

UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO
Oddelek za matematiko in računalništvo

DIPLOMSKO DELO

Tadeja Urlep

Maribor, 2016

UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO
Oddelek za matematiko in računalništvo

Diplomsko delo

**NOVEJŠE POSPLOŠITVE
FERMATOVE TOČKE**

Mentor: doc. dr. Bojan Hvala

Kandidatka: Tadeja Urlep

Maribor, 2016

ZAHVALA

V prvi vrsti bi se rada zahvalila mentorju doc.dr. Bojanu Hvali za vse napotke, potrpežljivost in predvsem za strokovno pomoč pri nastajanju diplomskega dela.

Posebna hvala gre tudi mojim domačim za veliko podporo in finančno pomoč pri študiju.

Hvala tudi moji družini, Marjanu, hčerki Larisi in sinu Tilnu, za motivacijsko podporo in optimistične besede.

Iskreno hvala tudi vsem ostalim prijateljem, ki ste mi vsa ta leta stali ob strani in me vzpodbujali.

UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

IZJAVA

Podpisana Tadeja Urlep, rojena 04. 11. 1986, študentka Fakultete za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru, študijskega programa enopredmetna matematika, izjavljam, da je diplomsko delo z naslovom

NOVEJŠE POSPOLOŠITVE FERMATOVE TOČKE

pri mentorju doc. dr. Bojan Hvala avtorsko delo. V diplomskem delu so uporabljeni viri in literatura korektno navedeni; teksti niso uporabljeni brez navedbe avtorjev.

Maribor, 2016

Tadeja Urlep

Novejše posplošitve Fermatove točke

program diplomskega dela

V diplomskem delu predstavite tri posplošitve Fermatove točke trikotnika, ki temeljijo na tem, da bodisi nad stranicmi trikotnika na primeren način narišemo trikotnike, ki niso več nujno enakostranični, bodisi da enakostranične trikotnike narišemo nad stranicami (iz začetnega trikotnika na ustrezen način pridobljenega) šestkotnika.

Literatura:

1. M. de Villiers: *A generalization of Fermat - Toricelli point*, Math. Gaz. 79(1995), str. 374 – 378.
2. M. de Villiers: *Further generalizations of Fermat - Toricelli point*, Math. Gaz. 83(1999), str. 106 – 108.
3. O. P. Loosers: *A generalization of Napoleon's theorem*, Math. Mag. 70(1997), str. 70 – 73.

doc. dr. Bojan Hvala

URLEP, T. : Novejše posplošitve Fermatove točke.

Diplomsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2016.

IZVLEČEK

Če nad stranicami trikotnika z zunanje strani narišemo enakostranične trikotnike APB , BQC in CRA , se daljice AQ , BR in CP sekajo v Fermatovi točki F_e trikotnika ABC .

Diplomsko delo prinaša nekatere posplošitve tega rezultata. Pri eni nad stranicami narišemo podobne enakostranične trikotnike. Pri drugi nad stranicami na primeren način narišemo podobne (ne nujno enakokrake) trikotnike. Obe omenjeni situaciji sta posebna primera splošnejše situacije, kjer pri vsakem oglišču od obeh stranic, ki se stikata v tem oglišču, navzven odmerimo enake kote.

V naslednji posplošitvi iz trikotnika na primeren način ustvarimo šestkotnik in nad stranicami tega narišemo enakostranične trikotnike. Tudi tokrat smo priča dejstvu, da se tri daljice sekajo v skupni točki. Isto se zgodi, če enakostranične trikotnike namesto navznoter narišemo navzven.

Ključne besede: Fermatova točka, Napoleonov izrek, posplošitve Fermatove točke, konkurentne daljice, Cevov izrek, kompleksna števila v geometriji.

Math. Subj. Class. (2010): 51M04,

URLEP, T. : Recent generalizations of Fermat point.

Graduation Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2016.

ABSTRACT

If we draw equilateral triangles APB , BQC in CRA on the outside of the given triangle ABC , the three segments AQ , BR and CP intersect in the Fermat point F_e of a triangle ABC .

In the diploma thesis we present some generalizations of this result. Instead of equilateral triangles we draw similar isosceles triangles. Next we draw (in an appropriate manner) similar scalene triangles. Both mentioned situations are special cases of a more general situation, where at every vertex of a triangle we draw two rays, forming the same angle with the sides of a triangle that meet in that specific vertex. Repeating this in all three vertices with possibly different angles at different vertices, we end up with three triangles APB , BQC in CRA and concurrent lines AQ , BR and CP .

Finally we start with a triangle and form a certain hexagon out of it. On the sides of this hexagon we again erect equilateral triangles and end up again with three concurrent lines. The same is true if the equilateral triangles are erected on the inside.

Keywords: Fermat point, Napoleon's theorem, generalizations of Fermat point, concurrent lines, Ceva's theorem, complex numbers and geometry.

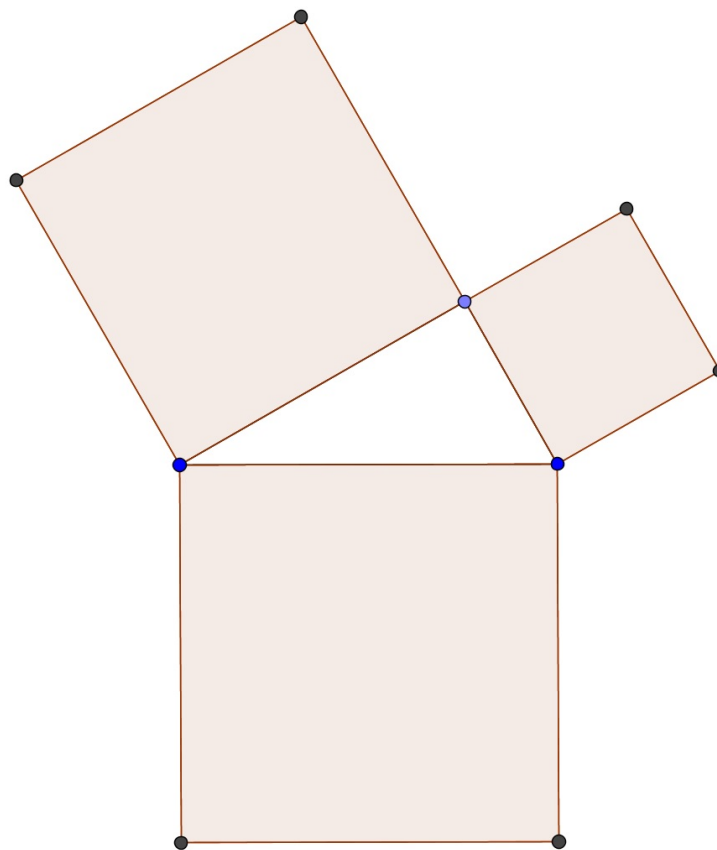
Math. Subj. Class. (2010): 51M04,

Kazalo

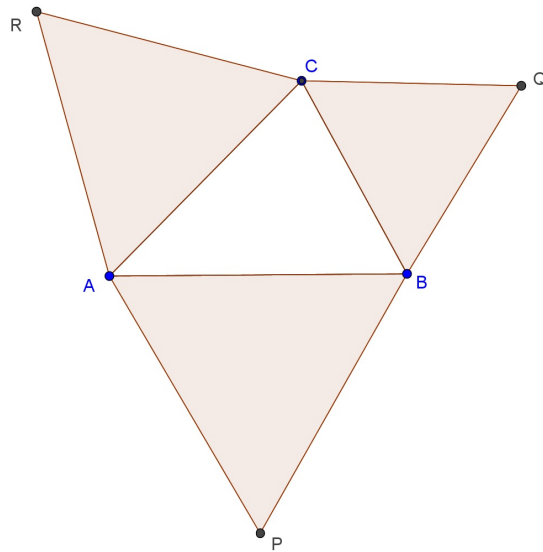
Uvod	1
1 Osnove Fermatove točke	5
1.1 Pierre de Fermat	5
1.2 Fermatova točka	7
1.3 Minimalna lastnost Fermatove točke	12
2 Prva posplošitev Fermatove točke	14
3 Druga posplošitev Fermatove točke	21
4 Tretja posplošitev Fermatove točke	26
4.1 Osnove o kompleksnih številih	26
4.2 Kompleksna števila, koti in kolinearnost	28
4.3 Enačba premice v kompleksni ravnini	30
4.4 Kompleksna števila in enakostranični trikotniki	30
4.5 Napoleonovi trikotniki	31
4.6 Tretja posplošitev Fermatove točke	34
Zaključek	41
Literatura	42

Uvod

Med najbolj pogosto nastopajoče konfiguracije v ravninski geometriji sodi konfiguracija, povezana s Pitagorovim izrekom. Na njej je pravokotni trikotnik, ki mu nad stranicami navzven narišemo kvadrate.

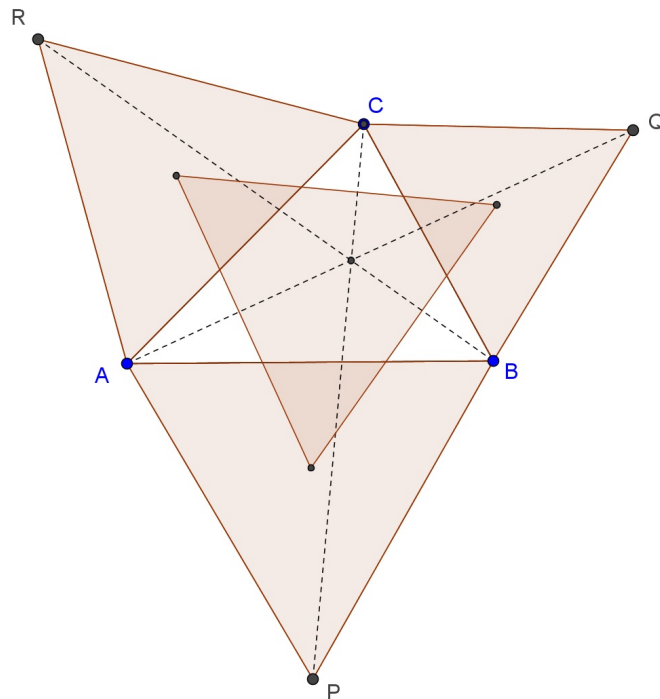


Po pogostosti za to konfiguracijo ne zaostaja prav dosti tako imenovana Napoleonova konfiguracija, na kateri je poljuben trikotnik, ki mu nad stranicami navzven narišemo enakostranične trikotnike APB , BQC in CRA .



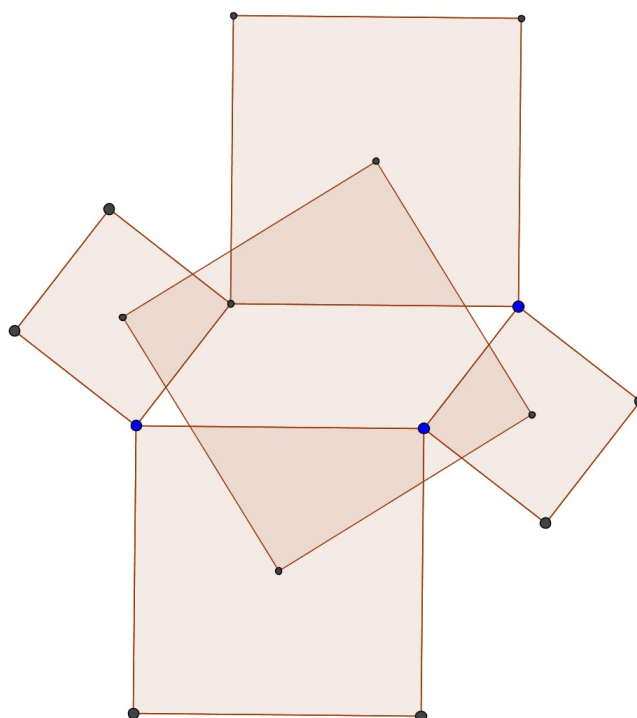
V zvezi s to konfiguracijo sta znana naslednja dva rezultata:

- Središča narisanih enakostraničnih trikotnikov so oglišča novega enakostraničnega trikotnika.
- Premice AQ , BR in CP se sekajo v skupni točki.



Trikotnik iz prvega rezultata se imenuje zunanji Napoleonov trikotnik trikotnika ABC , presečišče iz drugega rezultata pa je tako imenovana Fermatova točka trikotnika ABC .

