



Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko

Doktorska disertacija

**Robustna polinomska sinteza regulatorja za sisteme z  
zakasnitvami**

Oktober, 2013

Nikolaj Semenič





Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko

Doktorska disertacija

**Robustna polinomska sinteza regulatorja za sisteme z  
zakasnitvami**

Oktober, 2013

Kandidat: Nikolaj Semenič

Mentor: izr. prof. dr. Rajko Svečko



## **ZAHVALA**

*Zahvaljujem se mentorju dr. Rajku Svečku za vodenje, usmerjanje in strokovno pomoč.*

*Posebna zahvala gre dr. Andreju Sarjašu, ki je s svojimi koristnimi nasveti in predlogi pripomogel k temu delu.*

*Zahvaljujem se dr. Amorju Chowdhuryju za zaupanje in bodrenje pri delu.*

*Delo je nastalo v okviru programa, ki ga delno financira Evropska unija, in sicer iz Evropskega socialnega sklada.*

*Zahvala gre mojim staršem za podporo in spodbudo.*

*Posebej bi se rad zahvalil moji sopotnici Piki za skrb, podporo in neizmerno mero potrpežljivosti.*



## Kazalo

1	Uvod .....	3
1.1	Obravnava sistemov z zakasnitvami.....	4
1.2	Izračun lastnih vrednosti sistemov z zakasnitvami .....	5
1.3	Robustnost sistemov z zakasnitvami.....	6
1.4	Izpostavitev teze in ciljev .....	8
1.5	Organizacija doktorske disertacije .....	9
2	Lastnosti sistemov z zakasnitvami.....	11
2.1	Uvod .....	11
2.2	Sistemi s konstantnimi zakasnitvami tipa RFDE in njihove lastnosti.....	12
2.3	Sistemi z variabilnimi zakasnitvami tipa RFDE .....	17
3	Robustnost sistemov z zakasnitvami.....	23
3.1	Strukturna odstopanja .....	23
3.1.1	Nestrukturirana odstopanja .....	24
3.1.2	Strukturirana odstopanja .....	26
3.2	Nestrukturirana odstopanja .....	29
3.2.1	Multiplikativno odstopanje .....	29
3.2.2	Aditivno odstopanje .....	30
3.2.3	Inverzno odstopanje.....	30
3.3	Problem mešane občutljivosti.....	31
4	Izračun lastnih vrednosti sistemov z zakasnitvami .....	34
4.1	Spektralna diskretizacija za izračun karakterističnih korenov.....	36
4.2	Postopek samodejne določitve števila diskretizacijskih točk.....	39
4.3	Postopek samodejne določitve območja izračuna karakterističnih korenov.....	43
4.4	Zaključne ugotovitve .....	47
5	Pomikanje polov za sisteme z zakasnitvami .....	48
5.1	Zapis sistemov z zakasnitvami s prenosno funkcijo .....	50
5.2	Pomikanje polov različni pristopi .....	54
5.2.1	Bezoutova faktorizacija .....	54
5.2.2	Dvojna Bezoutova faktorizacija .....	55

---

5.2.3	Reševanje Diophantove enačbe .....	56
5.2.4	Izbira karakterističnega polinoma .....	63
5.3	Pomikanje polov za sisteme z zakasnitvami .....	64
5.3.1	Pomikanje polov za sisteme z eno notranjo zakasnitvijo .....	71
5.4	Uporaba opazovalnika za sisteme z zakasnitvami.....	84
5.4.1	Uporaba opazovalnika za sisteme z notranjimi in izhodnimi zakasnitvami .....	88
5.4.2	Uporaba opazovalnika za rešitev sistema polinomskih enačb.....	90
5.4.3	Uporaba opazovalnika za sisteme z vhodno/izhodno transportno zakasnitvijo.....	91
5.5	Izbira karakterističnega kvazi-polinoma.....	97
5.6	Vrednotenje robustnosti po principu $H_\infty$ .....	100
5.7	Analiza napake zakasnitev.....	104
5.8	Zaključne ugotovitve .....	105
6	Primer sinteze regulatorja za sistem z dvema zakasnitvama.....	107
6.1	Model objekta .....	107
6.2	Kompenzacija transportne zakasnitve .....	108
6.3	Karakteristični kvazi-polinom .....	109
6.4	Optimalni regulator po principu problema mešane občutljivosti.....	112
6.5	Robustnost sistema na spremembe zakasnitev .....	114
6.6	Zaključne ugotovitve .....	116
7	Zaključek.....	117
8	Literatura.....	119



## Kazalo slik

Slika 3.1 Konture stabilnostnega radija za izračunane vrednosti $r_C = 0.1, 0.3, \dots, 3$ ; območje stabilnosti obdajajo krivulji $\gamma_N$ in $\gamma_P$ ; črna pikčasta krivulja $r_{\max}$ povezuje maksimalne vrednosti stabilnostnega radija.....	28
Slika 3.2 Problem mešane občutljivosti .....	32
Slika 3.3 Razširjen problem mešane občutljivosti.....	33
Slika 5.1 Zaprtizančni sistem.....	56
Slika 5.2 Regulator z dvema prostostnima stopnjama.....	62
Slika 5.3: Opazovalnik .....	92
Slika 5.4: Kaskadni opazovalnik.....	93
Slika 5.5: Kaskada petih opazovalnikov za sistem s transportno zakasnitvijo .....	96
Slika 6.1 Rolkar na pomičnem grebenu [111] .....	107
Slika 6.2: Poli prenosne funkcije (6.3) .....	108
Slika 6.3: Stopnični odziv karakterističnega kvazi-polinoma.....	111
Slika 6.4: Poli izbranega karakterističnega kvazi-polinoma .....	111
Slika 6.5: Uteži, občutljivost ter komplementarna občutljivost.....	113
Slika 6.6: Vrednost skrajno desnega pola v odvisnosti od sprememb zakasnitev .....	114
Slika 6.7: Vrednost norme izraza $\ S(d_1, d_2)W_2\ _{\infty}$ .....	115
Slika 6.8: Vrednost norme izraza $\ T(d_1, d_2)W_1\ _{\infty}$ .....	115



## **Robustna polinomska sinteza za sisteme z zakasnitvami**

**UDK:** 004.052.2:512.643.53(043.3)

**Ključne besede:** Robustno vodenje, pomikanje polov, sistemi z zakasnitvami, zakasnitve, izračun lastnih vrednosti

### **Povzetek**

V disertaciji je predstavljena sinteza regulatorja za sisteme z zakasnitvami, ki temelji na razreševanju zaprtozančnih polinomskih enačb, ki odražajo lastnosti zaprtozančnega karakterističnega kvazi-polinoma. V delu so obravnavane tako notranje zakasnitve kot vhodne oz. izhodne transportne zakasnitve. Predlagana je celostna rešitev polinomske sinteze, ki omogoča izbiro poljubnega zaprtozančnega kvazi-polinoma s pomočjo uporabe opazovalnika zaprtozančnega sistema. Podoben pristop smo izbrali tudi v primeru kompenzacije transportne zakasnitve in sicer s strukturo kaskadnih opazovalnikov. V delu podrobno obravnavamo uporabo ter vpliv prostih polinomov, ki nastopijo v sistemu ob ustrezni izbiri strukture regulatorja. Proste polinome lahko uporabimo za optimizacijo kvazi-polinoma ali za optimizacijo robustnosti sistema po principu metrike  $\|\cdot\|_\infty$ . Optimizacijski problem robustnosti smo razširili na različne vidike obravnave sistema pod vplivom motenj v sistemu samem ali v zakasnitvah, ki so prisotne. Postopek optimizacije je bil izveden s pomočjo diferencialne evolucije. V delu je izpostavljen tudi poenostavljen postopek izbire ustreznega karakterističnega kvazi-polinoma ter učinkovit algoritem za izračun le nekaj skrajno desnih lastnih vrednosti sistemov z zakasnitvami, ki je pri obravnavi takšnih sistemov nepogrešljiv.

## Robust pole placement for systems with delays

**UDK:** 004.052.2:512.643.53(043.3)

**Key words:** Robust control, pole placement, time delay systems, delays, eigenvalues computation

### Abstract

This dissertation presents controller synthesis for time delay systems based on the solutions of sets of polynomial equations, which represent the essence of characteristic quasi-polynomial. In this work internal delays as well as input/output transport delays are addressed. We propose integrated solution of pole placement technique using a closed loop state observer, which allows arbitrary choice of quasi-polynomial. Similar approach was considered in the case of dealing with the compensation of transport delays by introducing a specific structure of cascade observers. We fully discuss the use and the influence of free polynomials, which occur in the system as a result of the appropriate structure of the controller. Free polynomials might be used for the optimization of the quasi-polynomial or for the optimization of the system robustness according to  $\|\cdot\|_{\infty}$  metrics. The robustness optimization problem was focused on different aspects of perturbations acting directly either on the system parameters or to the time delays present. The optimization process was performed using differential evolution. The work also deals with the proposed method for the simplified selection of suitable characteristic quasi-polynomial and the proposed effective algorithm for the computation of only few rightmost eigenvalues for time delay systems, which is indispensable in case of dealing with such systems.

## 1 Uvod

Zakasnitev opišemo kot fizikalno lastnost sistema, ki povzroči, da se odziv (reakcija) sistema na določeno vhodno akcijo pripeti po določenem času oz. z določeno zakasnitvijo. Zakasnitev je vedno prisotna pri procesu prenosa energije oz. informacij v prostoru, ki je odvisna od razdalje in hitrosti potovanja. Zakasnitve najdemo na najrazličnejših področjih pri procesih v biologiji, kemiji, ekologiji, ekonomiji, logistiki, telekomunikacijah ter pri procesih v industriji kot so: mehanski prenosi, pretoki tekočin, metalurgija. Zaradi same narave zakasnitve pa rokovanje s takšnimi sistemi še zdaleč ni enostavno.

Zaradi širokega spektra problemov v industriji, ki zahtevajo natančnejši vpogled v problematiko zakasnitev, je bilo robustno vodenje sistemov z zakasnitvami (TDS<sup>1</sup>) v zadnjih 20. letih deležno aktivnega razvoja. Zajelo je najrazličnejša področja vodenja kot so analiza stabilnosti, vodenje z optimizacijo norme  $H_\infty$ , načrtovanje Kalmanovega filtra, stohastično vodenje [1], [2], [3]. Predvsem stabilnost in posledična analiza stabilnosti je na področju vodenja zastopana v številnih monografijah [4], [5], [6], [7]. Razvoj stabilnosti se je začel že v zgodnjih 50. letih. Večji preboj se je zgodil leta 1957 z izumom Smithovega prediktorja, ki omogoča kompenzacijo zakasnitve in tako se problem z zakasnitvijo poenostavi v klasičen problem brez zakasnitve, ki poenostavlja načrtovanje regulatorja. Prav Smithov prediktor je zaradi robustnosti in enostavne implementacije [8] v industriji najbolj razširjena oblika rešitve vodenja preprostih sistemov z zakasnitvami. Vendar je klasična struktura Smithovega prediktorja primerna le za stabilne procese. Stabilnost se v tem primeru nanaša na sistem, če odmislimo vpliv zakasnitve. Za kompenzacijo zakasnitve v primeru nestabilnih procesov je bil razvit modificiran Smithov prediktor [6], [9]. Ustrezne modifikacije so bile razvite tudi za izboljšanje robustnosti na motnje ter za integralne procese [8].

Klasična struktura Smithovega prediktorja je spodbudila razvoj metode končne dodelitve spektra (FSA - Finite Spectrum Assignment) [10], [11]. Ta metoda rezultira k obravnavi sistema brez zakasnitve podobno kot Smithov prediktor, vendar se princip metode bistveno razlikuje od Smithovega prediktorja. Smithov prediktor temelji na

---

<sup>1</sup> TDS – time delay systems (angl.)

kompenzaciji zakasnitve s kompenzatorjem, ki se implementira v sam sistem in tako izniči vpliv zakasnitve v sistemu. Metoda FSA temelji na podlagi izračuna vpliva zakasnitve v prihodnosti na podlagi modela sistema. Torej s takšno implementacijo, regulator v naprej izničuje vplive zakasnitve. S takšno implementacijo predikcije zakasnitve dosežemo kompenzacijo zakasnitve oz. drugače povedano karakteristično enačbo sistema z zakasnitvami, ki ima neskončen spekter, poenostavimo v sistem s končnim spektrom (finite spectrum). Implementacija te metode je zapletena, saj temelji na numerični integraciji in ni enostavno zagotoviti varne implementacije metode [12], [13].

Na tem mestu je potrebno omeniti še en princip določitve kompenzatorja zakasnitve in sicer v [14] je predstavljen pristop obravnave transportne oz. vhodno/izhodne zakasnitve sistema, ki je zelo značilna za procese prenosa informacij oz. materije. Princip temelji na obravnavi zakasnitve v obliki transportne parcialne diferencialne enačbe (PDE). Takšna obravnava sistema, ki je oblikovan v obliki kaskade PDE in navadne diferencialne enačbe (NDE) temelji na reševanju mejnega problema PDE, ki je obsežno predstavljen v [15].

Pri obravnavi zakasnitev je moč zaslediti različne metode obravnave sistemov z zakasnitvami. Zasledimo lahko obravnavo sistema v vhodno izhodnem opisu, v prostoru stanj ali obravnavo karakteristične enačbe sistema. Tako ločimo sisteme z zakasnitvami glede na princip obravnave sistemov in sicer v časovnem oz. frekvenčnem prostoru.

## 1.1 Obravnava sistemov z zakasnitvami

Obravnava sistemov z zakasnitvami v časovnem prostoru temelji na funkcionalnih Lyapunov-Krasovskii in funkcijah Razumikhin [4], [16]. Te metode so danes nepogrešljive pri obravnavi stabilnosti zakasnjениh sistemov predvsem zaradi dobro razvitih orodij s katerimi je možno funkcionalne formulirati v obliki linearnih matričnih neenačb (linear matrix inequalities - LMI) [17]. S temi metodami lahko analiziramo sisteme z zakasnitvami, ki so stabilni/nestabilni za vse zakasnitve ali sisteme, ki so stabilni/nestabilni za določen interval zakasnitev. Še posebej zanimive so metode, ki omogočajo analizo stabilnosti pri sistemih pri katerih dopuščajo hitro spreminjanje zakasnitve, torej kjer so zakasnitve omejene z odvodom zakasnitev [16]. Pri teh metodah se kažejo pomanjkljivosti v kompleksnosti izrazov oz. funkcionalov, ki jih je zelo težko dokazati, zato so poenostavitve neizbežne. S tem pa se konservativnosti rezultatov ni moč izogniti.

Sisteme z zakasnitvami obravnavamo tudi z metodami v frekvenčnem prostoru [18], [19], ki temeljijo na izračunu korenov karakteristične enačbe in s tem določijo lastnih vrednosti sistema. Namreč podobno kot pri sistemih brez zakasnitev, stabilnost določa lega lastnih vrednosti v kompleksni ravnini [20], [21]. Vse lastne vrednosti morajo ležati v levi kompleksni polravnini. Določitev korenov karakteristične enačbe je vse prej kot trivialen postopek. Karakteristična enačba vsebuje člene zakasnitev, ki so izraženi kot eksponentne funkcije Laplace-ove kompleksne spremenljivke in parametrom zakasnitve v eksponentu in so tako transcendentne funkcije kompleksne spremenljivke. Takšen polinom imenujemo kvazi-polinom (quasi-polynomial), kar pomeni, da je reševanje karakteristične enačbe analitično zelo težko. Karakteristični kvazi-polinom ima predvsem zaradi transcendentnih oz. Eulerjevih funkcij, ki jih morebiti izrazimo v obliki sinusnih in kosinusnih komponent, neskončno korenov, katerih rešitve v večini primerov ni moč analitično poiskati.

## **1.2 Izračun lastnih vrednosti sistemov z zakasnitvami**

Obstaja kar nekaj numeričnih metod za izračun skrajno desnih lastnih vrednosti zakasnjene sistema [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28]. Novejše metode temeljijo na diskretizaciji spektra sistema, pri čemer se uporabljajo metode najmanjših kvadratov [29], [30] ali Runge-Kutta [31], [32]. Za izračun lastnih vrednosti se uporabljajo tudi numerični algoritmi za izračun ničel analitičnih funkcij [33]. Takšni algoritmi temeljijo na iterativnih metodah, kot je na primer Newtonova metoda [34], [35], [36]. V tem primeru se algoritem ponavlja tako dolgo dokler rešitev ne ustreza določenim zahtevam oz. dokler rešitev ni dovolj natančna. S takšnimi metodami lahko dobimo zelo natančne rešitve. Vendar je problem z oceno začetne vrednosti, ki je za uspešno delovanje takšnega algoritma nujno potrebna. V primerih algoritmov [37], [38] je bil za približen izračun lastnih vrednosti v nekem območju kompleksne ravnine uporabljen bisekcijski algoritem. Kot uspešna metoda za izračun lastnih vrednosti se je pokazala kombinacija omenjenih metod. V primeru algoritma [22] se uporablja metoda diskretizacije spektra za izračun aproksimiranih lastnih vrednosti, nato se te vrednosti popravijo do določene natančnosti z iterativno Newtonovo metodo. Diskretizacija spektra sistema temelji na diskretizaciji infinitezimalnega generatorja operatorja rešitve zakasnjene diferencialne enačbe, ki omogoča zapis zakasnjene diferencialne enačbe v obliki abstraktne navadne diferencialne enačbe. Tako se

problem reševanja nelinearne karakteristične enačbe prevede v diskretiziran linearen problem. Tak postopek omogoča izračun vseh lastnih vrednosti v določenem območju kompleksne ravnine. Kot smo že omenili diskretizacija rezultira k aproksimiranim vrednostim lastnih vrednosti sistema. Te vrednosti je moč popraviti s pomočjo Newtonove metode in uporabe aproksimiranih lastnih vrednosti kot začetne vrednosti pri iterativnem reševanju izvirne nelinearne karakteristične enačbe, kar rezultira k natančnem izračunu lastnih vrednosti zakasnjene sistema, ki imajo poglobljen vpliv na različne lastnosti sistema. Obstajata dva obsežnejša orodja, ki omogočata zraven različnih analiz tudi izračun polov zakasnenih diferencialnih enačb; DDE-BIFTOOL [39] in TRACE-DDE [40]. Orodji sta razviti v okolju Matlab in omogočata tudi analizo stabilnosti v odvisnosti med posameznimi parametri ter omogočata določitev mejno stabilnega območja v odvisnosti od parametrov.

### **1.3 Robustnost sistemov z zakasnitvami**

Eden izmed pomembnih aspektov analize sistemov z zakasnitvami je tudi določitev oz. ovrednotenje največjega dopustnega odstopanja sistema oz. parametrov. Odstopanja oz. negotovosti, ki so vzrok različnih zunanjih vplivov ali poenostavitve modela lahko opredelimo v dva razreda in sicer parametrične ali strukturne in nestrukturne (strukturirane ali nestrukturne) negotovosti. Parametrične negotovosti so posledica ne dovolj natančnega poznavanja določenih parametrov oz. variranja le teh med samim delovanjem sistema. Nestrukturne negotovosti so vzrok poenostavitve modela, kjer zanemarimo določen del sistema. Nestrukturna odstopanja opišemo v obliki prenosnih utežnostnih funkcij, ki so nepogrešljiv sestavni del sinteze  $H_\infty$  [41], [42], [43]. S temi utežmi lahko opišemo odstopanja ter občutljivost na motnje. Pri sistemih z zakasnitvami so pogosto prisotna tudi parametrična odstopanja tako strukturirana [44], [45], [46] kot nestrukturna [47], [48]. Za opis odstopanja posameznih parametrov (strukturirana odstopanja) oz. odstopanja, ki se izražajo v aditivnem odstopanju celotnih matrik (nestrukturna odstopanja) zakasnjene sistema, se uporablja teorija psevdospektra. Princip psevdospektra temelji na raziskovanju vpliva odstopanj parametrov na lastne vrednosti sistema [49], [50], [51]. Tako je moč določiti občutljivost lastnih vrednosti na odstopanja, ki imajo lahko različne strukture. Posledično mnoga dela opisujejo določitev največjega



možnega odstopanja parametrov pri upoštevanju določene strukture oz. določitev stabilnostnega radija (Stability radius) [52], [53], [54], [55]. Stabilnostni radij določa z normo omejeno največje odstopanje sistema, ki zagotavlja stabilnost sistema.

Področje robustnega vodenja in metod načrtovanja robustnih regulatorjev je podobno kot v primeru sistemov brez zakasnitev zelo obsežno. Eden izmed najbolj razširjenih principov sinteze sistemov na podlagi metrike  $H_\infty$  je bil za sisteme z zakasnitvami vpeljan že v 80. letih [56], [57], [58]. Omenjen princip sinteze je še vedno zelo razširjeno področje raziskovanja. Metoda sinteze na podlagi norme  $H_\infty$  je na primer nepogrešljiva pri obravnavi sistemov v časovnem prostoru, kjer je problem zapisan v obliki LMI [59], [60], [61], [62], [63]. Raziskovanje robustnega vodenja tudi v primeru zakasnenih sistemov posega še na področja metod operatorja, prostora stanj, J-spektralne faktorizacije [58], rekurzivno načrtovanje regulatorjev (Backstepping) [64], [65], [15] ter na mnoge druge. Še posebej zanimive so novejšie metode, ki za razliko od starejših ne temeljijo na kompenzaciji zakasnitev in posledično načrtovanju regulatorjev za ne zakasnjene sisteme, ampak zakasnitve upoštevajo pri sintezi tako, da izračunajo lastne vrednosti sistema in tako omogočajo natančno analizo stabilnosti sistema tudi v primeru odstopanja zakasnitev oz. posameznih parametrov sistema. Postopki sinteze temeljijo na določitvi regulatorja v prostoru stanj na podlagi iterativnega pomikanja ojačenj regulatorja v prostoru stanj [66] ter na podlagi metode optimizacije lastnih vrednosti [67], [68], [69]. Tudi metoda [70] temelji na določitvi regulatorja v prostoru stanj vendar omogoča postavitev prvih nekaj polov. V delih [71] in [72] avtorji razvijejo metodo za izračun norme  $H_\infty$  ter postopek za določitev parametrov regulatorja poljubne strukture na podlagi vrednotenja norme  $H_\infty$ . Zanimiva metoda pri sintezi robustnih regulatorjev je tudi metoda za pomikanje polov oz. polinomska sinteza, ki je bila izvedena tudi za sisteme z zakasnitvami [73], [74], [75], [76], kjer so predstavljene metode, ki omogočajo rešitev enačb polinomske sinteze in tako načrtovanje poljubnega karakterističnega polinoma zaprto zančnega sistema. Vendar je za rešitev enačb vpeljana ključna poenostavitev, ki poenostavi neskončni spekter zakasnjene sistema v končni spekter.

## 1.4 Izpostavitev teze in ciljev

Polinomska sinteza v primeru linearnih sistemov brez zakasnitev rezultira k reševanju ene Diophantove enačbe in s tem določitvi koeficientov regulatorja. Pri tem je potrebno predpostaviti strukturo oz. red regulatorja in ustrezen red zaprtozančnega karakterističnega polinoma. V primeru zakasnjenih sistemov dobimo številne Diophantove enačbe, ki so med seboj odvisne. Zaradi reševanja večjega števila enačb, ki vsebujejo manjše število spremenljivk, rešitev obstaja le redko. Številne Diophantove enačbe lahko zapišemo z združitvijo posameznih členov zakasnitev na pregleden način, ki zagotavlja razdelitev enačb na enačbe, ki jih lahko rešimo in na enačbe, ki so v celoti odvisne od rešitev prejšnjih enačb in jih tako ni moč neodvisno rešiti. Tako lahko neodvisno izberemo le določene koeficiente karakterističnega kvazi-polinoma. V delu bomo predstavili rešitev kako je možno rešiti tudi neodvisne enačbe z uporabo opazovalnika in s tem zagotoviti poljubno obliko karakterističnega kvazi-polinoma. Ukvarjali se bomo z notranjimi, izhodnimi ter vhodno/izhodnimi transportnimi zakasnitvami. S pomočjo posebne strukture kaskade opazovalnikov se bomo ukvarjali s kompenzacijo vhodno/izhodnih transportnih zakasnitev.

V programskem okolju Matlab bomo izvedli metode za izračun polov karakterističnega kvazi-polinoma [22], za izračun strukturiranega in nestrukturiranega stabilnostnega radija [47], [45]. Metodo [22] bomo prilagodili in izboljšali tako, da učinkovita pri izračunu čim manjšega števila skrajno desnih polov. V algoritmu bomo izvedeli samodejno nastavljanje območja domene izračunavanja polov v kompleksni ravnini. Tako bo algoritem veliko hitrejši in primernejši za uporabo pri različnih problemih, kot na primer izračun odvisnosti skrajno desnega pola od določenih parametrov sistema. Obstaja kar nekaj metod za izračun skrajno desnega pola oz. spektralne abscise [77], [78], [79], [80], ampak so računsko dokaj zahtevne. Učinkovit algoritem za določanje stabilnosti sistema je prav tako nepogrešljiv pri iskanju ustreznega karakterističnega kvazi-polinoma sistema, ki ga je moč izvesti s pomočjo optimizacijske rutine, izvedene z diferencialno evolucijo [81].

Z diferencialno evolucijo bo izveden tudi postopek optimizacije zaprtozančnega sistema po principu norme  $H_\infty$ . Z dovolj visoko izbiro reda regulatorja in s posledičnim spreminjanjem prostih parametrov je namreč možno vplivati na normo  $H_\infty$  in tako določiti

optimalen regulator glede na zastavljene zahteve občutljivosti, stabilnosti, robustnosti. Prav tako bo možno poiskati optimalen karakteristični kvazi-polinom glede na zastavljene kriterije. Predlagali bomo poenostavljen postopek izbire kvazi-polinoma, kjer kvazi-polinom obravnavamo kot produkt polinoma in kvazi-polinoma prvega reda, ki vsebuje vse zakasnitve prvotnega kvazi-polinoma. Pri tem lahko predpostavimo izbiro dominantnih polov v polinomu. V delu se bomo posvetili tudi analizi napake zakasnitve, ki je lahko posledica nenatančne ocene zakasnitve v sistemu.

## 1.5 Organizacija doktorske disertacije

Delo v drugem poglavju nadaljujemo s predstavitev sistemov z zakasnitvami oz. njihovo splošno formulacijo ter navedemo nekatere zanimive in uporabne lastnosti. Predstavljena sta dva različna koncepta sistemov z zakasnitvami in sicer sistemi s konstantnimi zakasnitvami in sistemi z variabilnimi zakasnitvami.

V tretjem poglavju je predstavljen vidik robustnosti sistemov z zakasnitvami, kjer obravnavamo strukturalna in nestrukturalna odstopanja ter podamo problem mešane občutljivosti.

V četrtem poglavju je natančno predstavljen postopek izračuna lastnih vrednosti za sisteme z zakasnitvami ter obstoječi algoritmi. V poglavju predstavimo lastne izboljšave in prilagoditve že obstoječega algoritma za izračun korenov karakteristične enačbe.

Peto poglavje predstavlja jedro tega dela in predstavlja postopek reševanja sklopa polinomskih enačb za sisteme z zakasnitvami. Poseben poudarek je na vplivu prostih polinomov, ki nastopijo v sistemu ob izbiri ustrezne strukture regulatorja ter na opazovalniku za kompenzacijo določenih členov kvazi-polinoma in transportne zakasnitve.

V šestem, zadnjem poglavju je predstavitev uporabe v tem delu predstavljenih in razvitih metod na slikovitem primeru, za katerega smo s pomočjo simulacijskih orodij načrtali robusten regulator.

V zaključku so predstavljene zaključne misli ter ideje za nadaljnje delo.



## 2 Lastnosti sistemov z zakasnitvami

### 2.1 Uvod

Stabilnost sistemov z zakasnitvami določa lega lastnih vrednosti v kompleksni ravnini. Izračun lastnih vrednosti sistema oz. korenov karakteristične enačbe je predvsem zaradi zakasnitev, ki tvorijo eksponentne oz. transcendentne funkcije zelo zapleteno. Sistem z zakasnitvami v splošnem opišemo s funkcionalno diferencialno enačbo (FDE<sup>2</sup>) [21]:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, \dot{x}_t, u(t)) \quad (2.1)$$

Kjer sta  $x(t)$  in  $\dot{x}(t)$  vektorja stanj in odvodov stanj, ki opisujeta obnašanje sistema na časovnem intervalu  $t \in t_0, t_1$  ;  $x_t(s) = x(t+s)$  , kjer  $s \in \tau_1(t)$  ter podobno  $\dot{x}_t(s) = \dot{x}(t+s)$ , kjer  $s \in \tau_2(t)$  ;  $\tau_1$  in  $\tau_2$  sta množici realnih zakasnitev.

FDE razdelimo na tri različne tipe diferencialnih enačb:

- I. FDE je diferencialna enačba tipa RFDE<sup>3</sup>, če  $\tau_1(t) \subset -\infty, 0$  in  $\tau_2(t) = \emptyset$ , kjer je  $t \in t_0, t_1$  . To pomeni, da desna stran enačbe (2.1) ni odvisna od odvoda vektorja stanj  $\dot{x}(t)$ .

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, u(t)) \quad (2.2)$$

- II. FDE je diferencialna enačba tipa NFDE<sup>4</sup>, če je enačba odvisna tako od trenutnih kot zakasnenih stanj ter tudi od odvodov le teh. Torej so v enačbi (2.1) prisotna stanja in odvodi stanj ter  $\tau_1(t) \subset -\infty, 0$  in  $\tau_2(t) \subset -\infty, 0$  za  $t \in t_0, t_1$  .

<sup>2</sup> FDE – functional differential equation (angl.)

<sup>3</sup> RFDE – retarded functional differential equation (angl.)

<sup>4</sup> NFDE – neutral functional differential equation (angl.)

- III. FDE je AFDE<sup>5</sup>, če so spremembe stanj odvisne od trenutnih in prihodnjih vrednosti vhodnega signala  $u(t)$  ter  $\tau_1(t) \subset 0, \infty$  in  $\tau_2(t) = \emptyset$ .

Zgoraj navedeni tipi diferencialnih enačb lahko vsebujejo različne tipe zakasnitev in sicer konstantne zakasnitve (2.3), zakasnitve, ki so funkcije časa (2.4) ali distribuirane zakasnitve (2.5).

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau)) \quad (2.3)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau(t))) \quad (2.4)$$

$$\dot{x}(t) = \int_{t-h}^t g(x(s), t, s) ds \quad (2.5)$$

V primeru, da so zakasnitve konstantne in jih je moč izraziti v obliki najmanjšega skupnega večkratnika oz. je njihovo razmerje racionalno odvisno imenujemo takšne sorazmerne<sup>6</sup> zakasnitve. Nesorazmerne<sup>7</sup> zakasnitve so posledica iracionalnega razmerja med posameznimi zakasnitvami [20]. V predstavljenem delu bomo obravnavali RFDE, ki jih imenujemo tudi diferencialne enačbe z zakasnitvami<sup>8</sup>.

## 2.2 Sistemi s konstantnimi zakasnitvami tipa RFDE in njihove lastnosti

V tem razdelku bomo predstavili nekatere pomembne lastnosti DDE. Določene predpostavke bomo predstavili brez dokazov (za več informacij glej [20]). Linearni sistem z zakasnitvami tipa RFDE zapišemo:

$$\dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^m A_i x(t-\tau_i), \quad (2.6)$$

kjer je  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  spremenljivka stanja pri času  $t$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i=0,1,\dots,m$  so realne matrike in  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$  so konstantne zakasnitve. Začetna vrednost sistema je

---

<sup>5</sup> AFDE – advanced functional differential equation (angl.)

<sup>6</sup> Commensurate delays (angl.)

<sup>7</sup> Noncommensurate delays (angl.)

<sup>8</sup> DDE – delay differential equation (angl.), v literaturi zasledimo tudi pojem differential-difference equation ali defference differential equation.

definirana na segmentu  $\phi \in C(-\tau_m, 0, \mathbb{R}^n)$ , kjer je  $C(-\tau_m, 0, \mathbb{R}^n)$  Banachov (neskončno dimenzionalni) prostor zveznih omejenih funkcij, ki preslikajo interval  $-\tau_m, 0$  v  $\mathbb{R}^n$ .

Če strnemo lastnosti sistemov tipa RFDE:

Karakteristično enačbo sistema (2.6) zapišemo:

$$\det \Delta(s) = 0, \quad (2.7)$$

$$\Delta(s) := sI - A_0 - \sum_{i=1}^m A_i e^{-s\tau_i}, \quad (2.8)$$

kjer je izraz (2.8) karakteristična matrika. Koreni izraza (2.7) so karakteristični koreni.

Sistem (2.6) je asimptotično stabilen če velja:

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \phi \in C(-\tau_m, 0, \mathbb{R}^n) (\|\phi\|_s < \delta) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\forall t \geq 0 \|x_t(\phi)\|_s < \varepsilon), \\ & \forall \phi \in C(-\tau_m, 0, \mathbb{R}^n) \lim_{t \rightarrow +\infty} x(\phi)(t) = 0 \end{aligned},$$

in eksponentno stabilen če obstajata pozitivni konstanti  $C$  in  $\gamma$ , kjer velja:

$$\forall \phi \in C(-\tau_m, 0, \mathbb{R}^n) \|x_t(\phi)\|_s \leq C e^{-\gamma t} \|\phi\|_s.$$

Kljub temu, da je karakteristična enačba (2.6) transcendentna in ima neskončno korenov, pa ima nekaj uporabnih in zanimivih lastnosti, ki bodo nepogrešljive v naslednjih poglavjih.

**Predpostavka 2.1** [20] če obstaja zaporedje karakterističnih korenov  $s_k$   $k \geq 1$  sistema (2.6) tako, da velja:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |s_k| \rightarrow +\infty,$$

potem velja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Re(s_k) \rightarrow -\infty.$$

**Predpostavka 2.2** [20] v določenem vertikalnem pasu kompleksne ravnine se nahaja samo končno število karakterističnih korenov. Pas določa:

$$, \text{ kjer } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ in } \alpha < \beta.$$

Obstaja takšno število  $\gamma \in \mathbb{R}$ , da vsi karakteristični koreni pripadajo levi kompleksni ravnini, ki je definirana:

$$s \in \mathbb{C} : \Re(s) < \gamma.$$

Ta rezultat je možno izboljšati v smislu zoženja območja nahajanja korenov, ki ga podaja naslednja predpostavka.

**Predpostavka 2.3** [20] Če je  $s_i$  karakteristični koren (2.6) potem velja:

$$|s_i| \leq \|A_0\|_2 + \sum_{i=1}^m \|A_i\|_2 e^{-\Re(s)\tau_i} \quad (2.9)$$

**Dokaz.** Izraz  $\Delta(s) = 0$  je ekvivalenten izrazu:

$$s_i \in \sigma\left(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i e^{-s\tau_i}\right),$$

če izrazimo argument spekter  $\sigma(\cdot)$ <sup>9</sup> v obliki matrike to zapišemo kot:

$$|s_i| \leq \left\| A_0 + \sum_{i=1}^m A_i e^{-s\tau_i} \right\|_2,$$

iz tega izraza sledi (2.9) neposredno.  $\square$

Pri naslednjih predpostavkah bodo predstavljene lastnosti zveznosti pomikov karakterističnih korenov in posledično spektralne abscise. V odvisnosti od variacij sistemskih matrik in zakasnitev se koreni pomikajo zvezno.

**Predpostavka 2.4** [20] Naj bo  $s_0$  karakteristični koren sistema (2.6) z večkratnostjo  $k$ .

Obstaja takšna pozitivna konstanta  $\bar{\varepsilon} > 0$ , da za vse pozitivne  $\varepsilon > 0$ , ki izpolnjujejo  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ , obstaja takšno pozitivno število  $\delta > 0$ , da ima:

---

<sup>9</sup> Z izrazom  $\sigma(\cdot)$  zapišemo spekter poljubne matrike, npr.  $\sigma(A)$  predstavlja spekter matrike  $A$  oz. množico lastnih vrednosti  $\sigma(A) = \{s_1, \dots, s_i, \dots, s_n\}$  matrike  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .



$$\Delta(s; \vec{\tau} + \delta\vec{\tau}, A_0 + \delta A_0, \dots, A_m + \delta A_m),$$

za parametre:

$$\delta\vec{\tau} \in \mathbb{R}^m, \quad \|\delta\vec{\tau}\| < \delta, \quad \vec{\tau} + \delta\vec{\tau} \geq 0,$$

$$\delta A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \|\delta A_k\|_2 < \delta, \quad k=0, \dots, m,$$

natančno  $k$  ničel v disku  $s \in \mathbb{C} : |s - s_0| < \varepsilon$ .

V zgornjem izrazu  $\Delta$  predstavlja karakteristično matriko od spremenljivke  $s$ . Parametri, ki jih perturbiramo so v izrazu za karakteristično matriko navedeni desno od podpičja.

Spektralno absciso sistema (2.6) definiramo kot:

$$\alpha(\vec{\tau}, A_0, \dots, A_m) := \sup \Re(s) : \det \Delta(s; A_0, \dots, A_m) = 0 \quad (2.10)$$

Kot izhaja iz **Predpostavka 2.2** spektralna abscisa vedno obstaja in je končna. Podobno vedno obstaja skrajno desni karakteristični koren za katerega velja  $\Re(\lambda) = \alpha$ . Tako lahko v izrazu (2.10) supremum zamenjamo za maximum in izrazimo pogoj stabilnosti glede na lego realne komponente skrajno desnega karakterističnega korena:

$$\alpha(\vec{\tau}, A_0, \dots, A_m) < 0$$

V zvezi z zveznostjo spektralne abscise oz. skrajno desnega karakterističnega pola glede na **Predpostavka 2.2**, **Predpostavka 2.3** in **Predpostavka 2.4** dobimo naslednji rezultat.

**Teorem 2.1** [20] funkcija spektralne abscise  $\alpha : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^{n \times n \times (m+1)} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\vec{\tau}, A_0, \dots, A_m) \rightarrow \alpha(\vec{\tau}, A_0, \dots, A_m),$$

je zvezna.

Spektralna abscisa ostane zvezna tudi v primeru, ko sistem z zakasnitvami postane sistem brez zakasnitev. To se lahko zgodi, če je vrednost vektorja zakasnitev nič ali v primeru ničelnih vrednosti matrik zakasnitev.

**Teorem 2.2** [20] Če perturbiramo vrednosti sistemskih matrik  $A_0, \dots, A_m$  oz. zakasnitev  $\tau_1, \dots, \tau_m$  vplivamo na spremembo karakterističnih korenov in s tem na stabilnost sistema (2.6), ko se vsaj eden izmed njih premakne na imaginarno os kompleksne ravnine.

Zgoraj omenjeni lastnosti (**Teorem 2.1** in **Teorem 2.2**) omogočata določitev stabilnih območij glede na različne parametre sistema. Tako je mogoče npr z iterativnim računanjem spektralne abscise ob spreminjanju zakasnitve določiti največji interval zakasnitev za katere je sistem stabilen.

Naslednje lastnosti omogočajo skaliranje ter pomik koordinatnega izhodišča sistema (2.6) [21].

**Predpostavka 2.5** [20] Če sistem (2.6) skaliramo s poljubno časovno konstanto  $\tau_s$ , so lastne vrednosti skaliranega sistema prav tako skalirane za časovno konstanto  $\tau_s$  v primerjavi s prvotnim sistemom. Torej velja

$$\sigma\left(A_0 + \tau_s \sum_{i=1}^m A_i e^{-s\tau_i}\right) = \frac{\sigma\left(A_0 \tau_s + \tau_s \sum_{i=1}^m A_i e^{-\frac{s\tau_i}{\tau_s}}\right)}{\tau_s}, \quad (2.11)$$

**Predpostavka 2.6** [20] Če pri sistemu (2.6) premaknemo koordinatno izhodišče kompleksne ravnine z zamenjavo  $s \rightarrow s - r$ , se skladno s tem premaknejo tudi koreni sistema. Velja

$$\sigma\left(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i e^{-(s-r)\tau_i}\right) = \sigma\left(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i e^{-s\tau_i}\right) + r, \quad (2.12)$$

pri čemer je karakteristična matrika sistema s pomaknjenim koordinatnim izhodiščem,

$$\Delta_r(s) = (s - r)I - A_0 \tau_s - \tau_s \sum_{i=1}^m A_i e^{-\frac{(s-r)\tau_i}{\tau_s}} \quad (2.13)$$

### 2.3 Sistemi z variabilnimi zakasnitvami tipa RFDE

Analizo sistemov z variabilnimi zakasnitvami opravljamo v smislu določitve določenih struktur LMI-jev pri katerih se ugotavlja pozitivna oz. negativna definitnost. Če so določeni pogoji izpolnjeni potem je sistem stabilen oz. robustno stabilen za vse zakasnitve ali le za določen interval zakasnitev. Upoštevati je mogoče tudi hitrost spreminjanja posameznih zakasnitev. Določitev posameznih LMI-jev ja dokaj zahtevno opravilo. Za določitev LMI-jev se uporabljata dve metodi in sicer Lyapunovi funkcionali in metoda Razumikhin [16], [4]. V tem odseku ne bomo podali natančnih postopkov določitev posameznih LMI-jev, saj so le ti zelo dobro predstavljeni v [16]. Osnovna teorija Lyapunovih funkcionalov in funkcij Razumikhin je podrobno zastopana v [4]. Predstavili bomo le končne rezultate oz. LMI-je, ki jih je moč neposredno realizirati v programskem paketu Matlab in tako preveriti stabilnost oz. robustno stabilnost obravnavanega sistema [16]. Določitev posameznih intervalov stabilnosti oz. robustne stabilnosti je računsko zelo zahteven postopek, saj je potrebno iterativno izračunavati posamezen sklop LMI-jev pri čemer spreminjamo posamezen parameter za katerega želimo določiti največji možni interval stabilnosti.

