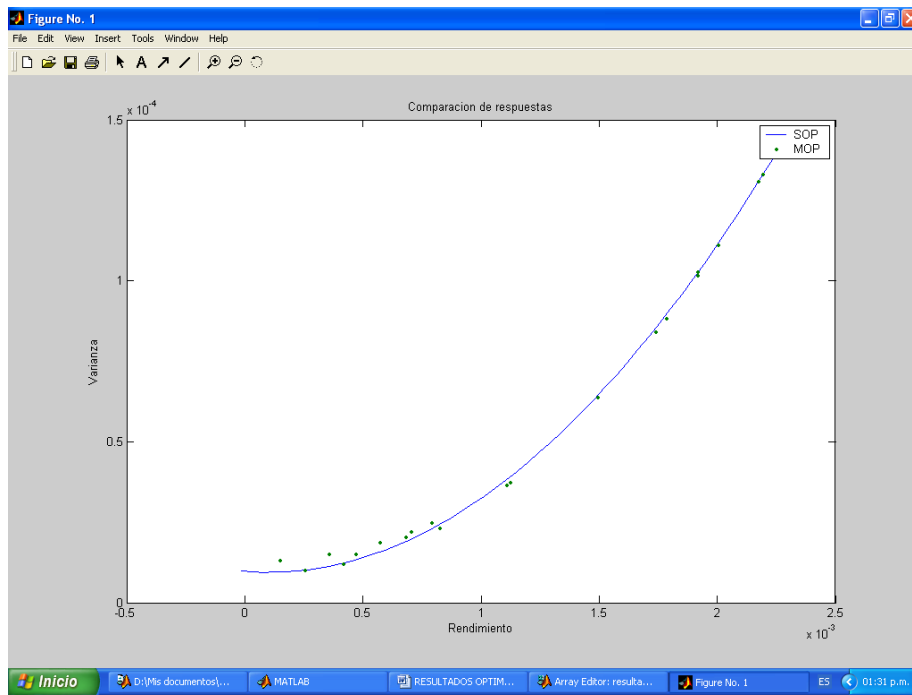


Fuente: Elaborado con ayuda de Matlab.

La comparación de este resultado con la optimización tradicional se observa en la figura 35.

Como se observa en la figura 35, las gráficas prácticamente coinciden. Una posible explicación de estos resultados es que el horizonte de pronóstico considerado es de un día adelante por lo que no deberían presentarse grandes variaciones entre el valor pronosticado y la media muestral.

Figura 35. Comparación SOP con medias muestrales y MOP con modelos GARCH (10 generaciones)



Fuente: Elaborado con ayuda de Matlab.

Se procede a aumentar el número de generaciones a 20, para obtener los siguientes resultados de las variables:

Tabla 11. Resultados optimización multiobjetivo con 20 Generaciones

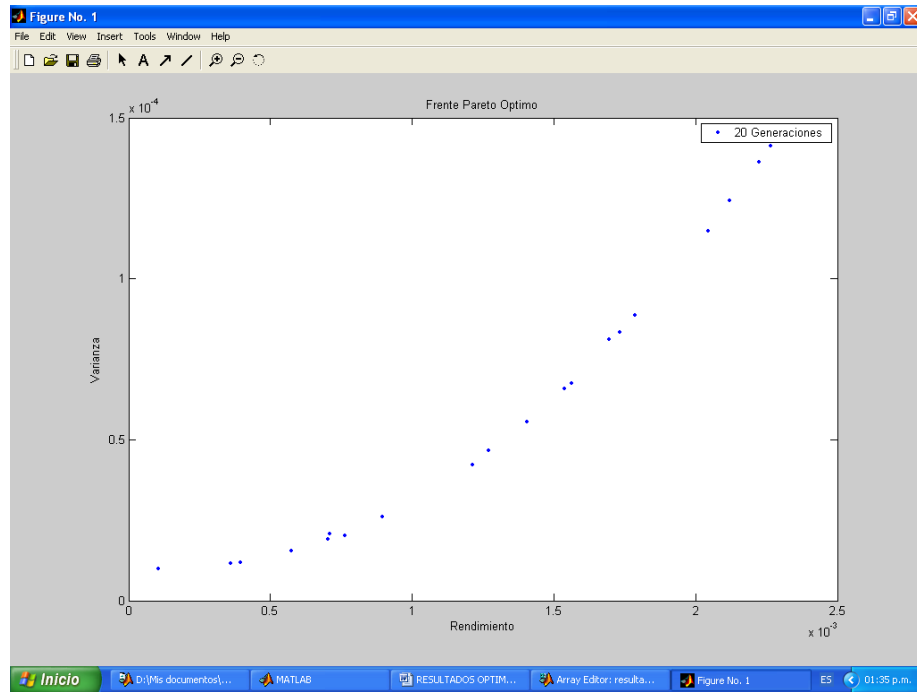
RESULTADOS OPTIMIZACION MULTI OBJETIVO 20 G				
RENTABILIDAD	VARIANZA	PESO IGBC	PESO TRM	PESO ITES
1,0661E-04	9,8431E-02	1,6762E-02	4,3963E-01	5,4361E-01
3,6015E-04	1,1423E-01	1,4840E-01	6,2145E-01	2,3016E-01
3,9664E-04	1,1870E-02	1,4575E-01	3,4150E-01	5,1275E-01
5,7313E-04	1,5315E-01	2,2598E-01	3,0646E-01	4,6756E-01
7,0508E-04	1,9046E-01	2,8624E-01	2,8413E-01	4,2963E-01
7,1056E-04	2,0757E-01	2,8202E-01	1,8790E-01	5,3008E-01
7,6332E-04	2,0301E-01	3,2708E-01	4,7621E-01	1,9671E-01
8,9724E-04	2,6010E-02	3,7597E-01	2,7952E-01	3,4451E-01
1,2150E-03	4,2263E-01	5,2718E-01	3,1244E-01	1,6038E-01
1,2704E-03	4,6684E-01	5,4424E-01	1,8615E-01	2,6961E-01
1,4046E-03	5,5519E-01	6,0875E-01	2,0935E-01	1,8189E-01
1,5368E-03	6,5678E-01	6,6968E-01	1,9464E-01	1,3567E-01
1,5623E-03	6,7419E-01	6,8591E-01	2,5533E-01	5,8763E-02
1,6964E-03	8,1238E-01	7,3313E-01	3,3864E-02	2,3300E-01
1,7327E-03	8,3472E-01	7,5437E-01	9,3532E-02	1,5210E-01
1,7865E-03	8,8544E-01	7,7893E-01	8,4574E-02	1,3650E-01
2,0437E-03	1,1493E-04	8,9766E-01	5,9526E-02	4,2811E-02
2,1217E-03	1,2424E-04	9,3097E-01	1,3184E-02	5,5843E-02
2,2236E-03	1,3614E-04	9,7849E-01	9,7871E-03	1,1725E-02
2,2658E-03	1,4134E-04	9,9773E-01	2,2653E-03	0,0000E+00

Fuente: Calculada con Matlab y Excel

Con estos valores se obtiene el frente de Pareto bajo MOP y 20 generaciones. (Figura 36).

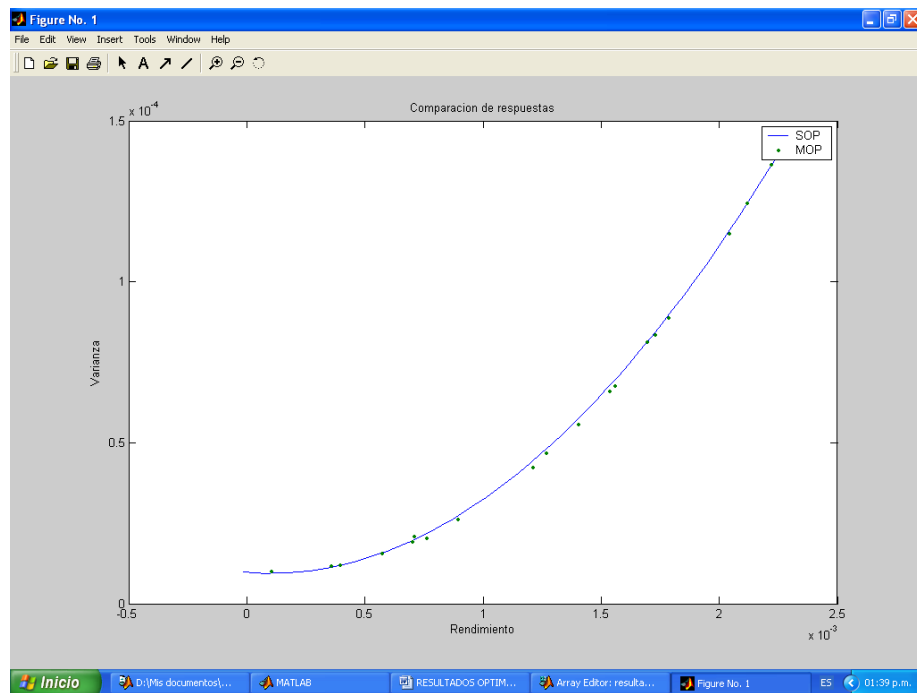
Se compara este resultado con el portafolio de referencia. La comparación gráfica se ve en la figura 37.

Figura 36. Frente de Pareto utilizando MOP y modelos GARCH (20 generaciones)



Fuente: Elaborado con ayuda de Matlab.

Figura 37. Comparación SOP con medias muestrales y MOP con modelos GARCH (20 generaciones)



Fuente: Elaborado con ayuda de Matlab.

Que, a diferencia de la optimización con 10 generaciones, entrega un frente mejor distribuido.

Para 50 generaciones, las respuestas son:

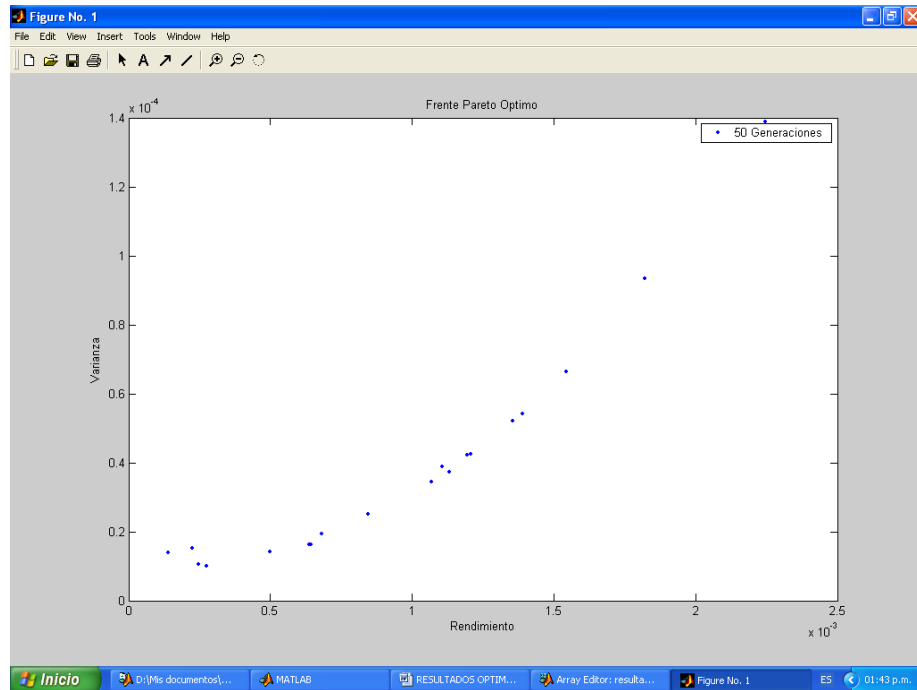
Tabla 12. Resultados optimización multiobjetivo con 50 Generaciones

RESULTADOS OPTIMIZACION MULTI OBJETIVO 50 G				
RENTABILIDAD	VARIANZA	PESO IGBC	PESO TRM	PESO ITES
1,3540E-03	5,2041E-01	5,8446E-01	2,0088E-01	2,1467E-01
1,1314E-03	3,7310E-02	4,8815E-01	3,1422E-01	1,9763E-01
8,4643E-04	2,5071E-01	3,4653E-01	1,9969E-01	4,5378E-01
2,4820E-04	1,0626E-01	9,8100E-02	6,5212E-01	2,4978E-01
1,3894E-03	5,4052E-01	6,0597E-01	2,7036E-01	1,2367E-01
1,1083E-03	3,8937E-01	4,6176E-01	9,3720E-02	4,4452E-01
2,2453E-04	1,5315E-01	1,0270E-01	8,7454E-01	2,2761E-02
1,3914E-04	1,3993E-01	6,0756E-02	8,4724E-01	9,2006E-02
1,0687E-03	3,4358E-01	4,5411E-01	2,4818E-01	2,9771E-01
2,2460E-03	1,3889E-04	9,8858E-01	4,5231E-03	6,8960E-03
1,8215E-03	9,3256E-01	7,8953E-01	2,1782E-03	2,0829E-01
1,2075E-03	4,2547E-01	5,1634E-01	2,0814E-01	2,7552E-01
6,4287E-04	1,6363E-01	2,6519E-01	3,9898E-01	3,3583E-01
2,2206E-03	1,3567E-04	9,7763E-01	1,7554E-02	4,8173E-03
6,3617E-04	1,6112E-01	2,6464E-01	4,3569E-01	2,9967E-01
1,1934E-03	4,2292E-01	5,0666E-01	1,6491E-01	3,2843E-01
2,7409E-04	1,0050E-02	9,4209E-02	4,2490E-01	4,8089E-01
6,8036E-04	1,9277E-01	2,7019E-01	2,2075E-01	5,0906E-01
4,9942E-04	1,4199E-01	1,8962E-01	2,8060E-01	5,2979E-01
1,5454E-03	6,6331E-01	6,7406E-01	1,9940E-01	1,2654E-01

Fuente: Calculado con la ayuda de Matlab y Excel

El frente de Pareto en la figura 38 y la comparación gráfica en la figura 39:

Figura 38. Frente de Pareto utilizando MOP y modelos GARCH (50 generaciones)

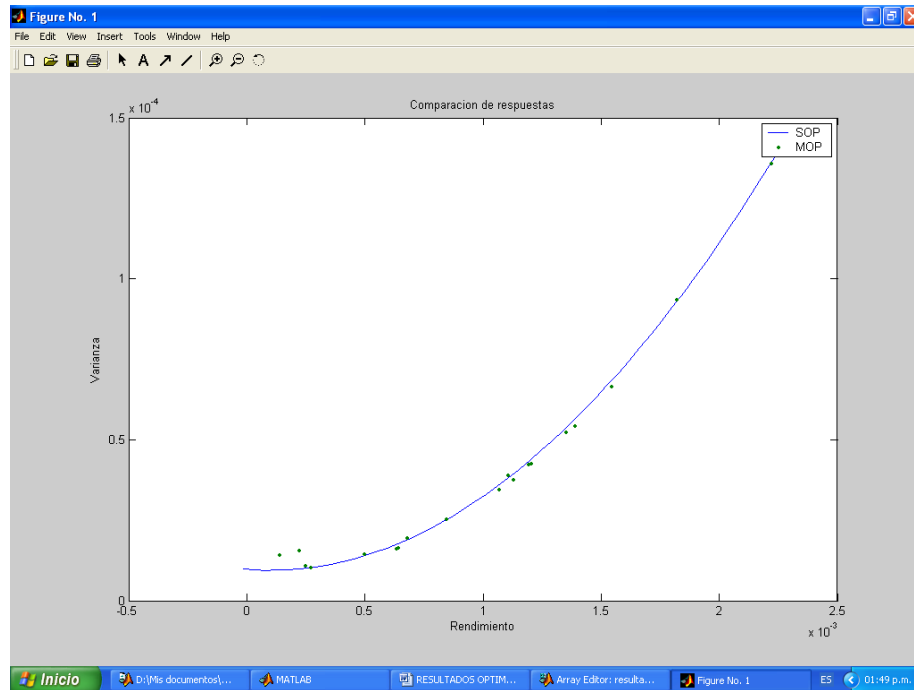


Fuente: Elaborado con ayuda de Matlab.

Al igual que en las situaciones anteriores, los resultados obtenidos no cambian.

Finalmente las respuestas sobre cuales son las proporciones de los activos que deben incluirse en el portafolio para maximizar rentabilidad y minimizar riesgo son las descritas en la tabla 13.

Figura 39. Compara SOP con medias muestrales y MOP con modelos GARCH (50 generaciones)



Fuente: Elaborado con ayuda de Matlab.