V literaturi so znane mnoge posplošitve obeh rezultatov. Pri tem se nekatere posvečajo posplošitvi prvega rezultata, torej govorijo o likih, katerih oglišča so središča likov, ki jih narišemo nad stranicami. Tovrstna rezultata sta npr. Thebaultov izrek iz leta 1937 in Napoleon – Barlottijev izrek iz leta 1955.



Drugi rezultati pa se bolj osredotočajo na konkurentnost nekih premic, kot je to v drugem rezultatu.

V diplomskem delu bomo spoznali nekaj rezultatov tega drugega tipa, ki so se v literaturi pojavili med letoma 1995 in 1999. Avtor dveh od teh posplošitev je znani južnoafriški profesor matematike Michael de Villiers, velik ljubitelj geometrije in promotor kreativnega poučevanja geometrije v šolah.



Poglavje 1

Osnove Fermatove točke

1.1 Pierre de Fermat



Slika 1.1: Pierre de Fermat

Pierre de Fermat, znan tudi kot “Princ amaterjev”, se je rodil 17. avgusta 1601 v Beaumontde-Lomagne pri Montaubanu v Languedocu, umrl pa 12. januarja 1665 v mestu Castres pri Toulousu.

O Fermatovi izobrazbi je znano le malo. Rodil se je premožnejšemu trgovcu z usnjem, mati pa je izvirala iz pravniške družine. Po poklicu je bil odvetnik, z matematiko se je ukvarjal le v prostem času. Lahko ga uvrščamo med največje matematike vseh časov, čeprav se je z matematiko ukvarjal le kot amater.

Njegovo ime je zelo povezano s slavnim izrekom, “Fermatov zadnji izrek” (tudi veliki Fermatov izrek). Velik prispevek je naredil tudi v analitični geometriji.

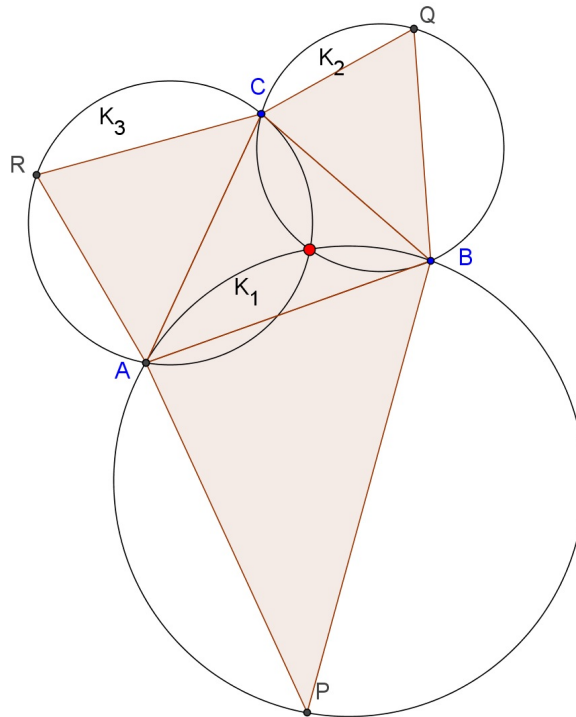
Odkril je eno izmed znamenitih točk trikotnika, ki se po njem imenuje **Fermatova točka**. Pri tem si je zadal problem: *V ostrokotnem trikotniku poišči tako točko, da bo vsota razdalj te točke od oglišč trikotnika najkrajša*. Pri reševanju tega problema je izzval italijanskega matematika Evangelista Torricellija (1608 - 1647), bolj znanega po izumu barometra. Torricelli je za ta problem našel več rešitev, zato se Fermatova točka imenuje tudi Fermat-Torricellijeva točka.

1.2 Fermatova točka

Lema 1.1 *Nad stranicami trikotnika ABC z zunanje strani konstruiramo trikotnike APB , BQC in ACR tako, da je*

$$\angle P + \angle R + \angle Q = 180^\circ.$$

1. *Očrtane krožnice K_1 , K_2 in K_3 naštetih teh trikotnikov se sekajo v skupni točki.*



Slika 1.2: Krožnice se sekajo v skupni točki

2. *V trikotniku $O_1O_2O_3$, katerega oglišča so središča omenjenih treh krožnic, velja naslednje:*

$$\angle O_1 = \angle P, \angle O_2 = \angle Q \text{ in } \angle O_3 = \angle R.$$

Dokaz. Vemo, da se očrtani krožnici K_1 in K_2 sekata v dveh točkah, in sicer v B in F . Dokazujemo, da točka F leži na krožnici K_3 tako, da je $AFCR$ je tetiven štirikotnik. Dokazujemo, da je vsota nasprotnih kotov v štirikotniku $AFCR$ enaka 180° .

$$\begin{aligned} \angle CFA &= 360^\circ - \angle AFB - \angle BFC \\ &= 360^\circ - \angle AFB - \angle BFC \end{aligned}$$

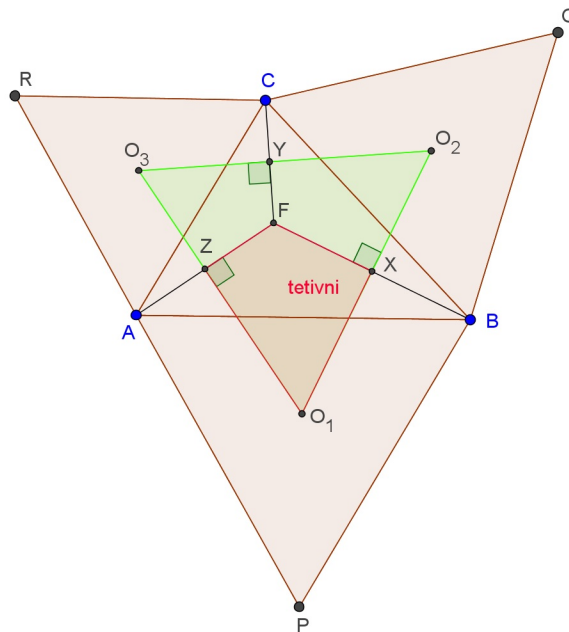
$$\begin{aligned}
 &= 360^\circ - (180^\circ - \angle BPA) - (180^\circ - \angle CQB) \\
 &= 360^\circ - 180^\circ + \angle P - 180^\circ + \angle Q \\
 &= \angle P + \angle Q.
 \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je $\angle CFA + \angle R = \angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$.

S tem smo dokazali, da je $AFCR$ tetivni štirikotnik. Vse tri krožnice se torej res sekajo v skupni točki F .

Dokažimo zdaj še točko 2:

Vemo, da se očrtani krožnici sekata v točkah B in F . Nosilka daljice FB je potenčna premica dveh krožnic, zato je pravokotna na nosilko daljice O_1O_2 . Dokazujemo da so koti pri ogliščah trikotnika $O_1O_2O_3$ enaki kot pri ogliščah P, R in Q .



Slika 1.3: Tetivni štirikotnik O_1XFZ

Vemo, da je štirikotnik O_1XFZ tetivni in iz tega sledi, da je

$$\begin{aligned}
 \angle O_1 &= 180^\circ - \angle AFB \\
 &= 180^\circ - (180^\circ - \angle P) = \angle P.
 \end{aligned}$$

Enak rezultat dobimo tudi za oglišči R in Q . □

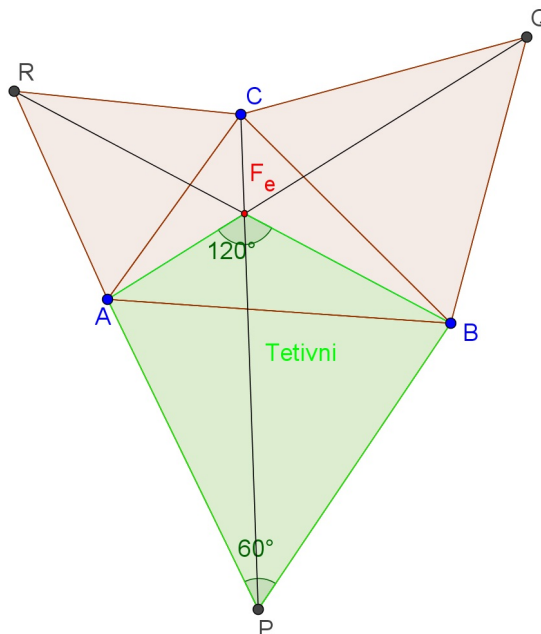
Definicija 1.2 Nad stranicami trikotnika ABC konstruiramo enakostranične trikotnike in sicer navzven. Točko, v kateri se sekajo očrtane krožnice teh treh trikotnikov, imenujemo **Fermatova točka** trikotnika ABC .

Definicija 1.3 Nad stranicami trikotnika ABC konstruiramo enakostranične trikotnike in sicer navzven. Središča $O_1O_2O_3$ očrtanih krogov teh treh trikotnikov so oglišča trikotnika, ki ga imenujemo zunanji **Napoleonov trikotnik** trikotnika ABC .

Izrek 1.4 Zunanji **Napoleonov trikotnik** je vedno enakostraničen.

Dokaz. Iz zgornje leme sledi, da je kot pri oglišču Q_1 enak kotu pri točki P in meri 60° . Enako velja za oglišča O_2 in O_3 . Iz tega sledi, da vsi koti merijo 60° , tako da je trikotnik $O_1O_2O_3$ enakostraničen. \square

Trditev 1.5 Naj bo točka F_e Fermatova točka trikotnika ABC , v katerem vsi trije koti merijo manj kot 120° . Potem velja, da so koti $\angle BF_eA$, $\angle CF_eB$ in $\angle AF_eC$ enaki 120° . Če je T taka točka znotraj trikotnika ABC , da so koti $\angle BTA$, $\angle CTB$ in $\angle ATC$ enaki 120° , potem je T kar Fermatova točka.



Slika 1.4: Fermatova točka znotraj trikotnika

Dokaz. Dokazujemo iz leve proti desni:

Vemo, da je $APBF_e$ tetivni štirikotnik. Vemo, da kot pri oglišču P in kot pri F_e skupaj tvorita 180° . Ker imamo tetivni štirikotnik, vidimo da je $\angle P = 60^\circ$. Na podlagi tega je očitno, da je kot pri $F_e = 120^\circ$. Podobno to velja za preostala dva kota.

Dokažimo še v obratno smer:

Imejmo trikotnik ABT . Vemo, da je $\angle T = 120^\circ$, in kot $\angle P = 60^\circ$. Zaradi tega je $APBT$ tetiven štirikotnik.

Točka T leži na očrtani krožnici trikotnika APB . Podobno vidimo, da je tudi na preostalih dveh krožnicah.

Od tod sledi, da je T kar Fermatova točka. □

V primeru ko pa je vsaj en kot v trikotniku ABC večji kot 120° , Fermatova točka F_e leži zunaj trikotnika ABC .

Trditev 1.6 *Nad stranicami trikotnika ABC konstruiramo enakostranične trikotnike ACR , ABP in CBQ . Potem se premice AQ , BR in CP sekajo v Fermatovi točki.*

Dokaz. Najprej dokažimo trditev, v primeru ko so vsi koti trikotnika ABC pod 120° . Dokažimo, da F_e leži na premici CP . Izračunajmo kot $\angle CF_eP$:

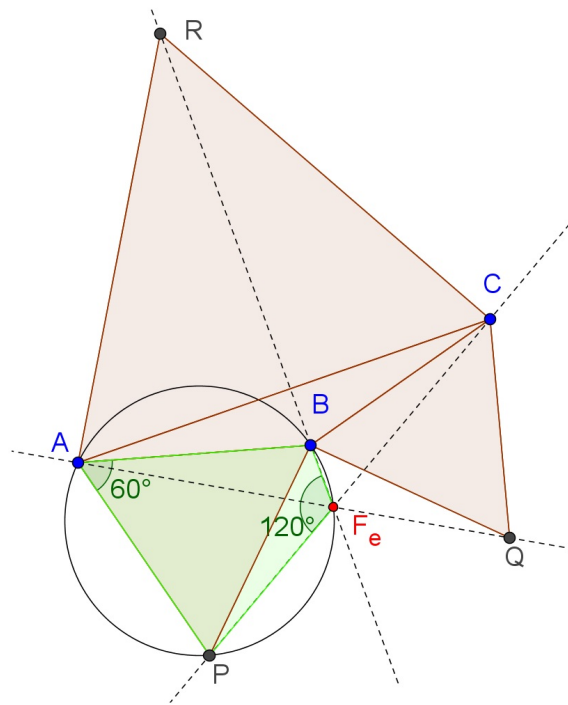
$$\begin{aligned}\angle CF_eP &= \angle CF_eB + \angle BF_eP \\ &= 120^\circ + \angle BF_eP\end{aligned}$$

Kot $\angle BF_eP$ je obodni nad lokom BP . Prav tako je nad lokom BP obodni kot $\angle BAP$. Ta trikotnik pa je enakostranični, zato je $\angle BF_eP = 60^\circ$. Iz tega sledi enakost:

$$\angle CF_eP = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

S tem smo dokazali, da je kot $\angle CF_eP = 180^\circ$, kar pomeni, da točka F_e leži na premici CP . Podobno leži tudi na premicah AP in BP .