RFDE z variabilnimi zakasnitvami je določen:

$$\dot{x} = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i(t)) , \quad (2.14)$$

kjer so  $\tau_i(t)$  zvezne časovno spremenljive funkcije, začetna vrednost  $\phi(t)$  je zvezna in odvedljiva funkcija, kjer  $t \in [-\tau_m, 0]$ .

Sledijo različni pogoji stabilnosti za sistem (2.14) v primeru za sisteme z eno variabilno zakasnitvijo ( $m=1$ ), ki bodo povezani z naslednjima pogojema [16]:

$$0 \leq \tau_1(t) \leq h \quad (2.15)$$

$$\dot{\tau}_1(t) \leq \mu \quad (2.16)$$

**Teorem 2.3** [16] Sistem (2.14) z eno časovno variabilno zakasnitvijo  $\tau_1(t)$ , ki izpolnjuje pogoj (2.15) in (2.16), je asimptotično stabilen, če obstajajo matrike  $P > 0$ ,  $Q \geq 0$ ,  $Z > 0$

in  $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ * & X_{22} \end{bmatrix} \geq 0$ , in poljubne matrike ustreznih dimenzij  $N_1$  in  $N_2$  tako, da veljajo

naslednji LMI-ji:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & hA_0^T Z \\ * & \phi_{22} & hA_1^T Z \\ * & * & -hZ \end{bmatrix} < 0, \quad (2.17)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{11} & N_1 \\ * & X_{11} & N_2 \\ * & * & Z \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.18)$$

kjer so:

$$\phi_{11} = PA_0 + A_0^T P + N_1 + N_1^T + Q + hX_{11},$$

$$\phi_{12} = PA_1 - N_1 + N_2^T + hX_{12},$$

$$\phi_{22} = -N_2 - N_2^T - (1 - \mu)Q + hX_{22}.$$

**Teorem 2.3** [16] predstavlja pogoj stabilnosti, ki je odvisen od vrednosti zakasnitve in od odvoda zakasnitve. V primeru, da upoštevamo  $\mu=0$  dobimo pogoj stabilnosti, ki je neodvisen od zakasnitve in tako podaja stabilnost neodvisno od zakasnitve.

**Predpostavka 2.7** [16] Sistem (2.14) z eno časovno variabilno zakasnitvijo  $\tau_1(t)$ , ki izpolnjuje pogoj (2.15) in (2.16), ter velja  $\mu=0$ , je asimptotično stabilen, če obstajajo matrike  $P > 0$ ,  $Q \geq 0$  in velja naslednji LMI:

$$\begin{bmatrix} PA_0 + A_0^T & PA_1 \\ * & -Q \end{bmatrix} < 0$$

S tem dobimo pogoj stabilnosti, ki je neodvisen od vrednosti zakasnitve. To pomeni, če je velja zgornji LMI, je sistem stabilen za vse zakasnitve. Pogoj odvisen od zakasnitve in neodvisen od odvoda zakasnitve dobimo, če upoštevamo  $Q = 0$ .

**Predpostavka 2.8** [16] Sistem (2.14) z eno časovno variabilno zakasnitvijo  $\tau_1(t)$ , ki izpolnjuje pogoj (2.15) (ampak ne nujno pogoja (2.16)), je asimptotično stabilen, če

obstajajo matrike  $P > 0$ ,  $Z > 0$  in  $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ * & X_{22} \end{bmatrix} \geq 0$ , in poljubne matrike ustreznih dimenzij  $N_1$  in  $N_2$  tako, da veljata LMI (2.18) in LMI:

$$\phi = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{11} & \phi_{12} & hA_0^T Z \\ * & \bar{\phi}_{22} & hA_1^T Z \\ * & * & -hZ \end{bmatrix} < 0, \quad (2.19)$$

kjer sta:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{11} &= PA_0 + A_0^T P + N_1 + N_1^T + hX_{11}, \\ \bar{\phi}_{22} &= -N_1 + N_2^T + hX_{22}. \end{aligned}$$

Sledeč pogoj temelji tudi na obravnavi robustnosti parametrov sistemskih matrik. Robustnost je obravnavana v obliki časovno variabilnih strukturiranih odstopanj. Z uporabo aditivnega modela dobi sistem (2.14) naslednjo obliko:

$$\dot{x} = (A_0 + \Delta A_0(t))x \quad t + \sum_{i=1}^m (A_i + \Delta A_i)x \quad t - \tau_i(t), \quad (2.20)$$

kjer negotovosti zapišemo:

$$\Delta A_0(t) \dots \Delta A_m(t) = DF(t) E_{a_0} \dots E_{a_m}, \quad F^T(t)F(t) \leq I, \quad \forall t,$$

kjer so  $D, E_{a_0}, \dots, E_{a_m}$  konstantne matrike ustreznih dimenzij. Sledi pogoj za sisteme z eno časovno zakasnitvijo ( $m = 1$ ).

**Teorem 2.4** [16] Sistem (2.20) z eno časovno variabilno zakasnitvijo  $\tau_1(t)$ , ki izpolnjuje pogoj (2.15) in (2.16), je asimptotično stabilen, če obstajajo matrike  $P > 0$ ,  $Q \geq 0$ ,  $Z > 0$

in  $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ * & X_{22} \end{bmatrix} \geq 0$ , in poljubne matrike ustreznih dimenzij  $N_1$  in  $N_2$ , ter skalar  $\lambda > 0$

tako, da velja LMI (2.18) in naslednji LMI:

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} + \lambda E_{a_0}^T E_{a_0} & \phi_{12} + \lambda E_{a_0}^T E_{a_1} & hA_0^T Z & PD \\ * & \phi_{22} + \lambda E_{a_1}^T E_{a_1} & hA_1^T Z & 0 \\ * & * & -hZ & hZD \\ * & * & * & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.21)$$

kjer so  $\phi_{11}, \phi_{12}$  in  $\phi_{22}$  enaki kot v (2.17).

Podobno kot v primeru pogojev, kjer vpliv odstopanj ni bil upoštevan **Teorem 2.4** predstavlja pogoj, ki je odvisen od zakasnitve in odvoda zakasnitve. Kar pomeni, da mora biti omejena tako zakasnitev kot odvod zakasnitve. Pogoj odvisen od zakasnitve in neodvisen od pogoja lahko izrazimo z upoštevanjem  $Q = 0$ .

**Predpostavka 2.9** [16] Sistem (2.20) z eno časovno variabilno zakasnitvijo  $\tau_1(t)$ , ki izpolnjuje pogoj (2.15) in (2.16), je asimptotično stabilen, če obstajajo matrike  $P > 0$ ,

$Z > 0$  in  $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ * & X_{22} \end{bmatrix} \geq 0$ , in poljubne matrike ustreznih dimenzij  $N_1$  in  $N_2$ , ter skalar

$\lambda > 0$  tako, da velja LMI (2.18) in naslednji LMI:

$$\begin{bmatrix} \bar{\phi}_{11} + \lambda E_{a0}^T E_{a0} & \phi_{12} + \lambda E_{a0}^T E_{a1} & hA_0^T Z & PD \\ * & \bar{\phi}_{22} + \lambda E_{a1}^T E_{a1} & hA_1^T Z & 0 \\ * & * & -hZ & hZD \\ * & * & * & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.22)$$

kjer je  $\phi_{12}$  enak kot v (2.17) in  $\bar{\phi}_{11}, \bar{\phi}_{22}$  kot v (2.19).

Sledijo pogoji stabilnosti za sistem (2.14) v primeru za sisteme z dvema variabilnima zakasnitvama ( $m = 2$ ).

**Teorem 2.5** [16] Sistem (2.14) z dvema konstantnima zakasnitvama  $\tau_1(t)$  in  $\tau_2(t)$  je asimptotično stabilen, če obstajajo matrike  $P > 0$ ,  $Q_i \geq 0, i = 1, 2$ ,  $W_j > 0$ ,  $X_{jj} > 0, Y_{jj}, Z_{jj}, j = 1, 2, 3$ , ter poljubne matrike ustreznih dimenzij  $N_i, S_i, M_i, X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}, i = 1, 2, 3, i < j \leq 3$ , da veljajo naslednji LMI-ji:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ * & \phi_{22} & \phi_{23} \\ * & * & \phi_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.23)$$

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & N_1 \\ & X_{22} & X_{23} & N_2 \\ & & X_{33} & N_3 \\ & & & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.24)$$

$$\psi_2 = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & S_1 \\ & Y_{22} & Y_{23} & S_2 \\ & & Y_{33} & S_3 \\ & & & W_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.25)$$

$$\psi_3 = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & kM_1 \\ & Z_{22} & Z_{23} & kM_2 \\ & & Z_{33} & kM_3 \\ & & & W_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.26)$$

kjer je:

$$k = \begin{cases} 1, & \text{if } \tau_1 \geq \tau_2 \\ -1, & \text{if } \tau_1 < \tau_2 \end{cases}$$

in

$$\phi_{11} = PA_0 + A_0^T P + Q_1 + Q_2 + N_1 + N_1^T + S_1 + S_1^T + A_0^T HA_0 + h_1 X_{11} + h_2 Y_{11} + |h_1 - h_2| Z_{11},$$

$$\phi_{12} = PA_1 - N_1 + N_2^T + S_2^T - M_1 + A_0^T HA_1 + h_1 X_{12} + h_2 Y_{12} + |h_1 - h_2| Z_{12},$$

$$\phi_{13} = PA_2 + N_3^T + S_3^T - S_1 + M_1 + A_0^T HA_2 + h_1 X_{13} + h_2 Y_{13} + |h_1 - h_2| Z_{13},$$

$$\phi_{22} = -Q_1 - N_2 - N_2^T - M_2 - M_2^T + A_1^T HA_1 + h_1 X_{22} + h_2 Y_{22} + |h_1 - h_2| Z_{22},$$

$$\phi_{23} = -N_3^T - S_2 + M_2 - M_3^T + A_1^T HA_2 + h_1 X_{23} + h_2 Y_{23} + |h_1 - h_2| Z_{23},$$

$$\phi_{33} = -Q_2 - S_3 - S_3^T + M_3 + M_3^T + A_2^T HA_2 + h_1 X_{33} + h_2 Y_{33} + |h_1 - h_2| Z_{33},$$

$$H = h_1 W_1 + h_2 W_2 + |h_1 - h_2| W_3,$$

**Teorem 2.6** [16] Sistem (2.20) z dvema konstantnima zakasnitvama  $\tau_1(t)$  in  $\tau_2(t)$  je asimptotično stabilen, če obstajajo matrike  $P > 0$ ,  $Q_i \geq 0, i=1,2$ ,  $W_j > 0$ ,  $X_{jj} > 0, Y_{jj}, Z_{jj}, j=1,2,3$ , poljubne matrike ustreznih dimenzij  $N_i, S_i, M_i, X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}, i=1,2,3, i < j \leq 3$ , ter skalar  $\lambda > 0$  tako, da veljajo LMI-ji (2.24), (2.25) in (2.26) ter naslednji LMI:

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_{11} & \hat{\phi}_{12} & \hat{\phi}_{13} & A_0^T H & PD \\ * & \hat{\phi}_{22} & \hat{\phi}_{23} & A_1^T H & 0 \\ * & * & \hat{\phi}_{33} & A_2^T H & 0 \\ * & * & * & -H & D \\ * & * & * & * & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.27)$$

kjer so:

$$\hat{\phi}_{11} = PA_0 + A_0^T P + Q_1 + Q_2 + N_1 + N_1^T + S_1 + S_1^T + \lambda E_0^T E_0 + h_1 X_{11} + h_2 Y_{11} + |h_1 - h_2| Z_{11},$$

$$\hat{\phi}_{12} = PA_1 - N_1 + N_2^T + S_2^T - M_1 + \lambda E_0^T E_1 + h_1 X_{12} + h_2 Y_{12} + |h_1 - h_2| Z_{12},$$

$$\hat{\phi}_{13} = PA_2 + N_3^T + S_3^T - S_1 + M_1 + \lambda E_0^T E_2 + h_1 X_{13} + h_2 Y_{13} + |h_1 - h_2| Z_{13},$$

$$\hat{\phi}_{22} = -Q_1 - N_2 - N_2^T - M_2 - M_2^T + \lambda E_1^T E_1 + h_1 X_{22} + h_2 Y_{22} + |h_1 - h_2| Z_{22},$$

$$\hat{\phi}_{23} = -N_3^T - S_2 + M_2 - M_3^T + \lambda E_1^T E_2 + h_1 X_{23} + h_2 Y_{23} + |h_1 - h_2| Z_{23},$$

$$\hat{\phi}_{33} = -Q_2 - S_3 - S_3^T + M_3 + M_3^T + \lambda E_2^T E_2 + h_1 X_{33} + h_2 Y_{33} + |h_1 - h_2| Z_{33},$$

$$H = h_1 W_1 + h_2 W_2 + |h_1 - h_2| W_3,$$

**Teorem 2.5** podaja pogoj stabilnosti odvisen od zakasnitev, kjer sta zakasnitvi konstantni. Pogoj se, da razširiti za več zakasnitev, ki je podrobneje predstavljen v [16]. Glede na to, da ti pogoji predpostavljajo konstantne zakasnitve, je za takšne sisteme, kot bomo ugotovili v prihodnjih poglavjih, veliko boljše uporabiti metode za izračun lastnih vrednosti sistema, saj so računsko manj zahtevne in tako primernejše za analizo takšnih sistemov. Bolj zanimiv je **Teorem 2.6**, ki v pogoj stabilnosti vključuje analizo robustnosti s časovno variabilnimi sistemskimi matrikami.



### 3 Robustnost sistemov z zakasnitvami

Vrednotenje robustnosti sistemov sploh v smislu robustne stabilnosti je zelo pomembno, saj zagotovi, da bo sistem ostal stabilen tudi ob določenih zunanjih neželenih vplivih, ki se lahko odražajo v obliki najrazličnejših motenj oz. šumov, daje sistemu dodatno vrednost. Razne motnje, ki vplivajo na sistem pa ni edina oblika negotovosti, ki so prisotne v sistemu, saj zaradi ne dovolj natančnega poznavanja sistema pride do poenostavitve pri modeliranju sistema oz. procesov. Tako poznamo različne metode s katerimi lahko opišemo in vrednotimo robustnost sistema. Strukturna odstopanja obravnavajo točno določen model ali strukturo sistema, kjer je moč predpostaviti določena odstopanja modela. Nadalje strukturna odstopanja razdelimo na strukturirana, kjer lahko predpostavimo točno določeno strukturo odstopanja oz. predpostavimo omejeno negotovost točno določenih parametrov v sistemu; ali nestrukturirana, kjer lahko predpostavimo odstopanja posameznih sistemskih matrik [20]. Nestrukturna odstopanja niso povezana s samo strukturo sistema, temveč jih tretiramo kot posledico zanemarjene strukture ali nepopolnega opisa sistema. Tudi to vrsto odstopanj delimo na strukturirana in nestrukturirana. Prva zajemajo informacijo o položaju negotovosti v sistemu, druga obravnavajo le celoten iznos odstopanja v frekvenčnem prostoru. Nestrukturirana odstopanja opišemo z različnimi modeli odstopanj [42], [41]. Najbolj razširjena sta modela, ki ustrezata absolutnemu oz. relativnemu pogrešku absolutne vrednosti sistema v frekvenčnem prostoru.

#### 3.1 Strukturna odstopanja

Strukturna odstopanja so za sisteme z zakasnitvami vpeljana s pomočjo teorije psevdospektra [82]. Psevdospekter lahko razumemo kot območja v kompleksni ravnini kamor se premaknejo lastne vrednosti sistema oz. karakteristični koreni pri določenih omejenih odstopanjih. Tako se postavi vprašanje vrednotenja robustne stabilnosti sistema in sicer mere do nestabilnosti sistema oz. določitve največjega možnega omejenega odstopanja, ki povzroči pomik vsaj ene lastne vrednosti na imaginarno os. To omogoča

stabilnostni radij. Če kompleksno ravnino  $\mathbb{C}$  razdelimo v dve območji oz. polravnini  $\mathbb{C}_d$ , ki predstavlja želeno območje in  $\mathbb{C}_u$ , ki predstavlja neželjeno območje nahajanja lastnih vrednosti sistema, stabilnostni radij predstavimo kot:

$$r_{\mathbb{C}}(F; \mathbb{C}_d, \|\cdot\|_{glob}) := \inf_{\lambda \in \mathbb{C}_u} \inf_{\varepsilon > 0} \left\{ \varepsilon : \det \left( \sum_{i=0}^m (A_i + \delta A_i) p_i(s) \right) = 0 \right\}$$

kjer je  $\Delta = (\delta A_0, \dots, \delta A_m) \in \mathbb{C}^{n \times n \times (m+1)}$ ,  $\|\Delta_{glob}\| < \varepsilon$  in  $F$  predstavlja karakteristično matriko, ki se seveda spreminja v odvisnosti od parametrov sistema, odstopanj in strukture odstopanj,  $p_i(s)$  je nelinearna funkcija. Odstopanja so omejena z globalno normo. Zgornji izraz predstavlja normo najmanjšega odstopanja, ki povzroči, da lastne vrednosti sistema prestopijo prag območja  $\mathbb{C}_d$ . [20]

### 3.1.1 Nestrukturirana odstopanja

Nestrukturirana odstopanja opisujejo odstopanja posameznih sistemskih matrik. Zanima nas največje možno odstopanje, ki ohranja stabilnost sistema. Sistem z upoštevanjem odstopanj posameznih matrik zapišemo: [20]

$$\det \left\{ \sum_{i=0}^m A_i + \delta A_i \quad p_i \quad s \right\} = 0 \quad (3.1)$$

Odstopanja definiramo:

$$\Delta := (\delta A_0, \dots, \delta A_m), \Delta \in \mathbb{C}^{n \times n \times (m+1)} \quad (3.2)$$

S vpeljavo uteži  $w_i \in \mathbb{R}_+ \cup \infty$ ,  $i = 0, \dots, m$  dobimo tri različne globalne mere odstopanj:

$$\|\Delta\|_{glob} := \left\| w_0 \delta A_0, \dots, w_m \delta A_m \right\|_p \quad (3.3)$$

$$\|\Delta\|_{glob} := \left\| \begin{bmatrix} w_0 \delta A_0, \\ \dots \\ w_m \delta A_m \end{bmatrix} \right\|_p, p \in \mathbb{N} \cup +\infty \quad (3.4)$$

$$\|\Delta\|_{glob} := \left\| \begin{bmatrix} w_0 \delta A_{0p_1} \\ \dots \\ w_m \delta A_{mp_1} \end{bmatrix} \right\|_{p_2}, p_1, p_2 \in \mathbb{N}_0 \cup +\infty \quad (3.5)$$

$\|\Delta\|_{glob}$  je matrika posameznih matričnih odstopanj. V primeru, da postavimo  $\omega_j = \infty$ , potem nobeno matrično odstopanje  $A_j$  ni dovoljeno. S posameznimi utežmi lahko poljubno utežimo doprinose posameznih matričnih odstopanj oz. s tem poudarimo vplive določenih matričnih odstopanj v primerjavi z drugimi.

Vpliv posameznih odstopanj na spekter zapišemo v obliki funkcije [20]:

**Teorem 3.1** [20] za mere odstopanj (3.3), (3.4) in (3.5) zapišemo funkcijo:

$$f(s; \|\cdot\|_{glob}) = \begin{cases} \left\| \left( \sum_{i=0}^m A_i p_i(s) \right)^{-1} \right\|_{\alpha} \cdot \|w(s)\|_{\beta}, & s \notin \Lambda(F) \\ +\infty & , s \in \Lambda(F) \end{cases}, \quad (3.6)$$

pri čem je  $w(s) = \begin{bmatrix} \frac{p_0(s)}{w_0} \\ \vdots \\ \frac{p_m(s)}{w_m} \end{bmatrix}$  in  $\alpha = p, \beta = p$  za (3.3),  $\alpha = p, \beta = q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  za (3.4) ter

$\alpha = p_1, \beta = q_2, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} = 1$  za mero (3.5).

**Teorem 3.1** je zapisan v splošni obliki, kje je  $p_i$  poljubna funkcija. V primeru sistemov z zakasnitvami so te funkcije eksponentne funkcije Laplace-ove spremenljivke in ustrezne zakasnitve. Torej lahko zapišemo [20] in [47]:

**Teorem 3.2** [20] psevdospekter za sisteme z zakasnitvami z upoštevanjem metrike odstopanj (3.3), (3.4) in (3.5) zapišemo kot:

$$\Lambda_{\varepsilon}(F; \|\cdot\|_{glob}) = \Lambda(F) \cup \left\{ s \mid \|F(s)^{-1}\|_{\alpha} \|w(s)\|_{\beta} > \varepsilon^{-1} \right\}, \quad (3.7)$$

kjer je  $\Lambda(F)$  spekter originalnega sistema brez upoštevanja odstopanj,  $F$  je karakteristična matrika sistema z zakasnitvami:

$$F(s) = sI - A_0 - \sum_{i=0}^m A_i e^{-s\tau_i}. \quad (3.8)$$

Posledično stabilnostni radij zapišemo:

$$r_{\mathbb{C}^-} \|F\|_{glob} = \left( \left( \sum_{i=0}^m w_i^{-\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \sup_{\omega \geq 0} \|F(j\omega)^{-1}\|_{\alpha} \right)^{-1} \quad (3.9)$$

kjer je vektor uteži  $w(s) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-s\tau_1} & \dots & e^{-s\tau_m} \end{bmatrix}^T$ .

Vpliv posameznih uteži se odraža na naslednji način:

- I. Karakteristični koreni sistema v desni polravnini kompleksne ravnine so bolj občutljivi na odstopanja ne zakasnjene matrike  $A_0$ .
- II. Karakteristični koreni, ki se nahajajo v levi polravnini so bolj občutljivi na odstopanja zakasnenih matrik  $A_i, i=1, \dots, m$ .
- III. Presečišče psevdospektra z imaginarno osjo je neobčutljivo od uteži, posledično je tudi stabilnostni radij neodvisen od uteži, saj velja:

$$\|w(\sigma + j\omega)\|_{\beta} = \left\| \begin{bmatrix} 1 & e^{-\sigma\tau_1} & \dots & e^{-\sigma\tau_m} \end{bmatrix}^T \right\|_{\beta}, \forall \sigma, \omega \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

### 3.1.2 Strukturirana odstopanja

V primeru obravnave strukturiranih odstopanj je moč pri posameznih matričnih odstopanjih upoštevati določeno strukturo posameznih odstopanj. Znotraj posamezne matrike lahko odstopanja opišemo s poljubnimi kombinacijami posameznih parametrov. Posamezne kombinacije odstopanj opišemo z naslednjim izrazom [20] in [45]:

$$\delta F \ s := \sum_{j=0}^f D_j \ s \ \Delta_j E_j \ s + \sum_{j=0}^s d_j G_j \ s \ H_j \ s, \quad (3.11)$$

kjer je množica odstopanj definiran kot:

$$\Delta := \text{diag} \ \Delta_0, \dots, \Delta_f, d_0 I_{m_0}, \dots, d_s I_{m_s} : \Delta_i \in \mathbb{C}^{k_i \times l_i}, d_j \in \mathbb{C}; 0 \leq i \leq f, 0 \leq j \leq s, \quad (3.12)$$

kjer so posamezna odstopanja omejena z globalno normo:  $\|\Delta_{glob}\| = \max \ \|\Delta_0\|_2, \dots, \|\Delta_f\|_2, |d_0|, \dots, |d_s|$ . Odstopanja  $\Delta_j$  določajo nestrukturirana odstopanja, ki jih opišemo z diagonalnima matrikama  $D_j$  in  $E_j$ . Strukturirana parametrična odstopanja, ki jih obravnavamo v obliki absolutne vrednosti odstopanja  $d_j$  posameznega parametra ustrezne systemske matrike, pa lahko določimo z matrikama  $G_j$  in

$H_j$ . Tako z upoštevanjem strukture odstopanj (3.11) obravnavamo tako strukturirana kot nestrukturirana odstopanja.

Izračun psevdospektra za sisteme z zakasnitvami ob upoštevanju določene strukture odstopanj pri posameznih matrikah izvedemo s pomočjo naslednjega rezultata:

**Teorem 3.3** [20] Predpostavimo karakteristično matriko (3.8) z aditivnim odstopanjem (3.11) z določeno množico odstopanj (3.12), psevdospekter je določen z izrazom:

$$\Lambda_\varepsilon(F; \Delta) = \Lambda(F) \cup \{ \lambda \in \mathbb{C} : \mu_\Delta(M(s) - \varepsilon^{-1} N(s)) > \varepsilon^{-1} \}, \quad (3.13)$$

kjer je  $\mu_\Delta(\cdot)$  termin za strukturirano singularno vrednost, ki jo izračunamo v Matlabu s funkcijo *mussv*. Z matrikama  $M$  in  $N$  lahko določimo poljubno strukturo odstopanj:

$$\begin{aligned} M(s) &:= \begin{bmatrix} E_1(s)^T & \dots & E_f(s)^T & H_1(s)^T & \dots & H_s(s)^T \end{bmatrix}^T, \\ N(s) &:= \begin{bmatrix} D_1(s) & \dots & D_f(s) & G_1(s) & \dots & G_s(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

ter stabilnostni radij, ki določa največje odstopanje, ki poruši stabilnost sistema:

$$r_{\mathbb{C}; F; \mathbb{C}_-, \Delta} = \left( \sup_{\omega \geq 0} \mu_\Delta \left( M(j\omega) - F(j\omega)^{-1} N(j\omega) \right) \right)^{-1} \quad (3.15)$$

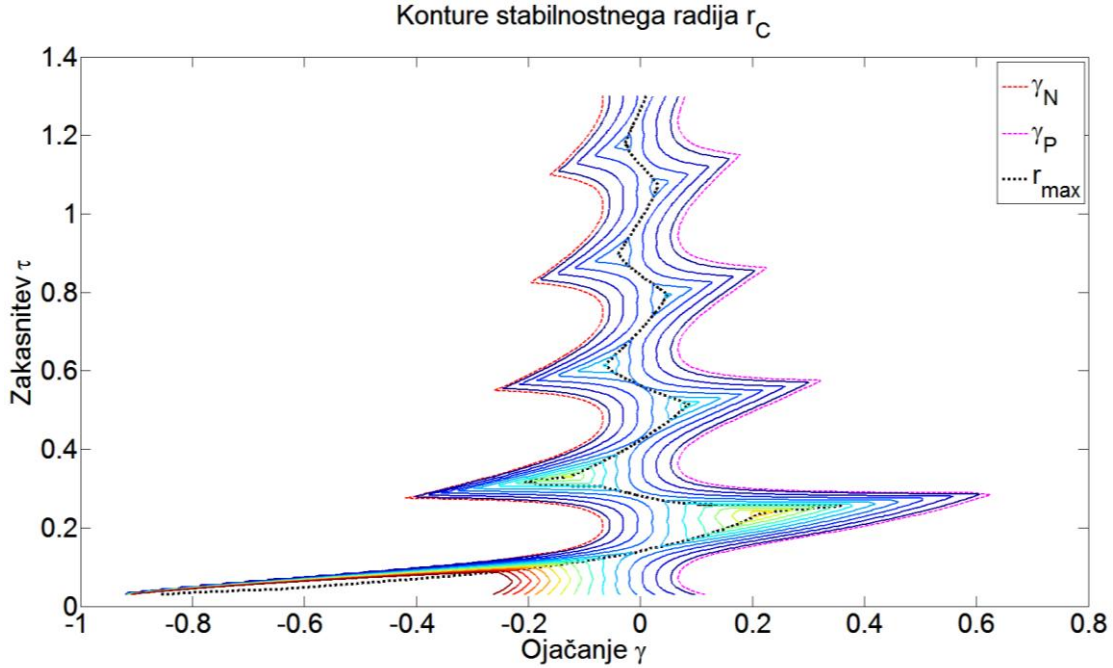
Predstavljen model odstopanj bomo upodobili s primerom izračuna največjega odstopanja parametrov na določenih mestih v sistemskih matrikah za model polprevodniškega laserja z optoelektronsko povratno povezavo, ki ga bomo obravnavali v prihodnjih poglavjih.

**Primer 3.1** za model polprevodniškega laserja z optoelektronsko povratno povezavo z naslednjim modelom [83], ki opisuje lokalno stabilnost:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ -\frac{c^2}{\varepsilon} & -c^2 + 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma \frac{c^2}{\varepsilon} & 0 \end{bmatrix} x(t - \tau),$$

in naslednjo strukturo odstopanja posameznih skupin parametrov na določenih mestih v sistemskih matrikah:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1 \pm \delta d_0}{\varepsilon} \\ -\frac{c^2}{\varepsilon} \pm \delta d_1 & -c^2 + 1 \pm \delta d_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma \frac{c^2}{\varepsilon} \pm \delta d_3 & 0 \end{bmatrix} x(t - \tau).$$



**Slika 3.1** Konture stabilnostnega radija za izračunane vrednosti  $r_C = 0.1, 0.3, \dots, 3$ ; območje stabilnosti obdajajo krivulji  $\gamma_N$  in  $\gamma_P$ ; črna pikčasta krivulja  $r_{\max}$  povezuje maksimalne vrednosti stabilnostnega radija.

Največje omejeno odstopanje je določeno z:  $d = \max |d_0|, |d_1|, |d_2|, |d_3| < r_C$ . Na podlagi (3.11) zapišemo strukturo odstopanj  $\delta F = \delta F_0 + \delta F_1 + \delta F_2 + \delta F_3$  za vsak  $d_j, j = 0, \dots, 3$  posebej:

$$\delta F_0 = \delta d_0 G_0 H_0 = \delta d_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\delta F_1 = \delta d_1 G_1 H_1 = \delta d_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\delta F_2 = \delta d_2 G_2 H_2 = \delta d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\delta F_3 \quad j\omega = \delta d_3 G_3 H_3 = \delta d_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & e^{-j\omega\tau_k} \end{matrix}$$

in tako določimo še matriki  $M$  in  $N$ :

$$M(j\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e^{-j\omega\tau_k} & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

S pomočjo matrik  $M$  in  $N$  ter izraza (3.15) izračunamo  $r_c$  oz. največjo absolutno vrednost posameznih odstopanj, ki destabilizirajo sistem (Slika 3.1).

## 3.2 Nestrukturna odstopanja

V tem odseku se bomo posvetili nestrukturiranim odstopanjem, ki jih opišemo z različnimi modeli. Posamezni modeli opisujejo različne možnosti odstopanja objekta v frekvenčnem prostoru. Podali bomo tudi pogoje za robustno stabilnost ob upoštevanju določenih modelov odstopanj [42], [41].

### 3.2.1 Multiplikativno odstopanje

Multiplikativno odstopanje izrazimo kot vhodno  $\Delta W_M = (P_\Delta - P_0)P_0^{-1}$  oz. izhodno  $\Delta W_M = P_0^{-1}(P_\Delta - P_0)$ , kjer je  $P_0$  nominalni model,  $P_\Delta$  je model z odstopanjem. Model objekta z multiplikativnim odstopanjem tako zapišemo:

$$P_\Delta = P_0(1 + \Delta W_M) \quad (3.16)$$

Izraz (3.16) lahko razumemo kot obravnavo nominalnega modela z nekim dopustnim relativnim odstopanjem amplitude frekvenčne karakteristike. Pogoj robustne stabilnosti sistema z obravnavanim odstopanjem lahko strnemo [41], [43]:

**Teorem 3.4** [41] Sistem z multiplikativnim modelom odstopanja, kjer velja, da je zaprtizančni sistem z nominalnim modelom stabilen, je robustno stabilen za vse  $\|\Delta\|_\infty < 1$ , če je izpolnjen pogoj:

$$\|\Delta W_M T\|_\infty < 1, \quad (3.17)$$

kjer je  $T = P_0 C(I + P_0 C)^{-1}$  komplementarna občutljivost zaprtizančnega sistema, kjer je  $C$  regulator. Robustnost sistema z multiplikativnim modelom odstopanja je povezana s

komplementarno občutljivostjo. Manjša kot je norma  $T$  večje je multiplikativno odstopanje.  $W_M$  je frekvenčna karakteristika oz. utež, ki opisuje največje dopustno relativno odstopanja sistema pri vseh  $\omega \in \mathbb{R}$ .

### 3.2.2 Aditivno odstopanje

Aditivno odstopanje je podano z razliko kot  $\Delta W_A = P_\Delta - P_0$ . Objekt z upoštevanjem aditivnega odstopanja zapišemo kot:

$$P_\Delta = P_0 + \Delta W_A \quad (3.18)$$

Izraz (3.18) predstavlja absolutno odstopanje amplitude frekvenčne karakteristike nominalnega modela za vse  $\omega \in \mathbb{R}$ .

**Teorem 3.5** [41] Sistem s aditivnim modelom odstopanja, kjer velja, da je zaprtizančni sistem z nominalnim modelom stabilen, je robustno stabilen za vse  $\|\Delta\|_\infty < 1$ , če je izpolnjen pogoj:

$$\|\Delta W_A C S\|_\infty, \quad (3.19)$$

kjer je  $S = (I + PC)^{-1} = I - T$  občutljivost zaprtizančnega sistema. Manjša kot je norma občutljivosti večje bo dopustno aditivno odstopanje sistema.

### 3.2.3 Inverzno odstopanje

Inverzna odstopanja predstavimo z vhodnim  $\Delta W_I = (P_0 - P_\Delta)P_\Delta^{-1}$  oz. izhodnim  $\Delta W_I = P_\Delta^{-1}(P_0 - P_\Delta)$  inverznim multiplikativnim odstopanjem ter inverznim aditivnim odstopanjem  $\Delta W_I = P_\Delta^{-1}(P_0 - P_\Delta)P_0^{-1}$ . Če zapišemo modele objektov z odstopanji dobimo za inverzni mutliplikativni:

$$P_\Delta = P_0(1 + \Delta W_I)^{-1}, \quad (3.20)$$

ter za inverzni aditivni,

$$P_\Delta = P_0(1 + \Delta W_I P_0)^{-1} \quad (3.21)$$



**Teorem 3.6** [41] Sistem z inverznim multiplikativnim modelom odstopanja, kjer velja, da je zaprtozančni sistem z nominalnim modelom stabilen, je robustno stabilen za vse  $\|\Delta\|_\infty < 1$ , če je izpolnjen pogoj:

$$\|\Delta W_r S\|_\infty < 1 \quad (3.22)$$

**Teorem 3.7** [41] Sistem z inverznim aditivnim modelom odstopanja, kjer velja, da je zaprtozančni sistem z nominalnim modelom stabilen, je robustno stabilen za vse  $\|\Delta\|_\infty < 1$ , če je izpolnjen pogoj:

$$\|\Delta W_r S P_0\|_\infty < 1 \quad (3.23)$$

### 3.3 Problem mešane občutljivosti

Mešane občutljivosti je pogosta oblika problema s katero se vrednoti robustnost in občutljivost zaprtozančnega sistema. Kot vemo namreč ni mogoče dobiti poljubno oblikovane karakteristike občutljivosti  $S$  in poljubno oblikovane komplementarne občutljivosti  $T$ , zaradi njune očitne medsebojne povezave  $S + T = I$ . Tako je vedno moč doseči le kompromis med obema karakteristikama in posledično med različnimi performančnimi lastnostmi. [41], [42], [84]

Razmerja med vhodi in izhodi (Slika 3.2) zapišemo:

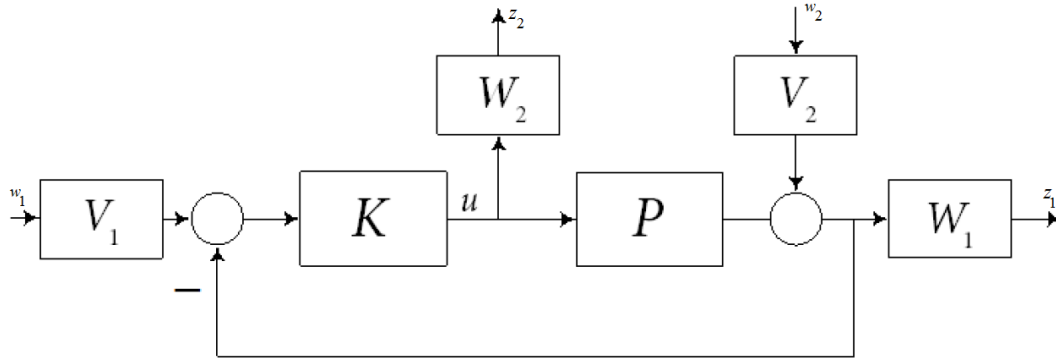
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &= H \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & S \\ U & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ H &= \begin{bmatrix} W_1 T V_1 & W_1 S V_2 \\ W_2 U V_1 & -W_2 U V_2 \end{bmatrix} < \gamma \end{aligned} \quad (3.24)$$

kjer matriko  $H$  imenujemo povezovalna matrika;  $U = KS$ . Kriterij mešane občutljivosti predstavlja minimizacijo norme povezovalne matrike:

$$\min_{K \in \mathbb{R}^{H_\infty}} \|H\|_\infty = \gamma, \gamma \in \mathbb{R} : \gamma > 0 \quad (3.25)$$

Glede na to, da je cilj minimizacija norme povezovalne matrike, minimiziramo posamezne izraze v povezovalni matriki; glede na  $\|H\|_\infty < \gamma$ , velja seveda za vsak element matrike  $\|h_{i,j}\|_\infty < \gamma, \forall i, j$ .

$$H = \begin{bmatrix} |T| < \frac{\gamma}{|W_1 V_1|} & |S| < \frac{\gamma}{|W_1 V_2|} \\ |U| < \frac{\gamma}{|W_2 V_1|} & |U| < \frac{\gamma}{|W_2 V_2|} \end{bmatrix}, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3.26)$$



Slika 3.2 Problem mešane občutljivosti

V kolikor se osredotočimo le na vpliv vhodov na izhod  $z_1$  dobimo naslednjo obliko povezovalne matrike:

$$\|H\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S V_2 \\ W_1 T V_1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty}^2 = \sup_{-\infty < \omega < +\infty} (|W_1(j\omega)S(j\omega)V_2(j\omega)|^2 + |W_1(j\omega)T(j\omega)V_1(j\omega)|^2), \quad (3.27)$$

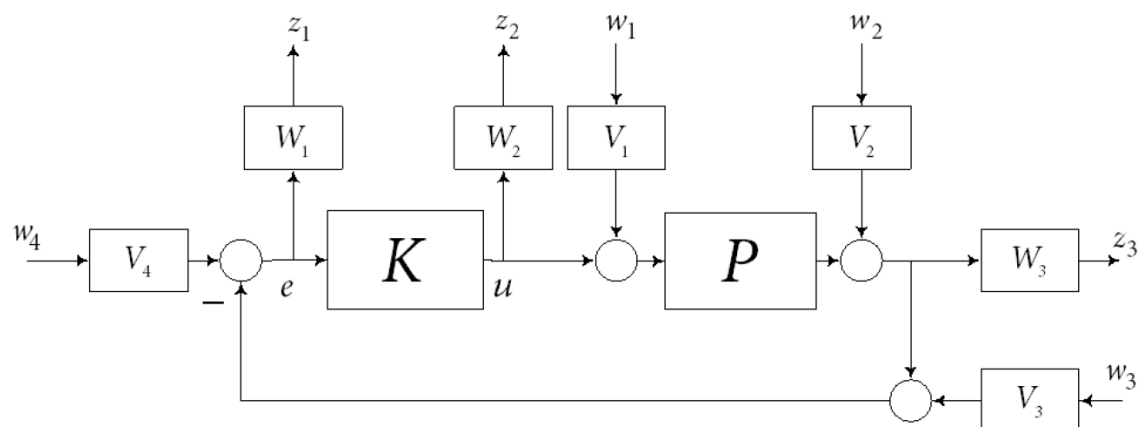
kjer minimiramo posamezne izraze matrike:

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)S(j\omega)V_2(j\omega)| &\leq \gamma \wedge |W_1(j\omega)T(j\omega)V_1(j\omega)| \leq \gamma \\ |S(j\omega)| &\leq \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)V_2(j\omega)|} \wedge |T(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)V_1(j\omega)|}, \forall \omega \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Problem mešane občutljivosti lahko zapišemo v razširjeni obliki, kjer upoštevamo vse vhode in vse izhode zaprtizančnega sistema (Slika 3.3):

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -PS & -S & -S & S \\ -T & -KS & -KS & KS \\ PS & S & -T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$H = \begin{bmatrix} -W_1 P S V_1 & -W_1 S V_2 & -W_1 S V_3 & W_1 S V_4 \\ -W_2 T V_1 & -W_2 K S V_2 & -W_2 K S V_3 & W_2 K S V_4 \\ W_3 P S V_1 & W_3 S V_2 & -W_3 T V_3 & W_3 T V_4 \end{bmatrix} < \gamma$$



**Slika 3.3** Razširjen problem mešane občutljivosti

Z ustrezno izbiro utežnostnih funkcij določamo obliko frekvenčnih karakteristik zaprtozančnega sistema in posledično vplivamo na številne lastnosti sistema kot so robustnost, sledenje, zmanjšanje vpliva motenj na izhodu ali zmanjšanje vpliva šuma.

