UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

GUÍA DE ESTUDIO PARA EL CURSO 841

MATEMÁTICAS DISCRETAS

Alberto Soto Aguilar

2007

Producción Académica
Licda Ana Mª Sandoval Poveda.

Digitación y diagramación a cargo del Autor.

Revisión filológica
M.L. Óscar Alvarado Vega.

Presentación

La cátedra de Matemáticas Intermedias les saluda y les desea que el curso de Matemáticas Discretas llene sus expectativas para la carrera de Informática Administrativa, carrera que usted sigue en la Universidad Estatal a Distancia. Como cátedra, es para nosotros una gran responsabilidad y una obligación brindarle las herramientas necesarias para que su aprendizaje se logre no solo en el tiempo esperado, sino también en la profundidad que la materia requiere.

Quizá aquí sea conveniente describir qué es Matemática discreta. Esta es la rama de la Matemática que estudia la Teoría de conjuntos, la probabilidad, el conteo, las sucesiones, los grafos y árboles y las estructuras algebraicas. A diferencia de otras partes de la Matemática (como el Cálculo que trata con fenómenos continuos) en esta área el interés se centra en lo discreto.

El libro que se usará es *Estructuras de Matemáticas discretas para la Computación* escrito por B. Kolman, R. Busby y S. Ross, editado por Prentice–Hall Hispanoamericana, S.A. Dado que el material de este curso no es un texto de educación a distancia, se hace necesario poner pautas y ritmos de estudio. Por esto, con la finalidad de que usted cuente con una guía del texto para su beneficio y ayudar en su aprendizaje, se ha escrito este documento.

En esta guía, usted encontrará un resumen de cada capítulo, así como los conceptos más relevantes del tópico que desarrolla la misma. Luego, se presentará una serie de ejemplos resueltos, tomados de la lista de ejercicios del libro, con comentarios acerca de los detalles de la solución. Al finalizar cada sección, usted encontrará los ejercicios recomendados para esa sección del capítulo. Al final de cada capítulo se encuentra un examen de autoevaluación cuya solución aparece al final de la guía. Hemos querido tomar ejercicios de exámenes anteriores para que usted se habitúe al tipo de redacción de los ejercicios nuestros.

Para que saque el mejor provecho a esta guía, considere las siguientes sugerencias:

- Lea las orientaciones del curso para que conozca los objetivos específicos de la materia.
- Lea, en esta guía, el resumen de cada sección para que conozca la materia que va a estudiar.
- Lea la sección del libro. Trate de entender la solución a los ejemplos presentados.
- Lea los ejemplos resueltos que se presentan aquí y trabaje los ejercicios planteados.
- En el momento del repaso, trate cada ejemplo como si fuera un ejercicio.
- Haga los ejercicios de autoevaluación cuando termine la mayoría de los ejercicios del libro.

Recuerde que tanto estas soluciones como las soluciones de los ejemplos del libro, le serán de más ayuda si dedicó una parte de su tiempo a tratar de resolverlos por usted mismo.

Tome en consideración que en esta guía se utiliza la coma para la separación decimal, que es lo habitual en Costa Rica, aunque el texto al que hacemos referencia utilice el punto.

Es nuestro interés mejorar cada día y este documento se verá enriquecido con las sugerencias e indicaciones que usted nos haga llegar. Como toda obra humana, este texto es sujeto de mejora constante y depende de ustedes que se logre la finalidad buscada.

Estamos para servirle pero también necesitamos que usted nos ayude.

Atentamente

Lic. Alberto Soto A.

Profesor, Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

UNED

Tabla de contenidos

Capítulo 1. Conceptos fundamentales

Este capítulo no tiene un eje temático particular, sino que más bien es una recopilación de conceptos y tópicos que, de alguna manera, se han estudiado en la enseñanza secundaria. Quizá esto lo hace un capítulo un poco inusual con respecto a los otros. Cada sección debe tratarse por aparte. Su tarea como lector o lectora es conciliar los conceptos que conoce con los que le presenta el libro. De esta forma iniciaremos el estudio de la Matemática discreta.

1.1 y 1.2 Conjuntos y subconjuntos, operaciones con conjuntos

Estas dos secciones corresponden al mismo tópico: el estudio de la teoría de conjuntos.

Revise la notación que encontrará en las páginas 2 y 3 que representa respectivamente la pertenencia de elementos en un conjunto y la inclusión de conjuntos en otro $\in$ y $\subseteq$, y cuándo debe utilizarse cada una de ellas. Hay un pequeño error en la página 2. Es conveniente aclarar que los números naturales están definidos como el conjunto de los números enteros positivos, por lo que debe decir $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

¿Qué se espera que usted entienda?

1. Un conjunto es una colección de objetos agrupados según algún criterio o característica que no sea contradictoria en sí misma.
2. Un conjunto es vacío cuando carece de elementos. Las notaciones que se usan para este conjunto son dos: el símbolo $\varnothing$ o la escritura $\{\quad\}$.
3. La cardinalidad de un conjunto es el número de elementos de él. Un conjunto puede ser finito o infinito. El número de elementos del A se escribe $|A|$ y se lee: cardinalidad de A.

4. Muchas veces se definen los conjuntos **por comprensión**, al indicar una propiedad que cumplan sus elementos y se escribe $A = \{x|x \dots\}$ y esta se lee "A es igual al conjunto de las x tal que $x \dots$".

5. Es importante recalcar que la notación $\in$ se utiliza exclusivamente para los elementos del conjunto, mientras que $\subseteq$ se usa para relacionar conjuntos. Así, si $A = \{3, \triangle, @, *\}$ podemos escribir $\triangle \in A$ pero la expresión $\triangle \subseteq A$ no la debemos escribir. Ahora, si se define $B = \{x \in A|x \text{ es un número}\}$, entonces podemos escribir $B \subseteq A$. En este caso $B = \{3\}$ un conjunto de cardinalidad 1 o unitario; en este caso la notación que se emplea es $|B| = 1$. Tampoco debemos escribir $B \in A$.

6. Algunas veces nos interesa representar conjuntos por medio de diagramas "de Venn": estos dibujos representan los elementos por medio de puntos y los conjuntos por medio de círculos o curvas cerradas, como los de la página 3. Son muy simples y útiles. Recuerde que aquí utilizamos la existencia del conjunto que contiene a todos los elementos llamado **conjunto universal** o **universo**, por esto, el conjunto de estudio es subconjunto de este conjunto universal; en este caso, este conjunto se representa por medio de un rectángulo.

7. El conjunto potencia corresponde al conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado. Note que el conjunto potencia es un conjunto de conjuntos, esto es, sus elementos son conjuntos. Por ejemplo, si $A = \{a, b\}$, entonces el conjunto potencia de A, que se denota $P(A)$, es

$$P(A) = \{\{\quad\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \text{ o bien } P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, A\}$$

   $P(A)$ es un conjunto formado por 4 elementos. El número de elementos del conjunto potencia de un conjunto de n elementos es 2^n; en símbolos $|P(A)| = 2^{|A|}$.

8. Es importante conocer las operaciones de unión, intersección y diferencia entre conjuntos y sus propiedades. En palabras sencillas podemos decir que:

   Unión ($\cup$) Agrupar todos los elementos de dos conjuntos para formar uno nuevo, aquellos elementos repetidos se contarán y se escribirán solo una vez.

   Intersección ($\cap$) Agrupar los elementos comunes a ambos conjuntos y formar un nuevo conjunto.

   Diferencia ($-$) Agrupar los elementos que solo pertenecen al primero de los conjuntos. En el libro se le llama complemento del segundo con respecto al primero, pero es más sencillo decirle diferencia.

Diferencia simétrica ($\bigoplus$) Agrupa los elementos que pertenecen a uno de los conjuntos, pero no a ambos.

Cuando se utiliza el complemento con respecto al conjunto universal, se simplifica la notación al escribir $\overline{A}$ y con ello, cualquier otro complemento B, se puede obtener con la intersección del conjunto original con el complemento al conjunto universal; de esta forma se tiene $A - B = A \cap \overline{B}$.

Algunos detalles importantes:

- $A \cup B = A$, solo cuando $B \subseteq A$, en este caso se cumplirá que $A \cap B = B$.
- $A \cap B = \varnothing$, si A y B no tienen elementos en común, en este caso se llaman conjuntos **disjuntos**.
- $A - B = A$, solo cuando $A \cap B = \varnothing$. ¿Cuánto es $A - B$ si $A \subseteq B$?
- $(A - B) - C \neq A - (B - C)$, esto significa que la diferencia no es asociativa y requiere el uso de paréntesis. En otras palabras $A - B - C$, es una expresión ambigua que no debemos escribir.

9. El teorema 1 de la página 10 enumera las propiedades que cumple la unión, la intersección y el complemento. Destaquemos 6 de las 19 propiedades. Las propiedades 3 y 4, nos indican que los paréntesis en la expresión $A \cap (B \cap C)$ no son necesarios y que tanto la intersección como la unión de conjuntos, se pueden hacer en el orden que deseemos. Las propiedades 5 y 6 nos indican la regla de distribución que se sigue al hacer una unión y una intersección o viceversa. Las propiedades 14 y 15, llamadas Leyes de De Morgan, indican cómo calcular el complemento de una unión o una intersección.

10. Los teoremas 2 y 3 permiten calcular la cardinalidad de un conjunto conociendo la cardinalidad de algunas partes de él. El principio de adición debe aplicarse al estilo de los ejemplos 8 y 9 de la página 12.

11. En algunos ejemplos y ejercicios se solicita hacer una **demostración**; esto significa que utilizando las definiciones y los teoremas (resultados) que se conocen es posible asegurar que un hecho se cumple. En todas las demostraciones existe una hipótesis (premisa que se considera verdadera) y una tesis (premisa que hay que demostrar).

Ejemplos resueltos

1. Sea $A = \{x | x \text{ es un número real y } x < 6\}$. Indique en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa.

afirmación	$3 \in A$	$6 \in A$	$5 \notin A$	$8 \notin A$	$-8 \notin A$	$3{,}4 \notin A$
condición						

Solución: Para saber si la afirmación es verdadera o falsa se debe verificar si el número propuesto cumple, o no, con las condiciones indicadas: primero, observe que todos los números son reales; luego, hay que revisar su relación de orden respecto a 6,

- $3 \in A$ es verdadero pues $3 < 6$.
- $6 \in A$ es falso pues $6 = 6$ y la condición es ser menor que 6.
- $5 \notin A$ es falso pues $5 \in A$, ya que $5 < 6$.
- $8 \notin A$ es verdadero pues $8 > 6$.
- $-8 \notin A$ es falso, pues al contrario $-8 \in A$, ya que $-8 < 6$.
- $-3{,}4 \notin A$ es falso, pues $-3{,}4 \in A$ al ser $-3{,}4 < 6$.

En resumen:

afirmación	$3 \in A$	$6 \in A$	$5 \notin A$	$8 \notin A$	$-8 \notin A$	$3.4 \notin A$
condición	Verdadero	Falso	Falso	Verdadero	Falso	Falso

2. Considere el conjunto $\{x|x \in \mathbb{Z}\}$ y $x^2 < 12$. Enliste sus elementos.
Solución: La lista es $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ pues consiste en describir al conjunto por extensión. Cualquier otro número entero tiene un cuadrado mayor que 12.

3. Considere el siguiente diagrama de Venn y determine la validez de las siguientes afirmaciones:

(a) $A \subseteq B$

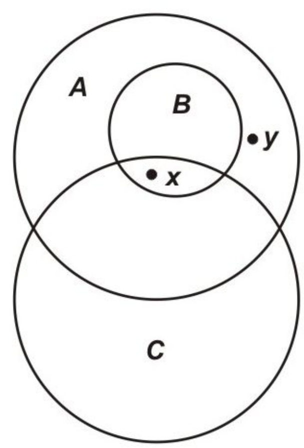
(b) $B \subseteq A$

(c) $C \subseteq B$

(d) $x \in B$

(e) $x \in A$

(f) $y \in B$



Solución:

(a) $A \subseteq B$. Falso. Al contrario, $B \subseteq A$.

(b) $B \subseteq A$. Verdadero.

(c) $C \subseteq B$. Falso. B y C comparten elementos pero no hay relación de inclusión en ningún sentido.

(d) $x \in B$. Verdadero.

(e) $x \in A$. Verdadero.

(f) $y \in B$. Falso. $y \notin B$.

4. Si $A = \{3, 7, 2\}$, encuentre $P(A)$, $|A|$ y $|P(A)|$.
Solución: Como se mencionó, $P(A)$ contiene a todos los subconjuntos de A. Así

$$P(A) = \{\varnothing, \{3\}, \{7\}, \{2\}, \{3, 7\}, \{3, 2\}, \{7, 2\}, A\}$$

y como $|A| = 3$, comprobamos que $|P(A)| = 2^3 = 8$.

5. Demuestre que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
Solución: Para hacer esta demostración[1] se deben utilizar los hechos y las definiciones relacionadas con subconjuntos e inclusión de conjuntos. Además, se considera como verdadera la hipótesis, en este caso $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Luego hay que probar la tesis, que para este ejemplo es $A \subseteq C$. Para hacerlo debemos probar que todos los elementos de A son también elementos de C, pues esto afirma la definición de subconjunto. Además, hay que tener presente que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. En efecto, la primera de las condiciones dice que todo elemento de A es elemento de B, y la segunda dice que todo elemento de B pertenece a C también. Entonces, todo elemento de A es también de C.

6. Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$ el conjunto universal, $A = \{a, b, c, g\}$, $B = \{d, e, f, g\}$, $C = \{a, c, f\}$ y $D = \{f, h, k\}$. Calcule:

Conjunto	$A \cup D$	$B \cup D$	$C \cap D$	$A \cap D$	$B - C$	$\overline{B}$	$C - B$,	$C \oplus D$
Resultado								

Solución:

- $A \cup D$: primero se colocan los elementos de A y se añaden los de D. Como no hay elementos comunes, el nuevo conjunto tiene siete elementos, por lo que se puede escribir *por extensión* $A \cup D = \{a, b, c, g, f, h, k\}$.
- $B \cup D$: es igual a $\{d, e, f, g, h, k\}$, solo que ahora f está en ambos conjuntos y por eso se toma solo una vez.

[1] En el capítulo 2 se ahondará en el tema de demostraciones lógicas.

- $C \cap D$: tomamos solo los elementos comunes, esto es, $\{f\}$.
- $A \cap D$: como no hay elementos comunes en A y D entonces $A \cap D = \varnothing$.
- $B - C$: contiene los elementos de B que no están en C, esto es $\{d, e, g\}$.
- $\overline{B}$: es el conjunto complementario a B y contiene a todos los elementos de U que no pertenecen a B, o sea $\{a, b, c, h, k\}$.
- $C - B$: contiene los elementos de C que no están en B, así obtenemos $\{a, c\}$.
- $C \oplus D$: contiene a los elementos que pertenecen solo a uno de los conjuntos, así contiene a a ya que $a \in C - D$ y también incluye a h pues $h \in D - C$, de la misma forma para c y k; por esto nos queda $C \oplus D = \{a, c, h, k\}$.

En resumen:

Conjunto	$A \cup D$	$B \cup D$	$C \cap D$	$A \cap D$
Resultado	$\{a, b, c, g, f, h, k\}$	$\{d, e, f, g, h, k\}$	$\{f\}$	$\varnothing$
Conjunto	$B - C$	$\overline{B}$	$C - B$,	$C \oplus D$
Resultado	$\{d, e, g\}$	$\{a, b, c, h, k\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c, h, k\}$

7. Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ el conjunto universal, considere $A = \{a, c, f, g\}$, $B = \{a, e\}$, $C = \{b, h\}$. Calcule:

Conjunto	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{B} \cup \overline{C}$	$\overline{A \cup A}$	$\overline{C} \cap \overline{C}$	$A \oplus B$	$B \oplus C$
Resultado						

Solución: Una manera de calcular estos conjuntos es utilizando propiedades del teorema 1.

- Así, en lugar de calcular $\overline{A} \cap \overline{B}$, calculamos $\overline{A \cup B} = \{b, d, h\}$ que son los elementos que no están ni en A ni en B.
- Igual con $\overline{B} \cup \overline{C}$ pues calculamos $\overline{B \cap C}$ y como B y C no tienen elementos comunes, el resultado de este complemento es U.
- $\overline{A \cup A} = \overline{A} = \{b, d, e, h\}$ que son los que no están en A.
- $\overline{C} \cap \overline{C} = \overline{C} = \{a, c, d, e, f, g\}$ que son los elementos que no pertenecen a C.
- $A \oplus B$ contiene a los elementos que pertenecen a uno de los dos pero no a ambos, en este caso, $A \oplus B = \{c, f, g, e\}$
- $B \oplus C = \{a, e, b, h\}$.

En resumen:

Conjunto	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{B} \cup \overline{C}$	$\overline{A \cup A}$	$\overline{C} \cap \overline{C}$	$A \oplus B$	$B \oplus C$
Resultado	$\{b, d, h\}$	U	$\{b, d, e, h\}$	$\{a, c, d, e, f, g\}$	$\{c, f, g, e\}$	$\{a, e, b, h\}$

8. Sea $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ y } x < 8\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ y } 2 \leq x \leq 4\}$ y $C = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ y } x^2 < 16\}$. Calcule $|A \cup B \cup C|$.
   Solución: Para calcular esta cardinalidad podemos hacer la unión de los conjuntos y luego contar los elementos, o bien, usar el teorema 3; en cualquiera de los dos casos es mejor conocer los elementos de cada conjunto. Por extensión $A = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ y $C = \{-3, -2, \ldots, 2, 3\}$. Note que $A \cup B \cup C = \{-3, -2, \ldots, 7, 8\}$, un conjunto con 12 elementos.

Ejercicios recomendados: de las páginas 4 y 5, del 1 al 20 y de las páginas 12, 13 y 14 del 1 al 19 y del 26 al 30.

1.3 Sucesiones

Una sucesión es una lista infinita ordenada de objetos; en particular, nos interesan cuando los objetos son números reales. En general, hay dos formas para definir una sucesión:

1. Por medio de una fórmula que determine el enésimo elemento de la sucesión en función de su posición, por ejemplo: $a_n = 5^n$.
2. Utilizando los elementos anteriores de manera que el enésimo elemento se determina al conocer todos los elementos anteriores. Esta forma se llama **recursiva**, por ejemplo: $a_n = 2a_{n-1}$, $n \geq 2$ y $a_1 = 3$.

Estudie únicamente las páginas 14 a 18, hasta la parte de la definición de conjunto numerable. Note que las funciones características se definen básicamente para representar un conjunto en forma binaria. Con estas funciones, cualquier conjunto finito puede representarse como una secuencia de unos y ceros. Esto es importante pues las computadoras utilizan el sistema binario. Con las funciones características, las operaciones de conjuntos (unión, intersección, diferencia y complemento) pueden ser vistas como operaciones entre funciones.

La parte concerniente a cadenas y expresiones regulares puede omitirla, pues no es parte de la evaluación.

Ejemplos resueltos

1. Determine el conjunto correspondiente de la sucesión $0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$.
Solución: El conjunto es $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$. Al observar ambas expresiones da la impresión de que la sucesión y el conjunto correspondiente a la sucesión es lo mismo. Por eso es importante notar la diferencia. La sucesión es una lista ordenada por aparición, mientras que el conjunto correspondiente a la sucesión no está escrito en un orden particular; solo importa que estén todos los elementos.

2. Escriba los cuatro primeros términos de la sucesión $b_n = 3n^2 + 2n - 6$ y de la sucesión $d_1 = -3$, $d_{n+1} = -2d_n + 1$.
Solución:

n	b_n	d_n
1	$b_1 = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 6 = -1$	$d_1 = -3$
2	$b_2 = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 = 10$	$d_2 = -2d_1 + 1 = -2(-3) + 1 = 7$
3	$b_3 = 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 6 = 27$	$d_3 = -2d_2 + 1 = -2(7) + 1 = -13$
4	$b_4 = 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 6 = 50$	$d_4 = -2d_3 + 1 = 27$

En resumen:

n	1	2	3	4
b_n	-1	10	27	50
d_n	-3	7	-13	27

3. Escriba una fórmula para el término de orden n de la sucesión $0, 3, 8, 15, 24, 35, \ldots$.
Solución: En general, buscar una fórmula para una sucesión no tiene solución (piense en la sucesión de números premiados con el mayor en la lotería nacional), si existiera una fórmula para cualquier sucesión eso equivaldría a decir que el azar no existe. Por ello, la solución plantada solo funciona para casos muy particulares, como el de este ejemplo. Para este ejercicio, es posible dar una regla basada en la observación de la sucesión,

n	1	2	3	4	5	6
a_n	0	3	8	15	24	35

Note que con estos valores podemos formar la sucesión de diferencias consecutivas $d_n = a_{n+1} - a_n$, esto es, formamos una nueva sucesión d_n con las diferencias de uno de los elementos con su antecesor.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	0	3	8	15	24	35
d_n	$3 - 0 = 3$	$8 - 3 = 5$	$15 - 8 = 7$	$24 - 15 = 9$	$35 - 34 = 11$	

con esto formamos la sucesión $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ que es una sucesión un poco más conocida. Si aún no la reconoce, note que la diferencia consecutiva de esta nueva sucesión es constante, en este caso 2, o lo que es lo mismo, note que va de 2 en 2 empezando en 3. Esto lo escribimos como $d_n = 2n + 1$ para $n \geq 1$ entonces $2n + 1 = d_n = a_{n+1} - a_n$ o sea $a_{n+1} = 2n + 1 + a_n$ con $a_1 = 0$. La fórmula encontrada para esta sucesión es recursiva y no es la única. De hecho, si partimos de observar la sucesión original y le sumamos 1 a cada elemento, obtenemos otra sucesión $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ esta es otra sucesión conocida, que corresponde a los cuadrados de los números naturales; en otras palabras, $n^2 = a_n + 1$ o bien $a_n = n^2 - 1$ y obtenemos una fórmula explícita para la misma sucesión. Este tipo de procesos solo los podremos llevar a cabo con éxito, si se tiene práctica y conocimiento de sucesiones.

4. Sea $U = \{b, d, e, g, h, k, m, n\}$ el conjunto universal, considere $B = \{b\}$, $C = \{d, g, m, n\}$ y $D = \{d, k, n\}$. Calcule f_B, f_C y f_D. Represente por arreglos de ceros y unos a los conjuntos: $B \cup C$ y $C \cap D$.
Solución: Se definen las funciones:

$$f_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = b\,; \\ 0, & \text{si } x \neq b. \end{cases},$$

$$f_C(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = d, g, m, n\,; \\ 0, & \text{si } x \neq d, g, m, n. \end{cases} \text{ y}$$

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = d, k, n\,; \\ 0, & \text{si } x \neq d, k, n. \end{cases}$$

Con estas funciones B, C y D, se representan por:

$B \rightarrow$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$C \rightarrow$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

$D \rightarrow$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Con estos arreglos es muy sencillo encontrar los correspondientes a los conjuntos $B \cup C$ y $C \cap D$.

Coloquemos los dos arreglos para formar el arreglo correspondiente a $B \cup C$, colocando un cero solo cuando en esa misma posición los dos arreglos tienen un cero.

Para la intersección se colocan los dos arreglos y se pone un 1 solo cuando ambos tienen un 1 en esa misma posición.

$B \cup C \rightarrow$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | $C \cap D \rightarrow$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Ejercicios recomendados: de la página 21, del 1 al 19 y del 22 al 24.

1.4 División en los enteros

Esta sección estudia las propiedades del máximo común divisor (MCD) y el mínimo común múltiplo (MCM). Aunque son propiedades que usted ya conoce, es muy importante que pueda calcular el MCD y MCM en forma algorítmica. En el algoritmo de la página 23 hay un error en el paso 3. En lugar de "más pequeño" debe ser "más grande".