Poglejmo še situacijo, ko pa je en kot v trikotniku ABC večji kot 120° .



Slika 1.5: Fermatova točka F_e leži zunaj trikotnika ABC

Kot CF_eB v tem primeru ni več 120° . Zdaj velja, da je $\angle CF_eB = 60^\circ$, ker je obodni kot nad lokom CB , kateri je enak obodnemu kotu CQB . V tej situaciji $\angle CQB$ meri 60° . Vemo pa tudi, da je $\angle BF_eP = 120^\circ$, saj je BF_ePA tetivni štirikotnik. Iz tega torej vidimo:

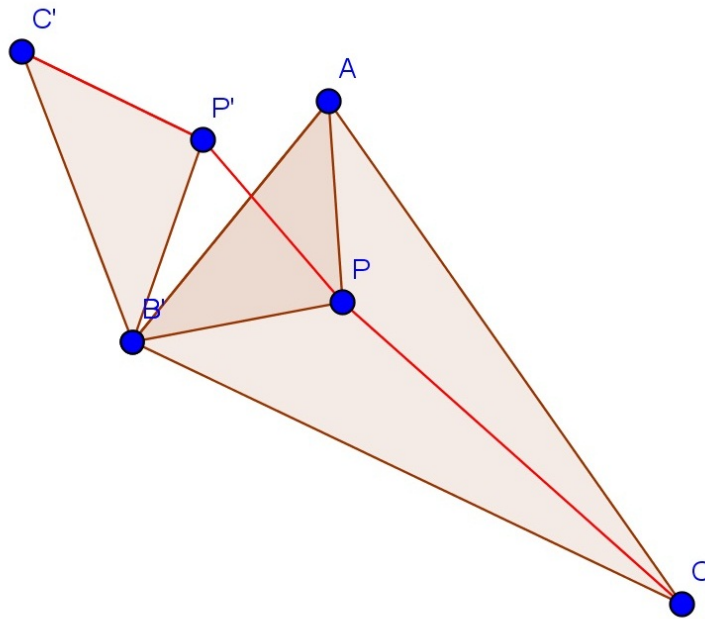
$$\angle CF_eB + \angle BF_eP = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ.$$

Tako smo dokazali, da se premice sekajo v skupni točki. □

1.3 Minimalna lastnost Fermatove točke

Imejmo trikotnik ABC s koti manjšimi od 120° . V tem trikotniku si izberemo točko P in jo povežimo z oglišči A, B , in C . Naša naloga bo poiskati točko F , tako da bo vsota dolžin daljic AF , BF in CF najkrajša.

Okrog oglišča B v pozitivni smeri zavrtimo $\triangle APB$ za 60° .



Slika 1.6: Vrtenje okrog oglišča B

Sliki točk A in P označimo s C' in P' . Ker je vrtenje okrog točke togi premik, sta $\triangle ABP$ in $\triangle C'BP$ skladna. Torej sta daljici $C'P'$ in AP enako dolgi.

Opazimo, da sta rezultat vrtenja tudi enakostranična trikotnika $\triangle AC'B$ in $\triangle PP'B$, zato sta tudi daljici $|P'P|$ in $|BP|$ enako dolgi. Ugotovili smo, da velja:

$$|AP| + |BP| + |CP| = |C'P'| + |P'P| + |PC|.$$

Razdalja, ki jo minimiziramo, je torej enaka dolžini poligonske poti od oglišča C do točke C' , lomljene pri P in P' . Takšna pot, ki povezuje točki C in C' preko treh daljic, je najkrajša, če je ravna. To pa je res, če velja:

$$\angle BPC \text{ in } \angle BPP' \text{ tvorita iztegnjeni kot in}$$

$\angle PP'B$ in $\angle C'P'B$ tvorita iztegnjeni kot.

Za točko P z minimalno vsoto razdalj torej velja:

$$\angle BPC = 180^\circ - \angle BPP' = 120^\circ$$

$$\angle AFPB = \angle C'P'B = 180^\circ - \angle PP'B = 120^\circ.$$

Po trditvi 1.5 je točka s to lastnostjo kar Fermatova točka.

Fermatova točka je torej rešitev, kadar so vsi koti v trikotniku ABC pod 120° . Ko pa je neki kot v trikotniku ABC večji od 120° , se oglišče A pri vrtenju okrog oglišča B za 60° , preslika na drugo stran nosilke stranice BC . V tem primeru je vsota teh razdalj najmanjša, če za točko P vzamemo oglišče, kjer je topi kot.

Fermatova točka sodi med tako imenovane značilne točke trikotnika. Velja celo za najstarejšo značilno točko trikotnika, o kateri še niso pisali grški antični matematiki. Ti so namreč že poznali težišče G , višinsko točko H , središče očrtane krožnice O in središče včrtane krožnice I .

V Enciklopediji značilnih točk trikotnika ([4]), Fermatova točka nosi oznako $X(13)$.

Poglavje 2

Prva posplošitev Fermatove točke

V tem poglavju se bomo ukvarjali s prvo posplošitvijo Fermatove točke. Prej smo nad stranicami trikotnika navzven narisali enakostranične trikotnike. Zdaj ti ne bodo več enakostranični, bodo pa nad stranicami v posledici 2.3 trije podobni enakokraki trikotniki, v posledici 2.2 pa trije podobni trikotniki. V izreku 2.1 pa bo situacija še malo splošnejša. Pri dokazovanju bomo uporabljali sinusni in Cevov izrek.

Sinusni izrek: Naj bo dan trikotnik ABC s stranicami a, b, c , koti α, β, γ in radijem očrtanega kroga R . Tedaj velja:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Cevov izrek: Na stranicah a, b, c trikotnika ABC izberemo točke X, Y, Z . Daljice AX, BY, CZ se sekajo v skupni točki natanko tedaj, ko velja:

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1.$$

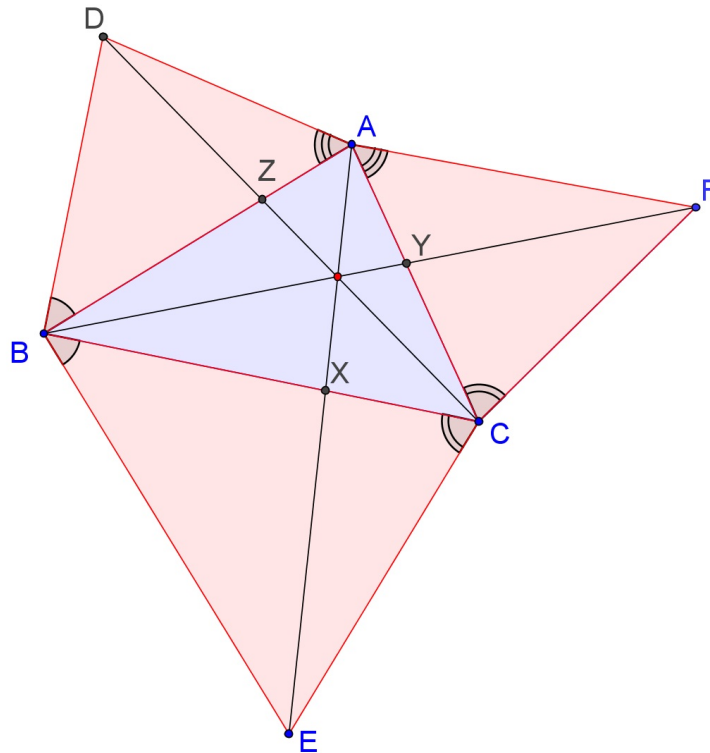
Izrek 2.1 *Na zunanjo stran stranic trikotnika ABC konstruiramo trikotnike DBA, ECB in FAC , tako da velja:*

$$\angle DAB = \angle CAF$$

$$\angle DBA = \angle CBE$$

$$\angle ECB = \angle FCA.$$

Potem se daljice DC, EA in FB sekajo v skupni točki.



Slika 2.1: Pri vsakem oglišču od stranic navzven odmerimo dva enaka kota.

Dokaz. Denimo, da daljice DC , EA in FB sekajo stranice BC , CA , in AB v X , Y , Z . Stranico AB podaljšamo do G , stranico AC pa do H , tako da je daljica GEH vzporedna BC .

Dogovorili se bomo naslednje:

Stranice BE , EC , CF , FA , AD in DB bomo označili z s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_5 in s_6 . Kote trikotnika ABC bomo kot običajno označili z α , β in γ . Kote $\angle DAB$, $\angle EBC$ in $\angle FCA$ bomo pa označili z α' , β' in γ' .

To imamo prikazano v sliki 2.2.

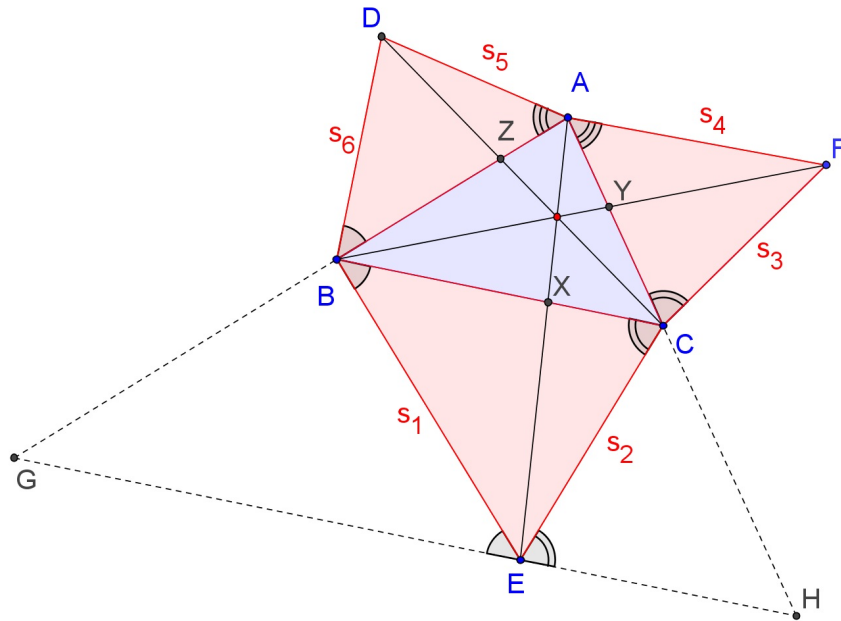
Zaradi vzporednosti daljic BC in GH sledi, da je $\angle BGE = \beta$. Zaradi izmeničnosti kotov pa sledi, da je $\angle BEG = \beta'$. Uporabimo sinusni izrek v trikotniku GBE in od tod dobimo naslednje zveze.

$$\frac{|GE|}{\sin \angle GBE} = \frac{s_1}{\sin \beta}$$

Izračunajmo kot

$$\angle GBE = 180^\circ - (\beta' + \beta)$$

$$\sin \angle GBE = \sin(\beta' + \beta)$$

Slika 2.2: Trikotnik GHA

Zaradi tega velja:

$$\frac{|GE|}{\sin(\beta' + \beta)} = \frac{s_1}{\sin \beta}$$

In zato velja

$$|GE| = \frac{s_1 \cdot \sin(\beta' + \beta)}{\sin \beta}.$$

Podobno velja za:

$$\frac{|EH|}{\sin \angle HCE} = \frac{s_2}{\sin \gamma}$$

in zato velja

$$\frac{|EH|}{\sin(\gamma' + \gamma)} = \frac{s_2}{\sin \gamma}.$$

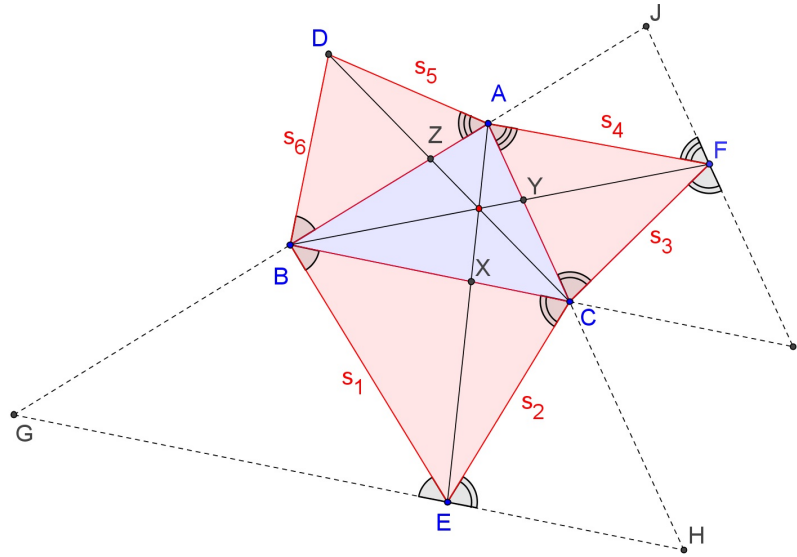
Torej

$$|EH| = \frac{s_2 \cdot \sin(\gamma' + \gamma)}{\sin \gamma}.$$

Glede na zgornjo sliko lahko opazimo, da imamo več podobnih trikotnikov. Trikotnik ABX je podoben trikotniku AGE in trikotnik AXC je podoben trikotniku AEH . Prav zaradi teh podobnosti velja naslednja enakost:

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{|GE|}{|EH|} = \frac{s_1 \cdot \sin(\beta' + \beta)}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \gamma}{s_2 \cdot \sin(\gamma' + \gamma)}$$

Podobno postopamo pri preostalih dveh stranicah trikotnika.

