



UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA KEMIJO IN KEMIJSKO TEHNOLOGIJO

PRENOS TOPLOTE

doc. dr. Darko Goričanec
dr. Lucija Črepinšek – Lipuš

Maribor, december 2008

Prenos toplote

Zapiski predavanj

Avtor: doc. dr. Darko Goričanec univ. dipl. ing.
dr. Lucija Črepinšek – Lipuš univ. dipl. ing.

Strokovni recenzent: red. prof. dr. Jurij Krope
zas. prof. dr. Ljubomir Črepinšek

Maribor, december 2008

Kazalo

1	UVOD.....	1
1.1	PREVOD TOPLOTE	2
1.2	PRESTOP TOPLOTE	5
1.3	SEVANJE TOPLOTE	6
2	STACIONARNI PREVOD TOPLOTE.....	7
2.1	SPLOŠNA ENERGIJSKA ENAČBA ZA PREVOD TOPLOTE	7
2.2	ENODIMENZIONALNI STACIONARNI PREVOD TOPLOTE.....	10
2.3	PREHOD TOPLOTE	20
3	ZVEZE ZA TOPLOTNO PRESTOPNOST	24
3.1	NARAVNA KONVEKCIJA	27
3.1.1	POKONČNA PLOŠČA IN NAGNJENA PLOŠČA	27
3.2	PRISILNA KONVEKCIJA V TOKU TEKOČINE V CEVI.....	32
3.3	PRISILNA KONVEKCIJA V ZUNANJEM TOKU	37
3.4	KOMBINIRANA KONVEKCIJA.....	41
3.5	PRESTOP TOPLOTE PRI UPAREVANJU IN KONDENZACIJI.....	42
4	SEVANJE TOPLOTE.....	50
4.1	VZPOREDNI PLOŠČI	53
4.2	KONCENTRIČNO OBKROŽENO TELO.....	55
4.3	FAKTOR ORIENTIRANOSTI.....	56
4.3	VKLJUČITEV TOPLOTNEGA SEVANJA V KOEFICIENT TOPLOTNEGA PRESTOPA	57
5	NESTACIONARNI PRENOS TOPLOTE	58
5.1	ENODIMENZIONALNI NESTACIONARNI PRENOS TOPLOTE Z ZANEMARLJIVIM NOTRANJIM UPOROM ($Bi < 0,1$)	60
5.2	ENODIMENZIONALNI NESTACIONARNI PRENOS TOPLOTE Z ZANEMARLJIVIM UPOROM POVRŠJA ($Bi > 40$)	61
5.3	ENODIMENZIONALNI NESTACIONARNI PRENOS TOPLOTE S PRIMERLJIVIMA UPOROMA NOTRANJOSTI IN POVRŠJA (Bi MED 0,1 IN 40)	63
5.4	NESTACIONARNI PRENOS V POLNESKONČNEM TELESU ($At/L^2 < 0,05$) Z ZANEMARLJIVIM UPOROM POVRŠJA ($Bi > 40$).....	67
5.5	NESTACIONARNI PRENOS V POLNESKONČNEM TELESU ($At/L^2 < 0,05$) S PRIMERLJIVIMA UPOROMA NOTRANJOSTI IN POVRŠJA (Bi MED 0,1 IN 40).....	69
5.6	NESTACIONARNI PRENOS TOPLOTE V TELESIH KONČNE VELIKOSTI	70
6	PRENOSNIKI TOPLOTE	71
6.1	DVOJNO-CEVNI PRENOSNIK TOPLOTE.....	73
6.2	CEVNI PRENOSNIK TOPLOTE	78
6.3	KRIŽNO-TOČNI KOMPAKTNI PRENOSNIKI	79

Seznam slik

Sl. 1.1:	Prevod toplote [1]	2
Sl. 1.2:	Vrednosti toplotne prevodnosti raznih snovi [1]	4
Sl. 1.3:	Shema tokovnic pri (a) naravni konvekciji in (b) prisilni konvekciji	5
Sl. 2.1:	Enota telesa v kartezičnem koordinatnem sistemu	7
Sl. 2.2:	Enota telesa v cilindričnem in sferičnem koordinatnem sistemu	9
Sl. 2.3:	Enodimenzionalni prevod toplote skozi (a) ravno ploščo z(b) $\lambda = \text{konst.}$ in (c) linearno zvezo $\lambda(T)$	10
Sl. 2.4:	Radialni stacionarni prevod toplote skozi (a) valjčno steno in (b) krogelno steno	11
Sl. 2.5:	Dvo-slojna (a) ravna, (b) valjčna in (c) krogelna stena	13
Sl. 2.6:	Plošča, valj in krogla z notranjim izvorom toplote	14
Sl. 2.7:	Rebra: (a) palično, (b) ploščno, (c) prstanasto in (d-f) z upadajočim presekom	16
Sl. 2.8:	Prevod toplote skozi ploščno rebro	16
Sl. 2.9:	Prehod toplote skozi ravno ploščo	20
Sl. 2.10:	Prehod toplote skozi dotikajoči se plošči	21
Sl. 2.11:	Prehod toplote skozi steno cevi	22
Sl. 2.12:	Prehod toplote skozi izolirano cev	23
Sl. 3.1:	Porazdelitev hitrosti v cevi pri (a) laminarnem in (b) turbulentnem pretakanju	25
Sl. 3.2:	Aproksimacija merilnih rezultatov s polinomom	26
Sl. 3.3:	Naravna konvekcija ob pokončni (a) vroči in (b) hladni plošči ter nagnjeni (c) vroči in (d) hladni plošči	27
Sl. 3.4:	Naravna konvekcija na vodoravni plošči: (a) vroča zgornja površina, (b) hladna spodnja površina, (c) hladna zgornja površina, (d) vroča spodnja površina	28
Sl. 3.5:	Shema naravne konvekcije ob vodoravnem valju in krogli	29
Sl. 3.6:	Naravna konvekcija med vzporednima ploščama: vodoravni ali rahlo nagnjeni plošči (vroča je spodnja plošča) in pokončni vroči plošči	30
Sl. 3.7:	Razvoj hitrostnega profila laminarnega toka v cevi	32
Sl. 3.8:	Razvoj temperaturnega profila	32
Sl. 3.9:	Shema toka tekočine pravokotno na okroglo cev	37
Sl. 3.10:	Porazdelitev toplotne prestopnosti ob površini cevi [4]	37
Sl. 3.11:	Tok tekočine pravokotno na snop cevi: (a) pravokotni razpored, (b) šahovski razpored	39
Sl. 3.12:	Bazensko uparjevanje vode na vodoravni platinasti žici pri atmosferskih pogojih [3]	42
Sl. 3.13:	Plast kondenzata: (a) ob navpični steni, (b) na vodoravni cevi in (c) na nizu cevi [1]	47
Sl. 3.14:	Plast kondenzata v vodoravni cevi: (a) pri majhni in (b) pri veliki hitrosti pare [1]	48
Sl. 4.1:	Elektromagnetno sevanje	50
Sl. 4.2:	Odboj, prevod in absorpcija vpadnega žarka	50
Sl. 4.3:	Porazdelitev gostote toplotnega toka v odvisnosti od valovne dolžine pri dani temperaturi	51
Sl. 4.4:	Majhna telesa obkrožena z okolico	52
Sl. 4.5:	(a) vzporedni plošči in (b) vmesne plošče	53
Sl. 4.6:	Potek absorpcij in odbojev toka, emitiranega iz plošče 1	53
Sl. 4.7:	(a) koncentrično obkroženo telo in (b) vmesni ščit	55
Sl. 4.8:	Sevanje toplote med (a) poljubno orientiranimi površinama (b) vzporednima koaksialnima diskoma	56
Sl. 4.9:	Faktor orientiranosti med pravokotnima črnima ploščama s skupnim robom [3]	56
Sl. 4.10:	Radiacija in konvekcija med vzporednima ploščama	57
Sl. 5.1:	Časovno spreminjanje porazdelitve temperature v ohlajani kroglici (a) z zanemarljivim notranjim uporom ($Bi < 0,1$) s primerljivima uporoma (Bi med 0,1 in 40) in z zanemarljivim uporom površja ($Bi > 40$)	59
Sl. 5.2:	Časovno spreminjanje porazdelitve temperature v ohlajani plošči	

	z zanemarljivim uporom površja ($Bi > 40$).....	61
Sl. 5.3:	Zadržana in izgubljena toplota telesa z zanemarljivim uporom površja [5]	62
Sl. 5.4:	Porazdelitev temperature v ohlajani neskončni plošči(diagram (b) je v zgornjem levem kotu diagrama (a)) [5]	63
Sl. 5.5:	Porazdelitev temperature v ohlajanem neskončnem valju_(diagram (b) je v zgornjem levem kotu diagrama (a)) [5]	64
Sl. 5.6:	Porazdelitev temperature v ohlajani krogli [5]	65
Sl. 5.6c:	Porazdelitev temperature v ohlajani krogli_(diagram je v zgornjem levem kotu diagrama (a) in (b)) [5]	66
Sl. 5.7:	Zadržana toplota pri ohlajanju telesa_(neskončna plošča, neskončen valj in krogla) [5].....	66
Sl. 5.8:	Porazdelitev temperature pri ohlajanju polneskončnega telesa_z zanemarljivim uporom površja	67
Sl. 5.9:	Porazdelitev temperature pri ohlajanju polneskončnega telesa s primerljivima uporoma notranjosti in površja	69
Sl. 5.10:	Porazdelitev temperature v polneskončnem telesu pri $Bi > 0,1$. [5].....	69
Sl. 6.1:	Nekaj tipov kontaktnih prenosnikov	71
Sl. 6.2:	Osnovne izvedbe rekuperatorjev	72
Sl. 6.3:	Porazdelitev temperature vzdolž dvojno-cevnega prenosnika toplote:_proti-točni režim in (b) so-točni režim.....	73
Sl. 6.4:	Porazdelitev temperature pri proti-točnem režimu_hladna tekočina ima manjši kapacitivni koeficient ($C_c = C_{min}$)_vroča tekočina ima manjši kapacitivni koeficient ($C_h = C_{min}$).....	75
Sl. 6.5:	Učinkovitost dvojno-cevnega prenosnika: (a) proti-tok in (b) so-tok [7].....	76
Sl. 6.6:	Porazdelitev temperature v dvojno-cevnem prenosniku s fazno pretvorbo: kondenzacija vodne pare v proti-toku s hladilno vodo in (b) uparjevanje vode v proti-toku z grelno paro	77
Sl. 6.7:	Različne izvedbe cevnih prenosnikov.....	78
Sl. 6.8:	Korekcijski faktor [3]:(a) prenosnik z enojnim prehodom skozi ohišje_in dvema, štirimi ali večkrat-dvojnimi prehodi cevi, (b) prenosnik z dvojnimi prehodi skozi ohišje_in štirimi, osmimi ali večkrat-četvernimi prehodi cevi	78
Sl. 6.9:	Učinkovitost [7]:_(a) prenosnik z enojnim prehodom skozi ohišje, in dvema, štirimi ali večkrat-dvojnimi prehodi cevi,(b) prenosnik z dvojnimi prehodi skozi ohišje_in štirimi, osmimi ali večkrat-četvernimi prehodi cevi.....	79
Sl. 6.10:	Korekcijski faktor križno-točnega prenosnika [3]:_(a) obe tekočini sta nemešani_(b) ena tekočina je nemešana.....	80
Sl. 6.11:	Učinkovitost križno-točnega prenosnika [7]:_(a) obe tekočini sta nemešani_ena tekočina je nemešana (--- nemešana je tekočina s C_{min} _nemešana je tekočina s C_{max})	80

Seznam tabel

Tab.1.1:	Vrednosti toplotne prevodnosti nekaterih snovi pri 20 °C in atmosferskem tlaku [2].	3
Tab. 1.2:	Nekaj okvirnih vrednosti toplotne prestopnosti [1,3].	5
Tab. 1.3:	Okvirne vrednosti emisivnosti nekaterih površin [2]	6
Tab. 2.1:	Okvirne vrednosti toplotne difuzivnosti nekaterih trdnih snovi pri 20 °C [2].	8
Tab 2.2:	Vrednosti Bessel-ovih funkcij I_0, K_0 in I_1, K_1	19
Tab. 2.3:	Okvirne vrednosti α_s na stiku med ploščama raznih materialov pri zmernih tlakih	21
Tab. 3.1:	Vrednosti Pr za nekatere tekočine [2].	25
Tab. 3.2:	Vrednosti C in n v enačbi (3.14) [1]	29
Tab. 3.3:	Kritični kot nagiba vzporednih plošč [1]	31
Tab. 3.4:	Temperaturna, L_T , in hitrostna vstopna dolžina, L_v , za nekatere tekočine v cevi premera 1 dm.	33
Tab. 3.5:	Nu pri laminarnem toku s popolnoma razvitim hitrostnim in temperaturnim profilom ($L > L_v$ in $L > L_T$) v ceveh pravokotnih presekov axb [1]	34
Tab. 3.6:	Nu pri laminarnem toku s popolnoma razvitim hitrostnim in temperaturnim profilom ($L > L_v$ in $L > L_T$) v ceveh z obročastim presekom (D_n = zunanji premer notranje cevi, D_z notranji premer zunanje cevi; $Nu_n = Nu$ ob zunanji površini notranje cevi, $Nu_z = Nu$ ob notranji površini zunanje cevi)Ena površina je izolirana, druga pa ima konstantno temperaturo. [1]	34
Tab. 3.7:	Vrednosti C in m v enačbi (3.36) za tok tekočine pravokotno na okroglo cev [1].	38
Tab. 3.8:	Vrednosti C in m v enačbi (3.37) za tok tekočine pravokotno na okroglo cev [1].	38
Tab.3.9:	Vrednosti C in m v enačbi (3.36a) za snop cevi z več kot 10-timi cevmi v zaporedju [1].	39
Tab. 3.10:	Korekcijski faktor K v enačbi (3.36a) za snop cevi z N cevmi v zaporedju [1].	40
Tab. 3.11	Vrednosti parametrov C in m v enačbi (3.37a) za snop z več kot 20-timi cevmi [1]	40
Tab. 3.12:	Korekcijski faktor K v enačbi (3.37a) za snop cevi z N cevmi v zaporedju [1].	41
Tab. 3.13	Vrednosti C in n v enačbi (3.46) [1]	44
Tab. 3.14:	Vrednost C in karakteristična višina v enačbi (3.48) za plastno uparevanje v bazenu	45
Tab. 3.15:	Vrednosti C in karakteristična višina v enačbi (3.56) za plastno kondenzacijo	48
Tab. 4.1:	Potek absorpcij in odbojev toka, emitiranega iz plošče l	53
Tab. 5.1:	Vrednosti Gaussove »erf« funkcije	68
Tab. 6.1:	Okvirne vrednosti toplotne prehodnosti k v cevnih toplotnih prenosnikih [1,3,7].	74
Tab. 6.2:	Okvirne vrednosti upornosti oblog [1,3].	75

1 UVOD

Prenos toplote ima pomembno vlogo v mnogih tehnoloških procesih. Skoraj vsak inženir se sooča s problemi prenosa toplote, še posebej tisti, ki se ukvarja z načrtovanjem in vodenjem kemijskih tehnoloških procesov. Včasih želimo pospešiti prenos toplote iz enega medija v drugega, npr. pri proizvodnji pare, ogrevanju ali hlajenju tekočin, odvajanju ali dovajanju reakcijske toplote in podobno; v drugih primerih želimo prenos toplote omejiti, npr. z izoliranjem grelnih posod, hladilnic in podobno.

Teorija prenosa toplote obravnava tiste procese, kjer se energija prenaša zaradi razlik v temperaturi v snovi ali med telesi. Medtem ko termodinamika omogoča določitev količine toplote, ki je potrebna za prehod sistema iz enega ravnotežnega stanja v drugega, teorija prenosa toplote pojasnjuje načine in napoveduje hitrost prenosa toplote. Analitični izrazi so izpeljani na osnovi prvega in drugega zakona termodinamike ter na empirično dobljenih zvezah, ki so oblikovane z namenom, da bi opisale čim širši krog praktičnih problemov. Za enostavnejše primere so analize izvedene s standardnimi matematičnimi postopki, v večini primerov pa so potrebne numerične in grafične analize z uporabo računalnika.

Toplota se prenaša iz področja višje temperature v področje z nižjo temperaturo.

Kadar se temperaturne razlike v obravnavanem sistemu s časom ne spreminjajo, govorimo o ustaljenih razmerah in *stacionarnem* prenosu toplote.

Kadar se temperatura spreminja le v eni koordinatni smeri, imenujemo prenos toplote *enodimenzionalen*; v dveh smereh, *dvodimenzionalen*; v treh smereh pa *tridimenzionalen*.

Hitrost prenosa podajamo s *toplotnim tokom* ϕ (W), ki pove, koliko toplote dQ se prenese v časovni enoti dt , in je tako:

$$\phi = \frac{dQ}{dt} \quad (1.1)$$

Gostota toplotnega toka q (W/m^2) je definirana na enoto površine, dA , pravokotne na smer toka $d\phi$:

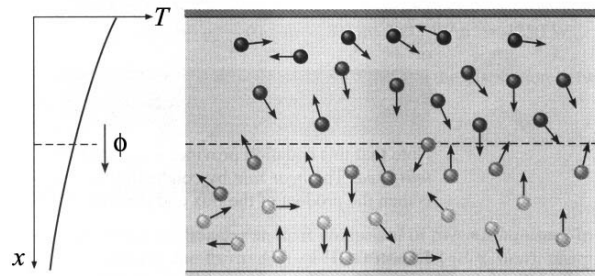
$$q = \frac{d\phi}{dA} \quad (1.2)$$

V splošnem se toplota prenaša s tremi različnimi mehanizmi, ki se pogosto pojavljajo v kombinaciji. Ločimo:

- **prevod toplote (kondukcija)** - prenos toplote v snovi ali skozi stično površino dveh teles brez mešanja in tokov snovi;
- **prestop toplote (konvekcija)** - prenos toplote iz ali v tekočino ob mešanju makroskopskih delcev; pomemben predvsem na stičnih površinah trdnih snovi in tekočin, in
- **sevanje toplote (radiacija)** - oddajanje elektromagnetnega valovanja v območju infrardeče, vidne in ultravijolične svetlobe; pomembno predvsem pri visokih temperaturah.

1.1 Prevod toplote

Mehanizem prevoda toplote ponazarja slika 1.1. Sestavni delci snovi (atomi, molekule, ioni, elektroni) vibrirajo, rotirajo in se gibljejo premočrtno. Pripadajoča kinetična energija raste z rastočo temperaturo. Ko ti delci trkajo med seboj, se kinetična energija prenaša iz območja višje temperature v območje z nižjo temperaturo. Takšen način prenosa toplote se imenuje prevod toplote in je najbolj izražen v trdnih snoveh, čeprav se javlja tudi v tekočinah (t.j. kapljevinah in plinih).



Sl. 1.1: Prevod toplote [1]

Fourier je že leta 1822 za enodimenzionalen prevod toplote postavil zvezo, kasneje poimenovano *Fourier-ov zakon*:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (1.5)$$

Negativni predznak v enačbi (1.5) nam pove, da se toplota prenaša v smeri padanja temperature.

Parameter λ (W/m·K) je toplotna prevodnost snovi, ki je v splošnem odvisna od vrste snovi, temperature in tlaka. Pri zmernih tlakih je za trdne snovi, kapljevine in celo pline odvisna le od temperature. Tabele 1.1 podajajo vrednosti toplotne prevodnosti za nekatere snovi pri sobni temperaturi in atmosferskem tlaku. Slika 1.2 podaja toplotno prevodnost nekaterih snovi v odvisnosti od temperature. Pri nekaterih snoveh jo lahko v ožjem temperaturnem območju jemljemo kot konstanto, v splošnem pa zadošča linearna aproksimacija glede na temperaturo.

V plinih se toplota prevaja s trki molekul zaradi premočrtnega gibanja. Ker so molekule precej narazen, je toplotna prevodnost nizka in je za večino plinov velikosti nekaj 0,01 do 0,1 W/m·K. Izjemi sta vodik in helij, ki imata majhno molekulsko maso in se zato molekule pri dani temperaturi hitreje gibljejo kot pri drugih plinih.

Na podoben način se toplota prenaša tudi v kapljevinah, le da so razdalje med molekulami manjše in na prenos energije vplivajo medmolekularne sile. Toplotna prevodnost kapljevina je velikosti od 0,1 do 0,3 W/m·K z izjemo vode, amoniaka in živega srebra. Največjo toplotno prevodnost imajo trdne snovi. V teh se toplota prenaša z vibracijo strukturne mreže, v kovinah pa predvsem z gibanjem prostih elektronov. Ker so v kovini nosilci električnega toka elektroni, so dobri električni prevodniki hkrati tudi dobri prevodniki toplote. Kovine imajo toplotno prevodnost velikosti nekaj 10 do nekaj 100 W/m·K. Primesi in nečistoče znižujejo prevodnost. Prevodnost čistih kovin z rastočo temperaturo praviloma pada, zlitin pa raste.

Prevod toplote bo podrobneje obravnavan v poglavju 2.

