UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

MAGISTRSKO DELO

Jernej Činč

Maribor, 2013

UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

Magistrsko delo

POLHOMOGENI KONTINUUMI

na študijskem programu 2. stopnje Matematika

Mentor: dr. Iztok Banič

Kandidat: Jernej Činč

Maribor, 2013

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorju dr. Iztoku Baniču za pomoč pri izdelavi magistrskega dela. Zahvala gre tudi vsem, ki so mi v času študija stali ob strani.

UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

IZJAVA

Podpisani Jernej Činč, rojen 26.12.1989, študent Fakultete za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru, študijskega programa 2. stopnje Splošna Matematika, izjavljam, da je magistrsko delo z naslovom

POLHOMOGENI KONTINUUMI

pri mentorju prof. dr. Iztoku Baniču avtorsko delo. V magistrskem delu so uporabljeni viri in literatura korektno navedeni; teksti niso uporabljeni brez navedbe avtorjev.

Maribor, 9. 9. 2013

Jernej Činč

Polhomogeni kontinuumi

program magistrskega dela

Polhomogeni kontinuumi so kontinuumi, ki imajo natanko dve orbiti. V magistrskem delu naj bodo predstavljeni nekateri primeri takih polhomogenih uverižljivih kontinuumov in njihove osnovne lastnosti. Natančno naj bo opisana tudi karakterizacija polhomogenih uverižljivih kontinuumov, ki je opisana v [1], glede na število njihovih krajišč.

Osnovni viri:

1 J. Bobok, P. Pyrih, B. Vejnar, Half homogeneous chainable continua with end points, Topology and its Aplications 160 (2013), 1066–1073.

izr. prof. dr. Iztok Banič

ČINČ, J.: Polhomogeni kontinuumi.
Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2013.

IZVLEČEK

V magistrskem delu preučujemo polhomogene uverižljive kontinuume in poskušamo najti njihovo klasifikacijo glede na število njihovih krajišč.

Najprej se seznanimo z osnovnimi definicijami in zapišemo nekaj enostavnih primerov kontinuumov. Predstavimo nekatere osnovne lastnosti kontinuumov, kot so ireducibilnost, dedna unikoherentnost in homogenost. Definiramo uverižljive kontinuume, konstruiramo nekaj primerov takih kontinuumov in predstavimo nekatere njihove lastnosti.

V nadaljevanju predstavimo rezultate iz [5], ki govorijo o polhomogenih uverižljivih kontinuumih s končno mnogo krajišči. Dokažemo, da do homeomorfizma natančno obstajata natanko dva polhomogena uverižljiva kontinuuma z dvema krajiščema. Dokažemo še, da sta ta kontinuuma tudi edina polhomogena uveržijva kontinuuma z neprazno končno množico krajišč.

V zadnjem poglavju predstavimo še nekaj odprtih vprašanj in razpravljamo o možnih rešitvah.

Ključne besede: Kontinuum, Uverižljivi kontinuum, Krajišče, Polhomogeni kontinuum.

Math. Subj. Class. (2010): 54F15, 54F50.

Činč, J.: Half-homogeneous continua.
Master Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Scicences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2013.

ABSTRACT

In Master's Thesis half-homogeneous chainable continua are studied. More precisely we are discussing the possible classification of such continua with respect to the number of their end points.

First we introduce basic definitions and produce some of the basic examples of continua. We also introduce some of the basic properties of continua, such as irreducibility, hereditarily unicoherence and homogenity. We define chainable continua, construct some examples of such continua and show some of their properties.

Next we present the results from [5]. More precisely, we present the results about half-homogeneous chainable continua with finitely many end points. We prove that up to homeomorphism there are only two half-homogeneous chainable continua with two end points. We also prove that the two continua are the only half-homogeneous chainable continua with a nonempty finite set of end points.

Finally, in the last chapter we introduce some open problems and discuss possible solutions.

Keywords: Continuum, Chainable continuum, End point, Half-homogeneous continuum.

Math. Subj. Class. (2010): 54F15, 54F50.

Kazalo

Uvod

Orbita neke točke x kontinuuma X je definirana kot množica vseh slik $f(x)$, kjer je f homeomorfizem, ki slika iz X v X. Kontinuumu X, sestavljenemu iz natanko dveh orbit, rečemo polhomogeni kontinuum. Veriga v kontinuumu X je končno urejeno zaporedje odprtih množic, kjer le za sosednje indeksirana elementa verige velja, da imata neprazen presek. Elementom verige rečemo členi verige. Za nek pozitiven ε rečemo, da je veriga ε-veriga, če za vsak člen verige velja, da je njegov diameter manjši od ε. Kontinuum X je uverižljiv, če ga lahko za vsak pozitiven ε pokrijemo z neko ε-verigo. Točki $x \in X$ rečemo krajišče od X, če za vsak pozitiven ε obstaja ε-veriga, ki pokriva X in le prvi člen te verige vsebuje x.

V magistrskem delu preučujemo polhomogene uverižljive kontinuume glede na množico njihovih krajišč. Najprej zapišemo natančno konstrukcijo psevdoloka in na podlagi njega konstruiramo primera polhomogenih uveržljiv kontinuumov, lok psevdolokov in lok brez lokov. Osrednji rezultat magistrskega dela je dokaz, da do homeomorfizma natančno obstajata natanko dva polhomogena uverižljiva kontinuuma z dvema krajiščema, lok in lok brez lokov. Dokažemo še, da sta omenjena kontinuuma tudi edina polhomogena uverižljiva kontinuuma z neprazno končno množico krajišč.

V zadnjem poglavju magistrskega dela se seznanimo z odprtimi problemi preučevane teme. Eden izmed problemov se glasi, ali obstaja polhomogen uverižljiv kontinuum z neskončno mnogo krajišči in ni lok psevdolokov. V zadnjem zgledu magistrskega dela podamo primer kontinuuma K, ki zadošča vsem zahtevanim lastnostim razen polhomogenosti.

Poglavje 1

Kontinuumi

1.1 Osnovni pojmi

Za začetek si oglejmo nekaj osnovnih definicij in trditev, ki jih bomo v nadaljevanju magistrskega dela potrebovali. Vsi obravnavani prostori v nadaljevanju so metrični.

Definicija 1.1 *Družina $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je topologija na množici X, če zadošča pogojem:*

1. *$\emptyset$ in X sta elementa $\mathcal{T}$,*
2. *unija poljubno mnogo elemetov iz $\mathcal{T}$ je element $\mathcal{T}$,*
3. *presek končno mnogo elementov iz $\mathcal{T}$ je element $\mathcal{T}$.*

Če je $\mathcal{T}$ topologija na X, paru $(X, \mathcal{T})$ pravimo topološki prostor.

Definicija 1.2 *Naj bo M neprazna množica. Preslikava $d : M \times M \to \mathbb{R}$ je metrika, če zadošča naslednjim pogojem:*

1. *$d(x, y) \geq 0$ za vsaka $x, y \in M$,*
2. *$d(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko $x = y$ za vsaka $x, y \in M$,*
3. *$d(x, y) = d(y, x)$ za vsaka $x, y \in M$,*
4. *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ za vse $x, y, z \in M$.*

Paru (M, d) pravimo metrični prostor.

Zgled. Na $\mathbb{R}^n$ ponavadi uporabljamo evklidsko metriko:
Za poljubna $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, kjer $x, y \in \mathbb{R}^n$, je evklidska metrika definirana z
$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$.

Definicija 1.3 *Naj bo (M, d) metrični prostor, $x_0 \in X$ in r pozitivno število. Množica* $\mathrm{K}(x_0, r) = \{x \in X |\ d(x, x_0) < r\}$ *se imenuje odprta krogla v X s središčem v x_0 in polmerom r.*

Definicija 1.4 *Naj bo (M, d) metrični prostor in $X \subseteq M$. Diameter množice X je definiran kot* $\mathrm{diam}(X) = sup\{d(x, y)|\ x, y \in X\}$.

Definicija 1.5 *Naj bo (M, d) metrični prostor in $U \subseteq M$. Rečemo, da je U odprta v M, če jo lahko zapišemo kot unijo odprtih krogel. Podmnožica V metričnega prostora (M, d) je zaprta v M, če je $M \setminus V$ odprta v M.*

Zgled. Naj bo $V = [0, 1]$. V je zaprta v $\mathbb{R}$, saj je $\mathbb{R} \setminus V = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ odprta v $\mathbb{R}$.

Definicija 1.6 *Naj bo (M, d) metrični prostor, $A \subseteq M$ in $a \in M$. Razdalja med točko a in množico A je definirana kot $d(a, A) = \{\inf(d(a, x))|\ x \in A\}$.*

Definicija 1.7 *Naj bo (M, d) metrični prostor in $A \subseteq M$.*

- *Zaprtje množice A v prostoru M je najmanjša zaprta množica v M, ki vsebuje A (označimo jo s* $\mathrm{Cl}(A)$ *ali kar z $\overline{A}$).*
- *Notranjost množice A v prostoru M je največja odprta množica v M, ki je vsebovana v A (označimo jo z* $\mathrm{Int}(A)$*).*
- *Rob množice,* $\mathrm{Bd}(A)$*, definiramo na naslednji način:* $\mathrm{Bd}(A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)$.

Zgled. Naj bo $A = (a, b)$, kjer $a, b \in \mathbb{R}$. Potem je $\mathrm{Cl}(A) = [a, b]$, $\mathrm{Int}(A) = (a, b)$, rob množice $\mathrm{Bd}(A) = [a, b] \cap ((\infty, a] \cup [b, \infty)) = \{a, b\}$.

Definicija 1.8 *Metrični prostor X je nepovezan, če obstajata njegovi neprazni, odprti, disjunktni podmnožici, za kateri velja, da je njuna unija cel X. Prostor, ki ni nepovezan, je povezan.*

Opomba 1.9 *Naj bosta U in V taki množici, kot sta opisani v zgornji definiciji. Potem pravimo, da je par množic U, V separacija prostora X.*

Zgled. Naj bo $X = (-1, 0) \cup (0, 1)$, $Y = [0, 1]$. Prostor X ni povezan, saj ima separacijo $U = (-1, 0)$, $V = (0, 1)$, medtem ko prostor Y je povezan (glej [11, str. 154]).

Izrek 1.10 *Če je X povezan prostor, je povezan tudi* $\mathrm{Cl}(X)$.

Dokaz. Dokaz najdemo v [11, str. 149]. □

Definicija 1.11 *Naj bo X metrični prostor, $U \subseteq X$ in $p \in U$. Največji povezani podprostor od U, ki vsebuje točko p, se imenuje komponenta od U, ki vsebuje p.*

Definicija 1.12 *Metrični prostor X je kompakten, če vsako odprto pokritje za X premore končno podpokritje.*

Zgled. Prostor $X = (0, 1)$ ni kompakten, saj odprto pokritje $\mathcal{U} = \{(\frac{1}{n+1}, 1) | \ n \in \mathbb{N}\}$ prostora X nima končnega podpokritja.

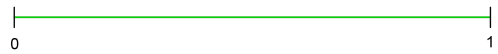
Izrek 1.13 *Naj bo A podprostor prostora $\mathbb{R}^n$, opremljenega z evklidsko topologijo. Potem je A kompakten natanko tedaj, ko je množica A zaprta in omejena v $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [11, str. 174]. □

Zgled. Prostor $X = [0, 1]$ je kompakten po izreku 1.13.

Definicija 1.14 *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$ in $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora. Naj bo še $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ funkcija. Tedaj je f zvezna, če za vsak $U \in \mathcal{S}$ velja, da je $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.*

Definicija 1.15 *Naj bo $f : X \to Y$ poljubna preslikava med metričnima prosotroma in A podmnožica množice X. Preslikava $f|_A : A \to B$, definirana s predpisom $f|_A(a) = f(a)$ za vsak $a \in A$, se imenuje zožitev preslikave f na podmnožico A.*



Slika 1.1: Enotski interval $[0,1]$

Definicija 1.16 *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$ in $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora. Potem funkciji $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ pravimo homeomorfizem, če je f zvezna, bijektivna in je f^{-1} zvezna. Za topološka prostora $(X, \mathcal{T})$ in $(Y, \mathcal{S})$ pravimo, da sta homeomorfna, če obstaja homeomorfizem $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$.*

Definicija 1.17 *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Na X definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$. Kvocient $X/_\sim$ opremimo z največjo topologijo med vsemi topologijami na $X/_\sim$, za katere je preslikava $\pi : X \to X/_\sim$ s predpisom $\pi(x) = [x]$ zvezna. To topologijo imenujemo kvocientna topologija na $X/_\sim$.*

Definicija 1.18 *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. Pravimo, da je A gosta v X, če za vsak $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ velja, da je $U \cap A \neq \emptyset$.*

Definicija 1.19

(i) *Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ ima lastnost T_1, če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstaja takšna okolica U od točke a, ki ne vsebuje točke b.*

(ii) *Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ ima lastnost T_2, če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstaja takšna okolica U od točke a in takšna okolica V od točke b, da je $U \cap V = \emptyset$.*

(iii) *Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ ima lastnost T_3, če za poljubno zaprto podmnožico B od X in za vsako točko a, ki ni vsebovana v B, obstajata takšna okolica U od točke a in takšna okolica V od množice B, da je $U \cap V = \emptyset$*

(iv) *Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ ima lastnost T_4, če za poljubni zaprti disjunktni podmnožici A in B od X obstajata takšna okolica U od množice A in takšna okolica V od množice B, da je $U \cap V = \emptyset$.*

Opomba 1.20 *Normalni prostori so topološki prostori z lastnostima T_1 in T_4.*

Izrek 1.21 *Vsak metrični prostor je normalen.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [10, str. 25]. □

V naslednjem izreku bomo strnili nekaj pomembnih osnovnih izrekov, katere bomo uporabljali tekom magistrskega dela.