Slika 2.3: Trikotnik BIJ

Stranico BC podaljšamo do I , stranico BA pa do J , tako da je daljica IFJ vzporedna CA . Tako vidimo, da je trikotnik BCA podoben trikotniku BIJ in $\angle BFI = \gamma'$. Tudi tukaj uporabimo sinusni izrek v trikotniku BFI in dobimo zvezo:

$$\frac{|IF|}{\sin \angle ICF} = \frac{s_3}{\sin \gamma}.$$

Iz tega sledi, da je

$$\frac{|IF|}{\sin(\gamma' + \gamma)} = \frac{s_3}{\sin \gamma}.$$

In zato velja

$$|IF| = \frac{s_3 \cdot \sin(\gamma' + \gamma)}{\sin \gamma}.$$

Enako naredimo še za

$$\frac{|FJ|}{\sin \angle FAJ} = \frac{s_4}{\sin \alpha}.$$

Iz tega sledi

$$\frac{|FJ|}{\sin(\alpha' + \alpha)} = \frac{s_4}{\sin \alpha}.$$

Torej velja

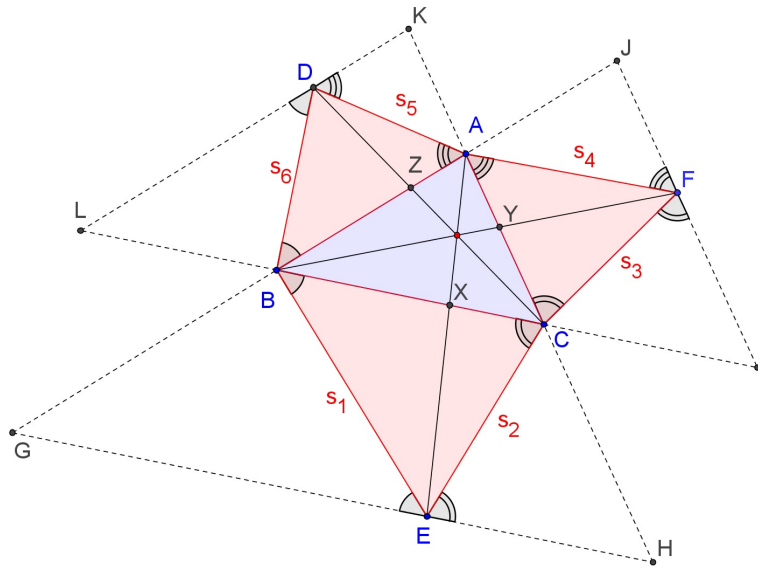
$$|FJ| = \frac{s_4 \cdot \sin(\alpha' + \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Tudi tukaj imamo podobne trikotnike, in sicer : trikotnik BCY je podoben BIF , trikotnik BYA pa je podoben trikotniku BFJ . Zaradi teh podobnosti lahko naredimo zamenjavo.

To poračunamo in dobimo, da je

$$\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{|IF|}{|FJ|} = \frac{s_3 \cdot \sin(\gamma' + \gamma)}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \alpha}{s_4 \cdot \sin(\alpha' + \alpha)}.$$

Podaljšamo še stranico CA do K in stranico CB do L , tako da je daljica KDL vzporedna daljici AB . Zato je trikotnik CAB podoben trikotniku CKL in $\angle CDK = \alpha'$.



Slika 2.4: Trikotnik CKL

Uporabimo sinusni izrek v trikotniku CKL in dobimo, da je

$$\frac{|KD|}{\sin \angle KAD} = \frac{s_5}{\sin \alpha}.$$

Torej

$$\frac{|KD|}{\sin(\alpha' + \alpha)} = \frac{s_5}{\sin \alpha},$$

iz tega pa sledi

$$|KD| = \frac{s_5 \cdot \sin(\alpha' + \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Enako situacija velja še za

$$\frac{|DL|}{\sin \angle DBL} = \frac{s_6}{\sin \beta}.$$

Iz tega sledi, da je

$$\frac{|DL|}{\sin(\beta' + \beta)} = \frac{s_6}{\sin \beta}.$$

Torej velja

$$|DL| = \frac{s_6 \cdot \sin(\beta' + \beta)}{\sin \beta}.$$

Tudi tukaj imamo podobnosti trikotnikov. Trikotnik CAZ je podoben trikotniku CKD in trikotnik CZB je podoben CDL . Tako dobimo, da je

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{|KD|}{|DL|} = \frac{s_5 \cdot \sin(\alpha' + \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{s_6 \cdot \sin(\beta' + \beta)}.$$

Ker imamo vse te zveze, iz njih vidimo

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{s_1}{s_2} \cdot \frac{s_3}{s_4} \cdot \frac{s_5}{s_6}.$$

Nato uporabimo sinusni izrek za trikotnike ECB , FAC in DBA in dobimo

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\sin \gamma'}{\sin \beta'}, \quad \frac{s_3}{s_4} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \gamma'}, \quad \frac{s_5}{s_6} = \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'}.$$

S pomočjo zamenjave vidimo, da velja

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{\sin \gamma'}{\sin \beta'} \cdot \frac{\sin \alpha'}{\sin \gamma'} \cdot \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'} = 1.$$

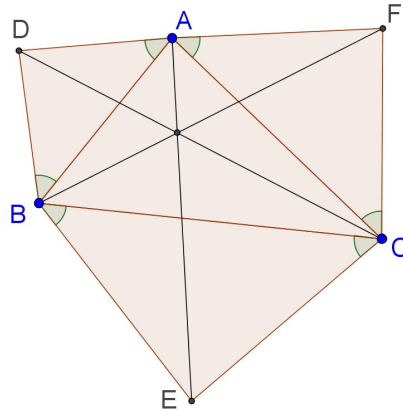
Po Cevovem izreku se daljice AX , BY in CZ sekajo v skupni točki. Zaradi tega se tudi daljice EA , FB in DC sekajo v skupni točki. \square

Posebej zanimivi sta naslednji posledici pravkar dokazanega izreka.

Posledica 2.2 Če nad stranicami trikotnika ABC konstruiramo enakokrake trikotnike ADB , BEC in CFA z enakim kotom med osnovnico in krakom, se daljice AE , BF in CD sekajo v skupni točki.

Dokaz. Uporabimo lahko prejšnji izrek in sicer v primeru, ko je $\alpha' = \beta' = \gamma'$. \square

Če α pošljemo proti 0, potem se točka F približuje razpolovišču stranice AC . Podobno se D in E približujeta preostalima razpoloviščama stranic. Tako se te sekajo v težišču.



Slika 2.5: Enaki kot med osnovnico in krakom

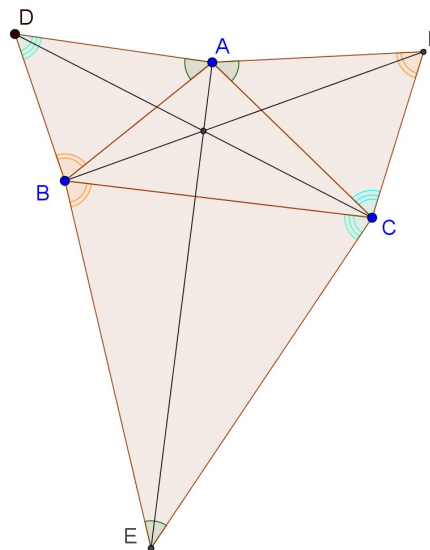
Posledica 2.3 Nad stranicami trikotnika ABC narišemo podobne trikotnike, tako da velja:

$$\angle ADB = \angle ECB = \angle ACF$$

$$\angle DBA = \angle CBE = \angle CFA$$

$$\angle BAD = \angle BEC = \angle FAC$$

Daljšice AE , BF in CD se sekajo v skupni točki.



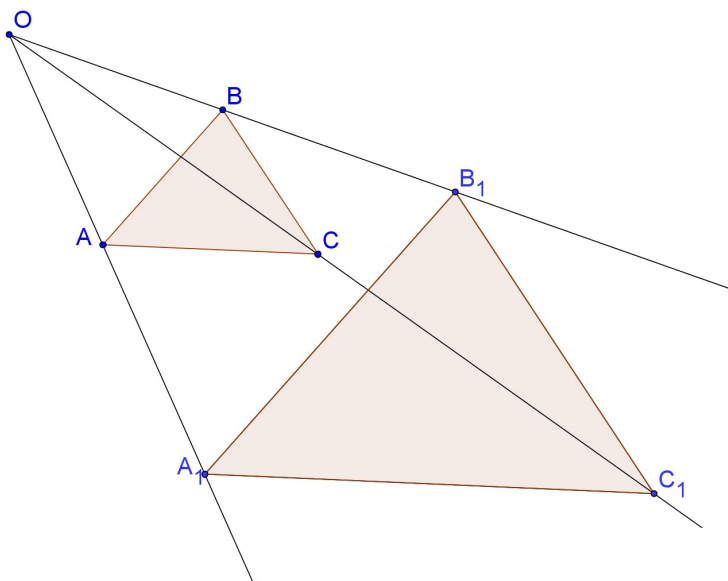
Slika 2.6: Podobni trikotniki

Dokaz. To je poseben primer situacije iz izreka, ko velja, da je vsota $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^\circ$. \square

Poglavje 3

Druga posplošitev Fermatove točke

V tem razdelku bom analizirala še eno Fermatovo posplošitev. Najprej bom na kratko opisala središčni razteg, ki nam bo v pomoč pri dokazovanju glavnega izreka tega poglavja.



Slika 3.1: Središčni razteg

Središčni razteg ali **homotetija** je geometrijska preslikava, ki ohranja obliko lika (množice, telesa), spremeni pa njegovo velikost. Podan je s središčem (točka O) in koeficientom raztega (število k , ki ne sme biti enako 0).

Poljubno točko T preslikamo v T' po naslednjih pravilih:

- Točka T' leži na isti premici kot točka O in T .

- Razdalja med O in T' je k -krat tolikšna kot razdalja med O in T . $|OT'| = k|OT|$
- Če je $k > 0$, leži točka T' na istem poltraku kot točka T .
- Če je $k < 0$, leži točka T' na nasprotnem poltraku kot točka T .