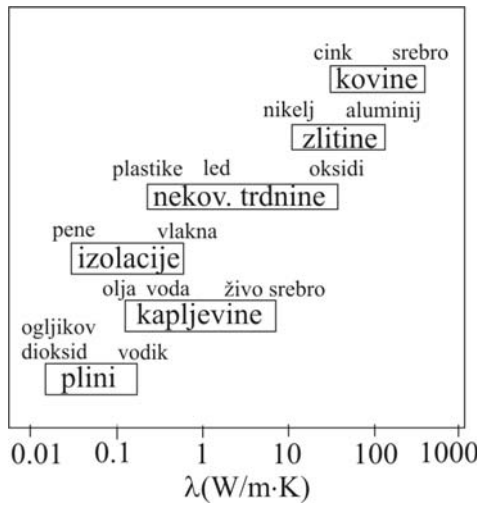
Tab.1.1: Vrednosti toplotne prevodnosti nekaterih snovi pri 20 °C in atmosferskem tlaku [2].

plini	molekulska masa	λ (W/m·K)
H ₂	2	0,180
He	4	0,150
NH ₃	17	0,025
CO	28	0,025
N ₂	28	0,026
zrak	29	0,026
O ₂	32	0,026
CO ₂	44	0,016

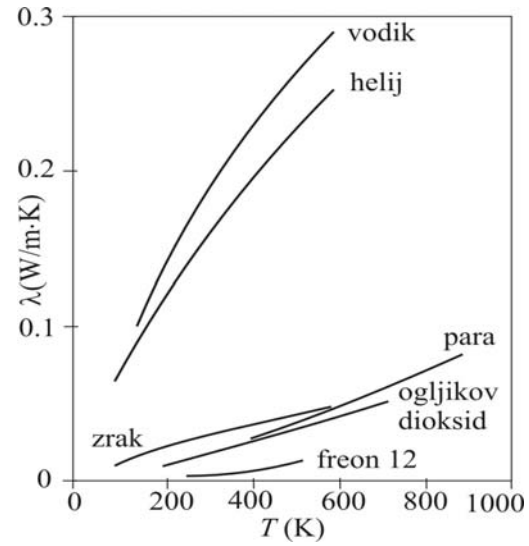
kapljevine	λ (W/m·K)
parafinsko olje	0,124
motorno olje - rabljeno	0,145
etanol	0,182
glicerin	0,285
voda	0,598
živo srebro	9,304

kovine	λ (W/m·K)
baker - čist	400
aluminij - čist	230
železo - čisto	80
železo – kovno	59
nerjavno jeklo(15%Cr, 0,1%C)	26
medenina (61,5%Cu, 38,6%Zn)	79

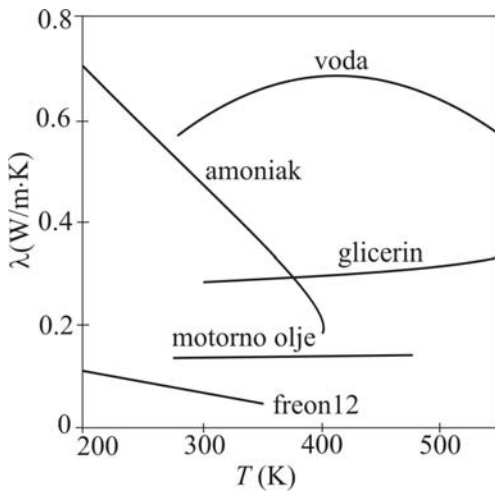
gradbeni material	λ (W/m·K)
kamen - granit, marmor	2,8
- sadra	2,15
beton - suh, penast	0,2
- gost, armiran	1,5
opeka - običajna	0,7
- votla, porozna	0,2
- polna, zelo gosta	1,2
notranji omet	0,7 ÷ 0,9
zunanji omet	0,9 ÷ 1,2
gibs	0,48
okensko steklo	0,78
pireks steklo	1,09
trd les	
- hrast - vzdolž vlaken	0,17
- radialno skozi letnice	0,19
mehek les	
- jelka - vzdolž vlaken	0,11
- radialno skozi letnice	0,14
strešna lepenka	0,15 ÷ 0,35
azbest	0,16
plutovina	0,033 ÷ 0,039
steklena volna	0,035 ÷ 0,055
kamena volna	0,040
stiropor	0,036



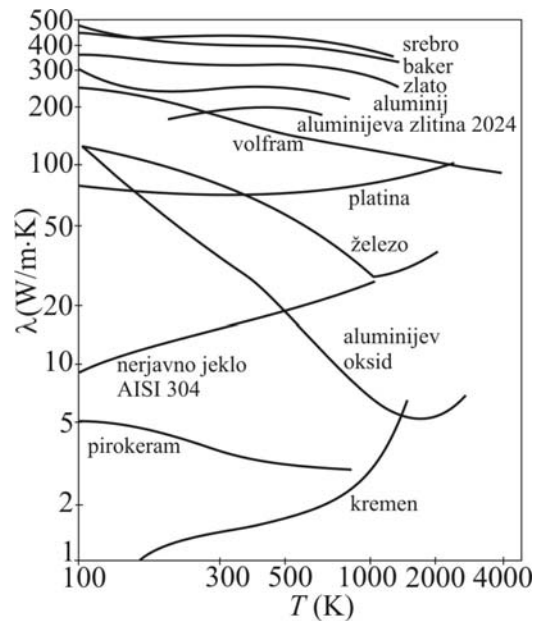
(a) območja toplotne prevodnosti raznih vrst snovi pri normalni temperaturi in tlaku



(b) temperaturna odvisnost toplotne prevodnosti za nekatere pline pri normalnem tlaku



(c) temperaturna odvisnost toplotne prevodnosti za nekatere kapljevine pri pogojih nasičenja



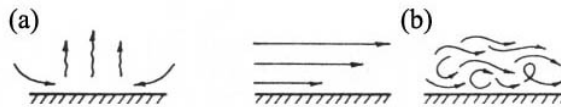
(d) temperaturna odvisnost toplotne prevodnosti za nekatere trdne snovi

Sl. 1.2: Vrednosti toplotne prevodnosti raznih snovi [1]

1.2 Prestop toplote

Mehanizem prestopa toplote ponazarja slika 1.3. Ko je prvotno mirujoča tekočina v stiku s toplejšo površino, se njeni deli segrevajo, posledično pade njihova gostota, zato se zaradi vzgona pričnejo dvigati, na njihovo mesto pa doteka sveža tekočina (sl. 2.1a). Ta pojav imenujemo *naravna konvekcija*. Takšno gibanje makroskopskih delcev povzroči bistveno hitrejši prenos toplote, kot je sam prevod skozi tekočino.

Ko je gibanje tekočine povzročeno npr. z mešalom, črpalko ali ventilatorjem, govorimo o *prisilni konvekciji* (sl. 1.2b). Mešanje tekočinskih delcev se vrši predvsem zaradi vztrajnostnih sil, ki lahko prevladujejo nad vzgonskimi, zato je prestop toplote še intenzivnejši kot pri naravni konvekciji.



Sl. 1.3: Shema tokovnic pri (a) naravni konvekciji in (b) prisilni konvekciji

Prandtl je za konvekcijo ob steni postavil zvezo:

$$\phi = \lambda A \frac{T_s - T_f}{\delta} \quad (1.4)$$

kjer so: A = ploščina površine stene

T_s = temperatura površine stene (angl. surface)

T_f = temperatura tekočine (angl. fluid)

λ = toplotna prevodnost tekočine

δ = debelina mejnega sloja

Debelina mejnega sloja, δ , ne more biti izmerjena ločeno od toplotne prevodnosti, λ , zato je vpeljana *toplotna prestopnost* $\alpha = \lambda / \delta$ ($\text{W/m}^2\text{K}$). Osnovna enačba konvekcije je tako:

$$q = \alpha (T_s - T_f) \quad (1.5)$$

Vrednost α je odvisna od vrste tekočine, od geometrije stene in režima gibanja tekočine, saj vsi ti dejavniki vplivajo na debelino mejnega sloja in na temperaturno porazdelitev v njem. Hrapava površina, na primer, ima višjo toplotno prestopnost kot gladka zaradi večje površine, razpoložljive za prenos toplote, in intenzivnejšega vrtinčenja. Nekaj okvirnih vrednosti α podaja tabela 1.2, natančnejši izračuni pa bodo obravnavani v poglavju 3.

Tab. 1.2: Nekaj okvirnih vrednosti toplotne prestopnosti [1,3].

vrsta konvekcije	α ($\text{W/m}^2\text{K}$)
naravna konvekcija plinov	2 ÷ 25
naravna konvekcija kapljevin	50 ÷ 1000
prisilna konvekcija plinov	25 ÷ 250
prisilna konvekcija vode	250 ÷ 15 000
vrela voda	2500 ÷ 25 000
kondenzirajoča para	5 000 ÷ 100 000

1.3 Sevanje toplote

Sevanje je posledica nihanja elektrenine pri termičnih trkih osnovnih gradnikov snovi, npr. atomov. Pri trku pride do trenutne deformacije elektronskih oblakov, zaradi katere potem še kratek čas elektrenina niha in pri tem oddaja elektromagnetne valove. Znotraj snovi se valovi absorbirajo, do izraza pa pridejo valovi, ki jih sevajo gradniki tik pod površjem snovi.

Prenos toplote s sevanjem se razlikuje od konduktivnega in konvektivnega prenosa toplote - prvič po tem, da se lahko vrši tudi skozi prazen prostor, in drugič, da je prenesena toplota sorazmerna temperaturi na četrto potenco. Čeprav pri sobni temperaturi seva vsaka snov, je večinoma potrebno sevalni prenos toplote upoštevati šele pri visokih temperaturah.

Osnovna zveza za tok sevane toplote z optično sive površine je Stefan-Boltzmann-ov zakon:

$$q = \sigma \varepsilon T^4 \quad (1.6)$$

Parametri so:

A = ploščina površine telesa,

T = temperatura površine telesa,

ε = emisivnost površine telesa in

σ = Stefan-Boltzmannova konstanta = $5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$

V praksi lahko za oceno sevanega toka večino površin smatramo kot optično sive. Tabela 1.3 podaja okvirne vrednosti emisivnosti nekaterih površin. Običajno imajo temnejše, hrapave površine večjo ε od gladkih, svetlih površin. Gradbeni materiali imajo ε okoli 0,9. Sevanje toplote bo podrobneje obravnavano v poglavju 4.

Tab. 1.3: Okvirne vrednosti emisivnosti nekaterih površin [2]

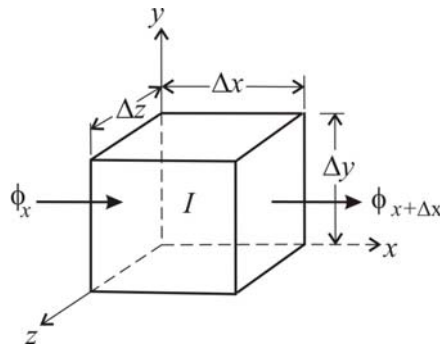
		T (°C)	ε			T (°C)	ε
aluminij	poliran	23	0,040	les		20	0,9
		225	0,039	led		0	0,98
		575	0,057	strešna lepenka		20	0,93
	strešni	43	0,216	opeka	rdeča, groba	20	0,93
baker	poliran	20	0,030	papir	beli	20	0,80
		115	0,023			95	0,92
	oksidiran	20	0,780	lak	črn, sijoči	25	0,88
železo	zbrušeno	20	0,24		črn, mat	40	0,96
	zarjavelo	20	0,61÷0,85		beli	40	0,80
jeklo	valjano	20	0,057		za radiatorje	100	0,925
	oksidirano	25	0,80÷0,94	minij		20	0,93
	cev	0	0,745	beli omet		20	0,93
200		0,800			200	0,93	
steklo		20	0,90	sivi omet		20	0,93
		90	0,94			200	0,93

2 STACIONARNI PREVOD TOPLOTE

2.1 Splošna energijska enačba za prevod toplote

Osnovni namen analize prevoda toplote je ob znani porazdelitvi temperature na površini telesa določiti porazdelitev temperature po notranjosti telesa in njeno časovno spreminjanje. Ko je porazdelitev temperature določena, lahko s pomočjo Fourier-ovega zakona (1.5) določimo toplotni tok v katerikoli točki telesa. Porazdelitev temperature se lahko določi iz energijske enačbe.

Za izpeljavo energijske enačbe opazujemo toplotni tok skozi majhno enoto telesa – majhno kocko s prostornino $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, ki je prikazana na sliki 2.1. Po vsej enoti telesa je enakomerno porazdeljen toplotni vir z gostoto toplotnega toka I , ki je izražen na enoto prostornine.



Sl. 2.1: Enota telesa v kartezičnem koordinatnem sistemu

Toplotni tok zaradi toplotnega vira v tej enoti telesa je:

$$\phi_e = I \cdot \Delta V$$

Sprememba notranje energije zaradi segrevanja oziroma ohlajanja te enote

(s specifično toplotno kapaciteto c_p in gostoto ρ) je:

$$\phi_n = \rho c_p \Delta V \frac{\partial T}{\partial t}$$

Toplotni vtok in iztok v koordinatni smeri x (skozi presek $\Delta A = \Delta y \cdot \Delta z$) sta:

$$\phi_x = -\lambda \Delta A \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\phi_{x+\Delta x} = -\lambda_{x+\Delta x} \Delta A \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

Iz definicije odvoda $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi_{x+\Delta x} - \phi_x}{\Delta x}$ sledi

$$\phi_{x+\Delta x} = \phi_x + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x$$

Iz zakona o ohranitvi energije za enodimenzionalni prevod toplote $\phi_x + \phi_e = \phi_n + \phi_{x+\Delta x}$

dobimo z upoštevanjem zgornjih izrazov energijsko enačbo:
$$I + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Podobno za tridimenzionalni prevod iz zakona o ohranitvi energije

$$\phi_x + \phi_y + \phi_z + \phi_e = \phi_n + \phi_{x+\Delta x} + \phi_{y+\Delta y} + \phi_{z+\Delta z}$$

dobimo splošno zvezo za prevod toplote:

$$I + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

Če je λ v opazovanem temperaturnem območju konstanten, se enačba (2.1) poenostavi:

$$\frac{I}{\lambda} + \nabla^2 T = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2)$$

, kjer smo izraz $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ zapisali krajše kot Laplaceov operator $\nabla^2 T$.

V enačbi (2.2) je vpeljana **toplotna difuzivnost** $a = \lambda / \rho c_p$ (m²/s). Pri visoki toplotni prevodnosti je prenos toplote skozi snov hiter. Pri nizki toplotni kapaciteti ρc_p telo pri ogrevanju absorbira le majhen delež energije, zato je večina preostane za nadaljnji prenos. Tako se snovi z večjo toplotno difuzivnostjo hitreje odzivajo – ogrevajo oziroma ohlajajo ob spremembi temperature okolice. Tabela 2.1 podaja okvirne vrednosti toplotne difuzivnosti za nekatere snovi pri sobni temperaturi.

Tab. 2.1: Okvirne vrednosti toplotne difuzivnosti nekaterih trdnih snovi pri 20 °C [2].

snov	ρ (kg/m ³)	λ (W/m·K)	c_p (kJ/kgK)	a (10 ⁻⁶ m ² /s)
baker	8930	385	0,383	112,6
aluminij	2700	209	0,896	86,4
železo	7860	59	0,452	16,6
opeka	800 ÷ 2000	0,279 ÷ 1,233	0,837	0,4 ÷ 0,7
steklena volna	50 ÷ 400	0,037 ÷ 0,055	0,837	0,1 ÷ 0,9

Glede na časovno porazdelitev temperature v telesu ločimo *stacionarni* (časovno neodvisni) prevod toplote in *nestacionarni* (časovno odvisni) prevod toplote.

Reševanje enačbe (2.1) se za večdimenzionalne nestacionarne prevode toplote izvaja v splošnem z numeričnimi in grafičnimi metodami. Za enodimenzionalni prevod skozi enostavna telesa, kot so plošča, valj in krogla, je reševanje enostavnejše. Nekaj takšnih rešitev je za nestacionarni prevod podanih v poglavju 5. V nadaljevanju je podanih nekaj analitičnih rešitev za stacionarni enodimenzionalni prevod.

Če ima ravna plošča dimenzije bistveno večje od debeline in je toplotni vir enakomerno porazdeljen po vsej prostornini ter je površina izpostavljena enaki temperaturi, potem se prevod vrši le prečno skozi ploščo. Z upoštevanjem $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ in $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$ v enačbi (2.1) dobimo:

$$I + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.1a)$$

Če je valj bistveno daljši od premera in je toplotni vir enakomerno porazdeljen po vsej prostornini ter je površina izpostavljena enaki temperaturi, poteka prevod v radialni smeri. Z vpeljavo cilindričnega koordinatnega sistema $x = r \cos \phi$ in $y = r \sin \phi$, ki je prikazan na sliki 2.2a, se z daljšo izpeljavo enačba (2.1) nadomesti s sledečo diferencialno zvezo:

$$I + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t},$$

ki se za stacionarni radialni prevod ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ in $\frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$) bistveno poenostavi:

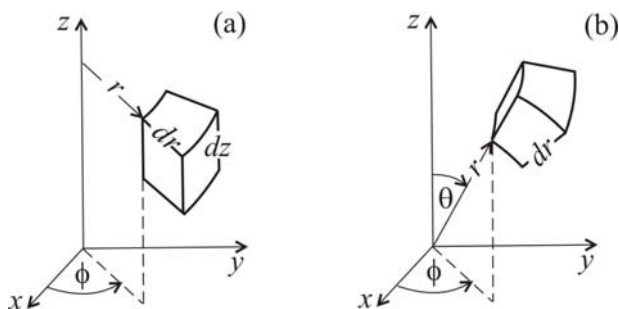
$$I + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.1b)$$

Podobno se v krogli prevod vrši v radialni smeri. Z vpeljavo sferičnega koordinatnega sistema $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ in $z = r \cos \theta$, ki je prikazan na sliki 2.2b, se z daljšo izpeljavo enačba (2.1) nadomesti z

$$I + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t},$$

ki se za stacionarni radialni prevod ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ in $\frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$) bistveno poenostavi:

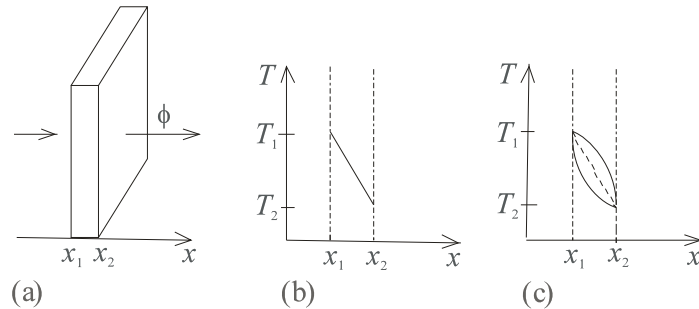
$$I + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.1c)$$



Sl. 2.2: Enota telesa v cilindričnem in sferičnem koordinatnem sistemu

2.2 Enodimenzionalni stacionarni prevod toplote

2.2.1 Ravna plošča z $\lambda = \text{konst.}$



Sl. 2.3: Enodimenzionalni prevod toplote skozi (a) ravno ploščo z (b) $\lambda = \text{konst.}$ in (c) linearno zvezo $\lambda(T)$

Eden najenostavnejših in tudi pomembnejših primerov je prevod skozi ravno ploščo (sl. 2.3a). Z integriranjem enačbe (2.1a) za enodimenzionalen prevod pri $I = 0$ in $\lambda = \text{konst.}$ dobimo linearno porazdelitev temperature (sl.2.3b):

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = c_1 \quad \Rightarrow \quad \int_{T_1}^T dT = c_1 \int_{x_1}^x dx \quad \Rightarrow \quad T = T_1 + c_1(x - x_1)$$

Splošno konstanto c_1 se lahko določi iz zveze $T(x)$ z upoštevanjem drugega robnega pogoja

$$T(x = x_2) = T_2: \quad c_1 = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}$$

Ob znani temperaturni porazdelitvi lahko iz Fourier-ovega zakona (1.1) določimo toplotni tok skozi ploščo površine A : $\phi = -\lambda A \frac{dT}{dx} = -\lambda A c_1$, ki je torej po vsej plošči konstanten.

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (2.3)$$

$$\phi = -\lambda A \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \quad (2.4)$$

2.2.2 Ravna plošča z $\lambda = \lambda_0(1 + \beta T)$

Z integriranjem enačbe (2.1a) pri $I = 0$ in linearni zvezi $\lambda(T)$ dobimo parabolično zvezo med T in x , kot je prikazano na sliki 2.3c. Lega krivulje je odvisna od vrednosti β .

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \frac{dT}{dx} = c_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 \int_{T_1}^T (1 + \beta T) dT = c_1 \int_{x_1}^x dx \quad \Rightarrow \quad (2.5)$$

Vrednost c_1 se lahko določi iz drugega robnega pogoja in njen izraz se z vpeljavo srednje temperature $T_{sr} = \frac{T_1 + T_2}{2}$ oziroma $\lambda_{sr} = \lambda(T_{sr})$ poenostavi:

$$c_1 = \frac{\lambda_0 \left(T_2 - T_1 + \frac{\beta}{2} (T_2^2 - T_1^2) \right)}{x_2 - x_1} = \lambda_0 \left(1 + \beta \frac{T_1 + T_2}{2} \right) \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = \lambda_{sr} \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}$$

Toplotni tok $\phi = -\lambda A \frac{dT}{dx} = -Ac_1$ je konstanten.

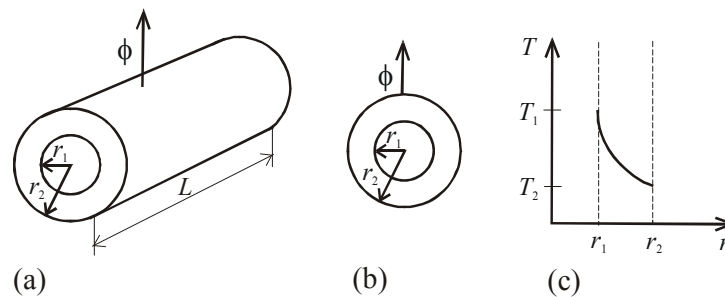
$$\lambda_0 \left(T - T_1 + \frac{\beta}{2} (T^2 - T_1^2) \right) = c_1 (x - x_1) \quad (2.5)$$

$$\phi = -\lambda_{sr} A \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \quad (2.6)$$

2.2.3 Okrogla cev z $\lambda = \text{konst.}$

Cevi so eden najpogostejših elementov v kemijski procesni tehniki. S problemom prevoda toplote skozi cev se srečujemo pri transportiranju vročih tekočin in pri toplotnih prenosnikih. V prvem primeru so zaželeno nizke toplotne izgube in so cevi pogosto izolirane, v drugem primeru so kovinske in imajo visoko toplotno prevodnost.

Obravnavajmo dolgo okroglo cev z notranjim polmerom r_1 in zunanjim polmerom r_2 ter dolžino L , kot prikazuje slika 2.4a. Na notranji površini stene je temperatura T_1 , na zunanji pa T_2 . Za valj, ki je bistveno daljši od premera, lahko predpostavimo, da teče toplota le v radialni smeri.



Sl. 2.4: Radialni stacionarni prevod toplote skozi (a) valjčno steno in (b) krogelno steno

Z integriranjem enačbe (2.1b) pri $I = 0$ in $\lambda = \text{konst.}$ dobimo logaritemsko porazdelitev temperature:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r \frac{dT}{dr} = c_1 \quad \Rightarrow \quad \int_{T_1}^T dT = c_1 \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad T = T_1 + c_1 \ln \frac{r}{r_1}$$

Konstanto c_1 se lahko določi iz drugega robnega pogoja $T(r = r_2) = T_2$: $c_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$

Toplotni tok je po enačbi (1.1) $\phi = -\lambda \cdot 2\pi r L \frac{dT}{dr} = -\lambda \cdot 2\pi L \cdot c_1$ in je po vsej steni konstanten.

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1} \quad (2.7)$$

$$\phi = -\lambda \cdot 2\pi L \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.8)$$

2.2.4 Okrogla cev z $\lambda = \lambda_0(1 + \beta T)$

$$\frac{d}{dr} \left(r\lambda \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda r \frac{dT}{dr} = c_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 \int_{T_1}^T (1 + \beta T) dT = c_1 \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad (2.9)$$

Vrednost c_1 se lahko določi iz drugega robnega pogoja in njen izraz se z vpeljavo λ_{sr} poenostavi: $c_1 = \lambda_{sr} \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$. Toplotni tok $\phi = -\lambda \cdot 2\pi r L \frac{dT}{dr} = -2\pi L c_1$ je konstanten.

$$\lambda_0 \left(T - T_1 + \frac{\beta}{2} (T^2 - T_1^2) \right) = c_1 \ln \frac{r}{r_1} \quad (2.9)$$

$$\phi = -\lambda_{sr} \cdot 2\pi L \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.10)$$

2.2.5 Krogelna stena z $\lambda = \text{konst.}$

Ta primer je manjšega praktičnega pomena in ga srečamo pri okroglih posodah z notranjim izvorom toplote (sl. 2.4b). Podobno kot v razdelku 2.2.3 se lahko iz enačb (2.1c) in (1.1) izpeljeta izraza za porazdelitev temperature in toplotni tok.