Tabla 13. Proporciones de inversión en activos

Pesos porcentuales			Rendimiento Portafolio %	Varianza Portafolio	Desviación Estandar Portafolio
IGBC	TRM	ITES			
-0,14	53,75	46,4	5,31E-03	9,79E-06	0,00312829
1,92	52,81	45,27	9,85E-03	9,64E-06	0,00310476
3,98	51,87	44,14	1,44E-02	9,61E-06	0,00310028
6,05	50,93	43,02	1,89E-02	9,71E-06	0,00311565
8,11	49,99	41,89	2,35E-02	9,92E-06	0,00314923
10,18	49,05	40,77	2,80E-02	1,03E-05	0,00320195
12,24	48,12	39,64	3,26E-02	1,07E-05	0,00327151
14,31	47,18	38,52	3,71E-02	1,13E-05	0,00335811
16,37	46,24	37,39	4,17E-02	1,20E-05	0,00345884
18,44	45,3	36,27	4,62E-02	1,28E-05	0,00357449
20,5	44,36	35,14	5,08E-02	1,37E-05	0,0037016
22,56	43,42	34,02	5,53E-02	1,47E-05	0,00384024
24,63	42,48	32,89	5,99E-02	1,59E-05	0,00398969
26,69	41,54	31,76	6,44E-02	1,72E-05	0,00414722
28,76	40,6	30,64	6,90E-02	1,86E-05	0,00431403
30,82	39,67	29,51	7,35E-02	2,01E-05	0,00448691
32,89	38,73	28,39	7,81E-02	2,18E-05	0,00466723
34,95	37,79	27,26	8,26E-02	2,35E-05	0,00485192

37,01	36,85	26,14	8,71E-02	2,54E-05	0,00504183
39,08	35,91	25,01	9,17E-02	2,74E-05	0,00523713
41,14	34,97	23,89	9,62E-02	2,95E-05	0,00543549
43,21	34,03	22,76	1,01E-01	3,18E-05	0,00563838
45,27	33,09	21,63	1,05E-01	3,41E-05	0,00584334
47,34	32,15	20,51	1,10E-01	3,66E-05	0,00605249
49,4	31,22	19,38	1,14E-01	3,92E-05	0,006263
51,47	30,28	18,26	1,19E-01	4,20E-05	0,00647707
53,53	29,34	17,13	1,24E-01	4,48E-05	0,00669194
55,59	28,4	16,01	1,28E-01	4,77E-05	0,00690887
57,66	27,46	14,88	1,33E-01	5,08E-05	0,00712857
59,72	26,52	13,76	1,37E-01	5,40E-05	0,00734882
61,79	25,58	12,63	1,42E-01	5,73E-05	0,00757155
63,85	24,64	11,5	1,46E-01	6,08E-05	0,00779443
65,92	23,7	10,38	1,51E-01	6,43E-05	0,00801983
67,98	22,77	9,25	1,55E-01	6,80E-05	0,00824509
70,05	21,83	8,13	1,60E-01	7,18E-05	0,00847262
72,11	20,89	7	1,64E-01	7,57E-05	0,00869979
74,17	19,95	5,88	1,69E-01	7,97E-05	0,00892795
76,24	19,01	4,75	1,74E-01	8,39E-05	0,00915799
78,3	18,07	3,63	1,78E-01	8,81E-05	0,0093877
80,37	17,13	2,5	1,83E-01	9,25E-05	0,00961919
82,43	16,19	1,38	1,87E-01	9,70E-05	0,00985023
84,5	15,25	0,25	1,92E-01	1,02E-04	0,01008296
86,56	14,32	-0,88	1,96E-01	1,06E-04	0,01031509
88,62	13,38	-2	2,01E-01	1,11E-04	0,01054781
90,69	12,44	-3,13	2,05E-01	1,16E-04	0,01078212
92,75	11,5	-4,25	2,10E-01	1,21E-04	0,01101578
94,82	10,56	-5,38	2,14E-01	1,27E-04	0,01125098
96,88	9,62	-6,5	2,19E-01	1,32E-04	0,01148548
98,95	8,68	-7,63	2,24E-01	1,37E-04	0,01172146

Fuente: Elaborado con ayuda de Excel y Matlab.

CONCLUSIONES

Este trabajo de investigación se efectuó sobre inversiones en valores primarios transados en la Bolsa de Valores de Colombia, es decir, acciones, bonos y dólares. Dada la variedad de alternativas que se presentan en cada tipo de inversión, se prefirió trabajar con indicadores generales que agrupan títulos afines y además muestran la evolución histórica de los precios de los activos agrupados. Tales indicadores fueron el IGBC, TRM e ITES.

Se analizaron datos de estos indicadores comprendidos entre enero 2 de 2002 y marzo 16 de 2007, no se consideraron datos anteriores a enero de 2002, porque en el año 2001 ocurrió la integración de las tres bolsas de valores que existían en Colombia en una sola: La Bolsa de Valores de Colombia, por lo que se asumió un periodo de transición posterior a esta fecha. Durante el lapso analizado la serie de precios que mostró mayores cambios fue la correspondiente al IGBC y la que menos cambios mostró fue la del ITES.

Se decidió utilizar modelos de series de tiempo para representar los precios históricos debido a que como no se conocen las variables exógenas que afectaron el comportamiento de los datos, las predicciones de los valores de la variable independiente se hicieron en función de sus valores pasados. Ello implicó demostrar que las series, después de algunas transformaciones, son estacionarias, esto quiere decir que ninguna se comportó como caminata aleatoria.

En el proceso de alcanzar estacionariedad en las series, éstas debieron diferenciarse, por lo que este procedimiento dio lugar a la conversión de las series de precios en series de rendimientos, previa obtención de los logaritmos de estas series para efectos de reducir los cambios bruscos en magnitud. Las series de rendimientos fueron examinadas con el software econométrico Eviews para encontrar los modelos apropiados que las representaron.

Con respecto a los modelos empleados, se descartaron los modelos lineales de series de tiempo dado que en su construcción se asume que los datos se comportan homocedásticamente, lo que no es el caso como se demostró en su oportunidad.

Para la construcción de los modelos de series de tiempo heterocedásticos se emplearon los modelos GARCH, los cuales asumen que la volatilidad de la serie es una función lineal exacta de residuales y volatilidades, ambos al cuadrado y pasados. En este caso, los modelos obtenidos fueron GARCH (1,1). Dentro de los supuestos manejados en la construcción de los modelos de las series, se tuvo el hecho de considerar que los residuales condicionales siguen una distribución normal. Durante la validación de este supuesto se observó que aunque el supuesto no es del todo equivocado, por lo que se mantuvo, es probable que otras extensiones de modelos GARCH u otros modelos que implican heterocedasticidad representen mejor el comportamiento de las colas gruesas de las series. Mantener el supuesto de normalidad en los residuales implica estar consciente de que las colas son más gruesas en la realidad que lo representado por el modelo, lo que conduce a una subestimación del riesgo, si se midiera en términos del VaR.

Los pronósticos de volatilidad se validaron siguiendo los lineamientos encontrados en la bibliografía, los cuales establecen realizar un análisis de regresión de los residuales cuadrados en términos del pronóstico de volatilidad. Se sigue este procedimiento porque la volatilidad no es una variable observable por lo que debe

recurrirse a una que si lo sea, como es el caso de los residuales. Los valores del coeficiente de determinación R^2 obtenidos son bajos para los análisis de regresión efectuados (0.308 para IGBC, 0.062 para TRM y 0.210 para ITES), lo que coincide con investigaciones similares. Por la anterior razón, el método ha generado crítica entre los entendidos, a tal punto que se duda sobre la capacidad de los modelos de volatilidad estándar para realizar pronósticos. Las alternativas encontradas en la bibliografía para salvar este inconveniente, hacen referencia a la utilización de datos de mayor frecuencia de recolección que la diaria utilizada en este trabajo. Con los datos recopilados de esta manera, la bibliografía plantea hacer un análisis de volatilidad intradiaria, lo cual daría luces sobre el verdadero comportamiento de la volatilidad. Se sugieren investigaciones sobre esta línea en la Universidad.

De igual manera los análisis de regresión efectuados para validar los pronósticos, mostraron que los modelos encontrados tienen capacidad de pronóstico un día adelante (pronóstico estático), dado que si se extiende a múltiples días (pronóstico dinámico), las pruebas estadísticas que indican la relevancia del modelo (prueba F) y la significancia estadística de los coeficientes (prueba t) resultaron no significativas (valores de probabilidad superiores al nivel de significancia establecido $\alpha=0.05$).

También se definió como fecha de pronóstico para evaluación de los modelos y para la construcción del portafolio: marzo 17 de 2006, considerando que las series presentan alta volatilidad en marzo de 2006.

Con los antecedentes descritos arriba se encontraron modelos GARCH (1,1) para las series de rendimientos IGBC, TRM e ITES.

Para la construcción del portafolio basado en valores primarios, se tomó el modelo Mean Variance, lo que define el riesgo en términos de la volatilidad de los datos (varianza o desviación estándar). Queda abierta la posibilidad para que se explore

el análisis del riesgo en términos del VaR o incluso la optimización del portafolio en función de otros modelos diferentes al de Mean Variance.

El modelo Mean Variance permite definir dos funciones objetivo: Maximizar rentabilidad y Minimizar el Riesgo (varianza – desviación estándar), lo que le da el carácter multiobjetivo al problema por estar en oposición las dos funciones, dado que si se quiere aumentar la rentabilidad se debe estar dispuesto a asumir mayor riesgo. Se consideraron como restricciones el no permitir ventas en corto (valores de las proporciones de inversión en IGBC, TRM e ITES positivos) y un presupuesto limitado (sumatoria de las proporciones de inversión igual a uno). No se consideraron otras restricciones como inversión en títulos de alta liquidez o la asunción de riesgos sectoriales, o la consideración de los costos de transacción en bolsa, o los impuestos generados por las operaciones o cualquier otra restricción presentada por la participación del inversionista en bolsa. Todas estas restricciones pueden atenderse en futuros trabajos sobre esta línea, por lo que el campo de investigación sigue siendo extenso.

La solución del modelo de optimización planteado se obtuvo de varias maneras:

- Optimización monoobjetivo: se consideró la minimización de la varianza como función objetivo para un nivel dado de rentabilidad del portafolio (implicó considerar la función de rentabilidad del portafolio como una restricción) y el modelo se resolvió para diferentes valores de la rentabilidad del portafolio. El planteamiento del modelo de esta forma implicó utilizar medias muestrales de los rendimientos de IGBC, TRM e ITES y sus varianzas muestrales, con lo que se obtuvieron las proporciones de inversión en cada uno de los activos señalados. Esta solución se obtuvo con MATLAB.
- Siguiendo con la optimización monoobjetivo, se utilizó en lugar de las medias muestrales, los rendimientos reales de tales activos en marzo 17 de 2006 (fecha de referencia para evaluación de pronósticos) para encontrar cuales debieron ser las proporciones de inversión ideales como referencia y los

resultados indican que el método de las medias muestrales se acerca bastante a lo que debió ser el portafolio bajo los propósitos buscados: minimización del riesgo para un determinado valor de rentabilidad del portafolio. Para esta solución se empleó GAMS. Se deja abierta la posibilidad de realizar una optimización estocástica bietapa, en los anexos del trabajo se deja una semilla la cual debe ser mejorada.

- Otra solución trabajada fue considerar una optimización multiobjetivo con las dos funciones objetivo: minimizar riesgo y maximizar rentabilidad. Las restricciones fueron valores positivos para las proporciones de inversión (ventas en corto no permitidas) y sumatoria de proporciones de inversión igual a uno (presupuesto limitado). Para efectos de verificar si la optimización multiobjetivo aporta algo diferente a la optimización monoobjetivo se tomaron las rentabilidades de los activos a incluir en el portafolio y sus varianzas y covarianzas constantes (valores muestrales). Esta solución se obtuvo con MATLAB empleando el algoritmo evolutivo SPEA.
- También se obtuvo la solución de la optimización multiobjetivo considerando los modelos estocásticos de volatilidad condicional autorregresiva (modelos GARCH) en lugar de los rendimientos y varianzas constantes. El software empleado nuevamente fue MATLAB y el algoritmo fue una adaptación del SPEA al caso analizado.

Los resultados obtenidos de la optimización permiten concluir lo siguiente:

La evaluación de las siguientes alternativas:

1. Optimización monoobjetivo: minimizando varianza, empleando medias muestrales para el rendimiento de activos y homocedasticidad en las series de tiempo para la construcción del modelo de optimización, teniendo como restricción la rentabilidad del portafolio.

2. Optimización multiobjetivo (dos funciones objetivo, minimizar varianza y maximizar rentabilidad), con medias muestrales y homocedasticidad
3. Optimización multiobjetivo empleando modelos GARCH (pronóstico 1 día).

para constituir portafolios, bajo el modelo Mean Variance, con restricción común de no permitirse venta en corto (las proporciones de inversión en los activos constituyentes del portafolio son mayores o iguales a cero), no arrojó diferencia alguna entre éstas. Por lo que para el caso de toma de decisiones del corto plazo, es válido usar la simplificación de la alternativa uno.

Debe tenerse en cuenta que estos resultados se limitan exclusivamente al campo analizado bajo las restricciones consideradas. Vale la pena explorar el aporte realizado por la optimización multiobjetivo si se consideran otras restricciones que hagan más complejo el problema de optimización planteado y considerar modelos alternativos a los modelos GARCH (1,1) que permitan extender el horizonte de pronóstico a periodos superiores a un día.

A lo largo de estas conclusiones se han presentado las líneas de investigación de se sugieren para futuros trabajos sobre este campo, sin embargo se destacan las siguientes:

- Verificar si la ampliación del horizonte de pronóstico produce diferencias, ello implicaría explorar la utilización de otros modelos de heterocedasticidad condicional y la utilización de datos de menor frecuencia de recolección, menores de un día, atendiendo los hallazgos de investigadores como [Bollerslev].
- Explorar si el empleo de modelos estocásticos bietapa que consideran la ocurrencia de diversos escenarios futuros con una probabilidad asociada, produce resultados diferentes a los entregados en este trabajo de investigación.

- Empleo de restricciones que consideren otros riesgos (liquidez, sector, etc)
- Empleo de modelos diferentes al Mean Variance.
- Extensión de la investigación a instrumentos derivados.
- Utilización de una fecha de pronóstico posterior a una etapa de alta volatilidad para verificar si los efectos GARCH ejercen influencia.

BIBLIOGRAFIA

1. ARDILA, CARLOS. Diseño Y Análisis Comparativo Del Algoritmo Híbrido Ant Colony- Evolutivo Con Respecto Al Algoritmo Ant Colony En La Solución De Un Problema De Optimización Multiobjetivo En Redes Ópticas. Monografía de grado. Barranquilla. Universidad del Norte. 2006.
2. BANCOLOMBIA, GRUPO. Investigaciones económicas. [base de datos en línea:
<http://investigaciones.bancolombia.com/invEconomicas/home/home.aspx?C=B>]. [Citado en mayo 18 de 2007].
3. BANCO DE LA REPUBLICA. Informes económicos. [Disponible en línea: http://www.banrep.gov.co/informes-economicos/ine_pre_frec3.htm#10.]
4. BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA. [Disponible en línea: <http://www.bvc.com.co/bvcweb/mostrarpagina.jsp?codpage=9>] [Citado en marzo 22 de 2007]
5. BOLLERSLEV, TIM. TORBEN ANDERSEN. Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts. International Economic Review, Nov98, Vol. 39 Issue 4, p885-905, 21p. [Base de datos disponible en línea: EBSCO] [Disponible en: Base de datos: <http://web.ebscohost.com/ehost/results?vid=3&hid=9&sid=92556fe3-107d-4f03-b617-5cbd9992d999%40sessionmgr106>]
6. BRANDIMARTE, PAOLO. Numerical Methods in Finance: A matlab Based Introduction. New York. John Wiley & Sons, Inc. 2002. Wiley Series in Probability and Statistics.
7. BROCKWELL, PETER. RICHARD A. DAVIS. Introduction to Time Series And Forecasting. Second Edition. New Jersey. Springer. 2002. Springer Text in Statistics.

8. CORREDORES ASOCIADOS. Manual Para El Calculo De Rentabilidades. 9na Edición. Bogotá. 2005.
9. DUARTE SUSANA, BENJAMIN BARAN. Multiobjective Network Design Optimisation using Parallel Evolutionary Algorithm. Universidad de la Asunción. 2004.
10. EBENS, HEIKO. On Modeling and Forecasting Stock Volatility. The Johns Hopkins University, 2001, 96 pages. [Base de datos en línea: Proquest]
11. ENDERS WALTER. Applied Econometric Time Series. Second Edition. 2003. Wiley Interscience. A John Wiley & Sons, Inc Publication.
12. GRUPO DE INVESTIGACIONES ECONOMICAS DE CORFINSURA. Como se calcula la TRM. 2003. [Disponible en línea: http://www.usergioarboleda.edu.co/postgrados/material_derecho_comfinan/MateriaMatematicasfinancieras/TRM.PDF.] [Citado en marzo 22 de 2007.
13. HERNÁNDEZ SAMPIERI, ROBERTO Y OTROS. Metodología De La Investigacion. Segunda Edición. Mc Graw Hill. 1999.
14. MORA HECTOR. Optimización no lineal y dinámica. Segunda Edición. Bogotá. Editorial Unibiblos. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. 2001
15. PINDYCK, ROBERT. DANIEL L. RUBINFELD. Econometria: Modelos Y Pronósticos. Cuarta edición. México. Ed. Mc Graw Hill. 2001.
16. PINILLA, ROBERTO. LUÍS VALERO, ALEXANDER GUZMÁN. Operaciones Financieras En El Mercado Bursatil. 2da Edición. Universidad Externado de Colombia. 2003.
17. POON, SER-HUANG POON, CLIVER GRANGER. Practical Issues in Forecasting Volatility. [Base de datos en línea: proquest]. Título de la publicación: Financial Analyst Journal. Charlottesville: Jan/feb 2005. Vol 61, Iss. 1; pg 45, 12 pgs. Disponible en :<http://proquest.umi.com/pqdweb?did=788955631&sid=4&Fmt=2&clientId=28054&RQT=309&VName=PQD>].
18. PREMARATNE, HETTI ARACHCHIGE. Time series models for analyzing

financial data. University of Illinois at Urbana-Champaign. 2001 [Base de datos en línea: Proquest <http://proquest.umi.com/>]

19. RAMOS, ANDRÉS Y OTROS. Optimizacion Estocastica. Universidad Pontificia ICAE ICADE COMILLAS, Escuela Superior de Ingeniería. Departamento de Organización Industrial. Madrid. 2005 [Disponible en www.doi.icaei.upcomillas.es/simio/apuntes/a_sp.pdf]. [Citado en octubre 19 de 2006]
20. RUPPERT, DAVID. Statistics and finance: an introduction. New York. Springer. 2004. Springer Text in Statistics.
21. SHIRYAEV, ALBERT. Essentials Of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory. Vol 3. Singapore. World Scientific. 2004. Advanced series on statistical science & applied probability World Scientific.
22. TSAY, RUEY. Analysis Of Financial Time Series. Second Edition. New Jersey. Wiley Interscience. 2005. A John Wiley & Sons, Inc Publication.
23. WILLIAMS, PAUL. Model Building In Mathematical Programming. Fourth edition. England. John Wiley & sons, ltd. 2005
24. ZENIOS, STAVROS A. Financial Optimization. New York. Cambridge University Press. 1999.