Ejemplos resueltos

1. Escriba los números enteros $1\,666$ y $1\,125$ como producto de números primos.
   Solución: Es conveniente iniciar la búsqueda de factores primos utilizando las reglas de divisibilidad por 2, 3 y 5; esto nos ayudará a utilizar números más pequeños. Al dividir $1\,666$ por 2, pues el número es par, se obtiene: $1\,666 \div 2 = 833$. Luego, usamos el algoritmo indicado en la página 23, calculando el número entero más grande menor que $\sqrt{833}$; como $\sqrt{833} \approx 28{,}86$ se hará una búsqueda más corta. Entonces, se tiene que si 833 no es un número primo, debe tener un divisor primo menor que 28. Los primos menores que 28 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23, dado que el 833 no es ni par ni divisible por 3, ni por 5, probamos con 7: $833 \div 7 = 119$, volvemos a probar con 7, $119 \div 7 = 17$ y como 17 es un número primo, se tiene que $1\,666 = 2 \cdot 7^2 \cdot 17$. Para el número $1\,125$, empezamos dividiendo por 5 (aunque puede ser primero por tres[2]) y se obtiene $1\,125 \div 5 = 225$, volvemos a dividir por 5, $225 \div 5 = 45$ y una vez más $45 \div 5 = 9$ y como $9 = 3^2$ se tiene que $1\,125 = 5^3 \cdot 3^2$.

2. Determine el máximo común divisor de 34 y 58. Encuentre los enteros s y t tales que $34s + 58t$ sea este máximo.
   Solución: El procedimiento para hacer las dos cosas a la vez consiste en aplicar el algoritmo de la división euclidiana a 58 y 34, en este caso

   $$58 = 34 \cdot (1) + 24$$

   Luego se divide 34 por 24 y se obtiene

   $$34 = 24 \cdot (1) + 10$$

[2] La factorización puede hacerse en el orden deseado y esto no va a alterar el resultado

Después, se divide 24 por 10 y resulta

$$24 = 10 \cdot (2) + 4$$

Se divide 10 por 4 y se obtiene

$$10 = 4 \cdot (2) + 2$$

Por último, se vuelve a dividir 4 por 2 y se obtiene $4 = 2 \cdot (2)$ y aquí se detiene el procedimiento. El máximo común divisor es 2. Ahora, para encontrar los enteros s y t tal que $34s + 58t = 2$, procedemos a la inversa. La igualdad que tiene al 2 como residuo es $10 = 4 \cdot (2) + 2$, si despejamos este residuo:

$$2 = 10 - 4 \cdot (2)$$

luego, el siguiente residuo antes que 2 es 4, en la igualdad $24 = 10 \cdot (2) + 4$; de aquí despejamos el 4, y se cambia por $4 = 24 - 10 \cdot (2)$, al sustituirlo en la igualdad nos queda: $2 = 10 - (24 - 10 \cdot (2)) \cdot (2) = 24 \cdot (-2) + 10 \cdot (5)$. Hasta aquí:

$$2 = 24 \cdot (-2) + 10 \cdot (5)$$

Ahora, siguiendo con los residuos de la igualdad $34 = 24 \cdot (1) + 10$, se despeja el 10 y queda $10 = 34 - 24 \cdot (1)$.

Así $2 = 24 \cdot (-2) + (34 - 24 \cdot (1)) \cdot (5) = 34 \cdot (5) + 24 \cdot (-7)$. De manera que

$$2 = 34 \cdot (5) + 24 \cdot (-7)$$

Por último, el primer residuo fue 24 y se cambia por $24 = 58 - 34$, y nos queda

$$2 = 34 \cdot (5) + (58 - 34) \cdot (-7) = 34 \cdot (12) + 58 \cdot (-7)$$

Con esto se encuentran los enteros $s = 12$ y $t = -7$ tales que $2 = 34s + 58t$.

3. Encuentre el mínimo común múltiplo de los enteros 175 y 245.
   Solución: Si factorizamos 175 y 245 se obtiene $175 = 5^2 \cdot 7$, $245 = 5 \cdot 7^2$, por lo que el mínimo común múltiplo es $N = 5^2 \cdot 7^2 = 1\,225$.

Ejercicios recomendados: de las páginas 29 y 30, del 1 al 16.

1.5 Matrices

Esta sección introduce un conjunto de objetos llamados matrices. Una matriz, como indica el texto, es un arreglo rectangular de números dispuestos en renglones (o filas) y columnas, de manera que cada número ocupa una posición en un renglón y una columna específicos. Las matrices son con frecuencia muy utilizadas para colocar datos provenientes de diferentes cualidades y diversas características.

Es posible que al ver una tabla de posiciones en un torneo deportivo usted no piense que lo que está mirando es una matriz; tomemos, por ejemplo, la tabla de posiciones del fútbol nacional, cada equipo es la etiqueta del renglón respectivo y las diferentes estadísticas de este equipo están colocadas debajo de la característica correspondiente, esto es, en cada columna. Así, cada número determina una información específica dentro de este arreglo rectangular.

Se suele denotar a las matrices con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas con dos subíndices; de esta forma, si A es una matriz de 3 renglones y 4 columnas escribimos 3×4 (se lee "tres por cuatro"). Para indicar al elemento que está en el primer renglón[3] y la tercera columna escribimos a_{13} se lee "a sub uno-tres" o bien, si se desea señalar el elemento que ocupa la esquina inferior derecha del arreglo escribimos a_{34} y se lee "a sub tres-cuatro".

Hay reglas para operar matrices que definen la suma y la multiplicación a partir de los elementos que la componen. Primero, las matrices deben ser compatibles para ser operadas: Para sumar matrices es necesario que ambas sean del mismo tamaño (número de renglones y número de columnas) y el resultado será de ese mismo tamaño. Para multiplicar, se debe cumplir que el número de columnas de la matriz de la izquierda coincida con el número de renglones de la matriz de la derecha; en este caso, el resultado es una matriz con el número de renglones igual a la matriz de la izquierda y con el número de columnas igual a la matriz de la derecha.

En símbolos:

- Si A es $n \times m$ y B es $n \times m$ entonces $A + B$ es $n \times m$.
- Si A es $n \times m$ y B es $m \times p$ entonces AB es $n \times p$.

[3] Los renglones se enumeran de arriba hacia abajo y las columnas de izquierda a derecha.

Por ejemplo: sean A, B y C las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 & 2 \\ -6 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 6 & 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos a calcular $A+B$ y AC. $A+B$ se obtiene al sumar el elemento correspondiente de la matriz A con su homólogo en la matriz B:

$$A+B = \begin{bmatrix} -4+3 & 5+1 & 1+(-1) & 2+4 \\ -6+6 & -1+2 & 3+(-6) & -5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz $D = AC$, el elemento d_{ij} se calcula tomando el renglón i de la matriz A y la columna j de la matriz C, luego se multiplica el primer elemento del renglón con el primer elemento de la columna, el segundo elemento del renglón con el segundo de la columna y así sucesivamente, para luego sumar todos estos productos. Ilustremos paso a paso lo anterior, con el cálculo de d_{23}:

El renglón 2 de A es $[-6,-1,3,-5]$ y la columna 3 de C es $[5,1,-1,0]$, así que la suma de productos que dan como resultado a d_{23} es

$$d_{23} = (-6)(5) + (-1)(1) + (3)(-1) + (-5)(0) = -30 - 1 - 3 = -34$$

Como A es 2×4 y C es 4×3, la matriz AC es 2×3, así que necesitamos hacer seis cálculos como el anterior para calcular la matriz AC. Después de hacer este cálculo se obtiene:

$$\begin{aligned} d_{11} &= (-4)(-1) + (5)(2) + (1)(7) + (2)(4) = 29 \\ d_{12} &= (-4)(3) + (5)(-6) + (1)(0) + (2)(1) = -40 \\ d_{13} &= (-4)(5) + (5)(1) + (1)(-1) + (2)(0) = -16 \\ d_{21} &= (-6)(-1) + (-1)(2) + (3)(7) + (-5)(4) = 5 \\ d_{22} &= (-6)(3) + (-1)(-6) + (3)(0) + (-5)(1) = -17 \\ d_{23} &= (-6)(5) + (-1)(1) + (3)(-1) + (-5)(0) = -34 \end{aligned}$$

Así obtenemos $AC = \begin{bmatrix} 29 & -40 & -16 \\ 5 & -17 & -34 \end{bmatrix}$

Note que dos matrices no se podrán multiplicar si no cumplen la siguiente condición: el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de C. Y como es importante cuál es la matriz de la derecha y cuál de la izquierda, se tiene que: por lo general, AB y BA son matrices diferentes, inclusive, como en el caso anterior, AC existe pero CA no.

Además de las operaciones con matrices, esta sección define la matriz **transpuesta** a otra, como la matriz que tiene por renglones las columnas de la matriz original, en el mismo orden. Esto significa que si la matriz original es de tamaño $m \times n$, entonces la transpuesta es de tamaño $n \times m$. Hay ocasiones que al transponer una matriz, se obtiene la misma matriz, y en estos casos se le llama **simétrica**.

En aquellos casos en que una matriz tenga el mismo número de renglones que de columnas se le llama **cuadrada** y en este caso es posible calcular las potencias de una matriz.

Los teoremas 1 y 2 son importantes pues determinan propiedades de la multiplicación y la suma de matrices. El teorema 3 incluye las propiedades de la transpuesta.

En esta sección también se definen operaciones sobre matrices **boolenas**, compuestas únicamente de ceros y unos. En este caso, se definen tres operaciones: la primera denotada por $\vee$ se obtiene al comparar los elementos homólogos y es cero únicamente cuando ambos elementos son cero; la segunda, denotada por $\wedge$, coloca un uno solo si ambas posiciones son uno y cero en los otros casos. En ambas operaciones, se obtienen matrices del mismo tamaño que las matrices operadas. La tercera operación, en forma semejante a la multiplicación de matrices, compara cada elemento del renglón i con su homólogo de la columna j y el resultado del elemento ij es cero si no existe alguna coincidencia de unos en la misma posición.

El teorema 4 nos da las propiedades que cumplen estas operaciones.

Ejemplos resueltos

1. Sea $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Encuentre:

   (a) El tamaño de C

   (b) La diagonal principal de C

   (c) c_{13} y c_{31}.

   Solución:

   (a) C tiene 3 renglones y 3 columnas, por eso es de tamaño 3×3.

   (b) La diagonal principal está compuesta por los elementos $\{c_{11}, c_{22}, c_{33}\}$. En este caso: $\{2, 6, 8\}$.

(c) c_{13} es el elemento en el primer renglón y en la tercera columna, eso es $c_{13} = 4$. De la misma forma $c_{31} = 2$, el número en la posición simétrica.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule, si es posible:

   (a) AB.

   (b) $BA + C$.

   (c) $(A + B^T)C$.

   (d) $AC + BC$.

Solución:

(a) Primero verificamos que exista. A es 2×3 y B es 3×2, por lo tanto la matriz AB existe y es de tamaño 2×2: $AB = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $BA + C$ existe, pues BA es 3×3 y C es 3×3. $BA = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & -1 \\ 16 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ y

$BA + C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 14 & 5 & 4 \\ 19 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) Primero $A + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ y como es de 2×3, se puede multiplicar por C. Así

$$(A + B^T)C = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 26 \\ 20 & -3 & 32 \end{bmatrix}$$

(d) No es posible calcularlo pues, aunque AC se pueda calcular, BC no existe.

3. Sea A una matriz $n \times n$:

   (a) Demuestre que AA^T y A^TA son matrices simétricas.

   (b) Demuestre que $A + A^T$ es simétrica.

Solución:
Demostración: Para probar que una matriz B es simétrica, debe demostrarse que el elemento b_{ij} es igual al elemento b_{ji}, o bien probar directamente que $B^T = B$. Las dos formas son equivalentes entre sí.

(a) 1ª forma: Sea $B = AA^T$, entonces el elemento b_{ij} se obtiene de multiplicar y sumar los elementos del renglón i de A con la columna j de A^T, pero esta columna es la misma que el renglón j de A. De igual forma, el renglón i de A es la columna i de A^T, así que es lo mismo que multiplicar y sumar los elementos del renglón j de A con la columna i de A^T, esto es b_{ji}.
2ª forma: Sea $B = AA^T$, entonces, $B^T = (AA^T)^T = (A^T)^T A^T$, esto por el teorema 3(c) página 34. Por el teorema 3(a) $(A^T)^T A^T = AA^T = B$. Con esto se prueba $B = B^T$. La otra parte del ejemplo es análoga.

(b) 1ª forma: Sea $B = A + A^T$, entonces b_{ij} se obtiene de sumar los elementos a_{ij} y a^T_{ij} pero el elemento $a^T_{ij} = a_{ji}$ y $a_{ij} = a^T_{ji}$ de manera que

$$b_{ij} = a_{ij} + a^T_{ij} = a^T_{ij} + a_{ji} = b_{ji}$$

2ª forma: Sea $B = A + A^T$, entonces $B^T = (A + A^T)^T = A^T + A$ por el teorema 3(b) y 3(c) y, por la conmutatividad de la suma de matrices (teorema 1(a)) se tiene que $B^T = B$.

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) $A \vee B$

(b) $A \wedge B$

(c) $A \odot B$

Solución: Para cada ejemplo sea C la matriz resultado con entradas c_{11}, c_{12}, c_{21} y c_{22}

(a) $C = A \vee B$. Tenga presente que la entrada $c_{ij} = 0$ cuando a_{ij} y b_{ij} son simultáneamente cero. Por esto, $c_{ij} = 1$ en los cuatro casos. Así, $A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $C = A \wedge B$. Ahora $c_{ij} = 1$ solo cuando a_{ij} y b_{ij} son iguales a 1. Esto ocurre solo para c_{21}. Por eso, $A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $C = A \odot B$. En este cálculo es más delicado y se hará paso a paso. Para c_{11} se observa la fila 1 de A y la columna 1 de B, se revisa si existe coincidencia de unos en la misma posición; en este caso, la segunda posición de estas partes son iguales a 1. Por lo que $c_{11} = 1$. Continuamos con c_{12}, en la fila 1 de A, el segundo elemento es un 1, al igual que el segundo elemento de la segunda columna de B, entonces $c_{12} = 1$. Para c_{21} y c_{22} no hay coincidencia pues el 1 está en la primera posición en la fila 2 de A, mientras que en la primera posición de ambas columnas de B hay 0. Por lo tanto, $A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Demuestre que $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
Solución:
Demostración: Sean $D = B \wedge C$, $E = A \vee B$, $F = A \vee C$, $G = A \vee D$ y $H = E \wedge F$. Así hay que probar que $G = H$. Se va a probar que si el elemento $g_{ij} = 1$, entonces $h_{ij} = 1$ o si $g_{ij} = 0$, entonces $h_{ij} = 0$ también.
Caso 1. Supongamos que $g_{ij} = 1$, entonces se debe cumplir que $a_{ij} = 1$ o $d_{ij} = 1$, para que $d_{ij} = 1$ se debe tener que $b_{ij} = 1$ y $c_{ij} = 1$, entonces se tiene que o bien ($a_{ij} = 1$ y $b_{ij} = 1$) o ($a_{ij} = 1$ y $c_{ij} = 1$), por lo que $e_{ij} = 1$ y $f_{ij} = 1$, entonces $h_{ij} = 1$.
Caso 2. Ahora supongamos que $g_{ij} = 0$, entonces $a_{ij} = 0$ y se cumple que $b_{ij} = 0$ o $c_{ij} = 0$. Si se tiene que $b_{ij} = 0$, entonces $e_{ij} = 0$ y por lo tanto $h_{ij} = 0$; por otro lado, si $c_{ij} = 0$ entonces $f_{ij} = 0$ y por lo tanto $h_{ij} = 0$ también.
En cualquiera de las posibilidades se cumple que $g_{ij} = h_{ij}$. Por esto $G = H$.

Ejercicios recomendados: de la página 37 a la 39, del 1 al 28.

1.6 Estructuras matemáticas

No se evalúa.

Examen de autoevaluación

A continuación, usted encontrará 5 ejercicios de selección única. Marque con una X la letra de la opción escogida.

1. La sucesión $3, 8, 13, 18, \ldots$ está descrita por la fórmula:

(a) ( ) $a_n = 5n - 3$ (b) ( ) $a_n = 5n - 2$
(c) ( ) $a_n = 5a_{n-1} + 3$, $a_1 = 3$ (d) ( ) $a_n = a_{n-1} + 5$, $a_1 = -2$

2. El MCD$(1\,365, 2\,475)$ es

(a) ( ) 3 (b) ( ) 5 (c) ( ) 15 (d) ( ) 75

3. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considere las afirmaciones: $3 \boxed{} A$ y $\{3, 5, 7\} \boxed{} A$, donde $\boxed{}$ sustituye a cualquiera de los símbolos: $\in$, $\notin$, $\subseteq$ y $\nsubseteq$. Entonces para que las afirmaciones sean verdaderas, $\boxed{}$ deben ser en forma correspondiente:

(a) ( ) $\in$ y $\subseteq$ (b) ( ) $\notin$ y $\subseteq$ (c) ( ) $\notin$ y $\subseteq$ (d) ( ) $\in$ y $\nsubseteq$

4. El conjunto $\{x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 < 17\}$ también se puede representar como

(a) ( ) $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4\}$ (b) ( )$\{0, 1, 2, 3, 4\}$
(c) ( ) $]-\sqrt{17}, \sqrt{17}[$ (d) ( ) $[0, \sqrt{17}[$

5. Si A es 3×4, B es 4×2 y C es 4×3 entonces el tamaño de la matriz ACB es

(a) ( ) 3×4 (b) ( ) no está definida
(c) ( ) 4×2 (d) ( ) 3×2

EJERCICIO 1. Usando diagramas de Venn, analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones: Recuerde que $A \oplus B := (A - B) \cup (B - A)$.

1. $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$
2. $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$

EJERCICIO 2. Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal U. Demuestre que:
$A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

EJERCICIO 3. Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal U. Usando funciones características muestre que: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

EJERCICIO 4. Pruebe que si p es primo y $p \mid (ab)$ entonces $p \mid a$ o $p \mid b$.

EJERCICIO 5. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule: $A \wedge B$ y $A \odot B$

Capítulo 2. Lógica

En este capítulo se estudian los elementos de la lógica de las proposiciones y los métodos de demostración. Esto será muy útil para determinar si un argumento es válido, o no.

2.1 Proposiciones y operaciones lógicas

En esta sección se trabaja con proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas. Las variables propositivas que usaremos pueden ser proposiciones indivisibles (atómicas) o compuestas.

Es usual denotar a una proposición por medio de letras minúsculas tales como p, q, etc. Si la proposición depende de alguna condición que posee una variable x, se suele denotar $P(x)$ o $p(x)$. Por ejemplo: $P(x)$: x es un número primo, entonces $P(2)$ es verdadera mientras que $P(6)$ es falsa.

Las proposiciones p y q pueden estar relacionadas por medio del conectivo "y" simbolizado por $\wedge$, de manera que al formar la proposición $p \wedge q$ le llamamos **conjunción** de p y q; o por el conectivo "o" simbolizado por $\vee$; así al formar la proposición $p \vee q$ se tiene la **disyunción** de p y q.

La validez o falsedad –llamado también valor de verdad– de la conjunción o de la disyunción dependerá del valor de verdad de p y q, aunque podemos resumir que:

- $p \wedge q$ es verdadero[4] solo cuando las dos proposiciones son verdaderas.
- $p \vee q$ es falso solo cuando ambas proposiciones son falsas.

[4]Quizá, haya notado que las tablas de verdad en el libro utilizan las letras T y F para denotar "verdadero" y "falso" respectivamente. Esto se mantendrá en esta guía para no causar confusión.

Usted debe aprender las tablas de verdad de estos conectivos.

Además, con una proposición p se puede formar la proposición $\sim p$ llamada **negación** de p, en algunos libros, se utiliza también $\neg$, cuyo valor de verdad es opuesto al valor de verdad de p.

Además de los conectivos, se introducen los cuantificadores, el cuantificador universal "para todo" cuyo símbolo es $\forall$ y el cuantificador existencial "existe al menos un" y el símbolo es $\exists$. Observe que uno es la negación del otro. Si se quiere negar que una propiedad es verdadera *para todos* los valores de x, entonces decimos que *existe al menos un* valor de x donde la proposición es falsa. En consecuencia, si se niega que *exista un* x donde la proposición es verdadera, es porque *para todo* valor de x la proposición es falsa. Este es el caso de la proposición "todos los días del año, llueve en San Carlos", pues si un día no llueve, la afirmación es falsa. Otro ejemplo en este sentido es, "existe una provincia de Costa Rica al norte del río San Juan", que se niega diciendo, "todas las provincias de Costa Rica no están al norte del río San Juan".

Ejemplos resueltos

1. Considere las proposiciones p: hoy es lunes, q: el césped está mojado. Usando conectivos escriba las proposiciones:

   (a) Hoy es lunes y el césped está seco.

   (b) El césped está mojado u hoy no es lunes.

   Solución:

   (a) $p \wedge \sim q$

   (b) $\sim p \vee q$

2. Sea $P(x)$: x es par; $Q(x)$: x es un número primo, la variable x representa un número entero. Escriba una oración que corresponda a cada una de las siguientes proposiciones y determine su valor de verdad:

   (a) $\forall x \sim P(x)$

   (b) $\exists\, x\, Q(x)$

   Solución:

   (a) Para todo número entero se cumple que no es par. (Falso)

(b) Existe al menos un entero que es un número primo. (Verdadero)

3. Haga una tabla de verdad para la proposición $(\sim p \vee q) \wedge \sim r$.
Solución: Dado que tenemos 3 proposiciones se debe formar una tabla con 8 renglones, esto por cuanto cada proposición puede ser verdadera o falsa.

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$\sim p \vee q$	$(\sim p \vee q) \wedge \sim r$
T	T	T	F	F	T	F
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	F
F	F	F	T	T	T	T

Ejercicios recomendados: de las páginas 51 y 52, del 1 al 20.

2.2 Proposiciones condicionales

Las proposiciones condicionales o **implicaciones** las podemos identificar pues siempre las podemos escribir: Si p entonces q. A la proposición p se le llama hipótesis o antecedente y a la proposición q tesis o consecuente. Debe notarse que $p \to q$ es falsa solo cuando p es verdadera y q es falsa. Algunas veces esto puede confundirnos, pero es posible que de una hipótesis falsa se pueda concluir una verdad, mientras que es imposible que una proposición falsa sea una consecuencia de una hipótesis verdadera, al menos en la lógica.

A partir de una implicación $p \to q$ siempre podemos conseguir dos proposiciones ligadas a esta, una llamada la contrapositiva $\sim q \to \sim p$ y la recíproca $q \to p$. Es importante indicar que la contrapositiva es equivalente a la implicación original, esto es, no puede ser una verdadera y la otra falsa: o son ambas verdaderas o ambas falsas simultáneamente. Mientras que la recíproca puede ser falsa aunque la original sea verdadera.

Otro conectivo que se introduce en esta sección es "si y solo si" simbolizado con $\leftrightarrow$ y significa que $p \leftrightarrow q$ sucede cuando $p \to q$ y $q \to p$ son ambas verdaderas; esto se cumple cuando ambas son verdaderas o bien falsas. En este caso decimos que la proposición $p \leftrightarrow q$, y escribimos $p \equiv q$, es una tautología.

Una proposición también puede ser una falacia (o contradicción), o una contingencia, tal y como lo explica el texto en la página 54. Brevemente podemos decir que una contingencia sucede cuando en algún valor de las variables se tiene que la proposición es verdadera y en otras falsa.

Lo importante de $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ es que la mayoría de los teoremas están enunciados de alguna de estas dos formas.

Note que en la tabla 2.8 de la página 55 hay un error, pues la última columna debe estar encabezada por $\sim p \vee q$ y no por $\vee q$.

El teorema 1 de la página 55 indica todas las propiedades de las proposiciones, con especial atención note las propiedades 5, 6, 10 y 11; estas dos últimas, llamadas leyes de De Morgan, indican cómo se debe negar una conjunción o una disyunción.