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (2.11)$$

$$\phi = -\lambda \cdot 4\pi \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad (2.12)$$

2.2.6 Krogelna stena z $\lambda = \lambda_0(1 + \beta T)$

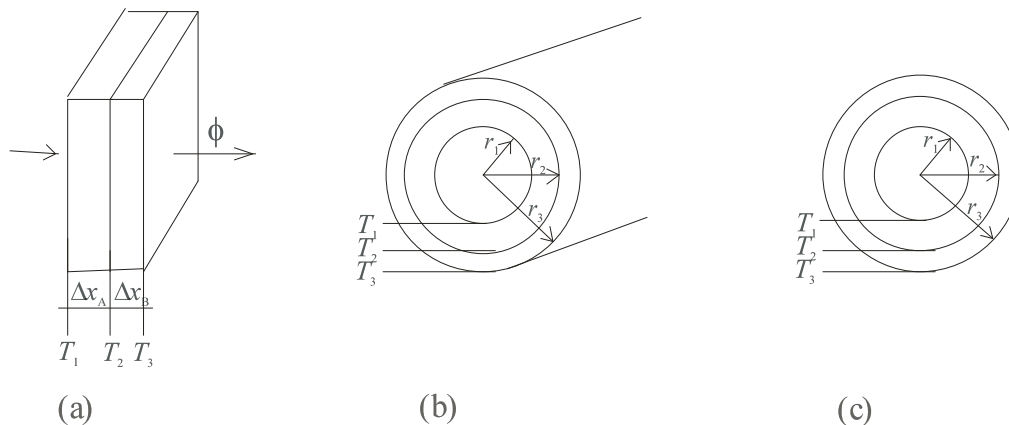
Izraza za porazdelitev temperature in toplotni tok sta izpeljana podobno kot v razdelku 2.2.4.

$$\lambda_0 \left(T - T_1 + \frac{\beta}{2} (T^2 - T_1^2) \right) = \lambda_{sr} \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (2.13)$$

$$\phi = -\lambda_{sr} \cdot 4\pi \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad (2.14)$$

2.2.7 Večslojna stena

Vsak sloj v steni nudi prevodu toplote določen upor. Tako je prevod toplote sorazmeren celotnemu uporju stene. Pokažimo na primeru dvo-slojne ravne stene, prikazane na sliki 2.5a, da je celotni upor vsota uporov posameznih slojev.



Sl. 2.5: Dvo-slojna (a) ravna, (b) valjčna in (c) krogelna stena

- prevod skozi sloj A: $\phi = -\lambda_A A \frac{T_2 - T_1}{\Delta x_A} \Rightarrow T_2 - T_1 = -\frac{\phi \cdot \Delta x_A}{\lambda_A A}$

- prevod skozi sloj B: $\phi = -\lambda_B A \frac{T_3 - T_2}{\Delta x_B} \Rightarrow T_3 - T_2 = -\frac{\phi \cdot \Delta x_B}{\lambda_B A}$

S seštevanjem končnih izrazov dobimo:

$$\phi = - \frac{A(T_3 - T_1)}{\frac{\Delta x_A}{\lambda_A} + \frac{\Delta x_B}{\lambda_B}} \quad (2.15)$$

Če podobno kot pri električnem toku definiramo upor $R_A = \frac{\Delta x_A}{\lambda_A A}$ za sloj A in $R_B = \frac{\Delta x_B}{\lambda_B A}$ za sloj B, vidimo, da lahko za zaporedje teh slojev zapišemo upor, ki je vsota posameznih uporov: $R = R_A + R_B$

Podobno se lahko za dvo-slojno valjčno steno, prikazano s sliko 2.5b pokaže z enačbo (2.10) sledeča zveza:

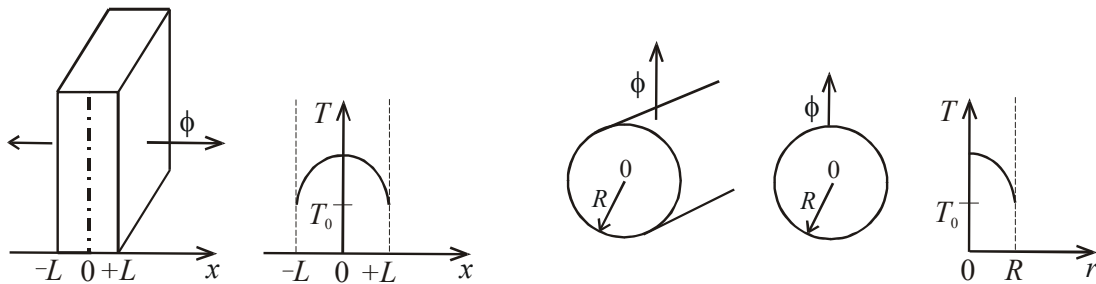
$$\phi = -2\pi L \frac{T_3 - T_1}{\frac{\ln r_2 / r_1}{\lambda_A} + \frac{\ln r_3 / r_2}{\lambda_B}} \quad (2.16)$$

in z enačbo (2.12) za dvo-slojno krogelno steno, prikazano s sliko 2.5c, zveza:

$$\phi = -4\pi \frac{T_3 - T_1}{\frac{1}{\lambda_A} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\lambda_B} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)} \quad (2.17)$$

2.2.8 Plošča, valj in krogla z $\lambda = \text{konst.}$ in prostorninskim izvorom toplote

Veliko primerov toplote je povezanih z notranjim izvorom toplote, kot npr. pri električnih napeljavah, industrijskih grelnih elementih in kemijskih reaktorjih. Izberimo izhodišče koordinatnega sistema v središču telesa, kot je prikazano na sliki 2.6. Debelino plošče označimo z $2L$, polmer valja in krogle pa z R . Toplotni izvor naj bo homogen po vsej notranjosti telesa.



Sl. 2.6: Plošča, valj in krogla z notranjim izvorom toplote

Toplotni tok skozi površino je produkt toplotnega izvora I in prostornine telesa. Prevod se vrši ob robnih pogojih pri plošči

$$T(x = \pm L) = T_0 \text{ in } \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

Oziroma pri valju in krogli

$$T(r = R) = T_0 \text{ in } \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=0} = 0.$$

Izpeljavo porazdelitve temperature je mogoče izvesti splošno. Če nadomestimo x os pri plošči z r osjo, lahko enačbe (2.1a), (2.1b) in (2.1c) nadomestimo s skupnim izrazom

$$I + \frac{1}{r^n} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0, \text{ kjer je } \quad \text{za ploščo } n = 0, \text{ za valj } n = 1 \text{ in za kroglo } n = 2.$$

$$-\frac{I}{\lambda} \int r^n dr = \int d \left(r^n \frac{dT}{dr} \right) \Rightarrow -\frac{I}{\lambda} \cdot \frac{r^{n+1}}{n+1} = r^n \frac{dT}{dr} + c_1 \quad \text{Iz drugega robnega pogoja}$$

$$\text{sledi } c_1 = 0 \text{ in } \frac{dT}{dr} = -\frac{Ir}{(n+1)\lambda} \Rightarrow \int_{T_0}^T dT = -\frac{I}{(n+1)\lambda} \int_R^r r dr \Rightarrow T = T_0 + \frac{I}{2(n+1)\lambda} (R^2 - r^2)$$

Toplotni tok npr. iz površine valja lahko določimo z enačbo (1.1) $\phi_R = -\lambda \cdot 2\pi RL \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=R}$ z upoštevanjem dobljenega izraza za temperaturni gradient.

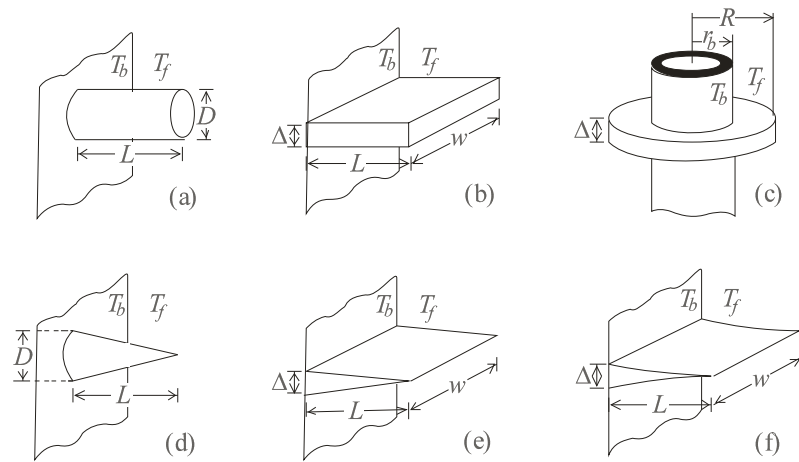
plošča	$T = T_0 + \frac{I}{2\lambda} (L^2 - x^2) \quad (2.18)$	$\phi_L = IAL \quad (2.19)$
valj	$T = T_0 + \frac{I}{4\lambda} (R^2 - r^2) \quad (2.20)$	$\phi_R = I\pi R^2 L \quad (2.21)$
krogla	$T = T_0 + \frac{I}{6\lambda} (R^2 - r^2) \quad (2.22)$	$\phi_R = I \frac{4\pi R^3}{3} \quad (2.23)$

Porazdelitve temperatur so parabolične. Pri plošči je toplotni tok iz ene strani plošče le polovica toka toplotnega izvora, saj se ta vrši na obe strani plošče. V vseh treh primerih je celotni iztok toplote enak produktu I in prostornine toplote.

2.2.9 Rebra

V praksi se za izboljšanje prenosa toplote med steno in tekočino vgrajujejo rebra. Ta povečujejo stično površino in tako izboljša prestop toplote.

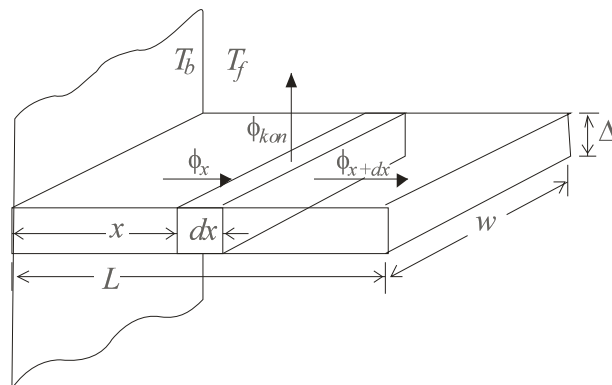
Za učinkovitost reber je pomembno, da imajo čim večjo površino, ki sega v tekočino, in dobro toplotno prevodnost. Primerne so različne oblike, npr. palična (sl. 2.7a), ploščna (sl. 2.7b) ali prstanasta (sl. 2.7c), obstajajo pa tudi izvedbe z upadajočim presekom, npr. z linearno ali parabolično upadajočim (sl. 2.7d-f).



Sl. 2.7: Rebra: (a) palično, (b) ploščno, (c) prstanasto in (d-f) z upadajočim presekom

Porazdelitev temperature vzdolž rebra in toplotni tok skozenj bosta izpeljana za primer ploščnega rebra, prikazanega na sliki 2.8.

Za dovolj tanko rebro lahko predpostavimo, da je temperatura v celotnem prečnem preseku (pri določeni legi x) enotna. Temperaturo na korenu rebra označimo s T_b in temperaturo tekočine s T_f . Prečni presek rebra označimo z A_c in površino elementa z $dA_s = P \cdot dx$, kjer je P obseg elementa. Pri ploščnem rebro je $P = 2(\Delta + w)$ in $A_c = w\Delta$.



Sl. 2.8: Prevod toplote skozi ploščno rebro

Za odsek dx velja toplotna bilanca

$$\phi_x = \phi_{x+dx} + \phi_{kon} \quad (2.24)$$

kjer so:

- prevod toplote skozi prečni presek pri legi x :

$$\phi_x = -\lambda A_c \left(\frac{dT}{dx} \right)_x \quad (2.24a)$$

- prevod toplote skozi prečni presek pri legi $x+dx$:

$$\phi_{x+dx} = -\lambda A_c \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} \quad (2.24b)$$

- prestop toplote skozi površino dA_s (enačba (1.2)): $\phi_{kon} = \alpha(P \cdot dx)(T - T_f)$ (2.24c)

Z vpeljavo parametrov $\theta = T - T_f$ in $m = \sqrt{\alpha P / \lambda A_c}$ toplotna bilanca (2.24) dobi obliko diferencialne enačbe (2.25), katere splošna rešitev je (2.26).

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (2.25)$$

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (2.26)$$

Vrednosti splošnih konstant C_1 in C_2 lahko določimo s sledečima robnima pogojema:

- pri prvem robnem pogoju $\theta(x=0) = T_b - T_f = \theta_b$ iz enačbe (2.26) dobimo $C_1 + C_2 = \theta_b$ in

- glede na drugi robni pogoj, da je na koncu rebra toplotni prestop enak prevodu tik ob površini, je porazdelitev temperature določena z enačbo (2.27). Ob znani porazdelitvi temperature lahko toplotni tok določimo z enačbo (1.1) ob korenu rebra in dobimo zvezo (2.28).

v primeru zelo dolgega rebra za drugi (2.30). Slednji enačbi sta poseben primer enačb (2.27) in (2.28), če v njih limitiramo $L \rightarrow \infty$.

drugi robni pogoj	na robu je toplotni prestop enak prevodu $-\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_L = \alpha \theta_L$	neskončno dolgo rebro $\theta(x = \infty) = 0$
porazdelitev temperature	$\theta = \theta_b \frac{\cosh(m(L-x)) + (\alpha/mL) \sinh(m(L-x))}{\cosh(mL) + (\alpha/mL) \sinh(mL)} \quad (2.27)$	$\theta = \theta_b e^{-mx} \quad (2.29)$
toplotni tok	$\phi_b = \lambda A_c m \theta_b \frac{\sinh(mL) + (\alpha/mL) \cosh(mL)}{\cosh(mL) + (\alpha/mL) \sinh(mL)} \quad (2.28)$	$\phi_b = \lambda A_c m \theta_b \quad (2.30)$

Za palično rebro veljajo enaka toplotna bilanca (2.24) in enaki robni pogoji, zato lahko zanj uporabimo enačbe (2.27) do (2.30), seveda z upoštevanjem ustreznih izrazov za P in A_c .

Analiza prenosa toplote skozi rebro, ki nima enotnega preseka, je bolj zapletena. Takšen primer je prstanasto rebro, kjer $A_c = 2\pi r \Delta$ raste z radijem r .

Z zamenjavo koordinate x z r in upoštevanjem izraza za površino $A_c = 2\pi(r^2 - r_b^2)$ toplotna bilanca (2.24) dobi obliko modificirane Besselo-ove enačbe nultega reda (2.31), katere splošna rešitev je enačba (2.32).

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - m^2\theta = 0 \quad (2.31)$$

$$\theta = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr) \quad (2.32)$$

Vrednosti splošnih konstant C_1 in C_2 so določene s sledečima robnima pogojema:

- prvi robni pogoj je temperatura pri korenu $\theta(r = r_b) = \theta_b$.
- pri drugem robnem pogoj, ko skozi površino $A_c = 2\pi R\Delta$ ni prenosa toplote, dobimo še najenostavnejša rešitev.

Pri teh pogojih je porazdelitev temperature podana z enačbo (2.33). Toplotni tok se določi po zvezi (1.1) ob korenu rebra in je podan z enačbo (2.34).

drugi robni pogoj	adiabatni pogoj $\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_R = 0$
porazdelitev temperature	$\theta = \theta_b \frac{I_0(mr)K_1(mR) + K_0(mr) + I_1(mR)}{I_0(mr_b)K_1(mR) + K_0(mr_b) + I_1(mR)} \quad (2.33)$
toplotni tok	$\phi_b = \lambda m \theta_b \cdot 2\pi r_b \Delta \frac{K_1(mr_b)I_1(mR) - I_1(mr_b)K_1(mR)}{I_0(mr_b)K_1(mR) + K_0(mr_b)I_1(mR)} \quad (2.34)$

Vrednosti Bessel-ovih funkcij I_0, K_0 in I_1, K_1 so podane v tabeli 2.2.

Tab 2.2: Vrednosti Bessel-ovih funkcij I_0, K_0 in I_1, K_1

x	$e^{-x}I_0(x)$	$e^{-x}I_1(x)$	$e^xK_0(x)$	$e^xK_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	∞	∞
0.2	0.8269	0.0823	2.1407	5.8334
0.4	0.6974	0.1368	1.6627	3.2587
0.6	0.5993	0.1722	1.4167	2.3739
0.8	0.5241	0.1945	1.2582	1.9179
1.0	0.4657	0.2079	1.1445	1.6361
1.2	0.4198	0.2152	1.0575	1.4429
1.4	0.3831	0.2185	0.9881	1.3010
1.6	0.3533	0.2190	0.9309	1.1919
1.8	0.3289	0.2177	0.8828	1.1048
2.0	0.3085	0.2153	0.8416	1.0335
2.2	0.2913	0.2121	0.8056	0.9738
2.4	0.2766	0.2085	0.7740	0.9229
2.6	0.2639	0.2046	0.7459	0.8790
2.8	0.2528	0.2007	0.7206	0.8405
3.0	0.2430	0.1968	0.6978	0.8066
3.2	0.2343	0.1930	0.6770	0.7763
3.4	0.2264	0.1892	0.6579	0.7491
3.6	0.2193	0.1856	0.6404	0.7245
3.8	0.2129	0.1821	0.6243	0.7021
4.0	0.2070	0.1787	0.6093	0.6816
4.2	0.2016	0.1755	0.5953	0.6627
4.4	0.1966	0.1724	0.5823	0.6453
4.6	0.1919	0.1695	0.5701	0.6292
4.8	0.1876	0.1667	0.5586	0.6142
5.0	0.1835	0.1640	0.5478	0.6003
5.2	0.1797	0.1614	0.5376	0.5872
5.4	0.1762	0.1589	0.5279	0.5749
5.6	0.1728	0.1565	0.5188	0.5633
5.8	0.1696	0.1542	0.5101	0.5525
6.0	0.1666	0.1520	0.5019	0.5422
6.4	0.1611	0.1479	0.4865	0.5232
6.8	0.1561	0.1441	0.4724	0.5060
7.2	0.1515	0.1405	0.4595	0.4905
7.6	0.1473	0.1372	0.4476	0.4762
8.0	0.1434	0.1341	0.4366	0.4631
8.4	0.1398	0.1312	0.4264	0.4511
8.8	0.1365	0.1285	0.4168	0.4399
9.2	0.1334	0.1260	0.4079	0.4295
9.6	0.1305	0.1235	0.3995	0.4198
10.0	0.1278	0.1213	0.3916	0.4108

2.3 Prehod toplote

Prenos toplote pogosto poteka z več mehanizmi hkrati – kondukcijo, konvekcijo in radiacijo. Proces lahko sestoji iz vzporednih in zaporednih prenosov in ga kot takšnega imenujemo prehod toplote. Toplotni tok splošno pišemo $\phi = kA\Delta T$, kjer koeficient k imenujemo toplotna prehodnost.

Na primeru večslojne stene (razdelek 2.2.7) je bilo pokazano, da je upor prehoda toplote, ki sestoji iz *zaporednih prenosov*, vsota uporov posameznih procesov. Za prehod skozi N slojev,

kjer je celotna temperaturna razlika ΔT , je toplotni tok
$$\phi = \frac{\Delta T}{R} \quad (2.35)$$

Toplotni upor je vsota posameznih uporov:

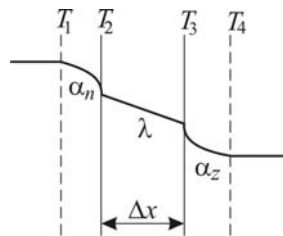
$$R = \sum_{i=1}^N R_i \quad (2.36)$$

Pri *vzporednih prenosih* je celotni toplotni tok vsota tokov posameznih prenosov pri isti temperaturni razliki ΔT :

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta T}{R_i} = \Delta T \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} = \frac{\Delta T}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (2.37)$$

V splošnem ta upor določajo upori kondukcije, konvekcije in radiacije, vendar so pogosto nekateri upori zanemarljivi. V nadaljevanju je obravnavanih nekaj praktičnih primerov.

2.3.1 Prehod toplote skozi ravno ploščo



Sl. 2.9: Prehod toplote skozi ravno ploščo

Vroča in hladna tekočina sta ločeni z ravno ploščo (slika 2.9). Toplota prehaja s tremi zaporednimi procesi (enačba (2.36)):

$$R = R_n + R_\lambda + R_z$$

- konvekcija ob toplejši površini plošče (en.(1.2)) $\phi = \alpha_n A(T_1 - T_2) \Rightarrow R_n = \frac{1}{A\alpha_n}$

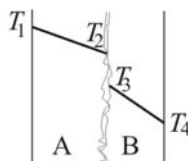
- kondukcija v plošči (enačba (2.6)) $\phi = \frac{\lambda A(T_2 - T_3)}{\Delta x} \Rightarrow R_\lambda = \frac{\Delta x}{A\lambda}$

- konvekcija ob hladnejši površini plošče (en.(1.2)) $\phi = \alpha_z A(T_3 - T_4) \Rightarrow R_z = \frac{1}{A\alpha_z}$

S seštevanjem uporov dobimo:

$$\phi = kA(T_1 - T_4) ; \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_n} + \frac{\Delta x}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_z}} \quad (2.38)$$

2.3.2. Prehod toplote skozi dotikajoči se plošči



Sl. 2.10: Prehod toplote skozi dotikajoči se plošči

Prevod toplote skozi dotikajoči se plošči je upočasnjjen zaradi upora na stiku, ker plošči na površini nista idealno gladki in se ne prilegata popolnoma. Prenos skozi stično površino se vrši s prevodom skozi tekočino, ki zapolnjuje vmesni prostor. Ta prostor je namreč preozek, da bi se lahko vršila konvekcija. Če so plošče dobro prevodne, je prevodnost tekočine, ki zapolnjuje vmesni prostor, (na primer zraka) bistveno nižja, zato se na stiku vzpostavi znaten padec temperature. Nekaj okvirnih vrednosti toplotne prestopnosti na raznih stičnih površinah podaja tabela 2.3.

Toplota prehaja s tremi zaporednimi prevodi (enačba 2.36):

$$R = R_A + R_s + R_B$$

$$\text{- kondukcija v plošči A (enačba (2.6))} \quad \phi = \frac{\lambda_A A (T_1 - T_2)}{\Delta x_A} \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{\Delta x_A}{A \lambda_A}$$

$$\text{- kondukcija v stičnem prostoru (en.(1.2))} \quad \phi = \alpha_s A (T_2 - T_3) \quad \Rightarrow \quad R_s = \frac{1}{A \alpha_s}$$

$$\text{- kondukcija v plošči B (enačba (2.6))} \quad \phi = \frac{\lambda_B A (T_3 - T_4)}{\Delta x_B} \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{\Delta x_B}{A \lambda_B}$$

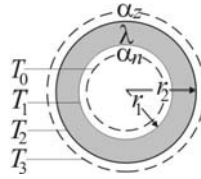
S seštevanjem uporov dobimo:

$$\boxed{\phi = k A (T_1 - T_4)} \quad ; \quad \boxed{k = \frac{1}{\frac{\Delta x_A}{\lambda_A} + \frac{1}{\alpha_s} + \frac{\Delta x_B}{\lambda_B}}} \quad (2.39)$$

Tab. 2.3: Okvirne vrednosti α_s na stiku med ploščama raznih materialov pri zmernih tlakih

stična ploskev	α_s (W/K·m ²)
keramika - keramika	500 ÷ 3000
keramika - kovina	1500 ÷ 8500
nerjavno jeklo – nerjavno jeklo	1700 ÷ 3700
nerjavno jeklo - Al	3000 ÷ 4500
Al - Al	2200 ÷ 12 000
Cu - Cu	10 000 ÷ 25 000
nerjavno jeklo - zemlja	2000 ÷ 5000
Al - zemlja	10 000 ÷ 50 000
Cu - zemlja	~150 000

2.3.3 Prehod toplote skozi steno cevi



Sl. 2.11: Prehod toplote skozi steno cevi

Problem je podoben kot pri prehodu skozi ravno steno, vendar je potrebno v uporih upoštevati odvisnost površine od radija.