## 4 Izračun lastnih vrednosti sistemov z zakasnitvami

Obstaja kar nekaj orodij, ki omogočajo izračun lastnih vrednosti sistemov z zakasnitvami in so izvedena v programskem okolju Matlab. Eno izmed obsežnih orodij v Matlabu je DDE-BIFTOOL [39], ki zraven konstantnih zakasnitev obravnava tudi zakasnitve odvisne od notranjih stanj sistema. Zraven izračuna karakterističnih korenov, omogoča še številne druge operacije za analizo Hopfovih bifurkacij [23]. Še eno za akademske namene prav tako brezplačno orodje je TRACE-DDE, kjer je možno računati karakteristične korene tudi za sisteme z distribuiranimi zakasnitvami [32] [40]. Z določitvijo korenov zakasnjenih sistemov v obliki kvazi-polinomov se avtorji ukvarjajo v [26], kjer upoštevajo zakasnjene sisteme tipa RFDE in NFDE.

V splošnem karakteristične korene sistema z zakasnitvami

$$\dot{x} = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i) \quad (4.1)$$

poiščemo z reševanjem nelinearnega problema lastnih vrednosti:

$$\Delta(s)v = 0, \quad s \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0, \quad (4.2)$$

kjer je  $\Delta(s)$  karakteristična matrika sistema,

$$\Delta(s) := sI - A_0 - \sum_{k=1}^m A_k e^{-s\tau_k}, \quad (4.3)$$

$v$  je lastni vektor [20], [21]. Zaradi numerične kompleksnosti nelinearnih problemov so se veliko bolj uveljavile metode, ki temeljijo na diskretizaciji operatorja rešitve<sup>10</sup> [31], [85] ali na diskretizaciji infinitezimalnega generatorja operatorja rešitve [27], [32]. Operator rešitve DDE (4.1) je definiran:

$$\mathcal{T}(t)\phi = x_t(\phi) \quad (4.4)$$

kjer je  $x_t(\phi)$  segment funkcije, ki izpolnjuje  $x_t(\phi)(\theta) = x(\phi)(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-\tau_m, 0]$ , kjer je  $x$  rešitev enačbe (4.1) z začetnimi vrednostmi podanimi v obliki funkcije  $\phi(t)$ ,  $-\tau_m \leq t \leq 0$ . Za infinitezimalni generator  $\mathcal{A}$  operatorja  $\mathcal{T}(t)$  velja, da pripada domeni:

---

<sup>10</sup> solution operator (angl.)

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ \phi \in X : \dot{\phi} \in X, \phi(0) = A_0 \phi(0) + \sum_{i=1}^m A_i \phi(-\tau_i) \} \quad (4.5)$$

kjer je  $X = \mathcal{C}(-\tau_m, 0, \mathbb{R}^n)$  Banahov prostor preslikav zveznih funkcij. Tako na podlagi infinitezimalnega generatorja zapišemo naslednjo enačbo:

$$(\mathcal{A}\phi)(\theta) = \frac{d\phi}{d\theta}(\theta), \theta \in (-\tau_m, 0), \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad (4.6)$$

Na podlagi generatorja  $\mathcal{A}$  zapišemo enačbo (4.1) kot abstraktno navadno diferencialno enačbo:

$$\frac{dx_t}{dt} = \mathcal{A}x_t, x_t \in X \quad (4.7)$$

Karakteristične korene sistema (4.1) določa tudi naslednja relacija rešitev lastnih vrednosti:

$$\mathcal{A}\phi = s\phi, s \in \mathbb{C}, \phi \in X, \phi \neq 0 \quad (4.8)$$

Spekter operatorja rešitve in karakteristični koreni sistema (4.1) so povezani preko naslednje relacije (za več informacij glej [21]):

$$\det \Delta(s) = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1}{t} \ln \mu, \mu \in \sigma(\mathcal{T}(t)) \setminus 0, \forall t > 0$$

To pomeni, da lahko karakteristične korene določimo s pomočjo končno dimenzionalnega nelinearnega problema (4.2) ali s pomočjo neskončno dimenzionalnega linearnega problema lastnih vrednosti oz. v praktični izvedbi s spektralno diskretizacijo infinitezimalnega generatorja. Predvsem metode, ki temeljijo na slednjem postopku so nekoliko boljše od ostalih [86]. Zaradi tega smo izbrali metodo za izračun karakterističnih korenov [87], ki temelji na spektralni diskretizaciji infinitezimalnega generatorja operatorja rešitve in gre za nekoliko izboljšano metodo v primerjavi z metodo [27], saj omogoča samodejno nastavitve števila diskretizacijskih točk. Še ena prednost je, da je v algoritmu [87] implementirana tudi korekcijska rutina, ki s pomočjo Newtonovega iterativnega algoritma in nelinearnega problema (4.2) popravi vrednosti karakterističnih korenov do želene natančnosti.

V poglavju bomo predstavili natančno matematično formulacijo in numeričen postopek izračuna lastnih vrednosti obstoječega algoritma [87] ter lastne izboljšave in prilagoditve tega algoritma v smislu določitve le nekaj skrajno desnih lastnih vrednosti s posebnim postopkom iterativnega pomikanja domene območja izračuna lastnih vrednosti.

S smo realizirali učinkovit in dovolj hiter algoritem za izračun le nekaj skrajno desnih lastnih vrednosti, ki bo nepogrešljiv naslednjih poglavjih.

#### 4.1 Spektralna diskretizacija za izračun karakterističnih korenov

V tem razdelku bomo predstavili postopek spektralne diskretizacije infinitezimalnega generatorja, ki je podrobno predstavljen v [27] in [87].

Spektralna diskretizacija problema lastnih vrednosti (4.8) je izvedena v  $N + 1$  točkah na intervalu  $-\tau_m, 0$  :

$$\Omega_N = \theta_{N,i}, i = 1, \dots, N + 1, -\tau_m \leq \theta_{N,1} < \dots < \theta_{N,N+1} = 0$$

Diskretizacija temelji na zamenjavi Banachovega prostora zveznih funkcij  $X$  s prostorom diskretnih funkcij  $X_N$  definiranih na  $\Omega_N$ . Tako je funkcija začetnih vrednosti  $\phi \in X$  diskretizirana oz. predstavljena z vektorjem  $x \in X_N$  z naslednjimi vrednostmi:

$$x_i = \phi(\theta_{N,i}) \in \mathbb{C}^n, i = 1, \dots, N + 1$$

Naj bo  $\mathcal{L}_N x, x \in X_N$  edinstven interpolacijski polinom stopnje nižje ali enke od  $N$ , ki izpolnjuje:

$$(\mathcal{L}_N x)(\theta_{N,i}) = x_i, i = 1, \dots, N + 1$$

Operator  $\mathcal{A}$ , ki je podan z (4.6) lahko aproksimiramo z matriko  $A_N : X_N \rightarrow X_N$

$$(\mathcal{A}_N x)_i = (\mathcal{L}_N x)'(\theta_{N,i}), i = 1, \dots, N + 1$$

$$(\mathcal{A}_N x)_{N+1} = A_0(\mathcal{L}_N x)(0) + \sum_{k=1}^m A_k(\mathcal{L}_N x)(-\tau_k)$$

Z uporabo Lagrange-vih interpolacijskih polinomov  $\mathcal{L}_N x$  matriko  $A_N$  zapišemo:

$$A_N = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n(N+1) \times n(N+1)} \quad (4.9)$$

kjer so posamezni elementi matrike:

$$a_{i,l} = \begin{cases} \ell'_l(\theta_{N,i}) I_n & l \in 1, \dots, N + 1, i \in 1, \dots, N, \\ \sum_{k=0}^m A_k \ell_l(\tau_k) & l \in 1, \dots, N + 1, i = N + 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

kjer so  $\ell_l$  Lagrange-vi polinomi odvisni od  $\Omega_N$ . Polinomi stopnje  $N$  izpolnjujejo:

$$\ell_l = \begin{cases} 1, & i = l, \\ 0, & i \neq l, \end{cases} \quad i, l \in 1, \dots, N+1. \quad (4.11)$$

Interpolacijski polinom v Lagrange-vi obliki v splošnem zapišemo za množico interpolacijskih točk:

$$(\theta_{N,i}, x_i), i = 1, \dots, N+1,$$

$$L(\theta) := \sum_{i=1}^{N+1} x_i \ell_i(\theta),$$

kjer so  $\ell_i$  Lagrange-vi bazični polinomi,

$$\ell_i(\theta) := \prod_{\substack{1 \leq m \leq N+1 \\ m \neq i}} \frac{\theta - \theta_{N,m}}{\theta_{N,i} - \theta_{N,m}} = \frac{\theta - \theta_{N,1}}{\theta_{N,i} - \theta_{N,1}} \dots \frac{\theta - \theta_{N,i-1}}{\theta_{N,i} - \theta_{N,i-1}} \frac{\theta - \theta_{N,i+1}}{\theta_{N,i} - \theta_{N,i+1}} \dots \frac{\theta - \theta_{N,N+1}}{\theta_{N,i} - \theta_{N,N+1}}$$

S postopkom diskretizacije infinitezimalnega operatorja prevedemo problem lastnih vrednosti, ki je podan v izrazu (4.8) na problem lastnih vrednosti matrike  $A_N$

$$A_N x = s x, s \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^{n(N+1)}, x \neq 0. \quad (4.12)$$

Vpliv interpolacije funkcije pri ekvidistančnih točkah se pojavi v oscilacijah interpolacijske funkcije okrog pravih vrednosti funkcije, ki se še povečajo s povečanim številom interpolacijskih točk. Ta fenomen je moč eliminirati, če izberemo interpolacijske točke na mestih, kjer se nahajajo koreni Chebyshev-ih polinomov [27]. Tako izberemo točke interpolacije  $\Omega_N$  po naslednjem izrazu:

$$\theta_{N,i} = \frac{\tau_m}{2} \left( -\cos \frac{\pi i}{N+1} - 1 \right), i = 1, \dots, N+1 \quad (4.13)$$

Zaradi omenjene razporeditve interpolacijskih točk lahko problem lastnih vrednosti (4.12) zapišemo v obliki problema strukturiranih lastnih vrednosti:

$$(\sum_N -s \prod_N) c = 0, \quad s \in \mathbb{C}^{(N+1)^n}, c \neq 0, \quad (4.14)$$

kjer je

$$\Pi_N = \frac{\tau_m}{4} \begin{pmatrix} \frac{4}{\tau_m} & \frac{4}{\tau_m} & \frac{4}{\tau_m} & \dots & \dots & \frac{4}{\tau_m} \\ 2 & 0 & -1 & & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{3} & 0 & \ddots & \\ & & & \frac{1}{4} & \ddots & -\frac{1}{N-2} \\ & & & & \ddots & 0 & -\frac{1}{N-1} \\ & & & & & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

in

$$\Sigma_N = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_N \\ & I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_n \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

kjer je

$$R_i = A_0 + \sum_{k=1}^m A_k T_i \left( -2 \frac{\tau_k}{\tau_m} + 1 \right), \quad i = 0, \dots, N, \quad (4.17)$$

kjer so  $T_i$  Chebyshev-i polinomi prve vrste in  $i$ -tega reda in so definirani z naslednjimi izrazi:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Če povzamemo predstavljen princip metod za določitev korenov karakteristične enačbe sistemov z zakasnitvami (4.1), karakteristične korene izračunamo z rešitvijo končno dimenzionalnega nelinearnega problema (4.2) ali z rešitvijo neskončno dimenzionalnega linearnega problema (4.8), ki ga lahko diskretiziramo in predstavimo v obliki problema lastnih vrednosti (4.12) ali v obliki problema strukturiranih lastnih vrednosti (4.14). Oba vidika izračuna korenov lahko kombiniramo in tako uporabimo prednosti obeh. Tako uporabimo diskretiziran linearen problem za določitev približkov



korenov, ki jih popravimo z Newtonovo iterativno metodo in dejanskim nelinearnim problemom. Postopek izračuna korenov izvedemo z naslednjim algoritmom.

**Algoritem 4.1** Splošen postopek izračuna korenov sistema z zakasnitvami:

- I. Izberemo število diskretizacijskih točk  $N$  in izračunamo problem strukturiranih lastnih vrednosti z matrikama  $\Sigma_N$  in  $\Pi_N$ .
- II. Izvede se korekcijska rutina dobljenih lastnih vrednosti z Newtonovo iterativno metodo in nelinearnim problemom.

Postopek diskretizacije infinitezimalnega generatorja lahko razumemo kot racionalno aproksimacijo eksponentnih funkcij v karakteristični matriki (4.3) (glej [27]).

V delu [87] je predstavljen še dodaten korak v smislu samodejne nastavitve števila diskretizacijskih točk, ki omogoča izračun vseh karakterističnih korenov znotraj nekega določenega območja kompleksne ravnine

$$s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq r, r \in \mathbb{R}.$$

Ustrezna izbira diskretizacijskih točk  $N$  je namreč zelo pomembna. Če je diskretizacijsko število zelo veliko, je problem izračuna lastnih vrednosti zelo kompleksen, kar se seveda hitro pozna pri potrebnem času izračuna problema. Če je diskretizacijsko število premajhno, je lahko izračun korenov neuspešen.

## 4.2 Postopek samodejne določitve števila diskretizacijskih točk

Sledi kratka predstavitev postopka samodejne določitve števila diskretizacijskih točk, ki je podrobneje predstavljena v [87]. Metoda obravnava določitev vseh karakterističnih korenov v desni kompleksni polravnini  $s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq 0$ , saj je z nadomestitvijo  $s$  z  $s - r$  vedno moč poljubno premakniti korene za  $r$ . Naslednja predpostavka podaja izraz  $s$  katerim lahko ocenimo položaj karakterističnih korenov.

**Predpostavka 4.1 [87]** Karakteristični koreni sistema (4.1) za katere velja  $\Re(s) \geq \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}$  pripadajo množici

$$\Omega_\varepsilon := \left\{ \bigcup \sigma \left( A_0 + \sum_{k=1}^m A_k z_k \right) : z_k \in \mathbb{C}, |z_k| \leq e^{-\varepsilon \tau_k}, k=1, \dots, m \right\} \cap s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq \varepsilon . \quad (4.19)$$

Mejne vrednosti zgornjega izraza oz. vsi karakteristični koreni le tega se nahajajo znotraj območja, ki ga omejujejo koreni izraza

$$\psi_\varepsilon := \left( \bigcup_{\tilde{\omega} \in [0, 2\pi]^m} \sigma \left( A_0 + \sum_{k=1}^m A_k e^{-\varepsilon \tau_k} e^{j\omega_k} \right) \right) \cap s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq \varepsilon , \quad (4.20)$$

saj velja  $\Re(s) \geq \varepsilon$  in  $|e^{-s\tau_k}| \leq e^{-\varepsilon \tau_k}, k=1, \dots, m$ . Tako se nahaja spekter izraza (4.19) vedno znotraj spektra izraza (4.20). V primeru  $\varepsilon = 0$  dobimo zelo konzervativno oceno območja karakterističnih korenov. Le to lahko izboljšamo, če območje obravnavamo ločeno v dveh polravninah.

**Predpostavka 4.2 [87]** Karakteristični koreni v desni polravnini kompleksne ravnine sistema so za  $\kappa > 0$  omejeni z

$$\psi := \psi_{0,\kappa} \cup \psi_\kappa \quad (4.21)$$

kjer je

$$\psi_{0,\kappa} := \left( \bigcup_{\tilde{\omega} \in [0, 2\pi]^m} \sigma \left( A_0 + \sum_{k=1}^m A_k e^{j\omega_k} \right) \right) \cap s \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(s) \leq \kappa \quad (4.22)$$

in

$$\psi_\kappa := \left( \bigcup_{\tilde{\omega} \in [0, 2\pi]^m} \sigma \left( A_0 + \sum_{k=1}^m A_k e^{-\kappa \tau_k} e^{j\omega_k} \right) \right) \cap s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq \kappa \quad (4.23)$$

kjer je  $\kappa$  določen z izrazom

$$\kappa = \sin \left( \frac{2\pi}{p} \right) \times \max \Re(s) : s \in \psi_0, p=20 \quad (4.24)$$

Določitev števila diskretizacijskih točk je določeno s pomočjo naslednjih izrazov. Določimo območje diskretiziranega problema.

$$S_N := \left\{ s \in \mathbb{C} : \max_{t \in [-1, 0]} \frac{|e^{-st} - p_N(t; s)|}{|e^{st}|} < \varepsilon \right\} \quad (4.25)$$

kjer je  $p_N$  polinom  $N$ -tega reda (za več informacij o aproksimacijskih polinomih glej [27]). Diskretizacijo linearnega problema (4.12) je namreč moč predstaviti v obliki racionalne aproksimacije eksponentnih funkcij v karakteristični matriki (4.3). Princip

izbire števila diskretizacijskih točk v algoritmu (Algoritem 4.1) za izračun korenov temelji na izbiri najmanjšega možnega števila  $N$ , da velja  $\psi \subseteq S_N$ . Izraz za izračun števila diskretizacijskih točk je podan z:

$$N_z = \frac{|z| - b(\angle z)}{a(\angle z)}, \angle z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], z \in S_N \quad (4.26)$$

kjer  $|z|$  predstavlja absolutne vrednosti korenov znotraj območij  $\psi_{0,\kappa}$  oz.  $\psi_\kappa$ ,  $b$  in  $a$  sta aproksimacijska polinoma območja  $S_N$ , kjer velja  $R(N;\theta) := r > 0: re^{j\theta} \in \partial S_N$ . Aproksimacijo tega izraza zapišemo  $R(N;\theta) \approx b(\theta) + a(\theta)N$ . Na koncu določimo  $N$  kot  $N = \max N_z : z \in \psi, \angle z \in [0, \pi/2]$ , saj  $N_z$  določimo za posamezni območji  $\psi_{0,\kappa}$  in  $\psi_\kappa$  posebej.

V primeru sistema (4.1), kjer so posamezne zakasnitve večkratniki prve zakasnitve območje karakterističnih korenov definirajo naslednji izrazi:

**Predpostavka 4.3 [87]** Karakteristični koreni sistema za katere velja  $\Re(s) \geq \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}$  pripadajo množici

$$\Omega_\varepsilon := \left\{ \bigcup \sigma \left( A_0 + \sum_{k=1}^m A_k z^{n_k} \right) : z \in \mathbb{C}, |z| \leq e^{-\varepsilon\tau} \right\} \cap \left\{ s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq \varepsilon \right\}, \quad (4.27)$$

spekter sistema je omejen z lastnimi vrednostmi izraza

$$\psi_\varepsilon := \left( \bigcup_{\omega \in [0, 2\pi]} \sigma \left( A_0 + \sum_{k=1}^m A_k e^{-\varepsilon\tau n_k} e^{j\omega n_k} \right) \right) \cap \left\{ s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq \varepsilon \right\}. \quad (4.28)$$

kjer je  $\tau$  osnovna zakasnitev,  $n_k$  pa ustrezen večkratnik osnovne zakasnitve.

**Predpostavka 4.4 [87]** Karakteristični koreni v desni polravnini kompleksne ravnine sistema so za  $\kappa > 0$  omejeni z

$$\psi_c := \psi_{c_{0,\kappa}} \cup \psi_{c_\kappa} \quad (4.29)$$

kjer sta

$$\psi_{c_{0,\kappa}} = \left( \bigcup_{\omega \in [0, 2\pi]} \sigma \left( A_0 + \sum_{k=1}^m A_k e^{j\omega n_k} \right) \right) \cap \left\{ s \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(s) \leq \kappa \right\} \quad (4.30)$$

in

$$\psi_{c_\kappa} = \left( \bigcup_{\omega \in [0, 2\pi]} \sigma \left( A_0 + \sum_{k=1}^m A_k e^{-\kappa \tau n_k} e^{j\omega n_k} \right) \right) \cap \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq \kappa\} \quad (4.31)$$

Določitev števila diskretizacijskih točk poteka po enakem postopku kot v primeru kjer zakasnitve niso večkratniki. Spremeni se parameter  $p$  v izrazu (4.24) in sicer  $p = 20 * n_m$ , kjer je  $\tau_m = n_m \tau$  v intervalu  $0, 2\pi$ , ker ima funkcija  $\omega \rightarrow e^{j\omega n_m}$  periodo  $2\pi / n_m$ . Zanimiva prednost obravnave sistemov, kjer so zakasnitve večkratniki se kaže tudi v tem, da je območje  $\psi_c$  bolj natančno kot  $\psi$ . Tako je za sisteme z več kot tremi zakasnitvami v primeru, da zakasnitve niso večkratniki, aproksimacija na večkratnike zakasnitev povsem na mestu. Z uporabo postopka samodejne izbire števila diskretizacijskih točk  $N$  problema Algoritem 4.1 dobi naslednjo obliko:

**Algoritem 4.2** Postopek izračuna korenov sistema z zakasnitvami s samodejno določitvijo števila diskretizacijskih točk.

- I. Izberemo območje izračuna karakterističnih korenov oz. polravnino v kompleksnem prostoru, ki je omejena z  $r$ , kjer velja  $\Re(s) \geq r : r \in \mathbb{R} \wedge s \in \mathbb{C}$
- II. Na podlagi ocene območja, kjer se nahajajo karakteristični koreni sistema se določi najmanjše število diskretizacijskih točk  $N$ , ki dovolj dobro aproksimira vse korene, ki se nahajajo znotraj izbranega območja  $\Re(s) \geq r$ . Nato se izračuna problem strukturiranih lastnih vrednosti z matrikama  $\Sigma_N$  in  $\Pi_N$ .
- III. Izvede se korekcijska rutina dobljenih lastnih vrednosti z Newtonovo iterativno metodo in nelinearnim problemom.

Če na kratko povzamem rezultate predstavljenih postopkov za izračun karakterističnih korenov sistema (4.1), Algoritem 4.1 podaja osnoven postopek za izračun korenov po principu diskretizacije infinitezimalnega generatorja operatorja rešitve. Vendar je potrebno izbrati ustrezno število  $N$  oz. s tem povezano velikost diskretizacijskega problema. To je lahko dokaj zahtevno opravilo, saj v primeru, da izberemo zelo velik  $N$ , je postopek računanja izjemno dolgotrajen proces. Če izberemo premajhen  $N$  je lahko določitev korenov neuspešna. Poudariti je potrebno še eno stvar in sicer, da postopek diskretizacije in posledično določitev korenov sistema temelji na določitvi korenov v

okolici koordinatnega izhodišča kompleksne ravnine. Bližje kot so koreni izhodišču manjše je potrebno število  $N$ . Bolj kot so koreni pomaknjeni v desno od izhodišča, večje število  $N$  je potrebno za izračun korenov. Torej, če se skrajno desni koren sistema nahaja skrajno levo ali skrajno desno od izhodišča, je za določitev korenov sistema nujen ustrezen pomik korenov oz. koordinatnega izhodišča. Problem ustreznega pomika korenov delno rešuje Algoritem 4.2, saj je namesto ustrezne izbire števila  $N$  potrebno ustrezno izbrati območje izračuna korenov. S tem je moč izračunati vse korene sistema, ki se nahajajo v določenem območju kompleksne ravnine  $\Re(s) \geq r$ . Algoritem je v osnovi zgrajen tako, da za izbran  $r$  premakne korene sistema v določeno smer tako, da v (4.3) opravimo zamenjavo  $s \Rightarrow s - r$ . S tem premaknemo izhodišče koordinatnega sistema in tako določimo novo polravnino za izračun korenov  $\Re(s) \geq 0$ . Z ustrezno izbiro parametra  $r$  lahko tako premaknemo izhodišče v neposredno bližino skrajno desnega korena sistema in tako vplivamo izbiro nizkega števila  $N$ . Problem ustrezne izbire  $r$  seveda ostaja, saj ga mora načrtovalec določiti sam. Nikakor namreč ni možno dovolj natančno oceniti lego skrajno desnega korena sistema. V nadaljevanju bomo potrebovali učinkovit algoritem za izračun skrajno desnega pola sistema oz. spektralne abscise za obravnavo stabilnosti oz. robustnosti sistema. To pomeni, da bomo vpeljali sistem samodejnega izbiranja območja  $r$  tako, da bo diskretizacijsko število  $N$  čim manjše in bo posledično algoritem čim bolj učinkovit.

### 4.3 Postopek samodejne določitve območja izračuna karakterističnih korenov

Določite v skrajno desnega korena sistema z zakasnitvami je zelo pomembno, saj kot smo že omenili v prvem poglavju, kjer smo predstavili lastnosti obravnavanih sistemov, je iz lege skrajno desnega korena moč določiti stabilnost sistema. Preostali koreni, ki jih je neskončno mnogo, se namreč razprostirajo v krakih v smeri proti  $s \rightarrow -\infty \pm j\infty$ . V nadaljevanju dela bo določitev skrajno desnega korena v smislu določitve stabilnosti sistema, analize robustnosti sistema na spremembe zakasnitev nepogrešljiva. Ker bomo algoritem za določitev skrajno desnega korena uporabljali tudi znotraj algoritma diferencialne evolucije mora biti ta čim bolj učinkovit.

Zgoraj predstavljeno metodo za izračun karakterističnih korenov sistema v določeni kompleksni polravnini smo dopolnili s postopkom samodejne izbire območja izračuna v smislu določitve le nekaj skrajno desnih korenov pri čim manjši diskretizaciji problema. Manjši kot je  $N$  manjše število korenov dobimo (4.12). Postopek samodejne izbire pomika izhodišča za  $r$  smo izvedli s pomočjo iterativnega pomikanja le tega. Z iterativnim pomikanjem  $r$  z večjim korakom pomika, ob nadzorovanju števila diskretizacijskih točk  $N$ , ki jih dobimo z oceno območja korenov (4.20) oz. (4.28), lahko dosežemo določitev dveh vrednosti skrajnih točk  $r$ , ki sta rezultat minimalne dopustne in maksimalne dopustne vrednosti  $N$ . S pomikanjem izhodišča namreč neposredno vplivamo na velikost diskretizacije problema  $N$ , saj bližje kot so koreni izhodišču manjši  $N$  je potreben za natančen izračun korenov. Sledi podrobnejši opis celotnega algoritma s postopkom samodejne določitve pomika izhodišča  $r$  za izračun karakterističnih korenov sistema z zakasnitvami. Algoritem smo izvedli v programskem okolju Matlab v obliki funkcije.

V algoritmu se najprej izvedejo osnovne operacije, inicializacije ter časovno skaliranje sistema. Matrike sistema se zapišejo v ustrezne spremenljivke in izvede se med drugimi tudi inicializacija vrednosti  $r = -\tau_m / 3$ . Časovno skaliranje sistema se izvede s skaliranjem zakasnitev  $\tau_i = \tau_i / \tau_m$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sistemskih matrik  $A_i = A_i \tau_m$ ,  $i = 0, \dots, m$  ter pomika izhodišča  $r = r \tau_m$  (glej prvo poglavje). V primeru, da sistemska matrika  $A_0$  vsebuje lastno vrednost, ki je večja od nič, se izvede naslednja inicializacija izhodišča  $r = \max(\Re \sigma(A_0))$ . S skaliranjem časovnih konstant sistema dosežemo obravnavo sistema, kjer je največja zakasnitev v sistemu vedno enaka  $\tau_m = 1$ . Glede na to, da večja kot je zakasnitev, bolj so koreni zgoščeni v smeri proti izhodišču, je takšna obravnava smiselna, če se želimo omejiti na raziskovanje le prvih nekaj skrajno desnih korenov, saj lahko tako določene omejitve oz. lastnosti algoritma, ki sledijo v naslednjih korakih, poenotimo za vse sisteme neodvisno od velikosti zakasnitev.

Nato se prične začetek procesa iskanja ustreznega premika  $r$  ob nadzorovanju izračunane vrednosti diskretizacije  $N$ . Iterativno pomikamo vrednost  $r$  dokler za  $N$  velja  $N_{\min} < N < N_{\max}$ , kjer sta  $N_{\min} = 10$  in  $N_{\max} = 100$ , ki sta bila določeni eksperimentalno. Postopek se prične z določitvijo novega sistema z upoštevanjem premika izhodišča, kjer upoštevamo  $s \rightarrow s - r$ . Velikost diskretizacije problema  $N$  določimo po izrazu (4.26) s

pomočjo ocene območja korenov sistema (4.20) oz. (4.28) za  $\varepsilon = 0$ . Če je za  $N$  že izpolnjen pogoj  $N_{\min} < N < N_{\max}$  se algoritem prekine in nadaljuje pri naslednji točki (Algoritem 4.3). Če je  $N > N_{\max}$  pri začetni vrednosti  $r$ , postavimo  $r_1 = r$  ter povečamo  $r = r + r_{\text{int}}$ , postopek ponavljamo dokler velja  $N < N_{\min}$ , ko je pogoj izpolnjen, določimo  $r_2 = r$ . Če je  $N < N_{\min}$  pri začetni vrednosti  $r$ , postavimo  $r_2 = r$ , zmanjšamo  $r = r - r_{\text{int}}$ ,  $r_{\text{int}} = 5$ , postopek ponavljamo dokler velja  $N > N_{\max}$ , ko je pogoj izpolnjen, določimo  $r_1 = r$ . Ko dobimo obe skrajni točki  $r_1$  in  $r_2$ , nadaljujemo postopek iterativnega določanja izhodišča  $r$  po bisekcijskem algoritmu  $r = (r_1 + r_2) / 2$ , ki se prekine, ko je izpolnjen pogoj  $|r_1 - r_2| - r_b < 10^{-6}$ ,  $r_b = 0.1$ . Pri iterativnem določanju velikosti diskretizacije oz. števila  $N$  smo uporabili nekoliko bolj splošna izraza (4.20) oz. (4.28) in ne izrazov z upoštevanim skalirnim faktorjem  $\kappa$  (4.23) oz (4.31). V primeru samodejnega določanja  $r$  nas zanima le groba ocena območja, kjer se nahajajo koreni sistema in pri tem prvotna izraza povsem zadostujeta. S tem prihranimo tudi nekaj časa pri sami izvedbi algoritma. Glede na to, da se nagibamo k takšni določitvi  $r$ , da bo za izračun korenov zadostoval čim manjši  $N$ , je bistvo zgornjega koraka preveriti, če je takšno število  $N_{\min} < N < N_{\max}$  sploh mogoče določiti. Pripeti se namreč lahko, da kljub izjemno majhnem dopustnem koraku spremembe bisekcijskega algoritma takšnega števila ni moč doseči. To se zgodi v primeru, če se veriga korenov sistema približa imaginarni osi pri zelo visoki vrednosti. V tem primeru se algoritem prav tako zaključi, saj nas takšni sistemi niti ne zanimajo.

V primeru neuspešnega izračuna korenov pri določenem  $N$ , se območje izračuna korenov iterativno povečuje  $r = r - r_b$ , dokler izračun ni uspešen. Če je  $N$  majhen se lahko zgodi, da ne zadostuje za izračun nobenega korena, saj je možno, da diskretiziran problem slabo aproksimira dejanske korene sistema. V tem primeru Newtonov iterativni postopek izloči vse lastne vrednosti in je rezultat algoritma za izračun korenov prazna množica. Zgodi se lahko tudi, da je zaradi prenizkega diskretizacijskega števila z Newtonovo metodo odstranjen skrajno desni pol. V tem primeru se algoritem prav tako nadaljuje z iterativnim povečevanjem območja. Če povzamem pravkar predstavljen algoritem.

**Algoritem 4.3** Postopek izračuna prvih nekaj skrajno desnih korenov sistema z zakasnitvami s samodejno določitvijo ustreznega pomika koordinatnega izhodišča  $r$  na podlagi rezultata postopka samodejne določitve števila diskretizacijskih točk  $N$ .

- I. Inicializacija pomika izhodišča ter časovno skaliranje sistema z največjo zakasnitvijo v sistemu.
- II. Iterativno pomikanje (najprej linearno nato po bisekcijskem algoritmu) izhodišča ter preverjanje pogoja  $N_{\min} < N < N_{\max}$ .
- III. Izračun korenov. Če je uspešen se algoritem konča.
- IV. Iterativno linearno pomikanje izhodišča in računanje korenov.

V predstavljenem algoritmu (Algoritem 4.3) je kar nekaj parametrov, ki smo jih nastavili z eksperimentalnim preizkušanjem in sicer  $N_{\min}$ ,  $N_{\max}$ ,  $r_{\text{int}}$  ter  $r_b$ . Te parametre lahko sicer še nekoliko prilagodimo pri posameznem problemu, ampak pri opravljenem obsežnem testiranju algoritma pri različnih sistemih so se navedene vrednosti parametrov izkazale za ustrezne. Pri testiranju algoritma se tako drugi korak nikoli ni ponovil več kot deset krat, četrti korak ne več kot pet krat. Pri teh vrednostih se koraka algoritma tudi prekineta in se s tem uporabniku svetuje drugačno izbiro omenjenih parametrov. Kot se je izkazalo je zasnovan algoritem zelo učinkovit, saj se izračun le nekaj skrajno desnih korenov izvede v okoli  $t \approx 0.03$  s (Primer 4.1).

**Primer 4.1** Na primeru modela polprevodniškega laserja z optoelektronsko povratno povezavo [83] primerjajmo **Algoritem 4.2** in **Algoritem 4.3**.

Model laserja

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ -\frac{c^2}{\varepsilon} & -c^2 + 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma \frac{c^2}{\varepsilon} & 0 \end{bmatrix} x(t - \tau),$$

s parametri  $\varepsilon = 0.0316$ ,  $c = 0.7454$ ,  $\gamma = -0.1$  in  $\tau = 0.3$  s zapišemo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 31.63 \\ -17.57 & -1.56 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.76 & 0 \end{bmatrix} x(t - 0.3).$$

Algoritem 4.3 se izvrši v  $t = 0.034$  s, Algoritem 4.2 pa v  $t = 0.023$  s pri  $r = -23$ . Oba algoritma izračunata natanko petnajst korenov pri  $N = 56$  in  $N = 35$ . Kakor hitro



izvedemo Algoritem 4.2 z nekoliko bolj potratnimi nastavitvami npr.  $r = -50$  se  $N = 249$  skokovito poveča. Število izračunanih korenov, ki ustrezajo določenemu območju in so se ohranili tudi po Newtonovi metodi je veliko večje in sicer kar 145. Čas potreben za izračun korenov se prav tako skokovito poveča na  $t = 1.26$  s. Izračun velikega števila korenov je zelo potraten. Za oceno stabilnosti sistem potrebujemo informacijo le o legi skrajno desnega pola. Tako je primerneje izračunati le nekaj skrajno desnih korenov ob čim nižjem številu  $N$ .

#### 4.4 Zaključne ugotovitve

V poglavju smo predstavili numeričen postopek za izračun karakterističnih korenov sistema z zakasnitvami, ki temelji na diskretizaciji infinitezimalnega generatorja operatorja rešitve. Zaradi potrebe po učinkovitem algoritmu za izračun le nekaj skrajno desnih karakterističnih korenov smo izboljšali in priredili že obstoječo metodo za izračun korenov s samodejno določitvijo območja izračuna. S tem smo neodvisno od izbire sistema realizirali samodejno izbiro minimalnega a zadostnega števila diskretizacije in posledično omogočili izračun le nekaj skrajno desnih lastnih vrednosti poljubnega sistema.

## 5 Pomikanje polov za sisteme z zakasnitvami

Princip sinteze regulatorjev v smislu pomikanje polov zaprtozančnega sistema je za SISO<sup>11</sup> ali MIMO<sup>12</sup> sisteme brez zakasnitev zelo razširjen in se odraža v najrazličnejših metodah oz. oblikah regulatorjev v prostoru stanj [88], [89] ali v vhodno izhodnem opisu [90], [91]. V prostoru stanj, kjer načrtamo regulator v obliki povratno zračnih ojačenj s pomočjo Ackermann-ove formule gre za preprost algebraičen problem [92]. V primeru tehnike pomikanja polov za sisteme v vhodno izhodnem opisu, kjer gre za načrtovanje regulatorja v obliki racionalne prenosne funkcije, ki ga postavimo pred objekt in skupaj zapremo v zanko, obravnavamo prav tako preprost algebraičen problem v obliki reševanja sistema linearnih enačb [92]. Omenjena principa pomikanja polov sta vzbudila ogromno zanimanje za sintezo regulatorjev tudi v primeru sistemov z zakasnitvami, vendar jih po večini ni moč direktno aplicirati brez določenih prilagoditev. Problem regulatorja v prostoru stanj se pokaže, da ni mogoče s končnim številom parametrov regulatorja pomikati vseh polov poljubno v kompleksnem prostoru [93], [70]. S kontinuiranim premikanjem ojačenj regulatorja ob nadziranju prvih nekaj skrajno desnih lastnih vrednosti sistema se ukvarjajo avtorji v [66]. Ideja, kjer se poljubno v kompleksni ravnini postavi le nekaj polov je predstavljena v [70]. V tem smislu se nekaj parametrov regulatorja uporabi za direktno postavitev določenih polov, preostali parametri se uporabijo za premik ostalih korenov čim bolj v levo, kar se doseže s pomočjo uporabe optimizacijskega postopka. Postavitev nekaj dominantnih polov je bila obravnavana v [94], [95], [96], [97]. Podobno kot pri sistemih brez zakasnitev je za načrtovanje regulatorja v prostoru stanj tudi v primeru zakasnitev potreben pogoj, da je sistem vodljiv, le da je v primeru zakasnenih sistemov ta pojem nekoliko kompleksnejši [98], [99]. V splošnem velja, da je pojem spektralna vodljivost analogen vodljivosti pri sistemih brez zakasnitev [100]. Z metodami razširitve Ackermann-ove formule so se ukvarjali avtorji [101], [100], [102], [103]. S posebno modifikacijo Smithovega prediktorja lahko dosežemo krajšanje vseh zakasnenih členov v rezultirajočem karakterističnem polinomu [102]. Krajšanje zakasnenih členov je

---

<sup>11</sup> SISO – Single input single output (angl.) – eno vhodni eno izhodni

<sup>12</sup> MIMO – Multi input multi output (angl.) – več vhodni več izhodni

lahko pomanjkljivost, saj na realnem objektu zaradi prisotnosti napake ocene zakasnitev nikoli ni možno povsem pokrajšati oz. izničiti vplivov zakasnjenih členov. Tako je takšen princip sinteze tudi zelo občutljiv na morebitne spremembe zakasnitev v sistemu.

Eno izmed kompleksnih področij, ki posega na področje abstraktne algebre je vsekakor sinteza regulatorjev s pomočjo postopka faktorizacija oz. deljenja kvazi-polinomov. Kot smo že omenili je v primeru brez zakasnitev Bezout-ova faktorizacija oz. Diophant-ova enačba enostavno rešljiva. Diophant-ovo enačbo se rešuje v obliki sistema linearnih enačb, medtem ko Bezout-ovo identiteto z Evklidovim algoritmom [42]. Rešitev identitete omogoča Q-parametrizacijo oz. Youla-Kučera parametrizacijo vseh rezultirajočih regulatorjev. Prav nasprotno je v primeru zakasnjenih sistemov in obravnave kvazi-polinomov v spremenljivkah  $s$  in  $e^{-st}$ , saj v tem primeru ne obstaja preprosta analitična rešitev faktorizacije. Bezout-ova faktorizacija za sisteme z zakasnitvami se rešuje v obliki matrik dvodimenzionalnih (2-D) polinomov s koeficienti, ki pripadajo obroču celih funkcij [104], [105], [11], [106]. Več dimenzionalne probleme rešuje mnogodimenzionalna teorija sistemov [107]. Metode reševanja problema faktorizacije so predstavljene še v [108]. Zanimiva faktorizacija za SISO sisteme, ki temelji na FIR zgradbi regulatorja je predstavljena v [109].

Mnoge probleme sinteze regulatorjev za sisteme z zakasnitvami rešujejo tudi raznovrstne implementacije opazovalnikov [98], [99], [110]. Zanimiv primer načrtovanja opazovalnika znižanega reda je predstavljen v [111] ali v [112], kjer avtorja rešujeta problem kompenzacije vhodne zakasnitve po principu Smith-ovega prediktorja za nestabilne sisteme.