Izrek 1.22

1. *Zaprta podmnožica kompaktnega prostora je kompakten prostor.*
2. *Kompaktna podmnožica metričnega prostora je zaprta.*
3. *Zvezna slika povezanega prostora je povezan prostor.*
4. *Zvezna slika kompaktnega prostora je kompakten prostor.*

Dokaz. Dokaze vseh trditev si je mogoče ogledati v [11, str. 146–188]. □

1.2 Primeri in nekatere lastnosti kontinuumov

V nadeljevanju magistrskega dela bomo posvetili posebno pozornost metričnim prostorom, ki jih imenujemo kontinuumi. Spoznali bomo definicijo kontinuuma, nekaj primerov in predvsem določene lastnosti kontinuumov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Definicija 1.23 *Kontinuum je neprazen kompakten povezan metrični prostor.*

Podkontinuum je kontinuum, ki je podprostor nekega kontinuuma.

Zgled. $\{x\}$ je kontinuum za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.24 *Topološkemu prostoru z eno samo točko pravimo degeneriran topoški prostor. Če topološki prostor vsebuje več kot eno točko mu rečemo nedegeneriran.*

Zgled. V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da je zaprti interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ neprazen, povezan, kompakten, metrični prostor, torej kontinuum.

Izrek 1.25 *Metrični prostor, ki je homeomorfen nekemu kontinuumu, je tudi sam kontinuum.*

Dokaz. Označimo z X metrični prostor in $f : K \to X$ naj bo homeomorfizem, kjer je K kontinuum. Ker je K neprazen, povezan in kompakten metrični prostor je po izreku 1.22 tudi X kontinuum. □

Izrek 1.26 *Unija dveh podkontinuumov nekega metričnega prostora, ki imata skupno točko, je kontinuum.*

Dokaz. Unija dveh kompaktnih prostorov je kompakten prostor. Unija povezanih prostorov, ki imajo skupno točko, je tudi sam povezan prostor [11, str. 149]. Oba prostora sta sama neprazna in metrična torej je tudi njuna unija taka. □

Definicija 1.27 *Lok je metrični prostor, ki je homeomorfen zaprtemu intervalu* $[0, 1]$.

Trditev 1.28 *Lok L je kontinuum.*

Dokaz. Naj bo $f : [0, 1] \to L$ homeomorfizem. Interval $[0, 1]$ je kontinuum po prejšnjem zgledu. Lok je po definiciji metrični prostor, zato je po izreku 1.25 kontinuum. □

Opomba 1.29 *Točkama $f(0)$ in $f(1)$ pravimo krajišči loka L.*

V magistrskem delu se bomo večkrat srečali s pomembno tehniko vgnezdenih presekov, s katero pridobimo zanimive primere kontinuumov.

Izrek 1.30 *Imejmo padajoče zaporedje kontinuumov $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$*

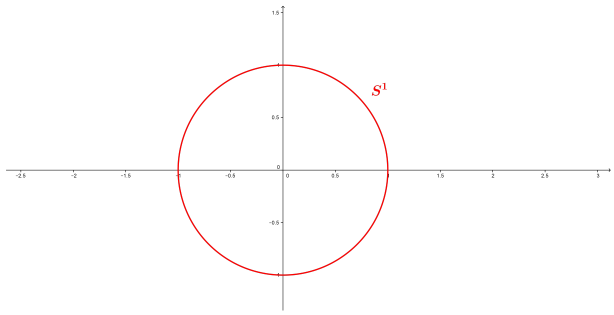
Tedaj je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

kontinuum.

Dokaz. Dokaz najdemo v [12, str. 5]. □

Polhomogenost je eden izmed osrednjih pojmov, ki ga bomo rabili pri nadalnjem preučevanju. Oglejmo si, kako je definiran.



Slika 1.2: Enotska krožnica S^1

Definicija 1.31 *Kontinuum K je homogen, če za vsaka $x, y \in K$ obstaja homeomorfizem $f : K \to K$, tako da je $f(x) = y$.*

Zgled. Enotska krožnica (slika 1.2) $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ je homogen prostor, homeomorfizem bo ustrezna rotacija okoli središča krožnice.

Zgled. Oglejmo si, zakaj enotski interval $X = [0, 1]$ ni homogen. Pa recimo, da je homogen, torej obstaja homeomorfizem g, ki točko 0 preslika v točko $\frac{1}{2}$. Oglejmo si zožitev $g|_{(0,1]} : (0, 1] \to [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Zožitev zvezne funkcije je zvezna funkcija, po izreku 1.22 pa bi moral biti prostor $[0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ povezan, s čimer pridemo do protislovja.

Definicija 1.32 *Naj bo X kontinuum. Orbita prostora X, kjer je $x \in X$, je definirana kot* $\mathrm{Orb}(x) = \{f(x) \mid f : X \to X \text{ je homeomorfizem}\}$.

Opomba 1.33 *Velja torej, da je kontinuum X homogen natanko tedaj, ko za vsak $x \in X$ velja:* $\mathrm{Orb}(x) = X$.

Definicija 1.34 *Kontinuum K je $\frac{1}{n}$-homogen ($n \in \mathbb{N}$), če ima K natanko n orbit.*

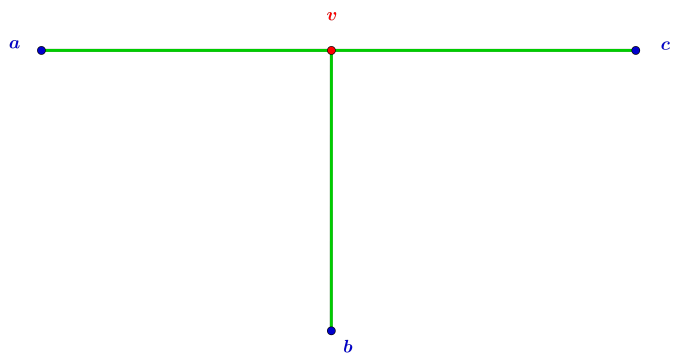
Opomba 1.35 *Kontinuumom z natanko eno orbito rečemo namesto* 1*-homogeni kar homogeni kontinuumi.*

Opomba 1.36 *Polhomogeni kontinuumi, s katerimi se bomo ukvarjali v nadaljevanju magistrskega dela, so torej kontinuumi z natanko dvema orbitama.*

Zgled. Enotski interval $[0,1]$ ima dve orbiti: $\mathrm{Orb}(0) = \mathrm{Orb}(1) = \{0,1\}$, za vsak $x \in (0,1)$: $\mathrm{Orb}(x) = (0,1)$, torej je polhomogeni kontinuum.

Definicija 1.37 *Trioda je prostor, ki je homeomorfen uniji treh lokov, ki imajo natanko eno skupno krajišče, rečemo mu vrh triode (glej sliko 1.3).*

Opomba 1.38 *Trioda je po izreku* 1.26 *kontinuum.*



Slika 1.3: Orbite triode

Zgled. Orbite triode T so (slika 1.3): $\mathrm{Orb}(v) = \{v\}$, $\mathrm{Orb}(a) = \{a,b,c\}$ in $\mathrm{Orb}(x) = T \setminus \{a,b,c,v\}$ za vsak $x \in T \setminus \{a,b,c,v\}$, torej je trioda $\frac{1}{3}$-homogen kontinuum.

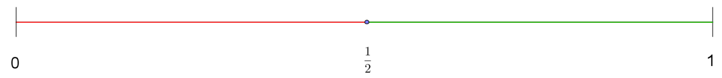
Definicija 1.39 *Kontinuum je nerazcepen, če se ga ne da zapisati kot unijo svojih dveh pravih pokontinuumov. V nasprotnem primeru rečemo, da je kontinuum razcepen.*

Opomba 1.40 *Naj bo K kontinuum. Njegovi pravi podkontinuumi so vsi podkontinuumi od K, razen K.*

Definicija 1.41 *Kontinuum je dedno nerazcepen, če je nerazcepen vsak njegov podkontinuum.*

Opomba 1.42 *Vsak dedno nerazcepen kontinuum je tudi nerazcepen.*

Zgled. Enotski interval $[0,1]$ je razcepen kontinuum (slika 1.4). $K_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $K_2 = [\frac{1}{2}, 1]$ sta njegova prava podkontinuuma in velja: $K = K_1 \cup K_2$.

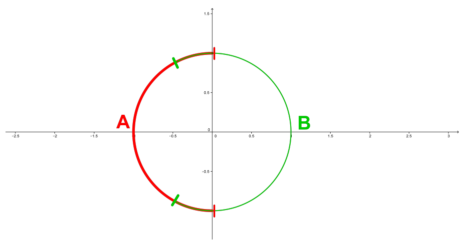


Slika 1.4: $[0, 1]$ je razcepen kontinuum

Zgled. $\{x\}$ je nerazcepen kontinuum za vsak $x \in \mathbb{R}$. Njegov edini podkontinuum je $\{x\}$. Točka je torej tudi dedno nerazcepna.

Definicija 1.43 *Kontinuum K je dedno unikoherenten, če za poljubna podkontinuuma A in B od K, katerih unija je celoten K, velja: bodisi $A \cap B = \emptyset$, bodisi $A \cap B$ je povezan.*

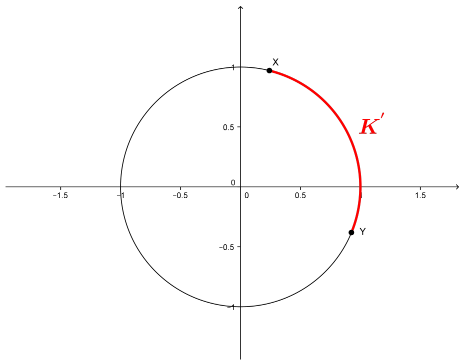
Zgled. Lok je dedno unikoherenten, medtem ko lahko za enotsko krožnico $K = S_1$ najdemo taka podkontinuuma A in B, da bo njuna unija cel K, presek pa ne bo povezan (slika 1.5).



Slika 1.5: S^1 ni dedno unikoherenten kontinuum

Definicija 1.44 *Naj bo K kontinuum in $x, y \in K$. K je ireducibilen med točkama x in y, če za vsak podkontinuum K' od K velja: če sta $x, y \in K'$, potem je K' enak celotnemu kontinuumu K. Kontinuum je ireducibilen, če obstajata taki točki x in y iz K, da je K ireducibilen med njima.*

Zgled. Kontinuum $[0, 1]$ je ireducibilen med točkama 0 in 1, medtem ko enotska krožnica S^1 (slika 1.6) ni ireducibilna med nobenima točkama.



Slika 1.6: S^1 ni ireducibilna

Definicija 1.45 *Presečna točka v kontinuumu X je taka točka $x \in X$, za katero velja, da njen komplement $X \setminus \{x\}$ ni povezan.*

Zgled. Poljubna točka iz intervala $(0, 1)$ je presečna točka kontinuuma $[0, 1]$.

1.3 USC dekompozicija

Pojem navzgor polzvezne (USC) dekompozicije bomo uporabili pri konstrukciji novega kontinuuma, loka brez lokov. Oglejmo si kako je definirana.

Definicija 1.46 *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Particija prostora X je družina nepraznih, paroma disjunktnih podmnožic od X, katerih unija je celoten X.*

Trditev 1.47 *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in družina $\mathcal{D}$ njegova particija. Naj bo $\mathcal{T}(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D} | \cup\mathcal{U} \in \mathcal{T}\}$. Potem je $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ topologija na particiji $\mathcal{D}$.*

Dokaz. Lastnosti topologije $\mathcal{T}$ veljajo na particiji $\mathcal{D}$, glej [12, str. 36]. □

Definicija 1.48 *Prostor $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ imenujemo dekompozicijski prostor od X, ali kar dekompozicija od X.*

Opomba 1.49 *Naj bo $\mathcal{D}$ particija prostora X. Med prostoroma X in $\mathcal{D}$ lahko definiramo funkcijo $\pi : X \to \mathcal{D}$ s predpisom: za vsak $x \in X$ je $\pi(x) = D$, kjer za D velja: $x \in D \in \mathcal{D}$. Funkcija s takim predpisom je očitno surjekcija in velja, da je $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ največja topologija na $\mathcal{D}$, tako da je π zvezna. $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ je kvocient prostora X, kjer je za vsak $x, y \in X : x \sim y$ natanko tedaj, ko $x, y \in \mathcal{D}$.*

Intuitivno si lahko razlagamo, da so dekompozicije prostori, ki jih dobimo iz prvotnih prostorov tako, da identificiramo vse točke posameznega elementa dane particije. Potreben in zadosten pogoj, da neka dekompozicija iz kontinuuma porodi nov kontinuum je, da je metrizabilna. Ker pa je preverjanje te lastnosti precej nepraktično, uvedemo uporaben pogoj, s pomočjo katerega bo lažje preverjati, ali je $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ kontinuum.

Definicija 1.50 *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Dekompoziciji $\mathcal{D}$ pravimo, da je USC dekompozicija, če za vsak $A \in \mathcal{D}$ in vsako odprto množico $U \subseteq X$, kjer je $A \subseteq U$, obstaja taka odprta množica $V \subseteq X$, da velja:*

1. *$A \subseteq V \subseteq U$,*
2. *za vsak $B \in \mathcal{D}$: če je $B \cap V \neq \emptyset$, je $B \subseteq U$.*

Zgled. Naj bo $X = [-1, 1]$ in $\mathcal{D} = \{\{x, -x\}\} | -1 < x < 1\} \cup \{\{-1\}, \{1\}\}$ particija prostora X.