Toplota prehaja s tremi zaporednimi procesi (enačba(2.36)): $R = R_n + R_\lambda + R_z$

- konvekcija znotraj cevi (enačba(1.2)) $\phi = \alpha_n A_1 (T_0 - T_1) \Rightarrow R_n = \frac{1}{A_1 \alpha_n}$

$$A_1 = 2\pi r_1 L$$

- konvekcija zunaj cevi (enačba (1.2)) $\phi = \alpha_z A_2 (T_2 - T_3) \Rightarrow R_z = \frac{1}{A_2 \alpha_z}$

$$A_2 = 2\pi r_2 L$$

- kondukcija v steni cevi (enačba (2.8)) $\phi = \lambda \cdot 2\pi L \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \Rightarrow R_\lambda = \frac{\ln r_2 / r_1}{\lambda}$

S seštevanjem uporov dobimo:

$$\phi = k\bar{A}(T_0 - T_3) ; \quad k\bar{A} = \frac{2\pi L}{\frac{1}{\alpha_n r_1} + \frac{\ln r_2 / r_1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_z r_2}} \quad (2.40)$$

Upor ukrivljene površine včasih izražamo z enačbo za ravno ploščo (2.6) z vpeljavo srednje vrednosti mejnih površin A_{sr} , ki je za cev logaritemska sredina (enačba 2.42). Če namreč toplotni tok skozi steno $\phi = \lambda A(r) \frac{dT}{dr}$ izrazimo s srednjo vrednostjo površine $\phi = \lambda A_{sr} \frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1}$,

dobimo: $A_{sr} = \frac{r_2 - r_1}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{A(r)}} \quad (2.41)$

katere rešitev je za valj: $A_{sr} = \frac{2\pi L(r_2 - r_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{A_2 - A_1}{\ln \frac{A_2}{A_1}} \quad (2.42)$

Tako lahko izraz (2.40) tudi zapišemo kot:

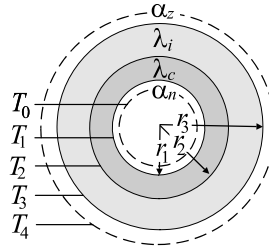
$$k\bar{A} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_n A_1} + \frac{r_2 - r_1}{\lambda A_{sr}} + \frac{1}{\alpha_z A_2}} \quad (2.43)$$

2.3.4 Prehod toplote skozi krogelno steno

Problem je podoben kot pri cevi in velja enačba (2.43), le da je srednja površina stene geometrijska sredina mejnih površin (enačba 2.44). Za kroglo je namreč rešitev izraza (2.41):

$$A_{sr} = 4\pi r_1 r_2 = \sqrt{A_1 A_2} \quad (2.44)$$

2.3.5 Prehod toplote skozi izolirano cev



Sl. 2.12: Prehod toplote skozi izolirano cev

Za dodatno izolacijsko plast se enačba (2.40) razširi.

$$R = R_n + R_c + R_i + R_z$$

$$\phi = k\bar{A}(T_0 - T_4) \quad ; \quad k\bar{A} = \frac{2\pi L}{\frac{1}{\alpha_n r_1} + \frac{\ln r_2 / r_1}{\lambda_c} + \frac{\ln r_3 / r_2}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_z r_3}} \quad (2.45)$$

S spreminjanjem debeline izolacije se upor kondukcije skozi izolacijo R_i in upor konvekcije zunaj cevi R_z spreminjata, upor kondukcije skozi steno cevi R_c in upor konvekcije znotraj cevi R_n pa sta konstantna. Določimo kritični radij zunanjšega roba izolacije, r_{3kr} , pri katerem je izolacija najmanj učinkovita.

$$\frac{dR}{dr_3} = \frac{d}{dr_3} \left(\frac{\ln r_3 / r_2}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_z r_3} \right) = \frac{1}{\lambda_i r_3} - \frac{1}{\alpha_z r_3^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{kr} = \lambda_i / \alpha_z \quad (2.46)$$

$$\left(\frac{d^2 R}{dr_3^2} \right)_{r_{kr}} = \frac{-1}{\lambda_i r_{kr}^2} + \frac{2}{\alpha_z r_{kr}^3} = \frac{\alpha_z^2}{\lambda_i^3} > 0$$

Ker je drugi odvod upora pri kritičnem radiju pozitiven, je upor pri tej vrednosti minimalen.

Dobre izolacijske snovi imajo prevodnost $\lambda_i \approx 0,05 \text{ W/m}\cdot\text{K}$; prestopnost α_z pa je reda velikosti $10 \text{ W/m}^2\text{K}$. Tako cevi, ki imajo v praksi premer večinoma večji od 5 mm, presegajo kritično mejo in se z večanjem debeline izolacije toplotne izgube znižujejo. Pri slabših izolacijskih sredstvih in ožjih ceveh pa je potrebno biti na kritično mejo pozoren.

V praksi se minimalna debelina izolacije pogosto določa iz pogoja, da je temperaturna razlika med zunanjo površino izolacije in tekočino največ 20 K.

3 ZVEZE ZA TOPLOTNO PRESTOPNOST

Prestop toplote se vrši v tekočini, ki je v stiku s toplejšo ali hladnejšo površino. Je intenzivnejši od samega prevoda toplote. Hitrost prestopa ni odvisna le od snovi, ampak tudi od geometrije sistema in pretočnega režima tekočine. Pri naravni konvekciji razlike v temperaturi v tekočini povzročajo gibanje tekočine v mejni plasti, katerega režim vpliva na hitrost toplotnega prestopa, pri prisilni konvekciji pa na hitrost prestopa vpliva pretočni režim osnovnega toka tekočine. Pri gibanju tekočine v splošnem ločimo *laminarni* in *turbulentni režim*, kar se ogotavlja iz vrednosti *Reynolds-ovega števila*:

$$\text{Re} = \frac{\rho v D_h}{\eta} = \frac{v D_h}{\nu} \quad (3.1)$$

Parametri so: v = hitrost tekočine,

ρ = gostota tekočine,

η = kinematična viskoznost in

ν = dinamična viskoznost = ε / ρ

Če se tekočina pretaka v cevi okroglega preseka, je hidravlični premer D_h v izrazu (3.1) notranji premer cevi D_n . Če se tekočina pretaka prečno na cev, je D_h enak zunanjemu premeru cevi D_z , če pa se pretaka vzporedno ob cevi, namesto D_h nastopa dolžina cevi L .

Če se tekočina pretaka v cevi ne-okroglega preseka, se D_h računa kot ekvivalentni premer D_e :

$$D_e = \frac{4 \cdot \text{prostornina tekočine}}{\text{omočena površina vodnika}} \quad (3.2)$$

Ta je za pravokotni presek $a \times b$

$$D_e = \frac{4ab \cdot L}{2(a+b) \cdot L} = \frac{2ab}{a+b} \quad (3.2a)$$

in za obročasti presek

$$D_e = \frac{4 \left(\frac{\pi}{4} (D_z^2 - D_n^2) \right) \cdot L}{\pi (D_z + D_n) \cdot L} = D_z - D_n \quad (3.2b)$$

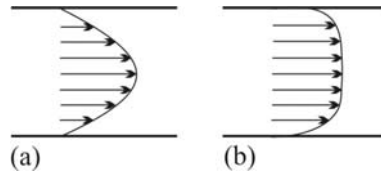
Kjer sta D_z = zunanji premer notranje cevi in

D_n = notranji premer zunanje cevi.

Pri vrednostih $\text{Re} < 2300$ je pretakanje laminarno. Ob steni se tvori tanka mirujoča plast, proti osi cevi ji sledijo vzporedne plasti, v katerih hitrost toka narašča, kolikor dopuščajo strižne sile. Porazdelitev hitrosti je parabolična, kot prikazuje slika 3.1a. V mirujoči plasti se prenos vrši s prevodom, v naslednjih plasteh pa na prenos vpliva tok tekočine.

Pri vrednostih $Re > 10\,000$ je pretakanje turbulentno. Ob steni je zelo tanka laminarna plast, ki ji sledi območje vrtinčenja tekočine z bolj enotno porazdeljeno hitrostjo tekočine (sl. 3.1b). Vrtinčenje bistveno zoži termično plast, v kateri se temperatura strmo spreminja, praktično po linearni zvezi.

V prehodnem območju (vrednosti Re med 2300 in 4000) ni izrazitega tipa pretakanja. Tok je lahko npr. laminaren, že ob manjši motnji pa se lahko spremeni v turbulentnega.



Sl. 3.1: Porazdelitev hitrosti v cevi pri (a) laminarnem in (b) turbulentnem pretakanju

Zaradi kompleksnosti mehanizma konvekcije so izrazi za toplotno prestopnost α analitično izpeljani le za enostavne primere. Za praktične primere so na razpolago empirične zveze, v katerih se toplotna prestopnost običajno izraža z *Nusselt-ovim številom*:

$$\text{Nu}_L = \frac{\alpha L}{\lambda} \quad (3.3)$$

Parameter L je karakteristična dolžina površine oziroma ekvivalentni premer vodnika tekočine. Toplotna prevodnost λ pripada tekočini.

V izrazih nastopa tudi *Prandtl-ovo število*:

$$\text{Pr} = \frac{c_p \eta}{\lambda} \quad (3.4)$$

V tem izrazu vsi fizikalni parametri pripadajo tekočini. Parameter c_p je specifična toplotna kapaciteta pri konstantnem tlaku.

Tab. 3.1: Vrednosti Pr za nekatere tekočine [2].

T (°C)	20	40	60	80	100
Pr (suh zrak, 10^5 Pa)	0,71	0,71	0,71	0,71	0,71
Pr (voda)	7,0	4,35	3,0	2,2	1,75
Pr (mazilno olje)	167,8	92,0	59,7	42,3	31,2

Tabela 3.1 podaja vrednosti Pr za zrak, vodo in mazilno olje v temperaturnem območju od 0°C do 100°C. Plini imajo Pr v območju 0,6 do 1,0. Večina kapljev in ima Pr do 10. Viskozna olja imajo zelo visoke vrednosti Pr . Tekoče kovine imajo Pr reda velikosti 0,01.

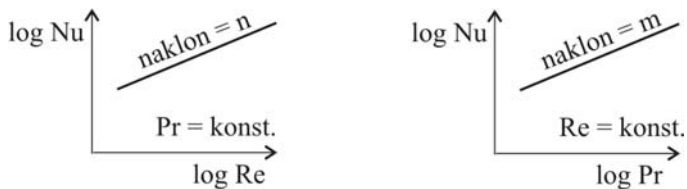
Ker so vrednosti fizikalnih parametrov tekočine, npr. ρ, η, c_p, λ , odvisne od temperature, so empirične zveze podane glede na vrednosti teh parametrov pri srednji temperaturi mejnega sloja tekočine $T_{sr} = \frac{T_s + T_f}{2}$.

Vrednost T_f se računa kot geometrijska sredina med vstopno temperaturo T_v in izstopno temperaturo tekočine T_i

$$T_f = \frac{T_v + T_i}{2},$$

toplotni tok pa se izračunava s srednjo logaritemsko temperaturo, kot je podano v poglavju 6.

Empirične zveze za α se v splošnem določajo tako, da se površina izbrane geometrije električno ogreva. Glede na enačbo (1.2) se določi T_s in T_f , ploščina A in gostota toplotnega toka, ki je enaka električni porabi. Iz dobljene vrednosti α se izračuna Nu za dano tekočino. Meritve se ponovijo pri raznih hitrostih tekočine in s tekočinami z različnimi vrednostmi Pr. Postavi se splošna matematična zveza, npr. polinom $Nu = C Re^n Pr^m$. Logaritem polinoma je linearna zveza glede na Re pri konstantnem Pr oziroma linearna zveza Pr pri konstantnem Re. Tako se lahko merilni rezultati izrišejo v logaritemski skali in aproksimirajo s premicama, kot je prikazano na sliki 3.2. Nakloni premic podajajo vrednosti m in n , iz presečišča premice z ordinatno osjo pa se nato lahko izračuna vrednost C .



Sl. 3.2: Aproksimacija merilnih rezultatov s polinomom

V nadaljevanju bodo podani empirični izrazi za α v raznih primerih naravne in prisilne konvekcije pri notranjem oziroma zunanem pretakanju tekočine.

3.1 Naravna konvekcija

Pri naravni konvekciji je gonilna sila vzgon, ki je izražen v *Grasshoff-ovem* številu:

$$\text{Gr}_L = \frac{L^3 g \beta (T_s - T_f)}{\nu^2} \quad (3.5)$$

Parametri so: g = gravitacijski pospešek,

β = koeficient volumske razteznosti (pri konstantnem tlaku p)

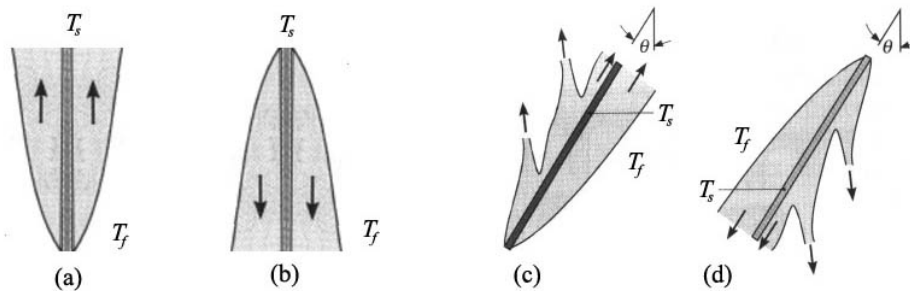
$$= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \text{ in je tako za idealne pline enak } \frac{1}{T_{sr}},$$

L = karakteristična dolžina stene.

Empirične zveze za naravno konvekcijo so močno odvisne od geometrije sistema in imajo v splošnem obliko $\text{Nu} = f(\text{Pr}, \text{Ra})$, kjer je Ra *Rayleigh-ovo* število:

$$\text{Ra}_L = \text{Pr} \cdot \text{Gr}_L \quad (3.6)$$

3.1.1 Pokončna plošča in nagnjena plošča



Sl. 3.3: Naravna konvekcija ob pokončni (a) vroči in (b) hladni plošči ter nagnjeni (c) vroči in (d) hladni plošči

Potek tokovnic v mejni plasti je prikazan na sliki 3.3. Režim gibanja tekočine v mejni plasti je lahko laminaren ali turbulenten.

Prehod med režimoma v mejni plasti ob pokončni ali rahlo nagnjeni steni je pri $\text{Ra} \approx 10^9$. Karakteristična dolžina L je višina stene.

Za pokončno ploščo sta *Churchill in Chu* za *laminarni režim* razvila zvezo:

$$\text{Nu}_L = 0,68 + \frac{0,670 \text{Ra}_L^{1/4}}{\psi_1^{4/9}}; \quad \psi_1 = 1 + \left(\frac{0,492}{\text{Pr}} \right)^{9/16} \quad (3.7)$$

Za *turbulentni režim* velja zveza:

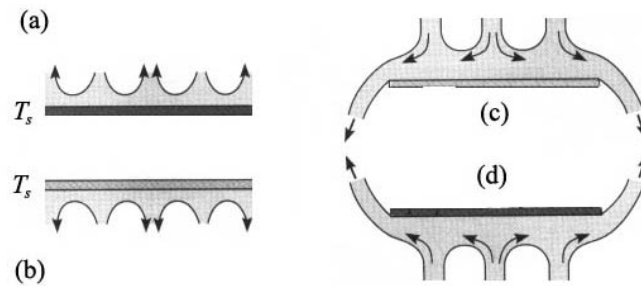
$$\boxed{\text{Nu}_L = 0,68 + \frac{0,670 \text{Ra}_L^{1/4}}{\psi_1^{4/9}} \left(1 + \frac{1,6 \cdot 10^{-8} \text{Ra}_L}{\psi_1^{16/9}} \right)^{1/2}} \quad 10^9 < \text{Ra}_L < 10^{12} \quad (3.8)$$

Za pokončen valj z majhnim učinkom ukrivljenosti $\frac{D}{L} \geq \frac{35}{\text{Gr}_L^{1/4}}$ lahko uporabimo enačbi (3.7) in (3.8). Karakteristična dolžina L je v tem primeru dolžina valja in D je premer valja.

Če je plošča nagnjena za kot $\theta \in (0^\circ, 60^\circ)$ glede na navpičnico, se
 - za *laminarni režim* v izrazu (3.7) gravitacijski pospešek pomnoži s $\cos \theta$,
 - za *turbulentni režim* pa lahko izraz (3.8) uporabimo brez sprememb.

3.1.2 Vodoravna plošča

Pri vodoravni plošči je konvekcija različna na zgornji in spodnji strani plošče in je tudi odvisna od tega, ali je površina plošče vroča ali hladna (sl. 3.4).



Sl. 3.4: Naravna konvekcija na vodoravni plošči:
 (a) vroča zgornja površina, (b) hladna spodnja površina,
 (c) hladna zgornja površina, (d) vroča spodnja površina

Karakteristična dolžina je pri vodoravni legi enaka dolžini plošče.

Najpogosteje se uporabljajo *McAdams-ovi* izrazi:

- nad vročo površino ali hladno površino (sl. 3.4a in b)

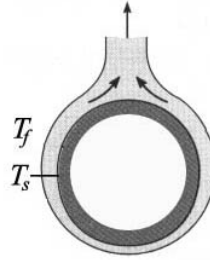
$$\boxed{\text{Nu}_L = 0,54 \text{Ra}_L^{1/4}} \quad 10^5 < \text{Ra}_L < 2 \cdot 10^7 \quad (3.9)$$

$$\boxed{\text{Nu}_L = 0,14 \text{Ra}_L^{1/3}} \quad 2 \cdot 10^7 < \text{Ra}_L < 3 \cdot 10^{10} \quad (3.10)$$

- pod vročo površino ali nad hladno površino (sl. 3.4c in d)

$$\boxed{\text{Nu}_L = 0,27 \text{Ra}_L^{1/4}} \quad 3 \cdot 10^5 < \text{Ra}_L < 10^{10} \quad (3.11)$$

3.1.3 Vodoravni valj



Sl. 3.5: Shema naravne konvekcije ob vodoravnem valju in krogli

Pri dovolj dolgih valjih, kjer je vpliv koncev zanemarljiv, sta priporočani zvezi (3.12) in (3.13). Karakteristična dolžina je premer valja D .

- laminarni režim

$$\text{Nu}_D = 0,36 + \frac{0,518 \text{Ra}_D^{1/4}}{\psi_2^{4/9}}; \quad 10^{-4} < \text{Ra}_D < 10^9 \quad (3.12)$$

$$\psi_2 = 1 + \left(\frac{0,559}{\text{Pr}} \right)^{9/16}$$

- turbulentni režim

$$\text{Nu}_D = \left(0,60 + \frac{0,387 \text{Ra}_D^{1/6}}{\psi_2^{8/27}} \right)^2 \quad 10^9 < \text{Ra}_D < 10^{12} \quad (3.13)$$

Enostavnejšo zvezo je določil *Morgan* s polinomom, kjer sta C in n empirična parametra, podana v tabeli 3.2.

$$\text{Nu}_D = C \text{Ra}_D^n \quad (3.14)$$

Tab. 3.2: Vrednosti C in n v enačbi (3.14) [1]

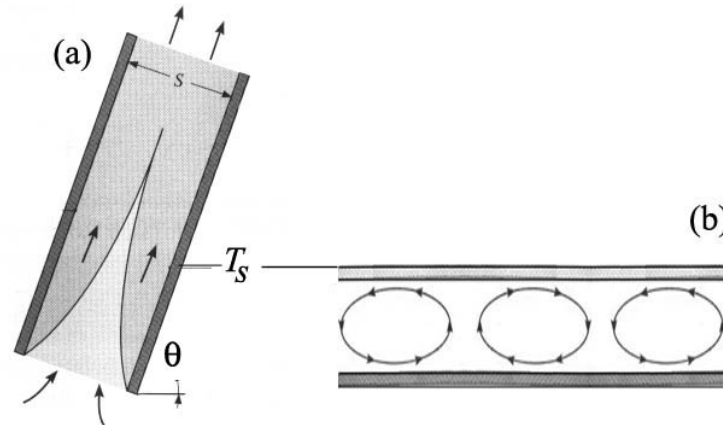
	C	n
$10^{-10} < \text{Ra} < 10^{-2}$	0,675	0,058
$10^{-2} < \text{Ra} < 10^2$	1,02	0,148
$10^2 < \text{Ra} < 10^4$	0,850	0,188
$10^4 < \text{Ra} < 10^7$	0,480	0,250
$10^7 < \text{Ra} < 10^{12}$	0,125	0,333

3.1.4 Krogla

Karakteristična dolžina je premer krogle D . *Churchill* je predlagal sledečo zvezo:

$$\text{Nu}_D = 2 + \frac{0,589 \text{Ra}_D^{1/4}}{\psi_3^{4/9}}; \quad \psi_3 = 1 + \left(\frac{0,469}{\text{Pr}} \right)^{9/16} \quad \begin{array}{l} \text{Ra}_D > 10^{10} \\ \text{Pr} > 0,7 \end{array} \quad (3.15)$$

3.1.5 Dve vzporedni plošči



Sl. 3.6: Naravna konvekcija med vzporednima ploščama: vodoravni ali rahlo nagnjeni plošči (vroča je spodnja plošča) in pokončni vroči plošči

Ko sta plošči vodoravni (sl. 3.6b), je karakteristična dolžina v izrazih Nu in Ra je razdalja med ploščama, s . Če je ogrevana spodnja plošča, bo pri $Ra_s > 1700$ prišlo do naravne konvekcije. *Globe* in *Dropkin* sta za takšno konvekcijo postavila zvezo:

$$Nu_s = 0,069 Ra_s^{1/3} Pr^{0,074} \quad 3 \cdot 10^5 < Ra_s < 7 \cdot 10^9 \quad (3.16)$$

Če je $Ra_s < 1700$ ali je ogrevana zgornja plošča, se prenos toplote vrši le s prevodom: $Nu_s = 1$.

Med pokončnima ploščama (sl. 3.6a; $\theta = 90^\circ$) je naravna konvekcija odvisna od razmerja med višino in razmikom plošč, L/s .

Za večje razmike med ploščama je *Catton* predlagal sledeči zvezi:

$$Nu_s = 0,18 \left(\frac{Pr Ra_s}{0,2 + Pr} \right)^{0,29} \quad 1 < \frac{L}{s} < 2 \quad (3.17)$$

$$10^{-3} < Pr < 10^5$$

$$10^3 < \frac{Pr Ra_s}{0,2 + Pr}$$

$$Nu_s = 0,22 \left(\frac{Pr Ra_s}{0,2 + Pr} \right)^{0,28} \left(\frac{s}{L} \right)^{1/4} \quad 2 < \frac{L}{s} < 10 \quad (3.18)$$

$$Pr < 10^5$$

$$10^3 < Ra_s < 10^{10}$$

Za manjše razmike med ploščama sta *MacGregor* in *Emery* predlagala:

$\text{Nu}_s = 0,42 \text{Ra}_s^{1/4} \text{Pr}^{0,012} \left(\frac{s}{L}\right)^{0,3}$	$10 < \frac{L}{s} < 40 \quad (3.19)$
$\text{Nu}_s = 0,046 \text{Ra}_s^{1/3}$	$1 < \text{Pr} < 2 \cdot 10^4$ $10^4 < \text{Ra}_s < 10^7$ $1 < \frac{L}{s} < 40 \quad (3.20)$ $1 < \text{Pr} < 20$ $10^6 < \text{Ra}_s < 10^9$

Ko sta plošči nagnjeni za kot θ glede na vodoravnico, je za manjše nagibe ($\theta < \theta^*$) *Hollands-ova* skupina predlagala zvezo:

$$\text{Nu}_s = 1 + 1,44 \cdot \left[1 - \frac{1708}{\text{Ra}_s \cos \theta}\right]^* \cdot \left[1 - \frac{1708(\sin 1,8\theta)^{1,6}}{\text{Ra}_s \cos \theta}\right] + \left[\left(\frac{\text{Ra}_s \cos \theta}{5830}\right)^{1/3} - 1\right]^* \quad (3.21)$$

Če je vrednost v oglatih oklepajih, ki so označeni z *, negativna, jo postavimo nič. Če je namreč $\text{Ra}_s \leq 1708 / \cos \theta$, ne pride do naravne konvekcije in se vrši le prevod toplote ($\text{Nu}_s = 1$).