V tem poglavju uvodoma predstavljamo zapis sistemov z zakasnitvami s prenosno funkcijo ter številne pristope pomikanja polov oz. faktorizacije, ki se obsežno uporabljajo pri sistemih brez zakasnitev. Natančneje obravnavamo postopek reševanja Diophantove enačbe ter podamo številne lastne ugotovitve oz. priporočila za ustrezno izbiro prostih parametrov, ki izhajajo neposredno iz zakonitosti sistema linearnih enačb. V podpoglavju pomikanja polov za sisteme z zakasnitvami se ukvarjamo z dvema različnima strukturama prostih polinomov ter posledično regulatorjev pri katerih dobimo različne lastnosti, ki se odražajo v vplivu prostih polinomov na karakteristični kvazi-polinom. V nadaljevanju se natančneje ukvarjamo z dvema različnima strukturama v primeru ene zakasnitve, kjer podamo številne lastne ugotovitve glede sistemov enačb ter podamo splošne oblike

regulatorjev v primeru obeh predstavljenih struktur. V nadaljevanju predstavimo edinstveno rešitev polinomske sinteze za sisteme z zakasnitvami s pomočjo opazovalnika ter predlagamo sklop kaskadnih opazovalnikov za kompenzacijo transportne zakasnitve, pri čemer ideja predstavlja nadgradnjo obstoječega dela [112]. Poglavje se zaključuje s predstavitvijo edinstvenega postopka izbire ustreznega karakterističnega kvazi-polinoma ter obravnavo postopka izbire optimalnega regulatorja.

## 5.1 Zapis sistemov z zakasnitvami s prenosno funkcijo

Sistem z zakasnitvami zapisan tipa RFDE z diferencialno enačbo z zakasnjnimi členi z vzbujanjem oz. sistem v prostoru stanj z vsemi možnimi zakasnitvami zapišemo [108]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=0}^{m_A} A_i x(t - \tau_{A_i}) + \sum_{i=0}^{m_B} B_i u(t - \tau_{B_i}) \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{m_C} C_i x(t - \tau_{C_i}) + \sum_{i=0}^{m_D} D_i u(t - \tau_{D_i}) \end{aligned}, \quad (5.1)$$

ter sistem tipa NFDE

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=0}^{m_A} A_i x(t - \tau_{A_i}) + \sum_{i=0}^{m_B} B_i u(t - \tau_{B_i}) + \sum_{i=0}^{m_F} F_i \dot{x}(t - \tau_{F_i}) \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{m_C} C_i x(t - \tau_{C_i}) + \sum_{i=0}^{m_D} D_i u(t - \tau_{D_i}) + \sum_{i=0}^{m_G} G_i y(t - \tau_{G_i}) \end{aligned}, \quad (5.2)$$

kjer je  $u(t)$  vhod oz. vzbujanje sistema,  $y(t)$  je izhod sistema,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  pa vektor trenutnih stanj. Sistemu pripada edinstvena rešitev  $y(t)$ ,  $t \geq 0$ , če določenemu vходу  $u(t)$  in začetnih vrednostih  $x(t - \tau_{A_i}) = \phi(t)$ ,  $0 \leq t \leq \tau_{A_i}$ ,  $x(0) = x_0$ . Če lahko posamezne zakasnitve izrazimo v obliki skupnega večkratnika oz. če le te pripadajo množici racionalnih števil sistem (5.2) zapišemo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=0}^{m_A} A_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^{m_B} B_i u(t - i\tau) + \sum_{i=0}^{m_F} F_i \dot{x}(t - i\tau) \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{m_C} C_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^{m_D} D_i u(t - i\tau) + \sum_{i=0}^{m_G} G_i y(t - i\tau) \end{aligned}, \quad (5.3)$$

kjer je  $\tau$  skupni večkratnik vseh zakasnitev v sistemu, prenosno funkcijo zapišemo v obliki prenosne funkcije, ki je racionalna v  $s$  in  $e^{-s\tau}$ . Namesto osnovne enote zakasnitve lahko pišemo novo spremenljivko  $e^{-s\tau} = z$  ter dobimo prenosno funkcijo  $T(s, z)$ .

$$T(s, z) = (1 - G)^{-1} C(s(I - F) - A)^{-1} B + D \quad (5.4)$$

oz. za RFDE

$$T(s, z) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (5.5)$$

kjer so

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^{m_A} A_i e^{-si\tau}, \quad B = \sum_{i=0}^{m_B} B_i e^{-si\tau}, \quad F = \sum_{i=0}^{m_F} F_i e^{-si\tau}, \\ C &= \sum_{i=0}^{m_C} C_i e^{-si\tau}, \quad D = \sum_{i=0}^{m_D} D_i e^{-si\tau}, \quad G = \sum_{i=0}^{m_G} G_i e^{-si\tau}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Predstavljen sistem z zakasnitvami v (5.4) je sistem tipa NFDE. Če upoštevamo  $F_i = G_i = 0$  dobimo sistem tipa RFDE.

V primeru, da so zakasnitve iracionalna števila in jih ne moremo zapisati v smislu njihovega skupnega večkratnika prenosna funkcija ni racionalna v  $e^{-s\tau_i}$ . Takšni funkciji pravimo meromorfna<sup>13</sup> funkcija. Na tem mestu je vredno omeniti tudi teorijo sistemov, kjer je prav tako Laplace-ova spremenljivka  $s$  zastopana s potencami, ki so zapisane v obliki ulomkov. Izvrstno delo na temo sistemov z zakasnitvami in obravnavo frakcijskih sistemov je [18]. S frakcijsko algebro se v tem delu ne bomo ukvarjali in bomo predpostavili racionalne prenosne funkcije v Laplace-ovi spremenljivki. V primeru iracionalnih zakasnitev lahko le te vedno zaokrožimo in jih zapišemo v obliki racionalnih števil, ki jih lahko vedno izrazimo v obliki dovolj majhnega skupnega večkratnika.

Predpostavimo prenosno funkcijo (5.4) v obliki števca in imenovalca oz. v obliki razmerja kvazi-polinomov  $T(s) = B(s) / A(s)$ .

**Definicija 5.1 [109]** Naj bodo  $q_i(s)$  polinomi z realnimi koeficienti za vektor naravnih števil  $i \in \mathbb{N}_1^v$  in  $h_i \in \mathbb{R}^+$  so nenegativne realne zakasnitve v naraščajočem vrstnem redu. Funkcija podana z

<sup>13</sup> Meromorfna funkcija je v matematiki funkcija, ki je holomorfna oz. analitična skoraj povsod na kompleksni ravnini razen v polih imenovalca.

$$q(s) = \sum_{i=1}^v q_i(s) e^{-h_i s} \quad (5.7)$$

je kvazi-polinom, kjer velja  $\deg q_1 \geq \deg q_i$  za vse  $i \in \mathbb{N}_2^v$ . Kvazi-polinom je tipa NFDE (glej prvo poglavje) če obstaja vsaj eden polinom  $i \in \mathbb{N}_2^v$  za katerega velja  $\deg q_1 = \deg q_i$ , drugače je kvazi-polinom tipa RFDE.

Kvazi-polinomi imajo neskončno korenov v kompleksnem prostoru. Koreni kvazi-polinomov tipa RFDE oz. njihove realne in kompleksne komponente se v obliki verig razprostirajo proti neskončnosti v kompleksni ravnini  $\mathbb{C}_-$ . Pri kvazi-polinomih tipa NFDE se vsaj ena izmed verig razprostira proti neskončnosti v obe imaginarni smeri in je vzporedna z imaginarno osjo. Kot smo omenili v prvem poglavju je stabilnost sistem z zakasnitvami prav tako odvisna od lege korenov. Tako korene v  $\mathbb{C}_-$  in  $\mathbb{C}_+$  definiramo kot stabilne oz. nestabilne.

Prenosno funkcijo  $T(s) = B(s)/A(s)$  zapišemo kot kvocient kvazi-polinomov

$$T(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{v_b} b_i(s) e^{-\tau_{b,i} s}}{\sum_{i=1}^{v_a} a_k(s) e^{-\tau_{a,k} s}}, \quad (5.8)$$

kjer sta  $B(s)$  in  $A(s)$  kvazi-polinoma,  $b_i(s)$  in  $a_i(s)$  so polinomi pri različnih zakasnitvah. Če se osredotočimo na zgradbo kvazi-polinomov ugotovimo, da sta zapisana z združenimi koeficienti z različnimi stopnjami Laplace-ove spremenljivke, ki imajo enake zakasnitve.

Če velja, da sta kvazi-polinoma tuja, potem velja, da imata končno število skupnih ničel [108]. Da je prenosna funkcija kavzalna in izvedljiva mora biti prava in mora izpolnjevati pogoja  $\deg b_1 \leq \deg a_1$  in  $\tau_{b,1} \geq \tau_{a,1}$  [108]. Kot smo obravnavali v prejšnjih poglavjih je izračun korenov sistemov z zakasnitvami dokaj kompleksen proces. Korene sistema (5.1) lahko izračunamo z algoritmom [87], korene sistema (5.2) npr. z algoritmom [26]. Podajmo še nekaj splošnih lastnosti kvazi-polinomov.

**Teorem 5.1 [108]** Predpostavimo kvazi-polinom (5.7) in ga zapišemo v obliki

$$q(s) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^v q_{ik} s^i e^{-h_k s} \text{ potem veljajo naslednje trditve:}$$

- I. Če ima kvazi-polinom z največjo stopnjo Laplace-ove spremenljivke  $q_n(s) = s^n \sum_{k=0}^r q_{nk} e^{-l_k s}$  nestabilno ničlo potem ima  $q(s)$  neskončno nestabilnih ničel.
- II. Če kvazi-polinom z največjo stopnjo Laplace-ove spremenljivke nima nestabilne ničle potem ima  $q(s)$  končno število nestabilnih ničel.

**Teorem 5.2 [108]** Prenosna funkcija (5.5) je izvedljiva in obstajajo matrike  $A, B, C$  in  $D$ , če in samo če je (5.5) prava funkcija.

Če ponazorimo Teorem 5.2, lahko prenosno funkcijo (5.5) izvedemo v prostoru stanj. Zapišimo števec in imenovalac prenosne funkcije z združenimi koeficienti z enakimi stopnjami spremenljivke  $s$ ,

$$T(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i (e^{-\tau_{b,j} s}) s^i}{s^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_k (e^{-\tau_{a,l} s}) s^i}, 1 \leq j \leq v_b, 1 \leq l \leq v_a, \quad (5.9)$$

matrike v prostoru stanj zapišemo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{k-2} & -a_{k-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$C = b_0 - a_0 b_n \quad \cdots \quad b_{k-1} - a_{k-1} b_n, D = b_n$$

Matrike (5.10) so zapisane v vodljivostni normalni obliki. Na podoben način sistem zapišemo tudi v spoznavnostni normalni obliki (Frobenius-ova oblika) [111]. Če sistem lahko zapišemo v Frobenius-ovi formi je sistem spektralno spoznaven. Če velja  $a_i \neq 0$  ali  $b_i \neq 0$  potem je sistem spektralno vodljiv, saj velja da more biti rank izraza  $\text{rank } sI - A, B = n$ .

## 5.2 Pomikanje polov različni pristopi

V tem razdelku bomo predstavili metode, ki so v literaturi zelo razširjene in se uporabljajo za izračun regulatorja v vhodno izhodni obliki. Najprej bomo predstavili tehnike, ki se uporabljajo za sisteme brez zakasnitev.

### 5.2.1 Bezoutova faktorizacija

Bezoutova faktorizacija oz. faktorizacija tujih polinomov je definirana v smislu rešitve izraza oz. Bezoutove identitete:

$$NX + MY = 1 \quad (5.11)$$

kjer je objekt definiran  $P = N/M$ , regulator pa  $K = X/Y$ . Kot je dobro poznano ima Bezoutova identiteta splošno rešitev, torej, če najdemo eno rešitev lahko izrazimo vse rešitve.

$$N(X + MQ) + M(Y - NQ) = 1 \quad (5.12)$$

Tako lahko s pomočjo splošne rešitve Bezoutove identitete izrazimo množico vseh regulatorjev, ki izpolnjujejo izraz (5.12)

$$K = \left\{ \frac{X + MQ}{Y - NQ} : Q \in S \right\}, \quad (5.13)$$

kjer  $S$  predstavlja množico vseh stabilnih prenosnih funkcij. Faktorizacijo (5.12) po [41] izrazimo tako, da so  $N, M, X, Y \in S$  stabilne prenosne funkcije. S tem lahko z ustrezno izbiro imenovalcev prenosnih funkcij ter s  $Q$  vplivamo na lego polov in ničel zaprte zanke. Izraza za občutljivost in komplementarno občutljivost dobimo naslednjo obliko:

$$S = M(Y - NQ), \quad (5.14)$$

in

$$T = N(X + MQ). \quad (5.15)$$

Faktorja  $X, Y \in S$  lahko poiščemo s pomočjo Evklidovega algoritma ali v prostoru stanj tako, da poiščemo takšni matriki  $F$  in  $H$ , ki stabilizirata matriki  $A + BF$  in  $A + HC$ .



$$\begin{aligned}
 M(s) &:= \left[ \begin{array}{c|c} A+BF & B \\ \hline F & 1 \end{array} \right] \\
 N(s) &:= \left[ \begin{array}{c|c} A+BF & B \\ \hline C+DF & D \end{array} \right] \\
 X(s) &:= \left[ \begin{array}{c|c} A+HC & H \\ \hline F & 0 \end{array} \right] \\
 Y(s) &:= \left[ \begin{array}{c|c} A+HC & -B-HD \\ \hline F & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Pri čemer zapisi v matrikah pomenijo realizacijo sistema v prostoru stanj. Za sistem  $P$  s prenosno funkcijo  $P = C(sI - A)^{-1}B + D$  zapišemo takšno realizacijo

$$P(s) := \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]. \tag{5.17}$$

### 5.2.2 Dvojna Bezoutova faktorizacija

Dvojno Bezoutovo identiteto zapišemo z združitvijo leve in desne faktorizacije enojnih Bezoutovih identitet. Leva oz. desne faktorizacija sta v primeru SISO sistemov enaki, v primeru MIMO sistemov pa različni. Tako gre v primeru SISO sistemov za splošnejši zapis v primerjavi z enojno Bezoutovo identiteto. Za prenosne funkcije  $M(s), N(s), \tilde{M}(s), \tilde{N}(s), X(s), Y(s), \tilde{X}(s), \tilde{Y}(s) \in H_\infty$ , kjer velja, da lahko objekt izrazimo v obliki leve oz. desne faktorizacije

$$P(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s) = N(s)M^{-1}(s), \tag{5.18}$$

in regulator prav tako

$$P(s) = Y^{-1}(s)X(s) = \tilde{X}(s)\tilde{Y}^{-1}(s), \tag{5.19}$$

lahko zapišemo dvojno Bezoutovo identiteto v obliki

$$\begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & -\tilde{X}(s) \\ N(s) & \tilde{Y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

ter podobno kot v (5.13) množico vseh regulatorjev

$$K = (\tilde{X} - M\tilde{Q})(\tilde{Y} + N\tilde{Q})^{-1} = (Y + Q\tilde{N})^{-1}(X - Q\tilde{M}) : Q, \tilde{Q} \in H_\infty. \tag{5.21}$$

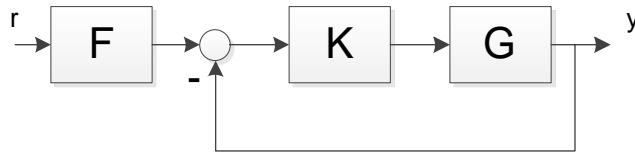
Faktorje  $X(s), Y(s), \tilde{X}(s), \tilde{Y}(s) \in H_\infty$  določata izraza:

$$\begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A+HC & -(B+HD) & H \\ \hline F & I & 0 \\ C & -D & I \end{array} \right] \quad (5.22)$$

$$\begin{bmatrix} M(s) & -\tilde{X}(s) \\ N(s) & \tilde{Y}(s) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A+BF & B & -H \\ \hline F & I & 0 \\ C+DF & D & I \end{array} \right] \quad (5.23)$$

### 5.2.3 Reševanje Diophantove enačbe

Klasična tehnika pomikanja polov za SISO sisteme v vhodno/izhodnem opisu sestoji iz dveh prostostnih stopenj in sicer, regulatorja  $K$  in predfiltra  $F$  kot prikazuje Slika 5.1. Najprej se načrta regulator, ki izpolnjuje zahteve robustne stabilnosti ter dinamike, nato se načrta še predfilter s katerim lahko dodatno vplivamo na prenihaj in frekvenčne lastnosti zaprte zanke. [84], [92]



Slika 5.1 Zaprtoznančni sistem

Predpostavimo izvedljiv sistem  $G=B/A$ , kjer sta  $B, A$  tuja in regulator  $K=P/R$  ter zapišimo sistem v zaprti zanki oz. prenosno funkcijo komplementarne občutljivosti:

$$T = F \frac{BP}{AR + BP} \quad (5.24)$$

kjer so posamezni elementi  $A(s), B(s), P(s), R(s)$  polinomi v Laplace-ovi spremenljivki. Komplementarno občutljivost tako zapišemo

$$T = F \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i \sum_{i=0}^l p_i s^i}{\left( s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i \right) \left( s^k + \sum_{i=0}^{k-1} r_i s^i \right) + \sum_{i=0}^m b_i s^i \sum_{i=0}^l p_i s^i} = F \frac{\sum_{i=0}^{m+l} c_{ni} s^i}{s^{n+k} + \sum_{i=0}^{n+k-1} c_{di} s^i} = F \frac{C_n}{C_d} \quad (5.25)$$

kjer  $C_d$  karakteristični polinom zaprte zanke. Karakteristični polinom določata polinoma objekta in regulatorja, ki sestavljata sistem linearnih enačb. Ob predpostavljenem  $C_d$  lahko s pomočjo rešitve sistema linearnih enačb določimo vrednosti koeficientov regulatorja.

Načrtovanje predfiltra lahko v primeru, da  $C_n$  nima ničel v  $\Re(s) > 0$  predstavimo v obliki krajšanja ničel

$$F = \frac{T_{yr}}{T}, \quad (5.26)$$

kjer je  $F$  stabilna prenosna funkcija. V nasprotnem primeru problem predstavimo kot problem uskladitve modelov

$$\min \|T_{yr} - FT\|_{\infty}, \quad (5.27)$$

kjer v procesu optimizacije spreminjamo prenosno funkcijo  $F$  v smislu minimizacije izraza (5.27).

Iz rešljivosti sistema linearnih enačb dobimo pogoje rešljivosti problema

$$\left( s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i \right) \sum_{i=0}^k r_i s^i + \sum_{i=0}^m b_i s^i \sum_{i=0}^l p_i s^i = s^{n+k} + \sum_{i=0}^{n+k-1} c_{di} s^i \quad (5.28)$$

v smislu ustreznega reda polinomov regulatorja. Kot je dobro poznano je sistem linearnih enačb rešljiv, če je v sistemu najmanj toliko spremenljivk kot je enačb. Sistem je rešljiv in obstaja natanko ena rešitev sistema linearnih enačb, če velja

$$\deg R = \deg A - 1, \quad \deg R = \deg P. \quad (5.29)$$

Sistem je rešljiv in obstaja neskončna množica parametričnih rešitev sistema, če velja

$$\deg R > \deg A - 1, \quad \deg R = \deg P. \quad (5.30)$$

Če primerjamo zapis (5.28) z Bezoutovo identiteto (5.11), ugotovimo, da gre za podoben zapis, vendar za različen pristop glede izračuna faktorizacije.

Sistem linearnih enačb v primeru, da velja pogoj (5.29) zapišemo v matrični obliki

$$C_d = SZ, \quad (5.31)$$

rešitev izrazimo kot

$$Z = S^{-1}C_d \quad (5.32)$$

kjer je  $Z = r_k \cdots r_0 \ p_l \cdots p_0^T, k=l$  in

$$S = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & b_{n-1} & b_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & & \vdots & b_{n-1} & \ddots & \\ a_0 & \vdots & \ddots & & b_0 & & \ddots & \\ 0 & a_0 & & 0 & 0 & b_0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & a_n & \vdots & 0 & \ddots & b_n \\ & \vdots & \ddots & a_{n-1} & & \vdots & \ddots & b_n \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{bmatrix}_{(n+k+1) \times (k+l+2)} \quad (5.33)$$

kjer velja  $b_n, \dots, b_{m+1} = 0$ .

Ker velja, da so polinomi  $A(s), R(s)$  in  $C_d(s)$  monični, prva vrstica matrike  $S$  vedno rezultira k enolično določenemu izrazu, zato lahko prvo vrstico oz. stolpec mirno izpustimo, vendar je potrebno uveljavljeno spremembo upoštevati pri karakterističnem polinomu in regulatorju  $Z$  na podoben način kot v primeru, da so v sistemu proste spremenljivke.

**Predpostavka 5.1** Če za sistem  $G$  velja pogoj (5.30), potem stolpce, ki so odraz prostih parametrov, v matriki  $S$  eliminiramo ter modificiramo  $C_d$  tako, da eliminirane stolpce pomnožene s prostimi parametri od  $C_d$  odštejemo.

V primeru (5.30) in, da velja  $\deg R - \deg A + 1 = h$  najprej zapišemo matriko  $S$  kot je v (5.33), nato v regulatorju izberemo  $h$  prostih parametrov z indeksi  $H = x_1, \dots, x_i, \dots, x_h : x_i \in 1, \dots, k+l+2$ , kjer zapišemo množico prostih parametrov kot  $Z_H \subset Z$ . Iz vektorja spremenljivk  $Z$  eliminiramo proste spremenljivke in zapišemo nov vektor spremenljivk  $Z_n = Z \setminus Z_H$ . Vseh  $h$  stolpcev v matriki  $S$  z indeksi  $H$  pomnoženih s posameznim prostim parametrom odštejemo od karakterističnega polinoma in tako oblikujemo nov karakteristični polinom. Te iste stolpce eliminiramo iz matrike  $S$  in dobimo  $S_n = S_{*,i}, i \in 1, \dots, k+l+2 \setminus H$ . Sistem enačb (5.31) nato zapišemo

$$C_d = S_n Z_n + S_H Z_H, \quad (5.34)$$

in rešitev

$$Z_n = S_n^{-1}(C_d - S_H Z_H). \quad (5.35)$$

**Predpostavka 5.2** Če so polinomi  $A(s), R(s)$  in  $C_d(s)$  monični, je spremenljivka  $r_k=1$  enolično določena, če je prenosna funkcija  $G$  strogo prava.

Rezultat predpostavke (**Predpostavka 5.2**) je, da lahko problem izračuna regulatorja zmanjšamo za eno dimenzijo. Pri postopku izračuna regulatorja lahko eliminiramo prvo vrstico v matriki (5.33) in karakterističnem polinomu  $C_d$ , saj je vrednost  $r_k=1$  enolična. Z eliminacijo prve vrstice je potrebno eliminirati tudi prvi stolpec na podoben način kot predlaga **Predpostavka 5.1**.

V primeru (5.30), da ima sistem množico parametričnih rešitev, ki so posledica prostih parametrov, ki ji moramo izbrati sami, zna biti izbira dokaj zapleten proces, saj lahko za napačno izbiro in napačnimi vrednostmi prostih parametrov ogrozimo rešljivost sistema (5.35). Sistem je rešljiv če je matrika  $S_n$  v izrazu (5.35) obrnljiva, kar pomeni, da z izbiro prostih parametrov ne smemo ogroziti nesingularnosti matrike.

**Predpostavka 5.3** Če velja pogoj (5.30) in je prenosna funkcija sistema prava ( $m = n$ ), za prosta parametra ne smemo hkrati izbrati parametrov  $r_k$  in  $p_l$  ali  $r_0$  in  $p_0$ , saj s tem matrika  $S_n$  postane singularna [84].

### Dokaz

V matriki (5.33) po (**Predpostavka 5.1**) eliminiramo stolpca z vodilnima členoma  $a_n$  in  $b_n$  v prvi vrstici oz. stolpca s členoma  $a_0$  in  $b_0$  v zadnji vrstici. Posledica eliminacije stolpcev je ničelna prva oz. zadnja vrstica matrike  $S_n$ . Matrika z ničelno vrstico ali stolpcem je singularna in tako ni obrnljiva.

Predpostavko (**Predpostavka 5.3**) lahko enostavno razširimo tudi na ostale vrstice matrike  $S_n$ . Višji kot izberemo red regulatorja več dobimo prostih parametrov. Tako lahko ne glede na red števca oz. imenovalca sistema z dovolj visokim regulatorjem vedno dobimo toliko prostih parametrov, da lahko z neustrezno izbiro prostih parametrov oz. z eliminacijo stolpcev v matriki  $S$  vedno postavimo poljubno vrstico v matriki  $S_n$  na nič. V podobnem smislu lahko z neustrezno izbiro prostih parametrov povzročimo tudi linearno odvisnost posameznih vrstic kar ponovno rezultira k singularni matriki  $S_n$ .

**Predpostavka 5.4** Največje število ne ničelnih elementov v vrsticah v matriki  $S$  je odvisno od stopnje števca in imenovalca sistema in je enako  $n+m$ . Z izbrano stopnjo regulatorja  $k=l=2n+m-1$ , dosežemo  $n+m$  prostih parametrov in posledično lahko z neustrezno izbiro prostih parametrov povzročimo ničelno vrednost vsake vrstice v matriki  $S_n$ .

Kot smo ugotovili v predstavljenih predpostavkah je lahko izbira prostih parametrov dokaj zahtevno opravilo. Obstaja preprost postopek izbire ustreznih prostih parametrov.

**Predpostavka 5.5** Če sistem nima pola in ničle v  $s=0$ , izberemo proste parametre iz množice parametrov števca  $Z_H \in p_0, \dots, p_l$  ali imenovalca  $Z_H \in r_0, \dots, r_{k-(n-m)}$  regulatorja, s tem ne bomo povzročili singularne matrike  $S_n$ .

Če ima sistem večkratni pol v  $s^p=0$ , potem je priporočljivo izbrati proste parametre v  $Z_H \in p_{p+1}, \dots, p_l$ . Zaradi zmanjšane števila parametrov v matriki  $S$  zaradi pomika parametrov imenovalca navzgor po vrsticah v primerjavi s parametri števca objekta, lahko z izbiro prostih parametrov z nizkimi indeksi hitro dosežemo ničelne vrstice v  $S_n$ .

Če ima sistem večkratno ničlo v  $s^p=0$  potem je priporočljivo izbrati proste parametre v  $Z_H \in r_p, \dots, r_{k-(n-m)}$ . V tem primeru bodo navzgor pomaknjeni parametri števca objekta v primerjavi s parametri imenovalca. Tako v tem primeru ni priporočljivo

izbrati parametrov regulatorja z najnižjimi indeksi, saj so desno od njih v matriki  $S$  same ničle.

Podobno kot smo zapisali splošno rešitev Bezoutove identitete (5.12) in posledično množico vseh regulatorjev (5.13) lahko podobno zapišemo tudi v primeru Diophantove enačbe. Po ustrezni določitvi prostih parametrov, določitvi njihovih vrednosti in izračunu oz. določitvi parametrov regulatorja, lahko določimo splošno rešitev Diophantove enačbe ter posledično množico vseh regulatorjev, ki zaprti zanki določajo natančno predpostavljen zaprtozančni karakteristični polinom.

Splošna rešitev Diophantove enačbe:

$$A(R - B\lambda) + B(P + A\lambda) = C_d, \quad (5.36)$$

kjer je  $\lambda$  polinom stopnje  $k - n + 1$  oz. polinom  $\lambda$  ima natanko toliko parametrov kot je število prostih parametrov v sistemu. To pomeni, da je spreminjanje parametrov regulatorja na račun prostih parametrov neposredno povezano s polinomom  $\lambda$ . Tako lahko iz stare in nove vrednosti posameznih prostih parametrov z rešitvijo linearnega sistema enačb določimo vrednost koeficientov polinoma  $\lambda$ . Z neposredno povezavo med prostimi parametri in koeficienti polinoma  $\lambda$  lahko pri postopku optimizacije regulatorja na primer spreminjamo koeficiente polinoma  $\lambda$  in nato iz njih določimo vrednosti prostih parametrov. To pomeni, da lahko regulator implementiramo na dva ekvivalentna načina v obliki polinomov s prostimi parametri ali v splošni obliki s polinomom  $\lambda$ :

$$K = \left\{ \frac{P + A\lambda}{R - B\lambda} : \lambda \in S \right\}. \quad (5.37)$$

Izraza za občutljivost in komplementarno občutljivost zapišemo:

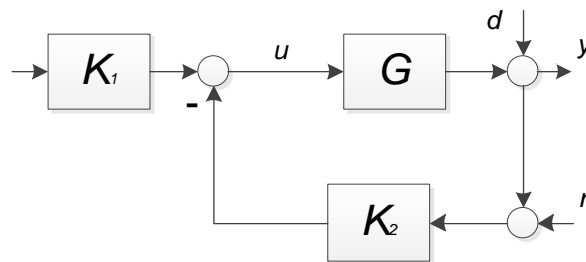
$$S = \frac{A(R - B\lambda)}{AR + BP}, \quad (5.38)$$

$$T = \frac{B(P + A\lambda)}{AR + BP}. \quad (5.39)$$

Občutljivost in komplementarna občutljivost sta odvisni od vrednosti prostih parametrov oz. od polinoma  $\lambda$ . Tako lahko znotraj množice vseh regulatorjev, ki zagotovijo zaprtozančnem sistemu natančno določen karakteristični polinom, izberemo takšen regulator, ki izpolnjuje zastavljene kriterije robustne stabilnosti in robustnega učinka.

Obravnavan postopek načrtovanja regulatorjev lahko apliciramo tudi na podobno zgradbo, če regulator prestavimo v povratno vejo, dobimo regulator z dvema prostostnima stopnjama [41], kjer lahko zagotovimo neodvisno frekvenčno karakteristiko sledenja od frekvenčne karakteristike izhodne motnje, saj velja

$$y = \frac{GK_1}{1+GK_2} r - \frac{GK_2}{1+GK_2} n \quad (5.40)$$



Slika 5.2 Regulator z dvema prostostnima stopnjama

Predpostavimo  $K_1 = P_1 / R_1$ ,  $K_2 = P_2 / R_2$  in  $G = B / A$  ter z upoštevanjem (5.37) dobimo naslednje izraze za sledenje vhodnemu signalu na izhodu

$$\frac{y}{r} = \frac{B(R_2 - B\lambda)}{AR_2 + BP_2} K_1, \quad (5.41)$$

občutljivost na motnje

$$\frac{y}{n} = \frac{B(R_2 - B\lambda)}{AR_2 + BP_2} K_2. \quad (5.42)$$

Kot vidimo sta zgornja izraza povezana, saj v števcih nastopa enaka komponenta regulatorja. Tako z regulatorjem  $K_2$  nastavimo prenosno funkcijo občutljivosti motnje, s  $K_1$  pa sledenje vходу. Zapišimo še prenosno funkcijo aditivnega odstopanja

$$\frac{u}{d} = \frac{A(P_2 + A\lambda)}{AR_2 + BP_2}, \quad (5.43)$$

kjer ugotovimo, da z regulatorjem  $K_2$  vplivamo na robustnost in izhodno motnjo. Na ta dva izraza ni moč neodvisno vplivati, saj sta oba pogojena z regulatorjem  $K_2$ . Z regulatorjem  $K_1$  pa lahko oblikujemo poljubno karakteristiko sledenja povsem neodvisno.



### 5.2.4 Izbira karakterističnega polinoma

Izbira ustreznega karakterističnega polinoma je eden izmed osrednjih korakov pri sintezi regulatorja po postopkih različnih faktorizacij. Pri postopku, kjer se regulator izračuna na podlagi rešitve linearnega sistema enačb oz. rešitve Diophantove enačbe, rešitev problema neposredno temelji na ustreznem izbranem karakterističnem polinomu. V primeru predstavljenih Bezoutovih faktorizacij, ki temeljijo na rešitvi enojne oz. dvojne Bezoutove identitete se postopek določitve karakterističnega polinoma posredno skriva delno v faktorizaciji prenosnih funkcij Bezoutove identitete (5.12), delno v poljubno izbrani prenosni funkciji  $Q$  (5.15). Ustrezno izbran zaprtizančni karakteristični polinom je seveda odraz želenega obnašanja te tega, ki ga lahko okarakteriziramo z različnimi kriteriji v smislu časa vzpona, časa nastavitve, največjega dopustnega prenihaja. V tem delu bomo prevzeli določitev karakterističnega polinoma po metodi Manabe-jeve forme [113], [114], [115], ki temelji na Lipatovih indeksih, saj je metoda enostavna in preprosta za implementacijo. Na podlagi Manabe-jevega obrazca lahko izberemo polinom poljubnega reda, ki ustreza izbranemu času nastavitve. Manabe-jev obrazec ima naslednjo obliko:

$$C_p = c_0 \left( \sum_{v=2}^i \left( \prod_{w=1}^{v-1} \frac{1}{\gamma_{v-w}^w} \right) (\tau s)^v + \tau s + 1 \right), \quad (5.44)$$

kjer so  $\gamma_i$  Lipatovi stabilnostni indeksi [113],

$$\gamma = 2.5, 2, 2, \dots, \quad (5.45)$$

kjer je le prvi indeks različen od preostalih. Časovno konstanto časa nastavitve izberemo v obrazcu za  $\tau$ ,

$$\tau = \frac{t_n}{(2.5 \sim 3)}, \quad (5.46)$$

kjer je  $t_n$  čas nastavitve.

Predstavljeno formo, ki se uporablja za določitev karakterističnega polinoma poljubnega reda predvsem za sisteme brez zakasnitev, bomo v prihodnjih poglavjih aplicirali tudi na sisteme z zakasnitvami, kjer bomo s predstavljenim obrazcem določali polinom dominantnih polov sistema z zakasnitvami.

### 5.3 Pomikanje polov za sisteme z zakasnitvami

V tem razdelku bomo predstavili razširitev faktorizacije regulatorja z neposrednim reševanjem večih Diophantovih enačb na sisteme tipa RFDE z notranjimi in izhodnimi zakasnitvami, ki so brez vhodno/izhodnih transportnih zakasnitev. Predpostavimo sistem, kjer so prisotne le notranje zakasnitve oz. izhodne zakasnitve.

Sistem (5.1) zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=0}^{m_A} A_{M,i} x(t-ih) + B_M u \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{m_C} C_{M,i} x(t-ih) + D_M u \end{aligned} \quad (5.47)$$

kjer je  $h$  osnovni večkratnik s katerim lahko izrazimo vse zakasnitve in velja  $C_{M,0} \neq \emptyset$ , kar bi pomenilo, da ima sistem izhodno transportno zakasnitev. Indeksi  $M$  ponazarjajo, da so  $X_M$  matrike, saj bomo v nadaljevanju uporabili  $A$  za polinom imenovalca prenosne funkcije sistema. Sistem  $G = B/A$  zapišemo v vhodno izhodni obliki v obliki SISO prenosne funkcije (5.5)

$$G = \frac{B}{A} = \sum_{i=0}^{m_C} C_M^T e^{-ihs} \left( sI - \sum_{i=0}^{m_A} A_{M,i} e^{-ihs} \right)^{-1} B_M + D_M, \quad (5.48)$$

kjer sta števec in imenovalac prenosne funkcije kvazi-polinoma (5.7), ki jih zapišemo

$$\begin{aligned} A &= \det \left( sI - \sum_{i=0}^{m_A} A_{M,i} e^{-ihs} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{n_h} A_i(s) e^{-ihs} = \sum_{i=0}^n A_i^*(e^{-hs}) s^i = \sum_{i=0}^{n_h} \sum_{k=0}^n a_{ik} s^k e^{-ihs} \\ B &= \sum_{i=0}^{m_C} C_M^T e^{-ihs} \text{Adj} \left( sI - \sum_{i=0}^{m_A} A_{M,i} e^{-ihs} \right) B_M + D_M A = \\ &= \sum_{i=0}^{m_h} B_i(s) e^{-ihs} = \sum_{i=0}^m B_i^*(e^{-ihs}) s^i = \sum_{i=0}^{m_h} \sum_{k=0}^m b_{ik} s^k e^{-ihs} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Kot smo že pokazali v (5.9) lahko kvazi-polinoma števca oz. imenovalca zapišemo na dva različna načina v nekoliko bolj pregledni obliki in sicer z združenimi koeficienti z enakimi stopnjami bodisi spremenljivke  $s$  bodisi operatorja zakasnitve  $e^{-ihs}$ . To ponazarjajo polinomi  $X_i(s)$ , ki so Laplace-ovi polinomi stopnje  $\deg X_i \leq n$  in so pomnoženi z ustrezno zakasnitvijo  $e^{-ihs}$ . Polinomi  $X_i^*(e^{-hs})$  so polinomi zakasnitev pri enakih stopnjah  $s^i$ .

Zakon vodenja je definiran z regulatorjem v vhodno izhodni obliki tako kot v (5.24) (Slika 5.1)

$$u(t) = -\frac{P(s)}{R(s)}(y(t) - r(t)), \quad (5.51)$$

posledično zapišemo zaprtizančni karakteristični polinom (5.24)

$$AR + BP = C_d, \quad (5.52)$$

kjer sta kvazi-polinoma števca in imenovalca regulatorja definirana

$$K = \frac{P}{R} = \frac{\sum_{i=0}^{l_h} P_i(s) e^{-ihs}}{\sum_{i=0}^{k_h} R_i(s) e^{-ihs}} = \frac{\sum_{i=0}^l P_i^*(e^{-ihs}) s^i}{\sum_{i=0}^k R_i^*(e^{-ihs}) s^i} = \frac{\sum_{i=0}^{l_h} \sum_{k=0}^l p_{ik} s^k e^{-ihs}}{\sum_{i=0}^{k_h} \sum_{k=0}^k r_{ik} s^k e^{-ihs}}, \quad (5.53)$$

kjer velja  $\deg R_0 = \deg P_0 > \deg R_i = \deg R_{i+1} = \deg P_i = \deg P_{i+1}, i = 1, \dots, k_h - 1$ , če je regulator tipa RFDE in  $\deg R_i = \deg R_{i+1} = \deg P_i = \deg P_{i+1}, i = 0, \dots, k_h - 1$ , če je regulator tipa NFDE.

Z regulatorjem (5.53) in sistemom (5.48) zapišemo zaprtizančni polinom (5.52), kjer združimo posamezne polinome z enakimi stopnjami zakasnitev.

$$AR + BP = \sum_{j=0}^{k_h+n_h} \sum_{i=\text{Max}(0, j-l_h)}^{\text{Min}(j, n_h)} A_i R_{j-i} + B_i P_{j-i} e^{-jhs} = C_d = \sum_{i=0}^{k_h+n_h} C_{d,i} e^{-ihs} \quad (5.54)$$

Če v kvazi-polinomih regulatorja izberemo enake zakasnitve kot nastopajo v objektu  $G$ , dobimo v (5.54) posamezne Diophantove enačbe kvazi-polinomov regulatorja in objekta pri določenih kombinacijah zakasnitev. Vsaki Diophantovi enačbi ustreza določen

karakteristični polinom pomnožen z ustreznim operatorjem zakasnitve  $e^{-ihs}$ . Celoten karakteristični kvazi-polinom  $C_d$  dobimo kot vsoto posameznih karakterističnih kvazi-polinomov. Če velja, da je  $C_d$  sistem z zakasnitvami tipa RFDE morata seveda biti tipa RFDE tudi objekt oz. regulator.

**Predpostavka 5.6** Če velja, da je  $C_d$  kvazi-polinom tipa RFDE ( $\deg C_{d,0} > \max(\deg C_{d,i}), i = 1, \dots, k_n + n_h$ ) potem mora veljati, da sta kvazi-polinoma  $A$  in  $R$  tipa RFDE ( $\deg A_0 > \max(\deg A_i), i = 1, \dots, n_h$  oz.  $\deg B_0 > \max(\deg B_i), i = 1, \dots, m_h$ ), če velja  $n > m$  in, da so vsi kvazi-polinomi  $A, R, B, P$  tipa RFDE, če velja  $n = m$ .

### Dokaz

Predpostavka nakazuje, če množimo dva RFDE sistema je rezultirajoč sistem tudi RFDE sistem. Dokaz bomo izvedli z dokazom nasprotne trditve in sicer, če množimo RFDE kvazi-polinom z NFDE kvazi-polinomom vedno dobimo NFDE kvazi-polinom. Zapišemo

$$A_1 e^{-hs} \left( \sum_{i=0}^{k_h} R_i e^{-ihs} \right) = C_p = e^{-hs} \left( A_1 \sum_{i=0}^{k_h} R_i e^{-ihs} \right), \deg R_0 > \max(\deg R_i), i = 1, \dots, k_h,$$

kjer je  $A_1(s)e^{-hs}$ ,  $\deg A_1 = n$  kvazi-polinom tipa NFDE, saj je zakasnen tudi najvišji člen v polinomu  $A_1(s)$ . Kot vidimo lahko to zakasnitev tudi pri množenju s kompleksnim kvazi-polinomom RFDE enostavno izpostavimo. Tako za rezultirajoč  $C_p$  velja, da je tipa NFDE, saj so vsi členi kvazi-polinoma zakasneni najmanj za  $e^{-hs}$ .  $\square$

Predpostavimo enako število zakasnitev v kvazi-polinomih regulatorja  $k_h = l_h$ , tako sta pri vsaki stopnji zakasnitve prisotna oba polinoma  $P_i$  in  $R_i$ . Podajmo naslednji rezultat rešljivosti  $k_h = l_h$  Diophantovih enačb z enako stopnjo zakasnitve  $e^{-jhs}$ . Rešitev je delno povzeta po [73], vendar gre tam za nekoliko drugačen postopek sinteze in izbire strukture ter prostih parametrov regulatorja.