Oznaka:

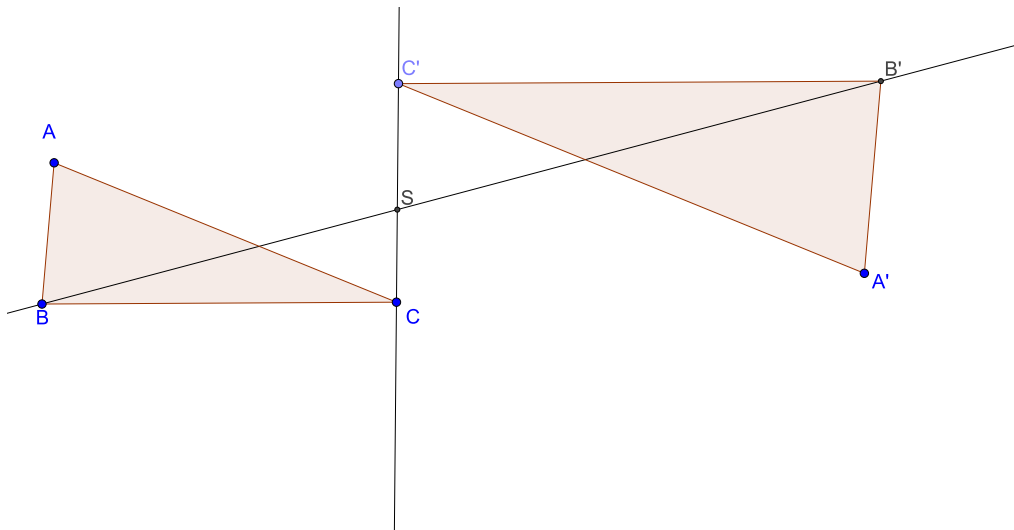
$$\delta_{O,k}.$$

Središčni razteg preslika poljubno premico p v premico p' , ki je prvotni premici vzporedna. Središčni razteg trikotnik preslika v drug trikotnik z vzporednimi stranicami. Če je torej ABC trikotnik in je $A'B'C'$ slika tega trikotnika s središčnim raztegom, sta trikotnika podobna, stranice pa vzporedne. Zato definirajmo:

Definicija 3.1 *Trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta homotetična, če sta podobna in imata vzporedne stranice:*

$$AB \parallel A'B' \quad AC \parallel A'C' \quad \text{in} \quad BC \parallel B'C'$$

Lema 3.2 *Naj bosta ABC in $A'B'C'$ homotetična trikotnika. Tedaj se premice AA' , BB' in CC' sekajo v skupni točki S , ki je središče raztega, ki trikotnik ABC preslika v trikotnik $A'B'C'$.*



Slika 3.2: Homotetična trikotnika

Dokaz. Denimo, da se premici BB' in CC' sekata v točki S . Zaradi izmeničnih kotov in vzporednosti sta trikotnika BCS in $B'C'S$ podobna. Zato velja:

$$\frac{(SC')}{(SC)} = \frac{(SB')}{(SB)} = k.$$

To pomeni, da razteg $\delta_{S,k}$ preslika točko C v C' in točko B v B' . Ta razteg potem preslika premico AB v vzporednico tej premici skozi točko B' , torej v premico $A'B'$. Podobno preslika premico AC v $A'C'$. Zato preslika točko A , ki je presečišče premic AB in AC , v presečišče premic $A'B'$ in $A'C'$, torej v A' . Zato so točke A , A' in S kolinearne. Točka S tudi leži na daljici AA' . Vidimo tudi, da je S središče raztega, ki trikotnik ABC preslika v trikotnik $A'B'C'$. \square

Izrek 3.3 Naj bodo L_1 in L_2 , M_1 in M_2 , N_1 in N_2 pari točk, ki ležijo na stranicah BC , CA in AB trikotnika ABC , tako da velja naslednje:

$$\frac{|BL_1|}{|L_1C|} = \frac{|CL_2|}{|L_2B|} = \frac{|CM_1|}{|M_1A|} = \frac{|AM_2|}{|M_2C|} = \frac{|AN_1|}{|N_1B|} = \frac{|BN_2|}{|N_2A|} = \tau.$$

Nad stranicami tako dobljenega šestkotnika $N_1N_2L_1L_2M_1M_2$ z zunanje konstruiramo trikotnike DN_1N_2 , XN_2L_1 , EL_1L_2 , YL_2M_1 , FM_1M_2 in ZM_2N_1 tako, da velja:

$$\angle DN_1N_2 = \angle M_1M_2F = \angle XL_1N_2 = \angle YL_2M_1 = \alpha'$$

$$\angle DN_2N_1 = \angle L_2L_1E = \angle YM_1L_2 = \angle ZM_2N_1 = \beta'$$

$$\angle EL_2L_1 = \angle FM_1M_2 = \angle ZN_1M_2 = \angle XN_2L_1 = \gamma'.$$

Daljice DY , EZ in FX se sekajo v skupni točki.

Dokaz. Vzemimo razmerje

$$\frac{|AM_2|}{|M_2C|} = \tau$$

$$|AM_2| = \tau |M_2C|$$

$$|AC| = |AM_2| + |M_2C| = b$$

$$= \tau |M_2C| + |M_2C| = b$$

$$|M_2C| = \frac{b}{\tau + 1}$$

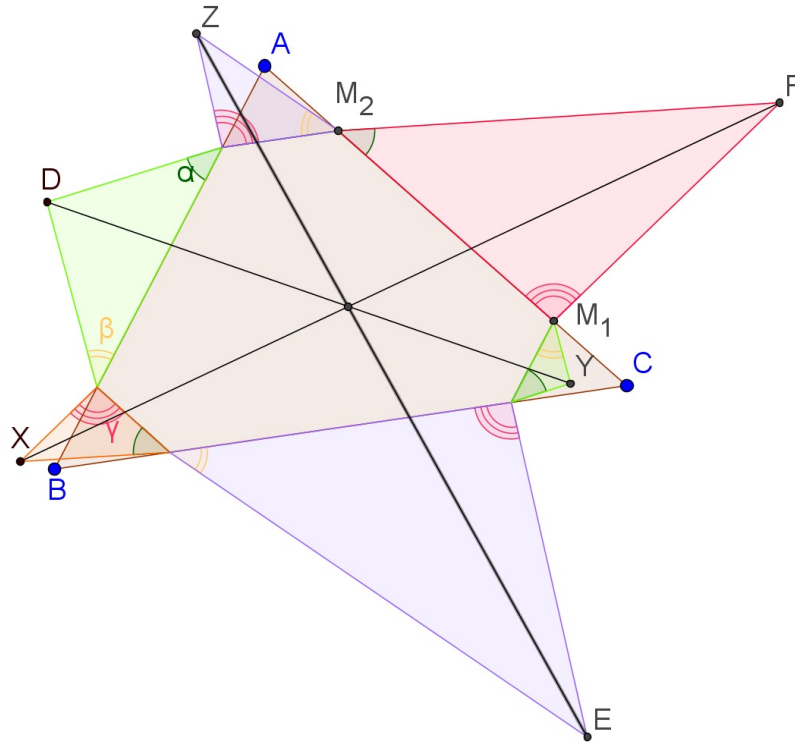
Enako izrazimo

$$|AM_2| = b - |M_2C| = b - \frac{b}{\tau + 1}$$

$$|AM_2| = \frac{\tau}{\tau+1} \cdot |AC|$$

Od tod sledi:

$$\delta_{A, \frac{\tau}{\tau+1}} : C \mapsto M_2$$



Slika 3.3: Z zunanje strani konstruirani trikotniki

Podobno bi s pomočjo raztega točko B preslikali v N_1 . Z raztegom se premica preslika v vzporedno premico, zato opazimo da velja $N_1M_2 \parallel BC$ in $N_2M_1 \parallel BC$. Od tod lahko vidimo $N_1M_2 \parallel N_2M_1 \parallel BC$.

Podobno analizo naredimo še za ostale primere in vidimo, da

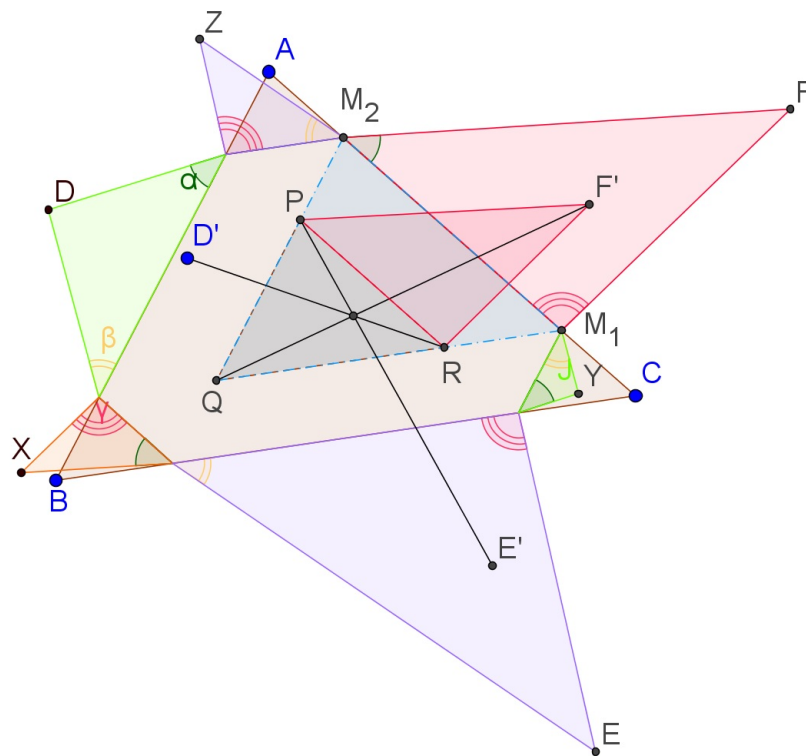
$$N_2L_1 \parallel N_1L_2 \parallel AC \text{ in } M_1L_2 \parallel M_2L_1 \parallel AB.$$

Oglejmo si trikotnika DN_1N_2 in YL_2M_1 . Nosilka daljice N_1N_2 je premica AB . Zato je $N_1N_2 = AB \parallel M_1L_2$. Zaradi te vzporednosti in enakosti kotov pri N_2 in M_1 potem velja tudi $DN_2 \parallel M_1Y$. Podobno zaradi te vzporednosti in enakosti kotov pri N_1 in L_2 velja $DN_1 \parallel L_2Y$. Tako vidimo, da so stranice omenjenih trikotnikov paroma vzporedne. To pomeni, da sta homotetična trikotnika. Po lemi 3.2 se zato daljice N_1L_2 , DY in N_2M_1 sekajo v skupni točki, ki jo označimo z R .

Postopek ponovimo s (homotetičnima) trikotnikama EL_1L_2 in ZM_2N_1 in dobimo, da se daljice L_1M_2 , EZ in L_2N_1 sekajo v točki P . Ko pa povežemo homotetična trikotnika FM_1M_2 in XN_2L_1 se pa daljice M_1N_2 , FX in M_2L_1 sekajo v točki Q .

Tako dobimo trikotnik PQR .

Zdaj si pa bomo podrobneje ogledali trikotnika PQR in M_2QM_1 . Vrh teh dveh trikotnikov je v oglišču Q . To sta homotetična trikotnika, zato obstaja razteg s središčem v Q , ki M_2 preslika v P , M_1 v R in F v F' . Zdaj imamo nad stranico PR narisan trikotnik PRF' , ki je podoben trikotniku M_2M_1F .



Slika 3.4: Trikotnika PRF' in M_2M_1F

Podobno je to nad drugima dvema stranicama trikotnika PQR .

Z raztegom se trikotnik M_2M_1F preslika v trikotnik PRF' . Ker se preslika v podobni trikotnik se koti ohranijo. Tako je $\angle RPF'$ enak $\angle M_1M_2F$

Zaradi izreka 2.1, ki smo ga dokazovali v prejšnjem poglavju vidimo, da se daljice $D'R$, $E'P$ in $F'Q$ sekajo v skupni točki. Posledično, se zaradi tega sekajo tudi daljice DY , EZ in FX .

□

Poglavje 4

Tretja posplošitev Fermatove točke

4.1 Osnove o kompleksnih številih

Potreba po uvedbi kompleksnega števila se pojavi, ko v množici realnih števil ne znamo več rešiti enačbe oblike $x^2 + 1 = 0$.

Kompleksno število označimo z $z = x + iy$, pri čemer je x realni del, y pa imaginarni del kompleksnega števila.

Oznaka: $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$

Definicija 4.1 Konjugirano število kompleksnega števila $z = x + iy$ je število $\bar{z} = x - iy$.

Pri tem opazimo, da je produkt kompleksnega števila s svojo konjugirano vrednostjo realno število. Opazimo tudi, da je ta produkt zagotovo večji ali enak nič.

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = (x^2 + y^2).$$

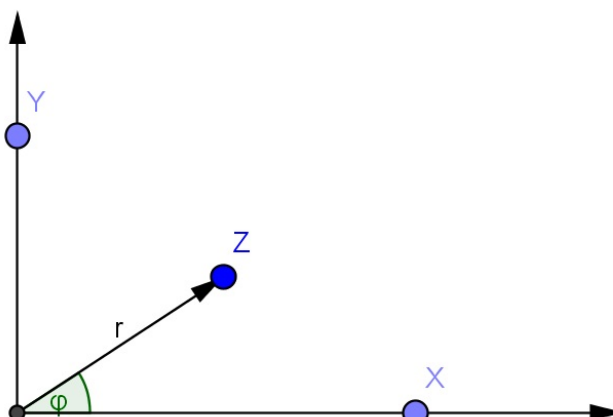
Definicija 4.2 Število $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ je absolutna vrednost števila z .