Kritične vrednosti θ^* so podane v tabeli 3.3.

Za večje nagibe, $\theta \in (\theta^*, 90^\circ)$, sta *Ayaswamy* in *Catton* predlagala uporabo zvez za pokončni plošči (3.17) do (3.20), v katerih se desna stran pomnoži s faktorjem $(\sin \theta)^{1/4}$.

Tab. 3.3: Kritični kot nagiba vzporednih plošč [1]

L/s	1	3	6	12	>12
θ^*	25°	53°	60°	67°	70°

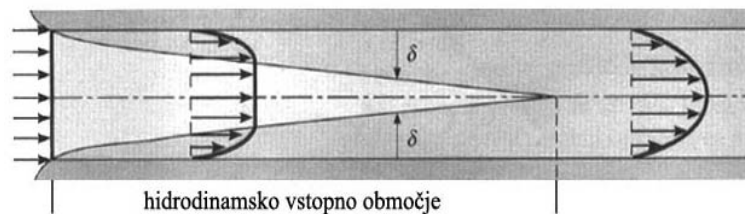
3.2 Prisilna konvekcija v toku tekočine v cevi

3.2.1 Laminarni tok v cevi

Laminarni tok ($Re < 2100$) je v industrijski praksi redek, vendar zaželen, saj turbulentni tok povzroča večje tlačne izgube. Laminarni tok se dosega pri viskoznih oljih in tekočih kovinah.

Pri dotekanju tekočine v cev je potrebno določiti *vstopno območje*, v katerem se porazdelitev hitrosti tekočine postopno razvije do profila laminarnega toka. Slika 3.7 prikazuje razvoj tega profila, ko tekočina vstopa v cev z enotno porazdelitvijo hitrosti po vsem preseku cevi. Ob steni se tvori mirujoča plast, ki ji sledijo plasti z naglim porastom hitrosti vse do hitrosti sredice tekočine. Vzdolž cevi se ta laminarna plast širi, dokler ne doseže osi cevi. Na tej razdalji je hitrostni profil popolnoma razvit. *Dolžina vstopnega območja* laminarnega toka, L_v , je ovrednotena z zvezo (3.22). Parameter D je notranji premer cevi.

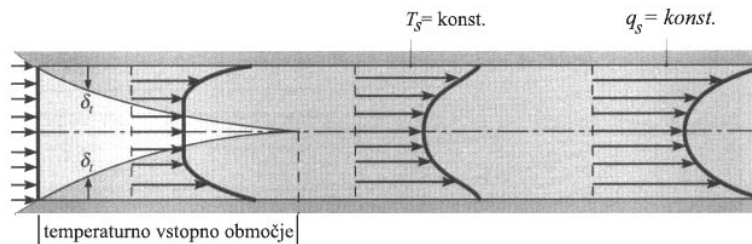
$$\left(\frac{L_v}{D}\right)_{lam} = 0,05 Re_D \quad (3.22)$$



Sl. 3.7: Razvoj hitrostnega profila laminarnega toka v cevi

Prav tako se lahko pri dotekanju tekočine v toplejšo ali hladnejšo cev postopno razvije temperaturni profil. Slika 3.8 prikazuje porazdelitev temperature, ko v cev vstopa tekočina z enotno porazdelitvijo temperature. Ob steni se oblikuje temperaturni mejni sloj, ki se vzdolž cevi širi vse do osi cevi. Če je toplotni tok iz stene cevi konstanten ($q_s = \text{konst.}$) ali je konstantna temperatura vzdolž cevi, se vzpostavi popolnoma razvit temperaturni profil. Med tem ko pri popolnoma razvitem hitrostnem profilu vrednosti hitrosti ostajajo iste, se pri popolnoma razvitem temperaturnem profilu ohranja le oblika profila, vrednosti temperatur pa naraščajo. Pri laminarnem toku je *temperaturna vstopna dolžina*, L_T , ovrednotena z zvezo:

$$\left(\frac{L_T}{D}\right)_{lam} = 0,05 Re_D Pr \quad (3.23)$$



Sl. 3.8: Razvoj temperaturnega profila

Pri tekočinah s $Pr = 1$ (npr. voda) sta enačbi (3.22) in (3.23) identični - hitrostni in temperaturni profil se razvijeta na isti dolžini. Pri tekočinah s $Pr > 1$ se prej razvije hitrostni profil, pri plinih ($Pr < 1$) pa se prej razvije temperaturni profil.

Tab. 3.4: Temperaturna, L_T , in hitrostna vstopna dolžina, L_v , za nekatere tekočine v cevi premera 1 dm.

tekočina	Pr	$Re_D = 100$			$Re_D = 2000$		
		L_v	L_T	L_{mejni}	L_v	L_T	L_{mejni}
talina kovine	0,01	5 dm	5 mm	5 dm	10 m	1 dm	10 m
voda	1	5 dm	5 dm	5 dm	10 m	10 m	10 m
olje	100	5 dm	50 m	50 m	10 m	1 km	1 km

Iz tabele 3.4 je razvidno, da je za vodo vstopna dolžina kratka tudi pri zgornjih vrednostih Re laminarnega območja, za viskozna olja in druge tekočine z visokim Pr pa je vstopno območje zelo dolgo že pri spodnjih vrednostih Re laminarnega območja.

Za popolnoma razvita profila ($L > L_v$ in $L > L_T$) je analitično izpeljano:

$$\boxed{Nu_D = 3,66} \quad T_s = \text{konst.} \quad (3.24)$$

$$\boxed{Nu_D = 4,36} \quad q_s = \text{konst.} \quad (3.25)$$

Vpliv vstopnega območja je v empiričnih zvezah upoštevan z *Graetz-ovim številom*, kjer L dolžina cevi.

$$\boxed{Gz = Re_D Pr \frac{D}{L}} \quad (3.26)$$

Sieder in Tate sta za vodoravne cevi s konstantno temperaturo stene v območju nerazvitega hitrostnega in temperaturnega profila oblikovala empirično zvezo:

$$\boxed{Nu_D = 1,86 Gz^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14}}$$

$$T_s = \text{konst.}, L < L_v \text{ in } L < L_T$$

$$0,48 < Pr < 16700 \quad (3.27)$$

$$0,0044 < \frac{\eta}{\eta_s} < 9,75$$

Kasneje je *Whitaker* to zvezo priporočil v območju

$$Gz^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} \geq 2.$$

Hausen je postavil zvezo za popolnoma razvit hitrostni profil in nerazvit temperaturni profil v vodoravni cevi s konstantno temperaturo, kar se zgodi pri $Pr \gg 1$ ali, če začetni del cevi ni ogrevan.

$$\text{Nu}_D = 3,66 + \frac{0,0668 \text{Gz}}{1 + 0,04 \text{Gz}^{2/3}} \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} \quad T_s = \text{konst.}, L > L_v \text{ in } L < L_T \quad (3.28)$$

Vrednost η je vzeta pri srednji temperaturi mejnega sloja T_{sr} , vrednost η_s pa pri temperaturi stene T_s . Hitrostni profil je zaradi segrevanja oziroma ohlajanja tekočine nekoliko drugačen, kot bi bil pri izotermnem pretakanju, saj je viskoznost v mejnem sloju odvisna od temperature. Npr. pri ogrevanju se viskoznost tekočine ob steni zniža in hitrost proti osi cevi hitreje narašča.

Ta vpliv je upoštevan s faktorjem $\left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14}$.

Za cevi, ki niso okrogle, je uporaba navedenih enačb za laminarni tok z vpeljavo ekvivalentnega premera cevi nezanesljiva. Pri popolnoma razvitem hitrostnem in temperaturnem profilu so vrednosti Nu za pravokotni presek cevi podane v tabeli 3.5 in za obročasti presek cevi v tabeli 3.6.

Tab. 3.5: Nu pri laminarnem toku s popolnoma razvitim hitrostnim in temperaturnim profilom ($L > L_v$ in $L > L_T$) v ceveh pravokotnih presekov axb [1]

b/a	Nu ($q_s = \text{konst.}$)	Nu ($T_s = \text{konst.}$)
1,0	3,61	2,89
1,43	3,73	3,08
2,0	4,12	3,39
3,0	4,79	3,96
4,0	5,33	4,44
8,0	6,49	5,60
∞	8,23	7,54

Tab. 3.6: Nu pri laminarnem toku s popolnoma razvitim hitrostnim in temperaturnim profilom ($L > L_v$ in $L > L_T$) v ceveh z obročastim presekom ($D_n =$ zunanji premer notranje cevi, D_z notranji premer zunanje cevi; $\text{Nu}_n = \text{Nu}$ ob zunanji površini notranje cevi, $\text{Nu}_z = \text{Nu}$ ob notranji površini zunanje cevi) Ena površina je izolirana, druga pa ima konstantno temperaturo. [1]

D_n/D_z	Nu_n	Nu_z
0	-	3,66
0,05	17,46	4,06
0,10	11,56	4,11
0,25	7,37	4,23
0,50	5,74	4,43
1,00	4,86	4,86

3.2.2 Turbulentni tok v cevi

V večini industrijskih primerov je pretakanje tekočine v cevi turbulentno. Vstopna dolžina L_v je v območju:

$$10 \leq \left(\frac{L_v}{D} \right)_{tur} \leq 60 \quad (3.29)$$

in je v primerjavi s praktičnimi dolžinami cevi kratko.

Za popolnoma razvit turbulentni tok lahko ob majhnih do zmernih vrednostih $T_s - T_f$ toplotno prestopnost ocenimo z *Dittus-Boelter-jevo zvezo*:

$$\text{Nu}_D = 0,023 \text{Re}_D^{4/5} \text{Pr}^n \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} \quad \begin{array}{l} L > L_v \\ \text{Re}_D > 10^4 \\ 0,7 < \text{Pr} < 160 \end{array} \quad (3.30)$$

Kjer je pri ogrevanju tekočine ($T_f < T_s$) parameter $n = 0,4$ in

pri ohlajanju tekočine ($T_f > T_s$) parameter $n = 0,3$.

Za oceno toplotne prestopnosti v *vstopnem območju* ($L < L_v$) se desno stran izraza (3.30) pomnoži s faktorjem $\left[1 + \left(\frac{D}{L} \right)^{0,7} \right]$.

Če je cev *zavita* lahko ocenimo toplotno prestopnost z množenjem desne strani izraza (3.30) s faktorjem $\left(1 + 3,5 \frac{D}{d} \right)$, kjer je d premer spirale.

Pri *obročastem preseku* se lahko ovrednoti toplotna prestopnost na notranji strani zunanje cevi z izrazom (3.30) in upoštevanjem ekvivalentnega premera (3.2b);

za ovrednotenje toplotne prestopnosti na zunanji strani notranje cevi pa je veljavna enačba:

$$\text{Nu}_{D_e} = 0,02 \text{Re}_{D_e}^{4/5} \text{Pr}^{1/3} \left(\frac{D_n}{D_z} \right)^{0,53} \quad (3.31)$$

Za popolnoma razvit turbulentni tok ob velikih $T_s - T_f$ velja *Sieder-Tate-jeva zveza*:

$$\text{Nu}_D = 0,027 \text{Re}_D^{4/5} \text{Pr}^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} \quad \begin{array}{l} L > L_v \\ \text{Re}_D > 10^4 \\ 0,7 < \text{Pr} < 16700 \end{array} \quad (3.32)$$

Za tekoče kovine, ki imajo Pr med $3 \cdot 10^{-3}$ in $5 \cdot 10^{-2}$, podane enačbe (3.30) do (3.32) ne veljajo. Za popolnoma razvit turbulentni tok sta v teh primerih uporabni *Skupinski-jeva zveza*

$$\text{Nu}_D = 4,82 + 0,0185(\text{Re}_D \text{Pr})^{0,827}$$

$$\begin{aligned} L > L_v, q_s = \text{konst.} \\ 3,6 \cdot 10^3 < \text{Re}_D < 9 \cdot 10^5 \\ 10^2 < \text{Re}_D \text{Pr} < 10^4 \end{aligned} \quad (3.33)$$

in *Seban – Shimazaki-jeva zveza*

$$\text{Nu}_D = 5,0 + 0,025(\text{Re}_D \text{Pr})^{0,8}$$

$$\begin{aligned} L > L_v, T_s = \text{konst.} \\ \text{Re}_D \text{Pr} > 100 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Za prehodno območje med laminarnim in turbulentnim tokom je Hausen predlagal sledečo zvezo:

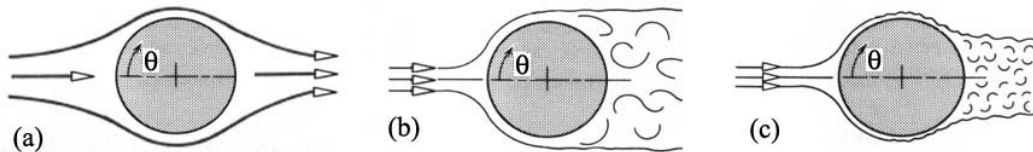
$$\text{Nu}_D = 0,116(\text{Re}_D^{2/3} - 125)\text{Pr}^{1/3} \left[1 + \left(\frac{D}{L} \right)^{2/3} \right] \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14}$$

$$2100 < \text{Re}_D < 10^4 \quad (3.35)$$

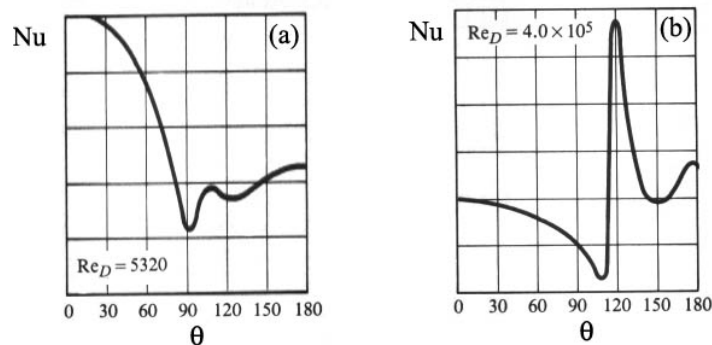
3.3 Prisilna konvekcija v zunanjem toku

3.3.1 Tok tekočine prečno na cev

V praksi je pogosto potrebno določiti toplotno prestopnost v tekočini (kapljevini oz. plinu), ki se pretaka prečno čez okrogle cevi, vendar je določitev zapletena, ker za cevmi pride do ločitve toka tekočine. Oblika toka za cevjo je močno odvisna od hitrosti toka tekočine na cev (slika 3.9). Na sredini sprednje strani cevi je t.i. zastojna točka, kjer je tlak tekočine največji. Pri zelo počasnem pretakanju se ob celotni površini cevi tvori laminarna mejna plast, kot prikazuje slika 3.9a. Že pri $Re_D = 5$ se za cevjo tvorijo vrtinci in tok se loči. Če je $Re_D < 2 \cdot 10^5$, je režim v mejni plasti laminaren in kot ločitve je $\theta \approx 80^\circ$ (sl. 3.9b). Če je $Re_D \geq 2 \cdot 10^5$, je režim v mejni plasti turbulenten in ločitev je pri $\theta \approx 140^\circ$ (sl. 3.9c). Toplotna prestopnost se s kotom θ spreminja. V laminarni mejni plasti je največja v zastojni točki ($\theta = 0^\circ$), v turbulentni mejni plasti pa je največja blizu točke ločitve, kot je razvidno iz diagrama na sliki 3.10.



Sl. 3.9: Shema toka tekočine pravokotno na okroglo cev



Sl. 3.10: Porazdelitev toplotne prestopnosti ob površini cevi [4]

Povprečno vrednost Nu je empirično določil *Hilpert* z empirično zvezo (3.36), katere vrednosti parametrov C in m so podane v tabeli 3.7.

$$\boxed{Nu_D = C Re_D^m Pr^{1/3}} \quad (2.36)$$

Tab. 3.7: Vrednosti C in m v enačbi (3.36) za tok tekočine pravokotno na okroglo cev [1]

Re_D	C	m
0,4 ÷ 4	0,989	0,330
4 ÷ 40	0,911	0,385
40 ÷ 4000	0,683	0,466
4000 ÷ 40 000	0,193	0,618
40 000 ÷ 400 000	0,027	0,805

Zhukauskas je postavil zvezo (3.37), ki upošteva spreminjanje fizikalnih parametrov v mejnem sloju. Pr_s je računani pri temperaturi stene cevi. Pri $Pr \leq 10$ je $n = 0,37$ in pri $Pr > 10$ je $n = 0,36$. Vrednosti C in m so podane v tabeli 3.8.

$$\boxed{Nu_D = C Re_D^m Pr^n \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)^{1/4}} \quad \begin{array}{l} 0,7 < Pr < 500 \\ 1 < Re_D < 10^6 \end{array} \quad (3.37)$$

Tab. 3.8: Vrednosti C in m v enačbi (3.37) za tok tekočine pravokotno na okroglo cev [1]

Re_D	C	m
1 ÷ 40	0,75	0,4
40 ÷ 1000	0,51	0,5
1000 ÷ $2 \cdot 10^5$	0,26	0,6
$2 \cdot 10^5$ ÷ 10^6	0,076	0,7

Churchill in Bernstein sta za široko območje $Re_D Pr > 0,2$ predlagala enojno zvezo (3.38).

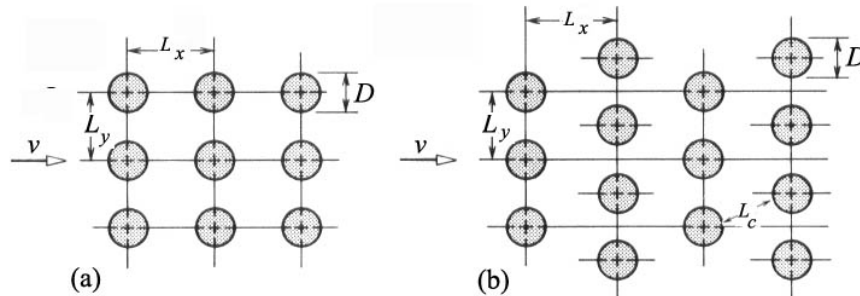
Nakai in Okazaki [4] sta za območje $Re_D Pr \leq 0,2$ predlagala zvezo (3.39).

$$\boxed{Nu_D = 0,3 + \frac{0,62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + (0,4/Pr)^{2/3} \right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{282000} \right)^{5/8} \right]^{4/5}} \quad Re_D Pr > 0,2 \quad (3.38)$$

$$\boxed{Nu_D = \frac{1}{0,8237 - \ln \sqrt{Re_D Pr}}} \quad Re_D Pr \leq 0,2 \quad (3.39)$$

3.3.2 Tok tekočine na snop cevi

Pri mnogih toplotnih prenosnikih je tok tekočine pravokoten na snop cevi. Te so lahko v pravokotnem (slika 3.11 a) ali šahovskem razporedu (slika 3.11 b).



Sl. 3.11: Tok tekočine pravokotno na snop cevi: (a) pravokotni razpored
(b) šahovski razpored

Pri šahovskem razporedu je mešanje intenzivnejše in je zato do 25% boljši prestop toplote kot pri pravokotnem razporedu. Intenzivnost turbulence raste s številom cevi, zato z njim raste tudi toplotna prestopnost. Velja *Grimison-ova zveza* (3.39a), podobno kot za eno cev, le da so empirični parametri odvisni od razporeda, razmika in števila cevi. Tabela 3.9 podaja vrednosti teh parametrov za snop cevi z več kot 10-timi cevmi v zaporedju. V primerih manjšega števila cevi v zaporedju je potrebno desno stran izraza (3.39a) pomnožiti s korekcijskim faktorjem K , podanim v tabeli 3.10.

$$\text{Nu}_D = C \cdot K \cdot \text{Re}_D^m \text{Pr}^{1/3} \quad (3.39a)$$

Tab.3.9: Vrednosti C in m v enačbi (3.36a) za snop cevi z več kot 10-timi cevmi v zaporedju [1]

L_x/D	L_y/D							
	1,25		1,5		2,0		3,0	
	C	m	C	m	C	m	C	m
pravokotni								
1,25	0,393	0,592	0,311	0,608	0,113	0,704	0,072	0,752
1,50	0,415	0,586	0,283	0,620	0,114	0,702	0,077	0,744
2,00	0,472	0,570	0,338	0,602	0,259	0,632	0,224	0,648
3,00	0,328	0,601	0,403	0,584	0,423	0,581	0,323	0,608
šahovski								
0,600	-	-	-	-	-	-	0,241	0,636
0,900	-	-	-	-	0,504	0,571	0,453	0,581
1,000	-	-	0,562	0,558	-	-	-	-
1,125	-	-	-	-	0,540	0,565	0,585	0,560
1,250	0,585	0,556	0,571	0,554	0,586	0,556	0,590	0,562
1,500	0,510	0,568	0,520	0,562	0,511	0,568	0,551	0,568
2,000	0,457	0,572	0,470	0,568	0,545	0,556	0,507	0,570
3,000	0,350	0,592	0,402	0,580	0,497	0,562	0,484	0,574

Tab. 3.10: Korekcijski faktor K v enačbi (3.39a) za snop cevi z N cevmi v zaporedju [1]

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
pravokotni	0,64	0,80	0,87	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	0,99
šahovski	0,68	0,75	0,83	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99

Re_D je računano z zunanjim premerom cevi in maksimalno hitrostjo pretoka tekočine med cevmi, v_{max} . Hitrost je največja v ožini med cevema. Iz vrednosti v vstopajoče tekočine, ki priteka na presek $L_z \cdot L_y$, se v ožini poveča na hitrost v_{max} . Pri *pravokotnem razporedu* je presek te ožine $L_z(L_y - D)$, tako je:

$$v_{max} = \frac{vL_y \cdot L_z}{(L_y - D) \cdot L_z} = \frac{vL_y}{L_y - D} \quad (3.40a)$$

Pri *šahovskem razporedu* je lahko najožji presek $L_z(L_y - D)$ in je maksimalna hitrost določena

z izrazom (3.40a) ali pa je najožji presek $L_z(L_c - D)$; $L_c = \sqrt{L_x^2 + \left(\frac{L_y}{2}\right)^2}$ in je maksimalna hitrost določena izrazom (3.40b).

$$v_{max} = \frac{vL_y \cdot L_z}{2(L_c - D) \cdot L_z} = \frac{vL_y}{2(L_c - D)} \quad (3.40b)$$

Zhukauskas je podobno kot za eno cev postavil zvezo (3.40c) za snop cevi z upošteva spreminjanjem spreminjanja fizikalnih lastnosti tekočine v mejnem sloju. Vrednosti C in m podaja tabela 3.11 za zaporedja več kot 20-ih cevi, tabela 3.12 pa vrednosti K za zaporedja z manj kot 20-imi cevmi.

$$\boxed{Nu_D = C \cdot K \cdot Re_D^m \Pr^{0,36} \left(\frac{\Pr}{\Pr_s}\right)^{1/4}} \quad \begin{matrix} 0,7 < \Pr < 500 \\ 10^3 < Re_D < 2 \cdot 10^6 \end{matrix} \quad (3.40c)$$

Tab. 3.11: Vrednosti parametrov C in m v enačbi (3.40c) za snop z več kot 20-timi cevmi [1]

Re_D	razpored	C	m
10 ÷ 100	pravokotni	0,80	0,40
	šahovski	0,90	0,40
100 ÷ 1000	pravokotni	kot enojna cev	
	šahovski	kot enojna cev	
$10^3 \div 2 \cdot 10^5$	pravokotni, $L_y/L_x > 0,7^*$	0,27	0,63
	šahovski, $L_y/L_x < 2$	$0,35(L_y/L_x)^{1/5}$	0,60
	šahovski, $L_y/L_x > 2$	0,40	0,60
$2 \cdot 10^5 \div 2 \cdot 10^6$	pravokotni	0,021	0,84
	šahovski	0,022	0,84

* Pravokotni razpored z $L_y/L_x < 0,7$ je neučinkovit.