ANEXO A

DETERMINACIÓN DEL MODELO PARA LA SERIE DLNIGBC USANDO EIEWS

Una vez que la serie original transformada por logaritmos (comprendida entre enero 2 de 2002 a marzo 16 de 2007) ha sido diferenciada, entonces es posible iniciar el proceso de modelación. Para ello, se selecciona una submuestra y se realizan supuestos, los cuales deben ser validados, con respecto a: tipo de términos (AR, MA, ARCH, GARCH) que componen el modelo y distribución de probabilidad de los residuales.

Validados estos supuestos, a través de la realización pruebas con ayuda de Eviews las cuales se explicarán oportunamente, se procede a realizar el pronóstico de la volatilidad con el resto de los valores de la serie que no fueron incluidos en la modelación y que se denominarán valores fuera de muestra o valores para pronóstico expost.

Dado que la volatilidad es una variable inobservable, para la validación del pronóstico de la volatilidad debe usarse algún mecanismo que permita apreciar su comportamiento de manera indirecta. Para ello, se usará la serie de rendimientos al cuadrado como una aproximación de la volatilidad realizada, esto es válido cuando la media es cero. Cuando la media no es cero como en este caso, entonces, en lugar de emplear los rendimientos al cuadrado se emplean los residuales al cuadrado.

El procedimiento anterior pretende analizar la habilidad del modelo de rastrear las variaciones en la volatilidad del mercado, a través de un análisis de regresión. El coeficiente de determinación permitirá estimar la bondad del ajuste.

Muestra a analizar: Enero 2 de 2002 – Marzo 16 de 2006

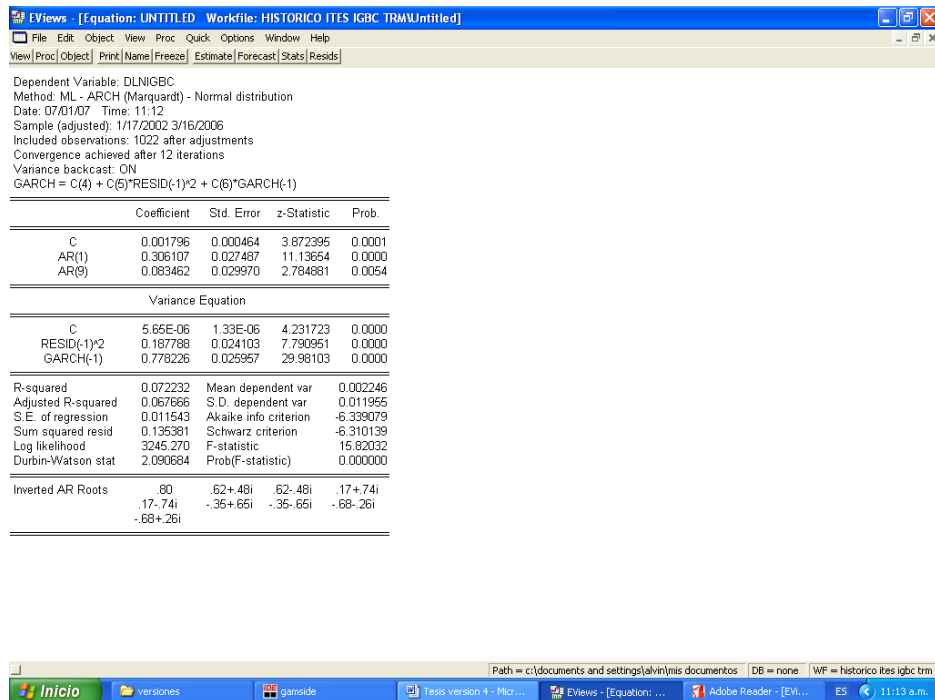
Se probaron diversos modelos, encontrándose el siguiente bajo los siguientes supuestos:

Modelo GARCH (1,1):

Errores con distribución normal

Resultados:

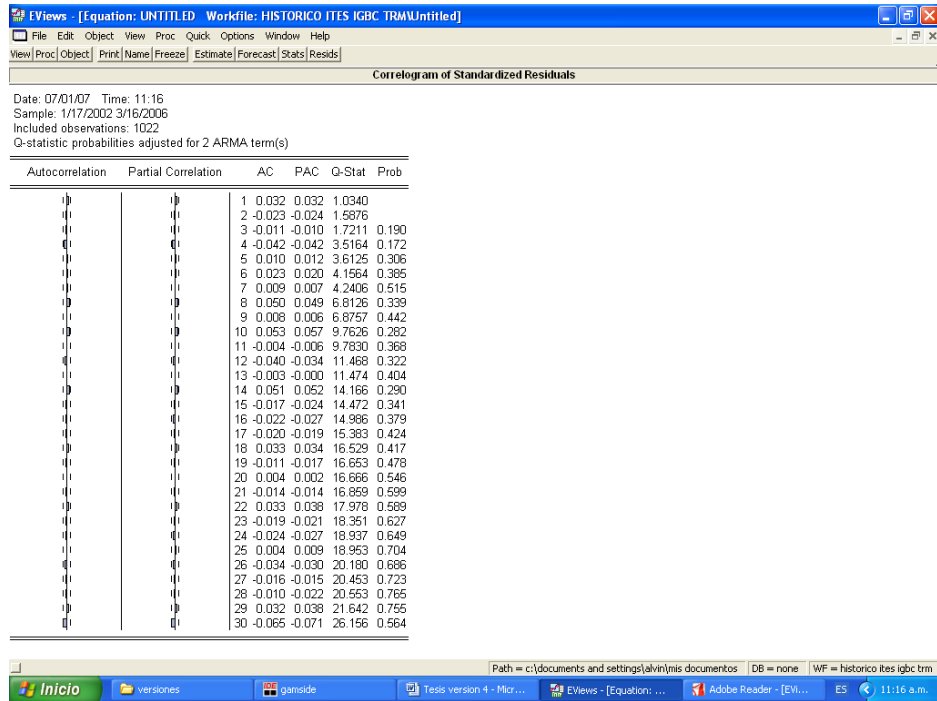
Figura 40. Resultados del modelo dlnigbc para el periodo 01/02/2002 – 03/16/2006



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

Para verificar si el modelo es adecuado se procede al análisis de residuales para la media:

Figura 41. Correlograma de los residuales de la media de Lnlgbc. Periodo 01/02/2002 – 03/16/2006.

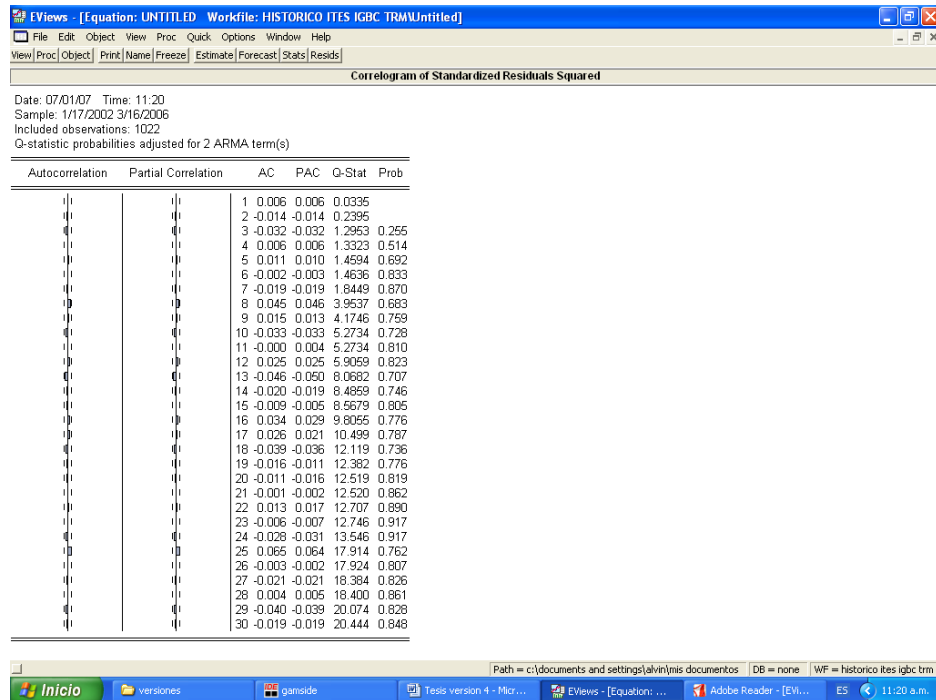


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

Donde se observa que se comportan como ruido blanco.

Verificación de residuales cuadrados (para comprobar si hacen falta términos ARCH)

Figura 42. Correlograma de los residuales cuadrados de Lnlgbc. Periodo 01/02/2002 – 03/16/2006.



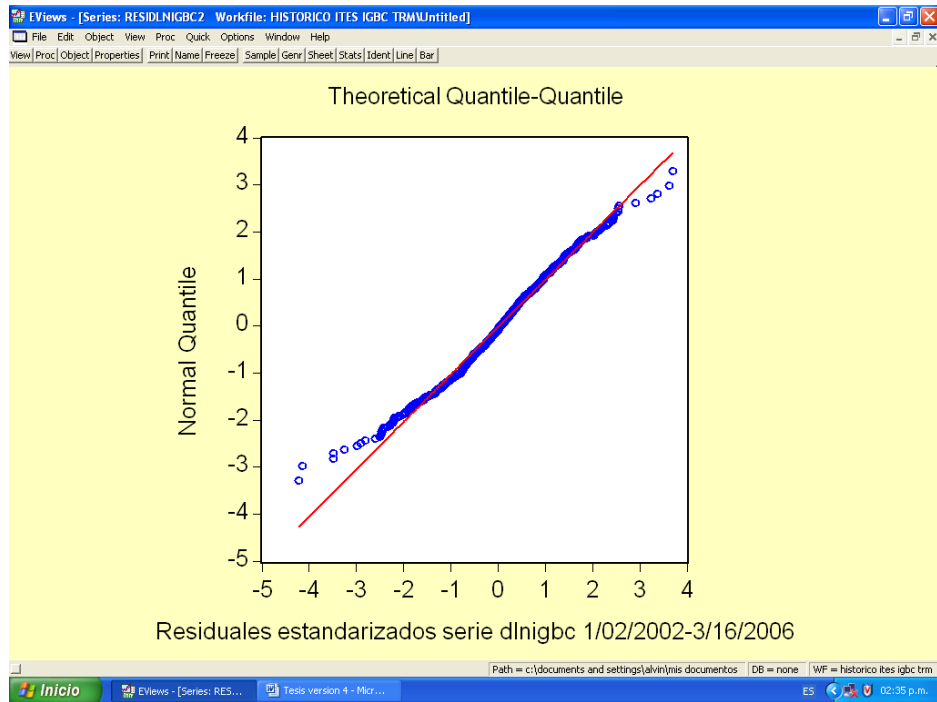
Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

La cual muestra que el modelo está bien especificado en cuanto a la cantidad de términos ARCH, dado que el valor P de la estadística Q muestra que no hay valores significativos.

Para comprobar si los residuales siguen una distribución normal, se procede a obtener una gráfica de probabilidad normal (figura 43) en ella se aprecia que estos no se desvían mucho de la normalidad.

Comprobada la validez del modelo se procede a evaluar su capacidad de pronóstico. Para ello se considerará el periodo fuera de muestra marzo 17 de 2006 – marzo 16 de 2007. Se ensayarán dos tipos de pronóstico: estático (un periodo adelante, basándose en el dato observado en el tiempo t-1) y dinámico (múltiples periodos adelante y en la que el pronóstico en un tiempo t se basa en el pronóstico del tiempo t-1).

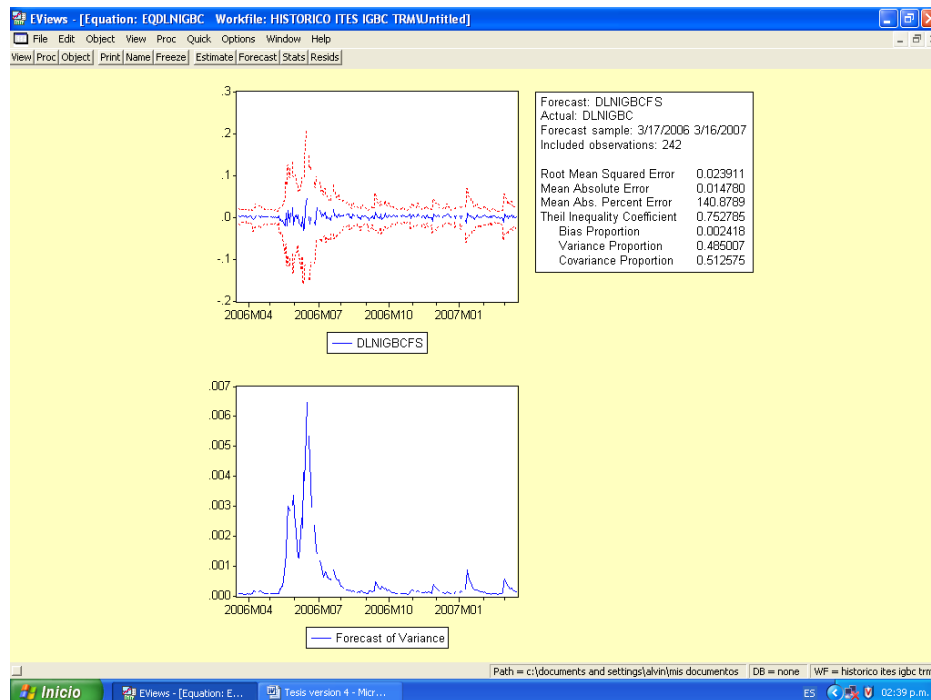
Figura 43. Gráfica de Probabilidad Normal para residuales estandarizados de la serie dlnlgbc.



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

Pronóstico estático:

Figura 44. Pronóstico estático dlningbc del periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007

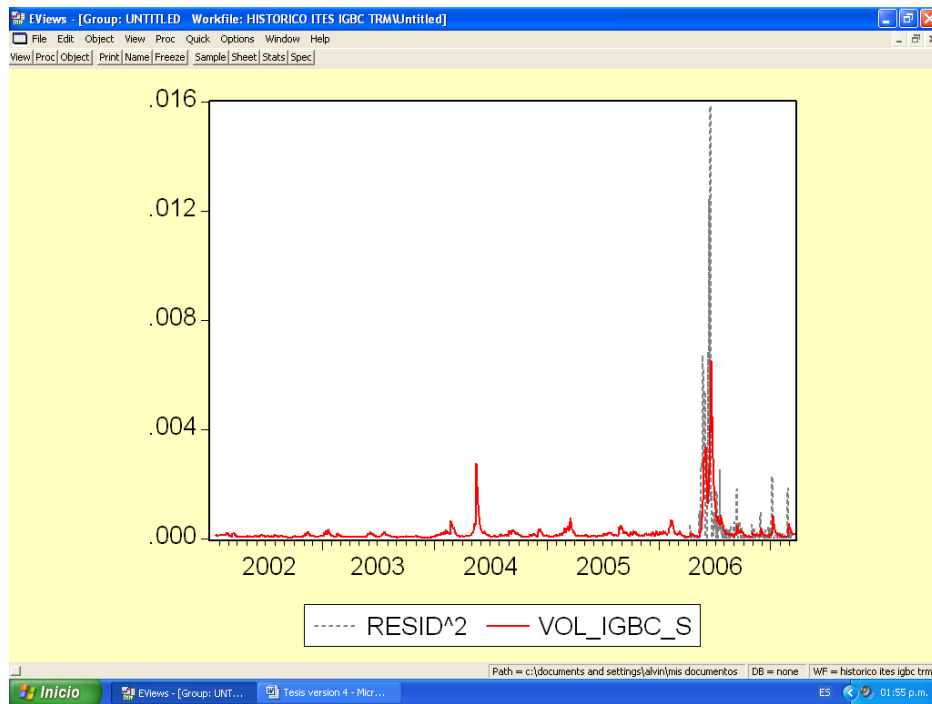


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

La figura anterior contiene dos gráficas, la que está ubicada en la parte superior, muestra el comportamiento de la media y las bandas de confianza alrededor de ella, obtenidas a partir de la varianza pronosticada. De igual manera se aprecia la evaluación del pronóstico de la media, a través del criterio de desigualdad de Theil, cuyo coeficiente está cercano a uno, lo que permite establecer que el modelo no pronostica muy bien, aun cuando explica el comportamiento de la serie.