El teorema 2 de la página 56 indica las propiedades de la implicación. Aunque todas son importantes, las dos más útiles son la (a) y la (b).

El teorema 4 de la página 57, será sumamente útil para la siguiente sección; de hecho en algunos casos a estas propiedades se le llama **reglas de inferencia** o de deducción. Atención a las propiedades (a), (c), (g) y (j), pues las otras se deducen en forma sencilla de estas y de los teoremas anteriores. Por ejemplo: la proposición (i) dice $\sim q \wedge (p \rightarrow q) \equiv \sim (q \vee \sim (p \rightarrow q))$ esto al utilizar teorema 1(10). Luego $\sim (q \vee \sim (p \rightarrow q)) \equiv \sim (\sim q \rightarrow (p \wedge \sim q))$, debe aplicase el teorema 2(a). Ahora, $\sim (\sim q \rightarrow (p \wedge \sim q)) \rightarrow \sim p$ conclusión que surge al usar el teorema 4(g) dentro del segundo paréntesis.

Ejemplos resueltos

1. Escriba la proposición recíproca y la contrapositiva de "Si ya se me hizo tarde entonces no tomé el tren para mi trabajo".
   Solución: Sea p: se me hizo tarde y q: tomé el tren para mi trabajo. Con estas proposiciones la implicación original es $p \rightarrow \sim q$. La recíproca $\sim q \rightarrow p$ y dice "Si no tomé el tren para mi trabajo entonces se me hizo tarde"; la proposición contrapositiva es $q \rightarrow \sim p$ que dice y significa "Si tomé el tren para mi trabajo entonces no se me hizo tarde".

2. Construya una tabla de verdad para ver si $q \vee (\sim q \wedge p)$ es una tautología, una contingencia o una falacia.
   Solución:

p	q	$\sim q$	$(\sim q \wedge p)$	$q \vee (\sim q \wedge p)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	F

Es una contingencia.

3. Si $p \to q$ es falsa, ¿se puede determinar el valor de verdad de $(\sim(p \wedge q)) \to q$?
Solución: Como $p \to q$ es falsa, se tiene que p es verdadera y q es falsa, así $p \wedge q$ es falsa, por lo que $(\sim(p \wedge q))$ es verdadera. Entonces, $(\sim(p \wedge q)) \to q$ es falsa, pues algo verdadero no puede implicar algo falso.

4. Demuestre que $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ es una tautología.
Solución: La idea no es hacerlo utilizando tablas de verdad, aunque este método siempre va a funcionar en pruebas de tautología. Veamos cómo hacerlo sin tablas de verdad.
$$(p \to q) \wedge (q \to r) \equiv (p \to q) \wedge (\sim q \vee r)$$
esto usando el Teorema 2(a) para la parte $(q \to r)$. Luego usando el Teorema 1(6) se tiene que
$$(p \to q) \wedge (\sim q \vee r) \equiv [(p \to q) \wedge \sim q] \vee [(p \to q) \wedge r]$$
del primer paréntesis cuadrado se implica, utilizando el Teorema 4(i), $\sim p$, y del segundo paréntesis, implicamos r, al usar el Teorema 4(b); por lo tanto
$$[(p \to q) \wedge \sim q] \vee [(p \to q) \wedge r] \to (\sim p \vee r) \equiv (p \to r)$$

Ejercicios recomendados: de las páginas 57 y 58, del 1 al 20.

2.3 Métodos de demostración

Aunque ya se han demostrado algunos resultados, esta sección provee de las herramientas para determinar la validez de un razonamiento; de esta forma, podemos determinar si una deducción es válida, o no. Cuando tenemos una lista de proposiciones asumimos que todas son verdaderas y se quiere demostrar que la implicación dada siempre es válida, esto es, se tiene una tautología. Esto lo haremos con las reglas de inferencia indicadas en el teorema 4 de la página 57. Como bien lo indica el texto, esto será independiente de si la conclusión es falsa, pues aquí lo que se analiza es la validez de la deducción.

Podemos anotar que utilizamos el método directo (*modus ponens*) cuando el argumento se puede encasillar en la forma del teorema 4(g); usamos el método indirecto, al utilizar la equivalencia con la contrapositiva y la demostración por contradicción cuando usamos un argumento de la forma del teorema 4(i).

Por último, note que al dar un contraejemplo, lo que decimos es que el razonamiento no es válido o la proposición no es siempre verdadera, por lo que un contraejemplo demuestra que existen casos en los que la afirmación es falsa, aunque puedan existir ejemplos donde la afirmación sea verdadera.

Ejemplos resueltos

1. Establezca si el razonamiento es válido o no. En el caso de que sea válido, identifique las tautologías en las que se basa:
   Si voy en auto a mi trabajo entonces llegaré cansado.
   Yo llego cansado a mi trabajo.
   $\therefore$ Yo voy en auto a mi trabajo.
   Solución: Si se llama p: Voy en auto a mi trabajo, q: llego cansado. El argumento se escribe $((p \to q) \land q) \to p$, no es un argumento válido pues dado que q es verdadera no es posible deducir que p lo sea.

2. Demuestre que n^2 es par si y solo si n es par.
   Solución: Se definen las siguientes proposiciones, p: n^2 es par y $q : n$ es par. El ejemplo está escrito en la forma $p \leftrightarrow q$, esto es equivalente a $(p \to q) \land (q \to p)$. Analicemos cada una por aparte. $(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$ que traducido diría que: "Si n no es par entonces n^2 no es par", o bien "Si n es impar entonces n^2 es impar", así que si $n = 2k + 1$, que es la forma de cualquier número impar, entonces

   $$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1$$

   Con lo que probamos que n^2 es un número impar. Por otra parte la implicación $(q \to p)$ se traduce a "si n es par entonces n^2 es par" casi es evidente pues si $n = 2k$ entonces $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ por lo que es cierto.

3. Demuestre o refute que $\forall x : x^3 > x^2$.
   Solución: La proposición es $P(x)$: $x^3 > x^2 \equiv x^3 - x^2 > 0 \equiv x^2(x-1) > 0$ y como $x - 1$ puede ser positivo, negativo o cero se tiene que la propiedad no se da, basta con tomar algún número tal que $x - 1 < 0$ por ejemplo $x = -2$, en este caso $(-2)^3 \not> (-2)^2$. De esta forma se refuta la propiedad.

Ejercicios recomendados: de las páginas 63 y 64, del 1 al 20.

2.4 Inducción matemática

Este es un método de demostración que se utiliza cuando se quiere demostrar que una propiedad es válida para todos o casi todos los números naturales y los otros métodos no proveen una demostración más sencilla. El método completa la demostración por medio de dos pasos:

En el *Paso base* verificamos que la propiedad es válida para al menos el primero de los naturales que la satisface.

En el *Paso de inducción*, se asegura, como ley, que la propiedad es válida (o verdadera) para n (llamada *hipótesis de inducción*) y con esto de demuestra que la proposición es válida para $(n+1)$.

Una forma de ilustrar este principio es utilizando las fichas del juego de dominó, si previamente se han colocado de forma que al caer una, ésta hace caer la siguiente; entonces basta con asegurarse que cae la primera, pues esto asegura que todas las fichas van a caer. Esto se llama "efecto dominó" y es lo que hacemos al hacer nuestra prueba por inducción.

Ejemplos resueltos

1. Demuestre que $1+5+9+\ldots+(4n-3)=n(2n-1)$
   Solución: Sea $P(n)$: $1+5+9+\ldots+(4n-3)=n(2n-1)$, $P(n)$ es verdadera si la igualdad se verifica para n y falsa y la igualdad no se da.
   Paso base. $P(1)$ es verdadera, pues se verifica evidentemente que $1=1(2\cdot 1-1)$.
   Paso de inducción. Si asumimos que $P(n)$ es verdadera hay que probar que $P(n+1)$ es verdadera. La proposición $P(n+1)$ dice que se verifica la igualdad:

   $$1+5+9+\ldots+(4n-3)+(4(n+1)-3)=(n+1)(2(n+1)-1)$$

   O lo que es lo mismo

   $$1+5+9+\ldots+(4n-3)+(4n+1)=(n+1)(2n+1)$$

   Veamos si es cierta esta igualdad:

   $$\begin{aligned}1+5+9+\ldots+(4n-3)+(4n+1)&=[1+5+9+\ldots+(4n-3)]+(4n+1)\\&=n(2n-1)+(4n+1)\end{aligned}$$

En el lado derecho de la primera igualdad, la expresión colocada entre paréntesis cuadrado corresponde al lado izquierdo de $P(n)$ y como se sabe que $P(n)$ es verdadero, en la siguiente igualdad se sustituye esta expresión por el lado derecho de $P(n)$. Si desarrollamos $n(2n-1)+(4n+1) = 2n^2-n+4n+1 = 2n^2+3n+1$ y como la respuesta está factorizada, encontramos que la factorización de $2n^2+3n+1$ es

$$2n^2 + 3n + 1 = (n + 1)(2n + 1)$$

y eso demuestra que la propiedad sigue siendo válida para $(n + 1)$.

2. Demuestre que $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}, a \neq 1$

   Solución: Sea $P(n)$: $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$

   Paso base. $P(1)$ es verdadera. $P(1)$ equivale a $1 = \frac{a^1-1}{a-1}$ lo cual, como se verifica, indica que $P(1)$ es verdadera.

   Paso de inducción. Si asumimos que $P(n)$ es verdadera hay que probar que $P(n + 1)$ es verdadera. La proposición $P(n + 1)$ dice:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{(n+1)-1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

   Para analizar la validez de esta igualdad, tomaremos el lado izquierdo y lo simplificaremos usando la hipótesis de inducción, esto es $P(n)$ es verdadera.

$$\begin{aligned} 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} + a^n &= (1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1}) + a^n \\ &= \frac{a^n - 1}{a - 1} + a^n \\ &= \frac{a^n - 1 + a^{n+1} - a^n}{a - 1} \\ &= \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

   Por lo que queda demostrado que la propiedad es válida.

3. Demostrar que $n < 2^n$ para $n \geq 2$.

   Solución: Sea $P(n)$: $n < 2^n$

   Paso base. $P(2)$ es verdadera. $P(2)$ dice que $2 < 2^2 = 4$, lo cual es cierto.

   Paso de inducción. Asumamos que $P(n)$ es verdadera, esto significa que $n < 2^n$; hay que probar que $P(n+1)$ es verdadera. La proposición $P(n+1)$ dice: $n+1 < 2^{n+1}$. Partamos de la desigualdad que ya sabemos $n < 2^n$; así, al sumar uno en ambos lados se obtiene la desigualdad válida $n+1 < 2^n + 1$. Luego como $n > 1$, entonces $2^n + 1 < 2^n + n$ y volviendo a usar que $n < 2^n$, se obtiene

$$2^n + n < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Uniendo las desigualdades

$$(n+1) < 2^n + 1 < 2^n + n < 2^{n+1}$$

se concluye $(n+1) < 2^{n+1}$.

Ejercicios recomendados: de las páginas 68 y 69, de 1 al 12.

Examen de autoevaluación

A continuación, usted encontrará 5 ejercicios de selección única. Marque con una X la letra de la opción escogida.

6. Considere las proposiciones $p(n)$: $n > 5$ y $q(n)$: $n < 10$, con n un número entero, la frase "todos los enteros mayores que 5 son menores que 10" se expresa como una proposición con la expresión

(a) ( ) $\forall n$: $q(n) \rightarrow p(n)$
(b) ( ) $\exists n$: $p(n) \rightarrow q(n)$
(c) ( ) $\forall n$: $p(n) \rightarrow q(n)$
(d) ( ) $\forall n$: $p(n) \vee q(n)$

7. Considere las proposiciones p y q, la disyunción de p y q corresponde a

(a) ( ) $p \rightarrow q$ (b) ( ) $p \wedge q$ (c) ( ) $p \vee q$ (d) ( ) $p \leftrightarrow q$

8. La proposición recíproca de $p \rightarrow \sim q$ es equivalente a

(a) ( ) $\sim p \rightarrow q$ (b) ( ) $p \vee q$ (c) ( ) $\sim p \vee q$ (d) ( ) $p \vee \sim q$

9. La proposición contrapositiva de $\sim p \rightarrow \sim q$ es equivalente a

(a) ( ) $p \vee \sim q$ (b) ( ) $p \vee q$ (c) ( ) $\sim p \vee q$ (d) ( ) $\sim p \vee \sim q$

10. La proposición de $\sim q \wedge (p \to q)$ implica directamente

(a) ( ) p (b) ( ) $p \wedge q$ (c) ( ) $\sim p \wedge q$ (d) ( ) $\sim p$

EJERCICIO 6. Verifique, por medio de la construcción de una tabla de verdad, que la proposición compuesta $[p \wedge (p \to q)] \to q$ es una tautología.

EJERCICIO 7. Verifique la validez del siguiente razonamiento:
Me volveré famoso o seré escritor.
No seré escritor.
$\therefore$ Me volveré famoso.

EJERCICIO 8. Demuestre, por inducción, que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1) \cdot n < \dfrac{n^2(n+1)}{3}$ para todo $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$.

EJERCICIO 9. Si $n > 1$, $x > -1$ y $x \neq 0$, pruebe que, $(1+x)^n > 1 + nx$. Use inducción matemática.

EJERCICIO 10. Demuestre que si x es racional y y es irracional, entonces $x + y$ es irracional.

Capítulo 3. Conteo

En este capítulo se brindan las herramientas necesarias para contar en forma sistemática y organizada. El arte de contar consiste en no hacerlo de uno en uno, sino en usar técnicas que permitan encontrar la respuesta con un solo cálculo breve. Así, este capítulo resulta muy importante para una adecuada forma de conteo.

3.1 Permutaciones

En este libro se utilizará el término permutaciones en dos sentidos. El primero es el que vemos en esta sección, y que corresponde al número de arreglos de k elementos diferentes que podemos hacer de un conjunto de n. El segundo se verá más adelante como una función de un conjunto de n elementos en sí misma. Por ahora, con este primer sentido, cada arreglo es como si tomáramos k elementos de un conjunto de n uno por uno, de manera que registramos el objeto elegido y su posición; en otras palabras, importa el orden de aparición. Es posible que en su calculadora aparezca la tecla $\boxed{{}_nP_r}$ que hace este cálculo automáticamente.

Los teoremas 1, 2 y 3 de la sección 3.1, permiten contar el número de veces que se puede realizar una actividad o trabajo si ésta se puede separar en labores elementales más simples compuestos de diferente número de posibilidades. El teorema 1, aunque es el más sencillo, fundamenta los siguientes, los cuales pueden ser vistos como corolarios[5] de éste. Por ejemplo, el teorema 3 se puede ver como el 2 cuando cada actividad tiene n posibilidades, por lo que al tener r casillas, hay n^r arreglos diferentes.

El teorema 5 nos da la regla a seguir cuando hay elementos repetidos y queremos contar el número de secuencias que podemos distinguir cuando hay repeticiones. En el ejemplo 5 de la página 87 dice "... el evento de que el número que aparezca sea par es ... debe agregarse "... un número par **y primo** es ...".

[5] Un corolario es una conclusión (o resultado) que se deduce de un teorema.

Ejemplos resueltos

1. Se lanza una moneda al aire cuatro veces y se registra el resultado de cada lanzamiento. ¿Cuántas secuencias diferentes de escudo y corona son posibles?
   Solución: Sea E si la moneda registró escudo y C si fue corona. Note que en este ejemplo el orden es importante, por lo que es diferente la secuencia $CCCE$ a $CECC$ aunque ambas registren la misma cantidad de escudos y coronas. Entonces, para saber las secuencias posibles, notamos que cada lanzamiento es independiente del anterior y que en cada lanzamiento hay dos posibilidades. Estamos ante un ejemplo donde interesa el orden y se ajusta a la situación del teorema 3, por lo que la respuesta es $2^4 = 16$. Si pensamos que los resultados los registramos en una casilla entonces vemos cómo este ejemplo se ajusta al problema 1.

2. Determine de cuántas maneras pueden seis hombres y seis mujeres sentarse en línea si

   (a) cualquier persona puede sentarse enseguida de cualquier otra.

   (b) los hombres y las mujeres deben ocupar asientos alternados.

   Solución:

   (a) Como no es preciso considerar algún orden particular, entonces, vemos al grupo de personas como uno solo, en este caso compuesto por 12 miembros, por lo que cada orden se puede pensar en un arreglo de 12 casillas. De esta forma la respuesta es ${}_{12}P_{12} = 12! = 479\,001\,600$.

   (b) En este ejemplo la tarea se puede ver como

   T1 Escoja cuál de los dos sexos va en la primera silla.

   T2 Ordene a las mujeres de silla de por medio.

   T3 Ordene a los hombres en los campos restantes.

   Ajustamos la situación a las hipótesis del teorema 2. Para la tarea **T1**, se tienen dos posibilidades. Por esto, basta ver de cuántas formas diferentes se pueden acomodar 6 mujeres en 6 asientos. Este problema es equivalente a calcular cuál es la cantidad de formas de acomodar a los hombres en sus asientos. El número es $6! = 720$, por lo que hay un total de $2(6!)^2 = 1\,036\,800$ formas.

3. Actualmente, los códigos de área telefónicos son de tres dígitos pero el dígito intermedio debe ser 0 ó 1, por ejemplo, el código de área de Costa Rica es 506. Si el código tiene sus últimos dos dígitos iguales a 1 o iguales a 0, se utiliza para otros fines, por ejemplo 911 o bien 800. Con estas condiciones, ¿cuántos códigos de área están disponibles?

Solución: Podemos pensar en este problema como el acomodo de los números en tres casillas. Para la primera casilla, se puede escoger cualquier número de 0 al 9, para la segunda casilla, solo dos posibilidades y para la última casilla, cualquier dígito. En total, $10 \cdot 2 \cdot 10 = 200$, pero en este conteo se incluyen todas las que sean $x11$ y $y00$ que suman 20, así que quedan disponibles 180.

Ejercicios recomendados: de la página 77, del 1 al 20.

3.2 Combinaciones

Las combinaciones, a diferencia de las permutaciones, permiten contar el número de grupos, y no interesa el orden en que se escojan; por esto, podemos pensar que se escogen de una sola vez, como cuando sacamos 2 bolas de una caja, una en cada mano. De nuevo, aparece una fórmula que es posible que esté programada en su calculadora. Revise si la suya cuenta con la tecla $\boxed{{}_nC_r}$.

Esta sección solo cuenta con el teorema 1, que brinda la fórmula para calcular ${}_nC_r$.

Ejemplos resueltos

1. ¿De cuantas maneras puede seleccionarse un comité compuesto de cinco personas, tres profesores y dos estudiantes si se cuenta con siete profesores y ocho estudiantes?
   Solución: La clave para estos problemas es notar que en la escogencia no importa el orden. Así, el problema se puede reducir a dos tareas.

   T1 Escoger a los tres profesores de un conjunto de siete. En este caso ${}_7C_3$ que se calcula $\dfrac{7!}{3! \cdot 4!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

   T2 Escoger a los dos estudiantes de un total de ocho. En este caso ${}_8C_2 = 28$

   Con estos dos cálculos el total de comités que se pueden formar es $35 \cdot 28 = 980$.

2. El menú en el comedor de un colegio permite a los estudiantes escoger 3 tipos de fruta diferente de un total de 5 tipos. ¿Cuántos días seguidos puede un estudiante hacer una selección diferente de fruta?
   Solución: De nuevo, en este problema lo importante es que la elección se hace de una sola vez, por esto la respuesta es ${}_5C_3 = 10$.

3. Se lanzan n dados y se anotan los números que aparecen en las caras superiores. Determine:

   (a) ¿Cuántas secuencias diferentes de registro son posibles?

   (b) ¿Cuántos arreglos contienen exactamente un 6?

   (c) Para $n \geq 4$, ¿cuántas secuencias contienen exactamente cuatro números 2?

   Solución:

   (a) Hay 6^n secuencias posibles.

   (b) Primero escogemos el dado que va a tener el 6, en este caso son n posibilidades. Luego, el resto de los dados no pueden sacar un 6 por lo que hay 5^{n-1} posibilidades. En total, $n \cdot 5^{n-1}$.

   (c) Como en el caso anterior, primero escogemos los dados que van a tener el número 2 en su cara superior; en total tenemos ${}_nC_4$ posibilidades para escoger los dados. Luego el resto de dados no pueden tener un 2, por lo que hay 5^{n-4} posibilidades. En total ${}_nC_4 \cdot 5^{n-4}$.

Ejercicios recomendados: de las páginas 81 y 82, del 1 al 20.

3.3 Principio de las casillas

Este principio es llamado también principio del palomar. El teorema 1 establece un hecho que parece elemental pero que es un argumento muy fuerte para demostrar. Podemos pensar en este principio como está enunciado en la página 84: "Si se asignan n objetos a m casillas, cada casilla tendrá $\left\lfloor \dfrac{(n-1)}{m} \right\rfloor + 1$ objetos" donde $\left\lfloor \dfrac{(n-1)}{m} \right\rfloor$ es el mayor entero menor que $\dfrac{(n-1)}{m}$. Por ejemplo, si $n = 8$ y $m = 3$ la expresión anterior es $\dfrac{(n-1)}{m} = \dfrac{7}{3} = 2{,}333\ldots$, por lo que $\left\lfloor \dfrac{(n-1)}{m} \right\rfloor = 2$.

Ejemplos resueltos

1. Demuestre que si se utilizan siete colores para pintar 50 bicicletas, por lo menos ocho bicicletas tendrán el mismo color.

Solución: Aplicación directa del principio de las casillas con $n = 50$, $m = 7$ entonces, habrá al menos $\lfloor \frac{49}{7} \rfloor + 1 = 8$ bicicletas con un mismo color.

2. Demuestre que debe haber por lo menos 91 maneras de escoger seis números del 1 al 15, de modo que todas las selecciones al sumarse den el mismo resultado.
   Solución: Los posibles resultados van desde la menor suma posible hasta la suma máxima. La menor suma se determina utilizando los números más pequeños de la lista: $1 + 2 + 3 + \ldots + 6 = 21$ y la máxima suma, al utilizar los valores más grandes: $10 + 11 + \ldots + 14 + 15 = 75$ de manera que hay $(75 - 21) + 1 = 55$ resultados posibles. Luego, hay ${}_{15}C_6 = 5\,005$ formas de escoger seis números de 15 posibles. Entonces, hay por lo menos $\left\lfloor \frac{5004}{55} \right\rfloor + 1 = 91$ formas de seleccionar los números para obtener sumas con el mismo resultado.

3. Demuestre que si se escogen catorce números cualesquiera de 1 al 25, uno de ellos es múltiplo del otro.
   Solución: Formemos conjuntos de números de manera que para cualesquiera dos elementos en el mismo conjunto, uno es múltiplo del otro. El $\{1\}$ lo dejamos aislado pues si se escoge dentro de los 14 números se tiene la conclusión inmediatamente. Los números que no tienen múltiplos también estarán aislados $\{13\}$, $\{17\}$, $\{19\}$ y $\{23\}$ de manera que si queremos escoger números de forma que no se tengan múltiplos comunes, se deben escoger a estos. Ahora $\{2, 4, 8, 16\}$, $\{3, 6, 12, 24\}$, $\{5, 10, 20\}$, $\{7, 14\}$, $\{9, 18\}$, $\{11, 22\}$, $\{15\}$, $\{21\}$ y $\{25\}$, son los conjuntos que se pueden formar, de manera que eliminando el conjunto $\{1\}$, se tienen que escoger necesariamente dos números de un mismo conjunto.

Ejercicios recomendados: de la página 85, del 1 al 15.