Preverimo, če je $\mathcal{D}$ USC dekompozicija. Poskušali bomo najti protiprimer. Vzemimo za $A = \{1\}$. Izberimo za $U = (\frac{1}{2}, 1]$. U je odprta v X in velja, da je $A \subseteq U$. Prva točka definicije 1.50 torej velja. Naj bo $\varepsilon > 0$. Za vsak $V = (1-\varepsilon, 1]$ obstaja $B = \{1 - \frac{\varepsilon}{2}, -1 + \frac{\varepsilon}{2}\}$, da velja $B \cap V \neq \emptyset$ in B ni podmnožica od U, kar pomeni, da druga točka definicije 1.50 ne velja. Particija $\mathcal{D}$ torej ni USC dekompozicija.

Ugotoviti moramo še, da je $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ kontinuum, če je $\mathcal{D}$ USC dekompozicija. Dokazati moramo, da je USC dekompozicija $\mathcal{D}$ metrizabilna.

Izrek 1.51 *Naj bo X metrični prostor in $\mathcal{D}$ dekompozicija od X. Potem so naslednje trditve ekvivalentne.*

a) *$\mathcal{D}$ je USC dekompozicija.*

b) *Funkcija $\pi : X \to \mathcal{D}$ definirana kot v opombi 1.49 je zaprta.*

c) *Naj bo U odprta podmnožica od X. Potem je unija $W_U = \bigcup\{D \in \mathcal{D} | \ D \subseteq U\}$ odprta podmnožica od X.*

d) *Naj bo V zaprta podmnožica od X. Potem je unija $K_V = \bigcup\{D \in \mathcal{D} | \ D \cap V \neq \emptyset\}$ zaprta podmnožica od X.*

Dokaz.

a) ⇒ *b*) Naj bo $\mathcal{D}$ USC dekompozicija in $D \subseteq X$ zaprta v X. Ker je funkcija π zvezna, velja, da je $\pi(D)$ zaprta v $\mathcal{D}$ natanko tedaj, ko je $\pi^{-1}(\pi(D))$ zaprta v X. Dokažimo, da je $X \setminus \pi^{-1}(\pi(D))$ odprta v X. Naj bo $x \in X \setminus \pi^{-1}(\pi(D))$. Potem je $\pi(x) \in \mathcal{D} \setminus \pi(D)$ in torej velja $\pi^{-1}(\pi(D)) \subseteq X \setminus D$. Ker je $\mathcal{D}$ USC dekompozicija obstaja taka odprta množica V v X, da je $\pi^{-1}(\pi(x)) \subseteq V$ in za vsak $y \in V$ velja, da je $\pi^{-1}(\pi(y)) \subseteq X \setminus D$. Vidimo, da je $x \in V$ in $\pi(V) \subseteq \mathcal{D} \setminus \pi(D)$. Torej velja, da je $V \subseteq X \setminus \pi^{-1}(\pi(D))$. Ugotovili smo, da je množica $X \setminus \pi^{-1}(\pi(D))$ odprta v X, saj velja $x \in V \subseteq X \setminus \pi^{-1}(\pi(D))$.

b) ⇒ *c*) Predpostavimo, da je π zaprta funkcija. Naj bo U odprta podmnožica od X. Množica $\pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U))$ je odprta v X, ker je π zaprta funkcija. Preverimo, da je množica $\pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U))$ enaka množici W_U. Naj bo $x \in \pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U))$. Potem velja, da je $\pi(x) \in (\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U))$. Velja, da je $x \in \pi^{-1}(\pi(x)) \subseteq X \setminus \pi^{-1}(\pi(X \setminus U)) \subseteq X \setminus (X \setminus U) = U$. Torej je $x \in W_U$. Očitno velja tudi druga inkluzija, zato je $\pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)) = W_U$.

c) ⇒ *d*) Predpostavimo, da je množica W_U odprta za vsako odprto podmnožico U od X. Naj bo D zaprta podmnožica od X. Množica $W_{X \setminus D}$ je zato odprta v X. Ker velja, da je $K_D = X \setminus W_{X \setminus D}$, velja, da je K_D zaprta v X.

d) ⇒ *a*) Predpostavimo, da je K_D zaprta za vsako zaprto podmnožico D od X. Naj bo množica $A \in \mathcal{D}$ pojubna in U odprta podmnožica od X, tako da je $A \subseteq U$. Množica $X \setminus U$ je zaprta podmnožica od X, zato je tudi $K_{X \setminus U}$ zaprta podmnožica od X. Naj bo $V = X \setminus K_{X \setminus U}$. Množica V je odprta in velja, da je $A \subseteq V \subseteq U$. Naj bo $B \in \mathcal{D}$ poljubna. Če je presek $B \cap V \neq \emptyset$, potem je $B \subseteq V$. Dekompozicija $\mathcal{D}$ je res USC dekompozicija.

□

Posledica 1.52 *Naj bo X metični prostor. Če je $\mathcal{D}$ USC dekompozicija od X, potem so elementi od $\mathcal{D}$ zaprti.*

Dokaz. Naj bo $A \in \mathcal{D}$ poljubna. Definirajmo preslikavo π kot v opombi 1.49. Množica $\{x\}$ je zaprta v X. Po izreku 1.51 je tudi $\pi(\{x\})$ zaprta v $\mathcal{D}$. Ker je π zvezna in velja $\pi^{-1}(\pi(\{x\})) = G$, sledi, da je G zaprta podmnožica od X. □

Izrek 1.53 *Naj bo X kompakten prostor in $\mathcal{D}$ USC dekompozicija od X. Potem ima $\mathcal{D}$ števno bazo.*

Dokaz. Naj bo funkcija π definirana kot v opombi 1.49. Prostor X je kompakten, zato ima števno bazo $\mathcal{U}$. Naj bo:

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{j=1}^{n} U_j | U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Družina $\mathcal{B}$ je torej števna družina odprtih podmnožic od X. Označimo z

$$\mathcal{B}' = \{\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U) | U \in \mathcal{B}\}.$$

Družina $\mathcal{B}'$ je števna in njeni elementi so odprte množice v $\mathcal{D}$. Naj bo U odprta množica v $\mathcal{D}$ in naj bo $x \in U$. Ker je π zvezna, je $\pi^{-1}(U)$ odprta podmnožica od X. Velja tudi, da je $\pi^{-1}(x) \subseteq \pi^{-1}(U)$. Ker je X kompakten in π zvezna, sledi, da je π^{-1} kompakt, torej obstajajo množice $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$, da je $\pi^{-1}(x) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} U_j \subseteq \pi^{-1}(U)$. Označimo z $U' = \bigcup_{j=1}^{k} U_j$. Očitno je $U' \in \mathcal{B}$. Sledi, da je množica $\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U) \in \mathcal{B}'$. Velja še, da je $x \in \mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U) \subseteq U$, torej je družina $\mathcal{B}'$ števna baza za $\mathcal{D}$.

□

Posledica 1.54 *Če je X kompakten metrični rostor in $\mathcal{D}$ USC dekompozicija od X, je $\mathcal{D}$ metrizabilna.*

Dokaz. Po izreku 1.53 vemo, da ima $\mathcal{D}$ števno bazo. Po Izreku 1 v [8, str. 241] zadostuje dokazati, da je $\mathcal{D}$ T_2 prostor. Naj bosta x in y različni točki iz $\mathcal{D}$. Potem sta množici $\pi^{-1}(x)$ in $\pi^{-1}(y)$ disjunktni in zaprti podmnožici od X. Ker je X metričen prostor obstajata taki disjunktni in odprti podmnožici U_1 in U_2 od X, da je $\pi^{-1}(x) \subseteq U_1$ in $\pi^{-1}(y) \subseteq U_2$. Po točki c) izreka 1.51 sta množici W_{U_1} in W_{U_2} odprti podmnožici od X in velja $\pi^{-1}(x) \subseteq W_{U_1} \subseteq U_1$ in $\pi^{-1}(y) \subseteq W_{U_2} \subseteq U_2$. Množici $\pi(W_{U_1})$ in $\pi(W_{U_2})$ sta odprti v $\mathcal{D}$. Ker sta U_1 in U_2 disjunktni, sta disjunktni tudi $\pi(W_{U_1})$ in $\pi(W_{U_2})$. Sledi, da je $\mathcal{D}$ T_2 prostor. □

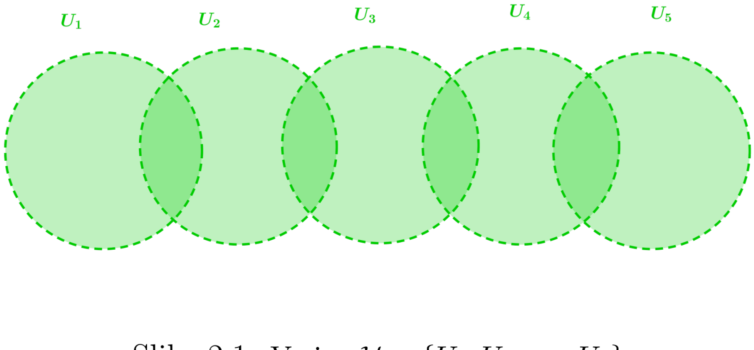
Poglavje 2

Uverižljivi kontinuumi

2.1 Definicija uverižljivih kontinuumov

V sledečem poglavju bomo spoznali, kaj pomeni, da je nek kontinuum uverižljiv. V osrednjem poglavju magistrskga dela se bomo nato omejili samo na take kontinuume, ki so uverižljivi.

Definicija 2.1 *Veriga v kompaktnem metričnem prostoru X je končna urejena družina odprtih podmnožic iz X, $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$, za katere velja, da se dve množici U_i in U_j iz družine $\mathcal{C}$ sekata natanko tedaj, ko je $|i - j| \leq 1$. Elementu družine $\mathcal{C}$ rečemo člen verige $\mathcal{C}$. Če za vsak člen verige velja, da je njegov diameter manjši od ε, rečemo, da je veriga $\mathcal{C}$ ε-veriga.*



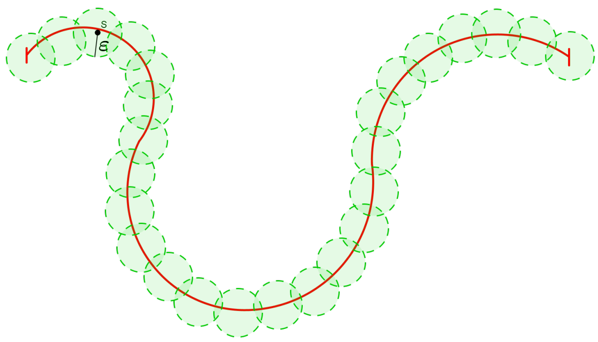
Slika 2.1: Veriga $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_5\}$

Zgled. Družina $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5\}$, kjer so množice iz družine odprte krogle v $\mathbb{R}^2$ (na sliki 2.1), je veriga.

Definicija 2.2 *Nedegeneriran kontinuum X je uverižljiv kontinuum, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja ε-veriga $\mathcal{C}$ v X, tako da je $\bigcup \mathcal{C} = X$.*

Zgled. Enotska krožnica v $\mathbb{R}^2$ ni uverižljiva.

Zgled. Lok je uverižljiv kontinuum.



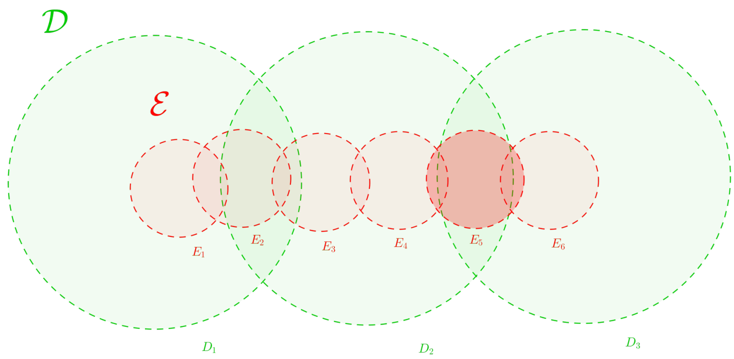
Slika 2.2: Primer ε-verige, ki pokrije lok

2.2 Primeri uverižljivih kontinuumov

V nadaljevanju bomo s pomočjo metode vgnezdenih presekov skonstruirali netrivialen uverižljiv kontinuum imenovan psevdolok, iz njega pa še lok psevdolokov in lok brez lokov.

Definicija 2.3 *Imejmo verigi $\mathcal{E}$ in $\mathcal{D}$. Tedaj je veriga $\mathcal{E}$ finejša od verige $\mathcal{D}$, če za vsak $E \in \mathcal{E}$ obstaja $D \in \mathcal{D}$, tako da je $E \subseteq D$. Veriga $\mathcal{E}$ je strogo finejša od verige $\mathcal{D}$, če za vsak $E \in \mathcal{E}$ obstaja $D \in \mathcal{D}$ tako da je $\mathrm{Cl}(E) \subseteq D$.*

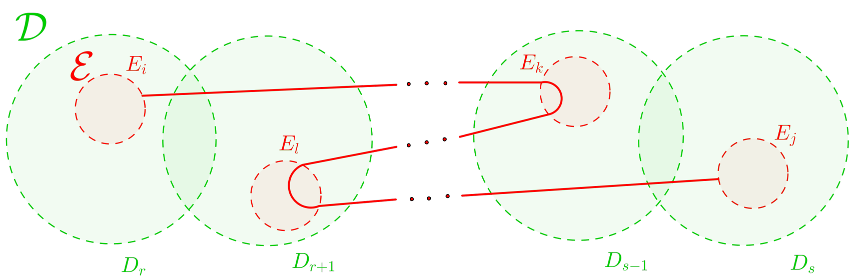
Zgled. Imejmo verigi $\mathcal{E}$ in $\mathcal{D}$ kot na sliki 2.3. Veriga $\mathcal{E}$ ni finejša od verige $\mathcal{D}$ saj E_5 ni podmnožica nobenega elementa družine $\mathcal{D}$.