Tedaj lahko realni in pa imaginarni del kompleksnega števila zapišemo drugače:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2},$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}.$$

Kompleksna števila pa lahko zapišemo s t.i. polarnimi koordinatami. Naj bo φ kot med

Slika 4.1: Kompleksno število z

pozitivnim poltrakom realne osi in poltrak, ki povezuje koordinatno izhodišče in točko z . Vemo, da je $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ ter $\sin \varphi = \frac{y}{r}$.

Kompleksno število $z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Temu zapisu pravimo **polarni zapis** kompleksnega števila. Sedaj je $r = |z|$ absolutna vrednost kompleksnega števila, φ pa imenujemo argument kompleksnega števila z . Argument števila z ni enolično določen; če je φ argument z , je prav tako $\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, argument z . Glavna veja argumenta ($\text{Arg}(z)$) pa se nahaja na intervalu $[0, 2 \cdot \pi)$.

Ogledali si bomo še kako izgleda produkt dveh kompleksnih števil v polarnem zapisu in argument produkta.

Torej: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = r_1 \cdot r_2$, absolutna vrednost produkta je produkt absolutnih vrednosti. Argument produkta je vsota argumentov $\text{arg}(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$. Za produkt n kompleksnih števil pa velja

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)).$$

Iz te formule pa sledi formula, ki dejansko velja za vsako celo število:

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)).$$

4.2 Kompleksna števila, koti in kolinearnost

Definicija 4.3 Naj bodo A, B, C tri točke v ravnini. *Usmerjeni kot* $\angle BAC$ je kot, ki ga opravi poltrak AB pri najkrajšem vrtenju do poltraka AC . Če gre za vrtenje v pozitivni smeri je orientacija pozitivna, in negativna v primeru, ko je vrtenje v negativni smeri.

Ker imamo najkrajše vrtenje, ti koti po absolutni vrednosti merijo med 0° in 180° . Pri tem upoštevajmo orientacijo med -180° in 180° .

Trditvev 4.4 Naj bodo z_1, z_2, z_3 tri točke v kompleksni ravnini. Usmerjeni kot $\angle z_2 z_1 z_3$ je enak

$$\angle z_2 z_1 z_3 = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Dokaz. Poglejmo izračun:

$$\begin{aligned} \angle z_2 z_1 z_3 &= \angle(z_2 - z_1) \theta (z_3 - z_1) \\ &= \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1) = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}. \end{aligned}$$

□

Pri dokazovanju naslednje trditve nam bosta v pomoč naslednji dve lemi.

Lema 4.5 Naj bosta a in b kompleksni števili. Med a in b naj bo število m , ki daljico ab deli v razmerju

$$|am| : |mb| = \lambda : \mu.$$

Tedaj velja:

$$m = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot a + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot b.$$

Dokaz. Dokaz bomo izvedli z vektorji. Za radij vektor $r_m^{\vec{}}$ od izhodišča do točke m velja:

$$\begin{aligned} r_m^{\vec{}} &= r_a^{\vec{}} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \vec{ab} \\ &= r_a^{\vec{}} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot (r_b^{\vec{}} - r_a^{\vec{}}) \\ &= r_a^{\vec{}} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot r_b^{\vec{}} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot r_a^{\vec{}} \\ &= r_a^{\vec{}} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} r_b^{\vec{}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r_a \left(\frac{\lambda + \mu - \lambda}{\lambda + \mu} \right) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} r_b \\
&= r_a \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} r_b.
\end{aligned}$$

□

Poglejmo si poseben primer:

Razpolovišče daljice ab je ko velja $\mu = \lambda = 1$. Torej: $m = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

Posledica 4.6 Naj bodo a, b in c nekolinearne točke v kompleksni ravnini. Težišče trikotnika ABC je točka

$$g = \frac{1}{3} \cdot (a + b + c)$$

Dokaz.

Razpolovišče c' daljice ab je točka:

$$c' = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

Vemo, da težišče trikotnika deli težiščnico cc' trikotnika v razmerju $|c'g| : |gc| = 1 : 2$. Uporabimo lemo 4.5 in dobimo:

$$\begin{aligned}
g &= \frac{2}{3}c' + \frac{1}{3}c \\
g &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \right) + \frac{1}{3}c \\
&= \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \\
&= \frac{1}{3} \cdot (a + b + c)
\end{aligned}$$

Tako smo dokazali, da je g težišče trikotnika ABC . □

Trditev 4.7 Točke z_1, z_2, z_3 v kompleksni ravnini so kolinearne natanko tedaj, kadar je $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ realno število.

Dokaz. Točke so kolinearne natanko tedaj, kadar je kot $\angle z_2 z_1 z_3 = 0$ ali $\angle z_2 z_1 z_3 = \pi$. Dejstvo, da je argument števila $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ enak 0 ali π pa velja dejstvu, da je $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$. □

4.3 Enačba premice v kompleksni ravnini

V razdelku bomo opisali enačbo premice, ki poteka skozi dve točki v kompleksni ravnini.

Lema 4.8 *Premice v kompleksni ravnini so množice točk, ki zadoščajo enakostim*

$$\bar{a}z + a\bar{z} = h$$

za neki števili $a \in \mathbb{C}$ in $h \in \mathbb{R}$. Če to enakost množimo z i in označimo, da je $c = -ai$, potem dobimo ekvivalenčno enakost

$$\bar{c}z - c\bar{z} + hi = 0.$$

Dokaz. Pišimo $a = x + iy$ in $z = x + iy$. Zapisani enakosti pomenita

$$2\operatorname{Re}(\bar{a}z) + h = 2ux + 2vy + h = 0.$$

To je enačba premice. Vsako poljubno premico pa lahko zapišemo v taki obliki. \square

Trditev 4.9 *Za enačbo premice, ki poteka skozi točki z_1, z_2 velja*

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokaz. Enačba oblike, ki smo jo obravnavali zgoraj, ji zadoščata točki z_1 in z_2 . Pri tem upoštevajmo, da je kolinearnost točk $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ ekvivalenčna dejstvu, da je $\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ realno število. To pomeni, da je enako svoji konjugirani vrednosti. Ta enačba pa je ekvivalenčna z determinanto izraženi enakosti. \square

4.4 Kompleksna števila in enakostranični trikotniki

Izrek 4.10 *Trikotnik $z_1z_2z_3$ je pozitivno orientiran enakostranični trikotnik natanko tedaj, ko velja $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$. Pri tem je $\omega = e^{2\pi i/3}$ osnovni tretji koren enote.*

Dokaz. Trikotnik $z_1z_2z_3$ je pozitivno orientiran enakostranični trikotnik natanko tedaj, ko velja $z_1z_2z_3 \sim 1\omega\omega^2$. To je res, ko velja $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\omega^2-1}{\omega-1} = \omega + 1$. Od tod sledi $z_3 - z_1 =$

$(\omega + 1)z_2 - (\omega + 1)z_1$. Ko to uredimo, dobimo $\omega z_1 - (\omega + 1)z_2 + z_3 = 0$. Enakost nato pomnožimo z ω^2 , pri tem pa upoštevajmo, da je $\omega^3 - 1 = 0$ in $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Tako je izrek dokazan. \square

Izrek 4.11 *Trikotnik $z_1 z_2 z_3$ je negativno orientiran enakostranični trikotnik natanko tedaj, ko velja $z_1 + \bar{\omega} z_2 + \bar{\omega}^2 z_3 = 0$.*

Dokaz. Dokaz poteka analogno kot dokaz izreka 4.10, samo da imamo tukaj situacijo, ko velja $z_1 z_2 z_3 \sim 1\bar{\omega}\bar{\omega}^2$. \square

Izrek 4.12 *Trikotnik $z_1 z_2 z_3$ je enakostraničen trikotnik natanko tedaj, ko velja*

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_1 z_3 = 0.$$

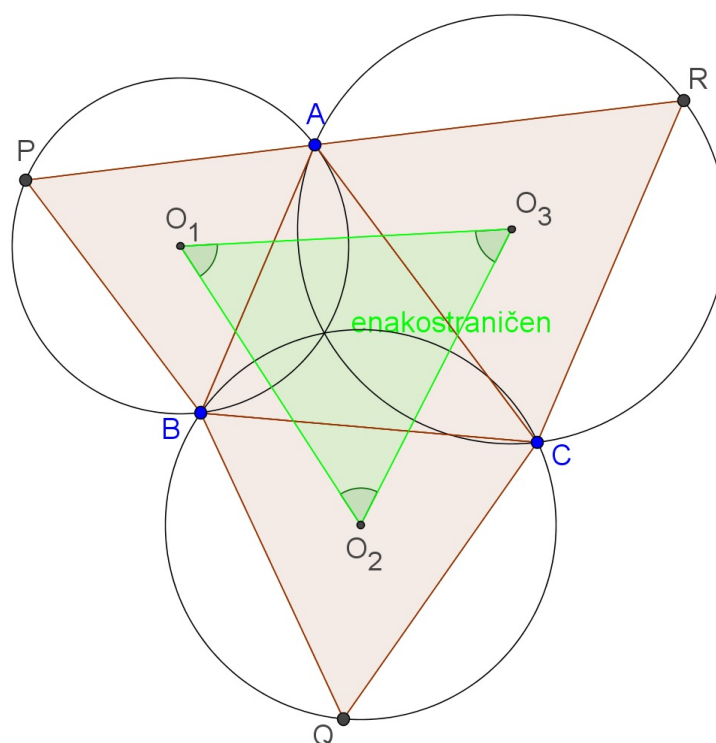
Dokaz. Vemo, da je trikotnik $z_1 z_2 z_3$ enakostraničen natanko tedaj, ko velja $z_1 z_2 z_3 \sim z_2 z_3 z_1$. Če oglišča ciklično zamenjamo, se orientacija trikotnika ohrani. Zaradi tega imata trikotnika $z_1 z_2 z_3$ in $z_2 z_3 z_1$ vedno enako orientacijo. Če velja $z_1 z_2 z_3 \sim z_2 z_3 z_1$, velja tudi $\angle z_1 = \angle z_2, \angle z_2 = \angle z_3$ in $\angle z_3 = \angle z_1$. To pomeni, da so vsi trije koti enaki in da je trikotnik enakostraničen. Velja pa tudi obratno, če je trikotnik enakostraničen, velja ustrezna enakost kotov in zato zveza $z_1 z_2 z_3 \sim z_2 z_3 z_1$. Videli pa smo, da je ta zveza ekvivalentna pogoju $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$, od tod sledi $(z_3 - z_1)(z_3 - z_2) = (z_1 - z_2)(z_2 - z_1)$. To pa je enako pogoju, ki smo ga želeli dokazati. \square

4.5 Napoleonovi trikotniki

V razdelku si bomo podrobneje ogledali Napoleonove trikotnike. Izrek o Napoleonovem trikotniku bomo dokazali z uporabo kompleksnih števil v kompleksni ravnini. To nam pa bo v pomoč pri glavnem izreku tega poglavja.

Definicija 4.13 *Nad stranicami trikotnika ABC v ravnini z zunanje strani konstruiramo enakostranične trikotnike APB, BQC in ACR . Središča O_1, O_2, O_3 očrtanih krogov teh treh trikotnikov so oglišča trikotnika, ki ga poimenujemo **zunanji Napoleonov trikotnik** trikotnika ABC .*

*Enako pa velja, če enakostranične trikotnike konstruiramo z notranje strani. Tedaj pa dobimo **notranji Napoleonov trikotnik**.*



Slika 4.2: Napoleonov trikotnik

Izrek 4.14 Zunanji oziroma notranji Napoleonov trikotnik poljubnega trikotnika ABC je enakostraničen.