Tab. 3.12: Korekcijski faktor K v enačbi (3.37c) za snop cevi z N cevmi v zaporedju [1]

N	1	2	3	4	5	7	10	13	16
pravokotni	0,70	0,80	0,86	0,90	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99
šahovski	0,64	0,76	0,84	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99

3.3.3 Tok tekočine na kroglo

Med mnogimi empiričnimi zvezami omenimo *Whitaker-jevo*:

$$\boxed{\text{Nu}_D = 2 + [0,4 \text{Re}_D^{1/2} + 0,06 \text{Re}_D^{2/3}] \text{Pr}^{0,4} \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{1/4}}$$

$$\begin{aligned} 0,7 < \text{Pr} < 380 \\ 3,5 < \text{Re}_D < 7,6 \cdot 10^4 \\ 1,0 < \frac{\eta}{\eta_s} < 3,2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Pomembna je tudi *Ranz – Marshall-ova* zveza za padajoče kapljice v obliki kroglic:

$$\boxed{\text{Nu}_D = 2 + 0,6 \text{Re}_D^{1/2} \text{Pr}^{1/3}} \quad (3.42)$$

3.3.4 Tok tekočine ob ravni plošči

- laminarni tok $\text{Nu}_L = 0,664 \text{Re}_L^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$ $\text{Pr} > 0,5$ (3.43)

- turbulentni tok $\text{Nu}_L = 0,036 \text{Re}_L^{4/5} \text{Pr}^{1/3}$ $10^3 < \text{Re}_L \leq 2 \cdot 10^5$ (3.44)

$\text{Re}_L > 3 \cdot 10^6$

Zvezi sta izpeljani analitično. L je dolžina plošče.

3.4 Kombinirana konvekcija

Konvekcijo lahko obravnavamo kot naravno praktično pri $\text{Gr}/\text{Re}^2 \gg 1$, ko vzgonske sile prevladujejo nad vztrajnostnimi. Nasprotno lahko konvekcijo obravnavamo kot prisilno, ko velja $\text{Gr}/\text{Re}^2 \ll 1$. V prehodnem območju, kjer sta naravna in prisilna konvekcija primerljivi, se toplotna prestopnost običajno računa s sledečo zvezo:

$$\text{Nu}^n = \text{Nu}_{\text{naravna}}^n \pm \text{Nu}_{\text{prisilna}}^n \quad (3.45)$$

Odštevanje se vpelje pri nasprotnih smereh konvekcijskih tokov. Parameter n je odvisen od geometrije sistema in zavzema vrednosti od 3 do 4.

3.5 Prestop toplote pri uparevanju in kondenzaciji

V procesni industriji sta najpogostejši fazni pretvorbi uparevanje in kondenzacija.

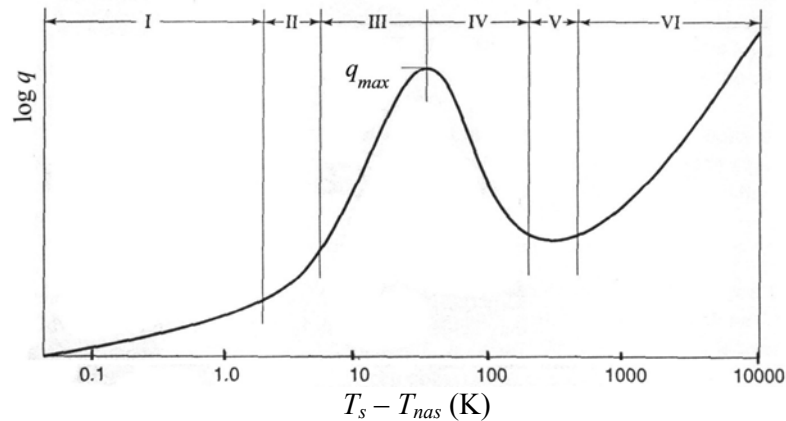
Ko para ali zmes plinov in pare med ohlajanjem doseže temperaturo nasičenja, se prične kondenzacija in toplota se sprošča pri praktično konstantni temperaturi. Prenos toplote se vrši pri razmeroma majhnih razlikah med temperaturo stene in tekočine. Obratno, ko kapljevina med ogrevanjem doseže temperaturo nasičenja, prične uparjati in toplota se veže.

Hitrost prenosa toplote lahko opišemo z osnovno enačbo (1.2), kjer pa koeficient toplotne prestopnosti zavzema bistveno večje vrednosti kot pri eno-fazni konvekciji. Zaradi zapletenosti in raznolikosti mehanizmov prenosa toplote v dvo-faznih sistemih je analiza toplotnega prestopa bolj zapletena kot v eno-faznih sistemih. V nadaljevanju bo za enostavnejše primere podanih nekaj analitičnih in empiričnih rešitev.

Uparevanje lahko poteka v bazenu, kjer je grelna telo potopljeno v mirujočo kapljevino (*bazensko uparevanje*), ali pa se kapljevina pretaka ob grelni površini plošče ali cevi (*uparevanje v toku*). Kondenzacija običajno poteka s tokom pare ob hladilni površini.

3.5.1 Bazensko uparevanje

Režim in hitrost prestopa toplote pri bazenskem uparevanju sta odvisna od raznih dejavnikov, kot so fizikalne lastnosti tekočine, površina, temperatura in geometrija grelnega sistema. Slika 3.12 podaja krivuljo gostote toplotnega toka pri uparevanju vode na vodoravni žici v odvisnosti od razlike med temperaturo grelne površine, T_s , in temperaturo nasičenja, T_{nas} .



Sl. 3.12: Bazensko uparevanje vode na vodoravni platinasti žici pri atmosferskih pogojih [3]

Glede na režim uparevanja je krivulja razdeljena na šest območij:

I) Režim *naravne konvekcije*

V tem območju je temperatura grelne površine le nekaj stopinj višja od temperature nasičenja. Ob grelni površini se kapljevina pregreva in zaradi naravne konvekcije dviguje do površja kapljevine, kjer delno upari.

Ker se prenos toplote v tem območju vrši le z naravno konvekcijo, lahko za ovrednotenje toplotne prestopnosti uporabimo enačbe v razdelku 3.1.

II) Režim *delnega mehurčnega uparivanja*

Ob porastu temperature se na grelni površini pričnejo tvoriti mehurčki pare. Ti se odtrgajo od površine in med dviganjem kondenzirajo preden dosežejo površje kapljevine.

Vrednost toplotne prestopnosti je med vrednostmi (I) in (III).

III) Režim *razvitega mehurčnega uparivanja*

Mehurčki so številnejši in večji ter dosegaajo površje kapljevine. To območje je velikega praktičnega pomena, saj so dosežane velike hitrosti prestopa toplote ob razmeroma majhnih temperaturnih razlikah.

IV) Režim *nestabilnega plastnega uparivanja*

Za vrhom krivulje nastopi prehodno območje. Na grelni površini se namreč tvori plast pare, ki se delno odceplja in dviga, za sabo pa pušča prosto površino, na kateri se lahko tvorijo mehurčki. Plast pare za prestop toplote predstavlja upor, zato gostota toplotnega toka z rastočo temperaturo upada.

V) Režim *stabilnega plastnega uparivanja*

Pri večjih temperaturnih razlikah se plast pare stabilizira.

VI) Režim *sevalnega prenosa toplote*

Pri zelo velikih temperaturah postane pomemben prenos toplote s sevanjem, ki bo opisan v poglavju 4.

Rohsenow [7] je za mehurčno uparivanje na *vodoravni žici* v bazenu razvil izraz (3.46) za gostoto toplotnega toka.

$$q = \eta_l \Delta h_{izp} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_g)}{\sigma} \right]^{1/2} \cdot \left[\frac{c_{pl}(T_s - T_{nas})}{C \Delta h_{izp} Pr_l^n} \right]^3 \quad (3.46)$$

- Parametri so:
- T_s = temperatura grelne površine (K),
 - T_{nas} = temperatura nasičenja tekočine (K),
 - g = gravitacijski pospešek = 9,81 m/s²,
 - ρ_l = masna gostota nasičene kapljevine (kg/m³), indeks – angl. liquid,
 - ρ_g = masna gostota nasičene pare (kg/m³), indeks – angl. gas,
 - η_l = dinamična viskoznost nasičene kapljevine (Ns/m²),
 - Pr_l = Prandtlovo število nasičene kapljevine (-),
 - σ = površinska napetost (N/m),
 - Δh_{izp} = latentna izparilna toplota kapljevine (J/kg) in
 - c_{pl} = specifična toplotna kapaciteta nasičene kapljevine (J/kgK).

Fizikalni parametri ρ_g , ρ_l , η_l , c_{pl} , Pr_l , Δh_{izp} se ovrednotijo pri temperaturi nasičenja.

Površinska napetost, σ , se ovrednoti pri srednji temperaturi $T_{sr} = \frac{T_s + T_{nas}}{2}$ in jo lahko za vodo v območju 100 °C do 160 °C izračunamo iz izraza [7]:

$$\log \sigma = -1,066 - 1,55 \cdot 10^{-3} T(^{\circ}C)$$

Empirična parametra C in n sta odvisna od kvalitete žice in vrste tekočine in sta podana v tabeli 3.13. Mehanska obdelava površine, npr. sintranje, ki naredi površino porozno, izboljšuje mehurčno uprevanje.

Tab. 3.13: Vrednosti C in n v enačbi (3.46) [1]

kapljevina – grelna površina		C	n
voda - baker	razbrazdan	0,0068	1,0
	poliran	0,013	1,0
voda – nerjavno jeklo	jedkano	0,013	1,0
	polirano	0,013	1,0
voda - medenina		0,006	1,0
voda - nikelj		0,006	1,0
voda - platina		0,013	1,0
n-pentan - baker	poliran	0,0154	1,7
benzen - krom		0,101	1,7
etanol - krom		0,0027	1,7

Dobro je poznati vrh krivulje (slika 3.12), ki ga imenujemo kritična točka. Če namreč temperaturna razlika $T_s - T_{nas}$ preseže kritično vrednost, je toplotni tok nižji od vrednosti, ki je potrebna za stacionarni prenos toplote, zato posledično prične temperatura grelnega sredstva naraščati. Če je žica iz materiala, ki ima tališče v tem območju temperatur, žica pregori.

Zuber [1] je analitično izpeljal izraz za maksimalno gostoto toplotnega toka:

$$q_{\max} = \frac{\pi}{24} \Delta h_{izp} \rho_g \left[\frac{\sigma g (\rho_l - \rho_g)}{\rho_g^2} \right]^{1/4} \cdot \left(1 + \frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{1/2} \quad (3.47)$$

Desni faktor v tej enačbi je praktično ena, ker je $\rho_g / \rho_l \approx 0$.

Ekspirimenti so teoretični kvocient $\frac{\pi}{24} \approx 0,131$ v (3.47) nadomestili z empirično vrednostjo 0,149 [1].

Bromley [3] je analitično in eksperimentalno proučeval plastno uprevanje v bazenu. Enačba za toplotno prestopnost (3.48) temelji na prevodu toplote skozi plast pare in je podobna enačbi za plastno kondenzacijo (3.56).

$$\alpha = C \left[\lambda_g^3 \frac{g \rho_g (\rho_l - \rho_g) \Delta h}{\eta_g L (T_s - T_{nas})} \right]^{1/4} \quad (3.48)$$

Fizikalni parametri pare $\lambda_g, \rho_g, \eta_g$ in c_{pg} so ovrednoteni pri srednji temperaturi plasti $\frac{T_s + T_{nas}}{2}$. V izrazu je ob izparilni toploti, Δh_{izp} , še upoštevana pregretnost pare, ki je bistvena pri nizkih vrednostih Δh_{izp} [3]:

$$\Delta h = \Delta h_{izp} + 0,4 c_{pg} (T_s - T_{nas}).$$

Bromley [3] je za vodoravno cev postavil koeficient $C = 0,62$, Frederking [1] za kroglo $C = 0,67$, za navpično ploščo [4] pa približno velja $C = 0,71$. V tabeli 3.14 so zbrane vrednosti C in karakteristične višine L v enačbi (3.48).

Zvezo (3.48) je Berenson [3] priredil za plastno uparjevanje na vodoravni plošči:

$$\alpha = 0,425 \left[\lambda_g^3 \frac{g \rho_g (\rho_l - \rho_g) (\Delta h_{izp} + 0,4c_{pg} (T_s - T_{nas}))}{\eta_g (T_s - T_{nas}) \sqrt{\sigma / g (\rho_l - \rho_g)}} \right]^{1/4} \quad (3.49)$$

Tab. 3.14: Vrednost C in karakteristična višina v enačbi (3.48) za plastno uparjevanje v bazenu

geometrija grelne površine	C	L
na površini vodoravne cevi	0,62	zunanjí premer cevi, D_z
na površini krogle	0,67	zunanjí premer krogle, D_z
na površini pokončne plošče	0,71	višina plošče, L
na površini vodoravne plošče	0,425	$\sqrt{\sigma / g (\rho_l - \rho_g)}$

Hsu in Westwater [3] sta oblikovala zvezo (3.50) za plastno uparjevanje na pokončni cevi, kjer je \dot{m}_g masni tok pare v kg/s na zgornjem koncu cevi.

$$\alpha = 0,0020 \text{Re}_g^{0,6} \left[\lambda_g^3 \frac{g \rho_g (\rho_l - \rho_g)}{\eta_g^2} \right]^{1/3}; \quad \text{Re}_g = \frac{4\dot{m}_g}{\pi D \eta_g} \quad (3.50)$$

Prenos toplote pri plastnem uparjevanju na pokončnih ceveh je hitrejši kot na vodoravnih ceveh, če ostali pogoji ostanejo enaki. Vendar pa morami biti pri pokončnih površinah previdni, ker lahko pride do močnih lokalnih tokov tekočine in enačb (3.50) ni več uporabna

3.5.2 Uparjevanje v toku

Ko je prisoten tok kapljevine, je prenos toplote hitrejši, kot bi bil v mirujoči kapljevini pri isti razliki temperatur $T_s - T_{nas}$. Za pretakanje kapljevine prečno na vodoravno cev veljajo sledeči empirični zvezi za gostoto toplotnega toka [7]:

- mehurčno uparjevanje $q = 2,257 (T_s - T_{nas})^{3,86}$ $2 \cdot 10^5 \text{ Pa} < p < 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ (3.51)

$q = 1,315 p^{4/3} (T_s - T_{nas})^3$ $7 \cdot 10^5 \text{ Pa} < p < 138 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ (3.52)

Tlak p je v enačbi (3.52) izražen v enotah 10^5 Pa .

- maksimalna vrednost $q_{\max} = \frac{106,15}{D^{0,2}} \left(\frac{\rho_l v_l}{L/D} \right)^{0,85}$ $5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} < \frac{\rho_l v_l}{(L/D)^2} < 730 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$ (3.53)

$q_{\max} = \frac{958,9}{D^{0,2}} \frac{(\rho_l v_l)^{0,5}}{(L/D)^{0,15}}$ $730 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} < \frac{\rho_l v_l}{(L/D)^2} < 5 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$ (3.54)

Zunanji premer cevi je označen z D in dolžina cevi z L . Hitrost v_l je hitrost toka kapljevine prečno na cev. Enačbi za maksimalno vrednost sta veljavni v območju: $1 \cdot 10^5 \text{ Pa} < p < 7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$$0,03 \frac{\text{m}}{\text{s}} < v < 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$25 < \frac{L}{D} < 250$$

$$1,3 \text{ mm} < D < 4,8 \text{ mm}$$

- plastno uparevanje lahko pri majhnih tokovih kapljevine ($v_l < \sqrt{gD}$) ovrednotimo z enačbo za bazensko plastno uparevanje (3.48), pri večjih pretokih pa je veljavna zveza (3.55).

$$\alpha = 2,7 \left[v_l \frac{\lambda_g \rho_g (\Delta h_{izp} + 0,4 c_{pg} (T_s - T_{nas}))}{(T_s - T_{nas}) D} \right]^{1/2} \quad v_l > 2 \sqrt{gD} \quad (3.55)$$

Fizikalni parametri pare λ_g , ρ_g in c_{pg} so ovrednoteni pri srednji temperaturi plasti $\frac{T_s + T_{nas}}{2}$ in tlaku p .

3.5.3 Plastna kondenzacija

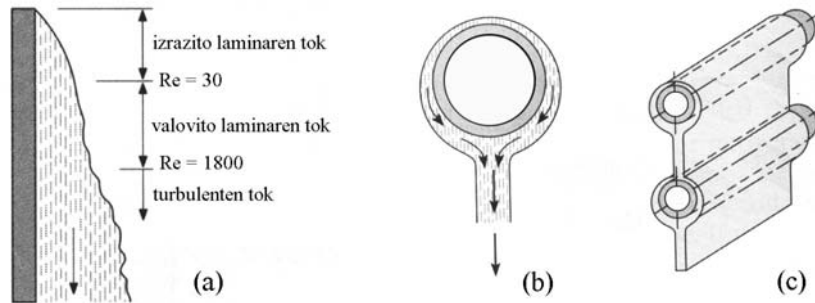
Ko se para ohladi na temperaturo nasičenja, T_{nas} , se prične tvoriti kondenzat. Kondenzacija v prvi stopnji poteka s tvorbo kapljic (*kapljična kondenzacija*), pri večjih temperaturnih razlikah $T_{nas} - T_s$ pa se na hladilni površini tvori plast kondenzata, ki odteka navzdol (*plastna kondenzacija*). Pri plastni kondenzaciji se fazna pretvorba vrši na površini plasti kondenzata, ki za prenos toplote predstavlja dodaten upor. Pri kapljični kondenzaciji nastajajo kapljice neposredno na hladilni površini, zato je toplotna prestopnost štiri do dvajsetkrat večja kot pri plastni kondenzaciji. Čeprav je kapljična kondenzacija iz tega vidika zaželena, jo je težko vzdrževati, saj se sčasoma vsa površina omoči. Zaradi tega se toplotni prenosniki večinoma dimenzionirajo glede na plastno kondenzacijo.

Režim v plasti kondenzata je lahko *laminaren* ali *turbulenten*. Kriterij, po katerem ugotavljamo režim, je Reynoldsovo število kondenzata. V izrazu (3.1) se hidravlični premer računa po definiciji (3.2) kot $D_h = \frac{4A_l}{P}$, kjer sta P omočen obseg hladilne površine in A_l prečni presek plasti kondenzata. Slednjega lahko določimo iz znanega masnega toka kondenzata $\dot{m}_l = \rho_l v_l A_l$.

Izraz za izračun Reynoldsovega števila je tako: $Re_l = \frac{\rho_l v_l D_h}{\eta_l} = \frac{4\dot{m}_l}{\eta_l P}$.

V primeru pokončne stene je P širina stene; v primeru pokončne cevi s premerom D je $P = \pi D$ in v primeru vodoravne cevi z dolžino L je $P = 2L$.

Pri $Re_l < 30$ je režim izrazito laminaren, pri Re_l nad 30 površina plasti postane valovita. Pri $Re_l > 1800$ je režim turbulenten. Slika 3.13a prikazuje prehod laminarnega režima odtekanja kondenzata na vrhnjem področju stene v turbulentni režim na spodnjem področju stene.



Sl. 3.13: Plast kondenzata: (a) ob navpični steni, (b) na vodoravni cevi in (c) na nizu cevi [1]

Toplotno prestopnost pri kondenzaciji z laminarno plastjo je *Nusselt* [3] izpeljal analitično z upoštevanjem prevoda toplote skozi plast kondenzata ob postavki, da je porazdelitev temperature prečno na plast linearna, in upoštevanjem toka kondenzata navzdol:

$$\alpha = C \left[\lambda_l^3 \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_g) \Delta h}{\eta_l L (T_{nas} - T_s)} \right]^{1/4} = C^{4/3} \left[\lambda_l^3 \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_g)}{\eta_l \frac{\dot{m}_l}{P}} \right]^{1/3} \quad (3.56)$$

V primeru, da poznamo masni tok odtekanja kondenzata \dot{m}_l , lahko toplotno prestopnost izračunamo z desnim izrazom v enačbi (3.56). Ta je izpeljan iz levega izraza z upoštevanjem toplotne bilance

$$\phi = \dot{m}_l \Delta h = \alpha P L (T_{nas} - T_s).$$

Latentna izparilna toplota je povečana za toploto podhladitve kondenzata. Ob predpostavki linearne porazdelitve temperature velja teoretična zveza:

$$\Delta h = \Delta h_{izp} + \frac{3}{8} c_{pl} (T_{nas} - T_s).$$

Rohsenov [1] je zvezo izboljšal:

$$\Delta h = \Delta h_{izp} + 0,68 c_{pl} (T_{nas} - T_s).$$

Nadalje sta *Sadasivan* in *Liendhard* [4] pokazala rahlo odvisnost toplote od Prandtlovega števila:

$$\Delta h = \Delta h_{izp} + \left(0,683 - \frac{0,228}{Pr_l} \right) c_{pl} (T_{nas} - T_s).$$

Fizikalni parametri kondenzata $\lambda_l, \rho_l, \eta_l$ in c_{pl} so ovrednoteni pri srednji temperaturi plasti kondenzata $T_{sr} = \frac{T_s + T_{nas}}{2}$.

V tabeli 3.15 so zbrane vrednosti C in karakteristične višine L za razne primere.

Tab. 3.15: Vrednosti C in karakteristična višina v enačbi (3.56) za plastno kondenzacijo

geometrija hladilne površine	C	L
pokončna plošča	0,943	višina plošče L
pokončna cev – notranja in zunanja stran		dolžina cevi L
vodoravna cev – zunanja stran	0,728	zunanji premer cevi D_z
navpični niz n -tih vodoravnih cevi		nD_z
vodoravna cev – notranja stran, pri majhni hitrosti pare	0,555	notranji premer cevi D_n

Za *pokončno ploščo* in kondenzacijo na notranji ali zunanji strani *pokončne cevi*, ki ima premer bistveno večji od debeline plasti kondenzata parameter C v Nusseltovem izrazu (3.56) zavzema teoretično vrednost 0,943.

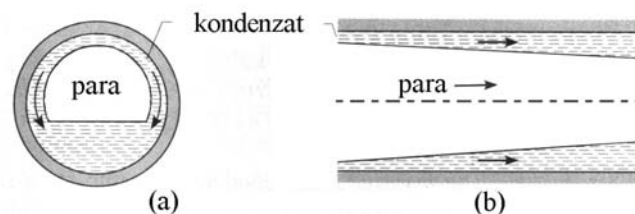
McAdams [6] je na osnovi eksperimentov predlagal 20% zvišanje vrednosti C zaradi valovitosti površine plasti. Empirična vrednost C je 1,13, ko je $Re_t > 30$.