Slika 2.3: Veriga $\mathcal{E}$ ni finejša od $\mathcal{D}$

Definicija 2.4 *Imejmo verigi $\mathcal{E}$ in $\mathcal{D}$. Pravimo, da je veriga $\mathcal{E}$ zvita v verigi $\mathcal{D}$, če velja:*

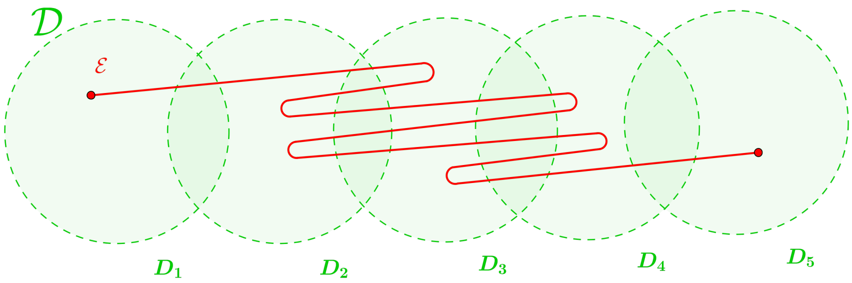
1. *$\mathcal{E}$ je finejša od $\mathcal{D}$,*
2. *za vsaka s in r, za katera je s večji od r in $s - r > 2$ velja: če obstaja $i < j$ tako, da $E_i \subseteq D_r$ in $E_j \subseteq D_s$, potem obstajata taka k, l, da $i < k < l < j$ in velja $E_l \subseteq D_{r+1}$ ter $E_k \subseteq D_{s-1}$.*



Slika 2.4: Definicija zvite verige

Zgled. V primeru, ko je $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$, moramo paziti edino na to, da je veriga $\mathcal{E}$ finejša in bo takoj tudi zvita v $\mathcal{D}$.

Zgled. Imejmo družino množic $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$. Slika 2.5 prikazuje sled zvite verige $\mathcal{E}$ v verigi $\mathcal{D}$.



Slika 2.5: Konstrukcija zvite verige $\mathcal{E}$ v $\mathcal{D}$

Izrek 2.5 *Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj bosta $p, q \in \mathbb{R}^2$ različni točki. Naj bo $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n\}$ veriga v $\mathbb{R}^2$, kjer je za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ D_i odprti krog in je p vsebovan v D_1, q pa v D_n. Tedaj obstaja veriga $\mathcal{E}$ v $\mathbb{R}^2$ tako da velja:*

1. *vsak $E \in \mathcal{E}$ je odprti krog,*
2. *$\mathcal{E}$ poteka od točke p do točke q,*
3. *$\mathcal{E}$ je zvita v $\mathcal{D}$.*

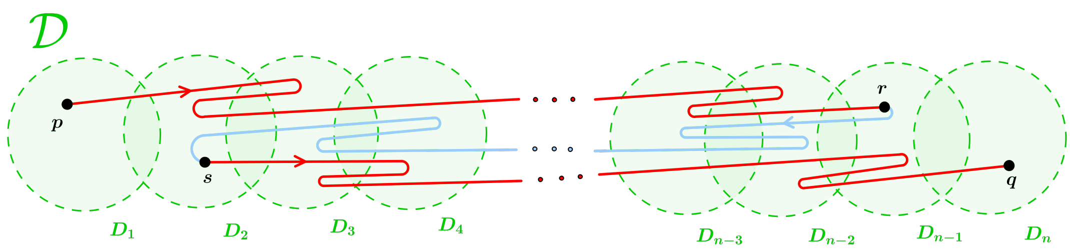
Dokaz. Dokaz bo potekal z indukcijo po n.

Za $n = 1, 2, 3, 4, 5$ vidimo, da izrek drži (glej prejšnja zgleda).

Recimo, da obstaja zvita veriga za $n-1$ in $n-2$ členov. Skonstruirati želimo zvito verigo v verigi z n členi, tako da bo potekala od točke p do točke q. Znamo skonstruirati zvito verigo, ki bo ustrezala vsem pogojem, od točke p do neke točke $r \in D_{n-1}$. Od te točke lahko spet po indukcijski predpostavki skonstruiramo zvito verigo nazaj do neke točke s v členu D_2. Sedaj pa lahko enako kot prej skonstruiramo zvito verigo od točke s do točke q.

Preverimo vse situacije, kjer se lahko nahajta množici E_i in E_j ter vidimo, da je skonstruirana veriga $\mathcal{E}$ res zvita v $\mathcal{D}$.

$\square$



Slika 2.6: Konstrukcija zvite verige

Opomba 2.6 *Naj bo $\mathcal{C}$ veriga. Tedaj je*

$$\mathcal{C}^* = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Definicija 2.7 *Naj bosta p in q različni točki iz $\mathbb{R}^2$. Naj bo še $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje verig, tako da velja:*

1. *za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $C \in \mathcal{C}_n$ velja, da so C odprti krogi,*
2. *za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{C}_n$ veriga od p do q,*
3. *za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{C}_{n+1}$ strogo finejša od $\mathcal{C}_n$,*
4. *za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{C}_{n+1}$ zvita v $\mathcal{C}_n$,*
5. *za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{C}_n$ $\frac{1}{n}$-veriga.*

Tedaj prostoru

$$P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n^*$$

rečemo PSEVDOLOK.

Izrek 2.8 *Psevdolok je kontinuum, ki ima več kot eno točko.*

Dokaz. Psevdolok vsebuje vsaj dve točki; p in q, zato je nedegeneriran. Metrični prostor je, saj je podmnožica $\mathbb{R}^2$.

Preverimo še povezanost in kompaktnost. Po definiciji velja, da je za vsako naravno število n, $\mathcal{C}_n^*$ povezan. Po izreku 1.10 je povezano tudi zaprtje $\mathrm{Cl}(\mathcal{C}_n^*)$. Ker je $\mathrm{Cl}(\mathcal{C}_n^*)$ po definiciji zaprto in očitno omejeno je tudi kompaktno. Velja še: $\mathcal{C}_{n+1}^* \subseteq \mathrm{Cl}(\mathcal{C}_{n+1}^*) \subseteq \mathcal{C}_n^* \subseteq \mathrm{Cl}(\mathcal{C}_n^*)$. Iz tega sledi, da je

$$P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cl}(\mathcal{C}_n^*).$$

P torej ni nič drugega kot vgnezdeni presek kontinuumov, kar pa je po izreku 1.30 kontinuum. □

Izrek 2.9 *Psevdolok je dedno nerazcepen kontinuum.*

Dokaz. Recimo, da psevdolok P ni dedno nerazcepen. To pomeni, da obstaja tak podkontinuum Y, ki je razcepen. Naj bo $Y = A \cup B$, kjer sta A in B prava podkontinuuma od Y. Naj bo $a \in Y \setminus A$ in $b \in Y \setminus B$. Ker sta A in B prava podkontinuuma in zato zaprta v Y, velja, da sta razdalji med točko a in kontinuumom A in točko b in kontinuumom B, strogo večji od 0. Označimo z $d_1 = d(a, A)$ in $d_2 = d(b, B)$. Naj bo še $\mathcal{C}_n$ zaporedje verig, ki zadoščajo pogojem definicije 2.7 ($P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n^*$). Naj bo $n \in \mathbb{N}$ tak, da je $d_1, d_2 > \frac{4}{n}$. S tem pogojem smo si zagostovili, da je med točkama a in b vsaj pet členov verige $\mathcal{C}_n$, kar bomo uporabili v nadaljevanju dokaza. Naj bosta $r, s \in \mathbb{N}$, kjer $s - r > 2$ taki, da sta C_r in C_s člena verige $\mathcal{C}_n$ in je a iz C_s ter b iz C_r. Oglejmo si verigo $\mathcal{C}_{n+1} = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$, ki je zvita v verigi $\mathcal{C}_n$. Po definiciji zvitosti imamo množice D_i, D_j, D_k, D_l iz verige $\mathcal{C}_{n+1}$, da velja:

(i) $i < k < l < j$

(ii) $b \in D_i$ in $a \in D_j$

(iii) $D_k \subseteq C_{s-1}$ in $D_l \subseteq C_{r-1}$

Oglejmo si množici: $U = (D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_{k-1}) \cap A$ in $V = (D_{k+1} \cup D_{k+2} \cup \ldots \cup D_m) \cap A$. Velja, da sta U in V odprti v A, njun presek pa je prazen. Ker element verige D_k nima nič skupnega z A, veriga $\mathcal{C}_{n+1}$ pa pokrije celotni psevdolok P, sledi, da je unija množic U in V celoten A. Velja tudi, da je U neprazna, saj je $b \in U$. Če ugotovimo še, da je V neprazna, bo to pomenilo, da smo našli separacijo za A. To pa je protislovje, saj smo predpostavili, da je A pravi podkontinuum, torej tudi povezan. Oglejmo si $D_l \cap A$. Recimo, da je ta presek prazen. D_l ne seka niti B. To sledi iz predhodnih predpostavk. Oglejmo si množici

$(D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_{l-1}) \cap Y$ in $(D_{l+1} \cup D_{l+2} \cup \ldots \cup D_m) \cap Y$. Množici sta odprti, disjunktni, njuna unija je celoten Y. Velja še, da je b v prvi množici, saj ta vsebuje D_i, a pa v drugi, ker vsebuje D_j. V tem primeru tudi pridemo do protislovja, saj smo našli separacijo prostora Y.

□

Po opombi 1.42 navedimo direktno posledico.

Posledica 2.10 *Psevdolok je nerazcepen kontinuum.*

Oglejmo si še nekaj lastnosti psevdoloka, ki jih ne bomo eksplicitno dokazali.

Izrek 2.11 *Psevdolok je homogen kontinuum.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [1]. □

Izrek 2.12 *Poljubna dedno nerazcepna uverižljiva kontinuuma sta homeomorfna.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [3]. □

Opomba 2.13 *Dokazali smo, da je psevdolok dedno nerazcepen uverižljiv kontinuum, zato za poljubna psevdoloka velja, da sta homeomorfna.*

Sedaj bomo definirali pojem krajišča uverižljivega kontinuuma. Glede na ta pojem bomo lahko v nadaljevanju magistrskega dela preučevali polhomogene uverižljive kontinuume.

Izrek 2.14 *Naj bo X nedegeneriran uverižljiv kontinuum. Za točko $p \in X$ so naslednje trditve ekvivalentne.*

a) Vsak nedegeneriran podkontinuum od X, ki vsebuje p, je ireducibilen med p in neko drugo točko.

b) Če dva podkontinuuma od X vsebujeta p, je eden od njiju vsebovan v drugem.

c) Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka ε-veriga, da je točka p vsebovana le v prvem členu verige in ta veriga pokriva celoten X.

Dokaz. Dokaz najdemo v [3, str. 660]. □

Definicija 2.15 *Točko $p \in X$, kjer je X uverižljiv kontinuum, imenujemo krajišče, če zadošča kateremu izmed pogojev izreka* 2.14.

Zgled. Lok je klasični primer uverižljivega kontinuuma z dvema krajiščema.

Izrek 2.16 *Naj bo X uverižljiv kontinuum in $p \in X$ krajišče od X. Če je $f : X \to X$ homeomorfizem, tedaj je tudi $f(p)$ krajišče od X.*

Dokaz. Naj bo $p \in X$ krajišče od X, $f : X \to X$ homeomorfizem in Y_1, Y_2 poljubna podkontinuuma od X, tako da je $f(p) \in Y_1 \cap Y_2$. Točka $f(p)$ je krajišče kontinuuma X po točki (b) izreka 2.14 natanko tedaj, ko je $Y_1 \subseteq Y_2$ ali $Y_2 \subseteq Y_1$. Ker je f homeomorfizem, sta po izreku 1.22 $f^{-1}(Y_1)$ in $f^{-1}(Y_2)$ podkontinuuma od X, tako da je $p \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$. Točka p je krajišče kontinuuma X, zato po točki (b) izreka 2.14 sledi, da je $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$ ali $f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1)$, s čimer pridemo do željenega rezultata. □

Trditev 2.17 *Vsaka točka psevdoloka je krajišče.*

Dokaz. Iz konstrukcije psevdoloka sledi, da ima psevdolok P vsaj eno krajišče, recimo $p \in P$. Naj bo točka $x \in P$ poljubna. Ker je P homogen, obstaja homeomorfizem

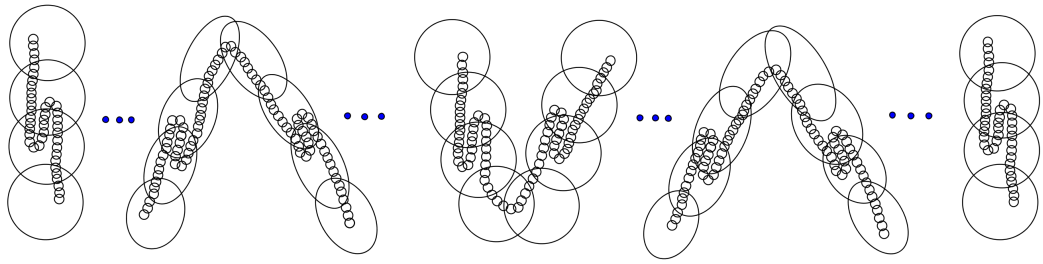
$$f : P \to P,$$

tako da je $x = f(p)$. Po izreku 2.16 je tudi točka x krajišče od P. □

Spoznali smo torej uverižljiv homogen kontinuum imenovan psevdolok. Kasneje bomo spoznali, da ti dve lastnosti tudi opredeljujeta psevdolok. Cilj magistrskega dela pa je karakterizacija nekaterih uverižljivih polhomogenih kontinuum. Ogledali si bomo, kako s pomočjo psevdoloka dobimo polhomogena kontinuuma z neskončno oziroma dvema krajiščema.