La gráfica correspondiente al pronóstico de volatilidad se aprecia en la parte inferior de la figura anterior, sin embargo, esta es una variable inobservable, por lo que se usa la serie de rendimientos al cuadrado como una aproximación de la volatilidad realizada, esto es válido cuando la media es cero pero este no es el caso. Para este caso se emplearán los residuales al cuadrado. Esta variable es la que se comparará contra la volatilidad.

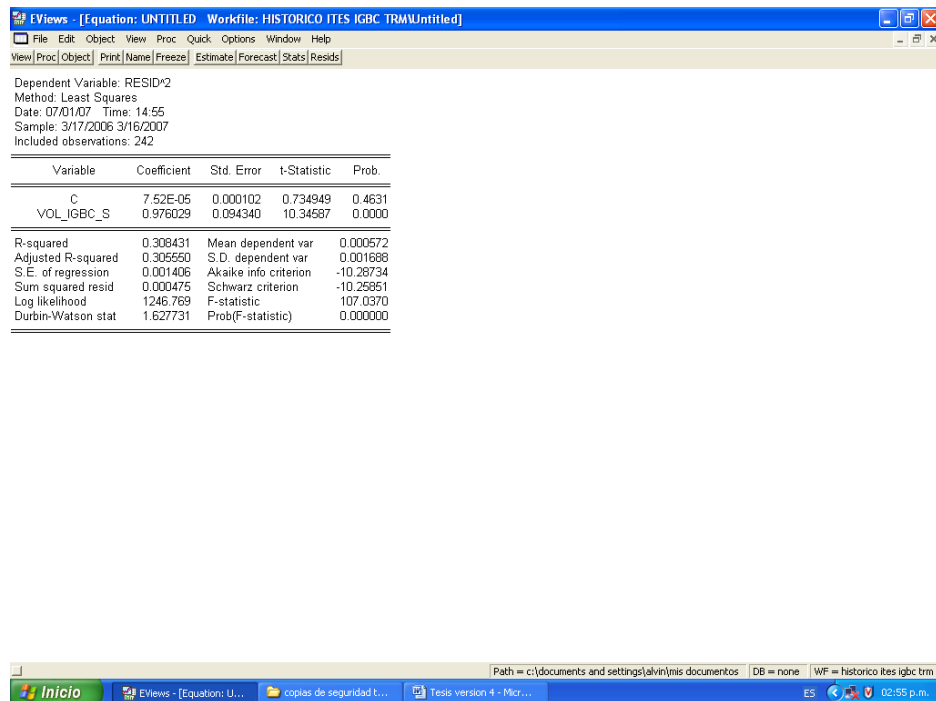
Figura 45. Residuales cuadrados vs pronóstico de volatilidad $\ln IGBC$ en el periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

Obsérvese la habilidad del pronóstico de volatilidad de seguirle la pista al comportamiento de los residuales al cuadrado. De manera analítica se aprecia mediante un análisis de regresión. Este resultado aparece en la figura a continuación:

Figura 46. Análisis de regresión de residuales cuadrados $\ln I_{gbc}$ vs pronóstico estático de volatilidad.



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

Tal como se aprecia, la variable volatilidad pronosticada es significativa (valor de probabilidad de la prueba t aplicada sobre los coeficientes), el modelo planteado contribuye a la explicación del comportamiento de la variable dependiente (valor de probabilidad de la prueba F) y el coeficiente de determinación es muy bajo pero consistente con las investigaciones realizadas.

El modelo tiene por ecuación:

$$(1-0.306107B-0.083462B^9) \ln I_{gbc}_t = 0.001796 + a_t$$

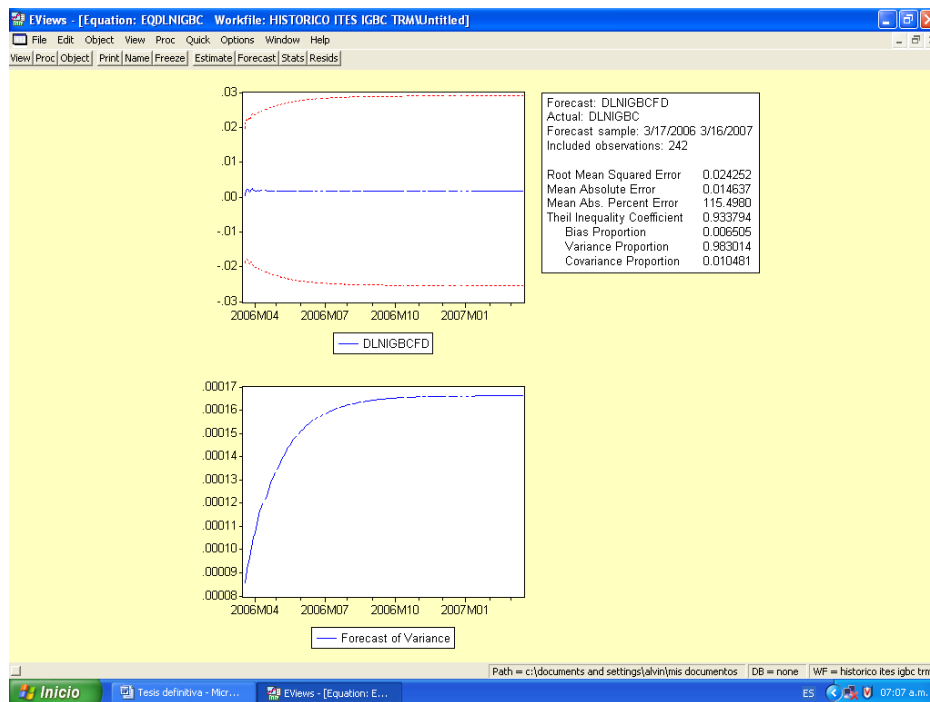
Donde B representa el operador de rezago, que al ser aplicado sobre la variable la rezagará hasta el valor dado por el exponente de B.

El término del error (a_t) es igual a:

$$a_t = \sigma_t e_t, \text{ además } \sigma_t^2 = 5.65 \cdot 10^{-6} + 0.187788 \cdot a_{t-1}^2 + 0.778226 \cdot \sigma_{t-1}^2$$

A continuación se presenta el pronóstico dinámico, basado en las muestras previamente analizadas

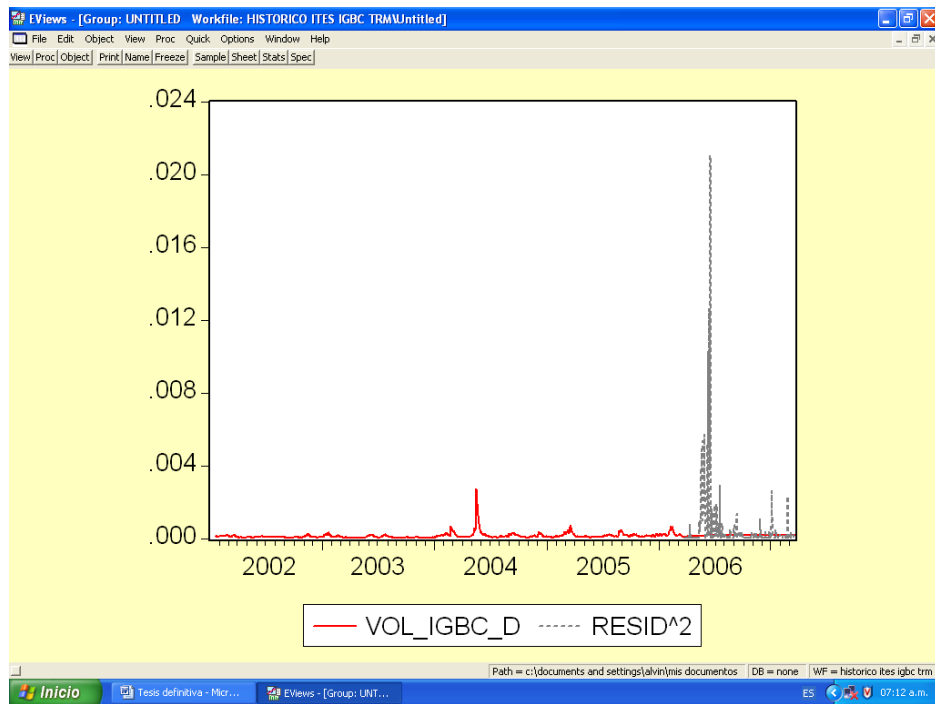
Figura 47. Pronóstico dinámico de la volatilidad igbc, periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

Este pronóstico se evaluará empleando los residuales cuadrados, lo que se aprecia en la figura siguiente:

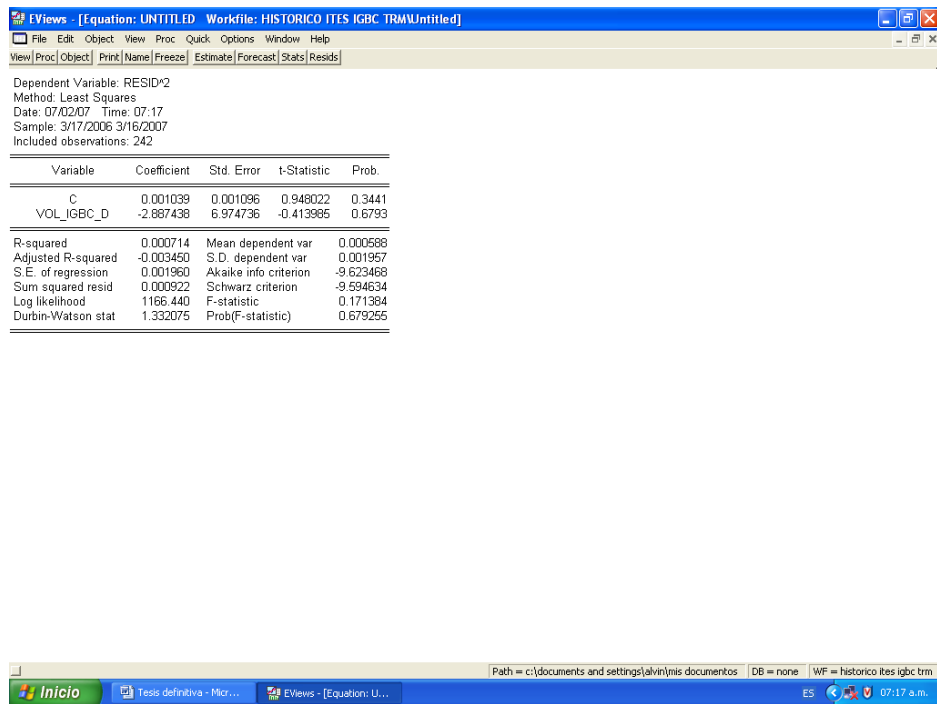
Figura 48. Comparación gráfica del comportamiento de los residuales cuadrados vs pronóstico dinámico de la volatilidad, periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

Como se observa el pronóstico dinámico de volatilidad no es capaz de rastrear el comportamiento de los residuales al cuadrado. Esto se comprueba con los resultados del análisis de regresión, observados en la figura 49. de ella se concluye que la variable de volatilidad no es significativa y el R^2 es nulo, de igual manera la estadística F muestra que el modelo no explica la variable dependiente. Esto sustenta el porque se emplea el pronóstico estático o de un solo paso adelante para la evaluación de pronósticos.

Figura 49. Análisis de regresión de residuales cuadrados vs pronóstico dinámico de volatilidad dlnigbc.



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

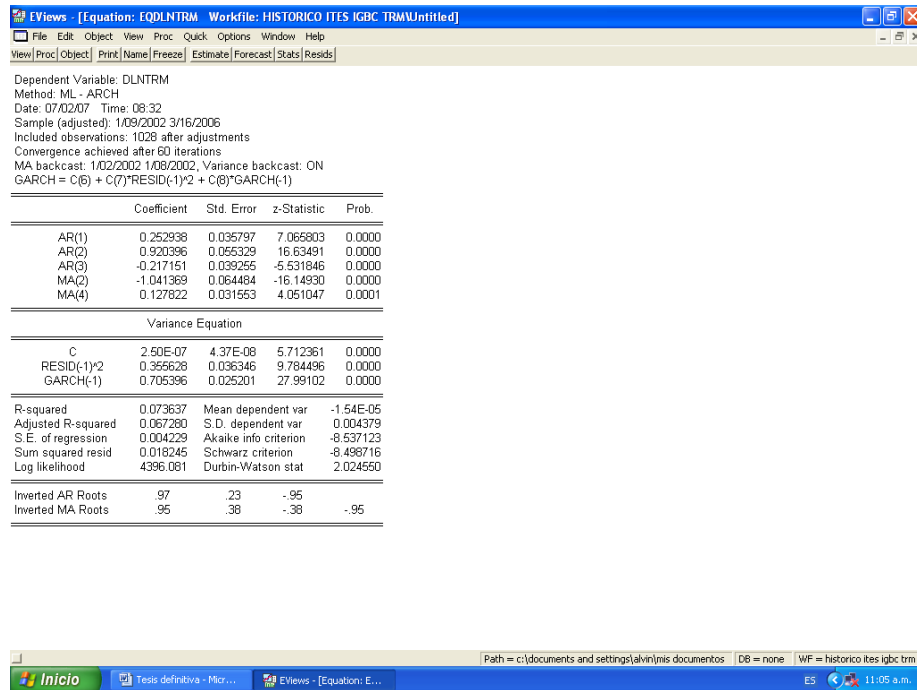
ANEXO B

DETERMINACIÓN DEL MODELO PARA LA SERIE DLNTRM

Una vez que se ha verificado la estacionariedad de la serie, entonces puede iniciarse el proceso de modelado, para ello se tomará la submuestra 1/2/2002 – 3/16/2006 contenida en la muestra de partida y con ella se procederá a la obtención de modelos para la media y para la varianza condicional, siguiendo la estructura de los modelos GARCH.

Después de diversas pruebas con respecto a los modelos apropiados para la media, se encuentra la siguiente estructura que tiene el comportamiento deseado:

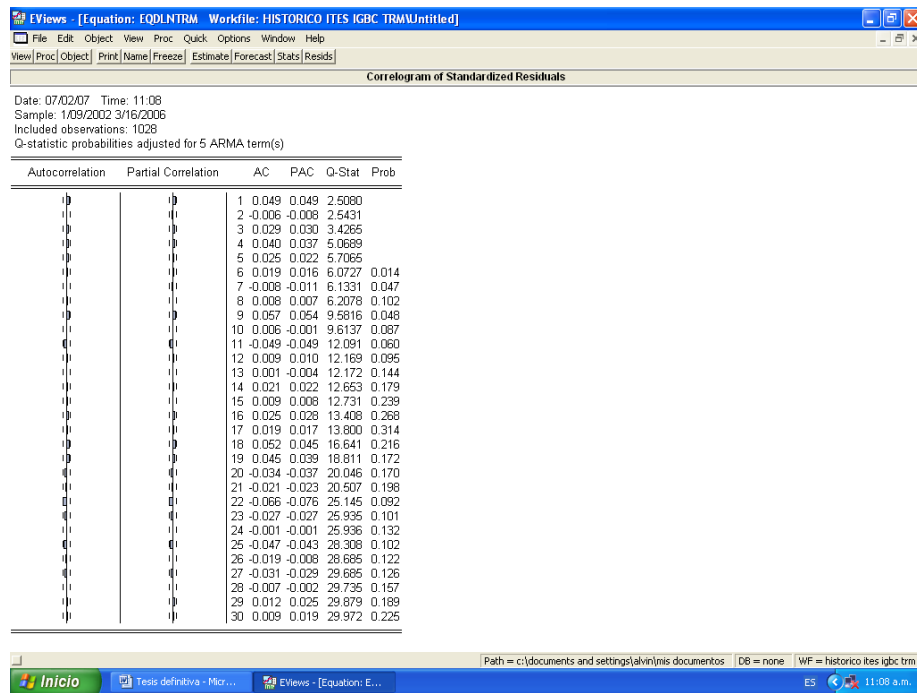
Figura 50. Resultados del modelo dlntm para el periodo 01/02/2002 – 03/16/2006



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

La evaluación de los residuales del modelo anterior, indica que el modelo para la media es apropiado:

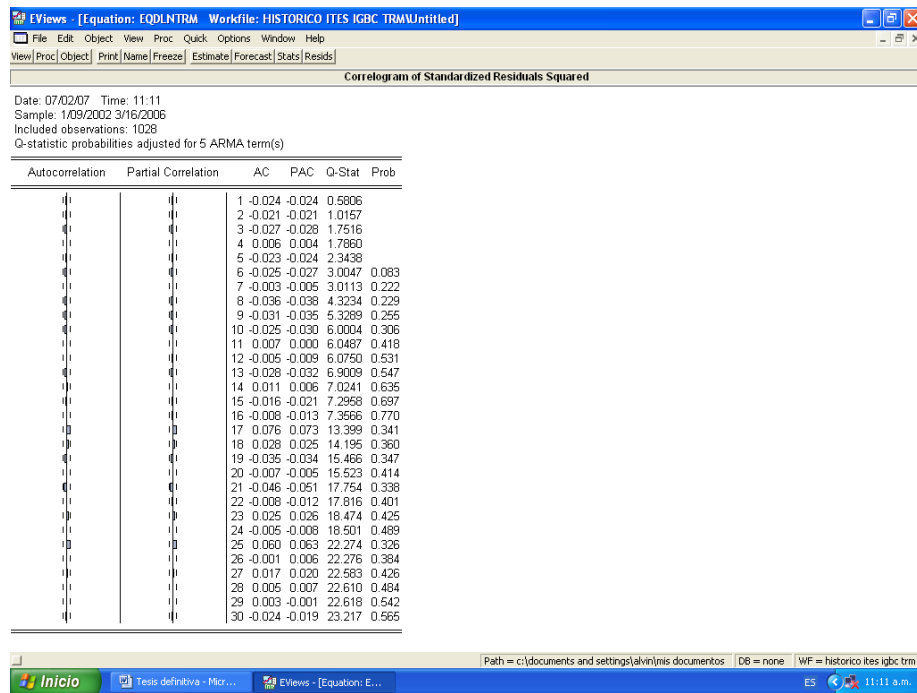
Figura 51. Correlograma de los residuales de la media de LnTRM. Periodo 01/02/2002 – 03/16/2006.