3.4 Elementos de probabilidad

Esta sección contiene mucha información importante no elemental, por lo que se recomienda una lectura pausada subrayando definiciones y términos. Iniciamos con la definición de **espacio muestral**: es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Si consideramos cualquier subconjunto de este espacio muestral estamos ante un **evento**. Algunas veces, los eventos los describimos por medio de alguna cualidad de los elementos, otras veces solo se indican cuáles son los elementos del espacio muestral que pertenecen al evento. Por ejemplo, si se tira un dado y se anota el número de la cara superior se tiene que el espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y si el evento es que este número sea un número primo entonces $F = \{2, 3, 5\}$ será el evento. Un evento seguro para este experimento es, por ejemplo, que el número anotado sea menor que 10. Un evento imposible, por ejemplo, es que el número anotado sea negativo. Al igual que en conjuntos (sección 1.1–1.2) se tiene que al definir un evento F, en forma inmediata se define el evento complementario $\overline{F}$ que corresponde al complemento del conjunto F. Es claro que si estamos ante conjuntos finitos $|F| + |\overline{F}| = |E|$. Al usar las operaciones entre conjuntos definimos la unión de eventos o la intersección de eventos. Además, definimos que dos eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos si la intersección es vacía.

Para empezar a hablar de probabilidad, podemos pensar que si cada elemento individual del conjunto E tiene la misma posibilidad de suceder, entonces al conjunto unitario $\{x\}$ le asignamos una probabilidad de $\dfrac{1}{n}$. Un evento F tendrá la probabilidad igual a la suma de la probabilidad de sus elementos o bien $\dfrac{|F|}{n}$.

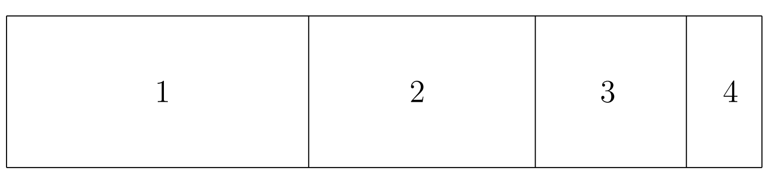
Tres son las propiedades que debe cumplir una asignación (o función) P de probabilidad:

P1 $0 \leq P(X) \leq 1$, para todo subconjunto X de E.

P2 $P(\varnothing) = 0$ y $P(E) = 1$.

P3 $P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2)$, si E_1 y E_2 son disjuntos.

Una confusión frecuente es la diferencia entre espacios equiprobables y no equiprobables; para notar una diferencia, le propongo que construya una cinta de papel de 10 cm de longitud con tres divisiones y los números del 1 al 4 marcados en ella, como en la figura[6]. El ancho de la cinta no será importante, así que tiene libertad de escoger el que desee.



El experimento consiste en lanzar al azar una tachuela hacia esta cinta y anotar el número de la zona en donde cayó. ¿Cuál probabilidad hay que asignar a cada zona, para que exista una correspondencia real entre lo que se observa frente a lo que se espera? Por ejemplo, espero

[6]Puede calcarla del dibujo.

que usted concuerde conmigo en que será más factible que la tachuela quede en la zona donde está el 1 que en la del 4. Ante un problema como este, la probabilidad debe asignar un número que corresponda a una situación ideal en donde al lanzar cualquier tachuela, ésta se ubique con el valor de la probabilidad asignada en la zona correspondiente. Para determinar este valor, se utiliza el área de cada zona, así la probabilidad para cada zona se obtiene de dividir el área de la zona indicada entre el área total. Mida con una regla y complete la siguiente tabla de probabilidad de los siguientes eventos: E_1 la tachuela cae en la zona del 1; E_2, la tachuela cae en la zona del 2; y así con E_3 y E_4.

Evento	E_1	E_2	E_3	E_4
Probabilidad				

Este será un ejemplo de eventos no equiprobables.

Ahora, si queremos que la probabilidad sea la misma para cada zona, ¿cómo se debe dividir la cinta para lograr esto?

Al encontrar la probabilidad de cada evento usted aclarará qué son eventos equiprobables.

Ejemplos resueltos

1. Describa el espacio muestral relacionado: Una urna de plata y otra de cobre contienen bolas azules, rojas y verdes. Se escoge al azar una urna y luego se toma una bola al azar de esa urna.
   Solución: Usemos las letras p para indicar que la urna escogida fue la de plata y c si es de cobre; utilicemos las letras a, r y v para indicar que la bola escogida tiene el color correspondiente a la primera letra. Así, el espacio muestral corresponde a
   $$\{(p,a),(p,r),(p,v),(c,a),(c,r),(c,v)\}$$

2. Un experimento consiste en lanzar un dado y registrar el número de la cara superior. Determine cada uno de los eventos siguientes
   (a) E: El número obtenido es por lo menos 4.
   (b) F: El número obtenido es menor que 3.
   (c) G: El número obtenido es divisible por 3 o es primo.

Solución: Note que el espacio muestral es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) $E = \{4, 5, 6\}$

(b) $F = \{1, 2\}$

(c) $G = \{2, 3, 5, 6\}$

3. Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestral de un experimento y sean $E = \{1, 3, 4, 5\}$, $F = \{2, 3\}$ y $G = \{4\}$ los eventos a considerar.

    (a) Calcule los eventos: $E \cup F$, $E \cap F$ y $\overline{F}$.

    (b) Calcule los eventos: $\overline{E} \cup F$, $\overline{F} \cap G$.

    Solución:

    (a) $E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E \cap F = \{3\}$ y $\overline{F} = \{1, 4, 5, 6\}$.

    (b) $\overline{E} \cup F = \{2, 3, 6\}$, $\overline{F} \cap G = \{4\}$.

4. Al lanzar cierto dado defectuoso los números de 1 al 6 aparecerán con la siguiente probabilidad:

i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{2}{18}$

    Determine la probabilidad de que:

    (a) Aparezca en la cara superior un número impar.

    (b) Aparezca en la cara superior un número primo.

    (c) Aparezca en la cara superior un número menor que 5.

    Solución:

    (a) Sea E: el evento "en la cara superior hay un número impar". Entonces el evento E es igual a $\{1, 3, 5\}$ y $P(E) = p_1 + p_3 + p_5 = \dfrac{11}{18}$.

    (b) Sea F: el evento "en la cara superior hay un número primo". Entonces el conjunto $F = \{2, 3, 5\}$ y $P(F) = p_2 + p_3 + p_5 = \dfrac{12}{18}$.

(c) Sea G: el evento "en la cara superior hay un número menor que cinco". Entonces $G = \{1, 2, 3, 4\}$, ahora para $P(G)$ es más simple calcular $P(\overline{G}) = \dfrac{6}{18}$, entonces $P(G) = 1 - P(\overline{G}) = \dfrac{12}{18}$.

5. Supóngase que se sacan 4 bolas al azar de una urna que contiene 8 bolas rojas y 6 bolas negras. Calcule la probabilidad de que:

   (a) tres bolas sean rojas.

   (b) por lo menos dos bolas sean negras.

   (c) cuando mucho dos bolas sean negras.

   Solución: Se tiene que el espacio muestral consta de ${}_{14}C_4 = 1\,001$ formas diferentes de sacar 4 bolas de la urna con 14 bolas. Si:

   (a) tres bolas son rojas, significa que una es negra. Entonces, tenemos ${}_8C_3 = 56$ formas de sacar tres bolas de las 8 posibles y ${}_6C_1 = 6$ posibilidades de sacar una bola negra. Así hay $56 \cdot 6 = 336$ formas de sacar tres bolas rojas y una negra. Por esto, tenemos una probabilidad de $\dfrac{336}{1\,001} \approx 0{,}335664$.

   (b) por lo menos dos bolas sean negras. Significa que pueden salir dos, tres o las cuatro bolas negras. Calculemos el complemento, esto es si no salen bolas negras (todas son rojas) o si solo sale una negra (y tres rojas). Con este procedimiento tenemos ${}_8C_4 = 70$ formas de sacar 4 bolas rojas y 336 formas de sacar tres bolas rojas y una negra. Por esto tenemos 406 formas de sacar las bolas. El complemento tendrá 595 formas de sacar las bolas por lo que la probabilidad es $\dfrac{595}{1\,001} \approx 0{,}5944056$.

   (c) cuando mucho dos bolas sean negras. Entonces se aceptan que salgan dos, una o ninguna de las bolas negras. De nuevo, el complemento es más fácil de calcular, esto es, es más sencillo si se calcula el número de formas de sacar tres bolas negras (una será roja) o cuatro bolas negras. ${}_6C_3 \cdot {}_8C_1 = 20 \cdot 8 = 160$ formas de sacar tres negras y una roja, y ${}_6C_4 = 15$ de que las cuatro sean negras, por lo que hay 175 formas de que salgan más de dos bolas negras, entonces hay 826 formas de que salgan cuando mucho dos bolas negras. Su probabilidad es $\dfrac{826}{1\,001} \approx 0{,}825175$.

Ejercicios recomendados: de las páginas 92 a la 94, del 1 al 30.

3.5. Relaciones de recurrencia

No se evalúa.

Examen de autoevaluación

A continuación, usted encontrará 5 ejercicios de selección única. Marque con una X la letra de la opción escogida.

Suponga que una clave de acceso a una computadora está formada por siete caracteres, el primero de los cuales es una letra del conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ y que los seis caracteres restantes son letras del alfabeto de 26 letras, compuesta por cinco vocales y veintiún consonantes, o dígitos entre 0 y 9. En relación con el texto anterior determine las cantidades mencionadas en cada caso.

11. El número total de claves diferentes que son posibles.

(a) ( ) $70 \cdot 26^6$ (b) ( ) $70 \cdot 6^{26}$ (c) ( ) $7 \cdot 36^6$ (d) ( ) $7 \cdot 6^{36}$

12. El número de claves posibles compuesta únicamente por vocales.

(a) ( ) 5^7 (b) ( ) $2 \cdot 5^6$ (c) ( ) $2 \cdot 6^5$ (d) ( ) 7^5

13. El número de claves posibles compuesta únicamente por cuatro letras A y tres letras E.

(a) ( ) 35 (b) ( ) 75 (c) ( ) 125 (d) ( ) 155

14. Considere solo las claves que tienen ceros y unos con excepción del primer carácter. El número de claves cuya suma de los dígitos es 4 es

(a) ( ) 15 (b) ( ) 45 (c) ( ) 105 (d) ( ) 150

15. Considere solo las claves que tienen ceros y unos con excepción del primer carácter. El número de claves cuya suma de los dígitos es menor o igual a 5 es

(a) ( ) 441 (b) ( ) 247 (c) ( ) 140 (d) ( ) 70

EJERCICIO 11. Demuestre que si se escogen siete números distintos del 1 al 12, al menos dos de ellos sumarán 13.

EJERCICIO 12. Sean n, m y p tres números enteros cualesquiera, demuestre que siempre el número $(n+m)(n+p)(p+m)$ es un número par.

EJERCICIO 13. Una caja contiene seis bolas rojas, cuatro bolas blancas y cinco bolas azules. Se extraen tres bolas sucesivamente de la caja. Hallar la probabilidad de que se extraigan en el orden roja-blanca-azul, si se devuelve la bola después de anotar el color.

EJERCICIO 14. Se lanzan dos dados y sea x la suma de los números que aparecen en las caras superiores. ¿Cuál es la probabilidad de $x < 10$?

EJERCICIO 15. Se lanzan dos dados y sea x la suma de los números que aparecen en las caras superiores. ¿Cuál es la probabilidad de $x < 7$?

Capítulo 4. Relaciones y digrafos

Este capítulo contiene uno de los temas más importantes de este libro. El resto de los tópicos de este curso estarán relacionados con los conceptos de este capítulo. Es por esta razón que se recomienda una lectura dedicada para cada una de las secciones siguientes.

4.1 Conjunto producto y particiones

Como lo indica el título de la sección, son dos los temas principales, el primero es el conjunto producto o bien el producto cartesiano de dos conjuntos. Es el conjunto formado por todos los pares ordenados cuyo primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo elemento al segundo conjunto. Hay varias maneras de representar el conjunto producto, una de ellas es la forma tabular como en la figura 4.1 página 102. Importante y bastante intuitivo es el resultado del teorema 1. El número de elementos de $A \times B$ es igual al producto de los números de elementos de A y B.

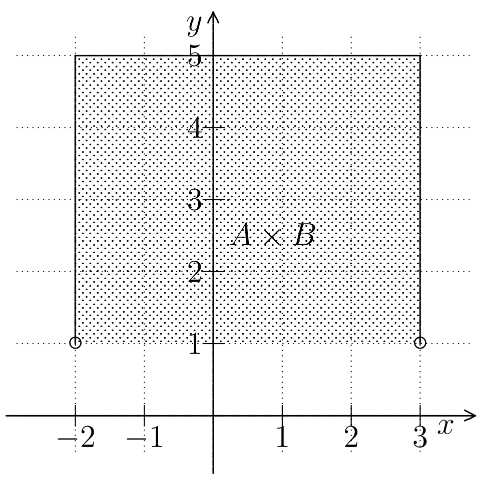
El segundo de los temas corresponde al concepto de partición. En breve, una partición es una familia de subconjuntos disjuntos entre sí, pero que al unirse producen todo el conjunto. A los subconjuntos que forman la partición se les llama bloques, aunque en algunos casos se les llama **clases**.

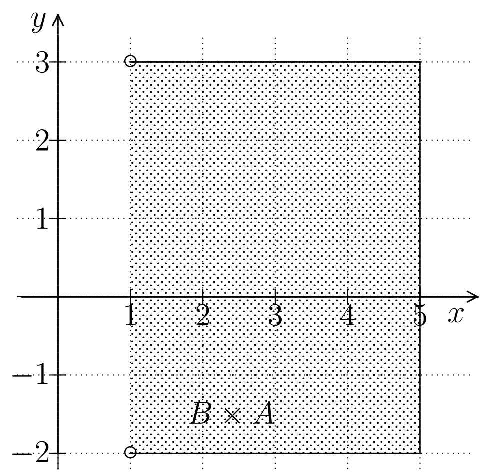
Ejemplos resueltos

1. Sea $A = \{a, b\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. Haga una lista de los elementos de: $A \times B$, $A \times A$. ¿Cuántos elementos tiene $B \times B$?
   Solución: $A \times B = \{(a, 4), (a, 5), (a, 6), (b, 4), (b, 5), (b, 6)\}$.
   $A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.
   $|B \times B| = |B|^2 = 9$.

2. Sea $B = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$. Escriba una partición que contenga tres conjuntos infinitos.
Solución: Note que B está compuesto por los números de la forma $x = 3k$ donde $k \geq 0$, entero. Entonces si separamos los valores de k en tres tipos tendremos una partición para B. Primero, si $k = 3m$, donde m es un entero no negativo, esto produce el conjunto $B_1 = \{0, 9, 18, 27, 36, \dots\}$. Segundo, para $k = 3m + 1$, entonces se produce el conjunto $B_2 = \{3, 12, 21, 30, \dots\}$; por último si $k = 3m + 2$, entonces $B_3 = \{6, 15, 24, 33, \dots\}$.

3. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales. Si $A = \{a | a \in \mathbb{R} \text{ tal que } -2 \leq a \leq 3\}$ y $B = \{b | b \in \mathbb{R} \text{ tal que } 1 < b \leq 5\}$. Haga un esquema de los casos $A \times B$ y $B \times A$ en el plano cartesiano.
Solución:



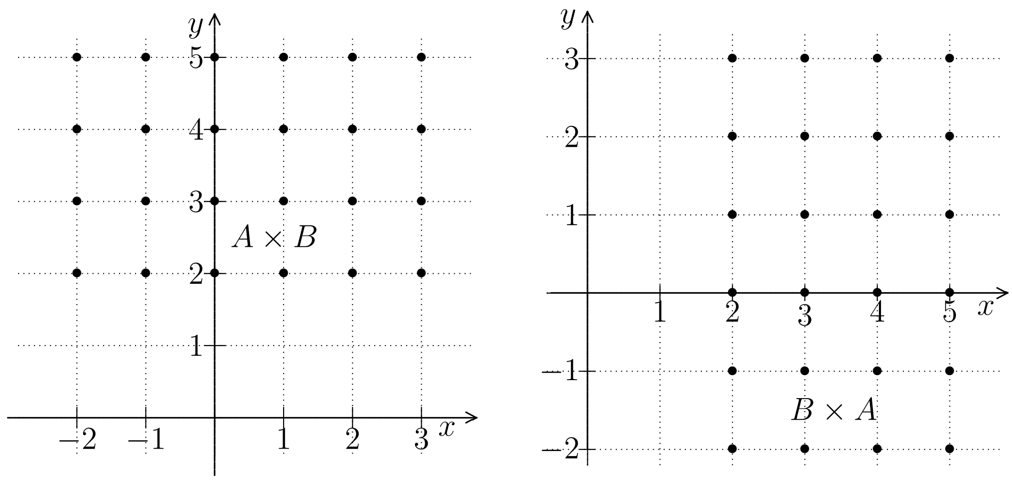


Note que los conjuntos A y B son intervalos y que los productos cartesianos son regiones rectangulares del plano, determinadas por los segmentos de las líneas rectas que pasan por los extremos de los intervalos. Estas regiones incluyen tres de las cuatro líneas que las determinan, ya que el conjunto B no incluye al número 1.

En el ejemplo anterior, el producto cartesiano corresponde a toda una región del plano. Esta situación sucede, como se indicó, porque los conjuntos corresponden a intervalos. Si modificamos los conjuntos de manera que estén formados por puntos, entonces el producto cartesiano no corresponderá a toda una región. Observemos esto en el siguiente ejemplo.

4. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de números enteros. Si $A = \{a | a \in \mathbb{Z} \text{ tal que } -2 \leq a \leq 3\}$ y $B = \{b | b \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 1 < b \leq 5\}$. Haga un esquema de los casos $A \times B$ y $B \times A$ en el plano cartesiano.

Solución:



Ahora note que los conjuntos están formados por puntos separados entre sí. Además, son conjuntos finitos.

Ejercicios recomendados: de la página 105, del 1 al 20.

4.2 Relaciones y digrafos

Una relación entre los elementos de dos conjuntos A y B se puede ver, simplemente, como un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Algunas veces se puede dar una regla para indicar cómo se relacionan los elementos de A con los de B. Al subconjunto de A que contenga todos los elementos que se relacionan con alguno en B se le llama **dominio** de la relación, denotado por $Dom(R)$. Al subconjunto de B para los cuales existe un elemento en A que se relaciona con él, se le llama **rango** de la relación, denotado por $Ran(R)$. En algunos textos, al rango se le llama **ámbito**.

Cuando el conjunto A es finito con $|A| = m$, y el conjunto B es también finito, con $|B| = n$, es posible construir una matriz booleana de manera que si se listan los elementos de A desde a_1 hasta a_m y los elementos de B desde b_1 hasta b_n y se tiene que a_iRb_j entonces ponemos un 1 en la posición ij de la matriz. A esta matriz se le llama **matriz de la relación**.

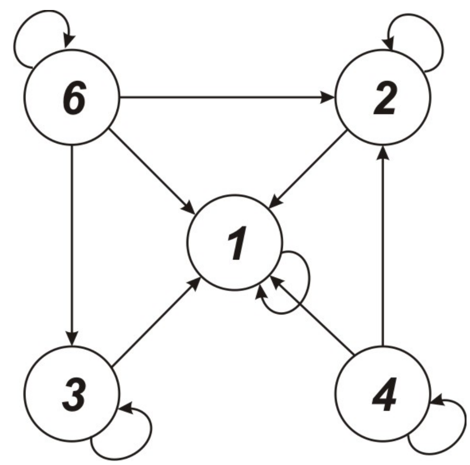
Por otra parte, si la relación se establece entre los elementos de un mismo conjunto finito, esto es, si $A = B$, es posible representar la relación por medio de un gráfico de flechas o gráfico dirigido llamado **digrafo**. En este tipo de representación si aRb entonces ponemos una flecha desde a hasta b. Ponga especial atención a las definiciones de grado interno o externo de a dentro de una relación.

Estas tres representaciones: matriz boolena, digrafo y los pares ordenados, se utilizan para manipular las relaciones. Como estas representaciones son equivalentes, es importante que usted pueda obtener cualquiera de las otras dos, a partir de alguna de ellas.

Ejemplos resueltos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Sea $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 2), (d, 1)\}$, indique: dominio, rango y matriz.
   Solución: Dominio: $Dom(R) = A$, pues todos los elementos de A se relacionan con alguno en B. Rango: $Ran(R) = \{1, 2\}$, el número 3 no tiene quién se relacione con él.
   Matriz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 6\} = B$. Se define la relación R sobre A tal que aRb si a es múltiplo de b. Indique dominio, rango, matriz y digrafo.
   Solución: Primero obtengamos el conjunto de los pares ordenados de R:
$$R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$$
   Con esto podemos escribir que dominio $Dom(R) = A$, $Ran(R) = A$.
   Matriz:
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   Digrafo: A partir de los pares ordenados se obtienen las flechas, por esto hay 12 flechas en este digrafo. Observe, por ejemplo, que está el par ordenado $(4, 1)$ y no está $(1, 4)$, por lo que hay una flecha que sale de 4 y llega al 1 pero no hay una que parta del 1 que llegue al 4.

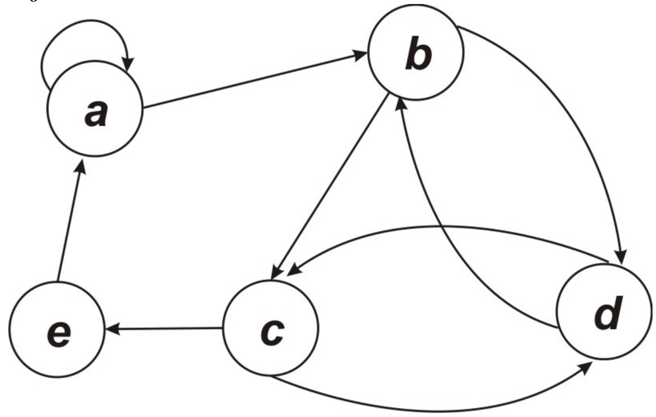


3. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dé el digrafo y la relación R.

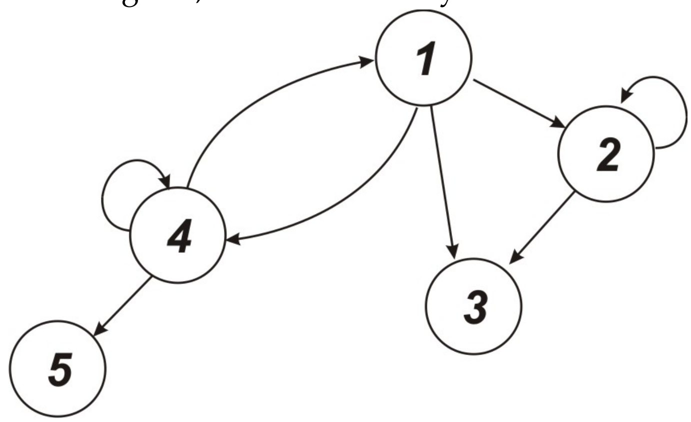
Solución: Utilizando los valores de la matriz, se coloca una flecha de i a j si existe un uno en la entrada ij de la matriz. De esta forma:



También es sencillo determinar los pares ordenados:

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, b), (d, c), (e, a)\}$$

4. A partir del siguiente digrafo, dé la relación R y la matriz.



Solución: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esto se tiene que: $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (4,1), (4,4), (4,5)\}$.

Ejercicios recomendados: de las páginas 115 y 116, del 1 al 23.