Definicija 2.18 *Lok psevdolokov je vsak uverižljiv kontinuum A, za katerega obstaja zvezna surjekcija $g : A \to [0,1]$, tako da je praslika vsake točke iz intervala $[0,1]$ psevdolok v A.*

Zgled. Lok psevdolokov obstaja; konstruiramo ga lahko kot prikazuje slika 2.7, glej [13].



Slika 2.7: Konstrukcija loka psevdolokov

Trditev 2.19 *Lok psevdolokov je polhomogen kontinuum z orbitama* $g^{-1}(\{0,1\})$ *in* $g^{-1}((0,1))$.

Dokaz. Dokaz najdemo v [13, str. 2526]. □

Opomba 2.20 *Orbita* $g^{-1}(\{0,1\})$ *je hkrati tudi množica vseh krajišč loka psevdolokov.*

Oglejmo si, kako preko loka psevdolokov pridemo do polhomogenoga uverižljivega kontinuuma z dvema krajiščema, ki ni lok.

Trditev 2.21 *Naj bo* X *lok psevdolokov in naj bo* $g : X \to [0,1]$ *kot iz definicije loka psevdolokov. Tedaj velja, da je particija* $\mathcal{U} = \{g^{-1}(0), g^{-1}(1)\} \cup \{\{x\} | x \in g^{-1}((0,1))\}$ *USC dekompozicija od* X.

Dokaz. Očitno velja, da je družina $\mathcal{U}$ particija prostora X. Dokažimo, da je $\mathcal{U}$ USC dekompozicija od X. Ločimo dva primera:

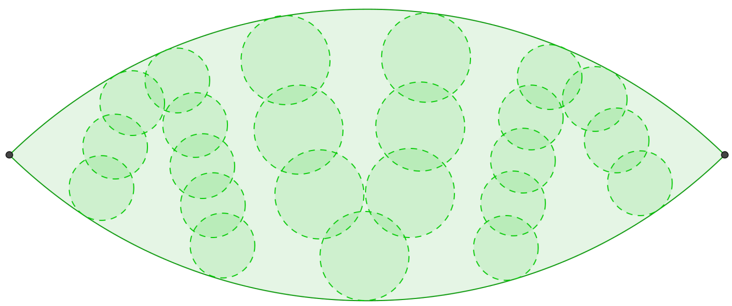
(i) Naj bo A ena izmed množic $U_0 = g^{-1}(0), U_1 = g^{-1}(1)$. Recimo, da je $A = U_0$. Naj bo U odprta množica in $A \subseteq U$. Dokazati hočemo, da obstaja taka odprta množica $V \subseteq U$, da za vsako množico $B \in \mathcal{U}$, kjer je $V \cap B \neq \emptyset$ sledi, da je $B \subseteq U$. Izberimo $V = U \cap g^{-1}([0,1))$. Očitno je $A \subseteq V \subseteq U$. Množica V je tudi odprta v X, saj je presek dveh odprtih množic. Pogoj 2. iz definicije 1.50 je izpolnjen zaradi izbire množice V in dejstva da so vse množice družine $\mathcal{U}$ razen U_0 in U_1 točke. Podobno preverimo pogoja za množico U_1.

(ii) Naj bo $A = \{x_0\}$, kjer je $x_0 \in g^{-1}((0,1))$ poljuben. Naj bo U odprta množica in $A \subseteq U$. Potem lahko izberemo za množico $V = U \cap (g^{-1}((0,1)))$. Enostavno preverimo, da tako izbrana množica V zadošča pogojem definicije 1.50.

Družina $\mathcal{U}$ je torej USC dekompozicija od X.

□

Definicija 2.22 *Vsak prostor, ki je homeomorfen kvocientu* $(\mathcal{U}, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$*, kjer je particija* $\mathcal{U}$ *iz trditve* 2.21*, se imenuje LOK BREZ LOKOV.*



Slika 2.8: Konstrukcija loka brez lokov

Opomba 2.23 *Lok brez lokov je polhomogen uverižljiv kontinuum, katerega orbita* $\{g^{-1}(0), g^{-1}(1)\}$ *predstavlja točki, ki sta hkrati tudi edini krajišči.*

V tem poglavju smo spoznali uverižljiva kontinuuma z dvema oziroma neskončno krajišči, medtem ko je degeneriran kontinuum primer uverižljivega kontinuuma z enim samim krajiščem. Naravno se je vprašati, če obstajajo uverižljivi kontinuumi z n krajišči za poljuben $n = 0, 1, 2, \ldots$. Odgovor na to je pritrdilen, dokaz pa lahko najdemo v [7].

Pojavi se še eno vprašanje:

Vprašanje 2.24 *Ali obstaja polhomogen uverižljiv kontinuum z natanko dvema krajiščema, ki ni niti lok niti lok brez lokov?*

Odgovor na to vprašanje bomo iskali v naslednjem poglavju.

Poglavje 3

Polhomogeni uverižljivi kontinuumi

Odgovorili bomo na vprašanje 2.24, zastavljeno na koncu prejšnjega poglavja. Najprej bomo dokazali, da tak kontinuum ne obstaja. S pomočjo dokazanega izreka bomo videli, da ima vsak polhomogen uverižljiv kontinuum z neprazno končno množico krajišč, natanko dve krajišči in je torej lahko le lok ali lok brez lokov.

3.1 Pripravljalni rezultati

V tem razdelku bomo navedli izreke, ki jih bomo potrebovali pri dokazovanju osrednjega izreka magistrskega dela.

Izrek 3.1 (Boundary Bumping Theorem) *Naj bo X kontinuum in U neprazna odprta podmnožica od X, ki vsebuje točko p. Potem je zaprtje komponente od U, ki vsebuje p, kontinuum, ki seka rob od U.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [12, Izrek 5.4, str 73]. □

Zgled. Naj bo $X = [0, 1]$ kontinuum, $U = (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$ in $p = \frac{7}{24}$. Komponenta, ki vsebuje p je $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$, $\mathrm{Cl}((\frac{1}{4}, \frac{1}{3})) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$. Izrek v našem primeru res velja, saj je $U \cap \mathrm{Cl}((\frac{1}{4}, \frac{1}{3})) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\}$.

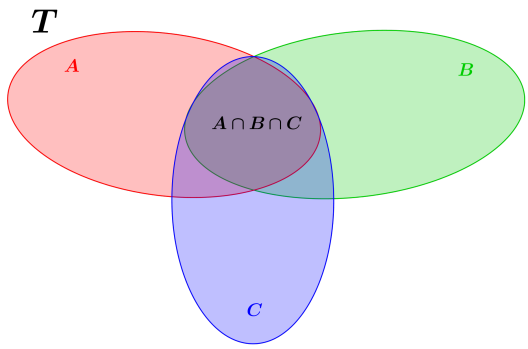
Izrek 3.2 *Vsak nedegeneriran podkontinuum uverižljivega kontinuuma je uverižljiv.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [12, str. 230]. □

Izrek 3.3 *Vsak uverižljiv kontinuum je dedno unikoherenten.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [12, str. 230]. □

Definicija 3.4 *Kontinuumu T rečemo šibka trioda, če obstajajo trije podkontinuumi od T, katerih presek je neprazen, njihova unija je celoten T in noben od podkontinuumov ni vsebovan v uniji ostalih dveh.*



Slika 3.1: Šibka trioda

Zgled. Kontinuum T, kot ga prikazuje slika 3.1, je šibka trioda, saj imajo podkontinuumi A, B in C neprazen presek, njihova unija tvori celoten T in noben izmed njih ni vsebovan v uniji preostalih dveh.

Izrek 3.5 *Uverižljiv kontinuum ne vsebuje šibke triode.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [12, str. 233]. □

Izrek 3.6 *Kontinuum ima natanko dve nepresečni točki natanko tedaj, ko je lok.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [12, str. 96]. □

Izrek 3.7 *Nedegeneriran homogen uverižljiv kontinuum je psevdolok.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [2]. □

Izrek 3.8 *Nedegeneriran uverižljiv kontinuum, za katerega je vsaka točka krajišče, je psevdolok.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [1, Izrek 16]. □

Izrek 3.9 *Naj bo X kontinuum opremljen z metriko ρ in naj bo G odprta podmnožica od X. Naj za vsak par točk $c, d \in G$ obstaja homeomorfizem $h : X \to X$, da je $h(c) = d$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ in vsako $c \in G$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja: če je $\rho(c, d) < \delta$, tedaj obstaja homeomorfizem $h : X \to X$, za katerega je $h(c) = d$ in $\rho(e, h(e)) < \varepsilon$ za vsak $e \in X$.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [5, Trditev 13]. □

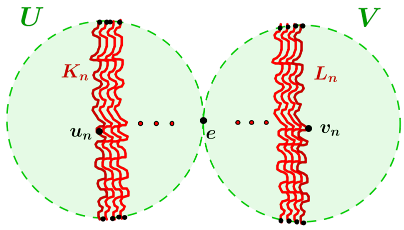
Izrek 3.10 *Naj bo X polhomogen kontinuum. Če je X nerazcepen, sta obe njegovi orbiti neštevni.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [6, Izrek 3.4]. □

Lema 3.11 *Naj bo X uverižljiv kontinuum in naj bo E končna podmnožica množice vseh krajišč prostora X. Potem je prostor $X \setminus E$ povezan.*

Dokaz. Recimo, da je $X \setminus E$ nepovezan. Naj množici U in V predstavlajta separacijo prostora $X \setminus E$. Sledi, da sta U in V odprti tudi v X. Ker je $X \setminus E$ gosta v X, je zaprtje unije $U \cup V$ enako celemu kontinuumu X, kar pa je naprej enako uniji zaprtij U in V: $X = \mathrm{Cl}(U \cup V) = \mathrm{Cl}(U) \cup \mathrm{Cl}(V)$. Ker je X povezan, obstaja točka e iz E, ki je tako v $\mathrm{Cl}(U)$, kot $\mathrm{Cl}(V)$. Ker sta zaprtji kompaktni, obstajata zaporedji $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq U$ in $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$, ki konvergirata k točki e. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ označimo s K_n zaprtje komponente v U, ki vsebuje točko u_n in z L_n zaprtje komponenete v V, ki vsebuje točko v_n.

Po izreku 3.1 za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja, da K_n seka mejo od U, L_n pa mejo od V. Vidimo še, da je $\mathrm{Bd}(U) = \mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus U) = \mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(V \cup E) = (\mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(V)) \cup (\mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(E))$. Ker je E končna množica, velja, da je $\mathrm{Cl}(E) = E$. Tudi v preseku zaprtij $(\mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(V))$ so elementi množice E, zato bo $(\mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(V)) \cup (\mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(E)) \subseteq E$. Označimo s $K = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n}$ in $L = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n}$. Tako K kot L vsebujeta e, saj sta kompaktna prostora in



Slika 3.2: Zaprtji komponent K_n in L_n

torej vsebujeta svoja stekališča. Premislimo še, da je K povezan (enak razmislek velja tudi za L). Meja od U je vsebovana v množici E. Za vsako naravno število n velja, da K_n seka mejo od U. Množica E je končna, zato obstaja neka točka, ki je vsebovana v neskončno mnogo komponentah K_n. Brez izgube za splošnost naj obstaja točka $a \in E$, ki je vsebovana v vseh K_n. To lahko predpostavimo, saj v primeru če taka točka ne obstaja, vzamemo iz zaporedja $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq U$, podzaporedje $\{u_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, od katerega vsak člen $K_{n(i)}$ vsebuje a. Ugotovili smo, da sta K in L kontinuuma.

Vidimo še, da je $K \subseteq X \setminus V = U \cup E$ in $L \subseteq X \setminus U = V \cup E$. Sledi, da je $K \cap L \subseteq E$. Unija kontinuumov s skupno točko je po 1.26 spet kontinuum. Ker je e krajišče v E, po izreku 2.14 sledi, da je ali $K \subseteq L$ ali $L \subseteq K$. Skupaj z ugotovitvijo, da je $K \cap L \subseteq E$ to pomeni, da je ali $K \subseteq E$ ali $L \subseteq E$, s čimer pa v obeh primerih pridemo do protislovja, saj je E končna množica, K in L pa nedegenerirana kontinuuma. $\square$

Opomba 3.12 *Zgornja lema ne velja, če je množica E neskončna.*

Oglejmo si protiprimer.

Zgled. Ugotovili smo, da je vsaka točka iz psevdoloka P krajišče. Če bi odstranili vse točke iz psevdoloka, razen p in q iz definicije, bi seveda veljalo, da $\{p, q\}$ ni povezan.

Izrek 3.13 *Naj bosta A in A' loka psevdolokov in E in E' pripadajoči množici krajišč. Tedaj lahko vsak homeomorfizem $E \to E'$ razširimo na homeomorfizem $A \to A'$.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [4, Izrek 10]. □

Lema 3.14 *Naj bo X uverižljiv kontinuum in $f : X \to [0,1]$ taka zvezna surjekcija, da množici $f^{-1}(0)$ in $f^{-1}(1)$ vsebujeta le eno točko in je $f^{-1}(c)$ psevdolok za vsak $c \in (0,1)$. Potem je X lok brez lokov.*

Dokaz. Označimo z a edino točko iz X za katero je $f(a) = 0$ in z b edino točko za katero je $f(b) = 1$. Naj bo A lok psevdolokov in $g : A \to [0,1]$ surjektivna zvezna funkcija, takšna, da je praslika vsake točke iz intervala $[0,1]$ psevdolok. Naj bo še $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje nedegeneriranih kompaktnih intervalov iz $(0,1)$, katerih unija je celoten $(0,1)$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja, da je $I_{n+1} \cap (I_1 \cup \ldots \cup I_n)$ točka. Označimo z $A_n = g^{-1}(I_n)$ in $X_n = f^{-1}(I_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Vsak A_n in X_n predstavlja lok psevdolokov. Naj bo $I_1 = [a,b]$, kjer velja $0 < a < b < 1$. Vemo, da so praslike točk a in b psevdoloki in hkrati krajišča loka psevdolokov A_1 in X_1. Po izreku 2.12 vemo, da sta poljubna psevdoloka med seboj homeomorfna, kar pa po izreku 3.13 pomeni, da obstaja homeomorfizem iz A_1 v X_1 (označimo ga s h_1). Podobno obstaja homeomorfizem h_2 iz A_2 v X_2, vendar moramo paziti, da bo za vse $x \in A_1 \cap A_2$, $h_1(x) = h_2(x)$, saj drugače pokvarimo zveznost funkcije h, ki jo bomo kasneje definirali. Naredimo enako še v splošnem. Za vsak $n, m \in \mathbb{N}$ definirajmo homeomorfizem $h_n : A_n \to X_n$, tako da je vedno, ko imata I_n in I_m skupno točko, $h_m(x) = h_n(x)$ za vsak $x \in A_n \cap A_m$.