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Sobre el mismo modelo anterior, pero esta vez analizando los términos ARCH y GARCH en la volatilidad, se observa el correlograma de los residuales cuadrados.

Figura 52. Correlograma de los residuales cuadrados de LnTRM. Periodo 01/02/2002 – 03/16/2006.



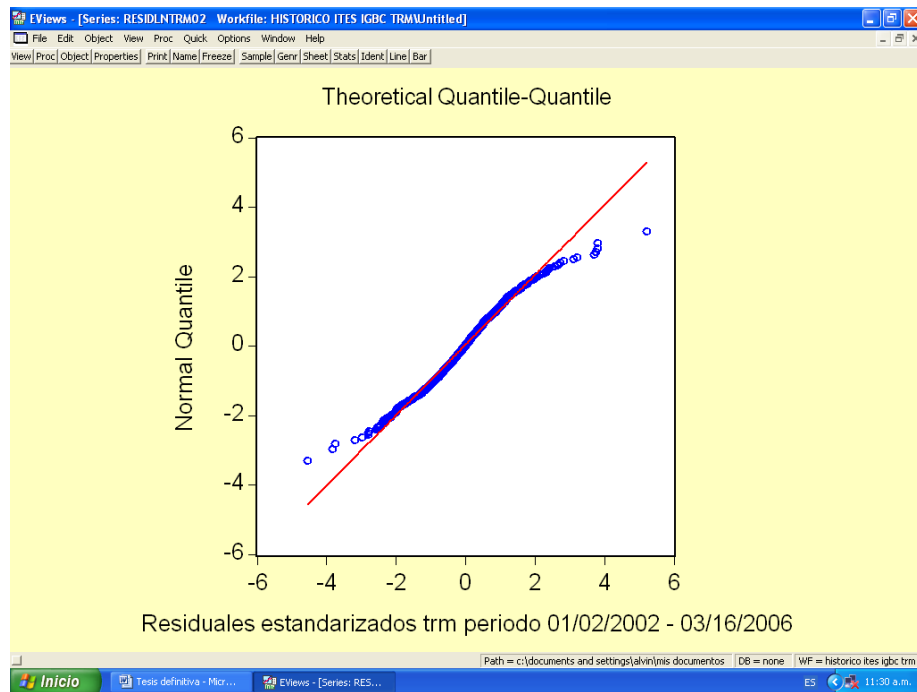
Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Los cuales no presentan correlación entre los residuales analizados, por lo que el modelo para la volatilidad es apropiado.

Se procede a validar el supuesto de normalidad en los residuales, para ello se utiliza la gráfica de probabilidad normal observada en la figura__.

Aun cuando los extremos muestran que las colas son más gruesas que las que presenta una distribución normal, de todas formas se mantendrá el supuesto, las consecuencias de esto se sentirán en una subestimación del riesgo de inversión en este título.

Figura 53. Gráfica de Probabilidad Normal para residuales estandarizados de la serie $\ln TRM$

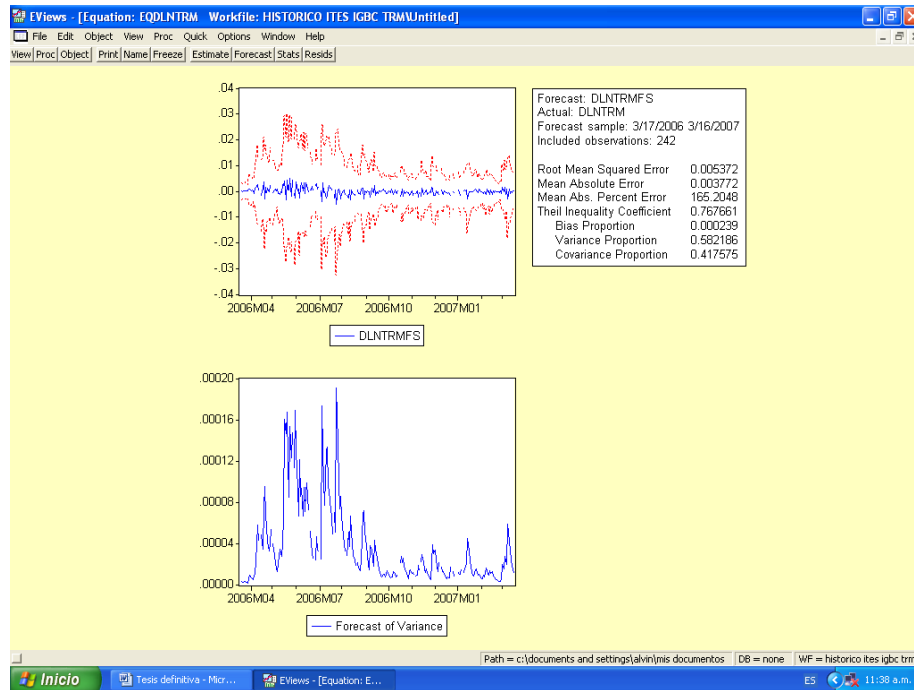


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

El modelo obtenido se emplea ahora para describir el comportamiento de los datos fuera de muestra y que servirán para validarlo. La muestra *expost* está comprendida entre marzo 17 de 2006 y marzo 20 de 2007. Tal como se hizo en el análisis de la serie $\ln IGBC$, se efectuará un pronóstico estático y un pronóstico dinámico para determinar el mejor.

A continuación se presenta el pronóstico estático:

Figura 54. Pronóstico estático $\ln TRM$ del periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007

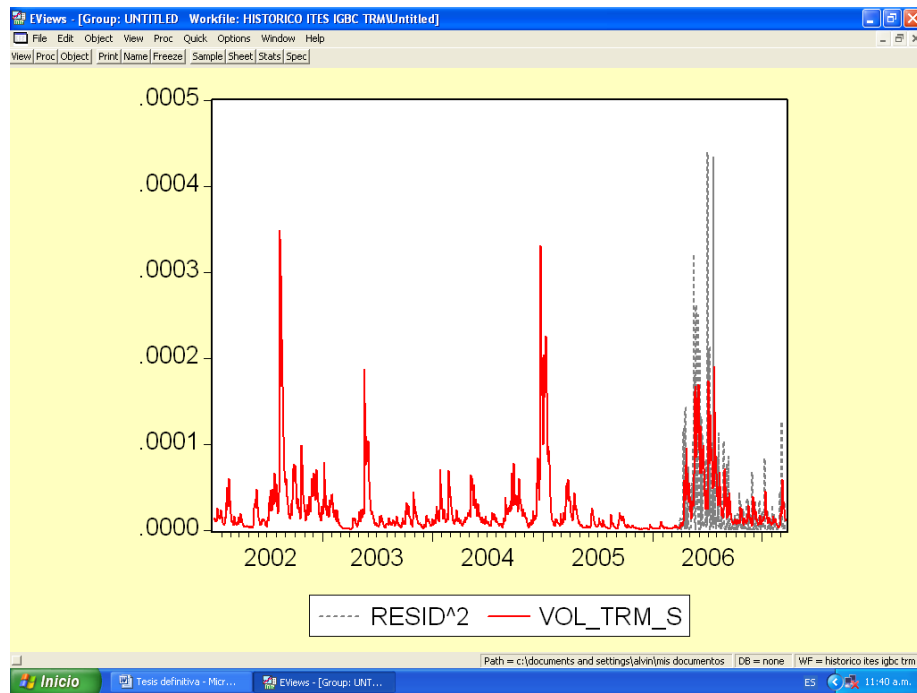


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

En la parte inferior de la figura 54, se observa el comportamiento de la volatilidad pronosticada. Ésta presenta clusters de volatilidades altas y bajas, además se espera que sea un reflejo de su comportamiento real. Como se ha anotado antes, la volatilidad no es una variable observable, por lo que para la evaluación del pronóstico se compara contra los residuales cuadrados.

La figura 55. muestra la comparación de la volatilidad pronosticada contra residuales cuadrados, en ella se aprecia que el modelo intenta replicar la variabilidad observada en los residuales cuadrados:

Figura 55. Residuales cuadrados vs pronóstico de volatilidad $\ln TRM$ en el periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Para efectos de concluir sobre la evaluación de este pronóstico, se realiza un análisis de regresión, tomando como variable dependiente los residuales cuadrados y como variable independiente la volatilidad pronosticada. Ver figura 56.

Figura 56. Análisis de regresión de residuales cuadrados $\ln TRM$ vs pronóstico estático de volatilidad.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.51E-05	5.09E-06	2.972746	0.0033
VOL_TRM_S	0.387440	0.097212	3.985524	0.0001

R-squared	0.062076	Mean dependent var	2.89E-05
Adjusted R-squared	0.058168	S.D. dependent var	6.00E-05
S.E. of regression	5.62E-05	Akaike info criterion	-16.65637
Sum squared resid	8.14E-07	Schwarz criterion	-16.62754
Log likelihood	2017.421	F-statistic	15.89440
Durbin-Watson stat	2.282190	Prob(F-statistic)	0.000089

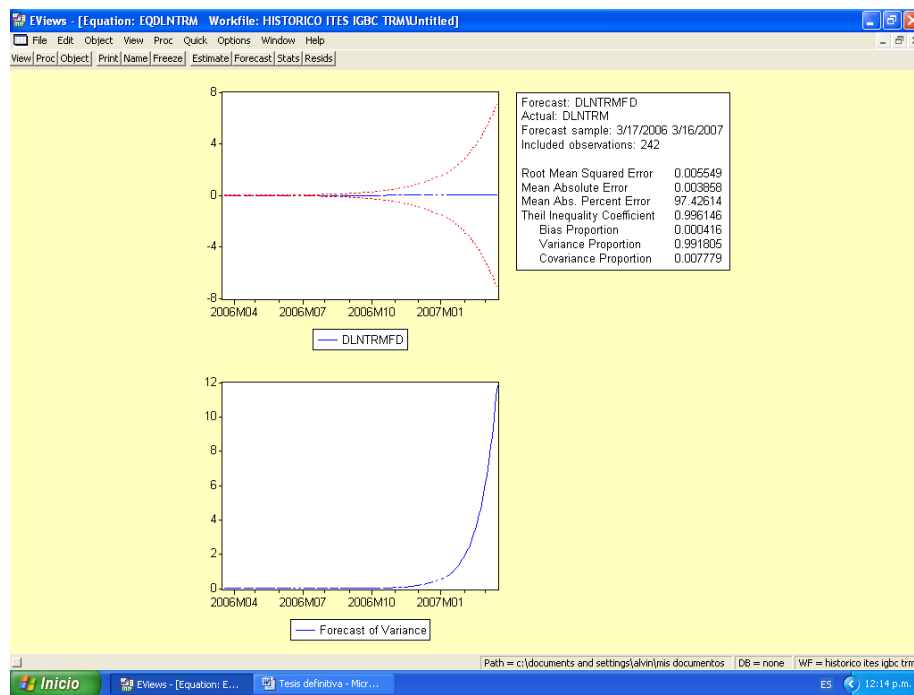


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Tal como se aprecia, la variable volatilidad pronosticada es significativa (valor de probabilidad de la prueba t aplicada sobre los coeficientes), el modelo planteado contribuye a la explicación del comportamiento de la variable dependiente (valor de probabilidad de la prueba F) y el coeficiente de determinación es muy bajo pero consistente con las investigaciones realizadas.

Se procede a realizar un pronóstico dinámico empleando los mismos datos fuera de muestra. Los resultados se aprecian en la figura siguiente:

Figura 57. Pronóstico dinámico de la volatilidad TRM, periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007

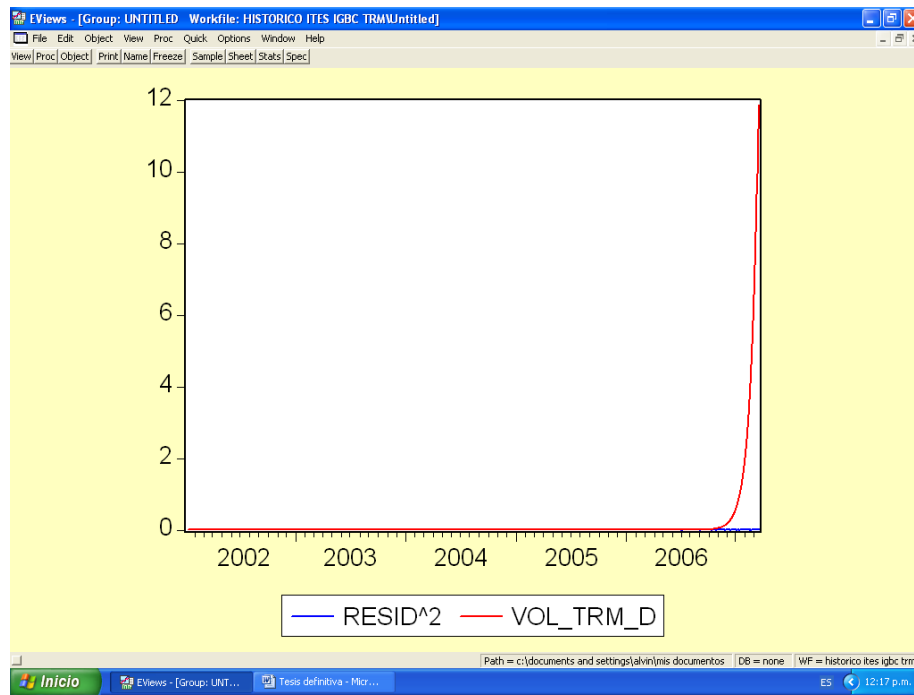


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

En la parte inferior de la figura anterior se observa el comportamiento del pronóstico dinámico de la volatilidad TRM.

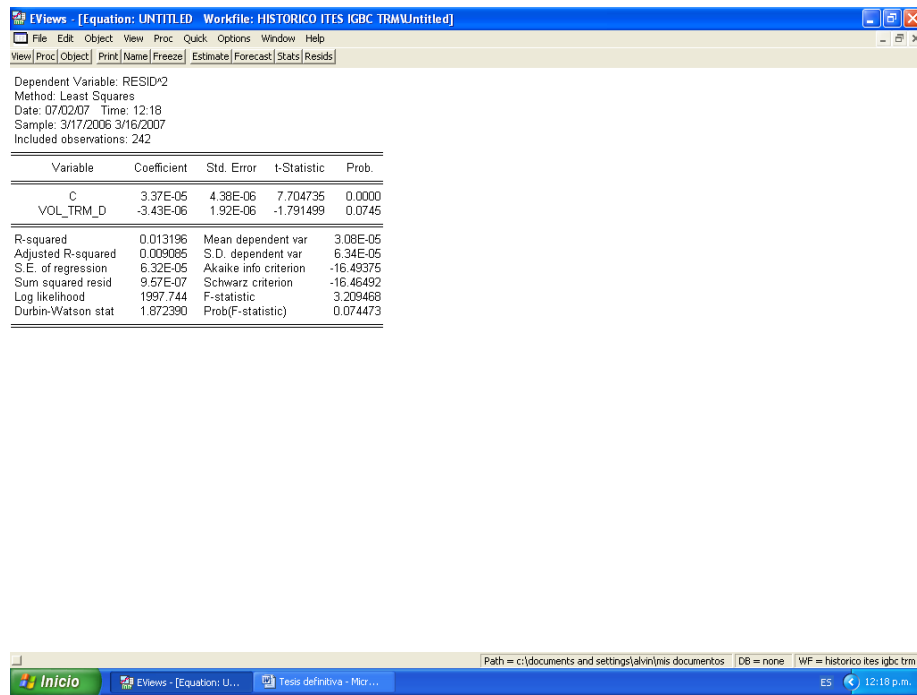
Se presenta un comparativo del comportamiento de los residuales cuadrados vs pronóstico de volatilidad dinámica de la TRM. Como se esperaba el modelo de regresión para pronóstico dinámico de volatilidad no resulta apropiado.

Figura 58. Comparación gráfica del comportamiento de los residuales cuadrados vs pronóstico dinámico de la volatilidad, periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

Figura 59. Análisis de regresión de residuales cuadrados vs pronóstico dinámico de volatilidad TRM.