V primeru *nagnjene plošče* (za kot θ glede na vodoravnico) je potrebno v enačbi (3.56) gravitacijski pospešek pomnožiti s faktorjem $\sin\theta$, saj kondenzat odteka pod vplivom toliko manjše sile teže. Za nagnjeno cev pa enačba (3.56) z navedeno korekturo gravitacijskega pospeška ni veljavna, ker kondenzat obliva steno tudi v prečni smeri.

Po Nusseltovi analizi laminarne kondenzacije na površini *vodoravne cevi* (sl.3.13b) teoretični koeficient v enačbi (3.56) znaša $C = 0,728$ [4]. Karakteristična višina je v tem primeru zunanji premer cevi, D_z .

V vodoravno ležečih kondenzatorjih so cevi običajno razporejene ena nad drugo. Kondenzat z zgornjih cevi zaliva spodnje cevi (sl. 3.13c), zato je plast kondenzata na spodnjih ceveh debelejša in upor toplotne prestopnosti večji. Povprečno toplotno prestopnost lahko izračunamo po enačbi (2.56) s $C = 0,728$ z vpeljavo karakteristične dolžine nD_z , kjer je n število cevi v navpičnem nizu [4].

Kadar se kondenzacija vrši v *notranjosti vodoravnih cevi*, je režim pretakanja v cevi močno odvisen od hitrosti pretoka pare. Slika 3.14 prikazuje izrazita primera.



Sl. 3.14: Plast kondenzata v vodoravni cevi: (a) pri majhni in (b) pri veliki hitrosti pare [1]

Pri majhni hitrosti pare kondenzat odteka na dno cevi (sl. 3.14a). To se zgodi, ko je vstopna vrednost Reynoldsovega števila pare

$$Re_g = \frac{\rho_g v_g D_n}{\eta_g} = \frac{4\dot{m}_g}{\eta_g \pi D_n} < 3500.$$

V tem območju pretočnih hitrosti je *Chato* [1] predlagal uporabo enačbe (3.56) s koeficientom $C = 0,555$ in toploto $\Delta h = \Delta h_{izp} + \frac{3}{8} c_{pl} (T_{nas} - T_s)$.

Pri večjih pretočnih hitrostih je razporeditev kondenzata prstanasta (sl. 3.14b). *Akers, Deans* in *Krosser* [6] so postavili empirično zvezo (3.57), ki se v priporočanem območju Re_g in Re_l ujema z eksperimentalnimi rezultati do 50%.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\alpha D_n}{\lambda_l} &= 0,026 Pr_l^{1/3} Re_m^{0,8}; \\ Re_m &= Re_l + Re_g \frac{\eta_g}{\eta_l} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/2} \end{aligned}} \quad \begin{aligned} Re_g &= \frac{4\dot{m}_g}{\eta_g \pi D_n} > 20\,000 \\ Re_l &= \frac{4\dot{m}_l}{\eta_l \pi D_n} > 5\,000 \end{aligned} \quad (3.57)$$

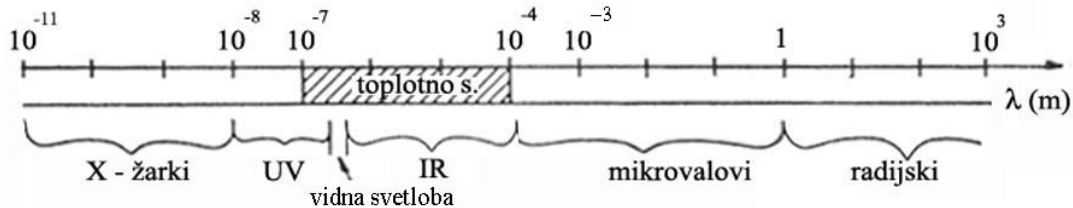
Kondenzacija v turbulentni plasti je močno odvisna od Prandtlovega števila. Za *pokončno steno* je *Kirkbide* [3] postavil sledečo empirično zvezo:

$$\boxed{\alpha = 0,045 \left[\frac{\lambda_l^3 g \rho_l [\rho_l - \rho_g]}{\eta_l^2} \right]^{1/3} \cdot \frac{Re_l Pr_l^{1/3}}{Re_l^{4/5} + 5,76 Pr_l^{1/3} - 364}} \quad Re_l > 1800 \quad (3.58)$$

4 SEVANJE TOPLOTE

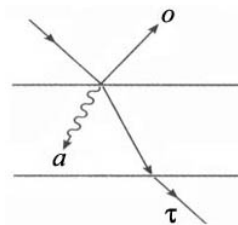
Vsaka snov neprestano seva elektromagnetno valovanje. Večji del valovnih dolžin, λ , je prikazan na sliki 4.1. Spekter (t.j. intenziteta sevanja pri posameznih valovnih dolžinah) je odvisen od atomske zgradbe in od temperature snovi. Plini imajo črtaste spektre, ki izvirajo od preskokov elektronov v izoliranih atomih. Tekočine in trdne snovi pa imajo zvezne spektre. Pri njih namreč atomi zaradi majhnih medsebojnih razdalj močno vplivajo drug na drugega in preidejo nezvezni energijski nivoji atoma v zvezni energijski spekter.

Elektromagnetno valovanje v območju valovnih dolžin 0,1 do 100 μm imenujemo toplotno sevanje. Torej toplotno sevanje obsega del ultravijolične svetlobe, vidno in infrardečo svetlobo. Z rastočo temperaturo snovi se krajša valovna dolžina toplotnega sevanja. V tehnično pomembnih območjih temperatur je toplotno sevanje v območju IR.



Sl. 4.1: Elektromagnetno sevanje

Ko sevanje vpada na površino telesa, se to v določenih deležih odbije, prevede in absorbira (slika 4.2). Deleži so odvisni od kvalitete površine, vrste in temperature snovi.



Sl. 4.2: Odboj, prevod in absorpcija vpadnega žarka

Delež odbite energije imenujemo odbojnost, delež prenesene prepustnost in delež absorbirane absorptivnost:

$$\begin{aligned}
 \text{- odbojnost} & \quad o = \frac{\text{odbita energija}}{\text{vpadna energija}} \\
 \text{- prepustnost} & \quad \tau = \frac{\text{prenesena energija}}{\text{vpadna energija}} \\
 \text{- absorptivnost} & \quad a = \frac{\text{absorbirana energija}}{\text{vpadna energija}}
 \end{aligned}$$

Za porazdelitev celotne vpadne energije velja: $\tau + o + a = 1$

Večina teles je neprozornih in ne prepušča sevanja ($\tau = 0$): $o + a = 1$

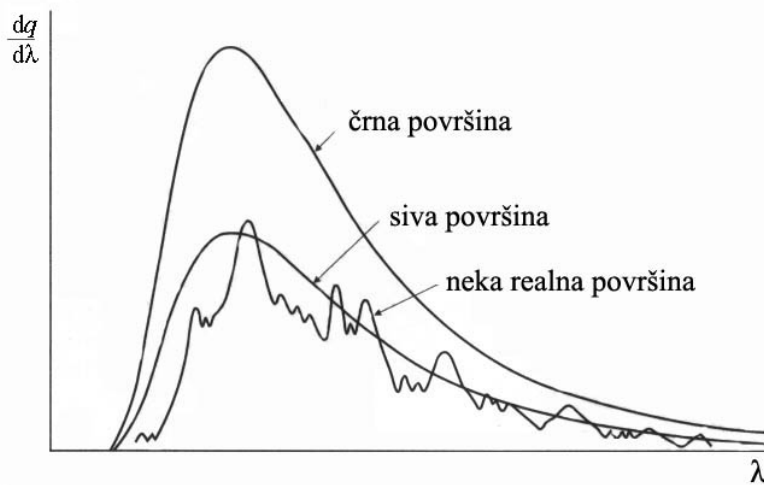
Črna telesa imenujemo tista telesa, ki vso sevanje absorbirajo: $a = 1$.

Zaradi absorpcije sevanja se lahko telo segreva. Hkrati segreto telo toploto seva. Črna telesa sevajo z največjo jakostjo, druga telesa pa sevajo le del te energije. Delež imenujemo emisivnost.

$$\text{- emisivnost} \quad \varepsilon = \frac{\text{oddana energija}}{\text{oddana energija, če bi bilo telo črno}}$$

Realna telesa imajo emisivnost odvisno od valovne dolžine. Emisivnost pri določeni valovni dolžini imenujemo monokromatska emisivnost, ε_λ .

Sivo telo imenujemo tisto telo, ki ima emisivnost konstantno pri vseh valovnih dolžinah ($\varepsilon_\lambda = \text{konst.}$). Diagram na sliki 4.3 prikazuje porazdelitev gostote toka sevanja na enoto valovne dolžine: za črno, sivo in neko realno površino. Krivulja za sivo površino je za faktor ε nižja od krivulje za črno površino. Pri realnih površinah obstajajo posamezna območja z izrazitejšo vrednostjo ε_λ .



Sl. 4.3: Porazdelitev gostote toplotnega toka v odvisnosti od valovne dolžine pri dani temperaturi

Z rastočo temperaturo raste jakost sevanja, vrh krivulje pa se pomika v smeri nižjih valovnih dolžin. Analitični izraz te porazdelitve je:

$$\frac{dq}{d\lambda} = \frac{c_1 \varepsilon_\lambda}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]}$$

Parametra c_1 in c_2 sta znani konstanti. Z integriranjem tega izraza po valovni dolžini pri konstantni temperaturi (ploščina lika pod krivuljo na sliki 4.3) dobimo celotni toplotni tok sevanja. Za črne in sive površine se lahko ε iz integrala izpostavi, saj je parameter ε

konstanten glede na λ , in integriranje se izvede analitično: $q = \int_{\lambda \rightarrow 0}^{\infty} \frac{c_1 \cdot d\lambda}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]} = \varepsilon \sigma T^4$

Zveza se imenuje *Stefan – Boltzmann-ov zakon*:

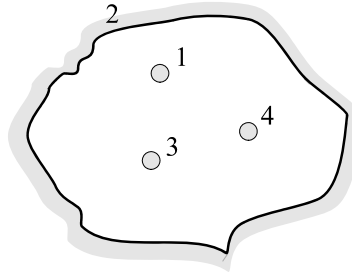
$$\phi_{1 \rightarrow} = \sigma A_1 \varepsilon_1 T_1^4 \quad (4.1)$$

$\phi_{1 \rightarrow}$ = toplotni tok zaradi emisije telesa 1

σ = Stefan – Boltzmann-ova konstanta = $5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$

- $A_1 =$ površina telesa 1
 $\varepsilon_1 =$ emisivnost površine telesa 1
 $T_1 =$ temperatura površine telesa 1

Tok emitirane energije je torej odvisen od kvalitete, velikosti in temperature površine ter je neodvisen od temperature okolice, saj se sevanje kot elektromagnetno valovanje širi tudi v praznem prostoru.



SI.4.4: Majhna telesa obkrožena z okolico

Slika 4.4 prikazuje majhno telo 1, ki je obdano z okolico 2 – zaključeno, črno površino. Površina 2 seva z gostoto toka σT_2^4 . Del tega toka pade na telo 1 in je $A_1 \sigma T_2^4$. Ob predpostavki, da je telo 1 sivo, lahko zanj zapišemo absorbirani tok: $\phi_{1 \leftarrow 2} = a_1 A_1 \sigma T_2^4$. Toplotni tok sevanja med telesom in okolico je razlika med emitiranim in absorbiranim tokom:

$$\phi_{1,2} = \sigma A_1 (\varepsilon_1 T_1^4 - a_1 T_2^4) \quad (4.1a)$$

V termodinamskem ravnotežju med telesom in okolico ($T_1 = T_2$) je tok izmenjane energije $\phi_{1,2} = 0$ in iz enačbe (4.1a) sledi: $\varepsilon_1 = a_1$. Podobno se lahko pokaže tudi za realna telesa pri posameznih valovnih dolžinah: $\varepsilon_{\lambda 1} = a_{\lambda 1}$. Enakost emisivnosti in absorptivnosti v izotermnih pogojih se imenuje *Kirchoff-ov zakon*.

Pri sivih telesih je absorptivnost neodvisna od spektralne porazdelitve vpadnega sevanja in je tudi enaka emisivnosti telesa, čeprav temperatura telesa ni enaka temperaturi okolice. Tako enakost $\varepsilon_2 = a_2$ velja za vsako sivo telo in enačba (4.1a) se poenostavi:

$$\phi_{1,2} = \sigma A_1 \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (4.1b)$$

Tabela 1.3 podaja vrednosti emisivnosti za nekatere površine ob predpostavki, da so optično sive. Iz tabele je razvidno, da z rastočo temperaturo emisivnost raste ali pada.

Absorptivnost in emisivnost sta pri trdnih snoveh zvezna funkcija valovne dolžine, nasprotno imajo plini bistvene vrednosti le v posameznih ozkih pasovih valovnih dolžin. V teh pasovih sta emisivnost in absorptivnost enaki.

Eno-atomarni in dvo-atomarni plini ter zrak imajo v tehnično pomembnem območju tlaka in temperature emisijo in absorpcijo zanemarljivo. Sevanje je pomembno pri plinih z asimetričnimi molekulami, kot so H_2O , SO_2 , CO_2 , CO in NH_3 . Ker je v zraku delež CO_2 in vodne pare majhen, lahko sevanje zraka zanemarimo. Pri aerosolih pa je sevanje bistveno

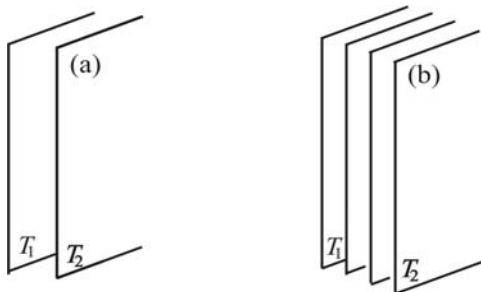
zaradi prisotnih kapljic in prahu. Pri teh delcih je ob emisiji in absorpciji potrebno upoštevati še odboj sevanja – t.i. sipanje.

Medtem ko je sevanje trdnih snovi površinski pojav, je pri tekočinah problem prostorninski in s tem mnogo bolj zapleten.

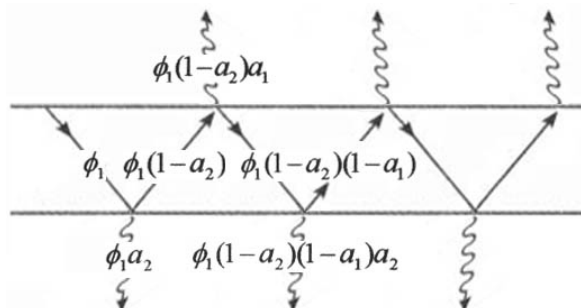
Pri opazovanju izmenjave sevanja med trdnima površinama bomo predpostavili, da je tekočina med njima popolnoma prepustna. Upoštevati je potrebno, da sevata obe površini in da se vpadli žarki tudi odbijajo. Npr. iz prve površine emitirani tok delno pade na drugo površino, kjer se delno absorbira, preostali del pa se odbije in delno pade na prvo površino, kjer se spet delno odbije itd. Enako se dogaja s tokom, ki ga emitira druga površina. Deleži so odvisni od vrste, oblike in orientiranosti površin. Izračuni so zapleteni, vendar se v nekaterih primerih lahko izvedejo poenostavitve.

4.1 Vzporedni plošči

Predpostavimo, da sta plošči veliki in blizu, kot prikazuje slika 4.5a. Tako lahko na robovih izgubljeno sevanje zanemarimo. Plošča 1 emitira toplotni tok po zvezi (1.3). Del tega se na plošči 2 odbije, drugi del pa absorbira. Slika 4.6 in tabela 4.1 prikazujeta količine absorbiranih in odbitih tokov. V drugi vrstici tabele so podani absorbirani in odbiti tokovi po prvem odboju na plošči 1, v tretji vrstici po drugem odboju na plošči 1, v četrti pa po n -tem odboju.



Sl.4.5: (a) vzporedni plošči in (b) vmesne plošče



Sl. 4.6:Potek absorpcij in odbojev toka,emitiranega iz plošče 1

Tab. 4.1: Potek absorpcij in odbojev toka, emitiranega iz plošče 1

absorpcija na 2	odboj na 2	absorpcija na 1	odboj na 1
$\phi_1 a_2$	$\phi_1 (1-a_2)$	$\phi_1 (1-a_2) a_1$	$\phi_1 (1-a_2) (1-a_1)$
$\phi_1 (1-a_2) (1-a_1) a_2$	$\phi_1 (1-a_2) (1-a_1) \cdot (1-a_2)$	$\phi_1 (1-a_2) (1-a_1) \cdot (1-a_2) a_1$	$\phi_1 (1-a_2)^2 (1-a_1)^2$
$\phi_1 (1-a_2)^2 (1-a_1)^2 a_2$	$\phi_1 (1-a_2)^2 (1-a_1)^2 \cdot (1-a_2)$	$\phi_1 (1-a_2)^2 (1-a_1)^2 \cdot (1-a_2) a_1$	$\phi_1 (1-a_2)^3 (1-a_1)^3$
$\phi_1 (1-a_2)^n (1-a_1)^n a_2$	$\phi_1 (1-a_2)^n (1-a_1)^n \cdot (1-a_2)$	$\phi_1 (1-a_2)^n (1-a_1)^n \cdot (1-a_2) a_1$	$\phi_1 (1-a_2)^{n+1} (1-a_1)^{n+1}$

Iz tabele lahko razberemo, da se po neskončno odbojih *absorpcija na 1 zaradi emisije 1:*

$$\phi_1 (1-a_2) a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (1-a_2)^n (1-a_1)^n = \frac{\phi_1 a_1 (1-a_2)}{1-(1-a_2)(1-a_1)}$$

Podobno kot je bil izpeljan izraz za *absorpcijo na 2 zaradi emisije 1*, bi lahko izpeljali izraz za *absorpcijo na 1 zaradi emisije 2*: $\phi_2(1-a_2)^n(1-a_1)^n a_1$ oziroma za celotno absorpcijo po neskončno odbojih:

$$\phi_2 a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (1-a_2)^n (1-a_1)^n = \frac{\phi_2 a_1}{1-(1-a_2)(1-a_1)}$$

Toplotni tok, ki zapuša površino 1, je razlika med prvotno emitiranim tokom ϕ_1 in obema absorbiranimi tokoma:

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \phi_1 - \frac{\phi_1 a_1 (1-a_2) + \phi_2 a_1}{1-(1-a_2)(1-a_1)} = \frac{a_2 \phi_1 - a_1 \phi_2}{a_2 + a_1 - a_1 a_2}$$

Za sivi površini ($a_1 = \varepsilon_1$ in $a_2 = \varepsilon_2$) izraz dobi obliko:

$$\boxed{\phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}} \quad (4.2)$$

Če je med ploščama nameščena vsaj ena *ščitna plošča*, kakor je prikazano na sliki 3.5b, se toplotni tok bistveno zniža. Pri stacionarnih razmerah so toplotni tokovi med ploščami enaki. Celotni toplotni tok med ploščama 1 in 2 je posledica dveh zaporednih procesov:

$$\text{- tok iz 1 na srednjo ploščo} \quad \phi = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_s^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_s} - 1} \Rightarrow T_1^4 - T_s^4 = \frac{\phi}{A\sigma} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_s} - 1 \right)$$

$$\text{- tok iz srednje plošče na 2} \quad \phi = \frac{A\sigma(T_s^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_s} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \Rightarrow T_s^4 - T_2^4 = \frac{\phi}{A\sigma} \left(\frac{1}{\varepsilon_s} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)$$

$$\text{S seštevanjem končnih izrazov dobimo:} \quad \phi = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \frac{2}{\varepsilon_s} - 1}$$

Skupni upor je torej vsota posameznih uporov.

Vrednost ε_s se oceni pri temperaturi T_s , ki jo ocenimo ob predpostavki $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$ iz enakosti

$$\text{tokov:} \quad T_s^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}$$

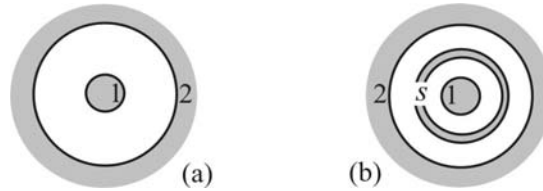
Če je med plošči 1 in 2 postavljenih N pregrad, iz vsote uporov dobimo izraz (4.3). V njem se lahko ε_s oceni pri T_s , računani po zgornji enačbi.

$$\boxed{\phi = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + N \left(\frac{2}{\varepsilon_s} - 1 \right)}} \quad (4.3)$$

Če v grobi oceni toplotnega toka za vse plošče predpostavimo enako emisivnost ($\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2 \approx \varepsilon_s \equiv \varepsilon$), potem se pri eni vmesni plošči toplotni tok razpolovi, pri N vmesnih ploščah pa zmanjša $(N+1)$ -krat.

4.2 Koncentrično obkroženo telo

Če je telo obkroženo z zaključeno površino, kot prikazuje slika 4.7a, ves toplotni tok, ki je emitiran s površine A_1 , pade na površino A_2 ; nasprotno pa le del toka, emitiranega in odbitega s površine A_2 , pade na površino A_1 . Enačba (4.4) velja za sosredni valjčni in krogelni površini, ki sta sivi.



Sl.4.7: (a) koncentrično obkroženo telo in (b) vmesni ščit

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (4.4)$$

Če je $A_2 \gg A_1$ ali pa je površina 2 črna okolica ($\varepsilon_2 = 1$), se enačba poenostavi v enačbo (4.1a).

Za vzporedni neskončni plošči ($A_1 = A_2$) se enačba poenostavi v enačbo (4.2).