4.3 Trayectorias en relaciones y digrafos

Podemos resumir los temas de esta sección en tres, a saber:

- La definición de trayectoria de longitud n como aquella secuencia que tenga $n + 1$ elementos. Se incluye también la definición de **ciclo**.
- La definición de R^n a partir de una relación R y la forma de calcular la matriz M_{R^n} utilizando el producto booleano con las matrices $(M_R)^n$, esto es:

$$M_{R^n} = M_R \odot M_R \odot \ldots \odot M_R$$

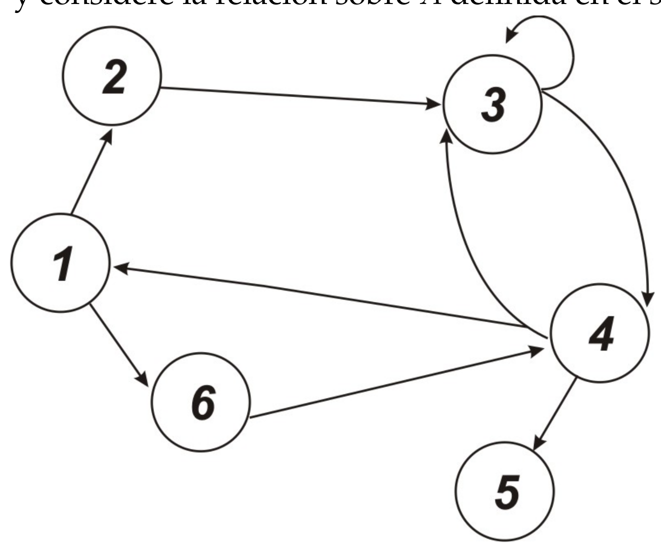
- La definición de R^∞ de manera que $xR^\infty y$ si y solo si existe un n tal que $xR^n y$; o en su forma equivalente si existe una trayectoria que conecte x con y.

Hay una omisión en el teorema 1 de la página 120 pues falta el exponente en la igualdad $M_{R^2} = M_R \odot M_R$. Para los ejemplos con pocos elementos es fácil calcular R^2 o R^3 a partir de las matrices y el producto booleano. La relación R^∞ es más fácil determinarla en forma visual por medio del digrafo; sin embargo, si usted ya tiene las relaciones R^2 y R^3 ya tiene trabajo adelantado, pues si hay un 1 en cualquier posición en alguna de las matrices de las relaciones, entonces hay un 1 en la matriz de la relación R^∞.

No es necesario que usted se aprenda las demostraciones de los teoremas que vienen en el libro, recuerde que la orientación del curso no requiere de producir o reproducir demostraciones complejas, y las que aparecen en esta sección son complicadas.

Ejemplos resueltos

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y considere la relación sobre A definida en el siguiente digrafo.



Determine:

(a) Todas las trayectorias de longitud 3.

(b) El digrafo de R^3.

(c) R^∞.

Solución:

(a) Es más sencillo (y sistemático) calcular M_{R^3}, por esto se calcula M_R, $M_R \odot M_R$ y por último $M_R \odot M_R \odot M_R$.

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_R \odot M_R = M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

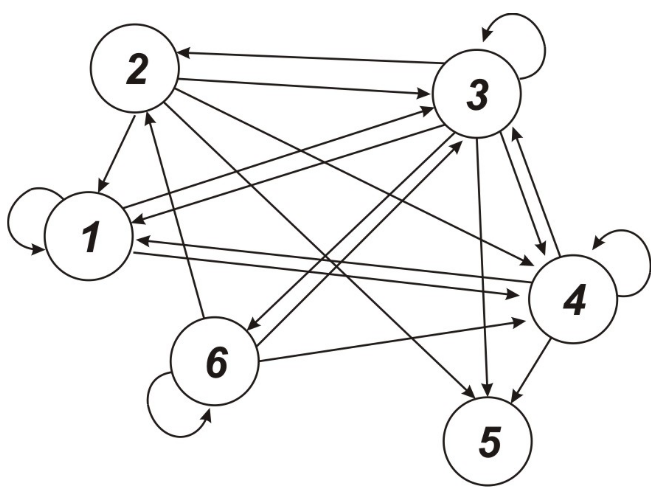
$$M_R \odot M_R \odot M_R = M_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esto tenemos que cada 1 en la posición ij de esta matriz indica que existe al menos una trayectoria entre i y j. Para enlistar cada trayectoria de longitud tres, es conveniente completar una tabla de cuatro columnas en donde se ordene cada trayectoria. Una forma de llenar esta tabla es escogiendo uno de los elementos, por ejemplo el 1, que este se coloca en la posición $(1, 1)$; luego se observa que de este elemento salen dos flechas, una para el 2 y otra para el 6. Se escoge uno de los dos, digamos el 2, el cual quedará colocado en la posición $(1, 2)$ de la tabla. Después se continúa colocando en la tercera columna el 3 que es el único elemento que se relaciona con 2. En este punto podemos escoger o bien el 3 o el 4 para la cuarta columna, entonces lo que hacemos es colocar el 3 en la posición $(1, 4)$ y el 4 en $(2, 4)$. Los valores restantes de la segunda fila se copian de la superior. Luego, se regresa a la segunda columna y ahora colocamos el 6 en la posición $(3, 2)$; recuerde que se había escogido entre el 2 y el 6. El número 4 ocupa la posición $(3, 3)$ y de nuevo escogemos entre 1, 3 ó 5, y los colocamos en la cuarta columna en las posiciones $(3, 4)$, $(4, 4)$ y $(5, 4)$. Los valores restantes hasta la quinta fila se copian de la inmediata superior. Para este ejemplo tendríamos una tabla como la siguiente en donde aparecen todas las trayectorias:

		R	R^2	R^3			R	R^2	R^3			R	R^2	R^3
π_1	1	2	3	3	π_{11}	3	3	3	3	π_{21}	4	1	6	4
π_2	1	2	3	4	π_{12}	3	3	3	4	π_{22}	4	3	3	3
π_3	1	6	4	1	π_{13}	3	3	4	1	π_{23}	4	3	3	4
π_4	1	6	4	3	π_{14}	3	3	4	3	π_{24}	4	3	4	1
π_5	1	6	4	5	π_{15}	3	3	4	5	π_{25}	4	3	4	3
π_6	2	3	3	3	π_{16}	3	4	1	2	π_{26}	4	3	4	5
π_7	2	3	3	4	π_{17}	3	4	1	6	π_{27}	6	4	1	2
π_8	2	3	4	1	π_{18}	3	4	3	3	π_{28}	6	4	1	6
π_9	2	3	4	3	π_{19}	3	4	3	4	π_{29}	6	4	3	3
π_{10}	2	3	4	5	π_{20}	4	1	2	3	π_{30}	6	4	3	4

Observe que existe más de una trayectoria entre los mismos nodos, por ejemplo π_1 y π_4 son dos trayectorias entre 1 y 3.

(b)



(c) Para R^∞ tomemos la matriz $M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3}$, esta matriz incluye las trayectorias de longitud 1, 2 y 3. Con esto se obtiene parte de R^∞.

$$M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por esto, basta determinar si existen trayectorias de alguna longitud entre los nodos que tienen un 0. Como hay un cero en la posición $(2, 2)$, se busca una trayectoria de 2 a 2: π_1: $2, 3, 4, 1, 2$ longitud 4. Hay también un cero en la posición $(2, 6)$, entonces se busca una trayectoria de 2 a 6: π_2: $2, 3, 4, 1, 6$, también de longitud 4. No es posible conectar el nodo 5 con algún otro nodo, pues 5 no tiene flechas de salida. Con esto, la relación $R^\infty = A \times A - \{(5, j) : j = 1, 2, \dots, 6\}$.

2. Si π_1: $1, 2, 4, 3$ y π_2: $3, 5, 6, 4$, determine $\pi_2 \circ \pi_1$.
   Solución: $\pi_2 \circ \pi_1$: $1, 2, 4, 3, 5, 6, 4$. Una trayectoria de longitud 7, de 1 a 4.

3. ¿Por qué en el ejemplo anterior no es posible calcular $\pi_1 \circ \pi_2$?
   Solución: Para que exista la composición de trayectorias el nodo final de la trayectoria de la derecha debe coincidir con el inicial de la trayectoria de la izquierda. Es por esto que esta composición no existe.

Ejercicios recomendados: de las páginas 122 y 123, del 1 al 20.

4.4 Propiedades de las relaciones

Al estudiar una relación es muy importante conocer sus propiedades. Esta sección establece las propiedades que nos interesan cuando la relación está definida sobre el mismo conjunto. Hay que tener presente que una propiedad se cumple cuando se comprueba para todos los valores o elementos involucrados, pero una propiedad no se cumple si se encuentra que un elemento no cumple la condición.

Las propiedades de las relaciones sobre un conjunto A que se estudiarán son:

Reflexiva: aRa o bien $(a, a) \in R$ para todo valor de $a \in A$, o bien $\Delta \subseteq R$. Δ es el conjunto de los pares ordenados cuyas dos entradas son iguales.

Irreflexiva: Cuando nunca se cumple que aRa. En símbolos $\Delta \cap R = \varnothing$. Si el conjunto A es finito y se representa la matriz de la relación entonces la diagonal principal debe estar compuesta de ceros.

Simétrica: Cada vez que aRb, entonces bRa. Se puede pensar en las relaciones simétricas como "calles en dos sentidos" en donde se permite transitar de a a b y de b a a. Así, si existe un camino entre a y b, hay otro entre b y a. También, si es posible la representación matricial, se tiene que si hay un 1 en la posición (i, j), entonces hay un 1 en la posición (j, i).

Asimétrica: Significa que si se da la relación entre a y b, no se dará entre b y a. Por esto, si una relación cumple con ser asimétrica no puede contener elementos de Δ, pues en estos casos (como cuando hay ciclos) existe la ida y el regreso. En lenguaje de matrices, una relación es asimétrica si cuando hay un 1 en la posición (i, j) hay un 0 en la posición (j, i).

Antisimétrica: Se parece a la anterior, la diferencia radica en que ahora si se permite que aRa para algunos $a \in A$ (que pueden ser todos, en cuyo caso la relación será antisimétrica y reflexiva). Lo que se sigue manteniendo es que si aRb con $a \neq b$ entonces $b \not R a$.

Transitiva: Significa que si aRb y bRc entonces se cumple aRc. En lenguaje de matrices: cualquier 1 de la matriz M_{R^2} también está en M_R.

Como se ha indicado, la descripción matricial de estas relaciones es muy útil, pues nos permite ver de una vez si una relación cumple con alguna de estas propiedades con solo observar la matriz u operarla para calcular M_{R^2}. Este será el método más seguro, siempre que se pueda calcular esta matriz. Con este comentario, la relación descrita en el ejemplo 10 de la página 128, se ve que es transitiva notando la distribución de los unos en la matriz M_{R^2}.

Al estudiar relaciones entre personas u objetos es posible identificar cada una de estas propiedades. A modo de ejemplo, considere las siguientes relaciones:

Autoridad. Una compañía clasifica a sus empleados en diferentes áreas y coloca a una persona en posición de mando sobre cada área. Un gerente general está sobre cada responsable de mando. La relación se define aRb si la persona a tiene autoridad dentro de la compañía sobre b.

Vecindario. Sobre un conjunto de personas en una comunidad, a y b son personas, se define la relación aRb si la casa de a colinda con la casa de b.

Cercanía. En un conjunto de personas se define que a se relaciona con b si a vive a menos de un kilometro de b.

Comparar. Se define la relación, aRb si a es tan alto como b.

Orden. Similar a la anterior, aRb si a es más alto o igual en estatura que b.

Correo. La persona a se relaciona con la persona b si a le envía un correo a b.

¿Cuál de las propiedades anteriores cumplen estas relaciones? Como actividad complete la tabla colocando un ✓ si la relación satisface la propiedad.

Relación	Reflexiva	Irreflexiva	Simétrica	Asimétrica	Antisimétrica	Transitiva
Autoridad						
Vecindario						
Cercanía						
Comparar						
Orden						
Correo						

En aquellos casos en que la relación es simétrica, podemos dibujar el digrafo "sin flechas" en cuyo caso recibe el nombre de **gráfica**; en estos casos la relación entre a y b se dibuja por medio de una línea que une ambos nodos. Cuando podemos encontrar una trayectoria entre cualesquiera dos nodos de la gráfica, decimos que la relación es **conectada**, por lo cual, si la gráfica es "una sola pieza" podemos clasificar a la relación como conectada, como en el ejemplo de la página 128, figura 4.21.

Ejemplos resueltos

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine las propiedades de la siguiente relación:

$$R = \{(1,3), (1,1), (3,1), (1,2), (3,3), (4,4)\}$$

Solución: Escribamos la matriz de la relación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexiva: $\Delta = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\} \not\subseteq R$, pues $(2,2) \notin R$ observe esto en la diagonal de la matriz.

Irreflexiva: Tampoco, $\Delta \cap R = \{(1,1), (3,3), (4,4)\} \neq \varnothing$.

Simétrica: No tenemos una matriz simétrica, note que hay un 1 en $(1,2)$ y no lo hay en $(2,1)$.

Asimétrica: No es asimétrica al contener elementos de Δ.

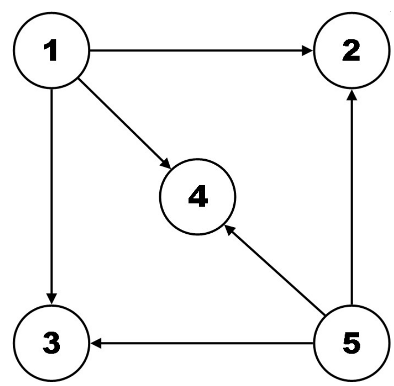
Antisimétrica: No se cumple por los pares ordenados $(1,3)$ y $(3,1) \in R$.

Transitiva: Calculemos M_{R^2}.

$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que el 1 en la posición $(3,2)$ de M_{R^2} no está en M_R. Este 1 se da pues $(3,1)$ y $(1,2) \in R$, por transitividad se debería cumplir que $(3,2) \in R$ y esto no se da.

2. Considere el siguiente digrafo de la relación R:



Determine las propiedades de la relación.
Solución:

Reflexiva: Basta notar que $(1,1) \notin R$, pues esto indica que $\Delta \not\subseteq R$.

Irreflexiva: Sí, no hay ciclos de longitud 1.

Asimétrica: Sí, los caminos son de una vía.

Antisimétrica: Sí, en este caso es como la asimetría.

Transitiva: Sí se cumple, pues como se mencionó, si hay trayectorias de longitud 2 estas deben identificarse con alguna de longitud 1. En este caso no hay trayectorias de longitud 2 por lo que la condición se satisface al no existir alguna que no la cumpla[7].

3. Sea $A = \mathbb{Z}$ y defina R sobre $\mathbb{Z}$ tal que aRb si y solo si $a+b$ es un número par. Determine cuál de las propiedades cumple.
Solución:

[7] En estos casos, cuando no existen elementos que no cumplan con la condición se dice la propiedad se cumple con vacuidad, por ejemplo, todos los tiranosaurios vivos vuelan, la afirmación es verdadera al no existir tiranosaurios vivos.

Reflexiva: aRa pues $a + a = 2a$ que siempre es un número par.

Irreflexiva: No, pues es reflexiva.

Asimétrica: No, $a + b$ es par entonces $b + a$ es par.

Antisimétrica: No, pues al igual que la asimetría como $a + b$ es par, de seguro $b + a$ lo es.

Transitiva: Para que se cumpla, si aRb y bRc entonces se puede asegurar que el número $(a+b)+(b+c)$ es par cuando $a+c$ es un número par; esto pues el resultado de la suma anterior es $(a + c) + 2b$, por lo tanto, es un par al ser la suma de dos números pares, así, aRc.

4. Demuestre que si una relación es transitiva e irreflexiva entonces es simétrica.
Solución: Sean $a, b \in A$ tal que aRb hay que probar que b no se relaciona con a. Por contradicción suponga que bRa entonces se tiene que aRb y bRa por transitividad aRa pero esto me diría que no es asimétrica. Por lo tanto, $b \not R a$.

Por cierto, en cuanto al ejemplo de las propiedades que cumplían las relaciones que se definieron antes de los ejemplos resueltos, la tabla debió quedarles de la siguiente manera:

Relación	Reflexiva	Irreflexiva	Simétrica	Asimétrica	Antisimétrica	Transitiva
Autoridad	✓			✓	✓	✓
Vecindario		✓	✓			
Cercanía	✓		✓			
Comparar	✓		✓			✓
Orden	✓				✓	✓
Correo						

Ejercicios recomendados: de las páginas 129 a 131, del 1 al 30.

4.5. Relaciones de equivalencia

En esta sección se estudian las relaciones que cumplen con ser reflexivas, simétricas y transitivas. Las que cumplan con estas propiedades se llaman **relaciones de equivalencia** y constituyen un tipo de relaciones muy útil en Matemática. Los elementos de una relación de equivalencia forman bloques o clases que no tienen elementos en común, y todos los elementos pertenecen a alguno de estos bloques. Esto significa que forman una **partición** del conjunto. Recuerde que una partición es una colección de subconjuntos disjuntos que unidos forman el conjunto completo. Esto permite asegurar que cada elemento en un bloque se relaciona únicamente con todos los de su bloque. La ventaja de este hecho es que es posible demostrar alguna propiedad sobre todos los elementos del bloque con solo tomar uno de ellos.

Considere, por ejemplo, la relación sobre $\mathbb{Z}$, tal que aRb si y solo si $a+b$ es un número par. Si se quiere encontrar el bloque (o la clase de equivalencia) que incluye al 0, en símbolos $R(0)$, entonces buscamos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $aR0$, esto es, $a+0$ es un número par, pero esto significa que a debe ser par. Así, esta clase estará formada por todos los números pares. De la misma forma, si se busca el bloque que incluye a 1, $R(1)$, nos damos cuenta de que está formado por todos los números impares. Entonces, se cuenta con dos bloques: $R(0) = P$, el conjunto de los pares; y $R(1) = I$ el conjunto de los impares. Estos conjuntos son disjuntos y $\mathbb{Z} = P \cup I$. ¿Para qué sirve saber esto? He aquí una utilidad: si se quiere probar una propiedad sobre todos los números enteros, tal como demostrar que el producto de un número par con un impar es par, entonces se toma un representante de los pares (como el 0 o el 2) y se multiplica con uno de los impares (digamos el 1) y la paridad del resultado (en este caso 0 o 2, ambos pares) será la paridad para cualquier otro par de representantes. Esto es, en cada bloque todos los elementos se comportan como uno solo.

El conjunto de bloques o clases de equivalencia se le denota por A/R y se le llama **conjunto cociente**. La idea de esta notación como una división es que nos recuerda que A queda partido por una colección de subconjuntos. Con esta notación, nos referiremos al conjunto formado por las diferentes clases generadas por la relación de equivalencia R.

En el caso de que $A = \mathbb{Z}$ y la relación sea $\mathrm{mod(n)}$ definida en el ejemplo 5, página 132, entonces $\mathbb{Z}/\mathrm{mod(n)}$ es la partición formada por n clases de equivalencia que se pueden denotar

$$\mathbb{Z}/\mathrm{mod(n)} = \{[0], [1], \ldots, [\mathrm{n}-2], [\mathrm{n}-1]\}$$

Donde se sustituye la notación $R(x)$ por $[x]$.

Ejemplos resueltos

1. Considere el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y la relación definida por la siguiente matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pruebe o refute que R es una relación de equivalencia.
Solución: En este caso la relación no es simétrica. Note el 1 en la posición $(1,3)$ y el 0 en la posición $(3,1)$. Por lo tanto, sin importar las otras propiedades, R no es de equivalencia.

2. Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ y

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$$

Pruebe o refute que R es una relación de equivalencia.
Solución: Se debe verificar que es reflexiva, simétrica y transitiva. Consideremos la matriz de la relación:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexiva: La diagonal está compuesta por unos asegurando la reflexividad.

Simétrica: La matriz es simétrica, y por lo tanto la relación es simétrica.

Transitiva: Calcule M_{R^2} y notará que $M_{R^2} = M_R$ por lo que la relación es transitiva.

Por lo tanto, R es una relación de equivalencia.

3. Sea $S = \{1,2,3,4,5\}$ y sea $A = S \times S$. Defina la siguiente relación R sobre A: $(a,b)R(a',b')$ si y solo si $ab' = a'b$.

   (a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.

   (b) Calcule A/R.

Solución: Para este caso la matriz de la relación no es funcional pues es una matriz 25×25.

(a) **Reflexiva:** $(a,b)R(a,b)$ significa que $ab = ab$, lo cual es evidente, por lo que se cumple que R es reflexiva.

Simétrica: Si $(a,b)R(a',b')$ entonces $ab' = a'b$, lo que es lo mismo $a'b = ab'$, por esto $(a',b')R(a,b)$ y R es simétrica.

Transitiva: Sea $(a,b)R(a',b')$ y $(a',b')R(a'',b'')$ hay que probar que $(a,b)R(a'',b'')$ o en bien $ab'' = a''b$. En efecto, sabemos que $ab' = a'b$ y $a'b'' = a''b'$, si se multiplica la primera igualdad por a'' y la segunda igualdad por a se obtiene:

$ab'a'' = a'ba''$ y $aa'b'' = aa''b'$; entonces $aa'b'' = a'ba''$ y dado que $a' \neq 0$, es posible simplicarla de la igualdad anterior y se obtiene $ab'' = a''b$, por lo que la transitividad se cumple.

Al cumplirse las tres propiedades entonces, R es una relación de equivalencia.

(b) Para determinar el conjunto cociente, se toma cada uno de los elementos del conjunto R y se obtiene su clase, así:

$R((1,1))$**.** La clase del $(1,1)$ consiste en los elementos (a,b) tales que $(a,b)R(1,1)$; para este caso significa que $a = b$: Los elementos de R que cumplen con esta condición son:

$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$$

$R((1,2))$**.** A la clase del $(1,2)$ pertenecen los elementos $(a,b) \in R$ que cumplen con la igualdad $2a = b$. En este caso, se tiene a los pares $(1,2)$ y $(2,4)$; por lo tanto, la clase es el conjunto $\{(1,2),(2,4)\}$.

$R((2,1))$**.** En forma semejante $(2,1)$ pertenecen los elementos $(a,b) \in R$ que cumplen con la igualdad $a = 2b$. En este caso, se tiene que los pares $(2,1)$ y $(4,2)$ cumplen; por lo tanto, la clase es el conjunto $\{(2,1),(4,2)\}$.

$R((1,3))$**.** Para determinar la clase del $(1,3)$ los elementos (a,b) deben cumplir con la igualdad $3a = b$, en este caso solo $(1,3)$ satisface; así la clase es el conjunto unitario $\{(1,3)\}$. También se determinan conjuntos unitarios para el resto de las clases.

El conjunto cociente A/R es:

$$\begin{aligned} A/R = \{&R((1,1)), R((1,2)), R((1,3)), R((1,4)), R((1,5)),\\ &R((2,1)), R((2,3)), R((2,5)), R((3,1)), R((3,2)),\\ &R((3,4)), R((3,5)), R((4,1)), R((4,3)), R((4,3)),\\ &R((4,5)), R((5,1)), R((5,2)), R((5,3)), R((5,4))\} \end{aligned}$$

Ejercicios recomendados: de las páginas 135 y 136, del 1 al 20.

4.6 Representación en la computadora de relaciones y digrafos

No se estudia.

4.7 Manipulación de relaciones

En esta sección se realizan las operaciones con las relaciones, de la misma forma que se hace con los conjuntos en el capítulo 1 (unión, intersección y complemento). Por esta razón, no será muy complicado determinar $R \cap S$, $R \cup S$ y $\overline{R}$ para dos relaciones R y S definidas de A a B, ya que ambas son subconjuntos de $A \times B$.

Así mismo, las propiedades (b) y (d) descritas en el teorema 1, página 148, están demostradas desde el capítulo 1. Por otro lado, a partir de una relación R, se describe la relación inversa denotada por R^{-1}, que cumple que si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R^{-1}$. Los teoremas 2, 3 y 4 asumen que las relaciones están definidas sobre A y describen las propiedades estudiadas en las sección 4.4 de reflexividad, irreflexividad, simetría, asimetría y antisimetría, utilizando las operaciones y la inversa.

Será sencillo calcular la matriz de una unión o intersección de relaciones, a partir de las matrices de cada relación y las operaciones booleanas entre ellas. Así,

$$M_{R\cup S} = M_R \vee M_S \text{ y } M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S$$

Además $M_{R^{-1}} = (M_R)^T$. Se define la matriz complemento como aquella matriz que tiene unos donde la otra tiene ceros y corresponde a la relación $\overline{R}$.