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews

ANEXO C

DETERMINACIÓN DEL MODELO PARA LA SERIE DLNITES

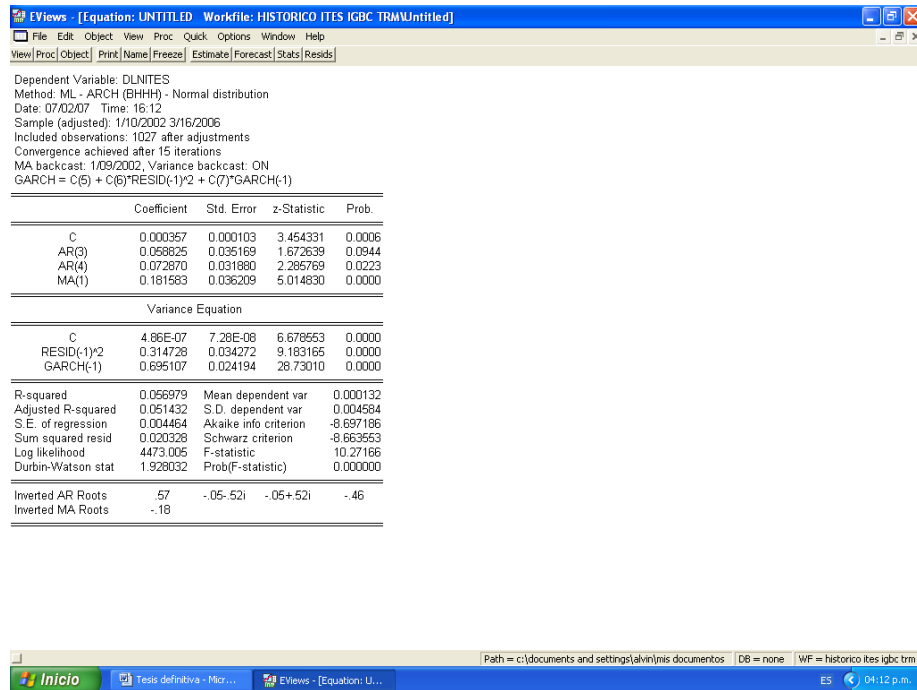
Sobre la serie transformada estacionaria se determinan los modelos apropiados, partiendo de submuestras contenidas en la muestra original:

Muestra a modelar: Enero 2 de 2002 – marzo 16 de 2006

Después de probar diversas estructuras, se registra la pertinente obtenida bajo los siguientes supuestos: la serie se comporta como un modelo GARCH (1,1) y los errores siguen una distribución normal. Ambos supuestos se validarán en este aparte.

Resultados:

Figura 60. Resultados del modelo dlnITES para el periodo 01/02/2002 – 03/16/2006

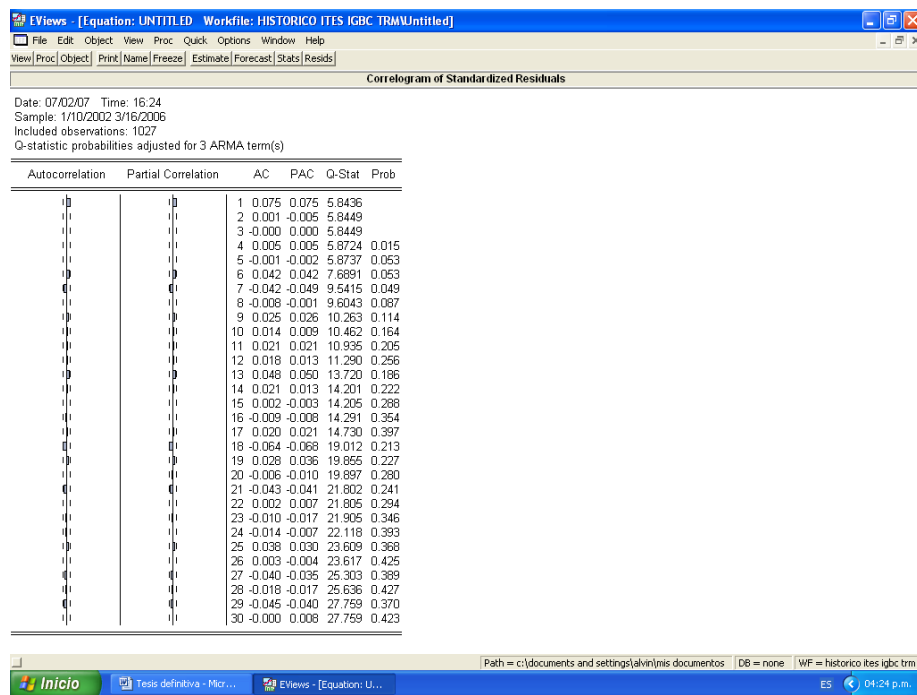


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

Los valores de probabilidad de las pruebas t aplicadas sobre los coeficientes obtenidos permiten rechazar la hipótesis nula de que son iguales a cero con una seguridad del 90% ($\alpha=0.1$)

En cuanto al análisis de residuales de este modelo se obtuvo el siguiente correlograma:

Figura 61. Correlograma de los residuales de la media de LnITES. Periodo 01/02/2002 – 03/16/2006.

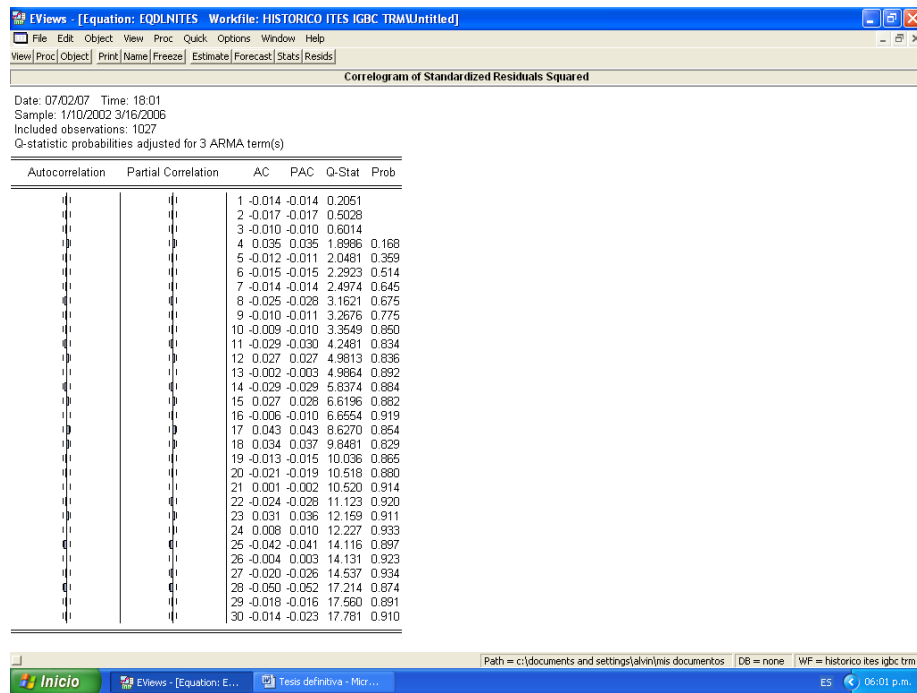


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

El valor de probabilidad obtenido para el coeficiente de correlación en el rezago 4, presenta una magnitud inferior al nivel de significancia habitual de 5%, ello implicaría rechazar la hipótesis nula ($\rho_l=0$, para $l < 4$), lo que en otras palabras llevaría a afirmar que existe autocorrelación en los rezagos previos al rezago 4 con una probabilidad de equivocarse de 1.5%. Pese a este resultado adverso, el modelo registrado fue el que mejor comportamiento presentó de los múltiples que se exploraron. Otros modelos ensayados presentaron coeficientes para los términos ARMA no significativos, no convergencia, valores de probabilidad de cero para rezagos menores a 4, autocorrelación en rezagos superiores, etc.

Para comprobar si se requieren términos ARCH y GARCH adicionales, se observan los Residuales cuadrados (Figura 62). De acuerdo con este correlograma el modelo probado para la volatilidad es adecuado, no requiriéndose términos adicionales.

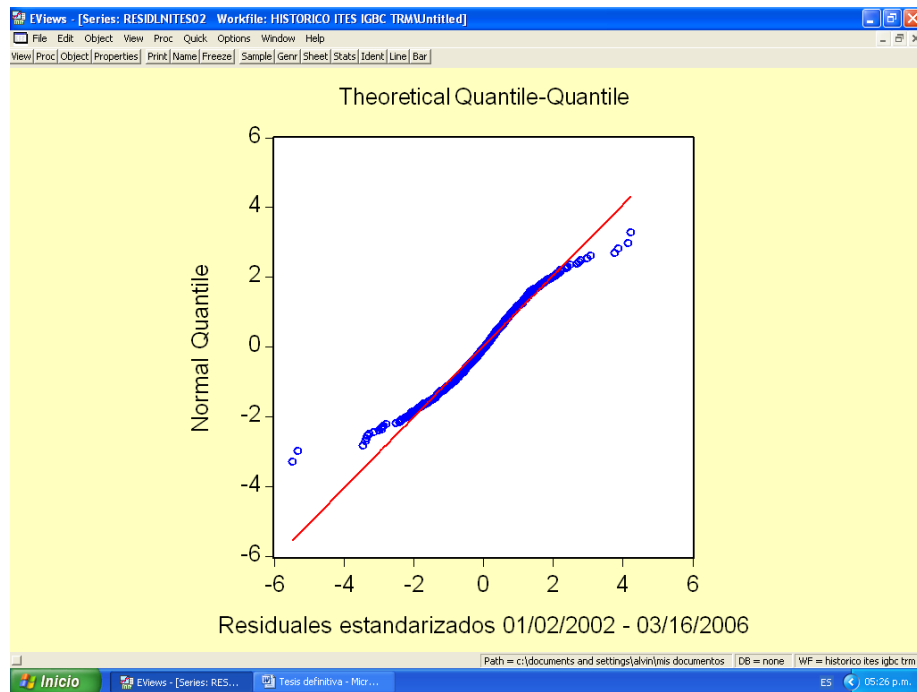
Figura 62. Correlograma de los residuales cuadrados de LnITES. Periodo 01/02/2002 – 03/16/2006



.Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

Se verifica ahora el supuesto de normalidad en los residuales:

Figura 63. Gráfica de Probabilidad Normal para residuales estandarizados de la serie dlnITES

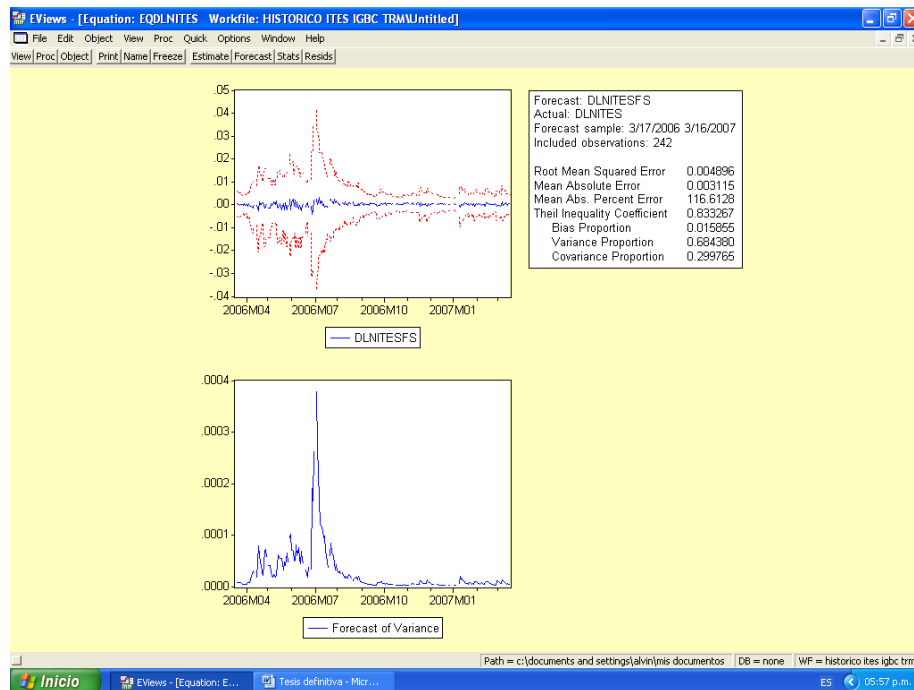


Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

En la figura anterior se aprecia, como en el caso de la serie dlnTRM, que las colas son más gruesas que la distribución Normal, sobre todo en la parte inferior de la gráfica. Mantener el supuesto de normalidad implicaría subestimar el riesgo que se presenta en este tipo de inversiones. Pese a esta observación el supuesto se mantiene sabiendo las consecuencias que de aquí se derivan.

La evaluación del pronóstico estático se realiza a continuación. El periodo fuera de muestra comprende 03/17/2006 – 03/16/2007. La figura 64 muestra el comportamiento del pronóstico estático de volatilidad para dlnites:

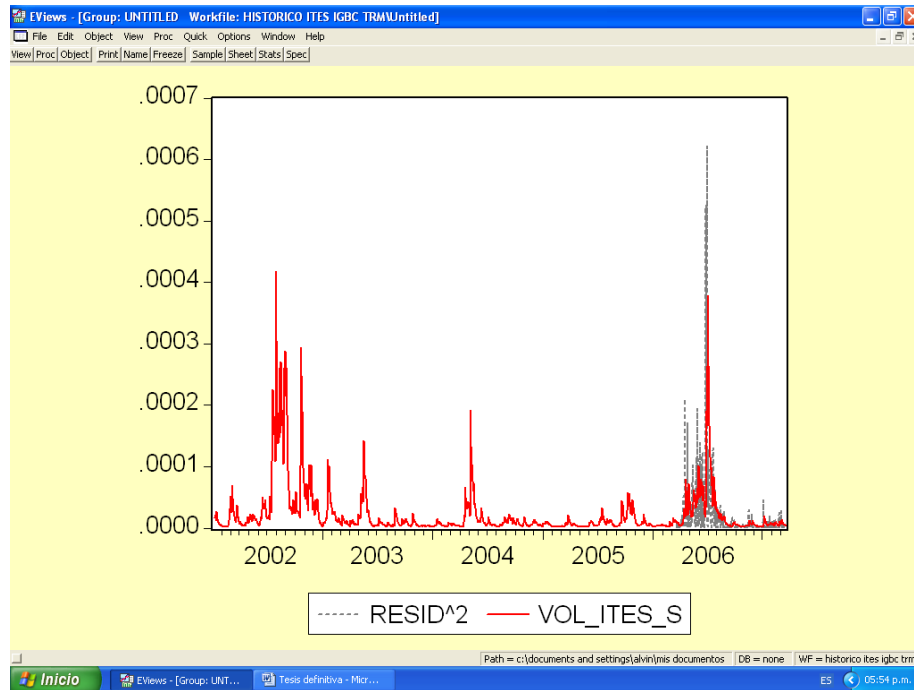
Figura 64. Pronóstico estático dlNITES del periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

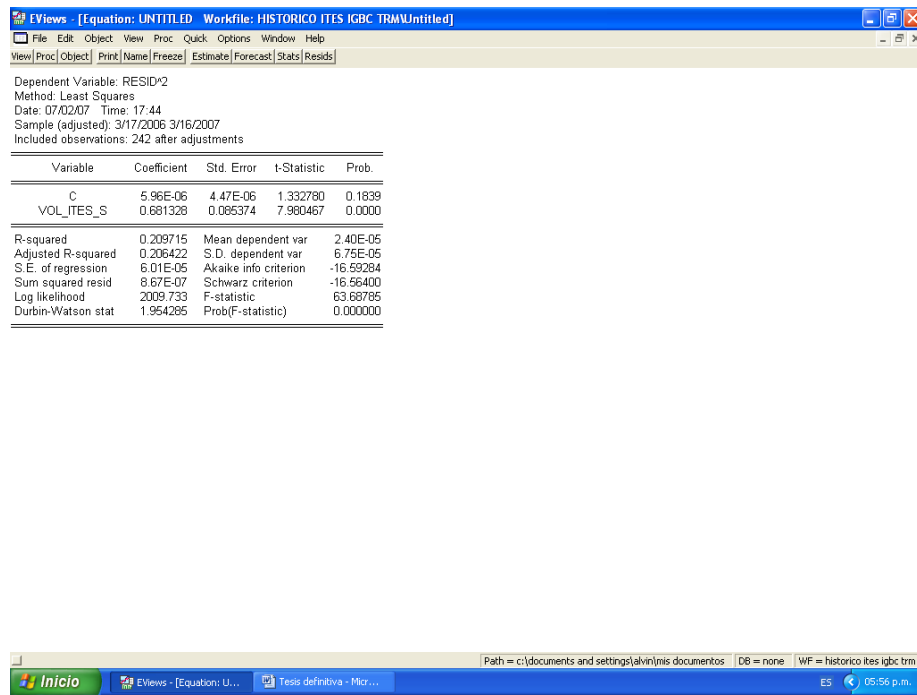
Con el objeto de realizar un análisis de regresión entre los residuales cuadrados y el pronóstico de la volatilidad, se procede primero a graficar estas variables y luego se realiza el análisis mencionado. Figuras 65 y 66. Como se ha visto en las anteriores series, el pronóstico estático registra los cambios de los residuales cuadrados. Además la variable resulta significativa cuando se realiza el análisis de regresión. Con respecto al coeficiente de determinación ya se ha expuesto la razón de su bajo valor.