**Predpostavka 5.7** Če polinoma  $A$  in  $B$  nimata skupnih korenov, potem velja, da lahko v zaprtozančnem sistemu rešimo  $k_h = l_h$  število polinomskih Diophantovih enačb katerim lahko priredimo poljubni polinom  $C_{d,i}$

$$A_0 R_i + B_0 P_i = C_{d,i} - \sum_{j=1}^i A_j R_{i-j} + B_j P_{i-j} , \quad (5.55)$$

pri čemer vodilni člen vsote ne sme okrajšati vodilnega člena  $c_{d,i}^n$  karakterističnega polinoma  $C_{d,i}$ ; kjer v posamezni Diophantovi enačbi nastopita  $R_i$  in  $P_i$ , neodvisno od vrednosti zakasnitve  $h \geq 0$ , kjer velja  $\deg R_i = \deg A_0 - 1$ ,  $\deg R_i = \deg P_i$  in, da so izbrane zakasnitve v kvazi-polinomih regulatorja enake kot v sistemu  $G$ .

Kot je razvidno iz (5.55) dobimo  $k_h = l_h$  število ugnezdenih Diophantovih enačb, ki jih lahko neodvisno rešimo, saj vsaka posamezna enačbe vsebuje zraven spremenljivk prejšnjih enačb, tudi neodvisni spremenljivki  $R_i$  oz.  $P_i$ . Vse naslednje enačbe vsebujejo samo spremenljivke prejšnjih enačb.

V primeru izbire reda regulatorja, ki rezultira k prostim spremenljivkam v posameznih zaprtozančnih enačbah lahko zapišemo naslednji rezultat.

**Predpostavka 5.8** Če polinoma  $A$  in  $B$  nimata skupnih korenov in velja  $\deg R_i > \deg A_0 - 1$  pri  $\deg R_i = \deg P_i$ , potem velja, da za sistem polinomskih Diophantovih enačb obstaja neskončno mnogo regulatorjev za natančno določen karakteristični kvazi-polinom  $C_d$  po zgledu (5.36)

$$K = \left\{ \frac{P + A\lambda}{R - B\lambda} \right\} = \left\{ \frac{(P_0 + \dots + P_{k_h}) + (A_0 + \dots + A_{n_h})(\lambda_0 + \dots + \lambda_{k_h})}{(R_0 + \dots + R_{k_h}) - (B_0 + \dots + B_{m_h})(\lambda_0 + \dots + \lambda_{k_h})} : \lambda_i \in H_\infty, i = 0, \dots, k_h \right\} , \quad (5.56)$$

kjer dobimo  $k_h = l_h$  rešljivih enačb s poljubno izbranimi polinomi  $C_{d,i}$ , zaprtozančni sistem dobi obliko

$$\begin{aligned}
 & A_0(R_i - \sum_{j=0}^{\min(i, m_h)} B_j \lambda_{i-j}) + B_0(P_i + \sum_{j=0}^{\min(i, n_h)} A_j \lambda_{i-j}) = \\
 & = C_{d,i} - \sum_{j=1}^i \left( A_j(R_{i-j} - \sum_{k=0}^{\min(i-j, m_h)} B_k \lambda_{i-j-k}) + B_j(P_{i-j} + \sum_{k=0}^{\min(i-j, n_h)} A_k \lambda_{i-j-k}) \right), \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

pri čemer vodilni člen vsote ne sme okrajšati vodilnega člena  $c_{d,i}^n$  karakterističnega polinoma  $C_{d,i}$ ;  $i$  je stopnja zakasnitve pri kateri dobimo Diophantovo enačbo;  $\lambda_i$  je polinom za katerega velja  $\deg \lambda_i = \deg R_i - \deg A_i + 1$ , oz.  $\lambda_i$  je natanko takšnega reda kot je število prostih parametrov v posamezni Diophantovi enačbi in  $\lambda_i$  ne vpliva na vrednost odvisnih karakterističnih kvazi-polinomov.

### Dokaz

Če predpostavljeno strukturo regulatorja (5.56) vstavimo v zaprtizančni sistem enačb (5.54) dobimo sistem (5.57). Polinomi  $\lambda_i$  so v sistem (5.57) vpeljani na takšen način, da se okrajšajo in dobimo sistem (5.54), kar pomeni, da prosti polinomi ne vplivajo na izbran karakteristični kvazi-polinom  $C_d$ . □

**Opomba 5.1** Struktura regulatorja (5.56) v sistemu Diophantovih enačb (5.57) povzroči, da je sklop odvisnih enačb, ki jih ni moč neodvisno rešiti neodvisen od prostih parametrov v sistemu oz. od polinomov  $\lambda_i$ . To pomeni, da lahko s prostimi spremenljivkami oz. polinomi  $\lambda_i$  pomikamo rešitve regulatorjev na takšen način, da ne vplivamo na spremembo celotnega karakterističnega kvazi-polinoma. Odvisne Diophantove enačbe so tako odvisne le od prvih rešitev regulatorjev. Prvo rešitev rešljivih enačb zagotovimo z ustrežno izbiro prostih parametrov, ki jih lahko prav tako izrazimo v obliki polinomov (**Predpostavka 5.9**). Če pomikamo proste spremenljivke v posameznih enačbah neodvisno od drugih enačb, potem s tem vplivamo na odvisne enačbe oz. odvisne dele karakterističnih polinomov kot bomo pokazali v naslednji predpostavki (**Predpostavka 5.9**).

**Predpostavka 5.9** Če polinoma  $A$  in  $B$  nimata skupnih korenov in če velja  $\deg R_i > \deg A_0 - 1$  pri  $\deg R_i = \deg P_i$ , potem velja, da za posamezno polinomsko Diophantovo enačbo obstaja neskončno mnogo regulatorjev s strukturo

$$K = \left\{ \frac{(P_0 + \dots + P_{k_h}) + A_0(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h})}{(R_0 + \dots + R_{k_h}) - B_0(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h})} : \kappa_i \in H_\infty, i = 0, \dots, k_h \right\}, \quad (5.58)$$

ki definira množico zaprtozančnih karakterističnih kvazi-polinomov  $C_d$ , kjer dobimo  $k_h = l_h$  rešljivih enačb s poljubno izbranimi polinomi  $C_{d,i}$  in za zaprtozančni sistem enačb (5.54) velja  $R_i = R_i - B_0\lambda_i$  in  $P_i = P_i + A_0\lambda_i$ , pri čemer vodilni člen izmed členov, ki jih je potrebno odšteti od karakterističnega polinoma ne sme okrajšati člena  $c_{d,i}^n$  karakterističnega polinoma  $C_{d,i}$ .

**Opomba 5.2** Hitro opazimo, da so v primeru predpostavljene strukture regulatorja (5.58), rešitve posameznih enačb odvisne tudi od prostih parametrov oz. polinomov  $\lambda_i$ . To pomeni, da se ob spreminjanju slednjih spreminjajo tudi posamezni karakteristični polinomi odvisnih enačb. Tako ne moremo določiti splošne rešitve sklopa Diophantovih enačb, ki so rešljive in je posledično potrebno ob vsaki spremembi polinomov  $\lambda_i$  ponovno po vrsti izračunati vse enačbe.

Podamo lahko še končni rezultat o rešljivosti enačb in strukturi regulatorja v primeru prisotnosti prostih parametrov z združenimi rezultati predpostavk (**Predpostavka 5.8** in **Predpostavka 5.9**).

**Teorem 5.3** Če polinoma  $A$  in  $B$  nimata skupnih korenov in če velja  $\deg R_i > \deg A_0 - 1$  pri  $\deg R_i = \deg P_i$ , potem velja, da za posamezno polinomsko Diophantovo enačbo obstaja neskončno mnogo regulatorjev s strukturo

$$K = \left\{ \frac{(P_0 + \dots + P_{k_h}) + A_0(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h}) + (A_0 + \dots + A_{n_h})(\lambda_0 + \dots + \lambda_{k_h})}{(R_0 + \dots + R_{k_h}) - B_0(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h}) - (B_0 + \dots + B_{m_h})(\lambda_0 + \dots + \lambda_{k_h})} : \right. \quad (5.59)$$

$$\left. : \kappa_i, \lambda_i \in H_\infty, i = 0, \dots, k_h \right\}$$

kjer dobimo  $k_h = l_h$  rešljivih enačb z natančno določenimi polinomi  $C_{d,i}$ , zaprtozančni sistem dobi obliko (5.57), kjer velja  $R_i = R_i - B_0\kappa_i$  in  $P_i = P_i + A_0\kappa_i$ , pri čemer vodilni člen izmed členov, ki jih je potrebno odšteti od karakterističnega polinoma ne sme okrajšati člena  $c_{d,i}^n$  karakterističnega polinoma  $C_{d,i}$ ;  $\lambda_i$  in  $\kappa_i$  so polinomi

$\deg \lambda_i = \deg \kappa_i = \deg R_i - \deg A_i + 1$  natanko takšnega reda kot je število prostih parametrov v posamezni polinomske Diophantovi enačbi, kjer polinomi  $\lambda_i$  ne vplivajo na vrednost odvisnih karakterističnih polinomov  $C_{d,i}$ ,  $\kappa_i$  pa vplivajo na posamezne odvisne karakteristične polinome  $C_{d,i}$ .

### Dokaz

Dokaz lahko preprosto izvedemo, če vstavimo strukturo regulatorja (5.59) v sistem zaprtizančnih enačb (5.54). Ugotovimo, da dobimo podoben rezultat kot v predpostavkah (**Predpostavka 5.8** in **Predpostavka 5.9**). Prosti polinomi  $\lambda_i$  se odštejejo, polinomi  $\kappa_i$  pa ostanejo v enačbah, kjer vplivajo na spremembo karakterističnega polinoma.  $\square$

**Opomba 5.3** S predstavljenno strukturo regulatorja (5.59) uvedemo v sistem dva različna mehanizma, ki temeljita na prostih spremenljivkah linearnih sistemov enačb, ki so posledica Diophantovih enačb. S prostimi polinomi  $\kappa_i$  lahko vplivamo na tiste enačbe oz. zaprtizančne polinome  $C_{d,i}$ , ki niso neodvisno rešljive. S prostimi polinomi  $\lambda_i$  pa ne vplivamo direktno na posamezne polinome  $C_{d,i}$  in jih lahko tako uporabimo pri optimizaciji robustnosti in ne dinamike kot v primeru polinomov  $\kappa_i$ .

**Opomba 5.4** V predstavljenih rešitvah je pri posameznih Diophantovih enačbah zelo pomembno, da ne pride do krajšanja vodilnega člena v karakterističnem polinomu  $C_{d,i}$ , kar bi porušilo izvedljivost regulatorja in s tem samo rešljivost enačbe. Tako je omejena tudi izbira množice regulatorjev, ki so posledica prostih parametrov.

**Opomba 5.5** Stopnje zakasnitev pri posameznih polinomih v regulatorju  $P_i$  in  $R_i$  zberemo tako, da je število rezultirajočih rešljivih Diophantovih enačb čim več, nerešljivih pa čim manj. Število posameznih zakasnitev je lahko v  $P_i$  in  $R_i$  različno. Različne so lahko tudi vrednosti stopenj posameznih zakasnitev v  $P_i$  oz.  $R_i$ . Omenjeni rezultati predvidevajo takšne zakasnitve v regulatorju kot so vse zakasnitve v sistemu. Na takšen način sicer dobimo veliko rešljivih enačb, dobimo pa tudi veliko nerešljivih. Število nerešljivih enačb



lahko nekoliko zmanjšamo, če lahko posamezne zakasnitve v sistemu izrazimo kot večkratnike najmanjše zakasnitve v sistemu.

**Opomba 5.6** V teoremu je predpostavljeno, da kvazi-polinoma nimata skupnih ničel. Če temu ni tako in posamezna kvazi-polinoma vsebujeta skupne stabilne ničle, je za tak sistem kljub temu možno načrtati ustrezen regulator. Skupne ničle sistema je namreč potrebno upoštevati pri izbiri karakterističnega polinoma [92] podobno kot v primeru sistemov brez zakasnitev, saj velja:

$$T = \frac{YBP}{YAR + YBP} = \frac{YC_n}{YC_d}. \quad (5.60)$$

Če kvazi-polinoma  $A$  in  $B$  vsebujeta stabilne ničle, jih lahko z ustrežno izbiro regulatorja okrajšamo. S tem dobimo zaprtizančni sistem z nižjo stopnjo kot bi ga dobili sicer, saj velja

$$T = \frac{BB^+PA^+}{AA^+RB^+ + BB^+PA^+} = \frac{A^+B^+C_n}{A^+B^+C_d}. \quad (5.61)$$

Pri krajšanju ničel objekta moramo biti previdni, saj ne smemo krajšati nestabilnih ničel.

**Opomba 5.7** Predstavljen postopek sinteze regulatorja z neposrednim reševanjem  $k_h = l_h$  števila Diophantovih enačb je ob predpostavki (**Predpostavka 5.6**) definiran za sisteme tipa RFDE. Omenjene rezultate lahko apliciramo tudi na sisteme NFDE, vendar je potrebno potem izbrati tudi karakteristični kvazi-polinom tipa NFDE [18].

### 5.3.1 Pomikanje polov za sisteme z eno notranjo zakasnitvijo

**Predpostavka 5.10** Strogo pravi sistem (5.47) z eno notranjo zakasnitvijo, s sistemskima matrikama polnega ranga ter z matrikama  $C = 1 \ 1 \ \dots \ 1_{1 \times n}$  in  $B = 0 \ \dots \ 0 \ 1_{n \times 1}^T$  zapišemo v splošni vhodno/izhodni SISO obliki.

$$G = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_i z^i}{\sum_{i=0}^n A_i z^i} \quad (5.62)$$

kjer velja  $\deg A_0(s) = n$ ,  $\deg A_1(s) = n-1, \dots, \deg A_n(s) = 0$  in  $\deg B_0(s) = n-1$ ,  $\deg B_1(s) = n-2, \dots, \deg B_{n-1}(s) = 0$ . Kvazi-polinoma števca in imenovalca sta oba tipa RFDE.

Kot ugotovimo sistem  $n$ -tega reda rezultira k natanko tolikšnem številu zakasnenih polinomov  $A_i$  v imenovalcu in za enega manj v števcu.

**Predpostavka 5.11** Strogo pravi sistem (5.47) z eno notranjo zakasnitvijo, s sistemskima matrikama polnega ranga ter z matrikama  $C = \begin{bmatrix} x & x & \dots & 0 \end{bmatrix}_{1 \times n}$ , kjer je  $x \in (0,1)$  in  $B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}^T$  zapišemo prenosno funkcijo v splošni SISO obliki, kjer velja  $\deg A_0(s) = n$ ,  $\deg A_1(s) = n-1, \dots, \deg A_n(s) = 0$  in  $\deg B_0(s) = n-2$ ,  $\deg B_1(s) = n-2$ ,  $\deg B_2(s) = n-3, \dots, \deg B_{n-1}(s) = 0$ . Kvazi-polinom imenovalca sistema je tipa RFDE, kvazi-polinom števca pa NFDE.

**Predpostavka 5.12** iz predpostavk (**Predpostavka 5.10** in **Predpostavka 5.11**) lahko sklepamo, da je vodilni člen  $b_{0n-1}s^{n-1}$  polinoma  $B_0$  v predpostavki (**Predpostavka 5.10**) posledica izključno zadnjega koeficienta  $c_n$  v matriki  $C_{1 \times n}$ .

Za bolj jasno predstavitev problematike bomo predstavili primer reševanja  $k_h = l_h$  števila Diophantovih enačb. Za primer laserja s fazno-konjugirano povratno povezavo bomo izračunali zaprtizančni karakteristični kvazi-polinom ter pokazali katere Diophantove enačbe je moč rešiti. V primeru se ne bomo natančneje ukvarjali z dinamiko zaprte zanke ampak bomo pokazali le koncept reševanja  $k_h = l_h$  Diophantovih enačb.

**Primer 5.1** Model laserja s fazno-konjugirano povratno povezavo je definiran z

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.85 & 0.15 & 44.37 \\ 0.004 & -0.28 & -229.2 \\ -0.18 & 0.023 & -0.36 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.28 & 0 & 0 \\ 0 & -0.28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tau = 1 \quad (5.63)$$

pri vhodnem in izhodnem vektorju  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$  in  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  z uporabo izrazov (5.49), (5.50) in (5.48) ter (5.62) zapišemo prenosno funkcijo sistema,

$$G_L = \frac{44s - 22 + 12z}{s^3 + 1.5s^2 + 13.9s + 0.61 + z(0.16s + 0.82 + z^2(-0.078s - 0.028))}, \quad (5.64)$$

kjer velja, da je  $z = e^{-s\tau}$ .

**Opomba 5.8** Glede na predpostavko (**Predpostavka 5.11**) bi na prvi pogled moral biti kvazi-polinom števca sistema (5.64) tipa NFDE, ampak pozoren bralec bo morda opazil, da matrika  $A_1$  nima polnega ranga in se posledično števec razlikuje od števca, ki ga predvideva omenjena predpostavka.

Prenosno funkcijo  $G_L$  sistema smo zapisali z združenimi koeficienti z enako stopnjo zakasnitve,

$$G_L = \frac{B_0 + B_1}{A_0 + A_1 + A_2} \quad (5.65)$$

S poljubnim številom večkratnikov zakasnitev  $z^{k_h}$  v regulatorju

$$K = \frac{P_0 + P_1 + \dots + P_{k_h}}{R_0 + R_1 + \dots + R_{k_h}}, \quad (5.66)$$

kjer velja

$$\deg R_0 = \deg P_0 > \deg R_i = \deg R_{i+1} = \deg P_i = \deg P_{i+1}, i = 1, \dots, k_h - 1, \quad (5.67)$$

če je regulator tipa RFDE in

$$\deg R_i = \deg R_{i+1} = \deg P_i = \deg P_{i+1}, i = 0, \dots, k_h - 1, \quad (5.68)$$

če je regulator tipa NFDE.

Z upoštevanjem splošnih rešitev (5.57), dobimo poljubno število rešljivih zaprtozančnih Diophantovih enačb pri določenih stopnjah zakasnitev kot narekuje izraz (5.54)

$$\begin{aligned}
 z^0 : \quad & A_0(R_0 - B_0\lambda_0) + B_0(P_0 + A_0\lambda_0) = C_{d,0} \\
 z^1 : \quad & A_0(R_1 - B_0\lambda_1 - B_1\lambda_0) + B_0(P_1 + A_0\lambda_1 + A_1\lambda_0) + \\
 & + A_1(R_0 - B_0\lambda_0) + B_1(P_0 + A_0\lambda_0) = C_{d,1} \\
 & \vdots \\
 z^{k_h} : \quad & \sum_{i=0}^2 A_i(R_{k_h-i} - \sum_{k=0}^{k_h-i} B_k\lambda_{k_h-i-k}) + \sum_{i=0}^1 B_i(P_{k_h-i} + \sum_{k=0}^{k_h-i} A_k\lambda_{k_h-i-k}) = C_{d,k_h} \\
 z^{k_h+1} : \quad & A_0(-B_1\lambda_{k_h}) + A_1(R_{k_h} - B_0\lambda_{k_h} - B_1\lambda_{k_h-1}) + A_2(R_{k_h-1} - B_0\lambda_{k_h-1} - B_1\lambda_{k_h-2}) \\
 & + B_0(A_1\lambda_{k_h} + A_2\lambda_{k_h-1}) + B_1(P_{k_h} + A_0\lambda_{k_h} + A_1\lambda_{k_h-1} + A_2\lambda_{k_h-2}) = C_{d,k_h+1} \\
 z^{k_h+2} : \quad & A_1(-B_1\lambda_{k_h}) + A_2(R_{k_h} - B_0\lambda_{k_h} - B_1\lambda_{k_h-1}) + \\
 & + B_0(A_2\lambda_{k_h}) + B_1(A_1\lambda_{k_h} + A_2\lambda_{k_h-1}) = C_{d,k_h+2} \\
 z^{k_h+3} : \quad & -A_2(-B_1\lambda_{k_h}) + B_1(A_2\lambda_{k_h}) = 0 \tag{5.69}
 \end{aligned}$$

Z ustrezno izbiro stopenj posameznih kvazi-polinomov regulatorja vplivamo na rešitev posameznih Diophantovih enačb. To pomeni, da ima lahko vsaka izmed  $k_h$  zgoraj zapisanih enačb natanko eno rešitev. Lahko pa dosežemo, da ima posamezna enačba množico parametričnih rešitev. Karakteristični polinom zaprte zanke lahko manipuliramo na dva različna načina in sicer s številom večkratnikov zakasnitev v izbranem regulatorju in seveda z redom posameznih kvazi-polinomov v regulatorju. Zanimive rezultate, ki jih dobimo iz natančnejšega opazovanja karakterističnih enačb podajajo naslednje predpostavke.

**Predpostavka 5.13** Če za red posameznega polinoma regulatorja velja  $\deg R_i = \deg P_i \geq \deg A_0$ , ima posamezna enačba množico parametričnih rešitev oz. če velja  $\deg R_i = \deg P_i = \deg A_0 - 1$ , ima posamezna Diophantova enačba natanko eno rešitev. Če želimo kvazi-polinom  $C_d$  tipa RFDE moramo izbrati tudi regulator tipa RFDE (**Predpostavka 5.6**).

Kot je razvidno iz sistema enačb se posamezni polinomi regulatorjev, ki tvorijo rešljive Diophantove enačbe vedno množijo s polinomoma  $A_0$  in  $B_0$ , tako je moč enostavno in transparentno izbrati ustrezno stopnjo posameznih polinomov regulatorja.

**Predpostavka 5.14** Iz predpostavke (**Predpostavka 5.13**) in ob izbiri regulatorja tipa RFDE sledi,  $\deg R_0 = \deg P_0 \neq \deg A_0 - 1$ .

### Dokaz

Če izberemo  $\deg R_i = \deg P_i = \deg A_0 - 1, i = 1, \dots, k_h$ , kar je najnižja dovoljena stopnja polinomov, ki omogoča rešitev (**Predpostavka 5.13**), potem velja  $\deg R_0 = \deg P_0 > \deg A_0 - 1$ , saj za regulator tipa RFDE velja (5.67).  $\square$

To pomeni, da v primeru, da želimo zaprtozankni karakteristični kvazi-polinom tipa RFDE ni možno vseh Diophantovih enačb rešiti enolično. Najmanj prva enačba bo tako vedno rešljiva s končno množico prostih parametrov. Iz predpostavke (**Predpostavka 5.14**) lahko tudi zaključimo, da v primeru parametričnih rešitev poljubne enačbe  $i = 1, \dots, k_h$ , bo število prostih parametrov prve enačbe vedno za ena višje od največjega števila prostih parametrov izmed vseh preostalih enačb.

**Predpostavka 5.15** Če izberemo regulator tipa RFDE potem mora veljati  $\deg R_0 = \deg P_0 = \deg R_i + 1 = \deg P_i + 1, i = 1, \dots, k_h$ .

### Dokaz

Dokaz bomo izvedli s kontradikcijo. Hitro lahko pokažemo, da postane druga enačba v (5.70) nerešljiva, če izberemo npr.  $\deg R_0 = \deg P_0 = n + 1, \deg R_i = \deg P_i = n - 1, i = 1, \dots, k_h$ , saj za drugo enačbo velja:  $\deg(A_0 R_1 + B_0 P_1) = 2n - 1, \deg(A_1 R_0 + B_1 P_0) = 2n$ . To pomeni, da imajo elementi enačbe, ki se odštejejo od  $C_{d,1}$  višjo stopnjo od  $C_{d,1}$ , kar rezultira k karakterističnem polinomu s previsoko stopnjo za izbran red regulatorja  $R_0$  oz.  $P_0$ .  $\square$





vrednosti prostega parametra nerešljiv. Temu se seveda izognemo če  $R_0$  predvidevamo kot moničen. Tako je izbira vrednosti prostih parametra poljubna.

**Predpostavka 5.18** Z izbiro  $k_h \in \mathbb{N}^0$  zakasnitev v polinomih regulatorja  $P_{k_h}$  in  $R_{k_h}$  dobimo  $k_h + 1$  rešljivih enačb.

Ob poljubni izbiri števila zakasnitev v regulatorju  $k_h$  dobimo poljubno število rešljivih enačb, pri čemer je dovoljeno izbrati tudi nič. V tem primeru dobimo eno samo rešljivo enačbo.

V sistemu enačb (5.69) hitro opazimo, da vpliv prostih polinomov  $\lambda_i$  terja dodatne ničelne enačbe v sistemu.

**Predpostavka 5.19** V sistemu enačb (5.69) je zadnjih  $m_h$  enačb ničelnih.

#### Dokaz

Ničelne enačbe so posledica enačb pri določenih zakasnitvah, ki vsebujejo člene s polinomi  $\lambda_i$  in ne vsebujejo členov regulatorjev. Takšne enačbe dobimo le v primeru  $m_h > 0$ , saj v enačbi  $A(R - B\lambda)$  oz.  $(A_0 + \dots + A_{n_h})(R_0 + \dots + R_{k_h} - (B_0 + \dots + B_{m_h})(\lambda_0 + \dots + \lambda_{k_h}))$  členi, ki imajo višjo stopnjo zakasnitve od  $n_h + k_h$  posledica členov  $A, B$  in  $\lambda$  z najvišjimi stopnjami zakasnitev.  $\square$

**Predpostavka 5.20** V sistemu enačb (5.69) zadnjima dvema ne ničelnima enačbama ni moč prirediti poljubnih karakterističnih polinomov  $C_{p, k_h+1}$  in  $C_{p, k_h+2}$ , saj vsebujeta kvazi-polinome regulatorja, ki so nujni za rešitev Diophantovih enačb pri nižjih stopnjah zakasnitev.

Pri posameznih stopnjah zakasnitev dobimo vrsto kombinacij produktov med kvazi-polinomi objekta in regulatorja. Tako v posamezni vrstici nastopajo tudi kvazi-polinomi regulatorja, ki so bili nepogrešljivi pri rešitvi prejšnje vrstice. To pomeni, da je potrebno prvih  $k_h$  enačb v (5.69) reševati po vrsti od najmanjše stopnje zakasnitve proti višjim. Podajmo še splošen izraz o številu nerešljivih Diophantovih enačb za splošen sistem.



**Predpostavka 5.21** Strogo pravi sistem z eno notranjo zakasnitvijo (5.47), s sistemskima matrikama polnega ranga, reda  $n$ , s poljubno izbiro števila zakasnitev v regulatorju (5.66) rezultira v sistem Diophantovih enačb (5.54), kjer je zadnjih  $n$  ne ničelnih enačb nerešljivih.

Objekt zapišemo v obliki prenosne funkcije, kjer je v imenovalcu natanko  $n$  zakasnenih polinomov  $A_i$ . Vsi ti polinomi bodo po množenju s polinomom regulatorja z najvišjo zakasnitvijo  $R_{k_h}$  sestavljali polinome z najvišjimi stopnjami zakasnitve. To pomeni, da bo natanko  $n$  zadnjih ne ničelnih Diophantovih enačb nerešljivih, saj bodo vsebovale polinome regulatorja, ki so rešitve enačb z nižjim redom zakasnitev. Kot smo pokazali, izraz (5.57) predstavlja splošno obliko rešljive Diophantove enačbe, vse enačbe višjega reda od tega, ki ga predpostavlja izraz so nerešljive.

Podamo lahko še splošen rezultat rešljivosti kompleta Diophantovih enačb pri izbiri regulatorja poljubnega tipa (RFDE ali NFDE) ter pri poljubni izbiri števila zakasnitev pri polinomih v regulatorju pri poljubnem redu sistema oz. regulatorja.

**Teorem 5.4** Strogo pravi sistem z eno notranjo zakasnitvijo (5.47), s sistemskima matrikama polnega ranga, reda  $n$ , s poljubno izbiro števila zakasnitev  $k_h$  v regulatorju (5.66) rezultira v zaprtizančni kvazi-polinom tipa RFDE oz. sistem Diophantovih enačb (5.54), kjer je prvih  $k_h + 1$  Diophantovih enačb rešljivih (**Predpostavka 5.18**) bodisi enolično (**Predpostavka 5.7**) bodisi s končno množico parametričnih rešitev (**Teorem 5.3**), pri čemer velja, da prva enačba nikoli ni enolična in velja **Predpostavka 5.14**, **Predpostavka 5.15** in **Predpostavka 5.17**.

**Teorem 5.5** Strogo pravi sistem z eno notranjo zakasnitvijo (5.47), s sistemskima matrikama polnega ranga, reda  $n$ , s poljubno izbiro števila zakasnitev  $k_h$  v regulatorju (5.66) rezultira v zaprtizančni kvazi-polinom tipa NFDE oz. sistem Diophantovih enačb (5.54), kjer je prvih  $k_h + 1$  Diophantovih enačb rešljivih (**Predpostavka 5.18**) bodisi enolično (**Predpostavka 5.7**) bodisi s končno množico parametričnih rešitev (**Teorem**

**5.3)**, pri čemer velja, da prva enačba nikoli ni enolična in velja **Predpostavka 5.14** in **Predpostavka 5.16**.

Kot smo omenili (**Opomba 5.3**) je v primeru uporabe prostih polinomov  $\kappa_i$  in strukture regulatorja (5.58) reševanje posameznih Diophantovih enačb nekoliko bolj zapleteno kot v primeru prostih polinomov  $\lambda_i$ , ki odražajo splošno rešitev regulatorja (5.56) za natančno določen karakterističnih kvazi-polinom, saj prosti polinomi  $\kappa_i$  določajo množico karakterističnih kvazi-polinomov. V naslednjem primeru bomo pokazali, da je moč v primeru prostih polinomov  $\kappa_i$  izraziti vpliv spremembe polinomov  $\kappa_i$  na spremembo karakterističnih polinomov. Tako lahko izrazimo odvisnost odvisnih karakterističnih polinomov neposredno od polinomov  $\kappa_i$ .

**Primer 5.2** Določitev odvisnosti odvisnih karakterističnih polinomov od prostih polinomov  $\kappa_i$ .

Predpostavimo že obravnavan model laserja (5.64) in  $k_h = 2$  ter  $k = n + 1 = 4$ , po izrazu (5.54) in z uporabo RFDE regulatorja (5.66) dobimo naslednjo strukturo zaprtzoančnih enačb:

$$\begin{aligned}
 z^0 \quad & A_0 R_0 + B_0 P_0 = C_{d,0} \\
 z^1 \quad & A_0 R_1 + B_0 P_1 = C_{d,1} - A_1 R_0 - B_1 P_0 \\
 z^2 \quad & A_0 R_2 + B_0 P_2 = C_{d,2} - A_1 R_1 - B_1 P_1 - A_2 R_0 \\
 z^3 \quad & A_1 R_2 + B_1 P_2 + A_2 R_1 = C_{d,3} \\
 z^4 \quad & A_2 R_2 = C_{d,4}
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

z uporabo predpostavke (**Predpostavka 5.5**) izračunamo zgornji sistem enačb za nek poljubno izbran karakteristični kvazi-polinom  $C_d$ . S pomikom prostih spremenljivk v prvi Diophantovi enačbi  $A_0(R_0 - B_0\kappa_0) + B_0(P_0 + A_0\kappa_0) = C_{d,0}$  vplivamo na spremembo karakterističnega polinoma druge enačbe, saj od  $C_{d,1}$  odštejemo člene, ki so odraz prostih spremenljivk,

$$A_0 R_{1N} + B_0 P_{1N} = C_{d,1} - A_1(R_0 - B_0\kappa_0) - B_1(P_0 + A_0\kappa_0) \tag{5.73}$$

kjer sta  $R_{1N}$  in  $P_{1N}$  spremenljivki novega regulatorja, ki sta posledica spremembe prostih spremenljivk v prvi enačbi. Polinom  $C_{d,1}$  ostaja nespremenjen, tako lahko v enačbo (5.73) vstavimo na mesto  $C_{d,1}$  ekvivalenten izraz iz druge enačbe v sistemu (5.72) in dobimo:

$$\begin{aligned} A_0 R_{1N} + B_0 P_{1N} &= A_0 R_1 + B_0 P_1 + A_1 B_0 \kappa_0 - B_1 A_0 \kappa_0 = \\ &= A_0 (R_1 - B_1 \kappa_0) + B_0 (P_1 + A_1 \kappa_0) \end{aligned}, \quad (5.74)$$

iz česa sledi  $R_{1N} = R_1 - B_1 \kappa_0$  in  $P_{1N} = P_1 + A_1 \kappa_0$ , enačbo (5.73) zapišemo v naslednji obliki

$$A_0 (R_1 - B_1 \kappa_0) + B_0 (P_1 + A_1 \kappa_0) = C_{d,1} - A_1 (R_0 - B_0 \kappa_0) - B_1 (P_0 + A_0 \kappa_0). \quad (5.75)$$

S tem smo spremembo karakterističnega polinoma na račun prostega polinoma  $\kappa_0$  v enačbi (5.73) izrazili s splošno spremembo komponent regulatorja. V tem primeru, ki smo ga zastavili uvodoma ima enačba (5.75) neskončno mnogo rešitev in en prosti parameter. Enačbi (5.75) tako dodamo še vpliv proste spremenljivke. Enačbo (5.75) izrazimo:

$$\begin{aligned} A_0 (R_1 - B_0 \kappa_1 - B_1 \kappa_0) + B_0 (P_1 + A_0 \kappa_1 + A_1 \kappa_0) &= \\ = C_{d,1} - A_1 (R_0 - B_0 \kappa_0) - B_1 (P_0 + A_0 \kappa_0) \end{aligned}, \quad (5.76)$$

tako zapišemo  $R_{1N} = R_1 - B_0 \kappa_1 - B_1 \kappa_0$  in  $P_{1N} = P_1 + A_0 \kappa_1 + A_1 \kappa_0$ .

Podoben postopek uberemo tudi za tretjo enačbo v sistemu (5.72) v katero vstavimo nove vrednosti regulatorjev. Namesto  $C_{d,2}$  vstavimo ekvivalent za ta polinom, ki sledi iz sistema (5.72). Tretja enačba dobi obliko:

$$A_0 R_{2N} + B_0 P_{2N} = A_0 (R_2 - B_0 \kappa_2 - B_1 \kappa_1) + B_0 (P_2 + A_0 \kappa_2 + A_1 \kappa_1 + A_2 \kappa_0), \quad (5.77)$$

kjer velja  $R_{2N} = R_2 - B_0 \kappa_2 - B_1 \kappa_1$  in  $P_{2N} = P_2 + A_0 \kappa_2 + A_1 \kappa_1 + A_2 \kappa_0$ .

Četrto in peto enačbo v sistemu (5.72) tako zapišemo v odvisnosti od vrednost prostih polinomov  $\kappa_i$ :

$$\begin{aligned} A_1 R_{2N} + B_1 P_{2N} + A_2 R_{1N} &= A_1 (R_2 - B_0 \kappa_2 - B_1 \kappa_1) + B_1 (P_2 + A_0 \kappa_2 + A_1 \kappa_1 + A_2 \kappa_0) + \\ + A_2 (R_1 - B_0 \kappa_1 - B_1 \kappa_0) &= A_1 (R_2 - B_0 \kappa_2) + B_1 (P_2 + A_0 \kappa_2) + A_2 (R_1 - B_0 \kappa_1) = C_{d,3} \end{aligned}, \quad (5.78)$$

in

$$A_2 R_2 = A_2 (R_2 - B_0 \kappa_2 - B_1 \kappa_1) = C_{d,4}. \quad (5.79)$$

V predstavljenem primeru smo izrazili zadnji dve odvisni enačbi le od prostih polinomov. Preostale enačbe smo izrazili z regulatorjem v splošni obliki:

$$K = \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_{0N} + P_{1N} + P_{2N}}{R_{0N} + R_{1N} + R_{2N}} = \\ = \frac{(P_0 + A_0\kappa_0) + (P_1 + A_0\kappa_1 + A_1\kappa_0) + (P_2 + A_0\kappa_2 + A_1\kappa_1 + A_2\kappa_0)}{(R_0 - B_0\kappa_0) + (R_1 - B_0\kappa_1 - B_1\kappa_0) + (R_2 - B_0\kappa_2 - B_1\kappa_1)} \end{array} \right\}, \quad (5.80)$$

kar pomeni, da ni potrebe po ponovnem izračunavanju posameznih enačb kot v predpostavki (**Predpostavka 5.9**) kar je bistvena prednost. Pri iterativnem iskanju ustreznega dela odvisnih enačb lahko tako spreminjamo neposredno le odvisne enačbe. Iz predstavljenega primera lahko z uporabo predstavljenih postopkov vpeljemo splošno rešitev.

**Opomba 5.11** Kot lahko opazimo, sta zadnji dve odvisni polinomske enačbi (5.78) in (5.79) odvisni le od polinomov  $\kappa_1$  in  $\kappa_2$ , tako lahko v primeru, da želimo zapisati množico vseh regulatorjev, ki vplivajo izključno na odvisne polinomske enačbe uporabimo strukturo (5.80), kjer postavimo preostali polinom  $\kappa_0$  na nič  $\kappa_0 = 0$ .

**Teorem 5.6** Če polinoma  $A$  in  $B$  nimata skupnih korenov in velja  $\deg R_i > \deg A_0 - 1$  pri  $\deg R_i = \deg P_i$ , potem velja, da za sistem polinomskih Diophantovih enačb obstaja neskončno mnogo regulatorjev

$$K = \left\{ \frac{P + A_0(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h}) + A_1(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h-1}) + \dots + A_{n_h}(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h-n_h})}{R - B_0(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h}) - B_1(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h-1}) - \dots - B_{n_h}(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h-n_h})} \right\}, \quad (5.81)$$

oz.

$$\begin{aligned} K &= \left\{ \frac{P_{0,N} + \dots + P_{i,N} + \dots + P_{k_h,N}}{R_{0,N} + \dots + R_{i,N} + \dots + R_{k_h,N}} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{P_0 + A_0\kappa_0 + \dots + \left( P_i + \sum_{k=0}^{\min(i,n_h)} A_k \kappa_{i-k} \right) + \dots + \left( P_{k_h} + \sum_{k=0}^{\min(k_h,n_h)} A_k \kappa_{k_h-k} \right)}{R_0 - B_0\kappa_0 - \dots - \left( R_i - \sum_{k=0}^{\min(i,m_h)} B_k \kappa_{i-k} \right) - \dots - \left( R_{k_h} - \sum_{k=0}^{\min(k_h,m_h)} B_k \kappa_{k_h-k} \right)} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\left( P + \sum_{j=0}^{k_h} \sum_{k=0}^{\min(j,n_h)} A_k \kappa_{j-k} \right)}{\left( R - \sum_{j=0}^{k_h} \sum_{k=0}^{\min(j,m_h)} B_k \kappa_{j-k} \right)} \right\} \end{aligned} \quad (5.82)$$

kjer dobimo  $k_h = l_h$  rešljivih polinomskih enačb s poljubno izbranimi polinomi  $C_{d,i}$

$$\begin{aligned} & A_0(R_i - \sum_{j=0}^{\min(i,m_h)} B_j \kappa_{i-j}) + B_0(P_i + \sum_{j=0}^{\min(i,n_h)} A_j \kappa_{i-j}) = \\ & = C_{d,i} - \sum_{j=1}^i \left( A_j(R_{i-j} - \sum_{k=0}^{\min(i-j,m_h)} B_k \kappa_{i-j-k}) + B_j(P_{i-j} + \sum_{k=0}^{\min(i-j,n_h)} A_k \kappa_{i-j-k}) \right), \end{aligned} \quad (5.83)$$

ter zadnjih  $n$  nerešljivih polinomskih enačb (5.54) (**Predpostavka 5.21**), ki so odvisne izključno od polinomov  $\kappa_i$ , kjer za  $R_i, P_i$  vstavimo  $R_{i,N}$  oz  $P_{i,N}$  (5.82). Vodilni člen vsote ne sme okrajšati vodilnega člena  $c_{d,i}^n$  karakterističnega polinoma  $C_{d,i}$  (**Predpostavka 5.17**),  $\kappa_i$  je polinom za katerega velja  $\deg \kappa_i = \deg R_i - \deg A_i + 1$ .

### Dokaz

Dokaz izvedemo na podoben način kot smo strukturo regulatorja izpeljali v primeru (**Primer 5.2**). Posamezne polinomske enačbe rešujemo po vrsti. Kot vrednosti posameznih polinomov  $C_{d,i}$  uporabimo rešitve sistema (5.72).  $\square$

**Opomba 5.12 Teorem 5.6** predstavlja splošno rešitev predpostavke (**Predpostavka 5.9**) oz. polinomskih enačb v primeru, da so v posameznih enačbah prisotni prosti parametri ter določa vpliv prostih polinomov  $\kappa_i$  na odvisne enačbe.