En la página 151, se explica una manera de encontrar una relación reflexiva a partir de una relación que no lo sea; así mismo, una relación simétrica cuando la relación original no lo es. Esto se llama **cerradura reflexiva** o **cerradura simétrica** según sea el caso. Menciona también que en la sección 4.8, se verá la **cerradura transitiva**, sin embargo, no vamos a estudiar esa sección. Por eso, solo interesará la cerradura en casos de simetría y de reflexividad.

La composición de relaciones es otra de las propiedades que se estudia en esta sección. Al igual que la composición de trayectorias, que se estudiaron en la sección 4.3, la composición es posible cuando se tienen tres elementos tales que aRb y bSc, entonces $aS \circ Rc$. Para calcular la composición de relaciones puede usarse la representación matricial de las mismas y el producto booleano:

$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S$$

Note el orden del producto en relación al orden de la composición.

Ejemplos resueltos

1. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Sean R y S tales que sus matrices son:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule $\overline{S}$, $R \cap S$, $R \cup S$ y R^{-1}.
Solución: Primero calculamos las matrices: $M_{\overline{S}}$, $M_{R\cap S}$, $M_{R\cup S}$ y $M_{R^{-1}}$:

$$M_{\overline{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M_{R\cap S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R\cup S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con estas matrices vemos que

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4)\} \\ R \cap S &= \{(1,2), (2,4), (3,1), (3,2)\} \\ R \cup S &= A \times B - \{(2,2), (2,3), (3,4)\} \\ R^{-1} &= \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,3), (4,1), (4,2)\} \end{aligned}$$

2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ defina sobre A las relaciones

$$\begin{aligned} R &= \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,4), (3,4), (4,1), (4,2)\} \\ S &= \{(3,1), (4,4), (2,3), (2,4), (1,1), (1,4)\}. \end{aligned}$$

Pruebe o refute:

(a) R es simétrica, si no lo es, determine la relación $\widetilde{R}$ sobre A más pequeña que contenga a R, tal que $\widetilde{R}$ sí es simétrica.

(b) S es reflexiva. Si no lo es, determine la relación $\widetilde{S}$ sobre A más pequeña que contenga a S, tal que $\widetilde{S}$ sí es reflexiva.

(c) Calcule (si es posible) $S \circ R$ y $R \circ S$.

Solución:

(a) A la vista se nota que $(1,2) \in R$ y $(2,1) \notin R$, por lo que no es simétrica. Tome $\widetilde{R} = R \cup R^{-1}$ y con esto aseguramos que $\widetilde{R}$ es simétrica.

(b) También se nota que $(2,2) \notin R$ y en este caso es muy sencillo construir la relación reflexiva solicitada, $\widetilde{S} = S \cup \Delta$, en este caso basta con incluir los elementos de Δ que no pertenece a S. Así, $\widetilde{S} = S \cup \{(2,2),(3,3)\}$.

(c) Para calcular $S \circ R$ es más sencillo con la matriz $M_{S\circ R} = M_R \odot M_S$

$$M_{S\circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $S \circ R = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,4),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$.

Para $R \circ S$ hacemos lo mismo.

$$M_{R\circ S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces $R \circ S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$

3. Sean R y S dos relaciones asimétricas, demuestre o refute que $R \cup S$ y $R \cap S$ son relaciones asimétricas.
Solución: Primero, revisemos la propiedad para $R \cup S$. Se tiene que demostrar que si $aR \cup Sb$ entonces no se cumple que $bR \cup Sa$. Si $aR \cup Sb$, una de estas dos es verdadera aRb o aSb, pero puede que no ambas, entonces es posible que aRb y bSa que concluye que $aR \cup Sb$ y $bR \cup Sa$. Por lo tanto, no siempre la unión de relaciones asimétricas es una relación asimétrica. Para $R \cap S$, si $aR \cap Sb$, entonces aRb y aSb, de donde no se cumple que bRa y bSa; por lo tanto sí es cierto que esta intersección es asimétrica.

Ejercicios recomendados: de las páginas 154 a la 157, del 1 al 30.

4.8 Cerradura transitiva y algoritmo de Warshall

No se evalúa.

Examen de autoevaluación

A continuación, usted encontrará 5 ejercicios de selección única. Marque con una X la letra de la opción escogida.

16. Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$, entonces $A \times B$ es

(a) ( ) $\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (1, 2)\}$
(b) ( ) $\{(2, 1), (2, 3), (1, 3), (1, 2)\}$
(c) ( ) $\{(2, 2), (2, 3), (1, 2), (1, 3)\}$
(d) ( ) $\{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

17. Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y los subconjuntos de A, tales que $A_1 = \{1, 3, 5\}$, $A_2 = \{2, 4, 5\}$, $A_3 = \{1, 3\}$ y $A_4 = \{2, 4\}$. Entonces una partición de A es

(a) ( ) $\{A_2, A_3\}$ (b) ( ) $\{A_2, A_4\}$ (c) ( ) $\{A_1, A_3\}$ (d) ( ) $\{A_3, A_4\}$

18. Si $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, y la relación R definida por aRb si y solo si $|a - b|$ es un múltiplo de 3. Si sabemos que R es de equivalencia entonces $R(7)$ es

(a) ( ) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (b) ( ) $\{1, 4, 7, 10\}$ (c) ( ) $\{3, 6, 7, 9\}$ (d) ( ) $\{2, 4, 7, 8\}$

19. Considere $A = \{a, b, c\}$ y $R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (a, a)\}$, una relación definida sobre A. Con respecto a las propiedades de reflexividad y transitividad se cumple que:

(a) ( ) R es transitiva pero no es reflexiva.
(b) ( ) R no es transitiva ni reflexiva.
(c) ( ) R es transitiva y reflexiva.
(d) ( ) R no es transitiva pero sí es reflexiva.

20. Considere $A = \{a, b, c\}$ y la relación R definida sobre A tal que la matriz de la relación es

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con respecto a las propiedades de simetría y reflexividad se cumple que:

(a) ( ) R es simétrica pero no es reflexiva.
(b) ( ) R no es simétrica ni reflexiva.
(c) ( ) R es simétrica y reflexiva.
(d) ( ) R no es simétrica pero sí es reflexiva.

EJERCICIO 16. Determine si la relación R definida sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ cuya matriz M_R es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es reflexiva, simétrica o transitiva.

EJERCICIO 17. Determine cuántas particiones diferentes de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ hay y justifique su respuesta.

EJERCICIO 18. Sea R una relación sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ tal que

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 4), (2, 2), (3, 3), (3, 1), (4, 2)\}$$

Calcule la matriz M_{R^2} y determine las propiedades de M_{R^2}. Dibuje el digrafo para la relación R.

EJERCICIO 19. En $\mathbb{Z}$, el conjunto de números enteros, se define la relación R tal que xRy si y solo si $x - y = 4t$; esto significa que la diferencia de x y y es un múltiplo de 4. Pruebe que R es una relación de equivalencia y determine el conjunto de clases de equivalencia.

EJERCICIO 20. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y sean R_1 y R_2 las relaciones definidas sobre A tales que $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$ y $R_2 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$.

1. Determine las matrices M_{R_1} y M_{R_2}.
2. Determine las relaciones $R_2 \circ R_1$, $R_1 \cap R_2$ y ${R_1}^{-1}$.

Capítulo 5. Funciones

De este capítulo se estudiarán únicamente las secciones 5.1 y 5.3. En la primera de ellas, se tratan las funciones como un caso particular de las relaciones. En la segunda, se centra la atención en un tipo especial de funciones definidas sobre un conjunto finito, llamadas permutaciones.

5.1 Funciones

Como se indicó, nuestro acercamiento a las funciones se hace a partir de las relaciones. Se ven éstas como un caso particular en donde los elementos del dominio se relacionan con solo un elemento en el codominio. Por esto, en lugar de escribir afb, escribimos $f(a) = b$.

En este texto, a diferencia de algunas palabras que se utilizan en la secundaria costarricense, se utiliza el término argumento para indicar que a es el **argumento** de la función f y b es el **valor** de la función para el argumento a si $f(a) = b$; posiblemente usted esté más familiarizado con la oración: $f(a)$ es la imagen de a bajo f, que también usa el libro.

Algunas funciones quedan determinadas por medio de una fórmula o regla para indicar el valor o la imagen bajo f. En estos casos, escribimos $y = f(x)$ y $f(x)$ es una expresión algebraica o una fórmula cuya variable es x, que indique cómo encontrar la imagen de x bajo f.

Otros términos que pueden no resultar familiares son los siguientes:

Función definida en todas partes: Se aplica cuando $f\colon A \to B$ y $Dom(f) = A$. Esta situación se presenta en la mayoría de los ejemplos y ejercicios por lo que es usual que se satisfaga.

Sobre: Se dice que $f\colon A \to B$ es **sobre** si $Ran(f) = B$.

Uno a uno: Se dice que f es **uno a uno** cuando se cumple que una imagen solo es imagen para un único argumento.

Biyección: Se dice que $f\colon A \to B$ es una **biyección**[8] cuando es sobre y uno a uno simultáneamente. Así, si la función es uno a uno se dice que hay una biyección entre el $Dom(f)$ y $Ran(f)$.

Invertible: Se cumple cuando la relación inversa es una función y esto, como el teorema 1(a) lo indica, sucede si f es uno a uno. Es importante indicar que algunas veces es más cómodo determinar la inversa (igualando a y y despejando x) y comprobar el teorema 2, que comprobar directamente que es uno a uno, al estilo del ejemplo 17.

Como lo indica el teorema 4, cuando el conjunto es finito, basta una de las propiedades (ya sea uno a uno o sobre) para obtener la otra, siempre y cuando la función cumpla con que esté definida en todas partes ($Dom(f) = A$).

Ejemplos resueltos

1. Sea $A = \mathbb{R}$ y $B = \{0,1\}$, defina $f(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$. Verifique que la relación determina una función $f\colon A \to B$.
   Solución: Para que sea función $f(a)$ debe tener solo un valor que en este caso no es posible que $f(a)$ tenga dos valores, pues $a \in \mathbb{Z}$ solo puede ser cierto o falso. Por lo tanto f es una función.

2. Sea $A = B = C = \mathbb{R}$, y defina $f\colon A \to B$ tal que $f(a) = a - 1$ y $g\colon B \to C$ tal que $g(b) = b^2$. Determine: $(f \circ g)(-2)$, $(g \circ f)(-2)$, $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ f)(y)$ y $(g \circ g)(y)$.
   Solución: Cada uno de los cálculos es directo.

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(-2) &= f(g(-2)) = f((-2)^2) = f(4) = 3 \\
(g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) = g(-2-1) = g(-3) = (-3)^2 = 9 \\
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 1 \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \\
(f \circ f)(y) &= f(f(y)) = f(y-1) = (y-1) - 1 = y - 2 \\
(g \circ g)(y) &= g(g(y)) = g(y^2) = (y^2)^2 = y^4
\end{aligned}
$$

[8] Aquí en Costa Rica se utiliza inyectiva en lugar de uno a uno, sobreyectiva en lugar de sobre y biyectiva en lugar de biyección.

3. Sea $A = B = \{1, 2, 3, 4\}$, defina las correspondencias f, g y h todas definidas de A en B tales que

$$\begin{aligned} f &= \{(1,1),(2,3),(3,4),(4,2)\}, \\ g &= \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,2),(4,3)\} \text{ y} \\ h &= \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\} \end{aligned}$$

Determine si son funciones, y si lo son, indique si son uno a uno, sobre o ninguna de las dos.

Solución: Primero notemos que en f cada uno de los valores de A posee una sola imagen, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ y $f(4) = 2$. Por lo tanto f es función. Además, f es uno a uno y sobre. Luego, analizamos la correspondencia g: Note que $g(1) = \{2, 3\}$ con lo cual contradice la definición, por esto no es función. Por último, para h, notamos que todos los valores de A poseen la misma imagen, así, h es función y no es uno a uno, ni sobre.

4. Sea $f\colon A \to B$ determine la inversa f^{-1} para los siguientes ejemplos e indique si esta inversa es función, o no.

   (a) $A = [-1, +\infty[$, $B = [0, +\infty[$ y $f(a) = a + 1$

   (b) $A = B = \mathbb{R}$ y $f(a) = \dfrac{2a+1}{3}$

   (c) $A = B = \mathbb{R}$ y $f(a) = a^2 + 1$

   Solución: La inversa se define $f^{-1}\colon B \to A$ y la fórmula para cada caso es:

   (a) Si se tiene que $f(a) = b \Rightarrow a + 1 = b \Rightarrow a = b - 1$, y con esto se indica la fórmula de la inversa es $f^{-1}(b) = b - 1$.

   (b) En este caso, si $f(a) = b$ entonces $\dfrac{2a+1}{3} = b \Rightarrow 2a + 1 = 3b$ y despejando a se obtiene $a = \dfrac{3b-1}{2}$. Con esto, la fórmula de la inversa es $f^{-1}(b) = \dfrac{3b-1}{2}$.

   (c) Se procede de igual manera que en el caso anterior; $f(a) = b \Rightarrow a^2 + 1 = b$ o lo que es lo mismo $a^2 = b - 1$ y al despejar se obtienen dos valores para a: $a = \sqrt{b-1}$ o $a = -\sqrt{b-1}$. Esto indica que se tienen valores de $b \in B$, tales que existen dos valores de $a \in A$ que cumplen $f(a) = b$; contradiciendo la condición de uno a uno, y, por lo tanto, la relación inversa f^{-1} no es función. Para reforzar el comentario anterior, note por ejemplo, que si $b = 5$, se tiene que $f(2) = 5$ y $f(-2) = 5$.

5. Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ tal que $g \circ f$ es sobre, pruebe que g es sobre.
   Solución: Para demostrar que g es sobre se debe probar que $Ran(g) = C$ y la hipótesis es que $Ran(g \circ f) = C$. Se tiene la inclusión $Ran(g) \subseteq C$, basta probar la otra inclusión $C \subseteq Ran(g)$. Sea $c \in C$, como sabemos que $Ran(g \circ f) = C$ entonces $c \in Ran(g \circ f)$, así que existe $a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$, que es lo mismo que escribir $g(f(a)) = c$ pero si llamamos $b = f(a)$, se tiene que existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$ y esto nos demuestra que $c \in Ran(g)$. Por lo tanto, se tiene la igualdad $Ran(g) = C$ y g es sobre.

Ejercicios recomendados: de las páginas 175 a la 177, del 1 al 25.

5.2 Funciones para la ciencia de la computación

No se evalúa.

5.3 Funciones de permutación

En esta sección se estudia un tipo particular de funciones uno a uno definidas sobre un conjunto finito, por lo que son biyecciones, que llamaremos **permutaciones** (podemos pensar en estas funciones como reordenamientos de un conjunto finito). Lo que no hay que perder de vista es que cada permutación es una biyección, y como tal, posee inversa, que a su vez es también una biyección.

La notación en estos casos es:

$$p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ p(a_1) & p(a_2) & p(a_3) & \dots & p(a_n) \end{pmatrix}$$

Esta manera de escribirla resume la característica de la función, pues no hace falta escribir $p(x)$ para $x \in Dom(p)$, pues basta con esta notación.

Recuerde que si se tienen dos permutaciones p_1 y p_2 se puede calcular $p_2 \circ p_1$ aplicando $p_1(x)$ y luego aplicando $p_2(p_1(x))$, de la misma forma que se calcula una composición de funciones.

El número de permutaciones diferentes para un conjunto de n elementos es $n!$ tal y como en su momento lo indicó el teorema 4 de la página 75.

Con la idea de clasificar las permutaciones, se define un **ciclo** de longitud r, a aquella permutación p que toma r números del conjunto $\{1, 2, 3 \ldots, n\}$, $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ y forma la permutación $p(a_i) = a_{i+1}$ para $i = 1, 2 \ldots r - 1$ y $p(a_r) = a_1$. El resto de los elementos cumple que $p(x) = x$.

La importancia de los ciclos es que cualquier permutación es la composición sucesiva de ciclos de longitud $r \geq 2$. Recuerde que usualmente se le llama **producto** de permutaciones a la composición. Dos preguntas frecuentes respecto a los ciclos son:

- ¿cómo se determinan los ciclos?
- ¿cómo se escribe la respuesta una vez que se tienen todos los ciclos definidos? Como se ha visto, la composición de funciones, en general, no es conmutativa e importa el orden de la composición.

Estas dos preguntas son muy importantes para manipular las permutaciones. Primero veamos cómo se responde a la primera de ellas.

Tome cualquier permutación p diferente a la identidad

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & p(3) & \ldots & p(n) \end{pmatrix}$$

y de izquierda a derecha busque el primer número i tal que $p(i) \neq i$, siempre existe pues p no es la identidad. Ahí empieza el ciclo $i \to p(i) \to p(p(i)) \to \ldots$, este proceso termina cuando en esta secuencia aparece i por segunda vez, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces un ciclo encontrado en la forma anterior es $2 \to 4 \to 3 \to 2$ y ahí se detiene el proceso. En este caso se escribe $(2, 4, 3)$; como el resto de los elementos que no pertenecen al ciclo cumplen con $p(x) = x$, como son $p(1) = 1$ y $p(5) = 5$, entonces tenemos que la permutación p es un ciclo de longitud 3. Si la permutación no estuviera compuesta por un solo ciclo, entonces se puede encontrar otro ciclo disjunto al anterior.

Para dar respuesta a la segunda pregunta, basta indicar que cuando los ciclos son disjuntos entonces la composición es conmutativa. Como el proceso anterior provee de ciclos disjuntos no importa el orden como se escriban.

Por otra parte, se define una transposición como un ciclo de longitud 2 y se demuestra que cualquier ciclo es el producto de transposiciones, por esto, cualquier permutación se puede conseguir por medio de una secuencia iterada del intercambio, dos a dos, de sus imágenes, por ejemplo $(2,4,3) = (2,4)(2,3)$. Pero tenga presente que para una permutación en particular, el número de intercambios no siempre es el mismo; sin embargo, se demuestra que la paridad[9] de intercambios para una permutación, es igual, esto es, si hay un número par de transposiciones que dan como resultado una permutación, entonces para esta permutación no se puede encontrar un número impar de transposiciones que den el mismo resultado.

En la página 185, se ofrece un algoritmo para encontrar las transposiciones a partir de un ciclo; por esto, primero se encuentran los ciclos necesarios en una permutación y luego, se escribe cada ciclo como producto de transposiciones utilizando el algoritmo indicado.

Ejemplos resueltos

1. Considere las permutaciones $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule:

   (a) p_1^{-1} y p_2^{-1}

   (b) $p_1 \circ p_2 \circ p_3$

   (c) $p_2^{-1} \circ p_1 \circ p_2$

   (d) $(p_2 \circ p_1)^{-1}$

   Solución:

   (a) $p_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ y $p_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

   (b) $p_1 \circ p_2 \circ p_3$: Como la composición es asociativa, no se necesita paréntesis; por comodidad calculemos $p_1 \circ p_2$ primero y luego lo operamos con p_3

   $$p_1 \circ p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, (p_1 \circ p_2) \circ p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

[9]Se refiere a la condición de par o impar.

(c) $p_2^{-1} \circ p_1 \circ p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $(p_2 \circ p_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. Determine si la permutación es par o impar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 5 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: Note que esta permutación es un ciclo $(1, 4, 6, 8, 3)$, que para este caso, es un ciclo de longitud 5. En los casos que existan otros hay que encontrarlos. Ahora, las transposiciones son $(1, 3)(1, 8)(1, 6)(1, 4)$ y como hay 4 transposiciones entonces se dice que la permutación es par.

3. Sea $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. Determine el menor valor de k tal que $p^k = 1$, donde 1 es la permutación identidad. Al número k se le llama el **periodo** de p.
Solución: Observe que si se tiene un ciclo de longitud r para una permutación p, entonces $p^r(a_1) = a_1$, $p^r(a_2) = a_2$, en general $p^r(a_i) = i$ para todos los elementos del ciclo. De esta manera, basta con determinar los ciclos disjuntos de p y encontrar el menor número k que simultáneamente asegure que $p^k(i) = i$. Para este ejemplo $p = (1, 3, 2, 5)(6, 8, 7)$; para el primer ciclo, se tiene que elevar a la 4, pues esa es su longitud y para el segundo hay que elevar a la 3; entonces, si elevamos a la 12, se logra cumplir con los dos requerimientos. En efecto, $p(1) = 3$, $p^2(1) = 2$, $p^3(1) = 5$ y $p^4(1) = 1$, pero esto no solo sucede con 1, sino que también sucede con 2, 3 y 5; por lo tanto, $p^{4m}(x) = x$ si $x = 1, 2, 3, 5$. Además, $p(6) = 8$, $p^2(6) = 7$ y $p^3(6) = 6$, por esto $p^{3s}(x) = x$, si $x = 6, 7, 8$. Por esto, se debe utilizar como exponente al mínimo común múltiplo entre las longitudes de los ciclos, que en este caso es 12.

Ejercicios recomendados: de las páginas 188 y 189, del 1 al 20.

5.4 Crecimiento de funciones

No se evalúa.

Examen de autoevaluación

A continuación, usted encontrará 5 ejercicios de selección única. Marque con una X la letra de la opción escogida.

21. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$, entonces $(f \circ g)(x)$ es

(a) ( ) $\sqrt{x^2+1}$ (b) ( ) x (c) ( ) $\sqrt{x}+1$ (d) ( ) $x+1$

22. Si $f(x) = x^3 + 1$, entonces la fórmula de $f^{-1}(x)$ es

(a) ( ) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ (b) ( ) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$
(c) ( ) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ (d) ( ) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

23. Si $f = \{(1,2),(2,4),(3,2)\}$, entonces $Dom(f)$ es

(a) ( ) $\{1,2\}$ (b) ( ) $\{1,2,3\}$
(c) ( ) $\{1,2,3,4\}$ (d) ( ) $\{1\}$

24. Sea $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, entonces la permutación p^5 es

(a) ( ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ (b) ( ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(c) ( ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ (d) ( ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

25. Al multiplicar $(1,6)(2,3,4,5)$ se obtiene el resultado

(a) ( ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) ( ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(c) ( ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ (d) ( ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 21. Sean $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ y $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1. Calcule $(p_1 \circ p_2)$ y $(p_1 \circ p_2) \circ p_1^{-1}$.
2. Escriba a p_2 como producto de transposiciones y determine si la permutación p_2 es par o impar.

EJERCICIO 22. Sea $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x > 0 \\ -2x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

1. Complete la tabla

x	-1	0	1
$f(x)$			

2. Demuestre que f es uno a uno y sobre.

EJERCICIO 23. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x + 2$ y $g\colon \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por: $g(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$. Encuentre una fórmula para calcular $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$.

EJERCICIO 24. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, considere el ciclo $(1, 2)$. Determine cuántas permutaciones p de A se pueden escribir como $p = (1, 2)q$ donde q es un ciclo disjunto con el ciclo $(1, 2)$. Recuerde la definición de ciclo disjunto en la página 185.

EJERCICIO 25. Sea $f\colon A \to B$ una función con dominio y rango finitos. Suponga que $|Dom(f)| = n$ y $|Ran(f)| = m$, demuestre que:

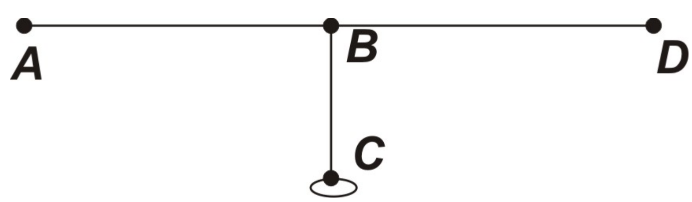
1. Si f es uno a uno, entonces $m = n$.
2. Si f es sobre, entonces $m \leq n$.