Zdaj, ko imamo definirano zaporedje homeomorfizmov $\{h_n : A_n \to X_n\}_{n=1}^{\infty}$, lahko definiramo funkcijo $h : A \to X$. Za vsak $x \in X \setminus \{a,b\}$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $x \in A_n$. V tem primeru definirajmo $h(x) = h_n(x)$. Za vsak $x \in g^{-1}(0)$ definirajmo $h(x) = a$, za vsak $x \in g^{-1}(1)$ pa $h(x) = b$. Pogoje smo zastavili tako, da je funkcija dobro definirana. Najprej preverimo, da je h surjektivna. Unija X_n je unija praslik intervalov I_n, kar je enako prasliki celotnega intervala $[0,1]$, kar pa predstavlja cel X. Preverimo še, da je h zvezna. Praslika vsake odprte množice iz X je odprta v A. Očitno velja tudi, da je h injektivna na $X \setminus (g^{-1}(0) \cup g^{-1}(1))$, vse točke iz množice $g^{-1}(0)$ pošlje v a, vse točke iz množice $g^{-1}(a)$ pa v b. Iz tega sledi, da je X lok brez lokov. □

Definirali bomo nekaj pojmov, ki jih bomo rabili v dokazu naslednje leme 3.20. Hkrati si bomo ogledali še formulacijo Zornove leme, ki jo bomo rabili v dokazu izreka 3.21.

Definicija 3.15 *Binarna relacija na množici X se imenuje delna urejenost, če je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna. Prostor X skupaj z delno urejenostjo se imenuje delno urejena množica. Binarna relacija je linearna urejenost, če je delna urejenost in velja, da ni neprimerljivih elementov. Podmnožici množice X, ki je linearno urejena v neki delni urejenosti, rečemo veriga v X.*

Opomba 3.16 *Dva elementa iz delno urejene množice sta neprimerljiva, če se ne da določiti v kakšnem razmerju sta glede na delno urejenost.*

Lema 3.17 (Zornova lema) *Če ima v delno urejeni množici vsaka veriga zgornjo (spodnjo) mejo, ima vsaj en maksimalni (minimalni) element.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [11, str. 70]. □

Zgled. Naj bo $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$. Naj bo $\mathcal{L} = \{X_n | \; n \in \mathbb{N}\}$. Potem je $(\mathcal{L}, \subseteq)$ linearno urejena množica. Če pogledamo celotno družino, vidimo, da ni navzgor omejena, je pa navzdol omejena in ima minimalni element $\{1\}$.

Navedli bomo izrek, ki ga potrebujemo pri dokazu naslednje leme.

Definicija 3.18 *Družini $\mathcal{C}$, katere elementi so podmnožice od X, rečemo, da ima lastnost končnega preseka, če za vsako končno poddružino $\{C_1, \ldots, C_n\}$ od $\mathcal{C}$ velja, da je presek $C_1 \cap \ldots \cap C_n$ neprazen.*

Izrek 3.19 *Naj bo X topološki prostor. Potem je X kompakten natanko tedaj, ko za vsako družino $\mathcal{C}$ zaprtih množic iz X z lastnostjo končnega preseka velja, da je presek $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ neprazen.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [11, str. 169]. □

Lema 3.20 *Naj bo X dedno unikoherenten in $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ družina podkontinuumov od X, tako da je za vsak $\lambda, \mu \in \Lambda$ velja bodisi $A_\lambda \subseteq A_\mu$, bodisi $A_\mu \subseteq A_\lambda$ in*

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset. \text{ Tedaj je } \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ kontinuum.}$$

Dokaz. Preverimo, da je $Y = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ neprazen povezan kompakten metričen prostor. Prostor Y je po predpostavki neprazen omejen metrični prostor. Presek poljubnega števila zaprtih množic je zaprta množica, zato sledi, da je Y po izreku 1.13 kompakten. Dokazati moramo še, da je Y povezan.

Recimo, da Y ni povezan. Potem obstaja separacija $Y = U \cup V$ za Y, kjer sta U in V neprazni, zaprti in disjunktni množici. Ker je Y metrični prostor, je po izreku 1.21 normalen prostor, zato obstajata odprti množici $S, T \subseteq X$, tako da $U \subseteq S$ in $V \subseteq T$. Naj bosta $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, tako da je $A_{\lambda_1} \subseteq A_{\lambda_2}$. Potem velja, da je $A_{\lambda_1} \setminus (S \cup T) \subseteq A_{\lambda_2} \setminus (S \cup T)$. Označimo z $B_\lambda = A_\lambda \setminus (S \cup T)$. Množice B_λ so kompakti in za vsak $\lambda, \mu \in \Lambda$ velja bodisi $B_\lambda \subseteq B_\mu$, bodisi $B_\mu \subseteq B_\lambda$. Velja:

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \setminus (S \cup T)) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \setminus (S \cup T) = Y \setminus (S \cup T) = \emptyset.$$

Premislimo, da obstaja nek $\lambda_0 \in \Lambda$, tako da je $B_{\lambda_0} = \emptyset$. Recimo, da je za vsak $\lambda \in \Lambda$ množica B_λ neprazna. Sledi, da je za vsako končno podmnožico $\{\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda$ presek $\bigcap_{i=1}^{n} B_{\lambda_i} \neq \emptyset$. Ker je X kompakten prostor, po izreku 3.19 sledi, da je $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \neq \emptyset$, kar je protislovje s predpostavko. Obstaja torej nek $\lambda_0 \in \Lambda$, tako da je $B_{\lambda_0} = \emptyset$. Iz tega sledi, da je par množic S, T separacija za A_{λ_0}, kar je protislovje, saj je A_{λ_0} kontinuum. □

3.2 Polhomogeni uverižljivi kontinuumi z dvema krajiščema

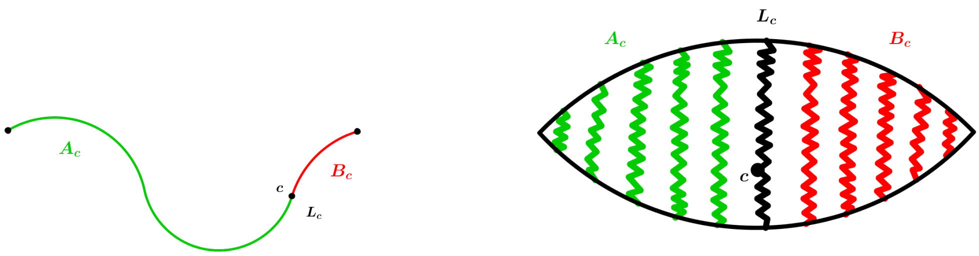
Spomnimo se vprašanja 2.24 na koncu drugega poglavja. Vprašanje se glasi, ali lahko najdemo kak polhomogen uverižljiv kontinuum, ki ni niti lok, niti lok brez lokov. Na to vprašanje bomo poskušali odgovoriti v tem poglavju. Dokazali bomo spodnji izrek.

Izrek 3.21 *Naj bo X uverižljiv polhomogen kontinuum z natančno dvema krajiščema. Potem je X ali lok ali lok brez lokov.*

Dokaz tega izreka je precej obsežen, zato si ga bomo zaradi preglednosti razdelili na posamezne trditve.

Pred tem označimo krajišči od X z a in b. Za vsak $c \in X$ označimo z A_c presek vseh podkontinuumov od X, ki vsebujejo točki a in c. Podobno označimo z B_c presek vseh podkontinuumov, ki vsebujejo točki b in c. Najprej preverimo, da sta poljubna A_c in

B_c kontinuuma. Po izreku 3.3 je kontinuum X dedno unikoherenten. Izpolnjene so vse predpostavke leme 3.20, zato sledi, da sta A_c in B_c kontinuuma. Naj bo $L_c = A_c \cap B_c$. Presek L_c je kontinuum po izreku 3.3. Množice L_c bomo imenovali nivoji od X, ali na kratko nivoji.



Slika 3.3: Nivo L_c v loku in loku brez lokov

Trditev 3.22 *Množici $\{a, b\}$ in $X \setminus \{a, b\}$ sta orbiti v X.*

Dokaz. X je polhomogen kontinuum, torej lahko njegove točke razdelimo v natanko dve orbiti. Ena orbita bo vsebovala krajišči a in b. Za drugo orbito ostane množica $X \setminus \{a, b\}$. □

Trditev 3.23 *Za vsak homeomorfizem $h : X \to X$ in $c \in X$ velja $L_{h(c)} = h(L_c)$.*

Dokaz. Vemo, da vsak homeomorfizem iz X nase slika krajišča v krajišča.

(i) Naj bo $h(a) = a$ in $h(b) = b$. A_c je po definiciji najmanjši kontinuum, ki vsebuje tako a kot c. Ker je h homeomorfizem, velja, da je $h(A_c)$ najmanjši kontinuum, ki vsebuje $h(a) = a$ in $h(c)$. Torej velja $h(A_c) = A_{h(c)}$. S podobnim razmislekom ugotovimo, da velja $h(B_c) = B_{h(c)}$. Ker je h homeomorfizem in torej obstaja tudi inverzna funkcija funkcije h velja, da je slika preseka kontinuumov presek slik kontinuumov. Zato sledi:

$$h(L_c) = h(A_c \cap B_c) = h(A_c) \cap h(B_c) = A_{h(c)} \cap B_{h(c)} = L_{h(c)}.$$

(ii) Preverimo še primer, ko je $h(a) = b$ in $h(b) = a$. S podobnim razmislekom kot v primeru (i) dobimo, da je $h(A_c) = B_{h(c)}$ in $h(B_c) = A_{h(c)}$. Sledi:

$$h(L_c) = h(A_c \cap B_c) = h(A_c) \cap h(B_c) = B_{h(c)} \cap A_{h(c)} = L_{h(c)}.$$

□

Trditev 3.24 *Poljubna nivoja L_c in L_d, kjer $c, d \in X \setminus \{a, b\}$ sta homeomorfna.*

Dokaz. Po trditvi 3.22 obstaja tak homeomorfizem $h : X \to X$, da za $c, d \in X \setminus \{a, b\}$ velja, da je $h(c) = d$. Po trditvi 3.23 dobimo $h_{L(c)} = L_{h(c)} = L_d$. Zožitev $h|_{L_c} : L_c \to L_d = L_{h(c)}$ je iskani homeomorfizem iz L_c na L_d. □

Trditev 3.25 *Prostor $X \setminus \{a, b\}$ je povezan.*

Dokaz. Točki a in b sta krajišči od X (imamo končno množico krajišč), zato po lemi 3.11 dobimo, da je $X \setminus \{a, b\}$ povezan. □

Trditev 3.26 *Za vsak par $c, d \in X \setminus \{a, b\}$ obstaja homeomorfizem $h : X \to X$, da velja $h(a) = a$, $h(b) = b$ in $h(c) = d$.*

Dokaz. Naj bo ρ metrika na prosotru X. Vzemimo za $\varepsilon = \rho(a, b)$ in označimo s $\mathcal{H}$ množico vseh homeomorfizmov $h : X \to X$, da je $d(e, h(e)) < \varepsilon$ za vsak $e \in X$. Število ε smo izbrali tako, da vsi pridobljeni homeomorfizmi h pustijo a in b pri miru. Če uporabimo izrek 3.9 na prostoru $X \setminus \{a, b\}$, dobimo, da obstaja taka odprta okolica točke c, N_c, da za vsako točko $x \in N_c$ obstaja homeomorfizem $h \in \mathcal{H}$, da $h(c) = x$.

Z razširitvijo tega razmisleka bomo poskušali priti do homeomorfizma, ki bo preslikal c v izbrano točko $d \in X \setminus \{a, b\}$. Po trditvi 3.25 je prostor $X \setminus \{a, b\}$ povezan. Najdemo lahko torej tako končno zaporedje točk $c_1, c_2, \ldots c_n \in X \setminus \{a, b\}$, da bo $c_1 = c$ in $c_n = d$ in bo za vsak $i < n$ veljalo, da $c_{i+1} \in N_{c_i}$. Za vsak $i < n$ obstaja po premisleku od prej homeomorfizem $h_i \in \mathcal{H}$, tako da $h_i(c_i) = c_{i+1}$. Definirajmo h kot: $h = h_{n-1} \circ \ldots h_2 \circ h_1$. To je homeomorfizem, ki nam bo preslikal c v d, krajišči a in b pa pustil pri miru. □

Trditev 3.27 *Nivo L_c ne vsebuje niti a niti b za vsak $c \in X \setminus \{a, b\}$.*

Dokaz. Z dobro izbiro množice U v izreku 3.1 lahko dobimo nedegeneriran kontinuum $K \subseteq X$, ki bo vseboval a in ne bo vseboval b. Z d označimo poljubno točko iz K, različno od a. Po trditvi 3.26 obstaja homeomorfizem $h : X \to X$, ki pusti točki a in b pri miru, poljubno točko $d \in X \setminus \{a, b\}$ pa preslika v c. Kontinuum $h(K)$ vsebuje točki a in c, točko b pa ne, saj je tudi K ni vseboval. Torej velja: $L_c \subseteq A_c \subseteq h(K) \subseteq X \setminus \{b\}$. S podobnimi argumenti ugotovimo, da je $B_c \subseteq X \setminus \{a\}$, kar pa pomeni, da je $L_c \subseteq A_c \cap B_c \subseteq X \setminus \{a, b\}$.
□

Opomba 3.28 *Trditev* 3.27 *pravi, da vmesni nivoji ne vsebujejo krajišč.*

Spomnimo se, da je particija prosotra X družina nepraznih, paroma disjunktnih podmnožic od X, katerih unija je celoten X.