Dokaz. Preselimo se v kompleksno ravnino in označimo oglišča trikotnika s kompleksnimi števili a , b in c . Nad stranicami trikotnika z zunanje strani konstruiramo pozitivno orientirane enakostranične trikotnike pba , qcb in rac . Iz tega torej veljajo zveze

$$p + \omega b + \omega^2 a = 0, \quad q + \omega c + \omega^2 b = 0, \quad r + \omega a + \omega^2 c = 0.$$

Tako dobimo zveze

$$p = -\omega b - \omega^2 a, \quad q = -\omega c - \omega^2 b, \quad r = -\omega a - \omega^2 c.$$

Ker so središča očrtanih krožnic teh trikotnikov hkrati njihova težišča, velja

$$o_1 = \frac{1}{3}(p + b + a) = \frac{1}{3}[(1 - \omega)b + (1 - \omega^2)a]$$

$$o_2 = \frac{1}{3}(q + c + b) = \frac{1}{3}[(1 - \omega)c + (1 - \omega^2)b]$$

$$o_3 = \frac{1}{3}(r + a + c) = \frac{1}{3}[(1 - \omega)a + (1 - \omega^2)c].$$

Preverimo še, da je $o_1o_2o_3$ pozitivno orientiran enakostranični trikotnik. Zato izračunajmo izraz $o_1 + \omega o_2 + \omega^2 o_3$, ki je enak

$$\frac{1}{3}[(1 - \omega)b + (1 - \omega^2)a + (\omega - \omega^2)c + (\omega - 1)b + (\omega^2 - 1)a + (\omega^2 - \omega)c] = 0.$$

Analogno zgodbo ponovimo pri notranjem Napoleonovem trikotniku. Nad stranicami trikotnika tokrat z notranje strani konstruiramo orientirane enakostranične trikotnike $p'ab$, $q'bc$ in $r'ca$. Tako zopet dobimo zveze

$$p' + \omega a + \omega^2 b = 0, \quad q' + \omega b + \omega^2 c = 0, \quad r' + \omega c + \omega^2 a = 0,$$

ter

$$p' = -\omega a - \omega^2 b, \quad q' = -\omega b - \omega^2 c, \quad r' = -\omega c - \omega^2 a.$$

Središča očrtanih krožnic trikotnikov $p'ab$, $q'bc$ in $r'ca$ so obenem tudi njihova težišča, torej

$$n_1 = \frac{1}{3}(p' + a + b) = \frac{1}{3}[(1 - \omega)a + (1 - \omega^2)b]$$

$$n_2 = \frac{1}{3}(q' + b + c) = \frac{1}{3}[(1 - \omega)b + (1 - \omega^2)c]$$

$$n_3 = \frac{1}{3}(r' + c + a) = \frac{1}{3}[(1 - \omega)c + (1 - \omega^2)a].$$

Iz teh zvez vidimo, da je trikotnik $n_1n_2n_3$ enakostraničen trikotnik, vendar pa negativno orientiran. Zato še preverimo, da je $n_1n_2n_3$ pozitivno orientiran enakostraničen trikotnik. Izraz $n_1 + \omega n_3 + \omega^2 n_2$ je v tem primeru enak

$$\frac{1}{3}[(1 - \omega)a + (1 - \omega^2)b + (\omega - \omega^2)c + (\omega - 1)a + (\omega^2 - 1)b + (\omega^2 - \omega)c] = 0.$$

□

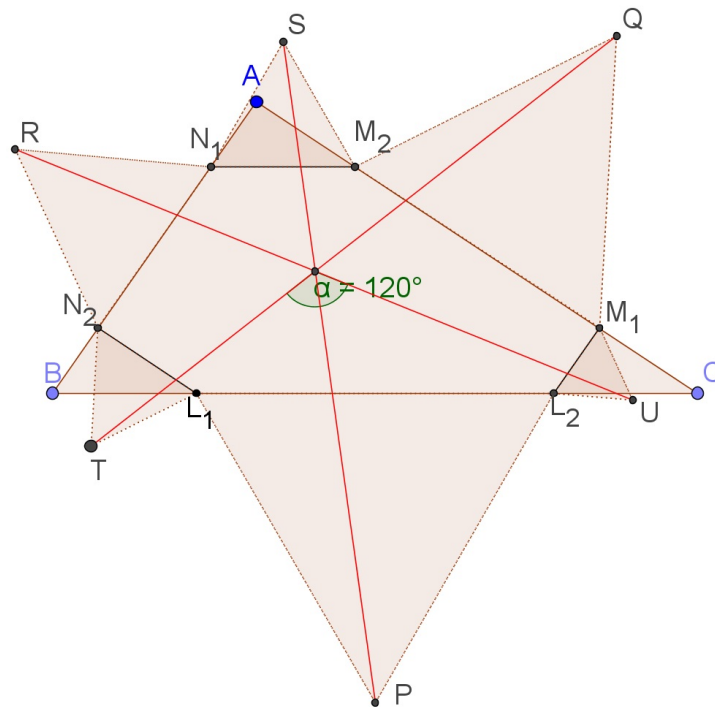
4.6 Tretja posplošitev Fermatove točke

Izrek 4.15 V trikotniku ABC naj bodo L_1 in L_2 , M_1 in M_2 , N_1 in N_2 zaporedoma točke na stranicah BC , CA in CB , tako da velja:

$$\frac{|BL_1|}{|L_1C|} = \frac{|CL_2|}{|L_2B|} = \frac{|CM_1|}{|M_1A|} = \frac{|AM_2|}{|M_2C|} = \frac{|AN_1|}{|N_1B|} = \frac{|BN_2|}{|N_2A|} < \frac{\rho}{\sigma} < 1.$$

Nad stranicami šestkotnika $L_1L_2M_1M_2N_1N_2$ z **zunanje** strani konstruiramo enakostranične trikotnike PL_1L_2 , QM_1M_2 , RN_1N_2 , SM_2N_1 , TN_2L_1 in UL_2M_1 . Naj bodo s G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , G_5 , G_6 označena težišča trikotnikov QSR , SRT , RTP , TPU , PUQ in UQS . Velja naslednje:

Daljice PS , QT in RU imajo enako dolžino, sekajo se v skupni točki in to pod kotom 120° .



Slika 4.3: Daljice imajo enako dolžino in se sekajo pod kotom 120°

Dokaz. Točke bomo predstavili s kompleksnimi števili. Ogljšča trikotnika so kompleksna števila a, b, c . Težišče tega trikotnika je v točki $g = \frac{1}{3}(a + b + c)$. Izhodišče kompleksne ravnine izberemo v točki g , kar pomeni $\frac{a+b+c}{3} = 0$, oziroma $a + b + c = 0$. Pogledali bomo dolžine.

$$\rho = \frac{|L_1C|}{|BC|} \quad \sigma = \frac{|BL_1|}{|BC|} \quad \rho + \sigma = 1$$

$$\frac{|BL_1|}{|L_1C|} = \frac{\rho|BC|}{\sigma|BC|} = \frac{\rho}{\sigma}$$

Iz tega sledi, da velja

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{\rho}{\sigma + \rho}b + \frac{\sigma}{\rho + \sigma}c & m_1 &= \frac{\rho}{\sigma + \rho}c + \frac{\sigma}{\sigma + \rho}a & n_1 &= \frac{\rho}{\sigma + \rho}a + \frac{\sigma}{\sigma + \rho}b \\ l_2 &= \frac{\sigma}{\sigma + \rho}b + \frac{\rho}{\sigma + \rho}c & m_2 &= \frac{\sigma}{\sigma + \rho}c + \frac{\rho}{\sigma + \rho}a & n_2 &= \frac{\sigma}{\sigma + \rho}a + \frac{\rho}{\sigma + \rho}b. \end{aligned}$$

Ogledali si bomo enakostranične trikotnike, ki so bili skonstruirani na zunanji strani šestkotnika $L_1L_2M_1M_2N_1N_2$. Ti trikotniki so PL_1L_2 , QM_1M_2 , RN_1N_2 , SM_2N_1 , TN_2L_1 in UL_2M_1 . Ker vemo, da so ti trikotniki pozitivno orientirani enakostranični, velja po izreku 4.10 naslednje

$$\begin{aligned} p &= -\omega l_2 - \omega^2 l_1 \\ q &= -\omega m_2 - \omega^2 m_1 \\ r &= -\omega n_2 - \omega^2 n_1 \\ s &= -\omega n_1 - \omega^2 m_2 \\ t &= -\omega l_1 - \omega^2 n_2 \\ u &= -\omega m_1 - \omega^2 l_2. \end{aligned}$$

Ker gledamo daljice sp , tq in ru iz tega sledi da je $s - p = -\omega n_1 - \omega^2 m_2 - (-\omega l_2 - \omega^2 l_1) = -\omega n_1 - \omega^2 m_2 + \omega l_2 + \omega^2 l_1 = \omega(l_2 - n_1) + \omega^2(l_1 - m_2)$

Enake zveze dobimo še za $t - q = \omega(m_2 - l_1) + \omega^2(m_1 - n_2)$ in za $u - r = \omega(n_2 - m_1) + \omega^2(n_1 - l_2)$. Nato kompleksna števila $l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2$ izrazimo z a, b, c in dobimo

$$\begin{aligned} s - p &= \omega\left(\frac{\rho}{\sigma + \rho}b + \frac{\sigma}{\sigma + \rho}c - \frac{\sigma}{\sigma + \rho}a - \frac{\rho}{\sigma + \rho}b\right) + \omega^2\left(\frac{\sigma}{\sigma + \rho}b + \frac{\rho}{\sigma + \rho}c - \frac{\rho}{\sigma + \rho}c - \frac{\sigma}{\sigma + \rho}a\right) \\ &= \frac{\sigma}{\sigma + \rho}(\omega c + \omega^2 b - \omega a - \omega^2 a) \end{aligned}$$

Upoštevajmo, da je $1 + \omega + \omega^2 = 0$, zato velja:

$$s - p = \sigma(a + \omega c + \omega^2 b),$$

Analogno bi poračunali še ostale primere in dobimo

$$t - q = \sigma(b + \omega a + \omega^2 c) = \omega^2(s - p),$$

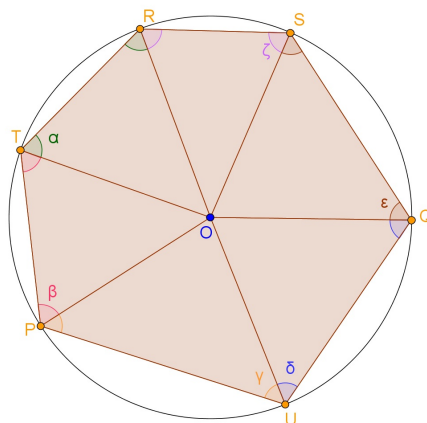
$$u - r = \sigma(c + \omega b + \omega^2 a) = \omega(s - p).$$

Zgornji izračuni nam povedo, da so dolžine daljic SP , RU in TQ enake. Še več, če naredimo še naslednjo zvezo $\frac{t-q}{s-p} = \frac{u-r}{t-q} = \frac{s-p}{u-r}$ vidimo da je

$$\frac{t-q}{s-p} = \frac{u-r}{t-q} = \frac{s-p}{u-r} = \omega.$$

S tem smo dokazali, da imajo daljice enako dolžino in da se sekajo pod kotom 120° .

Dokazati moramo še, da se sekajo v skupni točki. Podrobno si bomo ogledali šestkotnik $srtpuq$.



Slika 4.4: Vsota nesosednih kotov v 6-kotniku je 360°

Vemo, da je vsota vseh notranjih kotov v 6-kotniku enaka 720° .