**Opomba 5.13 Rezultat (Teorem 5.6)** smo predstavili v smislu sistemov z eno notranjo zakasnitvijo. Rezultat je moč aplicirati tudi na sisteme s poljubnimi notranjimi oz. izhodnimi zakasnitvami, saj kar se tiče odvisnih oz. neodvisnih polinomskih enačb ostaja princip enak.

Podobno kot smo pokazali v teoremu (**Teorem 5.3**), kjer je možno različni predstavljeni strukturi regulatorjev (**Predpostavka 5.8** in **Predpostavka 5.9**) enostavno združiti v eno skupno strukturo, lahko v teoremu (**Teorem 5.3**) predpostavko (**Predpostavka 5.9**) nadomestimo z rezultatom (**Teorem 5.6**), kar nas privede do naslednjega rezultata.

**Teorem 5.7** Če polinoma  $A$  in  $B$  nimata skupnih korenov in velja  $\deg R_i > \deg A_0 - 1$  pri  $\deg R_i = \deg P_i$ , potem velja, da za sistem polinomskih Diophantovih enačb obstaja neskončno mnogo regulatorjev

$$K = \left\{ \frac{P_{0,N} + \dots + P_{i,N} + \dots + P_{k_h,N} + A\lambda}{R_{0,N} + \dots + R_{i,N} + \dots + R_{k_h,N} - B\lambda} \right\} \quad (5.84)$$

kjer dobimo  $k_h = l_h$  rešljivih polinomskih enačb (5.83) s poljubno izbranimi polinomi  $C_{d,i}$ , ter zadnjih  $n$  nerešljivih polinomskih enačb (5.54) (**Predpostavka 5.21**), ki so odvisne izključno od polinomov  $\kappa_i$ , kjer za  $R_i, P_i$  vstavimo  $R_{i,N}$  oz  $P_{i,N}$  (5.82). Vodilni člen vsote ne sme okrajšati vodilnega člena  $c_{d,i}^n$  karakterističnega polinoma  $C_{d,i}$  (**Predpostavka 5.17**),  $\lambda_i$  in  $\kappa_i$  so polinomi  $\deg \lambda_i = \deg \kappa_i = \deg R_i - \deg A_i + 1$  natanko takšnega reda kot je število prostih parametrov v posamezni polinomski Diophantovi enačbi, kjer polinomi  $\lambda_i$  ne vplivajo na vrednost odvisnih karakterističnih polinomov  $C_{d,i}$ ,  $\kappa_i$  pa vplivajo na posamezne odvisne karakteristične polinome  $C_{d,i}$  (**Teorem 5.6**).

### Dokaz

Dokaz izvedemo postopoma kot v primeru (**Teorem 5.3**), hitro namreč ugotovimo, da se v karakterističnem kvazi-polinomu členi regulatorja, ki odgovarjajo strukturi regulatorja kot v teoremu (**Teorem 5.3**) okrajšajo. Ostanje členi, ki odgovarjajo strukturi regulatorja v teoremu (**Teorem 5.6**). □

**Opomba 5.14** Podobno kot smo ugotovili v opombi (**Opomba 5.11**), lahko zaključimo tudi v tem primeru vendar nekoliko splošneje. Strukturo regulatorja s prostimi polinomi  $\kappa_i$  je moč v primeru  $k_h \geq n_h$  poenostaviti, saj v odvisnih enačbah ne nastopijo vsi regulatorji. Tako lahko v prvih  $k_h - n_h + 1$  polinomskih enačb postavimo vrednosti njihovih prostih polinomov  $\kappa_i$  na nič.

## 5.4 Uporaba opazovalnika za sisteme z zakasnitvami

Za linearne sisteme brez zakasnitev lahko spoznavnost definiramo kot:

**Definicija 5.2** Linearni sistem  $(\dot{x} = Ax + Bu; y = Cx)$  je spoznaven, če lahko pri znanem vhodnem in izhodnem signalu v intervalu  $t_0 \leq t \leq T$ , določimo začetno stanje  $x(t_0)$ .

Definicijo lahko ekvivalentno povzamemo s trditvijo, da lahko vektor stanja  $x(T)$  uspešno rekonstruiramo ob prisotnosti informacije o vhodu in izhodu sistema. Za sisteme z zakasnitvami v literaturi zasledimo številne definicije in obravnave tako spoznavnosti kot vodljivosti [98], [99], [108]. Definicije spoznavnosti je moč strniti za sisteme z zakasnitvami, ki jih obravnavamo na obročih polinomov [98]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\nabla)x(t) + B(\nabla)u(t) \\ y(t) &= C(\nabla)x(t) \end{aligned}, \quad (5.85)$$

kjer je  $\nabla$  operator zakasnitve definiran za poljubno zvezno funkcijo  $f(t)$

$$\nabla f(t) = f(t-h), \text{ matrike } A, B, C \text{ so polinomi matrik od } \nabla, A(\nabla) = \sum_{i=0}^N \nabla^i A_i,$$

$$B(\nabla) = \sum_{i=0}^N \nabla^i B_i, C(\nabla) = \sum_{i=0}^N \nabla^i C_i.$$

Spoznavno matriko zapišemo:

$$\left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle = \begin{bmatrix} C(\nabla) \\ C(\nabla)A(\nabla) \\ \vdots \\ C(\nabla)A^{n-1}(\nabla) \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

**Definicija 5.3** [116] sistem (5.85) je močno spoznaven (spoznaven na obroču  $\mathbb{R} \nabla^{14}$ ), če izpolnjuje naslednje enakovredne trditve:

I. Smith-ova forma  $\left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle$  je  $\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$ .

<sup>14</sup>  $\mathbb{Z} \mathbb{R} \nabla$  označimo obroč polinomov spremenljivke  $\nabla$  s koeficienti v domeni realnih števil  $\mathbb{R}$

$$\text{II. } \left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle \text{ ima levi inverz preko } \mathbb{R} \nabla .$$

$$\text{III. } \text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A(z) \\ C(z) \end{bmatrix} = n, \forall s, z \in \mathbb{C} .$$

**Definicija 5.4** [116] Sistem (5.85) je spektralno spoznaven, če velja

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A & e^{-sh} \\ C & e^{-sh} \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C} .$$

Definicija 5.5 [116] Sistem (5.85) je šibko spoznaven, če izpolnjuje naslednje enakovredne trditve:

$$\text{I. } \text{rank} \left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle = n$$

$$\text{II. } \text{Smith-ova forma } \left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle \text{ ima ne ničelne elemente na diagonali.}$$

$$\text{III. } \left\langle \frac{C(\nabla)}{A(\nabla)} \right\rangle \text{ ima levi inverz preko } \mathbb{R} \nabla .$$

$$\text{IV. } \text{Ne obstaja takšen } x \in \mathbb{R}(\nabla) , \text{ da velja } C(\nabla)x = C(\nabla)A(\nabla)x = \dots = C(\nabla)A^{n-1}(\nabla)x = 0, x \neq 0 .$$

Za sistem z zakasnitvami mora veljati, da mora izpolnjevati pogoje močne spoznavnosti ali spektralne spoznavnosti, da lahko vse pole v zaprtozančnem sistemu zagotovo pomaknemo na levo polovico kompleksne ravnine.

Za sistem brez zakasnitev ( $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ ) definiramo opazovalnik:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) , \quad (5.87)$$

kjer dinamiko opazovalnika zapišemo, če sistema odštejemo

$$\dot{e} = Ae - L(y - C\hat{x}) = (A - LC)e \quad (5.88)$$

kjer je  $e = x - \hat{x}$ . Člen  $(A - LC)$  predstavlja karakteristični polinom opazovalnika, ki mora biti stabilen. Po principu ločljivosti [92] poli regulatorja ne vplivajo na pole



zaprtozančnega sistema objekta in regulatorja, kar pomeni, da lahko opazovalnik in regulator sistema izvedemo ločeno. Notranja stanja, ki jih dobimo iz opazovalnika uporabimo pri načrtovanju regulatorja v prostoru stanj  $u = K\hat{x} = K e - x$ ,

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKe. \quad (5.89)$$

Z upoštevanjem enačbe (5.88) in (5.89) zapišemo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}. \quad (5.90)$$

Pravkar omenjeno velja tudi za sisteme z zakasnitvami, kjer pri enačbah (5.87), (5.88) in (5.89) upoštevamo relacije iz (5.6). Opazovalnik tako v Laplace-ovem prostoru zapišemo:

$$s\hat{x} = \sum_{i=0}^{m_A} A_i e^{-s\tau} \hat{x} + \sum_{i=0}^{m_B} B_i e^{-s\tau} u + L \left( y - \sum_{i=0}^{m_C} C_i e^{-s\tau} \hat{x} \right), \quad (5.91)$$

enačba (5.88) dobi obliko

$$se = \sum_{i=0}^{m_A} A_i e - L \left( y - \sum_{i=0}^{m_C} C_i e^{-s\tau} \hat{x} \right) = \left( \sum_{i=0}^{m_A} A_i - L \sum_{i=0}^{m_C} C_i e^{-s\tau} \right) e, \quad (5.92)$$

kar nas privede do dobro zastopane problema v literaturi in sicer stabilizacije izraza  $\sum_{i=0}^{m_A} A_i - L \sum_{i=0}^{m_C} C_i e^{-s\tau}$  z regulatorjem  $L$  oz. stabilizacije neskončnega števila lastnih vrednosti s končnim številom povratno zračnih ojačenj  $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  [117], [101], [102]. Podobno zapišemo matriko zaprtozančnega sistema (5.89)

$$A_c = \sum_{i=0}^{m_A} A_i e^{-s\tau} - \sum_{i=0}^{m_B} B_i e^{-s\tau} K_0. \quad (5.93)$$

Problema stabilizacije opazovalnika (5.92) in sistema (5.93) sta identična, v obeh primerih je potrebno zagotoviti stabilnost z ustrezno nastavitvijo povratno zračnih ojačenj. Kar nekaj metod se ukvarja s predstavljenim problemom. Metoda [66] se ukvarja s kontinuiranim pomikanjem povratno zračnih ojačenj z namenom dosega ojačenj, ki rezultirajo stabilni zaprtozančni sistem. Metoda [70] uporabi majhno število ojačenj za direktno postavitev polov, preostala ojačenja služijo za pomik preostalih polov čim bolj

levo. Podoben problem stabilizacije sistema z zakasnitvami in uporabo opazovalnika obravnava tudi področje, ki se ukvarja s sistemi definiranimi na obročih polinomov [118], [119], [116], [120], [121], [122]. Za splošnejši pristop k teoriji polinomov na obročih in aplikacijo teorije za sisteme z zakasnitvami ter druge sisteme se bralec naj obrne na [98], [99], [123] oz. [124].

#### 5.4.1 Uporaba opazovalnika za sisteme z notranjimi in izhodnimi zakasnitvami

Rešitev Ackermann-ove formule [92] je trivialna, če sistem obravnavamo v vodljivostni normalni obliki, saj so koeficienti karakterističnega polinoma prisotni neposredno samo v zadnji vrstici. Zanimive lastnosti zasledimo tudi pri sistemih z zakasnitvami v primeru, da opazovalnik (5.91) načrtamo, kjer matrike sistema predpostavimo s strukturo v vodljivostni normalni obliki. Ugotovimo, da je vektor izhodnih stanj, ki odražajo števec prenosne funkcije enak kot v primeru brez zakasnitev. Števec prenosne funkcije (5.9) tako zapišemo (5.5):

$$CAAdj \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{k-2} & -a_{k-1} \end{pmatrix} B = s^n + s^{n-1} + \dots + s + 1, \quad (5.94)$$

kjer je matrika  $C$  matrika enic, matrika  $B$  je vhodna matrika z enim vhodom, koeficienti adjungirane matrike so definirani tako kot v (5.9). To pomeni, da bodo posamezna ojačenja (5.93) v karakterističnem polinomu prisotna le pri členih brez zakasnitev. To nas privede do zanimive ugotovitve, da lahko z dodatnimi zakasnitvami ojačenj vplivamo na vse zakasnjene člene karakterističnega polinoma, saj lahko z ustreznimi kombinacijami členov (5.94) in zakasnitev formuliramo poljuben člen v karakterističnem polinomu. Matriko zaprtozančnega sistema zapišemo:

$$A_c = \sum_{i=0}^{m_A} A_i e^{-s_i \tau} - B_0 \sum_{i=0}^{m_A} K_i e^{-s_i \tau}, \quad (5.95)$$

S posameznimi ojačenji  $K_i$  vplivamo na posamezno matriko  $A_i$ . To pomeni, da lahko z ustrezno izbiro ojačenj vplivamo na vsak koeficient karakterističnega kvazi-polinoma zaprtozančnega sistema [118], [120], [102]. Podoben princip vplivanja na člene z zakasnitvami v karakterističnem polinomu v smislu krajšanje le teh je bil predstavljen v [102]. Dejstvo je, da v realnem objektu popolna eliminacija členov z zakasnitvami ni možna, saj je med realno in ocenjeno vrednostjo zakasnitev vedno anomalija [117]. Tako je uporaba omenjenega postopka omejena in je analiza napake pri oceni zakasnitve nujno potrebna.

**Primer 5.3** Vpliv koeficientov povratno zančnih ojačenj na zaprtozančni sistem polinomskih enačb laserja (**Primer 5.1**).

I. Zapišimo zaprtozančni sistem enačb za sistem (5.63) z upoštevanjem (5.93)

$$\begin{array}{l} z^0 \\ z^1 \\ z^2 \end{array} \begin{array}{l} s^3 + 1.5 - k_3 \quad s^2 + 14 - 44.37k_1 + 233k_2 - 1.13k_3 \quad s + 22k_1 + 199k_2 - 0.24k_3 + 0.61 \\ 0.16s - 64.17k_2 - 0.16k_3 - 12.42k_1 + 0.82 \\ 0.078k_3 - 0.078s - 0.028 \end{array} \quad (5.96)$$

II. Zapišimo zaprtozančni sistem enačb za sistem (5.63) oz. (5.64) zapisan v vodljivostni normalni obliki (5.10) in z upoštevanjem (5.93)

$$\begin{array}{l} z^0 \\ z^1 \\ z^2 \end{array} \begin{array}{l} s^3 + 1.5 - k_3 \quad s^2 + 14.0 - k_2 \quad s + 0.61 - k_1 \\ 0.16s + 0.82 \\ -0.078s - 0.28 \end{array} \quad (5.97)$$

III. Zapišimo zaprtozančni sistem enačb za sistem (5.63) oz. (5.64) zapisan v vodljivostni normalni obliki (5.10) in z upoštevanjem (5.95)

$$\begin{array}{l} z^0 \\ z^1 \\ z^2 \end{array} \begin{array}{l} s^3 + 1.5 - k_{20} \quad s^2 + 14.0 - k_{10} \quad s + 0.61 - k_{00} \\ 0.16 - k_{11} \quad s + 0.82 - k_{01} \\ -0.078 - k_{12} \quad s - 0.28 - k_{02} \end{array}, \quad (5.98)$$

kjer so  $K_0 = k_{00} \quad k_{10} \quad k_{20}$ ,  $K_1 = k_{01} \quad k_{11} \quad 0$  in  $K_2 = k_{02} \quad k_{12} \quad 0$ .

Kot vidimo lahko v prvih dveh primerih rešimo prvo enačbo oz. enačbo brez zakasnitev za poljuben karakteristični polinom. V prvem primeru rešitve prve enačbe vplivajo tudi na polinome z zakasnitvami. V tretjem primeru so vse enačbe rešljive neodvisno.

## 5.4.2 Uporaba opazovalnika za rešitev sistema polinomskih enačb

V sistemu Diophantovih enačb je v splošnem rešljivih le nekaj polinomskih enačb preostale enačbe so odvisne od rezultatov rešljivih enačb (**Teorem 5.3**, **Teorem 5.6**, **Teorem 5.7**). Kot smo ugotovili, lahko s pomočjo opazovalnika s sistemskimi matrikami v vodljivostni obliki in formiranjem ustreznih zakasnjenih ojačenj (5.95) vplivamo na poljuben zakasnen koeficient v karakterističnem kvazi-polinomu. Tako lahko sklepamo, da lahko rezultate v teoremih (**Teorem 5.3**, **Teorem 5.6**, **Teorem 5.7**) dopolnimo z ustreznimi povratno zadržnimi ojačenji (5.95), ki zagotovijo poljuben polinom tudi v odvisnih polinomskih enačbah in tako posledično v zaprtizančnem sistemu omogočijo poljubno izbiro vseh koeficientov karakterističnega kvazi-polinoma. Matriko zaprto zadržnega sistema zapišemo:

$$A_c = \sum_{i=0}^{k_h} C_{M,i} e^{-si\tau} + \sum_{i=k_h+1}^{k_h+n_h} C_{M,i} e^{-si\tau} - B_M \sum_{i=k_h}^{k_h+n_h} K_i e^{-si\tau}, \quad (5.99)$$

kjer so  $C_{M,i}$  sistemske matrike zaprtizančnega sistema, ki jih zapišemo v vodljivostni obliki (5.10), kjer so neposredno v zadnjih vrsticah koeficienti karakterističnega kvazi-polinoma  $C_{d,i}$ .  $B_M$  je vhodna matrika, ki je odraz ojačenja sistema in regulatorja  $K$ . Koeficienti regulatorjev  $K_i$ , ki jih vpeljemo v dodatni povratni zanki, omogočijo poljubno izbiro polinomov odvisnih enačb. Na podlagi ugotovitev (5.95) in lastnosti (5.94) lahko podamo končni rezultat polinomske sinteze za sisteme z notranjimi in zunanji zakasnitvami (5.47).

**Teorem 5.8** Če velja **Predpostavka 5.7**, **Teorem 5.3** oz. splošnejši **Teorem 5.7** lahko v sistemu polinomskih Diophantovih enačb rešimo vse za poljubno izbrani karakteristični

kvazi-polinom  $C_{d,i}$ , kjer je  $k_h = l_h$  enačb rešljivih s polinomske sintezo, rešitev preostalih odvisnih polinomskih enačb zagotovimo z opazovalnikom s sistemskimi matrikami v vodljivostni normalni obliki oz. s formiranjem ustreznih povratno zanj ojačenj  $K_i$  (5.99).

### Dokaz

Dokaz izvedemo s pomočjo lastnosti matrike v vodljivostni normalni obliki (5.94). Če systemske matrike zakasnjenega sistema zapišemo v takšni obliki, ugotovimo, da števec v prenosni funkciji, ki ga dobimo pri posameznih stanjih matrike  $C$  sestavljajo izključno Laplace-ove spremenljivke. Identične oblike prevzamejo tudi ojačenja  $K_i$ . To pomeni, da lahko s takšno obliko opazovalnika vplivamo izključno na prvo enačbo brez zakasnitev v sistemu polinomskih enačb (**Primer 5.3**). Z dodajanjem posameznih sistemskih zakasnitev regulatorju (5.95) lahko vplivamo na poljuben člen karakterističnega polinoma  $C_{d,i}$ . Takšen princip regulatorja v prostoru stanj z dodanimi zakasnitvami lahko uporabimo kot samostojen regulator za poljubno določitev karakterističnega kvazi-polinoma ali le za rešitev predstavljenega problema polinomske sinteze (**Teorem 5.7**), kjer s regulatorji  $K_i$  ustrezno kompenziramo člene z višjimi stopnjami zakasnitev (5.99). □

**Opomba 5.15** Kombinacijo polinomske sinteze in regulatorja v prostoru stanj lahko apliciramo tudi v smislu, da regulator v prostoru stanj uporabimo za kompenzacijo vseh notranjih in zunanjih zakasnitev, nato načrtamo klasičen regulator po principu polinomske sinteze za sistem brez zakasnitev.

### 5.4.3 Uporaba opazovalnika za sisteme z vhodno/izhodno transportno zakasnitvijo

O vhodno/izhodnih transportnih zakasnitvah še v tem delu ni bilo govora, saj so predstavljeni postopki polinomske sinteze primerni le za sisteme, ki vsebujejo notranje in zunanje zakasnitve vendar ne vsebujejo vhodnih oz. izhodnih translacijskih zakasnitev. V primeru, da sistem vsebuje transportno zakasnitev, namreč ni možno rešiti prve ne

zakasnjene polinomske enačbe. To je velika omejitev, saj imajo poli ne zakasnjene sistema velik pomen za stabilnost zakasnjene sistema [20].

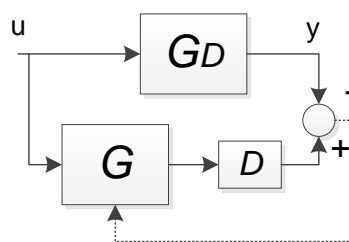
Sisteme s vhodno oz. izhodno transportno zakasnitvijo lahko obravnavamo [1] z različnimi vrstami Smithovega prediktorja [8] in FSA [11], [12]. Kot je znano imata oba pristopa svoje slabosti. Smithov prediktor je primeren le za stabilne procese, FSA je poznana po težavah pri implementaciji. Sicer obstajajo številne izboljšave implementacije FSA, kot tudi modificirane variante Smithovega prediktorja, ki so primerne tudi za nestabilne procese, vendar se bomo v tem delu posvetili uporabi opazovalnikov za sisteme s transportnimi zakasnitvami [112]. Predpostavimo sistem z izhodno transportno zakasnitvijo ( $Ge^{-\tau s}$  oz.  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx(t - \tau)$ ) ter zapišimo opazovalnik (5.91) (Slika 5.3)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x}(t - \tau) - Cy), \quad (5.100)$$

kjer dinamiko opazovalnika opisuje enačba

$$\dot{e} = Ae + LCe(t - \tau), \quad (5.101)$$

pri čemer upoštevamo  $e = \hat{x} - x$ . Dinamiko opazovalnika lahko interpretiramo tudi kot problem stabilizacije objekta z zakasnjeno povratno povezavo [93]. Kot vemo takšen problem ni enostaven in ni moč vsak nestabilen sistem stabilizirati z zakasnjeno povratno povezavo [93], [20].



**Slika 5.3:** Opazovalnik

Problem stabilizacije (5.101) se da nekoliko izboljšati, kot je nazorno prikazano v [112]. Sistemu z izhodno zakasnitvijo lahko dodamo dva kaskadna opazovalnika (Slika 5.4).

$$\dot{\hat{x}}_1 = A\hat{x}_1 + Bu(t-\tau) + L_1(C\hat{x}_1 - Cx(t-\tau)), \quad (5.102)$$

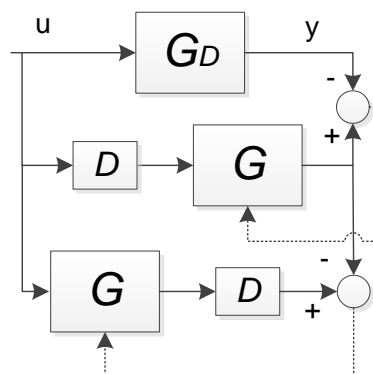
$$\dot{\hat{x}}_2 = A\hat{x}_2 + Bu(t) + L_2(\hat{x}_2(t-\tau) - \hat{x}_1). \quad (5.103)$$

Dinamiko sistema zapišemo:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (A + L_1C)e_1 \\ \dot{e}_2 &= Ae_2 + L_2e_2(t-\tau) - L_1e_1, \end{aligned} \quad (5.104)$$

kjer sta  $e_1 = \hat{x}_1 - x(t-\tau)$  in  $e_2 = \hat{x}_2 - x$ . Zaradi trikotne zgradbe systemske matrike so lastne vrednosti opazovalnika definirane z lastnimi vrednostmi izrazov  $(A + L_1C)e_1$  in  $Ae_2 + L_2e_2(t-\tau)$ . Kot vidimo je prva enačba trivialna, drugo enačbo pa lahko stabiliziramo s pomočjo metode [66] ali s pomočjo diferencialne evolucije [81]. Kaskadni opazovalnik (5.104) predstavlja prednost pred (5.101), saj velja  $L_2 \in R^{n \times n}$ ,  $L \in R^{n \times 1}$ . Tako je v prvem primeru na razpolago več spremenljivk za stabilizacijo z zakasnjeno povratno povezavo.

Kot veliko preostalih metod ima tudi predstavljena metoda pomanjkljivosti, namreč pri nestabilnih sistemih, ki imajo pole daleč na desni polovici ali pri zelo dolgih zakasnitvah, takšne sisteme ni možno stabilizirati z zakasnjeno povratno povezavo [20]. Kot primer navedimo preprosto RFDE prvega reda  $\dot{e} = ae + ke(t-\tau)$ , ki jo je moč stabilizirati če velja  $a\tau < 1$ . Torej bolj kot je pol na desni, manjša je dovoljena zakasnitev sistema, ki bo dopuščala stabilizacijo sistema.



**Slika 5.4:** Kaskadni opazovalnik

Problem prevelike zakasnitve se da, kot bomo pokazali omiliti. Predstavljeno idejo kaskadnih opazovalnikov [112] bomo še nekoliko nadgradili.

Predpostavimo sistem z izhodno transportno zakasnitvijo ( $Ge^{-4\tau s}$  oz.  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx(t - 4\tau)$ ) ter načrtajmo sklop večih v kaskado povezanih opazovalnikov.

**Predpostavka 5.22** Za sistem z izhodno (transportno) zakasnitvijo  $Ge^{-4\tau s}$ , za katerega ni moč načrtati stabilnega opazovalnika (5.101) in kaskadnega opazovalnika (5.104) bomo načrtali sklop kaskadnih opazovalnikov, ki jih lahko stabiliziramo ob predpostavki, da lahko stabiliziramo opazovalnik (5.101) za sistem  $Ge^{-\tau s}$ .

### Dokaz

Prvi opazovalnik načrtamo po enakem postopku kot (5.102), torej v načrtovanem opazovalniku vse zakasnitve premaknemo na vhod (Slika 5.5)

$$\dot{\hat{x}}_1 = A\hat{x}_1 + Bu(t - 4\tau) + L_1(C\hat{x}_1 - Cx(t - 4\tau)), \quad (5.105)$$

ter zapišemo dinamiko sistema

$$\dot{e}_1 = (A + L_1C)e_1, \quad e_1 = \hat{x}_1 - x(t - 4\tau). \quad (5.106)$$

Nato dodamo vse naslednje opazovalnike tako, da najprej razdelimo izhodno zakasnitev na štiri posamezne zakasnitve. Zapišemo naslednji opazovalnik, kjer upoštevamo izraz (5.106). Opazovalnik zgradimo tako, da eno izmed vhodnih zakasnitev pomaknemo na izhod ter izhod prejšnjega opazovalnika  $\hat{x}_1$  odštejemo od trenutnega opazovalnika  $\hat{x}_2(t - \tau)$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 &= A\hat{x}_2 + Bu(t - 3\tau) + L_2(\hat{x}_2(t - \tau) - \hat{x}_1) = \\ &= A\hat{x}_2 + Bu(t - 3\tau) + L_2(\hat{x}_2(t - \tau) - x(t - 4\tau) - e_1), \end{aligned} \quad (5.107)$$

izrazimo dinamiko sistema

$$\dot{e}_2 = Ae_2 + L_2e_2(t - \tau) - L_2e_1, \quad e_2 = \hat{x}_2 - x(t - 3\tau). \quad (5.108)$$

Zapišemo naslednji opazovalnik, kjer ponovno eno vhodno zakasnitev pomaknemo na izhod. Ponovno odštejemo izhod prejšnjega opazovalnika od trenutnega opazovalnika, vendar uporabimo izhoda iz opazovalnikov pred zakasnitvama.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_3 &= A\hat{x}_3 + Bu(t - 2\tau) + L_3(\hat{x}_3(t - \tau) - \hat{x}_2) = \\ &= A\hat{x}_3 + Bu(t - 2\tau) + L_3(\hat{x}_3(t - \tau) - x(t - 3\tau) - e_2), \end{aligned} \quad (5.109)$$



ter dinamiko

$$\dot{e}_3 = Ae_3 + L_3e_3(t-\tau) - L_3e_2, \quad e_3 = \hat{x}_3 - x(t-2\tau). \quad (5.110)$$

Zapišemo naslednji opazovalnik, kjer ponovno premaknemo eno vhodno zakasnitev na izhod, za stabilizacijo opazovalnika uporabimo ne zakasnjene izhode prejšnjega opazovalnika ter za eno zakasnitev zakasnjene izhode trenutnega opazovalnika.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_4 &= A\hat{x}_4 + Bu(t-\tau) + L_4(\hat{x}_4(t-\tau) - \hat{x}_3) = \\ &= A\hat{x}_4 + Bu(t-\tau) + L_4(\hat{x}_4(t-\tau) - x(t-2\tau) - e_3), \end{aligned} \quad (5.111)$$

ter dinamiko

$$\dot{e}_4 = Ae_4 + L_4e_4(t-\tau) - L_4e_3, \quad e_4 = \hat{x}_4 - x(t-\tau). \quad (5.112)$$

Zapišemo še zadnji opazovalnik, kjer pomaknemo še zadnjo vhodno zakasnitev na izhod.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_5 &= A\hat{x}_5 + Bu(t) + L_5(\hat{x}_5(t-\tau) - \hat{x}_4) = \\ &= A\hat{x}_5 + Bu(t) + L_5(\hat{x}_5(t-\tau) - x(t-\tau) - e_4) \end{aligned} \quad (5.113)$$

ter dinamiko

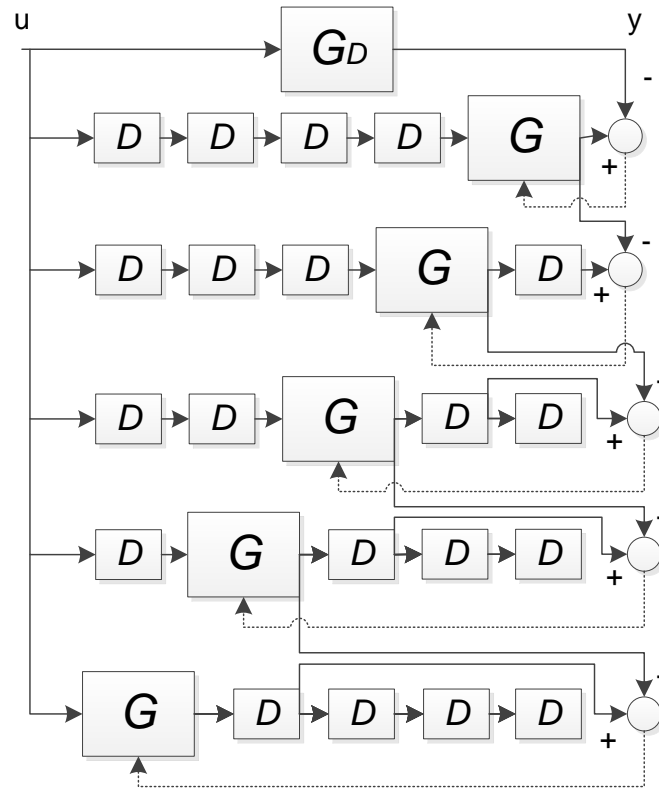
$$\dot{e}_5 = Ae_5 + L_5e_5(t-\tau) - L_5e_4, \quad e_5 = \hat{x}_5 - x. \quad (5.114)$$

Zapišemo vse enačbe sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \\ \dot{e}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A+L_1C)e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_2e_1 & Ae_2 + L_2e_2(t-\tau) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L_3e_2 & Ae_3 + L_3e_3(t-\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_4e_3 & Ae_4 + L_4e_4(t-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_5e_4 & Ae_5 + L_5e_5(t-\tau) \end{bmatrix}, \quad (5.115)$$

kjer je za stabilizacijo sistema potrebno stabilizirati le diagonalne elemente matrike. Kot vidimo vsi diagonalni elementi vsebujejo največjo zakasnitev  $\tau$ , kar pomeni, da lahko stabiliziramo vse diagonalne elemente, s čimer končujemo dokaz.  $\square$

**Opomba 5.16** Kot smo pokazali v predpostavki (**Predpostavka 5.22**) lahko problem stabilizacije opazovalnika (5.101) z veliko izhodno zakasnitvijo preoblikujemo v problem stabilizacije večih kaskadnih opazovalnikov z manjšimi zakasnitvami. Pri čemer je lahko število opazovalnikov poljubno veliko oz. dotično zakasnitev lahko razdelimo v poljubno majhne zakasnitve.



**Slika 5.5:** Kaskada petih opazovalnikov za sistem s transportno zakasnitvijo

Pravkar predstavljeno rešitev lahko enostavno preoblikujemo tudi za sisteme z vhodno transportno zakasnitvijo ( $Ge^{-4\tau s}$  oz.  $\dot{x} = Ax + Bu(t-4\tau)$ ,  $y = Cx$ ), v primeru, da opazovalnika (5.100) z dinamiko (5.101) ni moč stabilizirati.

**Predpostavka 5.23** Za sistem z vhodno (transportno) zakasnitvijo  $Ge^{-4\tau s}$ , za katerega ni moč načrtati stabilnega opazovalnika (5.101) in kaskadnega opazovalnika (5.104) bomo načrtali sklop večih kaskadnih opazovalnikov, ki jih lahko stabiliziramo ob predpostavki, da lahko stabiliziramo opazovalnik (5.101) za sistem  $Ge^{-\tau s}$ .

### Dokaz

Dokaz izvedemo podobno kot v primeru predpostavke (**Predpostavka 5.23**). Začnemo z opazovalnikom, ki ima vse zakasnitve na vходу, nato v vsakem naslednjem opazovalniku pomaknemo eno vhodno zakasnitev na izhod, dokler v zadnjem opazovalniku ne dobimo samih izhodnih zakasnitev (Slika 5.5). V primeru sistema z vhodno zakasnitvijo dobimo

enake enačbe kaskadnih opazovalnikov kot v primeru predpostavke (**Predpostavka 5.23**). Enačbe dinamike se nekoliko razlikujejo. Potrebno je izbrati tudi drugačen postopek časovnega pomika enačb pri izpeljavi enačb dinamike, saj je za razliko od predpostavke (**Predpostavka 5.23**), kjer je bilo potrebno časovno pomikati enačbo sistema, tukaj potrebno časovno pomikati enačbe opazovalnikov. Enačbo dinamike posameznih opazovalnikov zapišemo

$$\dot{e}_1 = (A + L_1 C)e_1, \quad e_1 = \hat{x}_1 - x, \quad (5.116)$$

$$\dot{e}_2 = Ae_2 + L_2 e_2(t - \tau) - L_2 e_1(t - \tau), \quad e_2 = \hat{x}_2(t - \tau) - x, \quad (5.117)$$

$$\dot{e}_3 = Ae_3 + L_3 e_3(t - \tau) - L_3 e_2(t - \tau), \quad e_3 = \hat{x}_3(t - 2\tau) - x \quad (5.118)$$

$$\dot{e}_4 = Ae_4 + L_4 e_4(t - \tau) - L_4 e_3(t - \tau), \quad e_4 = \hat{x}_4(t - 3\tau) - x \quad (5.119)$$

$$\dot{e}_5 = Ae_5 + L_5 e_5(t - \tau) - L_5 e_4(t - \tau), \quad e_5 = \hat{x}_5(t - 4\tau) - x \quad (5.120)$$

Enačbe zapišemo v obliki matrike

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \\ \dot{e}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + L_1 C)e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_2 e_1(t - \tau) & Ae_2 + L_2 e_2(t - \tau) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L_3 e_2(t - \tau) & Ae_3 + L_3 e_3(t - \tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_4 e_3(t - \tau) & Ae_4 + L_4 e_4(t - \tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_5 e_4(t - \tau) & Ae_5 + L_5 e_5(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (5.121)$$

Stabilizacija diagonalnih elementov zagotovi stabilizacijo sistema. Kot vidimo vsi elementi matrike vsebujejo zakasnitev  $\tau$ , kar pomeni, da lahko stabiliziramo sistem.  $\square$

S predstavljenimi oblikami stabiliziranih opazovalnikov lahko pridemo do ustrezne informacije o izhodu sistema kot, da sistem ne bi bil zakasnen. Za tak sistem lahko načrtamo regulator s predstavljenimi postopki polinomske sinteze.

## 5.5 Izbira karakterističnega kvazi-polinoma

Splošen rezultat zaprtozančnega sistema (**Teorem 5.3** oz. **Teorem 5.7**) oz rezultata, ki sta specifična za sisteme z eno notranjo zakasnitvijo (**Teorem 5.4** in **Teorem 5.5**) kažejo

na to, da je v sistemu moč rešiti le  $k_h + 1$  Diophantovih enačb. To pomeni, da lahko poljubno izberemo le natanko toliko zakasnenih členov karakterističnega kvazi-polinoma (**Primer 5.1**). Preostali členi kvazi-polinoma na katere žal ne moremo povsem neposredno vplivati imajo seveda velik vpliv na lastnosti zaprtozančnega sistema. Tako je zelo zahtevno vnaprej določiti stabilni zaprtozančni kvazi-polinom, saj nikakor ni možno vnaprej oceniti vpliva členov karakterističnega kvazi-polinoma, ki so posledica nerešljivih enačb. Kot ponazarja **Teorem 5.7** je moč s prostimi polinomi le delno vplivati na člene nerešljivih enačb.

Za določitev ustreznega karakterističnega kvazi-polinoma je tako potrebno s preiskovalnim algoritmom poiskati ustrezen kvazi-polinom, ki ustreza zadanim kriterijem stabilnosti oz. dinamike. Zelo pomembna je izbira stabilnega karakterističnega polinoma v prvi enačbi, ki ima vedno rešitev, saj je stabilnost sistema z zakasnitvami ob nestabilni matriki  $A_0$  izredno pogojna [93]. Postopek določitve ustreznega stabilnega karakterističnega kvazi-polinoma lahko izpeljemo s pomočjo diferencialne evolucije [81] na različne načine. Z diferencialno evolucijo lahko izvedemo enostaven algoritem, kjer ob spreminjanju regulatorja ustrezne strukture ves čas preverjamo lastnosti oz. stabilnost karakterističnega kvazi-polinoma. Lahko npr. izberemo karakteristični polinom prve enačbe (5.54), izračunamo ustrezen regulator  $R_0$  in  $P_0$  ter uporabimo preostale polinome regulatorja  $R_i$  in  $P_i$  kot spremenljivke. Karakteristični polinom prve enačbe lahko določimo npr. z že predstavljeno metodo (5.44). Prva enačba karakterističnega kvazi-polinoma odraža dinamiko ne zakasnjene zaprtozančnega sistema, ki pride do večjega izraza ob majhnih vrednostih zakasnitev, saj manjše kot so zakasnitve manjši je doprinos zakasnenih matrik.

Z uporabo rezultata (**Teorem 5.8**) lahko zagotovimo poljuben zaprtozančni karakteristični kvazi-polinom. Tega lahko določimo po že opisanih principih oz. s pomočjo diferencialne evolucije izberemo poljuben kvazi-polinom znotraj množice vseh stabilnih. Postopek izbire kvazi-polinoma lahko še nekoliko poenostavimo. Predpostavimo zaprtozančni karakteristični kvazi-polinom

$$C_d(s) = \sum_{i=0}^v c_i(s) e^{-h_i s} \quad (5.122)$$

ki ga zapišemo v obliki

$$C_d(s) = a(s)(s+1 + \sum_{i=1}^v a_i e^{-h_i s}), \quad (5.123)$$

kjer je  $a(s)$  polinom brez zakasnitev,  $s+1 + \sum_{i=1}^v a_i e^{-h_i s}$  je sistem prvega reda z vsemi zakasnitvami, ki so prisotne v zaprtizančnem sistemu (5.122). Na takšen način dosežemo ločeno načrtovanje dinamike za del kvazi-polinoma brez zakasnitev in sistem prvega reda s številnimi zakasnitvami. Zapis (5.123) lahko podamo bolj splošno.

**Predpostavka 5.24** Karakteristični kvazi-polinom, ki ga izberemo kot posledico teoremov (**Teorem 5.7** in **Teorem 5.8**) lahko zapišemo kot produkt polinoma in kvazi-polinoma z vsemi preostalimi zakasnitvami v obliki

$$C_d(s) = a \ s \left( \sum_{i=0}^v a_i(s) e^{-h_i s} \right), h_0 = 0, \quad (5.124)$$

kjer velja  $\deg a \ s = \min \deg c_i \ s$ ,  $\deg a_i \ s = \deg c_i \ s - \deg a \ s$ .

Pri iskanju ustreznega karakterističnega kvazi-polinoma lahko uporabimo učinkovit algoritem za izračun le nekaj skrajno desnih lastnih vrednosti ali se osredotočimo na iskanje kvazi-polinoma znotraj množice vseh stabilnih kvazi-polinomov, saj velja.