Trditev 3.29 *Naj bo $\mathcal{L} = \{L_c |\ c \in X\}$. Potem je $\mathcal{L}$ particija prostora X.*

Dokaz. Predpostavimo, da trditev ne velja. Potem obstajata točki $c, d \in X$, da $L_c \cap L_d \neq \emptyset$ in sta L_c in L_d različna. Trditev 3.27 pove, da sta $L_c, L_d \subseteq X \setminus \{a, b\}$. S pomočjo Zornove leme bomo pokazali, da obstaja minimalni nivo, ki je podmnožica $L_c \cap L_d$ in s pomočjo tega prišli do protislovja.

Označimo z $\mathcal{S}$ družino vseh nivojev, ki so vsebovani v $L_c \cap L_d$. Prvo premislimo, da je $\mathcal{S}$ neprazna. Po predpostavki velja, da obstaja $x \in L_c \cap L_d = A_c \cap B_c \cap A_d \cap B_d$. Brez izgube za splošnost je A_c podkontinuum od A_d. Točka x je vsebovana v A_c, ki pa je po definiciji najmanjši kontinuum, ki vsebuje točki a in c. A_x bo torej podkontinuum od A_c. S podobnim razmislekom ugotovimo, da je tudi B_x podkontinuum od obeh, B_c in B_d. Sledi, da $L_x \subseteq L_c \cap L_d$ in torej $L_x \in \mathcal{S}$.

Za neko neprazno verigo $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$, s K označimo presek nivojev iz družine $\mathcal{E}$. Za poljubni množici iz $\mathcal{E}$ velja, da je ena podmnožica druge, saj je $\mathcal{E}$ linearno urejena družina. Vemo tudi, da so vsi nivoji kontinuumi. Po lemi 3.20 je K kontinuum. Ker je $\mathcal{E}$ veriga, obstaja $E \subseteq X$, da velja $\mathcal{E} = \{L_e |\ e \in E\}$. Fiksirajmo $y \in K$. Velja:

$$L_y = A_y \cap B_y \subseteq \bigcap_{e \in E} A_e \cap \bigcap_{e \in E} B_e = \bigcap_{e \in E} L_e = \bigcap \mathcal{E}.$$

Veriga $\mathcal{E}$ je torej navzdol omejena. Po zgoraj omenjeni Zornovi lemi 3.17 obstaja minimalni nivo $L_m \in \mathcal{S}$. To pomeni, da za vsak nivo iz $\mathcal{S}$ velja, da je L_m njegova podmnožica, ali pa ta nivo sploh ni v družini $\mathcal{E}$. Vemo, da je $L_m \subseteq L_c \cap L_d$. Ker velja, da $L_c \neq L_d$, sledi, da je L_m prava podmnožica od enega izmed obeh (izločimo možnost $L_m = L_c = L_d$). Brez izgube za splošnost je L_m prava podmnožica L_c. Nivo L_c ne vsebuje točk a in b, zato po trditvi 3.22 obstaja homeomorfizem $h : X \to X$, da je $h(c) = m$. Trditev 3.23 pove, da je $L_m = L_{h(c)} = h(L_c)$. Ker je L_m prava podmnožica od L_c, je tudi $h(L_m)$ prava podmnožica od $h(L_c)$. Torej je tudi $L_{h(m)}$ prava podmnožica od L_m. To pa je protislovje z minimalnostjo nivoja L_m v družini $\mathcal{E}$. $\mathcal{L}$ je torej particija kontinuuma X. □

Trditev 3.30 *Vsak nivo L_c je homogen kontinuum.*

Dokaz.

(i) L_a in L_b sta nivoja z enim elementom, zato sta homogena.

(ii) Naj bo $c \in X \setminus \{a, b\}$ in naj bo $d \in L_c$ poljubna točka. $X \setminus \{a, b\}$ je orbita v X, zato po trditvi 3.22 obstaja tak homeomorfizem $h : X \to X$, da je $h(c) = d$. Po trditvi 3.23 je $L_d = L_{h(c)} = h(L_c)$. Ker je $d \in L_c \cap L_d$, po trditvi 3.29 velja, da je $L_c = L_d$. Homeomorfizem, ki ga iščemo, je zožitev homeomorfizma h na nivo L_c, $h|_{L_c} : L_c \to L_c$, kjer je $h|_{L_c}(c) = d$. Nivo L_c je torej homogen kontinuum.

□

Trditev 3.31 *Vsak nivo L_c je bodisi točka bodisi psevdolok.*

Dokaz. Predpostavimo, da nivo L_c ni točka. Po izreku 3.2 je L_c uverižljiv kontinuum, saj je podkontinuum uverižljivega kontinuuma. Po trditvi 3.30 je L_c tudi homogen. Homogen uverižljiv kontinuum pa je po izreku 3.7 le psevdolok. □

Definicija 3.32 *Definirajmo binarno relacijo $\preceq$ na družini $\mathcal{L}$, da velja: $L_c \preceq L_d$ natanko tedaj, ko $A_c \subseteq A_d$ za $c, d \in X$.*

Trditev 3.33 *Relacija $\preceq$ je delna urejenost na $\mathcal{L}$.*

Dokaz. Hitro vidimo, da je relacija $\preceq$ refleksivna in tranzitivna. Preverimo, da je antisimetrična. Preveriti moramo, da iz $L_c \preceq L_d$ in $L_d \preceq L_c$ sledi $L_c = L_d$. Predpostavimo nasprotno. Recimo, da imamo taki $c, d \in X$, da iz $L_c \preceq L_d$ in $L_d \preceq L_c$ sledi $L_c \neq L_d$. Po definiciji relacije $\preceq$ dobimo, da je $A_c = A_d$. Ker je $\mathcal{L}$ po trditvi 3.29 particija, za poljubna nivoja velja, da sta disjunktna. Z B označimo unijo kontinuumov B_c in B_d. B je po izreku 1.26 kontinuum, saj B_c in B_d vsebujeta skupno točko b. Oglejmo si prostor $B \cap A_c$. Velja:

$$B \cap A_c = (B_c \cup B_d) \cap A_c = (B_c \cap A_c) \cup (B_d \cap A_c) = (B_c \cap A_c) \cup (B_d \cap A_d) = L_c \cup L_d,$$

$L_c \cup L_d$ pa ni povezan, saj sta L_c in L_d disjunktna. Velja torej, da sta B in A_c podkontinuuma od X, njun presek pa je nepovezan. To pa je po izreku 3.3 v nasprotju z dedno unikoherentnostjo uverižljivega prostora X. □

Trditev 3.34 *Par $(\mathcal{L}, \preceq)$ je linearno urejena množica.*

Dokaz. Vzemimo poljubna L_c in L_d iz družine $\mathcal{L}$. Tako A_c kot A_d vsebujeta krajišče a in sta podkontinuuma od X. Po točki b) izreka 2.14 dobimo, da bodisi $A_c \subseteq A_d$ bodisi $A_d \subseteq A_c$. Torej velja bodisi $L_c \preceq L_d$ bodisi $L_d \preceq L_c$. Poljubna elementa družine $\mathcal{L}$ sta primerljiva, torej je urejenost linearna. □

Trditev 3.35 *Naj bo $L_c \preceq L_d$ in $L_c \neq L_d$ za neka $c, d \in X$. Potem velja $A_c \cap B_d = \emptyset$.*

Dokaz. Recimo, da presek ni prazen. Potem obstaja točka $e \in A_c \cap B_d$. Zaradi definicije relacije $\preceq$ velja, da $A_c \subseteq A_d$ in posledično, da $e \in A_d \cap B_d = L_d$. Po trditvi 3.29 je $L_e = L_d$. Kontinuuma A_c in A_d nista enaka, saj sta v nasprotnem primeru enaka tudi L_c in L_d. Dobimo, da je A_c prava podmnožica od A_d, ki vsebuje a in d, kar pa je v nasprotju z definicijo prostora A_d. □

Trditev 3.36 *Družina $\mathcal{L}$ je navzgor polzvezna (USC) dekompozicija od X.*

Dokaz. Naj bo U odprta množica, ki vsebuje $L_c \in \mathcal{L}$. Radi bi pokazali, da obstaja odprta množica $V \subseteq U$, ki bo vsebovala L_c, tako da bo vsak nivo, ki bo imel z V neprazen presek, vsebovan v U.

Recimo, da to ni res. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja nivo $L_{c(n)}$, ki seka $\cap_{x \in L_c} K(x, \frac{1}{n})$ in tudi $X \setminus U$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da $L_{c(n)} \preceq L_c$. Po trditvi 3.34 lahko predpostavimo, da $L_{c(n)} \preceq L_{c(n+1)}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker je $X \setminus U$ zaprta in omejena, sledi da je kompaktna. Zaradi kompaktnosti prostora $X \setminus U$ obstaja točka $d \in X \setminus U$, od katere vsaka okolica seka nekončno mnogo nivojev $L_{c(n)}$. L_c je različen od L_d, ker c ni vsebovan v L_d. Če bi c bil vsebovan v L_d bi to pomenilo, da L_c vsebuje točko d, ki pa ni iz U. Ločimo dva primera:

(i) Naj bo $L_c \preceq L_d$. Vemo, da velja $L_{c(n)} \subseteq A_{c(n)} \subseteq A_c$. Ker je A_c zaprt in zato vsebuje svoja stekališča, dobimo, da $d \in A_c$ in torej $A_d \subseteq A_c$. To pa pomeni, da $L_d \preceq L_c$. Prišli smo do protislovja, saj $L_c \neq L_d$.

(ii) Naj bo $L_d \preceq L_c$. Potem po trditvi 3.35 A_d in B_c nimata skupne točke. Zato obstaja nek $N \geq 1$, da bo $L_d \preceq L_{c(N)}$ in $L_d \neq L_{c(N)}$, saj bi drugače $L_{c(n)} \subseteq A_d$ za vsak n in zaporedje $c(n)$ ne bi konvergiralo k točki $c \in L_c$. Množica $B_{c(N)}$ vsebuje vse nivoje $L_{c(n)}$ za $n \geq N$, za $B_{c(N)}$ pa še velja, da je zaprta in ima po trditvi 3.35 z A_d prazen presek. Nivoji $L_{c(n)}$ so torej podmnožice od $B_{c(N)}$ za vsak $n \geq N$ in tako pridemo do protislovja z dejstvom, da ima vsaka okolica od d neprazen presek z neskončno nivoji $L_{c(n)}$, saj se po zadnjem razmisleku ti nivoji oddaljujejo od d.

Družina $\mathcal{L}$ je torej USC dekompozicija od X. □

Spomnimo se kako smo definirali presečno točko. Točki v kontinuumu rečemo presečna točka, če je njen komplement nepovezan.

Trditev 3.37 *Nivoja L_a in L_b nista presečni točki dekompozicijskega prostora $\mathcal{L}$.*

Dokaz. Oglejmo si samo eno izmed točk saj je razmislek pri drugi točki enak. Točka a ni presečna točka dekompozicijskega prostora $\mathcal{L}$, ker je njen komplement v $\mathcal{L}$ zvezna slika kvocientne surjektivne preslikave prostora $X \setminus \{a\}$, kar pa je povezano po lemi 3.11. □

Trditev 3.38 *$A_c \cup B_c = X$ za vsak $c \in X$.*

Dokaz. Recimo, da njuna unija ni enaka prostoru X. Potem obstaja točka $d \in X$, ki se nahaja v komplementu unije A_c in B_c. Ker je a krajišče, po izreku 2.14 dobimo, da bodisi $A_c \subseteq A_d$ bodisi $A_d \subseteq A_c$. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $A_c \subseteq A_d$. Potem velja, da $B_d \subseteq B_c$. Iz tega sledi, da mora biti $d \in B_c$, kar pa je protislovje z izbiro točke d. □

Trditev 3.39 *Vsak nivo L_c je presečna točka dekompozicijskega prostora $\mathcal{L}$ za vsak $c \in X \setminus \{a, b\}$.*

Dokaz. Definirajmo odprti množici $U = X \setminus B_c$ in $V = X \setminus A_c$. Po trditvi 3.38 vemo, da $A_c \cup B_c = X$. Zato sledi, da $X \setminus L_c = X \setminus (A_c \cap B_c) = (X \setminus A_c) \cup (X \setminus B_c) = U \cup V$. Če $U \cap V$ ne bi bil prazen, bi točka iz preseka bila v A_c in B_c, kar bi pomenilo, da tudi iz L_c, kar pa je protislovje z izbiro te točke. Vemo torej, da $a \in U$ in $b \in V$, kar pomeni, da je $X \setminus L_c$ disjunktna unija nepraznih odprtih prostorov in torej U in V tvorita separacijo od $X \setminus L_c$. Nivo L_c je torej presečna točka dekompozicijskega prostora $\mathcal{L}$. □

Trditev 3.40 *Dekompozicijski prostor $\mathcal{L}$ je lok.*

Dokaz. Po trditvi 3.36 vemo, da je $\mathcal{L}$ USC dekompozicija, torej je dekompozicijski prostor $(\mathcal{L}, \mathcal{T}(\mathcal{L}))$ kontinuum. Po trditvah 3.37 in 3.39 ima $\mathcal{L}$ natanko dve točki, ki nista presečni, kar pa po izreku 3.6 pomeni, da je $\mathcal{L}$ lok. □

Pred nami je zadnja trditev, ki zaključi dokaz izreka 3.21 in odgovori na zastavljeno vprašanje s konca drugega poglavja.