Capítulo 6. Gráficas

En este capítulo, se trabaja con gráficas, las cuales corresponden a digrafos de relaciones simétricas, por lo que se suprimen las flechas y cada línea que une dos nodos son "calles de dos sentidos". Se estudiarán las secciones 6.1, 6.2 y 6.3 y esto completa los temas de este curso.

6.1 Gráficas

De la manera más sencilla, podemos decir que una gráfica es un conjunto de vértices $\mathbb{V}$ y aristas $\mathbb{E}$, de manera que para cada arista siempre existirán dos vértices en sus extremos y esto lo indicamos con la relación γ. Ilustremos cada una de estas partes con la siguiente gráfica (ojo, ya no hay flechas). $\mathbb{V} = \{A, B, C, D\}$, $\mathbb{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y las aristas definidas como: $\gamma(e_1) = \{A, B\}$, $\gamma(e_2) = \{B, C\}$, $\gamma(e_3) = \{B, D\}$ y $\gamma(e_4) = \{C, C\}$.



Aunque pueden haber gráficas sin aristas, no pueden existir gráficas sin vértices. Se define el **grado** de un vértice como el número de aristas para las cuales este vértice es un extremo. Si el vértice está aislado su grado es cero. Se dice que dos vértices son **adyacentes** si existe una arista que los une.

En la gráfica anterior A no es adyacente con C. El grado de A y D es 1, el de B y C es 3.

Una **trayectoria** (al igual que en las relaciones) consiste en una secuencia de vértices (nodos) de manera que estos sean adyacentes. Si se regresa al punto de partida de la trayectoria, se le llama **circuito** (igual que los ciclos de antes). Una trayectoria o un circuito se llama **simple** si está compuesto de vértices diferentes. La excepción la encontramos en los circuitos, donde el último vértice es igual al primero. Por ejemplo, A, B, C, B no es una trayectoria simple y B, C, B es un circuito simple de longitud 2.

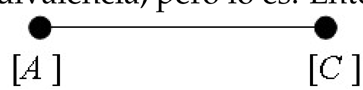
Si en una gráfica es posible construir una trayectoria entre cualesquiera dos vértices, entonces a la gráfica se le llama **conexa**. Si esto no es posible, entonces se le llama **disconexa**. En una gráfica conexa, una arista se llama **puente**, si al eliminarla del conjunto de aristas se forma una gráfica disconexa. Por esto, la gráfica anterior es conexa y todas las aristas excepto γ_{e_4} son puentes.

Una gráfica es **completa** si todos los vértices tienen grado $n-1$, de existir otra arista adicional conecta a dos vértices que ya están conectados. La gráfica presentada al inicio no es completa.

Cuando se define una relación de equivalencia entre el conjunto de vértices, entonces se construye la gráfica cociente, en la cual, todas las aristas entre elementos de la misma clase desaparecen y las aristas entre dos elementos de diferente clase se consideran como una. Supongamos que definimos una relación de equivalencia tal que:

$$R = \{(A, A), (A, B), (B, A), (B, B), (C, C), (C, D), (D, C), (D, D)\}$$

no vamos probar que R es de equivalencia, pero lo es. Entonces la gráfica cociente queda:



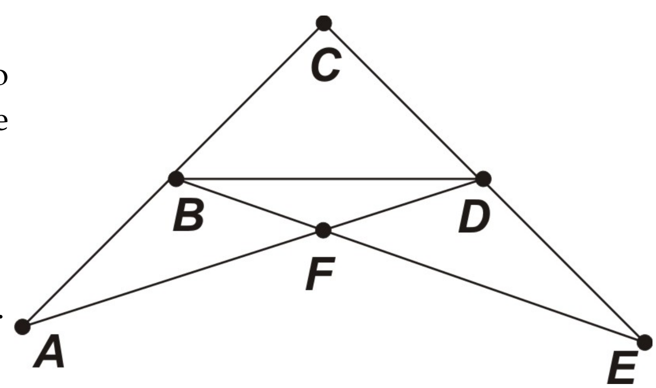
Ejemplos resueltos

1. Considere la gráfica y determine:

    (a) El conjunto de aristas y el conjunto de vértices. Calcule el grado de cada vértice.

    (b) Tres trayectorias que inicien en E.

    (c) Un circuito simple que inicie en A.



Solución:

(a) Vértices: $\mathbb{V} = \{A, B, C, D, E, F\}$,
Aristas: $\mathbb{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$, donde:

$\gamma(e_1) = \{A, B\}$	$\gamma(e_2) = \{B, C\}$	$\gamma(e_3) = \{C, D\}$
$\gamma(e_4) = \{D, E\}$	$\gamma(e_5) = \{E, F\}$	$\gamma(e_6) = \{F, A\}$
$\gamma(e_7) = \{F, B\}$	$\gamma(e_8) = \{B, D\}$	$\gamma(e_9) = \{D, F\}$

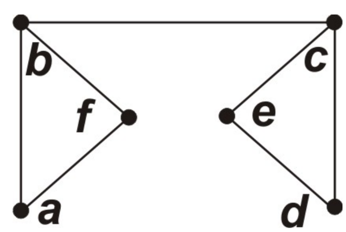
Grados de los vértices: Para los vértices A, C y E el grado es 2. Los vértices B, D y F son de grado 4.

(b) π_1: E, F, D, C, π_2: E, D, B, A y π_3: E, F, D, B, F. π_1 y π_2 son simples de longitud 3 y π_3 no es simple y es de longitud 4.

(c) π: A, B, C, D, E, F, A.

2. Considere $\mathbb{V} = \{a, b, c, d, e, f\}$ y la gráfica siguiente. Se define una relación de equivalencia con el siguiente conjunto cociente

$$\mathbb{V}/R = \{\{a, f\}, \{e, b, d\}, \{c\}\}$$



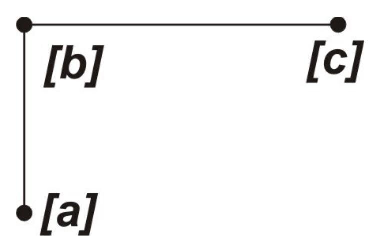
(a) Trace la gráfica cociente.

(b) ¿Es la gráfica cociente conexa o completa?

Solución:

(a) La gráfica está al lado.

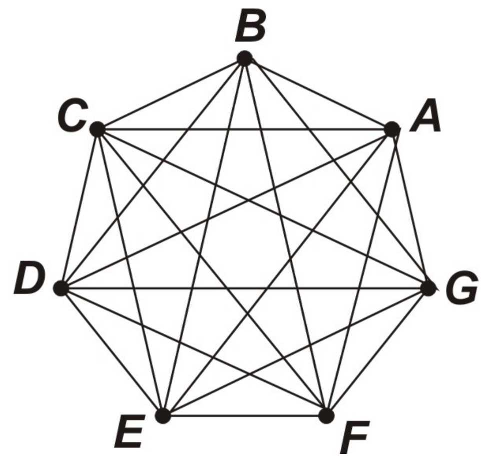
(b) La gráfica es conexa, pues permite trayectorias desde cualquier vértice. No es completa, pues $[a]$ y $[c]$ tienen grado 1.



3. Dibuje una gráfica completa de 7 vértices. ¿Cuántas aristas tiene?
   Solución: La gráfica está al lado. Para que la gráfica sea completa cada vértice debe tener grado $n-1$, en este caso 6. Como cada arista tiene dos extremos, entonces el número total de vértices en una gráfica de n vértices es:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

   que en este caso corresponde a 21.



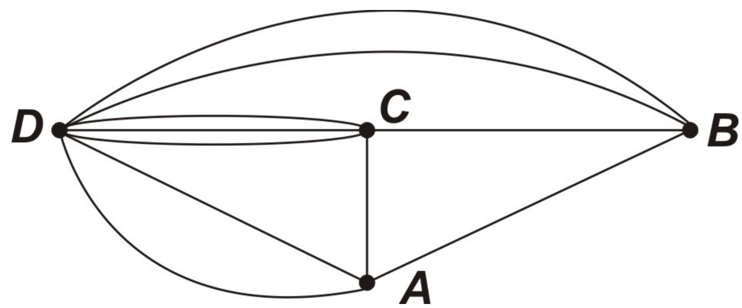
Ejercicios recomendados de las páginas 203 y 204 del 1 al 20.

6.2 Trayectorias y circuitos de Euler

En la sección anterior se definió qué es una trayectoria, ésta la llamamos de Euler si todas las aristas son recorridas una sola vez. Esta trayectoria se llama circuito si además se visita todos los vértices con excepción, claro está, del primer vértice.

Las trayectorias y los circuitos son muy útiles para diseñar rutas de visita de clientes, rutas de reparto, orden de actividades, etc. Sin embargo, cuando se tiene un croquis y se desea hacer la gráfica que lo modele, generalmente no es tan claro cómo procedemos a hacerlo. Tome por ejemplo la figura 6.27 de la página 205. Este croquis es modelado por la figura 6.28 de la página 206. ¿Cómo se logra esto?

Iniciemos contando en el croquis cuántas habitaciones hay. En este caso hay 3 y le agregamos el exterior como una cuarta habitación. Cada habitación será un vértice, por lo que se tienen 4 vértices A, B, C, D. Las aristas serán las puertas que hay, en este caso hay 10. Los vértices A y B son de grado 4. El vértice C es de grado 5 y el vértice D de grado 7. Luego de hacer esto, para obtener la gráfica de la figura 6.28 basta un acomodo. Quizá a esta altura del curso habrá notado que las gráficas que usted podría hacer no son iguales a las mías o a las de otro compañero o compañera. Así que, para que una gráfica se vea "bonita", como la que está publicada en el libro, basta un poco de gracia. Por ejemplo este sería otro acomodo para la misma gráfica.



Dos teoremas regulan la existencia, o no, de trayectorias y circuitos. A modo de resumen:

- Si hay un vértice de grado impar, entonces no puede haber un circuito de Euler. Así, si la gráfica es conexa y todos tienen grado par, entonces existe tal circuito.
- Si hay más de dos vértices con grado impar, entonces no existe una trayectoria de Euler. De esta forma, si hay exactamente dos vértices de grado impar y la gráfica es conexa, entonces sí existe tal trayectoria. Esta inicia en uno de esos vértices y termina en el otro.

Note que si se tiene un circuito, también se tiene una trayectoria, por lo que uniendo estos dos teoremas concluimos que si todos los vértices tiene grado par, entonces existe una trayectoria (que es un circuito) de Euler.

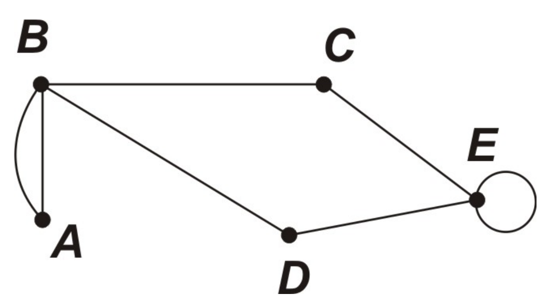
El Algoritmo de Fleury nos ofrece un proceso sistemático para hallar un circuito de Euler a partir de una gráfica conexa con todos sus vértices de grado par.

Ejemplos resueltos

1. Considere la gráfica de al lado:

   (a) Determine si existe un circuito de Euler.

   (b) Indique si existe una trayectoria de Euler.

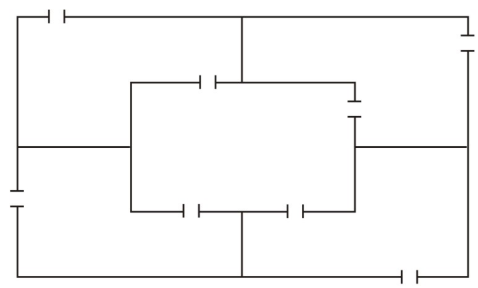


Solución: Para ambas respuestas se debe calcular el grado de cada vértice. Los vértices A, C y D son de grado 2, los vértices B y E son de grado 4. Así:

(a) Existe un circuito de Euler para esta gráfica conexa, pues todos los vértices son de grado par.

(b) Si ya tenemos un circuito este funciona de trayectoria.

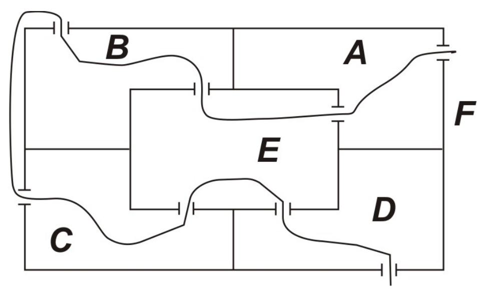
2. Esta es la copia del plano de una casa antigua que usted quiere visitar, y se le pide que, si es posible, se pueda pasar por cada cuarto cruzando por cada puerta solo una vez.



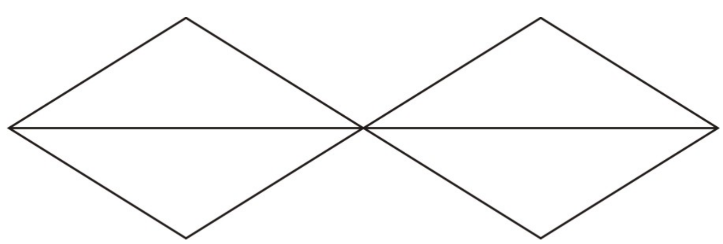
   (a) Determine si existe solución al problema.

   (b) Si existe solución, muestre el recorrido, y si no, modifique el número de puertas de modo que exista solución.

   Solución: Etiquete cada habitación iniciando en la habitación superior derecha y siguiendo el sentido contrario a las manecillas del reloj: El conjunto de vértices es $\{A, B, C, D, E, F\}$, E es la habitación interna y F es el exterior. Cada puerta representa una arista entre los vértices, así, A, B, C, D tiene grado 2 y E y F son de grado 4. Hay solución pues todos los vértices son de grado par. Por último, un recorrido con inicio en F sería π: $F, A, E, B, F, C, E, D, F$.



3. Diga si es posible dibujar esta figura sin levantar el lápiz, o no.



   Solución: La respuesta se basa en el grado de cada vértice, si etiquetamos los vértices de los extremos como A y B notamos que estos vértices tienen grado impar y el resto par; por lo tanto, el problema tiene solución. Así, se debe arrancar en A y terminar en B, o al revés. Una estrategia sería iniciar en el rombo de la izquierda, dibujarlo y cuando se regresa al vértice A se viaja hacia B por la línea central, luego se dibuja el rombo de la derecha, finalizando en B.

Ejercicios recomendados: de las páginas 210 a la 213 del 1 al 15.

6.3 Trayectorias y circuitos hamiltonianos

En esta sección, y para terminar el curso, se estudia una definición paralela a la de las trayectorias de Euler; en aquellas se debía pasar por cada arista una sola vez, en ésta en cambio, se debe visitar solo una vez a cada vértice. Si tal trayectoria existe, se dice que es una **trayectoria hamiltoniana**, y si además es un circuito, se llama **circuito hamiltoniano**.

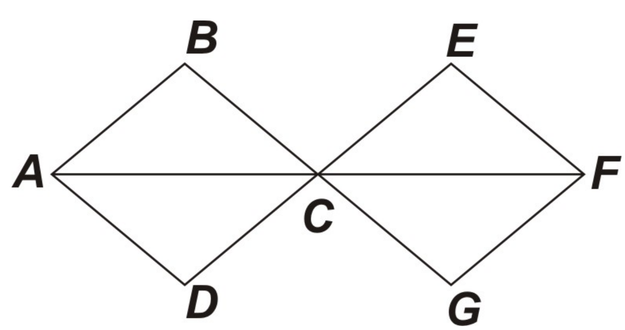
A diferencia de los dos teoremas que se tienen para trayectorias de Euler, en este caso solo se cuenta con dos teoremas que indican situaciones donde se puede asegurar que existe, más no significa que si estas condiciones no se den entonces no exista una trayectoria hamiltoniana. Resumiendo los dos resultados:

- Hay una trayectoria hamiltoniana si el grado de u más el grado de v es mayor o igual que el número de vértices, para vértices u y v no adyacentes. En símbolos: Sea n el número de vértices
$$grado(u) + grad(v) \geq n$$
- Si m, el número de aristas es mayor o igual a $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$, entonces hay un circuito hamiltoniano, con n el número de vértices.

Esto significa que si alguna de las condiciones se presenta, entonces se puede concluir la existencia de una trayectoria o circuito, según sea el caso; pero si la condición no se presenta, entonces hay que intentar encontrar uno "a pie".

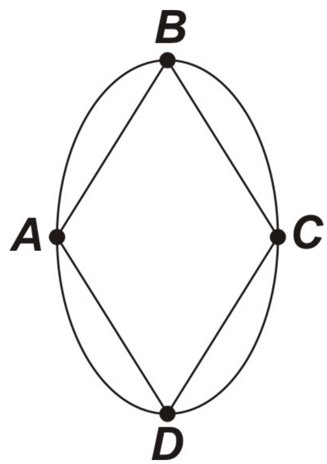
Ejemplos resueltos

1. Determine si la gráfica tiene un circuito hamiltoniano, o no.



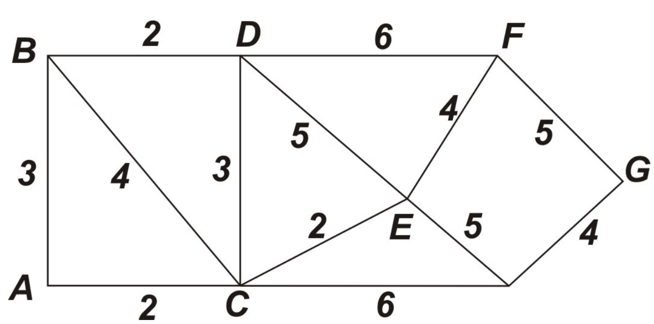
Solución: Si revisamos el teorema, se tiene que la suma del grado de cualesquiera dos vértices no adyacentes varía de 4 a 9 y solo hay 7 vértices, por lo que el teorema 1 no asegura la existencia del circuito buscado. Sin embargo, notamos que si se dibuja la parte de la derecha o izquierda de esta gráfica es necesario pasar por el vértice C para trasladarse a la otra parte. Por esta razón, no existe el circuito hamiltoniano.

2. Determine si la gráfica tiene un circuito hamiltoniano, o no



Solución: Si revisamos el teorema, notamos que en esta gráfica todos sus vértices tienen grado 4 y la suma de los grados es siempre 8, que es mayor que el número de vértices, que es 4, por lo que se asegura que existe un circuito hamiltoniano, pero no se indica cómo encontrarlo. Por simple observación, el circuito π: A, B, C, D, A es hamiltoniano.

3. Determine un circuito hamiltoniano para la gráfica adjunta. Determine un circuito hamiltoniano de peso mínimo.



Solución: Para esta gráfica se tiene que $n = 8$ y $m = 13$, para verificar la condición $m \geq \dfrac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$ equivale a $13 \geq 23$, la cual es claramente falsa; aun así, se subraya que esto no elimina la posibilidad de que exista. De hecho, π: $F, G, H, E, C, A, B, D, F$ es un circuito hamiltoniano. Por otro lado, si existe un circuito, deben existir más por lo que tiene sentido buscar el circuito de peso mínimo. Iniciemos en el vértice A cuyas aristas suman menos y de A pasemos a C; π: A, C luego de C a E, pues es la menor de sus aristas. Al llegar a E si seguimos con la arista de peso mínimo sería necesario volver a pasar por algún vértice que ya se pasó. Por esto elegimos continuar hacia H, y de ahí a G, para luego llegar a F, de este vértice a D y finalizar pasando por B para regresar a A. Entonces, el peso total del circuito π: $A, C, E, H, G, F, D, B, A$ escogido fue $2 + 2 + 5 + 4 + 5 + 6 + 2 + 3 = 29$ y este será el mínimo pues la escogencia de los vértices se hizo eligiendo las aristas de menor peso.

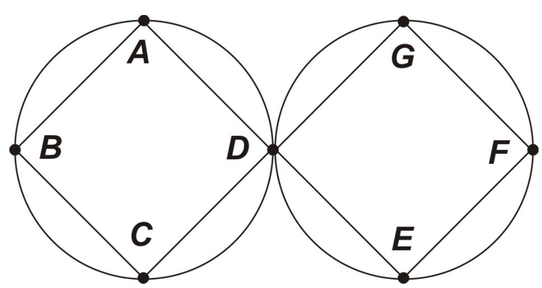
Ejercicios recomendados: de las páginas 216 y 217, del 1 al 15.

6.4 Coloración de gráficas

No se evalúa.

Examen de autoevaluación

A continuación, usted encontrará 5 ejercicios de selección única relacionados con la gráfica adjunta. Marque con una X la letra de la opción escogida.



26. El número total de aristas en esta gráfica es

(a) ( ) 6 (b) ( ) 8 (c) ( ) 12 (d) ( ) 16

27. Si se elimina el vértice D con las correspondientes aristas que contienen a D, la gráfica obtenida se llama:

(a) ( ) completa (b) ( ) lineal
(c) ( ) disconexa (d) ( ) conexa

28. Considere solo los vértices $\{A, B, C, D\}$ con las aristas correspondientes. Un circuito de Euler para la gráfica así construida es

(a) ( ) π: A, B, C, D (b) ( ) π: $A, B, C, D, A, B, C, D, A$
(c) ( ) π: D, A, B, C, D, A (d) ( ) π: C, D, A, B, C, D, C

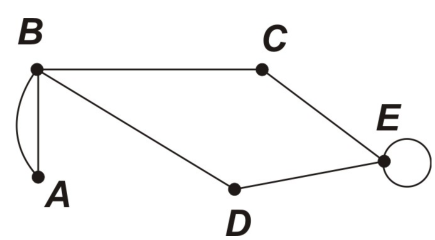
29. Considere los vértices de la gráfica con solo una arista entre cada vértice. Un circuito de Euler para esta gráfica es

(a) ( ) π: $A, B, C, D, E, F, G, D, A$ (b) ( ) π: A, D, E, F, G, D, A
(c) ( ) π: $D, A, B, C, D, A, E, F, G, D$ (d) ( ) π: C, D, A, B, C, D, C

30. La gráfica original no tiene un circuito hamiltoniano porque le hace falta una arista. Entonces, para que tenga un circuito hamiltoniano se debe agregar la arista:

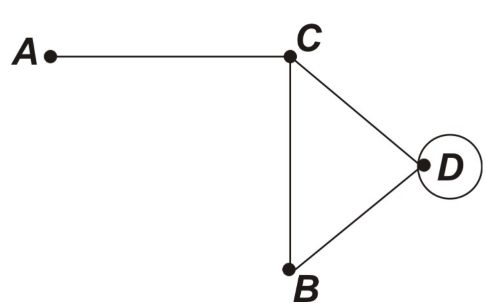
(a) ( ) $\{A, F\}$ (b) ( ) $\{D, F\}$ (c) ( ) $\{B, D\}$ (d) ( ) $\{A, G\}$

EJERCICIO 26. Considere la siguiente gráfica y responda a las siguientes preguntas:



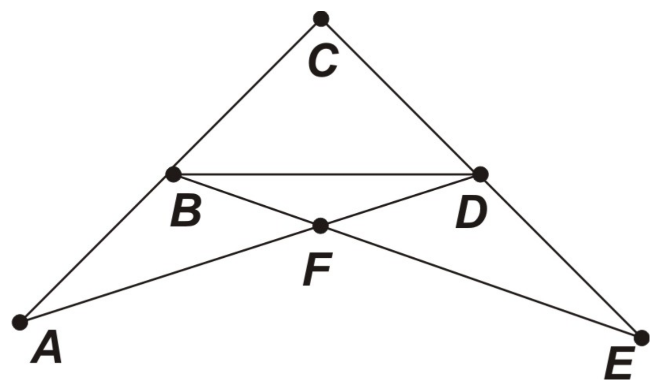
1. ¿Cuál es el grado de cada vértice?
2. ¿Cuántas aristas hay que agregar o quitar para que la gráfica sea completa?