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta + 2\epsilon + 2\phi = 720^\circ$$

Enačaj delimo s številom 2 in dobimo $(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) + (\epsilon + \phi) = 360^\circ$. Kot pri oglišču T je ravno $(\alpha + \beta)$, kot pri oglišču U je $(\gamma + \delta)$, kot pri oglišču S pa je $(\epsilon + \phi)$. Od tod sledi, da je vsota nesosednih kotov šestkotnika enaka 360° . Zato velja

$$(s-r) \cdot (t-p) \cdot (u-q) = -(r-t) \cdot (p-u) \cdot (q-s). \quad (4.1)$$

Na podlagi leme 4.8 vidimo, da je enačba premice skozi točki S in P enaka $z + s \cdot p\bar{z} = s + p$. Podobno izrazimo še preostali dve premici $z + t \cdot q\bar{z} = t + q$ in $z + r \cdot u\bar{z} = r + u$. Tako dobimo homogeni sistem treh enačb s tremi neznankami. Dokazujemo, da se dane premice sekajo v skupni točki. Da to velja, mora ta sistem imeti netrivialno rešitev. To bo pa natanko tedaj,

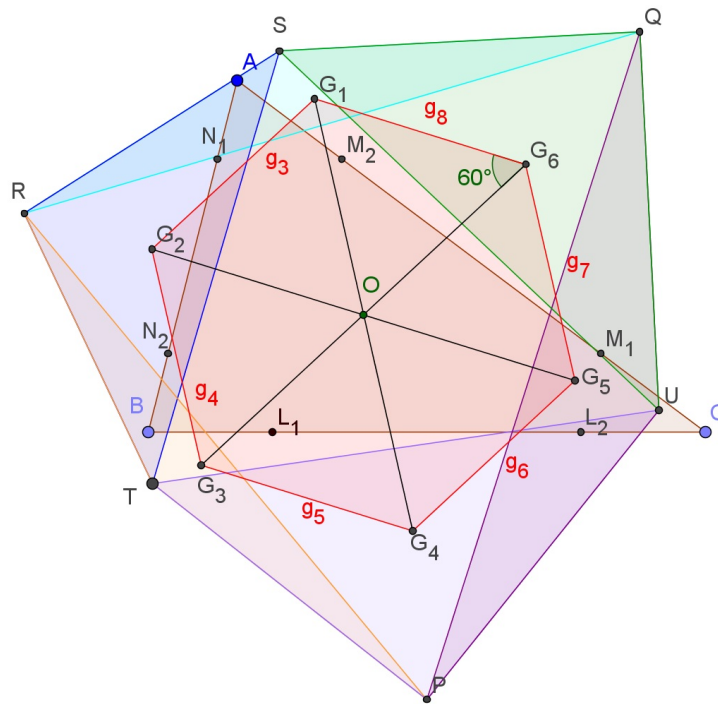
ko bo determinanta sistema enaka nič. Iz tega sledi, da je konkurentnost daljic ekvivalentna zvezi

$$\begin{vmatrix} 1 & s \cdot p & s + p \\ 1 & r \cdot u & r + u \\ 1 & t \cdot q & t + q \end{vmatrix} = 0.$$

To determinanto izračunamo, tako da jo razvijemo po prvem stolpcu. Tako dobimo $1 \cdot (ru(t + q) - tq(r + u)) - 1 \cdot (sp(t + q) - tq(s + p)) + 1 \cdot (sp(r + u) - ru(s + p)) = rut + ruq - tqr - tqv - spt - spt - spq + tqv + tqp + spr + spu - rus - rup$.

Če zmnožimo in uredimo zvezo 4.1 ugotovimo, da sta ti dve zvezi enaki. To nam pove, da je ta determinanta enaka 0. Iz zveze 4.1 sledi, da je determinanta ničelna in so zato premice konkurentne. S tem smo dokazali, da se daljice SP , TQ in RU sekajo v skupni točki. \square

Izrek 4.16 *Težišča G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 , in G_6 so oglišča pravilnega šestkotnika, katerega težišče sovpada z težiščem trikotnika ABC .*



Slika 4.5: Težišča sovpadajo

Dokaz.

Dokazati moramo, da je $G_1G_2G_3G_4G_5G_6$ pravilni šestkotnik in da je težišče tega šestkotnika enako težišču trikotnika ABC .

Oglišča trikotnika so kompleksna števila a, b, c . Težišče tega trikotnika je točka $g = \frac{1}{3}(a +$

$b + c$). Izhodišče kompleksne ravnine izberemo v točki g . To pomeni, da je $\frac{a+b+c}{3} = 0$, oziroma $a + b + c = 0$

Najprej pogledamo točke $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$. Za težišča velja

$$g_1 = \frac{q + s + r}{3} = \frac{m_2 + n_1 - \omega^2 m_1 - \omega n_2}{3},$$

$$g_2 = \frac{s + r + t}{3} = \frac{n_1 + n_2 - \omega^2 m_2 - \omega l_1}{3},$$

$$g_3 = \frac{r + t + p}{3} = \frac{n_2 + l_1 - \omega^2 n_1 - \omega l_2}{3}.$$

Analogno velja še za g_4, g_5 in g_6 . Ker smo težišče trikotnikov postavili v izhodišče, zato vemo $a + b + c = 0$, oziroma posledično tudi $l_1 + m_1 + n_1 = 0$ in $l_2 + m_2 + n_2 = 0$.

Po urejanju enačb za težišča in zgornjih zvez dobimo, da velja

$$\begin{aligned} \omega^2 g_1 + g_2 &= \frac{\omega^2(m_2 + n_1 - \omega^2 m_1 - \omega n_2)}{3} + \frac{n_1 + n_2 - \omega^2 m_2 - \omega l_1}{3} \\ &= \frac{\omega^2 m_2 + \omega^2 n_1 - \omega^4 m_1 - \omega^3 n_2 + n_1 + n_2 - \omega^2 m_2 - \omega l_1}{3} \end{aligned}$$

$$\omega^2 g_1 + g_2 = \frac{-\omega(l_1 + m_1 + n_1)}{3} = 0,$$

Enako izračunamo še

$$\omega^2 g_2 + g_3 = \frac{-\omega(l_2 + m_2 + n_2)}{3} = 0.$$

Iz teh in podobnih izračunov lahko vidimo, da je

$$|g_1| = |g_2| = |g_3| = |g_4| = |g_5| = |g_6|.$$

Tako smo dokazali, da so dolžine stranic v šestkotniku $G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6$ enake.

Dokažimo še, da so $0g_1 g_2$, $0g_2 g_3$, $0g_3 g_4$, $0g_4 g_5$, $0g_5 g_6$ in $0g_6 g_1$ enakostranični trikotniki.

Oglejmo si trikotnik $0g_1 g_2$. Vemo, da $g_2 = -\omega^2 g_1$. Po izreku 4.10 velja da je $0g_1 g_2$ enakostranični trikotnik natanko tedaj, ko velja

$$0 + \omega g_1 + \omega^2 g_2 = 0$$

Izračunajmo

$$\omega g_1 + \omega^2(-\omega^2 g_1) =$$

$$\omega g_1 - \omega^4 g_1 =$$

$$\omega g_1(1 - \omega^3) =$$

$$\omega g_1(1 - 1) = 0$$

Tako smo dokazali, da je trikotnik enakostraničen. Analogno lahko naredimo še za ostale trikotnike. Ker imamo 6 enakostraničnih trikotnikov, iz tega sledi, da je $G_1G_2G_3G_4G_5G_6$ pravilni šestkotnik.

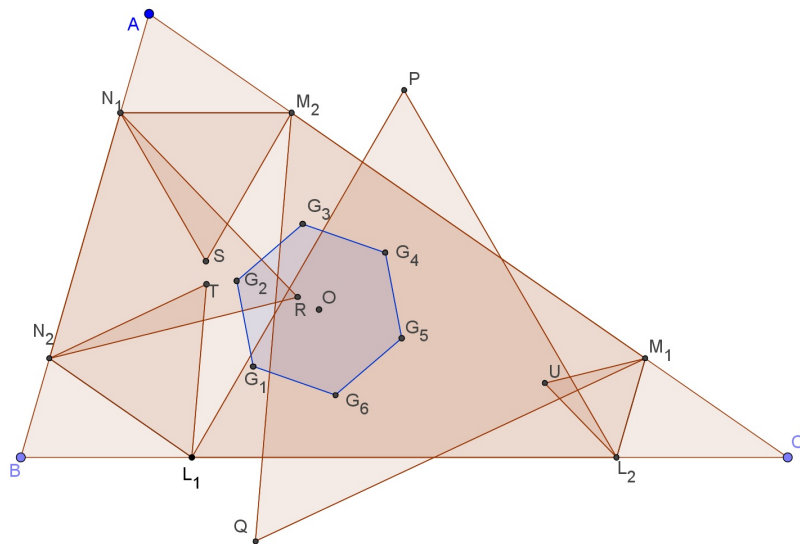
Težišče tega šestkotnika pa je enako težišču trikotnika ABC . s tem je naš izrek dokazan.

Izrek 4.17 V trikotniku ABC naj bodo L_1 in L_2 , M_1 in M_2 , N_1 in N_2 zaporedoma točke na stranicah BC , CA in CB , tako da velja:

$$\frac{|BL_1|}{|L_1C|} = \frac{|CL_2|}{|L_2B|} = \frac{|CM_1|}{|M_1A|} = \frac{|AM_2|}{|M_2C|} = \frac{|AN_1|}{|N_1B|} = \frac{|BN_2|}{|N_2A|} < \frac{\rho}{\sigma} < 1.$$

Nad stranicami šestkotnika $L_1L_2M_1M_2N_1N_2$ z **notranje** strani konstruiramo enakostranične trikotnike PL_1L_2 , QM_1M_2 , RN_1N_2 , SM_2N_1 , TN_2L_1 in UL_2M_1 . Naj bodo s G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , G_5 , G_6 označena težišča trikotnikov QSR , SRT , RTP , TPU , PUQ in UQS . Velja naslednje:

Daljice PS , QT in RU imajo enako dolžino, sekajo se v skupni točki in to pod kotom 120° . Težišča G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , G_5 , in G_6 so oglišča pravilnega šestkotnika, katerega težišče sovpada z težiščem trikotnika ABC .



Slika 4.6: Pravilni šestkotnik

Dokaz. Dokaz tega izrek poteka analogno kot dokaz izreka 4.15. Tukaj imamo enakostranične trikotnike konstruirani navznoter, kar pomeni da so negativno orientirani. Po

izreku 4.11 vemo, da je $z_1 z_2 z_3$ negativno orientiran enakostraničen trikotnik natanko tedaj, ko velja:

$$z_1 + \bar{\omega} z_2 + \bar{\omega}^2 z_3 = 0.$$

Edina razlika med dokazoma izrekov 4.15 in 4.17 je torej v tem, da v tem dokazu delamo z omega prečna ($\bar{\omega}$). □

Zaključek

Diplomsko delo temelji na člankih [1, 2, 3].

V prvem poglavju sem opisovala osnove Fermatove točke. Zapisala sem kaj je Fermatova točka in njene lastnosti. Torej nad stranicami poljubnega trikotnika narišemo enakostranične trikotnike. Ogljišča teh narisanih trikotnikov med sabo povežemo in vidimo, da se sekajo v skupni točki. Osnovna literatura za to so bila predavanja Elementarne matematike I.

V drugem poglavju sem se ukvarjala s prvo posplošitvijo Fermatove točke. Nad stranicami trikotnika smo navzven narisali na ustrezen način medsabno podobne trikotnike. Daljice oglišč se sekajo v skupni točki. Osnovna vsebina tega poglavja je temeljila na članku [1].

V tretjem poglavju sem analizirala drugo posplošitev Fermatove točke. Izrek, ki smo ga dokazovali, je temeljil na središčnem raztegu. Literatura za to poglavje je bil članek [2].

Četrto poglavje temelji na članku [3]. Vsebino poglavja je temeljila na dokazovanju v kompleksni ravnini. Po osnovnih pojmihi o kompleksnih številih sem analizirala primer, kjer sem na ustrezen način iz začetnega trikotnika pridobila šestkotnik. Nad tem šestkotniku sem narisala enakostranične trikotnike in dokazala, da se daljice oglišč sekajo v skupni točki. Nekatere ideje o dokazovanju tega izreka sem našla v diplomski nalogi [7].

Glavna dejstva o uporabi kompleksnih števil v geometriji sem povzela po zapiskih mentorjevih predavanj pri predmetu Analitični pristopi h geometriji, ti pa so nastali na podlagi knjige [5].

Vmesna pojasnila in izračune sem dodala sama.

Vse slike v diplomskem delu sem narisala sama in to s programom GeoGebra.

Pri nastajanju diplomskega dela pa so ključne mentorjeve ideje in napotki.

Literatura

- [1] M. de Villiers: *A generalization of Fermat - Toricelli point*, Math. Gaz. 79(1995), str. 374 – 378.
- [2] M. de Villiers: *Further generalizations of Fermat - Toricelli point*, Math. Gaz. 83(1999), str. 106 – 108.
- [3] O. P. Loosers: *A generalization of Napoleon's theorem*, Math. Mag. 70(1997), str. 70 – 73.
- [4] Kimberling, Encyclopedia of triangle centers, dostopno na spletu:
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.
povzeto dne 4.7.2016.
- [5] Liang-shin Hahn, *Complex numbers geometry*, Mathematical Association of America, 1994.
- [6] Središčni razteg, spletna stran Wikipedia, dostopno na spletu:
https://sl.wikipedia.org/wiki/Središčni_razteg.
- [7] Brigita Oglajner, Izrek o sedmih krožnicah: diplomsko delo, Pedagoška fakulteta, Maribor, 2010.
- [8] Pierre de Fermat, dostopno na spletu:
<https://www.britannica.com/biography/Pierre-de-Fermat>