Trditev 3.41 *Kontinuum X je bodisi lok bodisi lok brez lokov.*

Dokaz. Po trditvah 3.31 in 3.24 moramo ločiti dva primera:

(i) Naj bo L_c enotočkovna množica za vsak $c \in X$. Potem je $\mathcal{L}$ dekompozicija v enotočkovne množice in je X homeomorfen dekompozicijskemu prostoru $\mathcal{L}$, ki pa je po trditvi 3.40 lok.

(ii) Naj bo L_c psevdolok za vsak $c \in X \setminus \{a, b\}$. Kvocientna preslikava $f : X \to \mathcal{L}$ zadošča pogojem leme 3.14, torej je X lok brez lokov.

□

Zapišimo direktno posledico pravkar dokazanega izreka:

Posledica 3.42 *Kontinuum je lok brez lokov natanko tedaj, ko je polhomogen uverižljiv kontinuum z natanko dvema krajiščema in ni lok.*

3.3 Polhomogeni uverižljivi kontinuumi s končno množico krajišč

V tem razdelku bomo poskušali opisati vse polhomogene uverižljive kontinuume z neprazno končno množico krajišč. Ugotovili bomo, da razen loka in loka brez lokov ni drugih kontinuumov, ki bi ustrezali tem pogojem.

Najprej bomo preučili uverižljive kontinuume z enim krajiščem. Edini primer takega homogenega kontinuuma je degeneriran kontinuum oziroma točka. V naslednjem izreku bomo dokazali, da ne moremo najti polhomogenega uverižljivega kontinuuma z enim krajiščem.

Izrek 3.43 *Polhomogen uverižljiv kontinuum z enim krajiščem ne obstaja.*

Dokaz. Recimo, da polhomogen uverižljiv kontinuum z natanko enim krajiščem a obstaja. Označimo ga z X. Orbiti kontinuuma X sta $\{a\}$ in $X \setminus \{a\}$. X je po izreku 3.10 razcepen. Obstajata torej prava podkontinuuma A in B od X, da je $X = A \cup B$. Če bi veljalo, da $a \in A \cap B$, bi po točki b) izreka 2.14 sledilo bodisi $A \subseteq B$ bodisi $B \subseteq A$, kar je protislovje. Krajišče a je torej v natanko eni od množic A in B. Brez izgube za splošnost nej bo $a \in A$. Velja, da je $a \in X \setminus B \subseteq A$. Ker je množica $X \setminus B$ odprta, sledi, da je a v notranjosti od A.

Naj bo c točka iz notranjosti od A in različna od a. Po trditvi 3.22 za vsak $d \in X \setminus \{a\}$ obstaja tak homeomorfizem $h : X \to X$, da velja $h(c) = d$ in seveda tudi $h(a) = a$. Ker smo slikali s homeomorfizmom, je točka d vsebovana v notranjosti od $h(A)$, ki je pravi podkontinuum od X, ki vsebuje a. Tako pridobimo prave podkontinuume od X, ki vsebujejo točko a. Z njihovimi notranjostmi lahko pokrijemo celoten prostor X:

$$\bigcup \{\mathrm{Int}(B) | a \in B, B \subset X,\ B \textit{ je kontinuum}\} = X.$$

X je kompakten prostor, zato obstaja končna družina $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ pravih podkontinuumov od X, da je $a \in B_i$ za vsak $i \leq n$ in velja:

$$\bigcup_{i \leq n} \{\mathrm{Int}(B_i)\} = X.$$

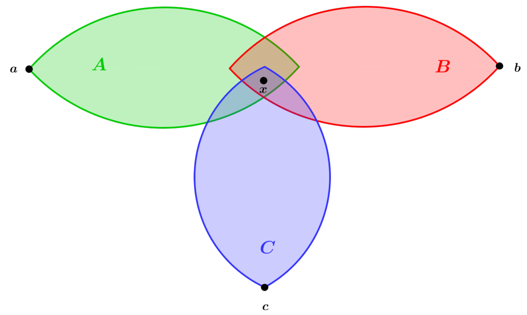
Po točki b) izreka 2.14 so podkontinuumi, ki vsebujejo krajišče, med seboj primerljivi. To pa pomeni, da v družini $\mathcal{B}$ obstaja tak B_i, da je njegova notranjost enaka X. Sledi, da je $B_i = X$, kar pa je v nasprotju z izbiro B_i, kot pravega podkontinuuma od X. Ugotovili smo, da ne obstaja kontinuum X z lastnostmi, kot smo jih predpisali. □

Oglejmo si, kaj lahko povemo o polhomogenih uverižljivih kontinuumih, ki imajo več kot dve, a še vedno končno krajišč.

Izrek 3.44 *Polhomogen uverižljiv kontinuum z n krajišči, kjer je $n \geq 3$, ne obstaja.*

Dokaz. Recimo, da tak kontinuum obstaja. Z E označimo množico krajišč od X. Podobno kot v izreku 3.21 lahko za vsak $c \in X$ definiramo nivo L_c kot presek vseh kontinuumov, ki vsebujejo c in katero od krajiščnih točk $e \in E$.

Z majhnimi modifikacijami lahko posplošimo trditve 3.22 - 3.27. Fiksiramo krajišča $a, b, c \in E$. Izberimo si točko $x \in X \setminus E$. Naj bodo A, B, C podkontinuumi od X, ki vsebujejo točko x in je $a \in A$, $b \in B$ in $c \in C$. Po izreku 3.3 je X dedno unikoherenten, torej imata poljubna podkontinuuma od X bodisi prazen presek, bodisi je presek povezan. Zato lahko predpostavimo, da za A, B, C vzamemo preseke vseh takih, ki ustrezajo danim pogojem in tako dobimo minimalne kontinuume, ki bodo povezani. Po naravni posplošitvi trditve 3.27 dobimo, da je $a \in A \setminus (B \cup C)$, $b \in B \setminus (A \cup C)$ in $a \in C \setminus (A \cup B)$. Sledi, da je $A \cup B \cup C$ šibka trioda, kar pa je v nasprotju z izrekom 3.5, ki pravi da uverižljiv kontinuum ne vsebuje šibke triode.



Slika 3.4: Kontinuumi A, B in C iz dokaza

□

Posledica 3.45 *Naj bo X polhomogen uverižljiv kontinuum. Potem je množica vseh krajišč ali prazna, ali vsebuje natanko dve točki, ali pa je neskončna.*

Dokaz. Posledica sledi neposredno iz izrekov 3.43 in 3.44. □

Poglavje 4

Odprta vprašanja

V magistrskem delu smo našteli vse polhomogene uverižljive kontinuume z neprazno končno množico krajišč. Če hočemo našteti vse polhomogene uverižljive kontinuume nam manjkajo podatki o tistih brez krajiščnih točk in tistih z neskončno krajišči. O takih brez krajišč težko rečemo kaj določenega. Za polhomogene uverižljive kontinuume z neskončno krajišči pa moramo ločiti tri primere. Če je $E = X$, po izreku 3.8 dobimo, da je X psevdolok, kar pa je protislovje s polhomogenostjo. Če je zaprtje množice krajišč prava podmnožica od X, lahko z uporabo definicije polhomogenosti dokažemo, da je E zaprta množica s prazno notranjostjo. Ker je E homogena kompaktna podmnožica uverižljivega kontinuuma, dobimo, da so komponente od E ali točke ali psevdoloki. E je posledično homeomorfen bodisi Cantorjevi množici, bodisi produktu končne množice in psevdoloka, bodisi produktu Cantorjeve množice in psevdoloka [Izrek 1 v [9]]. Tretja možnost pa je, da je E prava gosta podmnožica od X. V tem primeru je le malo raziskanega.

Najbolj aktualna vprašanja glede teme našega raziskovanja se glasijo:

Vprašanje 4.1 *Ali obstaja polhomogen uverižljiv kontinuum brez krajišč?*

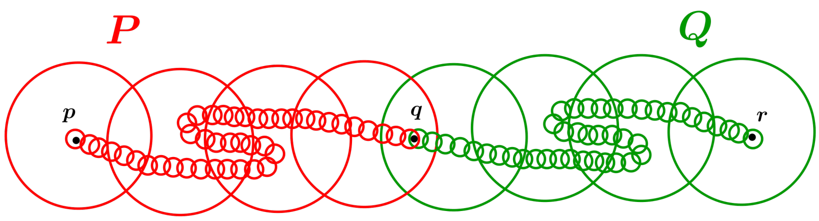
Vprašanje 4.2 *Ali obstaja polhomogen uverižljiv kontinuum z neskončno krajišči in ni lok psevdolokov?*

Vprašanje 4.3 *Kakšen je popoln seznam polhomogenih uverižljivih kontinuumov?*

Do sedaj so znani le trije taki: lok, lok psevdolokov in lok brez lokov.

Podali bomo zanimiv primer uverižljivega kontinuuma K z neskončno krajišči. Vseeno s tem primerom ne bomo odgovorili na vprašanje 4.2, saj konstruiran kontinuum ni polhomogen.

Zgled. Naj bodo $p = (0, 1)$, $r = (0, 0)$ in $q = (0, 1)$ točke iz evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{C}_1 = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ 1-veriga v $\mathbb{R}^2$, kjer je za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ množica C_i odprti krog in je p vsebovan v C_1, q pa v C_n. Dobljeno verigo zrcalimo preko točke q in dobimo 1-verigo $\mathcal{D}_1 = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$, kjer je točka q vsebovana v D_n, točka p pa v D_1. Po izreku 2.5 obstaja zvita $\frac{1}{2}$-veriga $\mathcal{C}_2$ v verigi $\mathcal{C}_1$, tako da je vsak element verige $\mathcal{C}_2$ odprti krog in veriga $\mathcal{C}_2$ poteka od točke p do točke q. Dodatno zahtevamo še, da je veriga $\mathcal{C}_2$ strogo finejša od verige $\mathcal{C}_1$. Dobljeno verigo podobno kot prej zrcalimo preko točke q in dobimo verigo $\mathcal{D}_2$, ki je zvita v verigi $\mathcal{D}_1$ in strogo finejša od nje, poteka pa od točke r do točke q (glej sliko 4.1).



Slika 4.1: Konstrukcija kontinuuma K

Postopek ponavljamo in dobimo zaporedje verig $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{\mathcal{D}_n\}_{n=1}^{\infty}$, ki ustrezata pogojem definicije 2.7. Označimo s $P = \cap_{n=1}^{\infty} \cup \mathcal{C}_n$ psevdolok med p in q in s $Q = \cap_{n=1}^{\infty} \cup \mathcal{D}_n$ psevdolok med q in r. Psevdoloka P in Q smo konstruirali tako, da je $P \cap Q = \{q\}$. Označimo s $K = P \cup Q$. Po izrekih 2.8 in 1.26 je K kontinuum.

Trditev 4.4 *Kontinuum K je uverižljiv kontinuum.*

Dokaz. Psevdoloka P in Q sta uverižljiva kontinuuma, kar sledi iz njune konstrukcije. Zagotovili smo si, da za poljuben ε obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $\mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$ ε-veriga, ki pokriva K. □

Trditev 4.5 *Kontinuum K ni psevdolok.*

Dokaz. Kontinuum $K = P \cup Q$ je razcepen. Psevdoloka P in Q sta njegoviva prava podkontinuuma in velja $p \in P \setminus Q$ in $r \in Q \setminus P$. Po posledici 2.10 kontinuum K ni psevdolok. □

Razmislimo lahko, da ima kontinuum K neskončno krajišč vendar ni polhomogen, saj se izkaže, da za poljubni točki $x, y \in P$ ne obstaja homeomorfizem $f : K \to K$, tako da bi veljalo, da je $f(x) = y$. To se zgodi, če je x iz različnega kompozanta od P kot točka q, y pa iz kompozanta točke q. Za konec lahko zastavimo naslednje vprašanje:

Vprašanje 4.6 *Ali obstaja tako naravno število $n \in \mathbb{N}$, da je kontinuum K $\frac{1}{n}$-homogen? Če je odgovor pritrdilen, koliko je n?*

Literatura

[1] R. H. Bing, A homogeneous indecomposable plane continuum, Duke Math. J. 15 (1948), 729–742.

[2] R. H. Bing, Each homogeneous nondegenerate chainable continuum is a pseudo-arc, Trans. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 345–346.

[3] R. H. Bing, Snake-like continua, Duke Math. J. 18 (1951), 653–663.

[4] R. H. Bing, F. B. Jones, Another homogeneous plane continuum, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 171–192.

[5] J. Bobok, P. Pyrih, B. Vejnar, Half homogeneous chainable continua with end points, Topology and its Aplications 160 (2013), 1066–1073

[6] J. P. Boroski, On indecomposable $\frac{1}{2}$-homogeneous circle-like continua, Topology and its Applications, (še neizdano).

[7] J. Doucet, Cardinality, completeness, and decomposability of sets of endpoints of chainable continua, Topology and its Applications 60 (1994), 41–59.

[8] K. Kuratowski, *Topology, Vol. I*, Academic Press, New York, 1966.

[9] W. Lewis, Homogeneous circle-like continua, Proceedings of the American Mathematical Society 89 (1) (1983), 163–168.

[10] J. Mrčun, *Topologija*, DMFA, Ljubljana, 2008.

[11] J. R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[12] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[13] V. Neumann-Lara, P. Pellicer-Covarrubias, I. Puga, On $\frac{1}{2}$-homogeneous continua, Topology and its Applications 153 (2006), 2518–2527.