**Teorem 5.9** [125] Sistem je asimptotično stabilen neodvisno od zakasnitev, če velja izraz

$$\mu(A_0)_x + \sum_{k=1}^{n_h} \|A_k\|_x < 0, \quad (5.125)$$

kjer je  $x = 1, 2, \infty$ . Mera  $\mu(A_0)_x$  je definirana

$$\mu(A_0)_1 = \max_j (\Re(a_{jj}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|), \quad (5.126)$$

$$\mu(A_0) = 0.5 \lambda_{\max}(A_0^T + A_0), \quad (5.127)$$

$$\mu(A_0)_\infty = \max_i (\Re(a_{ii}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|). \quad (5.128)$$

Kot ponazarja **Teorem 5.9** je ob izbranem karakterističnem polinomu ne zakasnjena dela (prva enačba v sistemu (5.54)) potrebno normo zakasnenih matrik

spraviti pod neko določeno mejo. Omeniti je potrebno, da je **Teorem 5.9** sicer zelo konservativen pogoj stabilnosti. Če ponazorimo uporabo predstavljenega teorema za iskanje ustreznega karakterističnega kvazi-polinoma znotraj množice vseh stabilnih. Uporabimo enak objekt kot v primeru (**Primer 5.1**), le, da tokrat predpostavimo  $k_h = 0$ . Dobimo naslednje zaprtozančne enačbe.

**Primer 5.4** Uporaba teorema (**Teorem 5.9**) za določitev množice stabilnih karakterističnih kvazi-polinomov.

Predpostavimo  $k_h = 0$  in zapišimo zaprtozančne enačbe:

$$\begin{aligned} z^0: & A_0 R_0 + B_0 P_0 = C_{d,0} \\ z^1: & A_1 R_0 + B_1 P_0 = C_{d,1} \\ z^2: & A_2 R_0 = C_{d,2} \end{aligned}$$

Po teoremu (**Teorem 5.9**) zapišemo

$$\begin{aligned} \mu(C_{d,0})_x + \|C_{d,1}\|_x + \|C_{d,2}\|_x &< 0 \\ \mu(C_{d,0})_x + \|A_1 R_0 + B_1 P_0\|_x + \|A_2 R_0\|_x &< 0 \end{aligned}$$

kjer lahko posamezne polinome zapišemo v obliki matrik (5.10), kjer se zakasneni členi karakterističnega kvazi-polinoma nahajajo le v zadnji vrstici posamezne matrike, preostale vrstice so ničelne. To pomeni, da lahko obravnavamo norme vektorjev.

Z upoštevanjem dobljenega rezultata tako iščemo karakteristični kvazi-polinom znotraj množice stabilnih kvazi-polinomov. Ugotovimo lahko, da pri izbranem karakterističnem polinomu ne zakasnjene sistema (matrika  $C_{d,0}$ ), rezultirajoče zakasnjene matrike ne smejo preseči določene norme. To pomeni, da ni mogoče doseči stabilnega karakterističnega kvazi-polinoma ob poljubno izbrani matriki  $C_{d,0}$ .

## 5.6 Vrednotenje robustnosti po principu $H_\infty$

Z upoštevanjem parametričnih rešitev (**Predpostavka 5.8**, **Predpostavka 5.9**, **Teorem 5.3** oz. **Teorem 5.6** in **Teorem 5.7**) Diophantovih enačb dobijo le te neskončno

mного rešitev, posledično se spremeni tudi struktura regulatorja (5.56), (5.58) in (5.59). Predstavili smo dva različna mehanizma delovanja prostih spremenljivk izražena v obliki prostih polinomov, ki jih lahko neodvisno drug od drugega uporabimo za optimizacijo karakterističnega kvazi-polinoma oz. za optimizacijo robustnega učinka (**Opomba 5.3**).

V skladu z izrazoma (5.38) in (5.39) se spremenita občutljivost in komplementarna občutljivost, ki sta bistvena pri robustni stabilnosti in robustnemu učinku, kot je bilo predstavljeno v tretjem poglavju pri problemu mešane občutljivosti. Prenosni funkciji v primeru strukture regulatorja (5.56) zapišemo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{A(R - B\lambda)}{AR + BP} = \\ &= \frac{(A_0 + \dots + A_{n_h})(R_0 + \dots + R_{k_h} - (B_0 + \dots + B_{m_h})(\lambda_0 + \dots + \lambda_{k_h}))}{(A_0 + \dots + A_{n_h})(R_0 + \dots + R_{k_h}) + (B_0 + \dots + B_{m_h})(P_0 + \dots + P_{k_h})}, \end{aligned} \quad (5.129)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{B(P + A\lambda)}{AR + BP} = \\ &= \frac{(B_0 + \dots + B_{m_h})(P_0 + \dots + P_{k_h} + (A_0 + \dots + A_{n_h})(\lambda_0 + \dots + \lambda_{k_h}))}{(A_0 + \dots + A_{n_h})(R_0 + \dots + R_{k_h}) + (B_0 + \dots + B_{m_h})(P_0 + \dots + P_{k_h})}, \end{aligned} \quad (5.130)$$

in v primeru (5.58)

$$\begin{aligned} S &= \frac{A(R - B_0\kappa)}{AR + BP} = \\ &= \frac{(A_0 + \dots + A_{n_h})(R_0 + \dots + R_{k_h} - B_0(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h}))}{(A_0 + \dots + A_{n_h})(R_0 + \dots + R_{k_h}) + (B_0 + \dots + B_{m_h})(P_0 + \dots + P_{k_h})}, \end{aligned} \quad (5.131)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{B(P + A_0\kappa)}{AR + BP} = \\ &= \frac{(B_0 + \dots + B_{m_h})(P_0 + \dots + P_{k_h} + A_0(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h}))}{(A_0 + \dots + A_{n_h})(R_0 + \dots + R_{k_h}) + (B_0 + \dots + B_{m_h})(P_0 + \dots + P_{k_h})}, \end{aligned} \quad (5.132)$$

oz. če upoštevamo oba mehanizma (5.59)

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{A(R - B_0\kappa - B\lambda)}{AR + BP} = \\
 &= \frac{(A_0 + \dots + A_{n_h})(R_0 + \dots + R_{k_h} - B_0(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h}) - (B_0 + \dots + B_{m_h})(\lambda_0 + \dots + \lambda_{k_h}))}{(A_0 + \dots + A_{n_h})(R_0 + \dots + R_{k_h}) + (B_0 + \dots + B_{m_h})(P_0 + \dots + P_{k_h})}
 \end{aligned} \tag{5.133}$$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{B(P + A_0\kappa + A\lambda)}{AR + BP} = \\
 &= \frac{(B_0 + \dots + B_{m_h})(P_0 + \dots + P_{k_h} + A_0(\kappa_0 + \dots + \kappa_{k_h})) + (A_0 + \dots + A_{n_h})(\lambda_0 + \dots + \lambda_{k_h})}{(A_0 + \dots + A_{n_h})(R_0 + \dots + R_{k_h}) + (B_0 + \dots + B_{m_h})(P_0 + \dots + P_{k_h})}
 \end{aligned} \tag{5.134}$$

Če upoštevamo princip splošne rešitve prostih polinomov  $\kappa_i$  kot je bilo predstavljeno v teoremu (**Teorem 5.6**)

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{A(R_{0,N} + \dots + R_{i,N} + \dots + R_{k_h,N})}{AR + BP} = \\
 &= \frac{A\left(R - \sum_{j=0}^{k_h} \sum_{k=0}^{\min(j, m_h)} B_k \kappa_{j-k}\right)}{AR + BP},
 \end{aligned} \tag{5.135}$$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{B(P_{0,N} + \dots + P_{i,N} + \dots + P_{k_h,N})}{AR + BP} = \\
 &= \frac{B\left(P + \sum_{j=0}^{k_h} \sum_{k=0}^{\min(j, n_h)} A_k \kappa_{j-k}\right)}{AR + BP},
 \end{aligned} \tag{5.136}$$

oz. če uporabimo končni rezultat (**Teorem 5.7**)

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{A(R_{0,N} + \dots + R_{i,N} + \dots + R_{k_h,N} - B\lambda)}{AR + BP} = \\
 &= \frac{A\left(R - \sum_{j=0}^{k_h} \sum_{k=0}^{\min(j, m_h)} B_k \kappa_{j-k} - B\lambda\right)}{AR + BP}
 \end{aligned} \tag{5.137}$$



$$\begin{aligned}
 T &= \frac{B P_{0,N} + \dots + P_{i,N} + \dots + P_{k_h,N} + A\lambda}{AR + BP} = \\
 &= \frac{B \left( P + \sum_{j=0}^{k_h} \sum_{k=0}^{\min(j,n_h)} A_k \kappa_{j-k} + A\lambda \right)}{AR + BP} \quad (5.138)
 \end{aligned}$$

Iz primerjave izrazov (5.129) in (5.131) oz. (5.135) ter (5.130) in (5.132) oz. (5.136) je razvidno, da v primeru uporabe strukture regulatorja (5.56) pride do spremembe oblike števca. V števcih dobimo dodatne zakasnitve višjih stopenj, ki so rezultat produktov med imenovalcem objekta  $A$  in polinomi  $\lambda$ .

Stopnjo posameznih polinomov  $\lambda_i, i = 0, \dots, k_h$  določimo na podoben način kot je bilo opisano v poglavju reševanja Diophantove enačbe za sisteme brez zakasnitev. Najprej je potrebno izbrati proste parametre kot je predstavljeno v predpostavki (**Predpostavka 5.5**), izbrati njihove poljubne vrednosti ter izračunati regulatorje v posameznih Diophantovih enačbah (5.54). Stopnja posameznega polinoma  $\lambda_i$  oz.  $\kappa_i$  je natanko takšna kot je število prostih parametrov v posamezni enačbi (**Teorem 5.3** oz. **Teorem 5.7**).

S poljubnim spreminjanjem parametrov posameznih polinomov dosežemo identičen učinek kot v primeru spreminjanja prostih parametrov. Na podlagi prejšnjih vrednosti regulatorjev in novih izbranih vrednosti prostih parametrov lahko določimo vrednost polinoma  $\kappa_i$ , ki rezultira k spremembi prostih parametrov. Z uporabo posameznih polinomov  $\kappa_i$  dobimo mehanizem, ki je identičen prostim spremenljivkam.

Če izhajamo iz reševanja posameznih rešljivih Diophantovih enačb v smislu prostih spremenljivk pridemo do rezultata, ki ga predvideva struktura regulatorja (5.58) oz. kot smo pokazali v primeru (**Primer 5.2**) do strukture regulatorja (5.82). Če razširimo idejo splošne rešitve (5.36) na sisteme z zakasnitvami nas to privede do strukture regulatorja (5.56). Kot smo deloma že omenili je med posameznima mehanizmoma občutna razlika v smislu vpliva polinomov  $\lambda_i$  oz.  $\kappa_i$  na postopek reševanja. V primeru (5.58), ko izberemo nove vrednosti polinomov  $\kappa_i$  moramo ponovno izračunati regulatorje pri vseh Diophantovih enačbah, saj sprememba posameznega polinoma vpliva na spremembo karakterističnega polinoma. Kakor hitro se spremenijo spremenljivke regulatorja v eni

Diophantovi enačbi, je potrebno na novo izračunati še vse preostale enačbe, saj so le te medsebojno odvisne (5.54). Postopku ponovnega izračunavanja polinomskih enačb se lahko izognemo z uporabo splošne strukture regulatorja (5.82), ki predvideva učinke sprememb posameznih karakterističnih polinomov. Kot smo pokazali lahko s polinomi  $\kappa_i$  posredno vplivamo na odvisne polinomske enačbe. Če s polinomi  $\kappa_i$  ni moč doseči želenih rezultatov v odvisnih polinomskih enačbah, uporabimo opazovalnik (**Teorem 5.8**).

Če množico vseh regulatorjev (5.56), ki rezultirajo k natančno določenim karakterističnim polinomom posameznih Diophantovih enačb, zapišemo s pomočjo polinomov  $\lambda_i$ , hitro ugotovimo, da s spremembo posameznega parametra polinoma  $\lambda_i$  vplivamo na množico spremenljivk regulatorja. Ob poljubnem spreminjanju polinomov  $\lambda_i$ , pri čemer ne vplivamo na posamezne karakteristične polinome, ni potrebno ponovno reševati posameznih Diophantovih enačb. Omenjen princip je tako več kot dobrodošel v primeru optimizacije frekvenčnih karakteristik  $S$  oz.  $T$ , saj je v izrazih (5.129) in (5.130) vsakokrat potrebno izračunati le nov števec, imenovalc ostaja ves čas nespremenjen.

Če povzamem lahko problem mešane občutljivosti obravnavamo na dva različna načina in sicer s strukturo regulatorja (5.56), ki rezultira k splošni obliki zaprtizančnih enačb in je tako potrebno posledično enačbe rešiti le prvič vse naslednje rešitve so definirane s splošno obliko (5.57). To pomeni, da v procesu optimizacije spreminjamo le števec izrazov (5.129) in (5.130). Pri tem odvisne enačbe ostajajo nespremenjene. Drugi pristop k optimizaciji temelji na spreminjanju polinomov  $\kappa_i$  s splošno obliko regulatorja (5.82). Pri slednjem postopku je moč v primeru neodvisnih Diophantovih enačb vedno zagotoviti poljubne karakteristične polinome, v primeru odvisnih enačb pa ne. Karakteristične polinome neodvisnih enačb lahko tako poljubno izberemo, na odvisne enačbe lahko posredno vplivamo s prostimi polinomi  $\kappa_i$ .

## 5.7 Analiza napake zakasnitev

Analiza napake pri ocenitvi vrednosti zakasnitev v sistemu je seveda zelo pomembna, saj lahko tako kot druge anomalije v sistemu povzroči nestabilnost. Zapišimo

zaprtozančne enačbe (5.54) za sistem prvega reda ter regulator z eno zakasnitvijo ob upoštevanju napake pri oceni zakasnitve  $\Delta\tau$ .

$$\begin{array}{l} z^0 \\ z^{1\pm\Delta\tau} \\ z^1 \\ z^{2\pm\Delta\tau} \end{array} \begin{array}{l} A_0 R_0 + B_0 P_0 \\ A_1 R_0 \\ A_0 R_1 + B_0 P_1 \\ A_1 R_1 \end{array} . \quad (5.139)$$

Kot vidimo je posledica zakasnitve v formuliranju dodatnih zakasnjenih členov v karakterističnem kvazi-polinomu. Če se osredotočimo na **Teorem 5.9** ugotovimo, da morajo biti ojačenja zakasnjenih členov čim manjša oz. posledično ojačenja regulatorja. To je še posebej pomembno v primeru, kjer posamezni polinomi števca oz. imenovalca ne nastopijo skupaj v isti enačbi. Kot je to v primeru druge in četrte enačbe v izrazu (5.139). Za isti primer zapišimo še sistem enačb (5.95) z upoštevanjem napake pri oceni zakasnitve  $\Delta\tau$

$$\begin{array}{l} z^0 \\ z^{1\pm\Delta\tau} \\ z^1 \end{array} \begin{array}{l} A_0 - K_0 \\ A_1 \\ -K_1 \end{array} . \quad (5.140)$$

Podobno kot v primeru polinomske sinteze, dobimo tudi v primeru regulatorja v prostoru stanj dodatne zakasnjene člene, na katere ni moč v celoti vplivati. Kot vidimo na polinom  $A_1$  ne moremo neposredno vplivati z regulatorjem  $K_1$ , saj ima drugačno zakasnitev od sistema.

Analizo robustnosti sistema na majhne spremembe zakasnitev bomo opravili numerično v smislu postopnega spreminjanja zakasnitev sistema ter nadzоровanja skrajno desnih lastnih vrednosti zaprto zančnega sistema.

## 5.8 Zaključne ugotovitve

Poglavje temelji na splošni predstavitvi obravnave sistemov z zakasnitvami ter na predstavitvi lastnih rezultatov polinomske sinteze za sisteme z zakasnitvami. Uvodoma

natančno obravnavamo postopek reševanja Diophantove enačbe ter podamo določene lastne ugotovitve pri reševanju enačbe in izbire prostih parametrov, ki temeljijo na postopku reševanja linearnega sistema enačb.

V nadaljevanju natančno obravnavamo ter primerjamo dve različni strukturi izbire prostih polinomov in posledično regulatorjev. Ena struktura je bila obravnavana v [73] in [74] druga pa izvira iz splošne rešitve Bezoutove identitete oz Diophantove enačbe. Strukturi natančneje obravnavamo za sisteme z eno notranjo zakasnitvijo, kjer podamo številne lastnosti pri postopku reševanja enačb ter splošne rešitev enačb in strukture regulatorjev. Strukturno regulatorja [73] in prostih polinomov izpeljemo v splošnejši obliki s čimer dobimo jasno primerjavo s strukturo regulatorja, ki izvira iz splošne rešitve Diophantove enačbe.

V poglavju obravnavamo tudi opazovalnik s pomočjo katerega predlagamo rešitev polinomske sinteze za sisteme z zunanjimi in notranjimi zakasnitvami. Rešitev temelji na kompenzaciji izključno tistih zakasnenih členov v karakterističnem kvazi-polinomu, ki so posledica le nerešljivih Diophantovih enačb in se tako bistveno razlikuje od klasične uporabe opazovalnika, kjer se kompenzirajo vsi zakasneni členi.

V nadaljevanju se ukvarjamo s kompenzacijo transportne zakasnitve s pomočjo opazovalnika, kjer predlagamo uporabo številnih kaskadnih opazovalnikov s pomočjo katerih lahko stabiliziramo kaskado opazovalnikov, medtem ko v primeru le dveh kaskadnih opazovalnikov [112] to ni mogoče.

Na koncu poglavja predlagamo še postopek ustrezne izbire karakterističnega kvazi-polinoma, ki temelji na podlagi produkta klasičnega polinoma in kvazi-polinoma. Na takšen način lahko transparentno načrtamo položaj lastnih vrednosti v zaprti zanki, saj z izbiro ustreznega polinoma izberemo ustrezne dominantne lastne vrednosti, preostale lastne vrednosti, ki so posledica kvazi-polinoma pa izberemo tako, da se v kompleksni ravnini nahajajo dovolj levo od dominantnih.

## 6 Primer sinteze regulatorja za sistem z dvema zakasnitvama

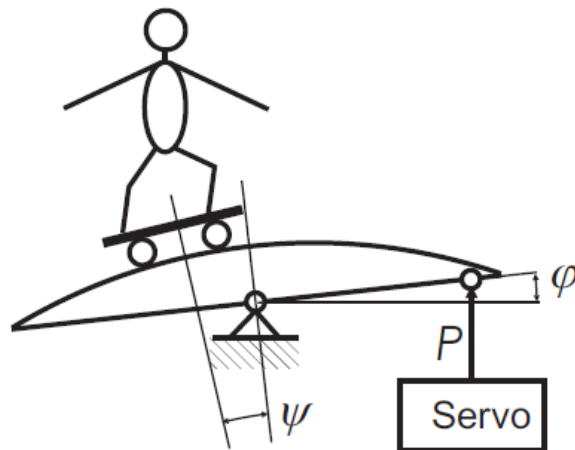
Predstavljene in obravnavane postopke bomo aplicirali na zanimivem praktičnem primeru rolkarja na pomičnem polkrožnem grebenu (Slika 6.1), ki je bil obravnavan v [111]. V tem primeru gre za tipičen nestabilne sistem balansiranja, ki je podoben inverznemu nihalu.

### 6.1 Model objekta

S servomotorjem vplivamo na nagib klanca in posledično ohranjamo položaj rolkarja na vrhu klanca. Pospešeno gibanje rolkarja na klancu izrazimo v odvisnosti od kotov  $\psi + \varphi$ , moč servomotorja je  $P$ . Če v sistemu zanemarimo trenje gibanje rolkarja zapišemo s prenosno funkcijo:

$$G(s) = \frac{\psi(s)}{\varphi(s)} = \frac{\lambda e^{-s\tau_1}}{s^4 - \mu s^2 e^{-s\tau_2}}, \quad (6.1)$$

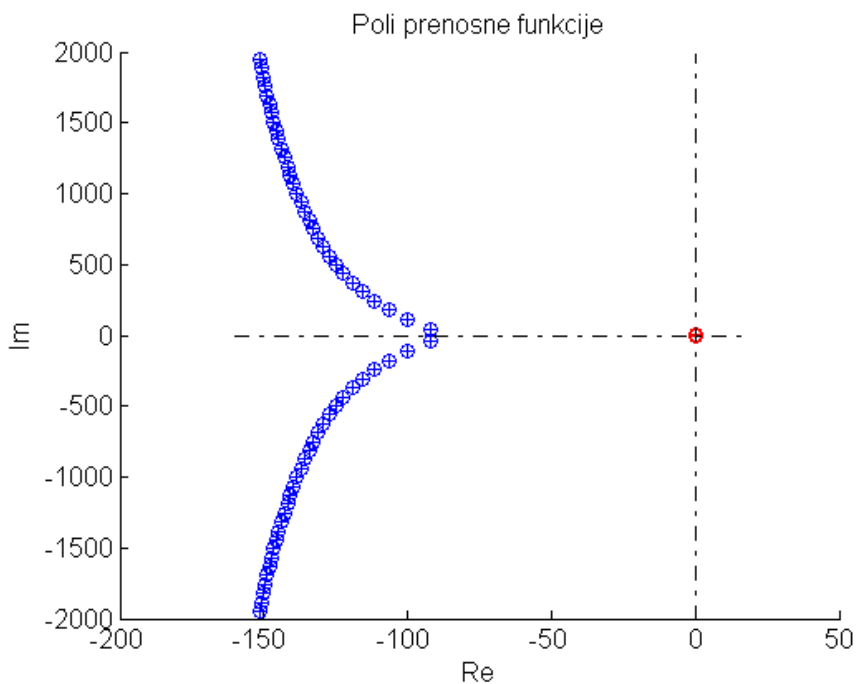
kjer je  $\lambda = 0.2$ ,  $\mu = 1$ ,  $\tau_1 = \tau_2 + 0.3 \text{ s} = 0.4 \text{ s}$ ,  $\tau_2 = 0.1 \text{ s}$ . Zakasnitvi sta posledica zakasnjenege odziva rolkarja  $\tau_1$  ter zakasnjenege odziva servomotorja  $\tau_2$ .



Slika 6.1 Rolkar na pomičnem grebenu [111]

Zapišimo sistem v prostoru stanj (5.1) v spoznavnostni normalni obliki (5.10):

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 B_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, C_1 = 1 \ 0 \ 0 \ 0
 \end{aligned} \tag{6.2}$$



**Slika 6.2:** Poli prenosne funkcije (6.3)

## 6.2 Kompenzacija transportne zakasnitve

Sistem (6.1) vsebuje zraven notranje zakasnitve  $\tau_2$  tudi vhodno/izhodno transportno zakasnitev  $\tau_1$ . Za polinomske sintezo (**Teorem 5.3** in **Teorem 5.7**) za ustrezno konstrukcijo polinomskih Diophantovih enačb potrebujemo tudi informacijo o izhodnem ne zakasnjem stanju  $x_1$ . Predpostavimo, da izhodnega ne zakasnjena stanja ni moč meriti in je na voljo le zakasnjeno stanje. Tako je potrebno načrtati stabilen opazovalnik

sistema (6.2). Z upoštevanjem izraza (5.101) načrtamo stabilen opazovalnik. S pomočjo diferencialne evolucije [81] lahko enostavno določimo ustrezno ojačenje opazovalnika ob sprotnem nadzoru skrajno desnih lastnih vrednosti s pomočjo algoritma (Algoritem 4.3). Cilj diferencialne evolucije je izbrati takšna ojačenja opazovalnika, da pole sistema (5.101) pomaknemo čim bolj na levo.

Opazovalnik (5.101) smo v 200-tih iteracijah diferencialne evolucije stabilizirali s skrajno desnim polom v  $\Re(s_d) = -0.85$ .

Na podoben način lahko stabiliziramo opazovalnik, ki ga definira **Predpostavka 5.22**. Izberemo štiri kaskadne opazovalnike, kjer je stabilizacija prvega opazovalnika trivialna, vse naslednje opazovalnike stabiliziramo z diferencialno evolucijo. V tem primeru nam je po 200-tih iteracijah uspelo premakniti prvi pol v  $\Re(s_d) = -3.73$ .

Opazovalnik lahko načrtamo tudi z znižano strukturo, saj izhodno zakasnjeno stanje merimo. Takšna struktura opazovalnika, ki je predstavljena v [111], posledično rezultira k zaprtozančni strukturi brez zakasnenih členov, kar bistveno poenostavi načrtovanje opazovalnika.

### 6.3 Karakteristični kvazi-polinom

Z uporabo opazovalnika formiramo ustrezen izhod iz sistema in tako modificiramo povratno zanko sistema tako, da dobimo ustrezno obliko zaprtozančnih polinomskih enačb. Iz opazovalnika peljemo na vhod zadnji dve stanji  $x_1$  in  $x_2$ , torej dobi izhodna matrika obliko  $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Prenosno funkcijo sistema zapišemo:

$$G(s) = \frac{\psi(s)}{\varphi(s)} = \frac{s + 10 + \lambda e^{-s\tau_1}}{s^4 - \mu s^2 e^{-s\tau_2}} = \frac{B_0 + B_4 z^4}{A_0 + A_1 z}, \quad (6.3)$$

kjer transportno zakasnitev  $\tau_1$  izrazimo kot večkratnik notranje zakasnitve  $\tau_2$  ter zapišemo  $z = e^{-s\tau_2}$ .

Izhodno matriko smo zbrali tako, da je števec prenosne funkcije tako kot imenovallec tipa RFDE. Zapišemo zaprtozančni sistem enačb:

$$\begin{aligned}
 z^0 & A_0 R_0 + B_0 P_0 = C_{d,0} \\
 z^1 & A_0 R_1 + B_0 P_1 = C_{d,1} - A_1 R_0 \\
 z^2 & A_0 R_2 + B_0 P_2 = C_{d,2} - A_1 R_1 \\
 z^3 & A_0 R_3 + B_0 P_3 = C_{d,3} - A_1 R_2 \\
 z^4 & A_0 R_4 + B_0 P_4 = C_{d,4} - A_1 R_3 - B_4 P_0, \\
 z^5 & A_1 R_4 + B_4 P_1 = C_{dx,5} \\
 z^6 & B_4 P_2 = C_{dx,6} \\
 z^7 & B_4 P_3 = C_{dx,7} \\
 z^8 & B_4 P_4 = C_{dx,8}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

kjer so  $C_{dx}$  kvazi-polinomi, ki jih ni moč neposredno izbrati.

Zapišemo še sistem polinomskih enačb z upoštevanjem prostih polinomov  $\lambda_i$  (**Predpostavka 5.8**).

$$\begin{aligned}
 z^0 & A_0(R_0 - B_0 \lambda_0) + B_0(P_0 + A_0 \lambda_0) = C_{d,0} \\
 z^1 & A_0(R_1 - B_0 \lambda_1) + B_0(P_1 + A_0 \lambda_1 + A_1 \lambda_0) = C_{d,1} - A_1(R_0 - B_0 \lambda_0) \\
 z^2 & A_0(R_2 - B_0 \lambda_2) + B_0(P_2 + A_0 \lambda_2 + A_1 \lambda_1) = C_{d,2} - A_1(R_1 - B_0 \lambda_1) \\
 z^3 & A_0(R_3 - B_0 \lambda_3) + B_0(P_3 + A_0 \lambda_3 + A_1 \lambda_2) = C_{d,3} - A_1(R_2 - B_0 \lambda_2) \\
 z^4 & A_0(R_4 - B_0 \lambda_4 - B_4 \lambda_0) + B_0(P_4 + A_0 \lambda_4 + A_1 \lambda_3) = C_{d,4} - A_1(R_3 - B_0 \lambda_3) - B_4(P_0 + A_0 \lambda_0) \\
 z^5 & A_0(-B_4 \lambda_1) + A_1(R_4 - B_0 \lambda_4 - B_4 \lambda_0) + B_0(A_1 \lambda_4) + B_4(P_1 + A_0 \lambda_1 + A_1 \lambda_0) = C_{dx,5} \\
 z^6 & A_0(-B_4 \lambda_2) + A_1(-B_4 \lambda_1) + B_4(P_2 + A_0 \lambda_2 + A_1 \lambda_1) = C_{dx,6} \\
 z^7 & A_0(-B_4 \lambda_3) + A_1(-B_4 \lambda_2) + B_4(P_3 + A_0 \lambda_3 + A_1 \lambda_2) = C_{dx,7} \\
 z^8 & A_0(-B_4 \lambda_4) + A_1(-B_4 \lambda_3) + B_4(P_4 + A_0 \lambda_4 + A_1 \lambda_3) = C_{dx,8}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

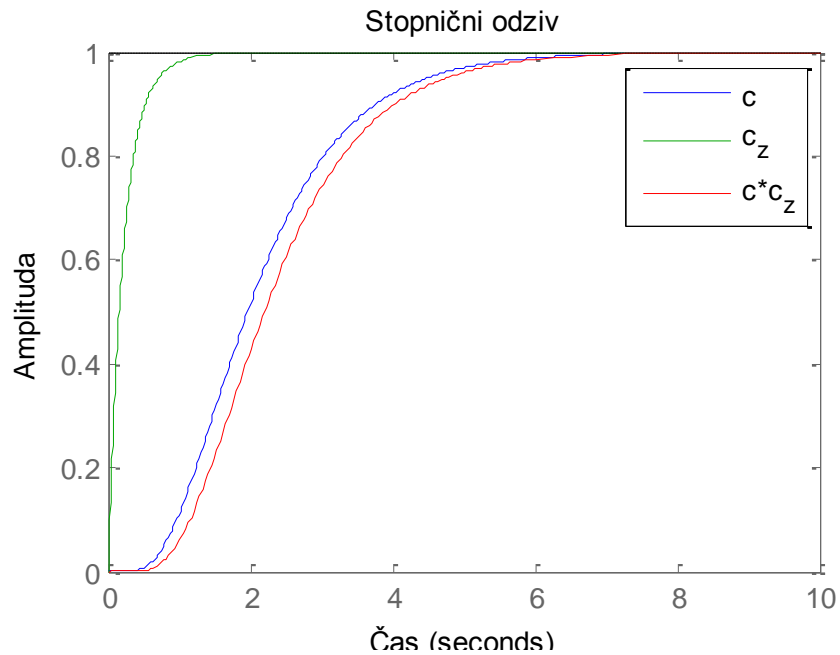
Karakteristični polinom izberemo na podlagi rezultata predpostavke (**Predpostavka 5.24**), kjer karakteristični kvazi-polinom zapišemo v obliki produkta polinoma in kvazi-polinoma prvega reda z vsemi preostalimi zakasnitvami (5.124).

$$\begin{aligned}
 C_d = c(s)c_z(s) &= (s^8 + 32s^7 + 761s^6 + 9990s^5 + 92559s^4 + 495928s^3 + 1.36 \cdot 10^6 s^2 \\
 &+ 1.73 \cdot 10^6 s + 7.83 \cdot 10^5)(s + 4.5 + 0.1(z^1 - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 - z^6 + z^7 - z^8))
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

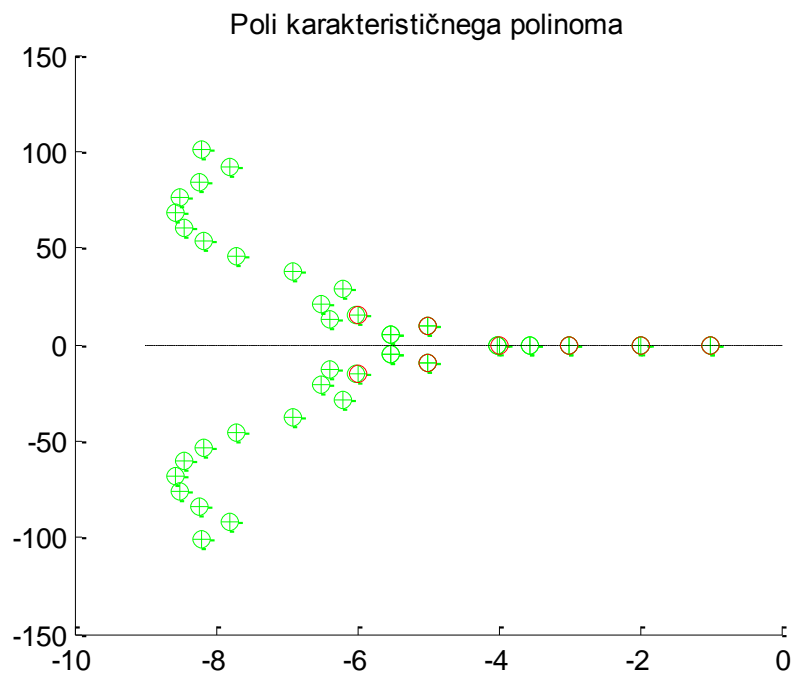
Vrednosti členov z zakasnitvami v kvazi-polinomu  $c_z(s)$  izberemo dovolj majhne ter dovolj hiter pol v kvazi-polinomu, da so posledično poli kvazi-polinoma  $c_z(s)$  v kompleksni ravnini levo od polov  $c(s)$  in imajo zanemarljiv vpliv na celotno dinamiko



(Slika 6.4). Če predpostavimo neskončno majhne zakasnitve v kvazi-polinomu, dobimo polinom  $s + 4.5$ , ki je zelo pomemben pri dinamiki.



**Slika 6.3:** Stopnični odziv karakterističnega kvazi-polinoma



**Slika 6.4:** Poli izbranega karakterističnega kvazi-polinoma

Nerešljive polinomske enačbe v sistemu (6.4) razrešimo s pomočjo opazovalnika zaprtozančnega sistema s sistemskimi matrikami v vodljivostni normalni obliki oz. s

pomočjo rezultata (**Teorem 5.8**). Kot je razvidno so zadnje 4 enačbe nerešljive, saj so odvisne izključno od rešitev prejšnjih polinomskih enačb. Za opazovalnik zaprtozančnega sistema uporabimo klasičen opazovalnik (5.91). Stabilizacija zaprtozančnega opazovalnika v tem primeru ni problematična, saj smo z opazovalnikom sistema že predhodno razrešili problem transportne zakasnitve ter tako posledično z ojačenji opazovalnika neposredno vplivamo na matriko brez zakasnitev.

Kot bomo ugotovili odvisne polinomske enačbe zanemarljivo vplivajo na zaprtozančne lastnosti. Tako v tem primeru ne bo potrebno načrtati zaprtozančnega opazovalnika in kompenzatorja.

## 6.4 Optimalni regulator po principu problema mešane občutljivosti

S prostimi polinomi  $\lambda_i$  ne vplivamo na spremembo karakterističnega kvazi-polinoma temveč le na spremembo števca zaprtozančnega sistema. Glede na izbrano stopnjo karakterističnega kvazi-polinoma velja  $\deg \lambda_0 = 1, \deg \lambda_i = 0, i = 1, \dots, 4$ . Vrednosti  $\lambda_i$  uporabimo za optimizacijo občutljivosti in komplementarne občutljivosti pri obravnavi problema mešane občutljivosti (3.24).

$$\begin{aligned} S &= \frac{A(R - B\lambda)}{AR + BP} = \\ &= \frac{(A_0 + A_1)(R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - (B_0 + B_1)(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4))}{AR + BP} \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{B(P + A\lambda)}{AR + BP} = \\ &= \frac{(B_0 + B_4)(P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + (A_0 + A_1)(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4))}{AR + BP} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Postopek optimizacije izvedemo s pomočjo diferencialne evolucije tako, da v procesu optimizacije minimiramo normi izrazov:

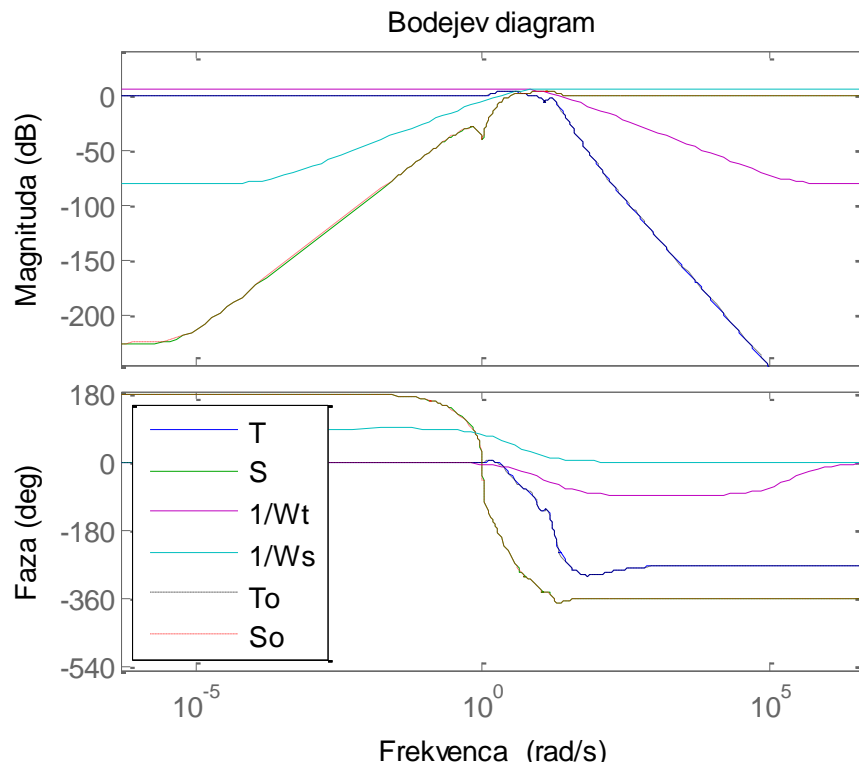
$$\|T(\lambda)W_1\|_\infty < \gamma \wedge \|S(\lambda)W_2\|_\infty < \gamma, \gamma < 1. \quad (6.9)$$

Izberemo uteži  $W_1$  in  $W_2$  s katerima želimo omejiti občutljivost in komplementarno občutljivost (Slika 6.5).

$$\begin{aligned} W_1^{-1} &= \frac{10^{-4}s + 23.09}{s + 11.55} \\ W_2^{-1} &= \frac{2s + 3.5 \cdot 10^{-4}}{s + 3.46} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Po 50-ih iteracijah diferencialne evolucije dobimo suboptimalno rešitev regulatorja za  $\gamma = 0.854$  z naslednjimi vrednostmi prostih polinomov:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 2627s + 7639, \lambda_1 = 6005, \lambda_2 = 1820 \\ \lambda_3 &= -844, \lambda_4 = -492 \end{aligned} \quad (6.11)$$



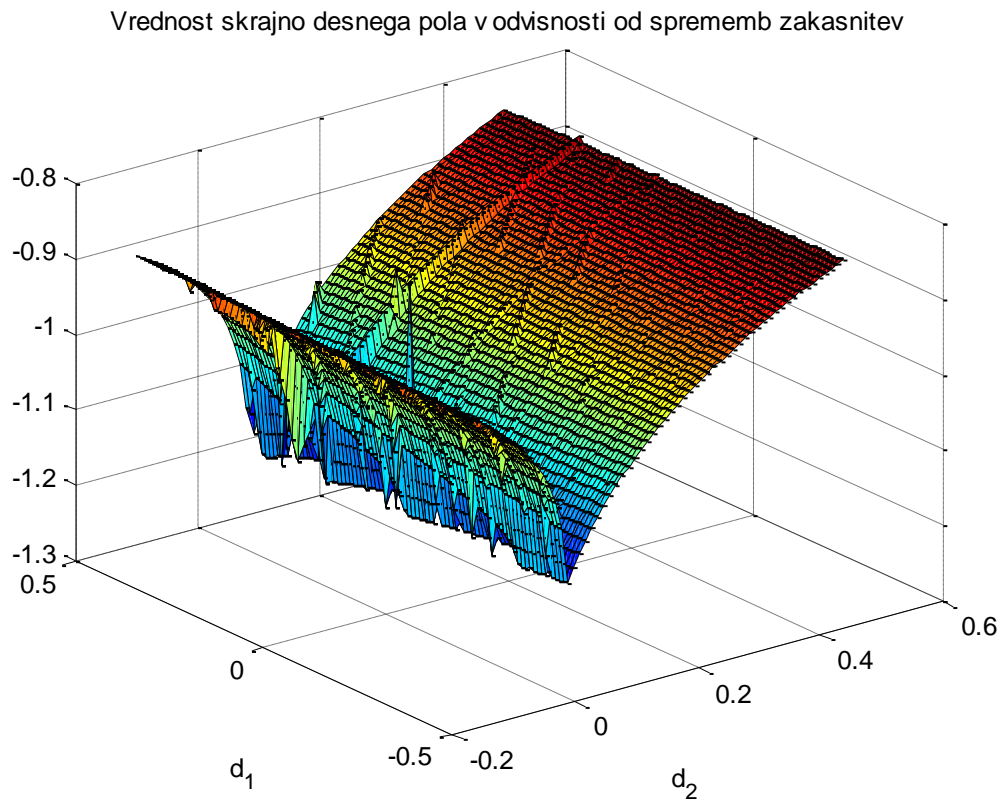
**Slika 6.5:** Uteži, občutljivost ter komplementarna občutljivost

Slika 6.5 prikazuje izbrane uteži, občutljivost  $S_o$  ter komplementarno občutljivost  $T_o$  zaprtozančnega sistema (6.4). Lahko opazimo, da se občutljivost in komplementarna občutljivost zaprtozančnega sistema (6.4) in sistema s predvidenim zaprtozančnim karakterističnim polinomom (6.6) razlikujejo zanemarljivo. To pomeni, da zakasneni členi

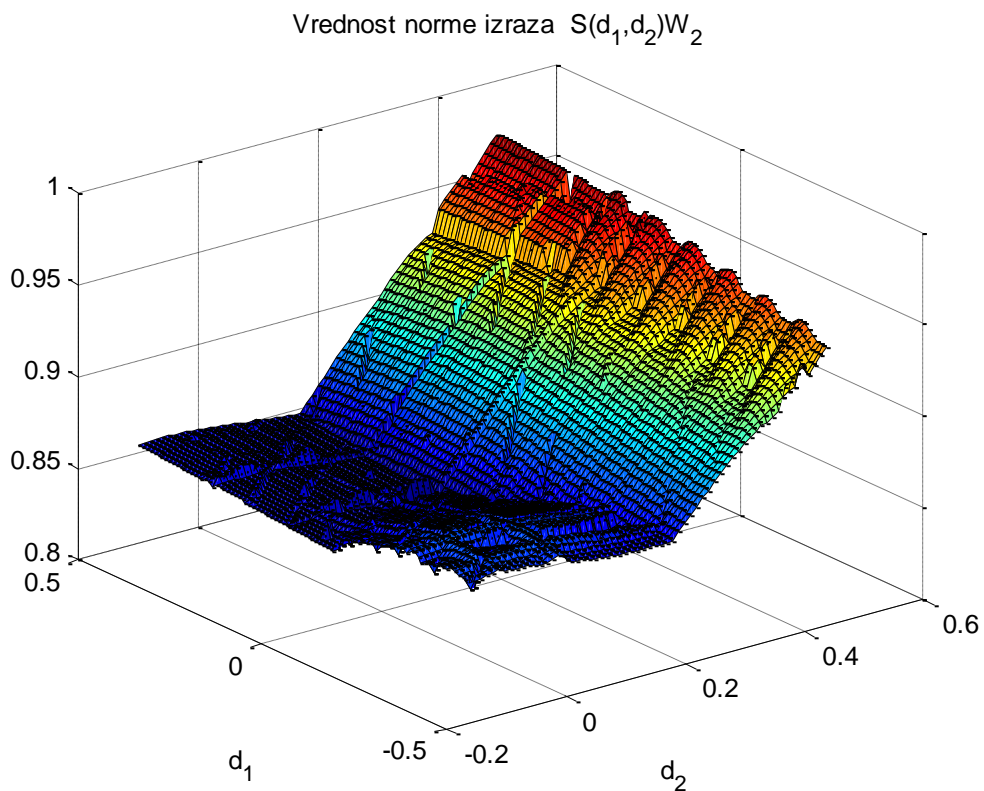
v zaprtozančnem sistemu, ki jih ni moč poljubno načrtovati v tem primeru zanemarljivo vplivajo na lastnosti sistema in jih tako posledično ni potrebno kompenzirati.