EJERCICIO 27. Considere la siguiente gráfica y responda a las siguientes preguntas:



1. ¿Cuántas trayectorias de longitud menor o igual a 3 hay de A a D?
2. ¿Cuántas trayectorias de Euler existen entre A y D?

EJERCICIO 28. Considere la siguiente gráfica y responda según se le indique:

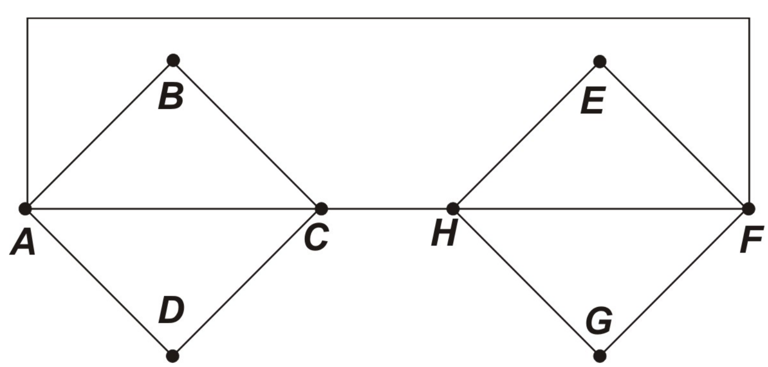


1. Demuestre que cumple con las condiciones teóricas para tener un circuito de Euler.
2. Calcule un circuito de Euler.

EJERCICIO 29. Considere la gráfica del ejercicio anterior y responda según se le indique:

1. Determine si cumple con las condiciones teóricas para tener un circuito Hamiltoniano.
2. Calcule un circuito Hamiltoniano.

EJERCICIO 30. Considere la gráfica que aparece al lado y determine, utilizando el algoritmo de Fleury, un circuito de Euler.



Soluciones a la Autoevaluación

Soluciones a los ejercicios de selección

1. Si x es entero y su cuadrado es menor que 17, es alguno de los números enteros entre -4 y 4.
   Opción (a).

2. Se tiene que $1\,365 \div 15 = 91$ y $2\,475 \div 15 = 165$ y entre estos dos cocientes no hay factores comunes.
   Opción (c).

3. Aunque $3 \in A$ y $5 \in A$, se tiene que $7 \notin A$, por lo que $\{3, 5, 7\} \nsubseteq A$.
   Opción (d).

4. Note que los elementos van de 5 en 5 por lo que si $n = 1$, $a_1 = 5 - 2 = 3$, y en general $a_n = 5n - 2$.
   Opción (b).

5. El producto CB no está definido, pues las matrices no son compatibles.
   Opción (b).

6. La frase es equivalente a decir "para todo entero n tal que $n > 5$, entonces $n < 10$".
   Opción (c).

7. La disyunción corresponde a $p \vee q$.
   Opción (c).

8. La proposición recíproca de $p \rightarrow \sim q$ es $\sim q \rightarrow p$ y es equivalente a $q \vee p$, o bien por la conmutatividad corresponde a $p \vee q$.
   Opción (b).

9. La proposición contrapositiva de $\sim p \to \sim q$ es $q \to p \equiv \sim q \vee p$, o bien por la conmutatividad corresponde a $p \vee \sim q$.
   Opción (a).

10. Si $\sim q \wedge (p \to q)$ entonces $\sim q \wedge (\sim q \to \sim p)$ y esto implica $\sim p$.
    Opción (d).

11. Hay siete formas de escoger el primer carácter, luego se tiene 26 letras y diez números para el resto de los 6 campos, por esto $7 \cdot 36^6$.
    Opción (c).

12. Para el primer carácter hay dos vocales, para las siguientes seis campos hay cinco vocales a escoger por esto $2 \cdot 5^6$.
    Opción (b).

13. Hay siete campos y deben colocarse cuatro letras A y tres letras E por esto $\dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ es la respuesta.
    Opción (a).

14. Hay un campo en el que debe colocarse alguna letra de las siete disponibles y para que la suma sea 4 debe haber cuatro unos. Hay ${}_6C_4$ formas de escoger cuatro unos por lo que $7 \cdot {}_6C_4 = 105$ es la respuesta.
    Opción (c).

15. Hay un campo en el que debe colocarse alguna letra de las siete disponibles. Se calcula cuando la suma es 6, pero esto es posible solo en un caso de manera que se tienen siete posibilidades de que la suma sea exactamente 6. Como hay $7 \cdot 64 = 448$ claves posibles, la respuesta es 441.
    Opción (a).

16. $A \times B = \{(2,2),(2,3),(1,2),(1,3)\}$.
    Opción (c).

17. Para que sea una partición los conjuntos tienen que ser disjuntos, y la unión de ellos, el conjunto completo, $\{A_2, A_3\}$.
    Opción (a).

18. Los elementos que se relacionan con 7 son $\{1,4,7,10\}$.
    Opción (b).

19. Es claro que no es reflexiva y si es transitiva pues aRb y bRc así que aRc.
Opción (a).

20. Es claro que es reflexiva y como la matriz no es simétrica entonces la relación no es simétrica.
Opción (d).

21. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^2 = x+1$.
Opción (d).

22. $y = x^3 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y-1} = x$.
Opción (b).

23. $Dom(f) = \{1, 2, 3\}$.
Opción (b).

24. $p^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ pues $p = (2, 3, 4, 5, 6)$.
Opción (b).

25. Al calcular el ciclo $(2, 3, 4, 5)$ se tiene $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ luego aplicamos la transposición $(1, 6)$ y se obtiene $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Opción (a).

26. Se tienen 8 aristas en la parte de la derecha e igual número de aristas en la parte izquierda, en total hay 16.
Opción (d).

27. Al eliminar este vértice se obtiene una gráfica disconexa pues no habrá forma de ir de B a F.
Opción (c).

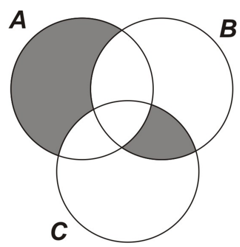
28. Un circuito debe pasar por todas las aristas, π: $A, B, C, D, A, B, C, D, A$.
Opción (b).

29. Un circuito debe pasar por todas las aristas, por eso π: $A, B, C, D, E, F, G, D, A$.
Opción (a).

30. Al agregar la arista $\{A, G\}$ permite el circuito π: A, B, C, D, E, F, G, A.
Opción (d).

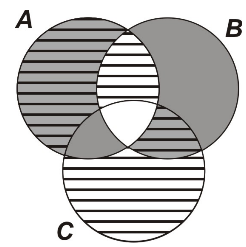
Soluciones a los ejercicios de desarrollo

1. 1. En el diagrama de al lado sombreamos la región de A que no interseca a $B \cap C$ y la región de $B \cap C$ que no toca a A.



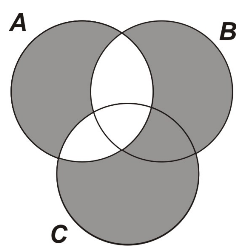
$A \oplus (B \cap C)$

En el otro, sombreamos $A \oplus B$ y con otra trama a $A \oplus C$ para luego buscar la región con las dos tramas. Al final se obtiene la misma región.



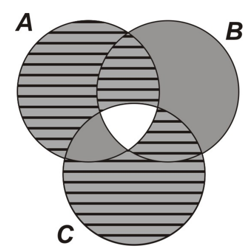
$(A \oplus B) \cap (A \oplus C)$

   2. Ahora sombreamos la parte de A que no toca a $B \cup C$ y la parte de $B \cup C$ que no toca a A.



$A \oplus (B \cup C)$

Luego sombreamos $A \oplus B$ y con otra trama a $A \oplus C$ para luego buscar la región que incluya todo lo sombreado. Por lo que no es la misma región.



$(A \oplus B) \cup (A \oplus C)$

2. ($\Rightarrow$) Se demostrará que si $A \subseteq B$, entonces $\overline{B} \subseteq \overline{A}$. Sea $x \in \overline{B}$ entonces $x \notin B \Rightarrow x \in U$ y $x \notin A$ pues $A \subseteq B$ entonces $x \in \overline{A}$.

   ($\Leftarrow$) Por otro lado, se demostrará que si $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ entonces $A \subseteq B$. Sea $x \in A$, entonces $x \notin \overline{A}$ y como $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, entonces $x \in U$ y $x \notin \overline{B}$ entonces $x \in B$.

3. Al desarrollar las funciones características se tiene $f_{(A\oplus B)\oplus C}(x)$

$$
\begin{aligned}
&= f_{A\oplus B}(x) + f_C(x) - 2f_{A\oplus B}(x)f_C(x) \\
&= f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x) + f_C(x) - 2(f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x))f_C(x) \\
&= f_A(x) + f_B(x) + f_C(x) - 2f_A(x)f_B(x) - 2f_A(x)f_C(x) - 2f_B(x)f_C(x) + 4f_A(x)f_B(x)f_C(x)
\end{aligned}
$$

   Por otro lado $f_{A\oplus(B\oplus C)}(x)$

$$
\begin{aligned}
&= f_A(x) + f_{B\oplus C}(x) - 2f_A(x)f_{B\oplus C}(x) \\
&= f_A(x) + f_B(x) + f_C(x) - 2f_B(x)f_C(x) - 2f_A(x)(f_B(x) + f_C(x) - 2f_B(x)f_C(x)) \\
&= f_A(x) + f_B(x) + f_C(x) - 2f_A(x)f_C(x) - 2f_B(x)f_C(x) - 2f_A(x)f_B(x) + 4f_A(x)f_B(x)f_C(x)
\end{aligned}
$$

   Y dado que son iguales, se concluye $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

4. Suponga que p no divide a a, entonces el máximo común divisor de p y a es 1, así, existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tal que $ar + ps = 1$, entonces al multiplicar por b esta igualdad se

obtiene $(ab)r + pbs = b$ (se han colocado paréntesis para agrupar a (ab)) y como (ab) es un múltiplo de p, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $ab = pk$, sustituyendo esto en la igualdad $(ab)r + pbs = b$ se obtiene $pkr + pbs = b$, entonces $p(kr + bs) = b$, en otras palabras b es un múltiplo de p.

5. Los resultados son:

   1. $A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   2. $A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. Construimos la tabla indicada

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

   Con lo que se demuestra la tautología.

7. Llamamos p: me volveré famoso y q: seré escritor. El razonamiento se puede escribir como $[(p \vee q) \wedge \sim q] \to p$ y es una tautología pues es la proposición (h) del teorema 4.

8. Sea $P(n)$: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1) \cdot n < \dfrac{n^2(n+1)}{3}$.

   Paso base: $P(3)$ es verdadera. Veamos $P(3)$ dice que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 < \dfrac{3^2(3+1)}{3}$ o bien $8 < 12$, lo cual es cierto.

   Paso de inducción: Si asumimos que $P(n)$ es verdadera, hay que probar que $P(n+1)$ es verdadera. La proposición $P(n+1)$ dice:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) < \frac{(n+1)^2(n+2)}{3}$$

   Veamos su validez

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) &= [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1) \cdot n] + n \cdot (n+1) \\ &< \frac{n^2(n+1)}{3} + n \cdot (n+1) \\ &= n(n+1)\left[\frac{n}{3} + 1\right] = n(n+1)\left[\frac{n+3}{3}\right] \end{aligned}$$

Para saber si se cumple la desigualdad hay que comparar las dos expresiones

$$n(n+1)\left[\frac{n+3}{3}\right] \text{ y } \frac{(n+1)^2(n+2)}{3}$$

Eliminando los factores iguales, basta con comparar $n(n+3)$ con $(n+1)(n+2)$. Desarrollando ambas expresiones, se tiene que comparar n^2+3n contra n^2+3n+2, es evidente que $n(n+3) < (n+1)(n+2)$, lo que demuestra que $n(n+1)\left[\frac{n+3}{3}\right] < \frac{(n+1)^2(n+2)}{3}$.

9. Sea $P(n)$: $(1+x)^n > 1+nx$.
   Paso base: $P(2)$ es verdadera. Veamos $P(2)$ dice que $(1+x)^2 > 1+2x$ lo cual es cierto, pues $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$ y la diferencia es un término positivo.
   Paso de inducción: Asumimos que $P(n)$ es verdadera, hay que probar que $P(n+1)$ es verdadera. La proposición $P(n+1)$ dice: $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$. Veamos

   $$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2$$

   Esta última expresión es igual a $1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x$. Por lo que se obtiene

   $$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$$

   Con esto demuestra la propiedad.

10. Sea p: x es racional, q: y es irracional y r: $x+y$ es irracional, entonces el enunciado es de la forma $(p \wedge q) \rightarrow r$. Suponga por contradicción $(p \wedge q) \wedge \sim r$ entonces $p \wedge \sim r$, esto es x es racional y $x+y$ es racional por lo que $(x+y)-x$ debe ser racional por ser resta de números racionales; sin embargo, esta resta da y y contradice la hipótesis de que y sea irracional, por lo tanto $x+y$ es irracional.

11. Considere todas las parejas de números que suman 13, estas son 6, por lo que si se escogen 7 números se va a escoger necesariamente alguna de estas parejas.

12. Como son tres números y los enteros son pares o impares, se puede asegurar que dos son de la misma paridad (ambos pares o ambos impares) ante esto alguno de los números $(n+m)$, $(n+p)$ o $(p+m)$ resulta ser un número par. Por lo tanto, el producto es par.

13. ${}_6C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_5C_1 = 120$. Este cálculo determina el número posible de extracciones y la probabilidad es $\frac{120}{15^3}$.

14. Se tiene un total de 36 posibles resultados entre 2 y 12. Nos interesan los resultados $\{2,3,\ldots 9\}$ pero es complementario a $\{10,11,12\}$. Dado que los eventos son independientes, basta con sumar las probabilidades individuales de cada uno de estos resultados. Esto es:
$$P(\text{suma} \geq 10) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36}$$
Por lo que la probabilidad buscada es $\frac{30}{36}$.

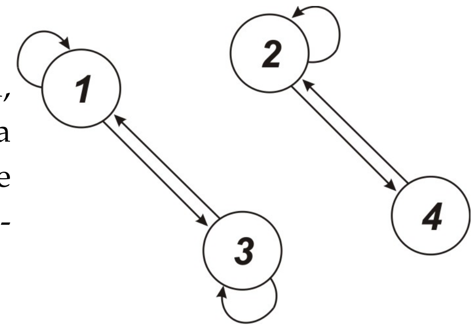
15. Se tiene un total de 36 posibles resultados entre 2 y 12. Nos interesa los resultados $\{2,3,4,5,6\}$, los cuales tienen la misma probabilidad de $\{8,9,10,11,12\}$ entonces se calcula la probabilidad de que la suma sea 7 y con esto se obtiene $P(\text{suma} = 7) = \frac{6}{36}$, su complemento es $\frac{30}{36}$ y como es solo la mitad, la respuesta es $\frac{15}{36}$.

16. Es reflexiva pues la diagonal está compuesta por unos. No es simétrica, pues la matriz no lo es y basta hacer el producto booleano para saber si es transitiva
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Como el resultado es igual a la matriz original, es transitiva.

17. Una partición debe ser disjunta y la unión debe dar el conjunto completo. La partición puede contener 2, 3 ó 4 elementos. Hay una partición de 4 elementos, compuesto por conjunto unitarios. Con 3 elementos, uno de los conjuntos contiene 2 elementos y los otros son unitarios, por esto hay $\binom{4}{2} = 6$ particiones de 3 elementos. Con 2 elementos hay dos posibilidades, un conjunto con 3 elementos o bien 2 conjuntos con 2 elementos; hay $\binom{4}{3} = 4$ conjuntos de 3 elementos y $\frac{1}{2} \cdot \binom{4}{2} = 3$ de 2 elementos, (estas se dividen entre dos, pues hay repetidas) en total 7 particiones con 2 elementos. Así hay $1 + 6 + 7 = 14$ particiones.

18. Escribamos la matriz M_{R^2}: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Con esta matriz notamos que la relación es reflexiva, es simétrica y no hace falta calcular $M_{R^2} \odot M_{R^2}$ para notar que el resultado será la misma matriz (si tiene dudas realice el cálculo), por lo que también es transitiva.



19. Hay que comprobar las tres propiedades:

Reflexiva: Sea $x \in \mathbb{Z}$ entonces xRx, pues $x - x = 0$ y 0 es múltiplo de 4.

Simétrica: Si xRy entonces $x - y = 4t$, lo que equivale a decir que $y - x = 4(-t)$ o bien, que $y - x$ es un múltiplo de 4. Por lo tanto yRx.

Transitiva: Sea xRy y yRz entonces $x - y = 4t$ y $y - z = 4s$ entonces sumando ambos miembros de las ecuaciones $(x - y) + (y - z) = 4t + 4s$ o bien $x - z = 4(t + s)$ que indica que $x - z$ es un múltiplo de 4. Por lo tanto xRz y la relación es transitiva.

Por lo tanto, la relación es de equivalencia. Para determinar el conjunto de clases, calculemos $[0] = \{x \in \mathbb{Z} | xR0\}$ o bien $x = 4t$, esto es, x es un múltiplo de 4. La $[1]$ son los números tales que $x - 1 = 4t$ o bien $x = 4t + 1$, así,

$$[1] = \{\ldots, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$$

Ahora $[2]$ contiene a los números de la forma $4t + 2$ pues $x - 2 = 4t$, entonces

$$[2] = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, \ldots\}$$

Por último, $[3]$ es el conjunto de los números de la forma $x = 4t + 3$, que corresponde a

$$\{\ldots, -5, -1, 3, 7, \ldots\}$$

Estas son todas las clases: $\mathbb{Z}/R = \{[0], [1], [2], [3]\}$.

20. Recuerde que cada par ordenado de R_1 o R_2 es un uno en el correspondiente elemento de la matriz:

   1. Las matrices son

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Para calcular la relación $R_2 \circ R_1$ mejor calculamos $M_{R_1} \odot M_{R_2}$

$$M_{R_1} \odot M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la composición es $R_2 \circ R_1 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,2),(3,3)\}$. Al determinar $R_1 \cap R_2$ se obtiene el conjunto $\{(1,2)\}$.
Por último, la relación inversa es $R_1{}^{-1} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3)\}$.

21. 1. $(p_1 \circ p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $(p_1 \circ p_2) \circ p_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $p_2 = (1,2,3)(4,5) = (1,3)(1,2)(4,5)$. La permutación es impar, pues es el producto de 3 transposiciones.

22. 1. La tabla completa queda

x	-1	0	1
$f(x)$	2	0	1

2. Note primero que las imágenes de los números negativos son números pares y que la imágenes de los números positivos son impares. Así, f es uno a uno, pues si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces deben ser x_1 y x_2 ambos positivos o ambos negativos. En el caso de que sean ambos negativos se tiene $-2x_1 = -2x_2$ de donde se implica que $x_1 = x_2$. Si ambos son positivos la igualdad es $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$ que es equivalente a $x_1 = x_2$. Ahora, f es sobre pues si $y \in \mathbb{N}$, y es un número par o impar. Si $y = 2k$ un número par, entonces tomamos $x = -k$ y $-k \in \mathbb{Z}$ y se cumple que $f(-k) = y$, pero si $y = 2k - 1$ un número impar, entonces tome $x = k$ y así $f(x) = y$.

23. Veamos $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2) = \dfrac{(x+2)-1}{(x+2)-2} = \dfrac{x+1}{x}$. Para la otra composición: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) = \dfrac{x-1}{x-2} + 2 = \dfrac{x-1+2x-4}{x-2} = \dfrac{3x-5}{x-2}$.

24. Los ciclos que son disjuntos con $(1,2)$ son aquellos cuyos elementos sean $\{3,4,5,6\}$, por esto el ciclo puede tener longitud 2, 3 ó 4. Hay un ciclo de longitud 4, $\binom{4}{3} = 4$ ciclos de longitud 3 y $\binom{4}{2} = 6$ ciclos de longitud 2, por lo tanto, hay 11 ciclos disjuntos con p y como para cada ciclo disjunto se tiene una permutación diferente, entonces hay 11 permutaciones que se pueden escribir $p = (1,2)q$.

25. 1. Si f es uno a uno, entonces $f\colon Dom(f) \to Ran(f)$ es una biyección por lo que $m = n$.

2. Si f es sobre, para cada $y \in Ran(f)$ existe al menos $x \in Dom(f)$ tal que $y = f(x)$ por lo tanto $m \leq n$.

26. 1. El grado de cada vértice es

vértice	A	B	C	D	E
grado	2	4	2	2	3

2. El número de aristas de una gráfica completa de 5 vértices es 10. Debe eliminarse las aristas $\{E, E\}, \{A, B\}$ y luego agregar las aristas $\{A, D\}, \{A, E\}, \{A, C\}, \{D, C\}$, $\{E, B\}$. Todas juntas suman 10.

27. 1. Hay tres trayectorias: éstas serían π_1: A, C, B, D, π_2: A, C, D y π_3: A, C, D, D.

2. Ir de A a D es lo mismo que ir de C a D; como solo hay dos formas de hacerlo, pasando por B y no pasando, se tiene que solo existen estas dos trayectorias.

28. (a) Las condiciones teóricas son que todos los vértices son de grado par. Para esta gráfica A, C y E son de grado 2 y B, F y D son de grado 4.

(b) Circuito de Euler π: $A, B, C, D, E, F, B, D, F, A$.

29. (a) Dos vértices no adyacentes tienen como suma de sus grados valores entre 4 y 6, y en cualquiera de estos casos no se cumple que $7 > grad(u) + grad(v)$. Para la otra condición se tiene que $m = 7$ y $n = 7$, así que $\frac{1}{2} \cdot (n^2 - 3n + 6) = 22{,}5$. Así que tampoco se cumple con la otra condición. Sin embargo, existe.

(b) Circuito hamiltoniano π: A, B, C, D, E, F, A.

30. Hay varias respuestas, se expondrá el razonamiento de una de ellas iniciando en A.

Ruta	**Arista siguiente**	**Razonamiento**
	$\{A, B\}$	Se escoge una de las aristas desde A
π: A, B	$\{B, C\}$	Solo hay una arista desde B
π: A, B, C	$\{C, D\}$	La arista $\{C, H\}$ es puente, se elige cualquier otra.
π: A, B, C, D	$\{D, A\}$	No hay más aristas desde D.
π: A, B, C, D, A	$\{A, F\}$	$\{A, C\}$ es puente
π: A, B, C, D, A, F	$\{F, E\}$	Se escoge una de las aristas desde F.
π: A, B, C, D, A, F, E	$\{E, H\}$	Solo hay una arista desde E
π: A, B, C, D, A, F, E, H	$\{H, G\}$	La arista $\{C, H\}$ es puente, se elige cualquier otra
π: $A, B, C, D, A, F, E, H, G$	$\{G, F\}$	Solo hay una arista desde G
π: $A, B, C, D, A, F, E, H, G, F$	$\{F, H\}$	Solo hay una arista desde F
π: $A, B, C, D, A, F, E, H, G, F, H$	$\{H, C\}$	Solo hay una arista desde H
π: $A, B, C, D, A, F, E, H, G, F, H, C$	$\{C, A\}$	Solo hay una arista desde C
π: $A, B, C, D, A, F, E, H, G, F, H, C, A$		

Referencias de consulta

[1] Johnsonbaugh Richard, (1998) *Matemáticas Discretas*. Mexico: Pearson Prentice-Hall.

[2] Grimaldi, R. (1997). *Matemáticas discreta y combinatoria* Addison-Wesley Iberoamericana, tercera edición.

[3] Kenneth H. Rosen (2004) *Matemática Discreta y Aplicaciones*. España. McGraw-Hill.

[4] Kolman, B. et al (1997) *Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación.* Mexico: Pearson Prentice-Hall.

Algunos enlaces de interés

1. http://www.uam.es/personal__pdi/ciencias/gallardo/
2. http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primerciclo/matdiscreta/
3. http://www.dma.fi.upm.es/fleury/pseudocodigoFleury.htm