Figura 65. Residuales cuadrados vs pronóstico de volatilidad dlnITES en el periodo fuera de muestra 3/17/2006 – 3/16/2007



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

Figura 66. Análisis de regresión de residuales cuadrados dlnITES vs pronóstico estático de volatilidad.



Fuente: Elaborado con ayuda de Eviews.

ANEXO D

Codigo Matlab para optimizacion tradicional, adaptado de Ruppert
(2004)

```
bmu=[0.001808;-3.27*10^-5;2.09*10^-5];
bomega=[0.000227 -3.11*10^-6 2.2*10^-5;
        -3.11*10^-6 2.13^-5 -1.34*10^-6;
        2.2*10^-5 -1.34*10^-6 2.16*10^-5];
bone=ones(length(bmu),1);
ibomega=inv(bomega);
A=bone'*ibomega*bmu;
B=bmu'*ibomega*bmu;
C=bone'*ibomega*bone;
D=B*C-A^2;
bg=(B*ibomega*bone-A*ibomega*bmu)/D;
bh=(C*ibomega*bmu-A*ibomega*bone)/D;
gg=bg'*bomega*bg;
hh=bh'*bomega*bh;
gh=bg'*bomega*bh;
mumin=-gh/hh;
sdmin=sqrt(gg*(1-gh^2/(gg*hh)));
muP=linspace(min(bmu),max(bmu),50);%grilla de muP
sigmaP=zeros(1,50);%almacenamiento
for i=1:50;
    omegaP=bg+muP(i)*bh;
    sigmaP(i)=sqrt(omegaP'*bomega*omegaP);
    pesoigbc(i)=omegaP(1);
    pesotrm(i)=omegaP(2);
    pesoites(i)=omegaP(3);
end;
```

```

ind=(muP>mumin);%indica frontera eficiente
ind2=(muP<mumin);% indica ubicacion debajo de frontera eficiente
%Graficar frontera eficiente como una curva solida
%La parte no eficiente se grafica con lineas punteadas
figure(1)
p1=plot(sigmaP(ind),muP(ind),'-',sigmaP(ind2),muP(ind2),'--',sdmin,mumin,'.');
%Mejoramiento de apariencia
set(p1(1:2),'linewidth',4);
set(p1(1:2),'color','blue');
set(p1(3),'markersize',40);
set(p1(3),'color','red');

%Nombre de los ejes
fsz=14;
xlabel('Desviacion estandar del rendimiento','fontSize',fsz);
ylabel('Rendimiento esperado','fontSize',fsz);
title('Frontera Eficiente','fontSize',fsz);
set(gca,'xlim',[0,0.02]);
set(gca,'ylim',[-0.0001,0.0020]);
grid;

%prueba para obtener la figura 2, esto no forma parte del codigo original
figure(2)
p2=plot(muP(ind),pesoigbc(ind),'-',muP(ind),pesotrm(ind),'*',muP(ind),pesoites(ind),'-');
fsz=14;
xlabel('Rendimiento esperado','fontSize',fsz);
ylabel('Proporcion de inversion en activo i','fontSize',fsz);
set(gca,'xlim',[-0.0001,0.002]);
set(gca,'ylim',[0,1]);
legend('w igbc','w trm','w ites',0);
Title('Pesos de los activos','fontSize',fsz);
grid;

```


ANEXO E

CODIGO EN GAMS PARA OPTIMIZACION ESTOCASTICA

\$Title Optimizacion estocastica de portafolio

\$offlisting

sets

i activos de inversion /igbc, trm, ites/; alias(i,j);

sets

r rezago /1,2,3,4,9/

s escenarios /s1*s27/

parameters

error(i) termino aleatorio del activo i;

error(i) = normal(0,1)

table covarianza(i,j)

	igbc	trm	ites
igbc	0	-8.49e-7	1.17e-5
trm	-8.49e-7	0	-4.37e-7
ites	1.17e-5	-4.37e-7	0

Table var_estoc(s,i) Variacion estocastica del activo i en el escenario s

	igbc	trm	ites
s1	1.3	1.3	1.3
s2	1.3	1.3	1.0
s3	1.3	1.3	0.7
s4	1.3	1.0	1.3
s5	1.3	1.0	1.0
s6	1.3	1.0	0.7
s7	1.3	0.7	1.3
s8	1.3	0.7	1.0
s9	1.3	0.7	0.7

s10	1.0	1.3	1.3
s11	1.0	1.3	1.0
s12	1.0	1.3	0.7
s13	1.0	1.0	1.3
s14	1.0	1.0	1.0
s15	1.0	1.0	0.7
s16	1.0	0.7	1.3
s17	1.0	0.7	1.0
s18	1.0	0.7	0.7
s19	0.7	1.3	1.3
s20	0.7	1.3	1.0
s21	0.7	1.3	0.7
s22	0.7	1.0	1.3
s23	0.7	1.0	1.0
s24	0.7	1.0	0.7
s25	0.7	0.7	1.3
s26	0.7	0.7	1.0
s27	0.7	0.7	0.7

Table AR(i,r)

	1	2	3	4	9
igbc	0.00746	0.00849	0.00236	-0.00473	-0.02977
trm	-0.00127	-0.00046	-0.00075	0.00331	0.00209
ites	0.00321	0.00174	0.00428	0.00035	-0.00607

Table MA(i,r)

	1	2	3	4	9
igbc	0	0	0	0	0
trm	0	-8.5E-5	0	0.00282	0
ites	0.00305	0	0	0	0

Table ARCH(i,r)

	1	2	3	4	9
igbc	2.153E-5	0	0	0	0
trm	1.9044E-6	0	0	0	0
ites	9.3025E-6	0	0	0	0

Table GARCH(i,r)

	1	2	3	4	9
igbc	9.41E-5	0	0	0	0
trm	3.51E-6	0	0	0	0
ites	9.26E-6	0	0	0	0 ;

parameters

volatilidad(i) volatilidad del activo i;

$$\text{volatilidad('igbc')} = (5.65E-6) + 0.187788 * \text{sqr}(\text{ARCH}(\text{'igbc'}, '1')) \\ + 0.778226 * \text{sqr}(\text{GARCH}(\text{'igbc'}, '1'));$$

$$\text{volatilidad('trm')} = (2.5E-7) + 0.355628 * \text{sqr}(\text{ARCH}(\text{'trm'}, '1')) \\ + 0.705396 * \text{sqr}(\text{GARCH}(\text{'trm'}, '1'));$$

$$\text{volatilidad('ites')} = (4.86E-7) + 0.314728 * \text{sqr}(\text{ARCH}(\text{'ites'}, '1')) \\ + 0.695107 * \text{sqr}(\text{GARCH}(\text{'ites'}, '1'));$$

parameters

volat_activo(i) volatilidad del activo;

parameters

volat_activo_s(s,i) volatilidad del activo en escenario estocastico;

$$\text{volat_activo_s}(s,i) = \text{volatilidad}(i) * \text{var_estoc}(s,i);$$

parameters

residual(i) residual del activo i ;

parameters

residual_s(s,i) residual bajo escenario estocastico;

$$\text{residual_s}(s,i) = \text{sqr}(\text{volat_activo_s}(s,i)) * \text{error}(i);$$

parameters

retorno_s(s,i) rendimiento del activo i en escenario estocastico ;

$$\text{retorno_s}(s, \text{'igbc'}) = 0.001796 + 0.306107 * \text{AR}(\text{'igbc'}, '1') \\ + 0.083462 * \text{AR}(\text{'igbc'}, '9') + \text{residual_s}(s, \text{'igbc'});$$

$$\text{retorno_s}(s, \text{'trm'}) = 0.252938 * \text{AR}(\text{'trm'}, '1') + 0.920396 * \text{AR}(\text{'trm'}, '2') \\ - 0.217151 * \text{AR}(\text{'trm'}, '3') - 1.041369 * \text{MA}(\text{'trm'}, '2') \\ + 0.127822 * \text{MA}(\text{'trm'}, '4') + \text{residual_s}(s, \text{'trm'});$$

$$\text{retorno_s}(s, \text{'ites'}) = 0.000357 + 0.058825 * \text{AR}(\text{'ites'}, '3') + 0.07287 * \text{AR}(\text{'ites'}, '4') \\ + 0.181583 * \text{MA}(\text{'ites'}, '1') + \text{residual_s}(s, \text{'ites'});$$

```

parameters
retorno(i) rendimiento de activo i
Scalars
Rendesp rendimiento esperado /0.0015/
prob probabilidad de escenarios /0.037/
Variables
Peso(i) proporcion de inversion en portafolio del activo i
volatilidad_portafolio Volatilidad del portafolio
sumavarianzas suma de varianzas de activos
sumavarianzas_s(s) suma de varianzas de activos estocastica;
positive variables
peso(i)
Equations
vol_port Volatilidad del portafolio
vol_port_s volatilidad estocastica
rent_port rendimiento del portafolio esperado
rent_port_s rendimiento del portafolio estocastico
Suma_pesos suma de pesos en el portafolio;
vol_port .. sum(i,volat_activo(i)*sqr(peso(i)))
           +sum(i,peso(i)*sum(j,covarianza(i,j)*peso(j)))=e=volatilidad_portafolio;
vol_port_s.. sum((s,i),prob*volat_activo_s(s,i)*sqr(peso(i)))
           +sum((i,j),peso(i)*peso(j)*covarianza(i,j))=e=volatilidad_portafolio;
rent_port .. sum(i,peso(i)*retorno(i))=g=Rendesp;
rent_port_s..sum((s,i),peso(i)*retorno_s(s,i)*prob)=g=rendesp;
suma_pesos ..sum(i,peso(i))=E=1;
Model determ /vol_port, rent_port, suma_pesos/;
Model estoca /vol_port_s, rent_port_s, suma_pesos/;
* cada escenario determinista por separado
Loop(s,
    volat_activo(i)=volat_activo_s(s,i);
    retorno(i)=retorno_s(s,i);
    solve determ minimizing volatilidad_portafolio using nlp;
);
*Escenario de volatilidad media

```

```
volat_activo(i)=sum(s,prob*volat_activo_s(s,i));  
retorno(i)=sum(s,prob*retorno_s(s,i));  
solve determ minimizing volatilidad_portafolio using nlp;  
*problema estocastico  
solve estoca minimizing volatilidad_portafolio using nlp;
```

ANEXO F

OPTIMIZACION ESTOCÁSTICA DE UN PORTAFOLIO

Se pretende optimizar de manera estocástica, en la que se relaja la condición de conocer los parámetros del problema solo se conocen sus distribuciones de probabilidad.

Con respecto al porque usar optimización estocástica, [RAMOS] expresa:

“La optimización estocástica se debe utilizar cuando las decisiones pueden no se utilizables o realizables si no se tiene en cuenta expresamente la incertidumbre, es una forma de protegerse frente a ella...”

[Brandimarte, 2002], señala que la información histórica conocida puede emplearse para generar los escenarios futuros posibles de las series, sin embargo la generación de escenarios aun es tema de estudio. En el caso de esta tesis, los escenarios futuros posibles se consideran equiprobables y se supone una variación porcentual (+/- 30%, no existe una razón particular del porque de este valor) sobre las volatilidades del tiempo cero, implícitamente se está considerando un cambio en los precios diferente al estimado por las series.

Las ecuaciones empleadas para el caso analizado son:

Rentabilidades de activos individuales:

dlnIGBC (ecuación 3.1.):

$$d \ln IGBC_t = 0.001796 + 0.306107 * d \ln IGBC_{t-1} + 0.083462 * d \ln IGBC_{t-9} + a_{t,IGBC}$$

dlnTRM

$$d \ln TRM_t = 0.252938 d \ln TRM_{t-1} + 0.920396 d \ln TRM_{t-2} - 0.217151 d \ln TRM_{t-3} + \dots \\ \dots + a_{t,TRM} - 1.041369 a_{t-2,TRM} + 0.127822 a_{t-4,TRM}$$

dlnITES (ecuación 3.7):

$$d \ln ITES_t = 0.000357 + 0.058825 d \ln ITES_{t-3} + 0.07287 d \ln ITES_{t-4} + a_{t,ITES} + \dots \\ + 0.181583 a_{t-1,ITES}$$

Errores condicionales:

dlnITES (ecuación 3.2)

$$a_{t,IGBC} = \sigma_{t,IGBC} * \varepsilon_{t,IGBC}$$

dlnTRM (ecuación 3.5):

$$a_{t,TRM} = \sigma_{t,TRM} * \varepsilon_{t,TRM}$$

DlnITES (ecuación 3.8):

$$a_{t,ITES} = \sigma_{t,ITES} * \varepsilon_{t,ITES}$$

Volatilidades (Varianzas):

DlnITES (ecuación 3.3):

$$\sigma_{t,IGBC}^2 = 5.65 * 10^{-6} + 0.187788 * a_{t-1,IGBC}^2 + 0.778226 * \sigma_{t-1,IGBC}^2$$

dlnTRM (ecuación 3.6):

$$\sigma_{t,TRM}^2 = 2.50 * 10^{-7} + 0.355628 * a_{t-1,TRM}^2 + 0.705396 * \sigma_{t-1,TRM}^2$$

DlnITES (ecuación 3.9):

$$\sigma_{t,ITES}^2 = 4.86 * 10^{-7} + 0.314728 * a_{t-1,ITES}^2 + 0.695107 * \sigma_{t-1,ITES}^2$$

Volatilidad del portafolio estocástica, para efectos de emplear la ecuación en GAMS la ecuación 3.12. se modifica para incorporar el parámetro de probabilidad. Por lo que el modelo queda:

Minimizar

$$\sigma_{p,s} = \sum w_i^2 * \sigma_{i,s}^2 * prob_i + \sum_i \sum_j w_i w_j cov_{i,j}$$

Los subíndices

i,j, representan los activos a incorporar

s, representa los escenarios a optimizar (27 en total indicados en la tabla 3.10.)

Prob_i indica la probabilidad de ocurrencia del escenario s. Se asumen escenarios equiprobables.

$\sigma_{i,s}^2$, varianza del activo i en el escenario s , emplea las ecuaciones 3.3, 3.6 y 3.9.

Cov $_{i,s}$, matriz que utiliza las covarianzas entre los activos y reemplaza las posiciones de varianza por cero (para facilidad de construcción de la ecuación en GAMS)

Sujeto a:

$$\sigma_{p,s} = \sum_s \sum_i w_i r_i prob_s$$
$$\sum w_i = 1$$

En la que los valores de r_i corresponden a la rentabilidad del activo analizado (ecuaciones 3.1., 3.4. y 3.7.). Estas ecuaciones incorporan los términos de error incondicional, representados por las ecuaciones 3.2., 3.5., y 3.8., que a su vez dependen de una variable aleatoria asumida Normal con media cero y varianza unitaria.

El modelo a optimizar incorpora estocasticidad por la variable aleatoria normal de la que depende el error condicional y que a su vez influye en la rentabilidad del activo. Por otra parte, se asumen para cada escenario variaciones predeterminadas en la volatilidad, las cuales repercuten también en los rendimientos de los activos involucrados en el portafolio y por ende en este último.

Para el escenario de la media, las ecuaciones son las mismas con la diferencia que las ecuaciones no incorporan el parámetro de probabilidad.

Se realiza, a través de GAMS, una optimización determinista para cada escenario y para el valor medio de la función y una optimización estocástica para el modelo que involucra las probabilidades. Los resultados se indican en la tabla 14.

Los distintos escenarios se representan con la letra s y un número consecutivo. Estos escenarios corresponden a valores supuestos de las volatilidades de los activos individuales involucrados. Estos se explican en la tabla 15.

Tabla 14. Resultados de la optimización estocástica empleando GAMS

Análisis de escenarios:

Escenario	Volatilidad Portafolio	Rentabilidad portafolio	Pesos		
			igbc	trm	ites
s1	5,54E-07	0,001	0	0,038	0,962
s2	4,72E-07	0,001	0	0,008	0,992
s3	3,40E-07	Infact.	0	0	1
s4	5,55E-07	0,001	0	0,037	0,963
s5	4,72E-07	0,001	0	0,008	0,992
s6	3,40E-07	Infact.	0	0	1
s7	5,56E-07	0,001	0	0,036	0,964
s8	4,72E-07	0,001	0	0,007	0,993
s9	3,40E-07	Infact.	0	0	1
s10	5,54E-07	0,001	0	0,038	0,962
s11	4,72E-07	0,001	0	0,008	0,992
s12	3,40E-07	Infact.	0	0	1
s13	5,55E-07	0,001	0	0,037	0,963
s14	4,72E-07	0,001	0	0,008	0,992
s15	3,40E-07	Infact.	0	0	1
s16	5,56E-07	0,001	0	0,036	0,964
s17	4,72E-07	0,001	0	0,007	0,993
s18	3,40E-07	Infact.	0	0	1
s19	5,54E-07	0,001	0	0,038	0,962
s20	4,72E-07	0,001	0	0,008	0,992
s21	3,40E-07	Infact.	0	0	1
s22	5,55E-07	0,001	0	0,037	0,963
s23	4,72E-07	0,001	0	0,008	0,992
s24	3,40E-07	Infact.	0	0	1
s25	5,56E-07	0,001	0	0,036	0,964
s26	4,72E-07	0,001	0	0,007	0,993
s27	3,40E-07	Infact.	0	0	1
Medio	4,76E-07	0,001	0	0,05	0,995
Estocastico	4,76E-07	0,001	0	0,05	0,995

Fuente: Calculado con la ayuda de GAMS y Excel

Tabla 15. Escenarios Estocásticos de varianza

Escenario	Activos		
	igbc	trm	ites
s1	1,3	1,3	1,3
s2	1,3	1,3	1
s3	1,3	1,3	0,7
s4	1,3	1	1,3
s5	1,3	1	1
s6	1,3	1	0,7
s7	1,3	0,7	1,3
s8	1,3	0,7	1
s9	1,3	0,7	0,7
s10	1	1,3	1,3
s11	1	1,3	1
s12	1	1,3	0,7
s13	1	1	1,3
s14	1	1	1
s15	1	1	0,7
s16	1	0,7	1,3
s17	1	0,7	1
s18	1	0,7	0,7
s19	0,7	1,3	1,3
s20	0,7	1,3	1
s21	0,7	1,3	0,7
s22	0,7	1	1,3
s23	0,7	1	1
s24	0,7	1	0,7
s25	0,7	0,7	1,3
s26	0,7	0,7	1
s27	0,7	0,7	0,7

Fuente: Propio

Gams entregó como resultado las rentabilidades calculadas a partir de las ecuaciones de series de tiempo para cada uno de los activos.