## 6.5 Robustnost sistema na spremembe zakasnitev

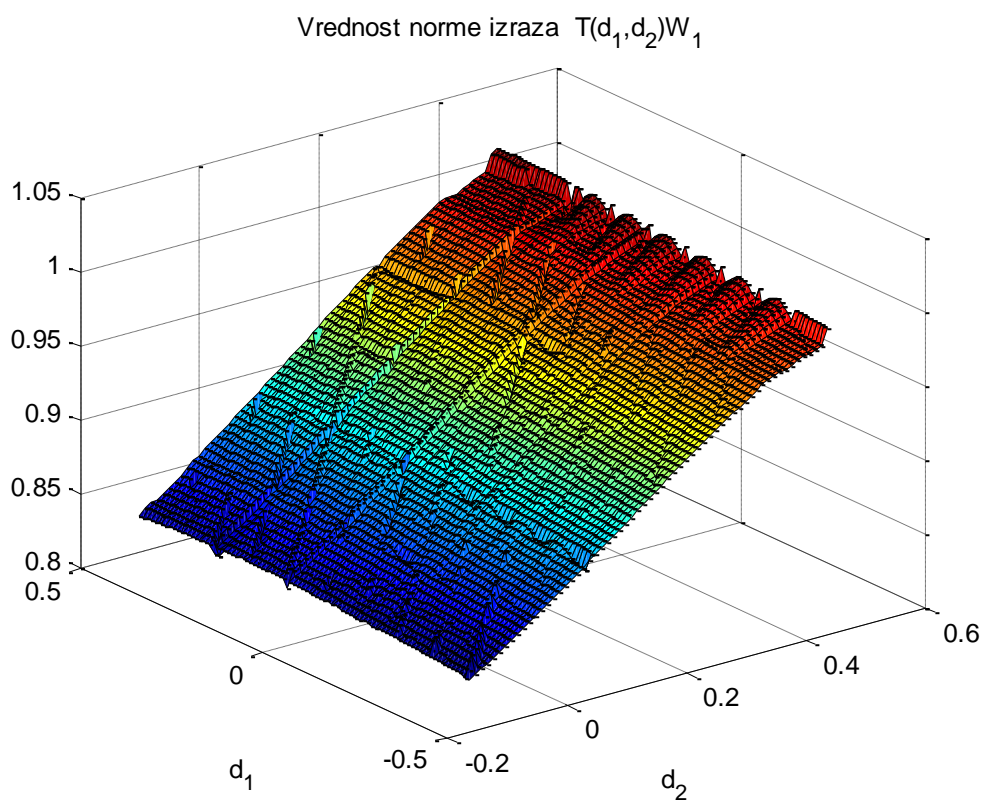
Robustnost sistema na spremembe oz. morebitne napačne cene zakasnitev smo analizirali s transparentnim preverjanjem robustnosti na določeni ravnini točk, ki smo jo dobili s spreminjanjem posameznih zakasnitev. Najprej smo preverili robustno stabilnost sistema ob spreminjanju zakasnitev  $\tau_1 + d_1$  in  $\tau_2 + d_2$ . Kot je razvidno (Slika 6.6) sistem ostane stabilen tudi pri večjih spremembah zakasnitev.



**Slika 6.6:** Vrednost skrajno desnega pola v odvisnosti od sprememb zakasnitev



**Slika 6.7:** Vrednost norme izraza  $\|S(d_1, d_2)W_2\|_\infty$



**Slika 6.8:** Vrednost norme izraza  $\|T(d_1, d_2)W_1\|_\infty$

Kot ugotovimo (Slika 6.7 in Slika 6.8) ostane sistem znotraj z utežmi začrtanih meja  $\|T(d_1, d_2)W_1\|_\infty < 1 \wedge \|S(d_1, d_2)W_2\|_\infty < 1$  tudi v primeru spremembe zakasnitev. Problem ostaja znotraj predpostavljenih meja, če velja  $d_1 = d_2 < 0.5$ .

## 6.6 Zaključne ugotovitve

V primeru smo predstavili postopek sinteze regulatorja za sistem z eno notranjo in eno vhodno/izhodno transportno zakasnitvijo. Izbrali smo ustrezen zaprtozančni karakteristični kvazi-polinom s katerim smo dosegli zelo dobro obnašanje sistema tudi v primeru motenj, tako v sistemu (Slika 6.5) kot v zakasnitvah (Slika 6.6, Slika 6.7, Slika 6.8). Kot smo ugotovili so lastnosti sistema s postavitvijo ustreznih uteži zagotovljene tudi v primeru določenih sprememb posameznih zakasnitev. Te lastnosti so zelo odvisne od sistema in ustrezne izbire zaprtozančnega karakterističnega kvazi-polinoma. V našem primeru smo karakteristični kvazi-polinom izbrali na podlagi izkušenj. Če izbran kvazi-polinom ne zagotavlja želenih lastnosti oz. robustnosti, moramo postopek izbire kvazi-polinoma ponoviti. Kot smo ugotovili v predstavljenem primeru je bil vpliv odvisnih polinomskih enačb zanemarljiv tako na robustnost kot na občutljivost. Posledično ni bilo potrebno načrtati zaprtozančnega opazovalnika in kompenzatorja. S tem se ponuja zanimiva aplikacija prostih polinomov  $\kappa_i$  (**Teorem 5.6** in **Teorem 5.7**), ki je še nismo neposredno izpostavili, namreč za optimizacijo odvisnih polinomskih enačb v smislu zmanjšanja njihovega vpliva na zaprtozančne lastnosti.

## 7 Zaključek

V delu smo se ukvarjali z robustno sintezo regulatorja za sisteme z notranjimi, izhodnimi ter vhodno/izhodnimi transportnimi zakasnitvami. Sinteza regulatorja temelji na reševanju sklopa polinomskih enačb, ki definirajo zaprtozančni karakteristični kvazi-polinom. Kot smo ugotovili, je moč le nekaj polinomskih enačb rešiti neodvisno, preostale enačbe so odvisne od rešitev prejšnjih enačb. To pomeni, da z ustreznim regulatorjem, ki ga dodamo pred sistem ni možno načrtati poljuben zaprtozančni sistem z zakasnitvami tako, kot je to v primeru polinomske sinteze za sisteme brez zakasnitev. Za rešitev tega problema smo v delu predlagali uporabo dodatne strukture zaprtozančnega opazovalnika s katero lahko vplivamo na poljuben koeficient kvazi-polinoma. S tem lahko za poljuben obravnavan sistem izberemo poljuben zaprtozančni kvazi-polinom. Posebno strukturo kaskadnih opazovalnikov smo uporabili tudi za kompenzacijo transportnih zakasnitev. Takšna uporaba opazovalnika tako omogoča uporabo polinomske sinteze tudi v primeru, če so v sistemu prisotne transportne zakasnitve.

Za izbiro zaprtozančnega karakterističnega kvazi-polinoma smo predlagali poenostavljen postopek, ki temelji na ločeni izbiri polinoma in kvazi-polinoma z vsemi zakasnitvami. Takšen postopek je transparenten in predstavlja ločeno načrtovanje dominantnih polov ter vpliva zakasnitev. V primeru izbire ustreznega kvazi-polinoma so seveda zelo pomembne lastne vrednosti le tega. V ta namen smo v tem delu razvili učinkovit algoritem za izračun le nekaj skrajno desnih lastnih vrednosti sistema, ki temelji na samodejni določitvi območja izračuna korenov kvazi-polinoma ter samodejni določitvi števila diskretizacijskih točk. V primeru izbire velikega števila diskretizacijskih točk oz. širokega območja izračuna korenov dobimo namreč veliko število lastnih vrednosti sistema, kar je računsko potratno. V primeru določitve stabilnosti sistema na primer zadostuje že informacija o legi skrajno desne lastne vrednosti sistema.

V delu smo se ukvarjali tudi z zagotovitvijo robustnosti zaprtozančnega sistema. V ta namen smo uporabili problem mešane občutljivosti oz. metriko  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Posebno pozornost smo namenili tudi obravnavi robustnosti sistema na spremembe zakasnitev, ki smo jo izvedli numerično s kontinuiranim pomikanjem posameznih zakasnitev in sprotnega

spremljanja skrajno desnih lastnih vrednosti. V smislu izbire ustreznega sub-optimalnega regulatorja, ki zagotavlja določene lastnosti sistema smo podrobno predstavili in raziskali vpliv prostih polinomov, ki jih lahko uporabimo bodisi za optimizacijo kvazi-polinoma bodisi za optimizacijo robustnosti zaprtizančnega sistema.

V delu smo se osredotočili na številne postopke sinteze regulatorja za sisteme z zakasnitvami, vendar so določeni postopki računsko izjemno kompleksni in bi jih bilo vsekakor potrebno izboljšati. Postopek izbire karakterističnega kvazi-polinoma je zelo kompleksen, saj če želimo izbrati kvazi-polinom, ki je robusten tako na motnje v sistemu in v zakasnitvah je potrebno le to pri postopku izbire kvazi-polinoma ves čas preverjati. Postopki postanejo občutno kompleksnejši tudi v primeru sinteze regulatorjev višjih redov. Tako je za izračun lastnih vrednosti sistema z velikim številom zakasnitev potrebno visoko število diskretizacije. V tem primeru bi bila več kot dobrodošla paralelizacija algoritma in izvedba algoritma na grafičnem procesorju. Paralelizacija algoritmov bi bila smiselna tudi v primeru postopkov uporabe diferencialne evolucije. Zraven optimizacije učinkovitosti algoritmov je možno nadaljnje delo okarakterizirati tudi v smeri izboljšave teorije pri izbiri ustreznega kvazi-polinoma z uporabo mejnega teorema.



## 8 Literatura

- [1] J.-P. Richard, „Time-delay systems: An overview of some recent advances and,“ *Automatica*, zv. 39, p. 1667 – 1694, 2003.
- [2] K. Gu in S.-I. Niculescu, „Survey on Recent Results in the Stability and Control of Time-Delay Systems,“ *Journal of Dynamic Systems Measurement, and Control*, zv. 125, št. 2, pp. 158-165, 2003.
- [3] K. Watanabe, E. Nobuyama in A. Kojima, „Recent advances in control of time delay systems—A tutorial review,“ v *Proc. of the 35th IEEE Conference on Decision & Control*, Kobe, 1996.
- [4] K. Gu, V. L. Kharitonov in J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*, 2003.
- [5] S. I. Niculescu, *Delay effects on Stability: A Robust Control Approach*, M. M. M. Thoma, Ured., London: Springer, 2001.
- [6] Q.-C. Zhong, *Robust Control of Time-delay Systems*, London: Springer, 2006.
- [7] J. J. Loiseau, W. Michiels, S.-I. Niculescu in R. Sipahi, *Topics in Time Delay Systems: Analysis, Algorithms and Control*, F. A. M. M. Thoma, Ured., Berlin: Springer, 2009.
- [8] J. E. Normey-Rico in E. F. Camacho, „Dead-time compensators: A survey,“ *Control Engineering practice*, May 2007.
- [9] Z. Palmor, „Time-delay compensation—Smith predictor and its modifications,“ v *The Control Handbook*, CRC Press, 1996., p. 224–237.
- [10] Q.-G. Wang, T. H. Lee in K. K. Tan, *Finite Spectrum Assignment for Time-Delay Systems*, London: Springer, 1999.
- [11] A. Manitius in A. Olbrot, „Finite spectrum assignment problem for systems with delays,“ *IEEE Trans. Automat. Control*, zv. 24, št. 4, p. 541–553, 1979.
- [12] S. Mondié in W. Michiels, „Finite Spectrum Assignment of Unstable Time-Delay Systems with a Safe Implementation,“ *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, zv. 48, št. 12, DECEMBER 2003.

- [13] S. Mondie in W. Michiels, „A safe implementation for finite spectrum assignment: robustness analysis,“ v *Proceedings of the 42nd WEE Conference on Decision and Control*, Maui, 2003.
- [14] M. Krstic, *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*, Boston,: Birkhäuser, 2009.
- [15] M. Krstic in A. Smyshlyaev, *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*, SIAM, 2008..
- [16] M. Wu, Y. He in J. H. She, *Stability Analysis and Robust Control of Time-Delay Systems*, Beijing: Springer, 2009.
- [17] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron in V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia: SIAM, 1994.
- [18] A. R. Fioravanti, „H analysis and control of time-delay systems by methods in frequency domain,“ Paris, 2011.
- [19] W. Michiels, „Stability and Stabilization of Time-Delay Systems,“ K. U. Leuven, Heverlee, Belgium, 2002.
- [20] W. Michiels in S.-I. Niculescu, *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach*, Philadelphia: Siam, 2007.
- [21] W. K. Hale in S. M. V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, New York: Springer, 1993.
- [22] Z. Wu in W. Michiels, „Reliably computing all characteristic roots of delay differential equations in a given right half plane using a spectral method,“ Heverlee (Belgium), 2011.
- [23] K. Engelborghs, T. Luzyanina in D. Roose, „Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL,“ *ACM Trans. Math. Softw.*, zv. 28, št. 1, pp. 1-21, 2002.
- [24] T. Vyhlídal in P. Z tek, „Mapping based algorithm for large-scale computation of quasi-polynomial zeros,“ *IEEE Trans. Automatic Control*, zv. 54, št. 1, p. 171–177, 2009.
- [25] T. Vyhlídal in P. Z tek, „Mapping the spectrum of a retarded time delay system utilizing root distribution features,“ v *In Proc of IFAC Workshop on Time-Delay*

*Systems, TDS'06*, L'Aquila, 2006.

- [26] T. Vyhlídal in P. Zítek, „Quasipolynomial mapping based rootfinder for analysis of time delay systems,“ v *Time Delay Systems 2003 – A Proceedings volume from the 4th IFAC workshop*, Rocquencourt, France, 2003.
- [27] D. Breda, S. Maset in R. Vermiglio, „Pseudospectral differencing methods for characteristic roots of delay differential equations,“ *SIAM Journal on Scientific Computing*, zv. 27, št. 2, p. 482–495, 2005.
- [28] L. M. Delves in J. N. Lyness, „A numerical method for locating the zeros of analytic functions,“ *Math. Comput.*, zv. 21, p. 543–560, 1967.
- [29] K. Engelborghs in D. Roose, „Numerical computation of stability and detection of Hopf bifurcation of steady state solutions of delay differential equations,“ *Adv. Comput. Math.*, zv. 10, št. 3-4, p. 271–289, 1999.
- [30] K. Verheyden, T. Luzyanina in D. Roose, „Efficient computation of characteristic roots of delay differential equations using LMS methods,“ *J. Comput. Appl. Math.*, zv. 214, št. 1, p. 209–226, 2008.
- [31] D. Breda., „Solution operator approximation for delay differential equation characteristic roots computation via Runge-Kutta methods,“ *Applied Numerical Mathematics*, zv. 56, p. 305–317, 2006.
- [32] D. Breda, S. Maset in R. Vermiglio, „Computing the characteristic roots for delay differential equations,“ *IMA J. Numer. Anal.*, zv. 24, št. 1, p. 1–19, 2004.
- [33] P. Kravanja in M. V. Barel, *Computing the Zeros of Analytic Functions*, Berlin: Springer, 2000,.
- [34] A. Özban, „Some new variants of Newton's method,“ *Applied Mathematics Letters*, zv. 17, št. 6, pp. 677-682, June 2004.
- [35] F. Dubeau, „Newton's method and high-order algorithms for the nth root computation,“ *Journal of Computational and Applied Mathematics*, zv. 224, št. 1, pp. 66-76, February 2009.
- [36] B. Polyak, „Newton's method and its use in optimization,“ *European Journal of Operational Research*, zv. 181, št. 3, pp. 1086-1096, September 2007.
- [37] M. N. Vrahatis, „An efficient method for locating and computing periodic orbits of

- nonlinear mappings," *J. Comput. Phys.*, zv. 119, p. 105–119, 1995.
- [38] M. Dellnitz, O. Schütze in Q. Zheng, „Locating all the zeros of an analytic function in one complex variable," *J. Comput. Appl. Math.*, zv. 138, p. 325–333, 2002.
- [39] K. Engelborghs, T. Luzyanina in G. Samaey, „DDE-BIFTOOL v. 2.00: a Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations," Leuven, (Belgium), 2001.
- [40] D. Breda, S. Maset in R. Vermiglio, „TRACE-DDE:A tool for robust analysis and characteristic equations for delay differential equations," v *Topics in Time-Delay Systems: Analysis, Algorithms and Control*, Berlin, Springer, 2009.
- [41] A. Damen in S. Weiland, „Robust Control," Eindhoven, 2002.
- [42] J. Doyle, B. Francis in A. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Co, 1990.
- [43] K. Zhou in J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, 1997.
- [44] T. Wagenknecht in J. Agarwal, „Structured pseudospectra in structural engineering," *Internat. J. Numer. Methods Eng.*, zv. 64, št. 13, pp. 1735 - 1751, 2005.
- [45] T. Wagenknecht, W. Michiels in K. Green, „Structured pseudospectra for nonlinear eigenvalue problems," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, zv. 212, 2008.
- [46] F. Tisseur in N. Higham, „Structured pseudospectra for polynomial eigenvalue problems with applications," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, zv. 23, št. 1, p. 187–208, 2001.
- [47] K. Green in T. Wagenknecht, „Pseudospectra and delay differential equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, zv. 196, 2006.
- [48] L. Trefethen, „Computation of pseudospectra," *Acta Numerica*, zv. 8, pp. 247-295, 1999.
- [49] D. Hinrichsen in A. Pritchard, *Mathematical Systems Theory I*, Berlin: Springer, 2005.
- [50] L. Trefethen in M. Embree, *Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*, New York: Princeton University Press, 2005.
- [51] P. Lancaster in P. Psarrakos, „On the pseudospectra of matrix polynomials," *SIAM J.*

*Matrix Anal. Appl.*, zv. 27, p. 115–129, 2005.

- [52] Y. Genin in P. M. Dooren, „Stability radii of polynomial matrices,“ v *Proceedings of the International Symposium on Computer Aided Control System Design*, 1999.
- [53] W. Michiels, K. Green, T. Wagenknecht in S.-I. Niculescu, „Pseudospectra and stability radii for analytic matrix functions with application to time-delay systems,“ *Linear Algebra Appl.*, zv. 418, p. 315–335, 2006.
- [54] G. Hu in E. J. Davison, „Real stability radii of linear time-invariant time-delay systems,“ *Systems & Control Letters*, zv. 50, št. 3, pp. 209–, October 2003.
- [55] B. T. Anh, N. K. Son in D. D. X. Thanh, „Stability radii of positive linear time-delay systems under fractional perturbations,“ *Systems & Control Letters*, zv. 58, št. 2, pp. 155–159, February 2009.
- [56] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar in B. Francis, „State-space solutions to standard H<sub>2</sub> and H<sub>∞</sub> control problems,“ *IEEE Trans. Automat. Control*, zv. 34, št. 8, p. 831–847, 1989.
- [57] B. Francis, *A Course in H<sub>∞</sub> Control Theory*, New York: Springer, 1987.
- [58] M. Green, K. Glover in D. L. a. J. Doyle, „J-spectral factorization approach to H<sub>∞</sub> control,“ *SIAM J. Control Optim.*, zv. 28, št. 6, p. 1350–1371, 1990.
- [59] V. Suplin in U. Shaked, „Robust H<sub>∞</sub> output-feedback control of systems with time-delay,“ *Systems & Control Letters*, zv. 57, pp. 193–199, 2008.
- [60] H. Yan, H. Zhang in M. Q.-H. Meng, „Delay-range-dependent robust H<sub>∞</sub> control for uncertain systems with interval time-varying delays,“ *Neurocomputing*, zv. 73, pp. 1235–1243, 2010.
- [61] N. T. Thanh in V. N. Phat, „Decentralized H<sub>∞</sub> control for large-scale interconnected nonlinear time-delay systems via LMI approach,“ *Journal of Process Control*, zv. 22, pp. 1325–1339, 2012.
- [62] S. Xu in T. Chen, „Robust H<sub>∞</sub> control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers,“ *Systems & Control Letters*, zv. 51, p. 171 – 183, 2004.
- [63] C. Peng in Y.-C. Tian, „Delay-dependent robust H<sub>∞</sub> control for uncertain systems with time-varying delay,“ *Information Sciences*, zv. 179, p. 3187–3197, 2009.

- [64] Z. Pan, K. Ezal, A. J. Krener in P. V. Kokotović, „Backstepping Design with Local Optimality Matching,“ *IEEE Transactions On Automatic Control*, zv. 46, št. 7, july 2001.
- [65] M. Krstic, D. Fontaine, P. Kokotovic in J. Paduano, „Useful Nonlinearities and Global Stabilization of Bifurcations in a Model of Jet Engine Surge and Stall,“ *IEEE Transactions On Automatic Control*, zv. 43, št. 12, December 1998.
- [66] W. Michiels, K. Engelborghs, P. Vansevenant in D. Roose, „Continuous pole placement for delay equations,“ *Automatica*, zv. 38, p. 747–761, 2002.
- [67] W. Michiels in T. Vyhlídal, „An eigenvalue based approach for the stabilization of linear time-delay systems of neutral type,“ *Automatica*, zv. 41, p. 991 – 998, 2005.
- [68] W. Michiels, „Spectrum based stability analysis and stabilization of systems described by delay differential algebraic equations,“ Leuven, 2010.
- [69] T. Vyhlídal, W. Michiels, P. Zítek in P. McGahan, „Stability impact of small delays in proportional–derivative state feedback,“ *Control Engineering Practice*, zv. 17, p. 382–393, 2009.
- [70] W. Michiels, T. Vyhlídal in P. Zítek, „Control design for time-delay systems based on quasi-direct pole placement,“ *Journal of Process Control*, zv. 20, p. 337–343, 2010.
- [71] S. Gumussoy in W. Michiels, „Fixed-order strong H-infinity control of interconnected systems with time-delays,“ Leuven, 2010.
- [72] S. Gumussoy in W. Michiels, „On the sensitivity of the H-infinity norm of interconnected systems with time-delays,“ Leuven, 2010.
- [73] M. D. L. Sen, „On Pole-Placement Controllers For Linear Time-Delay Systems With Commensurate Point Delays,“ *Mathematical Problems in Engineering*, št. 1, pp. 123-140, 2005.
- [74] M. D. L. Sen, „Pole Placement Controllers For Linear Time-Delay Systems With Commensurate Point Delays,“ *Analysis in Theory and Applications*, zv. 20, št. 4, pp. 358-372, 2004.
- [75] J. Jugo in M. de la Sen, „Input-output based pole-placement controller for a class of time-delay systems,“ *IEE Proceedings Control Theory & Applications*, zv. 149, št. 4,

pp. 323 - 330 .

- [76] J. Jugo in M. d. l. Sen, „An input /output-based pole-placement controller for systems with point delays,“ *IEE Proceedings Control Theory & Applications*, zv. 149, št. 4, pp. 323 - 330 , July 2002.
- [77] J. Vanbiervliet, B. Vandereycken, W. Michiels, S. Vandewalle in M. Diehl, „Smoothed spectral abscissa for robust stability optimization,“ *SIAM Journal on Optimization*, zv. 20, št. 1, pp. 156-171, 2009.
- [78] S. Gumussoy in W. Michiels, „A predictor-corrector approach for computing the pseudospectral abscissa of time-delay systems,“ *Automatica*, zv. 46, št. 4, pp. 657-664, 2010.
- [79] W. Michiels in N. Guglielmi, „An iterative method for computing the pseudospectral abscissa for a class of nonlinear eigenvalue problems,“ *SIAM Journal of Scientific Computing*, zv. 34, št. 4, 2012.
- [80] S. Gumussoy in W. Michiels, „Computing the pseudospectral abscissa of time-delay systems,“ v *Proceedings of the 8th IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, 2009.
- [81] K. Price, R. Storn in J. Lampinen, *Differential Evolution - A Practical Approach to Global Optimization*, Springer, 2005.
- [82] L. N. Trefethen in M. Embree, *Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*, Princeton: Princeton University Press, 2005.
- [83] J. Ohtsubo, *Semiconductor Lasers, Stability, Instability and Chaos*, Berlin: Springer, 2008.
- [84] A. Sarjaš, „Robustna polinomska sinteza regulatorja z optimizacijo norme  $H_{\infty}$ ,“ Maribor, 2011.
- [85] K. Engelborghs in D. Roose, „On stability of LMS methods and characteristic roots of delay differential equations,“ *SIAM Journal on Numerical Analysis*, zv. 40, p. 629–650, 2002.
- [86] D. Breda, „Methods For Numerical Computation Of Characteristic Roots For Delay Differential Equations: Experimental Comparison,“ *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, zv. 8, pp. 317-328, March 2003.
- [87] Z. Wu in W. Michiels, „Reliably computing all characteristic roots of delay

- differential equations in a given right half plane using a spectral method," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, zv. 236, p. 2499–2514, 2012.
- [88] L. H. Keel in S. P. Bhattacharyya, „State space design of low-order stabilizers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, zv. 35, p. 82–86, 1990.
- [89] W. Wonham, „On pole assignment in multi-input controllable linear systems," *IEEE Transactions in Automatic Control*, zv. 12, pp. 660-665, 1967.
- [90] V. Kučera, *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach*, Chichester: John Wiley & Sons, 1979.
- [91] V. Kučera, „The pole placement equation – a survey," *Kybernetika*, zv. 30, št. 6, pp. 578-584, 1994.
- [92] R. Svečko, *Diskretni regulacijski sistemi*, Maribor: FERI, 2005.
- [93] W. Michiels in D. Roose, „Limitations of delayed state feedback: a numerical study," *Internat. J. Bifurcation and Chaos*, zv. 12, št. 6, p. 1309–1320, 2002.
- [94] P. Zítek in T. Vyhlídal, „Dominant eigenvalue placement for time delay systems," v *Proc. of Control 2002, 5th Portuguese Conference on Automatic Control*, Aveiro, Portugal, 2002.
- [95] P. Zítek, „Frequency domain synthesis of hereditary control systems via anisochronic state space," *International Journal of Control*, zv. 71, št. 4, pp. 539-556, 1997.
- [96] P. Zítek in T. Vyhlídal, „State feedback control of time delay system: conformal mapping aided design," v *IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems.*, Ancona, 2000.
- [97] P. Zítek in T. Vyhlídal, „Dominant eigenvalue placement for time delays systems," Prague, 2002.
- [98] O. Sename, „New Trends In Design Of Observers For Time-Delay Systems," *Kybernetika*, zv. 37, št. 4, pp. 427 - 458, 2001.
- [99] O. Sename, J.-F. Lafay in R. Rabah, „Controllability Indices Of Linear Systems With Delays," *Kybernetika*, zv. 31, št. 6, pp. 559-580, 1995.
- [100] P. H. J. Zítek, „Anisochronic inverse-based control of time delay systems," v *Control '98. UKACC International Conference*, London, 1998.



- [101] P. Zítek, „Anisochronic state observers for hereditary systems,“ *International Journal of Control*, zv. 71, št. 4, pp. 581-599, 1998.
- [102] P. Zítek, T. Vyhlídál in J. Fišer, „Anisochronic state feedback design compensating for system delays,“ v *IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Santa Fe.
- [103] P. Zítek, „Time delay control system design using functional state models,“ Prague, 1998.
- [104] N. Kosugi in K. Suyama, „A new method for solving Bezout equations over 2-D polynomial matrices from delay systems,“ *Systems&Control Letters*, zv. 61, pp. 723-729, 2012.
- [105] N. Kosugi in K. Suyama, „New coprimeness over multivariable polynomial matrices and its application to control delay systems,“ *Systems&Control Letters*, zv. 60, pp. 414-419, 2011.
- [106] E. Kamen, P. Khargonekar in A. Tannenbaum, „Proper stable Bezout factorizations and feedback control of linear time-delay systems,“ *International Journal of Control*, zv. 43, p. 837–857, 1986.
- [107] E. Zerz, *Topics in Multidimensional Linear Systems Theory*, London: Springer, 2000.
- [108] J. J. Loiseau, „Algebraic tools for the control and stabilization of time delay systems,“ *Annual Reviews in Control*, zv. 24, pp. 135-149, 2000.
- [109] S. Gumussoy, „Copriime-inner/outer factorization of SISO time-delay systems and FIR structure of their optimal H-infinity controllers,“ *International Journal Of Robust And Nonlinear Control*, zv. 22, p. 981–998, May 2012.
- [110] H. Trinh, „Linear functional state observer for time delay systems,“ *International Journal of Control*, zv. 18, p. 1642–1658, 1999.
- [111] P. Zítek, V. Kučera in T. Vyhlídál, „Meromorphic Observer–Based Pole Assignment In Time Delay Systems,“ *KYBERNETIKA*, zv. 44, št. 5, p. 633 – 648, 2008.
- [112] W. Michiels in D. Roose, „Time-delay compensation in unstable plants using delayed state feedback,“ v *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida USA, December 2001.
- [113] S. Manabe, „Brief Tutorial and Survey of Coefficient Diagram Method,“ v *The 4th*

- Asian Control Conference*, Singapore, September, 2002.
- [114] S. Manabe, „Coefficient diagram method Aerospace,“ v *IFAC Automatic Control in*, Seoul, 1998.
- [115] S. Manabe in Y. C. Kim, „Recent development of Coefficient Diagram Method,“ v *ASSC'2000 3rd Asian Control Conference*, Shanghai, 2000.
- [116] E. B. Lee in A. Olbrot, „Observability and related structural results for linear hereditary systems,“ *Internat. J. Control*, zv. 34, pp. 1061-1078, 1981.
- [117] T. Vyhídal, „Analysis and Synthesis of Time Delay Systems Spectrum,“ Prague, 2003.
- [118] E. Emre in P. P. Hkarognekar, „Regulation of Split Linear Systems Over Rings: Coefficient-Assignment and Observers,“ *IEEE Transactions On Automatic Control*, zv. 27, št. 1, pp. 104-113, February 1982.
- [119] E. Emre in P. P. Kharognekar, „On Regulation of Linear Systems Over Rings: Coefficient Assignment and Observers,“ v *19th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, 1980.
- [120] E. B. Lee in W.-S. Lu, „Coefficient Assignability for Linear Systems with Delays,“ *IEEE Transactions On Automatic Control*, zv. 29, št. 11, pp. 1048-1052, November 1984.
- [121] E. B. Lee in S. H. Žak, „On Spectrum Placement for Linear Time Invariant Delay Systems,“ v *20th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, 1981.
- [122] E. B. Lee in S. H. Žak, „On Spectrum Placement for Linear Time Invariant Delay Systems,“ *IEEE Transactions On Automatic Control*, zv. 27, št. 2, pp. 446-449, April 1982.
- [123] A. W. Olbrot, „Stabilizability, Detectability, and Spectrum Assignment for Linear Autonomous Systems with General Time Delays,“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, zv. 23, št. 5, pp. 887-890, October 1978.
- [124] E. D. Sontag, „Linear Systems Over Commutative Rings: A Survey,“ *Ricerche Di Automatica*, zv. 7, št. 1, July 1976.
- [125] G. M. Schoen, „Stability and Stabilization of Time-Delay Systems,“ Zurich, 1995.

- [126] A. Sarjaš, R. Svečko in A. Chowdhury, „Strong stabilization servo controller with optimization of performance criteria,“ *ISA Transactions*, zv. 50, p. 419–431, 2011.
- [127] A.Z.Manitius in A.W.Olbrot, „Finite spectrum assignment problem for systems with delays,“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, zv. 24, p. 541–553, 1979.

## Življenjepis:

Ime in priimek:	Nikolaj Semenič	
Rojen:	3. April 1985	Maribor
Šolanje:	1992-2000	Osnovna šola Kamnica
	2000-2004	Prva Gimnazija Maribor
	2004-2009	Dodiplomski študij na Fakulteti za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, smer avtomatika, Univerza v Mariboru
	2009-2013	Podiplomski študij na Fakulteti za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Univerza v Mariboru
Zaposlitev:	2009-	Zaposlen kot mladi raziskovalec v gospodarstvu v podjetju Margento R&D



Univerza v Mariboru

Fakulteta za elektrotehniko,  
računalništvo in informatiko

Smetanova ulica 17  
2000 Maribor, Slovenija

**FERI**

### IZJAVA KANDIDATOVEGA MENTORJA O USTREZNOSTI DOKTORSKE DISERTACIJE

Podpisani-a izr. prof. dr. Rajko Svečko, mentor-ica doktorskemu-i kandidatu-ki, izjavljam, da je doktorska disertacija z naslovom Robustna polinomska sinteza regulatorja za sisteme z zakasnitvami, ki jo je izdelal-a doktorski-a kandidat-ka \_\_\_\_\_, v skladu z odobreno temo, Pravilnikom o pripravi in zagovoru doktorske disertacije ter mojimi navodili in predstavlja izviren prispevek k razvoju znanstvene discipline.

Datum in kraj:  
28.10.2013, Maribor

Podpis mentorja-ice:



Univerza v Mariboru

Fakulteta za elektrotehniko,  
računalništvo in informatiko

Smetanova ulica 17  
2000 Maribor, Slovenija



## IZJAVA DOKTORSKEGA KANDIDATA

Podpisani-a \_\_\_\_\_ Nikolaj Semenič \_\_\_\_\_,

vpisna številka \_\_\_\_\_ E9500545 \_\_\_\_\_.

**izjavljam,**

da je doktorska disertacija z naslovom \_\_\_\_\_

Robustna polinomska sinteza regulatorja za sisteme z zakasnitvami

- rezultat lastnega raziskovalnega dela,
- da predložena disertacija v celoti ali v delih ni bila predložena za pridobitev kakršnekoli izobrazbe po študijskem programu druge fakultete ali univerze,
- da so rezultati korektno navedeni in
- da nisem kršil-a avtorskih pravic in intelektualne lastnine drugih.

Podpis doktorskega-e kandidata-ke:

\_\_\_\_\_

Obrazec RŠZ



Univerza v Mariboru

Fakulteta za elektrotehniko,  
računalništvo in informatiko

Smetanova ulica 17  
2000 Maribor, Slovenija



**IZJAVA O OBJAVI ELEKTRONSKE VERZIJE DOKTORSKE DISERTACIJE IN OSEBNIH PODATKOV,  
VEZANIH NA ZAKLJUČEK ŠTUDIJA**

Ime in priimek doktoranda-ke: Nikolaj Semenič

Vpisna številka: E9500545

Študijski program: Elektrotehnika

Naslov doktorskega dela:

Robustna polinomska sinteza regulatorja za sisteme z zakasnitvami

Mentor-ica: izr. prof. dr. Rajko Svečko

Somentor-ica: \_\_\_\_\_

Podpisani soglašam z objavo doktorske disertacije v Digitalni knjižnici Univerze v Mariboru.

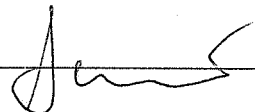
Tiskana verzija doktorske disertacije je istovetna elektronski verziji, ki sem jo oddal-a v Digitalno knjižnico Univerze v Mariboru.

Podpisani-a hkrati izjavljam, da dovoljujem objavo osebnih podatkov, vezanih na zaključek študija (ime, priimek, leto in kraj rojstva, datum diplomiranja, naslov diplomskega dela) na spletnih straneh in v publikacijah Univerze v Mariboru.

Datum in kraj:

28.10.2013, Maribor

Podpis doktoranda-ke:



Obrazec RŠZ



Univerza v Mariboru

Maribor, 26. 2. 2013  
Številka: DR 17/2013/423-DS

Na osnovi 287., 140., 142. in 144. člena Statuta Univerze v Mariboru (Statut UM-UPB10, Ur. l. RS, št. 46/2012) ter sklepa 18. redne seje Senata Univerze v Mariboru, ki je potekala 26. 2. 2013 v zvezi z vlogo doktorskega kandidata Nikolaja Semeniča za sprejem odločitve o predlagani temi doktorske disertacije in mentorja

izdajam naslednji

### SKLEP

Odobri se tema doktorske disertacije Nikolaja Semeniča s Fakultete za elektrotehniko, računalništvo in informatiko z naslovom »Robustna polinomska sinteza regulatorja za sisteme z zakasnitvami«. Za mentorja se imenuje izr. prof. dr. Rajko Svečko. Kandidat mora članici predložiti izdelano doktorsko disertacijo v zadostnih izvodih najpozneje do 25. 2. 2017.

#### Obrazložitev:

Kandidat Nikolaj Semenič je 16. 10. 2012 na Fakultete za elektrotehniko, računalništvo in informatiko vložil vlogo za potrditev teme doktorske disertacije z naslovom »Robustna polinomska sinteza regulatorja za sisteme z zakasnitvami«. Za mentorja je bil predlagan izr. prof. dr. Rajko Svečko.

Senat Fakultete za elektrotehniko, računalništvo in informatiko je na osnovi pozitivnega mnenja komisije za oceno teme doktorske disertacije, ki je ugotovila, da kandidat izpolnjuje pogoje za pridobitev doktorata znanosti, in ocenila, da je predlagana tema ustrezna, sprejel pozitivno mnenje in poslal predlog teme doktorske disertacije s predlogom mentorja v odobritev Senatu univerze.

Senat Univerze v Mariboru je po proučitvi vloge in na osnovi določil Statuta Univerze v Mariboru sprejel svojo odločitev o predlagani temi doktorske disertacije in imenoval mentorja, kot izhaja iz izreka.

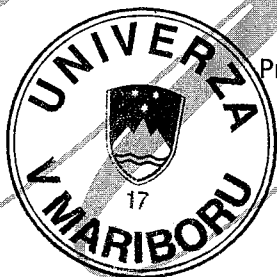
V skladu s 144. členom Statuta Univerze v Mariboru mora kandidat za pridobitev doktorata znanosti najpozneje v štirih letih od dneva izdaje tega sklepa, članici predložiti izdelano doktorsko disertacijo v zadostnih izvodih. Kandidatu je bil določen rok za oddajo izdelane doktorske disertacije glede na datum sprejetja teme na pristojnem organu. Študenti, ki so se vpisali v visoko šolstvo pred uvedbo novih študijskih programov, morajo ne glede na to skladno z določilom 48. člena Zakona o visokem šolstvu (Ur. l. RS št. 119/2006) študij dokončati do 30. 9. 2016.

#### Pouk o pravnem sredstvu:

Zoper ta sklep je možna pritožba na Senat Univerze v Mariboru v roku 8 dni od prejema tega sklepa.

#### Obvestiti:

1. Kandidata.
2. Fakulteto.
3. Arhiv.



Rektor:  
Prof. dr. Danijel Rebolj



HR EXCELLENCE IN RESEARCH