Tabla 16. Rentabilidades estimadas a partir de las ecuaciones

dlnIGBC	dlnTRM	dlnITES
0.00074516	5.40313E-5	0.001511296

Fuente: Calculado con ayuda de GAMS

Obsérvese que los escenarios individuales coinciden en los valores siguientes, los cuales fueron agrupados para su análisis, se adicionó además la columna correspondiente al estimado de la rentabilidad del portafolio y los pesos de los activos constituyentes:

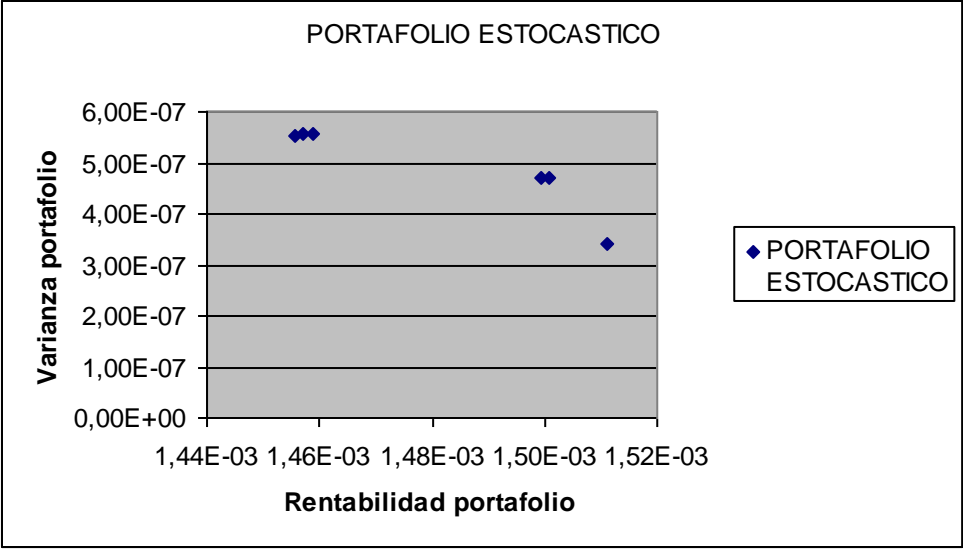
Tabla 17. Resultados frecuentes en los escenarios

Grupos	Escenarios	Rentabilidad Portafolio	dlnIGBC	dlnTRM	dlnITES
1	s1,s10s,s19,	1.46E-3	0	0.038	0.962
2	s2,s5,s11,s14, s20,s23,	1.50E-3	0	0.008	0.992
3	s3,s6,s9,s12,s15, s18,s21,s24, s27	1.51E-3	0	0	1
4	s4,s13,s22,	1.46E-3	0	0.037	0.963
5	s7,s16,s25,	1.460E-3	0	0.036	0.964
6	s8,s17,26	1.50E-3	0	0.007	0.993
7	Medio y Estocastico	1.51E-3	0	0.05	0.995

Fuente: Calculado con ayuda de GAMS

La gráfica de varianza vs rentabilidad de este portafolio se muestra en la figura siguiente:

Figura 66. Portafolio generado a partir de escenarios estocásticos individuales



Fuente: Elaborado con Excel

ANEXO G

CODIGO EN MATLAB PARA OPTIMIZACION MULTI OBJETIVO (Adaptado de código fuente cortesía de Ing Carlos Ardila, Msc)

```
%Optimizacion portafolio
clear all
clc
%Inicializacion de variables
maxPoblacion=100;%Numero de individuos de la poblacion inicial
SolFactibles=zeros(maxPoblacion,3);
maxPoblacionElitista=20;%maximo poblacion elite
maxGeneraciones= 10;%Maximo numero de generaciones
[activos,covarianza]=parametrosPortafolio;%parametros del problema
size_comparision=0.5;
cross_over_probability=0.7;
mutation_probability=0.1;
mutation_value=0.001;
zero=0.00001;
%generacion de la poblacion inicial, tiene en cuenta las restricciones
num_population=0;
[Pob_inicial, num_population]=generarPoblacion(maxPoblacion);
num_population;
count_generations=0;
while count_generations <= maxGeneraciones
    if count_generations==0
        SolFactibles=Pob_inicial;
    end
    %calculo del strength, devuelve strength y valores de las funciones
    %objetivos
```

```

[strength,r]=strength(SolFactibles,num_population,activos,covarianza);
%calculo del raw fitness
R=function_rawfitness(num_population,r,strength);
% calculo de la densidad y asignacion de fitness F
F=densidad(num_population,maxPoblacion,maxPoblacionElitista,r,R);
%Se ordenan por fitness todos los conjuntos trabajados
[SolFactibles,F,R,r,strength]=shortByFitness(SolFactibles,F,R,r,strength);
%seleccion ambiental
num_elitist_population=0;
elitist_population=[];
newF=[];
newr=[];
newd=[];
%Introduce soluciones a la poblacion elitista
for i=1:num_population
    if F(i)<1 %selecciona soluciones factibles con fitness menores que 1
        num_elitist_population=num_elitist_population+1;%incrementa el contador
de elementos en pob elite
        elitist_population(num_elitist_population,:)=SolFactibles(i,:);%Registra un
orden para cada solucion introducida
        newF(num_elitist_population)=F(i);
        newr(num_elitist_population,:)=r(i,:);
    end
end
%Decidir si truncar o llenar con los mejores fitness no escogidos como
%elite
if num_elitist_population >= maxPoblacionElitista
[elitist_populationC,newF,newr,num_elitist_populationC]=truncar(elitist_population,
maxPoblacionElitista, SolFactibles,newF,newr);
else
    elitist_population=[];
    newF=[];
    newr=[];

```

```

[elitist_populationC,newF,newr,num_elitist_populationC]=ampliar(maxPoblacionElitista
, SolFactibles,F,r);
end
SolFactibles=elitist_populationC;
if count_generations<maxGeneraciones
    %proceso de seleccion
    num_population_selected=0;
    elitist_population_temp=elitist_populationC;
    num_elitist_population_temp=num_elitist_populationC;
    population_selected=[];
    for i=1:fix(size_comparision*num_elitist_populationC)
        aleat1=fix(rand*num_elitist_population_temp);
        aleat2=fix(rand*num_elitist_population_temp);
        while (aleat1==aleat2)
            aleat1=fix(rand*num_elitist_population_temp);
            aleat2=fix(rand*num_elitist_population_temp);
        end
        if aleat1==0
            aleat1=1;
        end
        if aleat2==0
            aleat2=1;
        end
        num_population_selected=num_population_selected+1;
        num_elitist_population_temp=num_elitist_population_temp-1;
        if newF(aleat1)<=newF(aleat2)
population_selected(num_population_selected,:)=elitist_population_temp(aleat1,:);
            elitist_population_temp(aleat1,:)=[];
        else
population_selected(num_population_selected,:)=elitist_population_temp(aleat2,:);
            elitist_population_temp(aleat2,:)=[];
        end
    end %Fin proceso de seleccion
end

```



```

%Cruciamiento (Cross over)
new_num_population2=0;
new_population2=[];
for i=1:2:num_population_selected-2
    num_random=rand;
    if num_random<cross_over_probability
        new_num_population2=new_num_population2+1;
        temp1_i=fix(100*population_selected(i,:));
        temp2_i=fix(100*population_selected(i+1,:));
        temp1_r=100*population_selected(i,:)-temp1_i;
        temp2_r=100*population_selected(i+1,:)-temp2_i;
        new_population2(new_num_population2,:)=temp1_i + temp2_r;

new_population2(new_num_population2,:)=0.01*new_population2(new_num_populati
on2,:);
        new_population2(new_num_population2,:)=temp2_i + temp1_r;
new_population2(new_num_population2,:)=0.01*new_population2(new_num_populati
on2,:);
    end
end %Fin cruzamiento
%mutacion
new_num_population3=0;
new_population3=[];
for i=1:new_num_population2-1
    num_random=rand;
    new_num_population3=new_num_population3+1;
    if num_random<=mutation_probability
        num_random=rand;
        if num_random<=0.5
            value=mutation_value;
        else
            value=-mutation_value;
        end
        if num_random<0.33

```

```

new_population3(new_num_population3,1)=new_population2(i,1)+value;
    new_population3(new_num_population3,2)=new_population2(i,2)-value;
    new_population3(new_num_population3,3)=new_population2(i,3);
elseif num_random<0.66
    new_population3(new_num_population3,1)=new_population2(i,1)-value;

new_population3(new_num_population3,2)=new_population2(i,2)+value;
    new_population3(new_num_population3,3)=new_population2(i,3);
else num_random<=1
    if new_population2(i,3)>0
        new_population3(new_num_population3,3)=new_population2(i,3)-
value;
new_population3(new_num_population3,1)=new_population2(i,1)+value;
    new_population3(new_num_population3,2)=new_population2(i,2);
    end
    end
    end
    end %Fin mutacion
    SolFactibles=[SolFactibles;new_population2;new_population3]
end %Completadas las generaciones
num_population=length(SolFactibles);
count_generations=count_generations+1;
end
SolOptima=SolFactibles;
num_population=length(SolFactibles)
for j=1:num_population
    r(j,1)=-(SolOptima(j,:)*activos);
    r(j,1)=-r(j,1);%Maximizacion
    FuncionObjetivo(j,1)=r(j,1);
    r(j,2)=SolOptima(j,:)*covarianza*SolOptima(j,:)';
    FuncionObjetivo(j,2)=r(j,2);
    r(j,2)=1e-4*r(j,2);
end

```

```
FuncionObjetivo
SolOptima
x=1:num_population;
plot(r(x,1),r(x,2),'.');
title('Frente Pareto Optimo');
xlabel('Rendimiento');
ylabel('Varianza');
legend('50 Generaciones');
```

```

function[act,cov]=parametrosPortafolio;
%Activos a incorporar en el portafolio
%Valores AR del dlnigbc
arigbc=[0.014353, 0.003487, 0.010027, 0.003487, -0.004399, -0.003950, 0.001574,
0.016786, 0.005761];
%Valores Arch y Garch de dlnigbc
%Primera columna residual al cuadrado, segunda columna volatilidad al
%cuadrado
garchigbc=[2.153E-5, 9.41E-5];
%Valores AR de dlntm
artrm=[0.001250, 0.003190, 0.003000, 0.003491];
%Valores MA de dlntm
matrm=[-0.00138, 8.5E-5, -0.00135, 0.00282];
%Valores Arch y Garch de dlntm
%Primera columna residual al cuadrado, segunda columna volatilidad al
%cuadrado.
garchtrm=[1.9044e-6, 3.51e-6];
%Valores AR de dlnites
arites=[0.002216, 0.000825, 0.002576, 0.016170, 0.004292];
maites= [0.00305, 0.00116];
garchites=[9.3025E-6, 9.26E-6];
%Ecuacion volatilidad igbc
vol_igbc=5.65e-6+0.187788*garchigbc(1)+0.778226*garchigbc(2);
error_igbc=sqrt(vol_igbc)*randn;
%ecuacion rendimiento igbc
dlnigbc=0.001796+0.306107*arigbc(1)+0.083462*arigbc(9)+error_igbc;
%Ecuacion volatilidad trm
vol_trm=2.5e-7+0.355628*garchtrm(1)+0.705396*garchtrm(2);
error_trm=sqrt(vol_trm)*randn;
%Ecuacion rendimiento trm
dlntm=0.252938*artrm(1)+0.920396*artrm(2)-0.217151*artrm(3)-
1.041369*matrm(2)+0.127822*matrm(4)+error_trm;
%Ecuacion volatilidad ites
vol_ites=4.86e-7+0.314728*garchites(1)+0.695107*garchites(2);

```

```

error_ites=sqrt(vol_ites)*randn;
%Ecuacion rendimiento ites
dlnites=0.000357+0.058825*arites(3)+0.07287*arites(4)+0.181583*maites(1)+error
_ites;
activosPortafolio=[dlnigbc; dlntrm; dlnites];
covPortafolio=1e4*[vol_igbc, -8.49e-7, 1.17e-5;-8.49e-7, vol_trm, -4.37e-7;1.17e-5,
-4.37e-7, vol_ites];
act=activosPortafolio;
cov=covPortafolio;

function [pop,num_pop]=generarPoblacion (maxP);
numP=0;
for i=1:maxP
    peso_ites=-1;
    peso_igbc=rand;
    if peso_igbc <= 0.33
        while peso_ites<0
            peso_trm=rand;
            peso_ites=1-(peso_igbc+peso_trm);
        end
    elseif peso_igbc<=0.66
        while peso_ites<0
            peso_trm=rand;
            peso_ites=1-(peso_igbc+peso_trm);
            if peso_trm>(1-peso_igbc)
                peso_trm=peso_trm/3;
                peso_ites=1-(peso_igbc+peso_trm);
            end
        end
    end
    else
        if peso_igbc>0.99
            peso_trm=1-peso_igbc;
            peso_ites=0;
        else

```

```

while peso_ites<0
    peso_trm=rand;
    peso_ites=1-(peso_igbc+peso_trm);
    if peso_trm>=(1-peso_igbc)
        peso_trm=peso_trm/3;
        peso_ites=1-(peso_igbc+peso_trm);
    else
        peso_ites=1-(peso_igbc+peso_trm);
    end
end
end
end
numP=numP+1;
X(i,1)=peso_igbc;
X(i,2)=peso_trm;
X(i,3)=peso_ites;
end
pop=X;
num_pop=numP;

function [str,r2]=strength(poblacion, num,act,cov);
for j=1:num
    %Se trabajara con el negativo del rendimiento del portafolio para
    %minimizarlo, lo que equivale a maximizar esta funcion positiva
    r1(j,1)=-(poblacion(j,:)*act);
    r1(j,2)=poblacion(j,:)*cov*poblacion(j,:);
end
for i=1:num
    s(i)=0; %cantidad de dominados por i
    for j=1:num
        if r1(i,:)<r1(j,:) %Determina si i domina a j porque se buscan los minimos
            s(i)=s(i)+1; %Si i domina a j se incrementa la cantidad de dominados por i
        end
    end
end
end

```

```

end
str=s;
r2=r1;

function f=function_rawfitness(nu,r1,str);
for i=1:nu
    R(i)=0;
    for j=1:nu
        if r1(i,*)>r1(j,*)
            R(i)=R(i)+str(j);
        end
    end
end
end
f=R;

function f=densidad(n,max,max_eli,r1,R1);
for i=1:n
    cont=0;
    for j=1:n
        if (i~j)
            cont=cont+1;
            d(i,cont)=sqrt(((r1(i,1)-r1(j,1))^2)+((r1(i,2)-r1(j,2))^2));
        end
    end
end
k=fix(sqrt(max+max_eli))
%ordenamiento de d(i)
d(i,:)=sort(d(i,:));
%D(i)=1/(d(k)+2)
D(i)=1/(d(i,k)+2);
%calculo del fitness
F(i)=R1(i)+D(i);
end
f=F;

```

```

function [pop1,F1,R1,r1,str1]=shortByFitness(poblac,F,R,r,str);
    for i=1:length(poblac)-1
        for j=i+1:length(poblac)
            if(F(i)>F(j))
                Ftemp=F(i);
                F(i)=F(j);
                F(j)=Ftemp;
                %poptemp=pop(i);
                %pop(i)=pop(j);
                %pop(j)=poptemp;
                poptemp=poblac(i,:);
                pop(i,:)=poblac(j,:);
                pop(j,:)=poptemp;
                %hasta aqui la modificacion propuesta
                Rtemp=R(i);
                R(i)=R(j);
                R(j)=Rtemp;
                rtemp=r(i);
                r(i)=r(j);
                r(j)=rtemp;
                strtemp=str(i);
                str(i)=str(j);
                str(j)=strtemp;
            end
        end
    end
    pop1=poblac;
    F1=F;
    R1=R;
    r1=r;
    str1=str;

```