Če je med valjčnima ali krogelnima površinama še ščitna plast (slika 4.7b), s seštevanjem upora izmenjave sevanja med površino 1 in ščitom s ter upora izmenjave sevanja med ščitom s in površino 2 dobimo enačbo (4.5).

$$\begin{aligned} \text{- tok med površino 1 in ščitom:} \quad \phi &= \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_s^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_s} \left(\frac{1}{\varepsilon_s} - 1 \right)} \Rightarrow T_1^4 - T_s^4 = \frac{\phi}{\sigma} \left(\frac{1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_s} \left(\frac{1}{\varepsilon_s} - 1 \right) \right) \\ \text{- tok med ščitom in površino 2:} \quad \phi &= \frac{A_s \sigma (T_s^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_s} + \frac{A_s}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \Rightarrow T_s^4 - T_2^4 = \frac{\phi}{\sigma} \left(\frac{1}{\varepsilon_s A_s} + \frac{1}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

S seštevanjem končnih izrazov dobimo:

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) + \frac{A_1}{A_s} \left(\frac{2}{\varepsilon_s} - 1 \right)} \quad (4.5)$$

4.3 Faktor orientiranosti

V večini praktičnih primerov sta površini orientirani tako, da prestrezata le del emitiranega toka. Ta del imenujemo faktor orientiranosti, F . Predpostavimo, da sta obe površini črni. Tok emitirane toplote s površine 1, ki ga prestreza površina 2, pišemo:

$$\phi_{2\leftarrow 1} = \sigma A_1 F_{12} T_1^4$$

in podobno za tok iz 2, prestrezan na površini 1:

$$\phi_{1\leftarrow 2} = \sigma A_2 F_{21} T_2^4$$

Če sta temperaturi obeh površin enaki ($T_1 = T_2$) in $\phi_{1\leftarrow 2} = \phi_{2\leftarrow 1}$, potem velja:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$$

Tako je tok med črnima površinama:

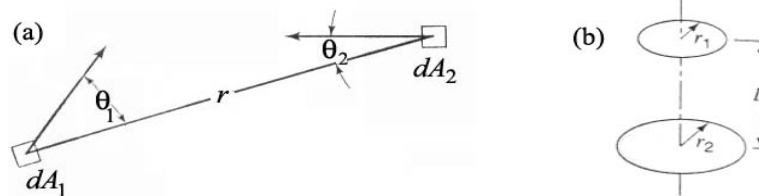
$$\phi_{12} = \sigma A_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4) \quad (4.6)$$

Če sta površini sivi, je sevalni tok med njima približno določen po sledeči zvezi:

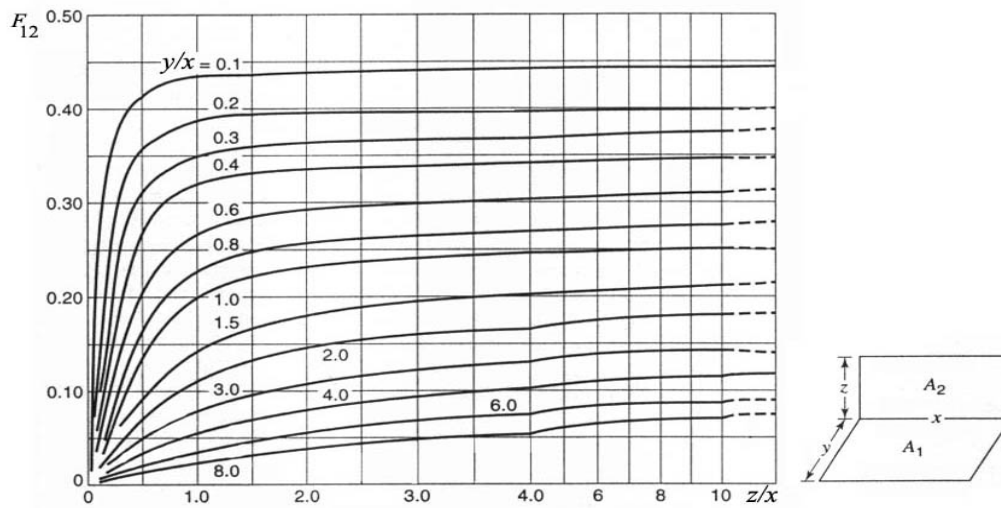
$$\phi_{12} \approx \sigma A_1 F'_{12} (T_1^4 - T_2^4); \quad F'_{12} = \frac{1}{\frac{1}{F_{12}} + \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1\right) + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} \quad (4.7)$$

Faktor orientiranosti F_{12} se računa po zvezi (4.8), v kateri so parametri prikazani na sliki 4.8 in pomenijo: r = razdalja med odsekom površin, θ = kot med daljico \bar{r} in pravokotnico na odsek površine.

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2 dA_1}{\pi r^2} \quad (4.8)$$



Sl. 4.8: Sevanje toplote med (a) poljubno orientiranima površinama (b) vzporednima koaksialnima diskoma

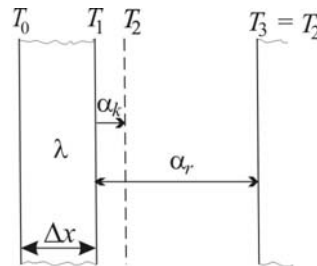


Sl. 4.9: Faktor orientiranosti med pravokotnima črnima ploščama s skupnim robom [3]

Za primer dveh vzporednih koaksialnih diskov (sl. 4.8b) je rešitev integrala enostavna in je analitično podana z enačbo (4.8a), za primer dveh pravokotno orientiranih plošč s skupnim robom je rešitev podana grafično na sliki 4.9.

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left(S - \sqrt{S^2 - 4 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2} \right); \quad S = 1 + \frac{L^2 + r_1^2}{r_2^2} \quad (4.8a)$$

4.3 Vključitev toplotnega sevanja v koeficient toplotnega prestopa



Sl. 4.10: Radiacija in konvekcija med vzporednima ploščama

Oglejmo si primer prehoda toplote skozi ploščo, ki seva toploto na nasproti stoječo površino. Ta primer je enostaven, ko je temperatura stene T_3 enaka temperaturi tekočine T_2 .

- kondukcija v plošči (enačba (2.6)) $\phi = \frac{\lambda A (T_0 - T_1)}{\Delta x} \Rightarrow R_1 = \frac{\Delta x}{A \lambda}$

- konvekcija ob površini plošče (en.(1.2)) $\phi_k = \alpha_k A (T_1 - T_2) \Rightarrow R_2 = \frac{1}{A \alpha_k}$

- radiacija med površinama (enačba (4.2)) $\phi_r = \alpha_r A (T_1 - T_2) \Rightarrow R_3 = \frac{1}{A \alpha_r}$

$$\alpha_r = \frac{\sigma}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \frac{(T_1^4 - T_2^4)}{(T_1 - T_2)} = \frac{\sigma (T_1^2 + T_2^2)(T_2 + T_3)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (4.9)$$

Radiacija in konvekcija sta vzporedni in se lahko v skladu s pravilom (2.37) določi skupni koeficient $\alpha = \alpha_k + \alpha_r$. Celotni izraz za toplotni tok je tako:

$$\phi = k A (T_0 - T_2); \quad k = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_r + \alpha_k}} \quad (4.10)$$

V primeru, ko je temperatura površine T_3 različna od temperature tekočine, se prav tako izrazi toplotni tok radiacije s temperaturno razliko $(T_1 - T_2)$, da se lahko seštejeta α_r in α_k . Izraz za

koeficient radiacije je v tem primeru:

$$\alpha_r = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1} \cdot \frac{T_1^4 - T_3^4}{T_1 - T_2} \quad (4.11)$$

5 NESTACIONARNI PRENOS TOPLOTE

Pri nestacionarnem prenosu toplote se porazdelitev temperature spreminja s časom.

Če telo z ustaljeno temperaturo izpostavimo zunanji spremembi temperature (npr. toplo telo potopimo v hladno tekočino), preteče nekaj časa, da se vzpostavi stacionaren (ustaljen) prevod toplote. Za ovrednotenje tega začetnega prenosa toplote so potrebne analize, ki so zahtevnejše od analiz stacionarnih prenosov, saj ob krajevnih koordinatah x , y , z vključujejo še čas. Izhajajoč iz enačbe (2.2) se omejimo na primere brez toplotnega izvora ($I = 0$) in predpostavimo, da se med ogrevanjem oziroma ohlajanjem prevodnost praktično ne spremeni. Porazdelitev temperature je tako v telesu določena z enostavnejšo diferencialno enačbo:

$$\boxed{a\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (5.1)$$

V nadaljevanju bo podanih nekaj rešitev te enačbe za razne primere enodimenzionalni nestacionarnih prenosov toplote. V analizi sta vpeljani brez-dimenzijski števili:

- *Fourier-jevo število* $\boxed{Fo = at / L^2}$

- *Biot-ovo število* $\boxed{Bi = \alpha L / \lambda}$

Parameter L je karakteristična dolžina telesa. Računa se iz razmerja med prostornino in površino telesa. Tako je

- za tanko ploščo (površine A in debeline d) $L = \frac{Ad}{2A} = \frac{d}{2}$

- za dolg valj (polmera R) $L = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}$

- za kroglo (polmera R) $L = \frac{4\pi R^3 / 3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3}$

Biotovo število predstavlja razmerje uporov prevoda toplote v telesu in prestopa toplote na površini telesa. Pomen tega razmerja lahko pokažemo na primeru tanke ravne plošče, kjer sta

tok konvekcije $\phi_{konv} = \alpha A(T_f - T_p)$

in tok kondukcije $\phi_{kond} = \frac{\lambda A}{L}(T_p - T_c)$

Temperature so: T_f = temperatura tekočine, v katero potopimo telo,

T_p = temperatura površine telesa in

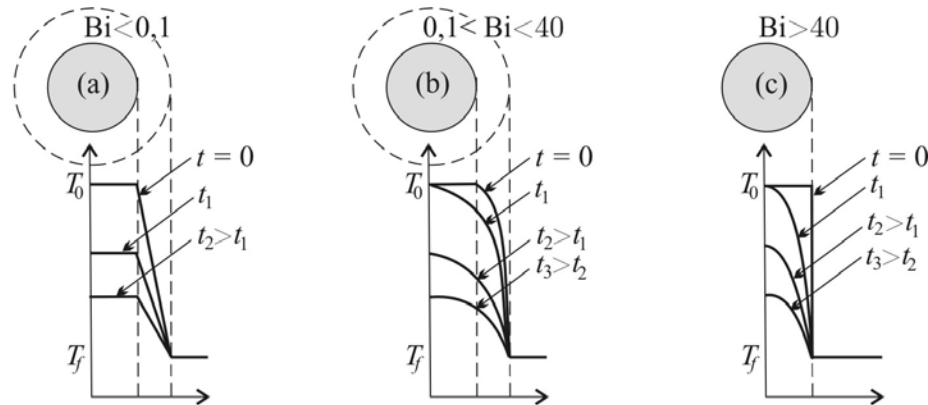
T_c = temperatura v centru telesa.

Iz enakosti toplotnih tokov sledi $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{T_p - T_c}{T_f - T_p}$

Ko je notranji upor zanemarljiv, je $T_p \approx T_c \Rightarrow Bi \rightarrow 0$. Praktično lahko smatramo, da je notranji upor zanemarljiv in temperatura enotna po vsem telesu pri vrednostih $Bi < 0,1$.

Ko je zunanji upor zanemarljiv, je $T_p \approx T_f \Rightarrow Bi \rightarrow \infty$. Praktično lahko smatramo, da je zunanji upor zanemarljiv in temperatura površine telesa skoraj enaka temperaturi okolice pri vrednostih $Bi > 40$.

Slika 5.1 prikazuje časovni potek porazdelitve temperature pri majhnem srednjem in velikem Biotovem številu.



Sl. 5.1: Časovno spreminjanje porazdelitve temperature v ohlajani kroglici
 (a) z zanemarljivim notranjim uporom ($Bi < 0,1$),
 (b) s primerljivima uporoma (Bi med $0,1$ in 40) in
 (c) z zanemarljivim uporom površja ($Bi > 40$)

Fourierjevo število je merilo za čas ohlajanja oziroma ogrevanja telesa. V zgodnjem časovnem intervalu prenos toplote še nima vpliva na temperaturo v večjih globinah telesa, ki ga zato imenujemo *polneskončno telo*. Ta pogoj je izpolnjen pri okvirni omejitvi $Fo < 0,05$. V primerih na sliki 5.1b in c lahko kroglico obravnavamo kot polneskončno telo pri časih $t < t_2$.

Glede na navedena območja Bi in Fo števil bi lahko razdelili nestacionarni prenos toplote na pet tipov:

- prenos z zanemarljivim notranjim uporom ($Bi < 0,1$),
- prenos v končnem telesu ($Fo > 0,05$) s primerljivima uporoma (Bi med $0,1$ in 40),
- prenos v končnem telesu ($Fo > 0,05$) z zanemarljivim uporom površja ($Bi > 40$),
- prenos v polneskončnem telesu ($Fo < 0,05$) s primerljivima uporoma (Bi med $0,1$ in 40) in
- prenos v polneskončnem telesu ($Fo < 0,05$) z zanemarljivim uporom površja ($Bi > 40$).

V razdelkih 5.1 do 5.5 bodo podane analize teh tipov prevodov in sicer za telesa z eno-dimenzionalnim prevodom - kroglo, neskončno dolg valj in neskončno veliko ploščo.

5.1 Enodimenzionalni nestacionarni prenos toplote z ZANEMARLJIVIM NOTRANJIM UPOROM ($Bi < 0,1$)

V mnogih praktičnih primerih je telo visoko toplotno prevodno in ima ob segrevanju ali ohlajanju temperaturo enotno po vsej prostornini. Pri ohlajanju se ta s časom znižuje, kot je prikazano na sliki 5.1a, pri ogrevanju pa se enotno zvišuje.

V enačbi (5.1) lahko smatramo $a = \infty$ in gradient temperature praktično enak nič. Hitrost spreminjanja temperature je enostavno določena s hitrostjo konvekcije.

Tok konvekcije $\phi = -\alpha A(T - T_f)$ je enak hitrosti spreminjanja notranje energije $\rho V c_p \frac{dT}{dt}$.

Z integriranjem te zveze upoštevajoč začetni pogoj $T(t=0) = T_0$ ter definicije a , Fo in Bi dobimo enačbo (5.2).

Parametri so: T = temperatura v telesu v danem trenutku t ,
 T_0 = začetna temperatura telesa ($t = 0$) in
 T_f = konstantna temperatura tekočine,
 ρ = gostota telesa in
 c_p = specifična toplotna kapaciteta.

$$-\frac{\alpha}{\rho c_p L} \int_0^t dt = \int_{T_0}^T \frac{dT}{T - T_f} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\alpha}{\rho c_p L} t = \ln \frac{T - T_f}{T_0 - T_f}$$

$$\boxed{\frac{\Delta T}{\Delta T_{\max}} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \exp(-Bi \cdot Fo)} \quad (5.2)$$

Sedaj lahko ob znanem toplotnem toku

$$\boxed{\phi = -\alpha A(T_0 - T_f) \exp(-Bi \cdot Fo)} \quad (5.3)$$

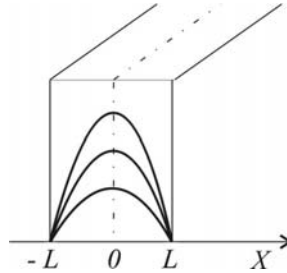
določimo še količino zadržane toplote Q iz zveze $\phi = \frac{dQ}{dt}$. Največja količina toplote, ki jo lahko s tem prevodom telo izgubi, je $Q_{\max} = \rho V c_p (T_0 - T_f)$.

$$-Q = \int_0^Q dQ = -\alpha A (T_0 - T_f) \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha a}{\lambda L} t\right) dt = \frac{\lambda V}{a} (T_0 - T_f) \left[\exp\left(-\frac{\alpha a}{\lambda L} t\right) \right]_0^{\infty} = -\rho V c_p (T_0 - T_f) \exp\left(-\frac{\alpha a}{\lambda L} t\right)$$

$$\boxed{\frac{Q}{Q_{\max}} = \exp(-Bi \cdot Fo)} \quad (5.4)$$

5.2 Enodimenzionalni nestacionarni prenos toplote z ZANEMARLJIVIM UPOROM POVRŠJA ($Bi > 40$)

Telo z nizko toplotno difuzivnostjo izpostavimo zunanji spremembi temperature in predpostavimo, da se na površju telesa temperatura praktično izenači s temperaturo okolice. Porazdelitev temperature je opisana z diferencialno enačbo (5.1) in je odvisna od oblike telesa.



Sl. 5.2: Časovno spreminjanje porazdelitve temperature v ohlajani plošči z zanemarljivim uporom površja ($Bi > 40$)

Za tanko ploščo, prikazano na sliki 5.2, se za enodimenzionalni prevod enačba (5.1) glasi:

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Temperatura T pripada poljubni točki $x \in (-L, L)$ v poljubnem trenutku t . Integral enačbe izvedemo ob časovnem pogoju in dveh robnih pogojih:

- v začetku je po vsem telesu temperatura enotna $T(t = 0) = T_0; x \in (-L, L)$
- na površini se vzpostavi stalna temperatura okolice $T(x = \pm L) = T_f; t > 0$
- v centru plošče je naklon krivulje temperature enak nič $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; t \geq 0$

Analitična rešitev je hitro konvergirajoča neskončna vrsta. Pri $Fo > 0,15$ je že prvi člen vrste zadostna aproksimacija (napaka je manjša od 2%).

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_{\max}} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp(-(2n+1)^2 \tau) \cos((2n+1)\zeta) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\exp(-\tau) \cos \zeta - \frac{1}{3} \exp(-9\tau) \cos(3\zeta) + \frac{1}{5} \exp(-25\tau) \cos(5\zeta) - \dots \right] \quad (5.5)$$

$$\tau = \frac{\pi^2 a}{4L^2} t; \quad \zeta = \frac{\pi}{2L} x$$

Enačba (5.5) je veljavna pri omejitvi za končno telo $Fo > 0,05$. Vrednost ΔT namreč ne more prekoračiti ΔT_{\max} in je največja je v centru plošče. Pri $Fo \leq 0,05$ in $x = 0$ vrsta (5.5) prekorači vrednost 1.

Izraz za količino zadržane toplote Q lahko izpeljemo iz toplotnega toka skozi površino telesa, ki je določen s prevodom toplote tik pod površjem telesa:

$$\phi = -\lambda A \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L}$$

Gradient temperature je

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} = \left(\frac{\partial(T - T_f)}{\partial x} \right)_{x=L} = -(T_0 - T_f) \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(2n+1)^2 \tau)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{2\lambda A}{L} (T_0 - T_f) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(2n+1)^2 \tau) = \\ &= \frac{2\lambda A}{L} (T_0 - T_f) [\exp(-\tau) + \exp(-9\tau) + \exp(-25\tau) + \dots] \end{aligned} \quad (5.6)$$

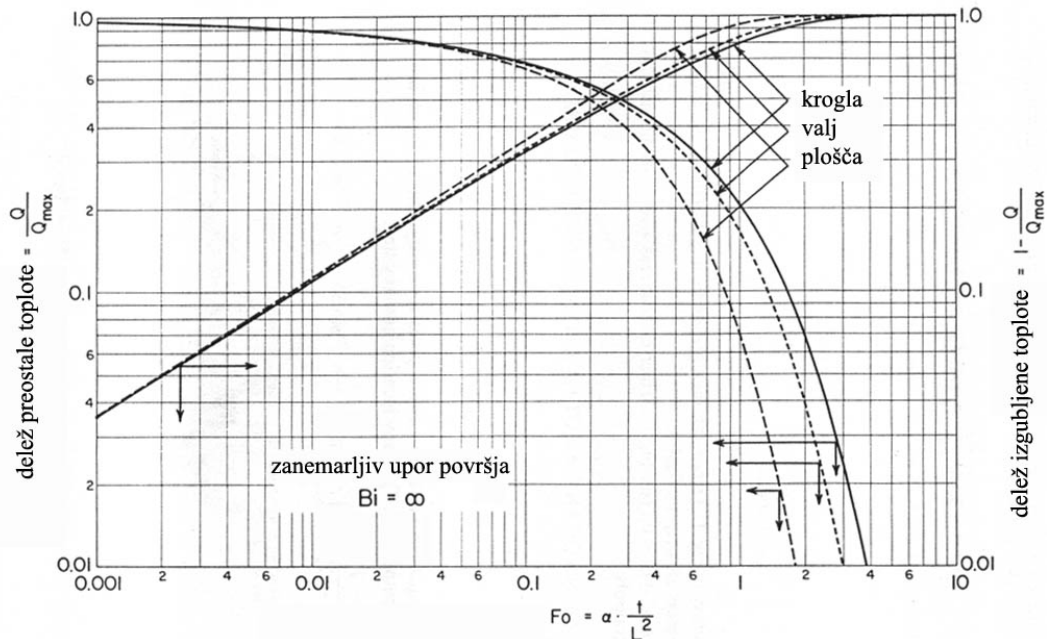
Pri $Fo > 0,2$ je prvi člen zadostna aproksimacija (napaka je manjša od 2%).

$$-Q = \int_Q^0 dQ = -\frac{2\lambda A}{L} (T_0 - T_f) \sum_{n=0}^{\infty} \int_t^{\infty} \exp\left(- (2n+1)^2 \frac{\pi^2 a}{4L^2} t\right) dt = -\frac{8\lambda V}{\pi^2 a} (T_0 - T_f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-(2n+1)^2 \tau)}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-(2n+1)^2 \tau)}{(2n+1)^2} = \frac{8}{\pi^2} \left[\exp(-\tau) + \frac{1}{3} \exp(-9\tau) + \frac{1}{5} \exp(-25\tau) + \dots \right] \quad (5.7)$$

Pri $Fo > 0,1$ je prvi člen zadostna aproksimacija (napaka je manjša od 1%).

Podobno so tudi izpeljane zveze za neskončni valj in kroglo. Deleži zadržane toplote so grafično prikazani na sliki 5.3. Z interpolacijo med krivuljami je mogoče oceniti zadržano toploto tudi za telesa nepravilnih oblik.



Sl. 5.3: Zadržana in izgubljena toplota telesa z zanemarljivim uporom površja [5]

5.3 Enodimenzionalni nestacionarni prenos toplote s PRIMERLJIVIMA UPOROMA NOTRANJOSTI IN POVRŠJA (BI MED 0,1 IN 40)

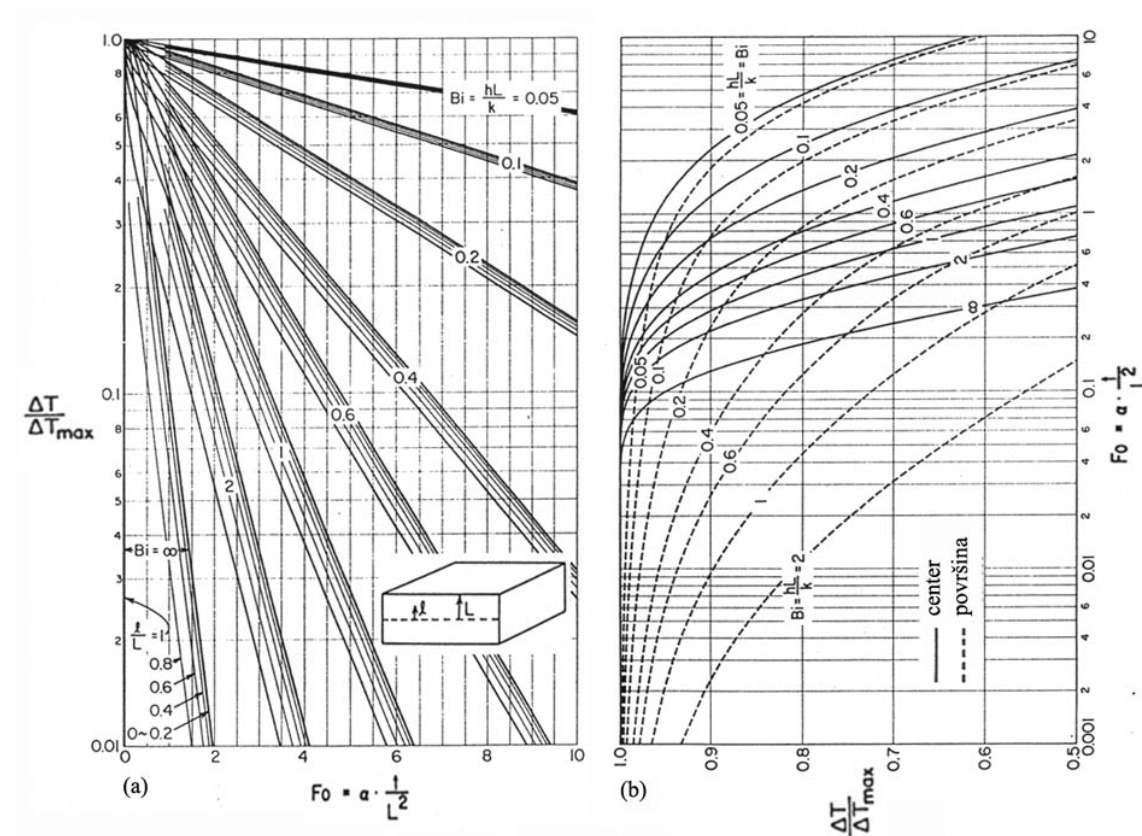
Ohlajanje kroglice pod tem režimom je prikazano na sliki 5.1b.

Porazdelitve temperatur so izpeljane iz robnega pogoja za toplotni tok skozi površino telesa:

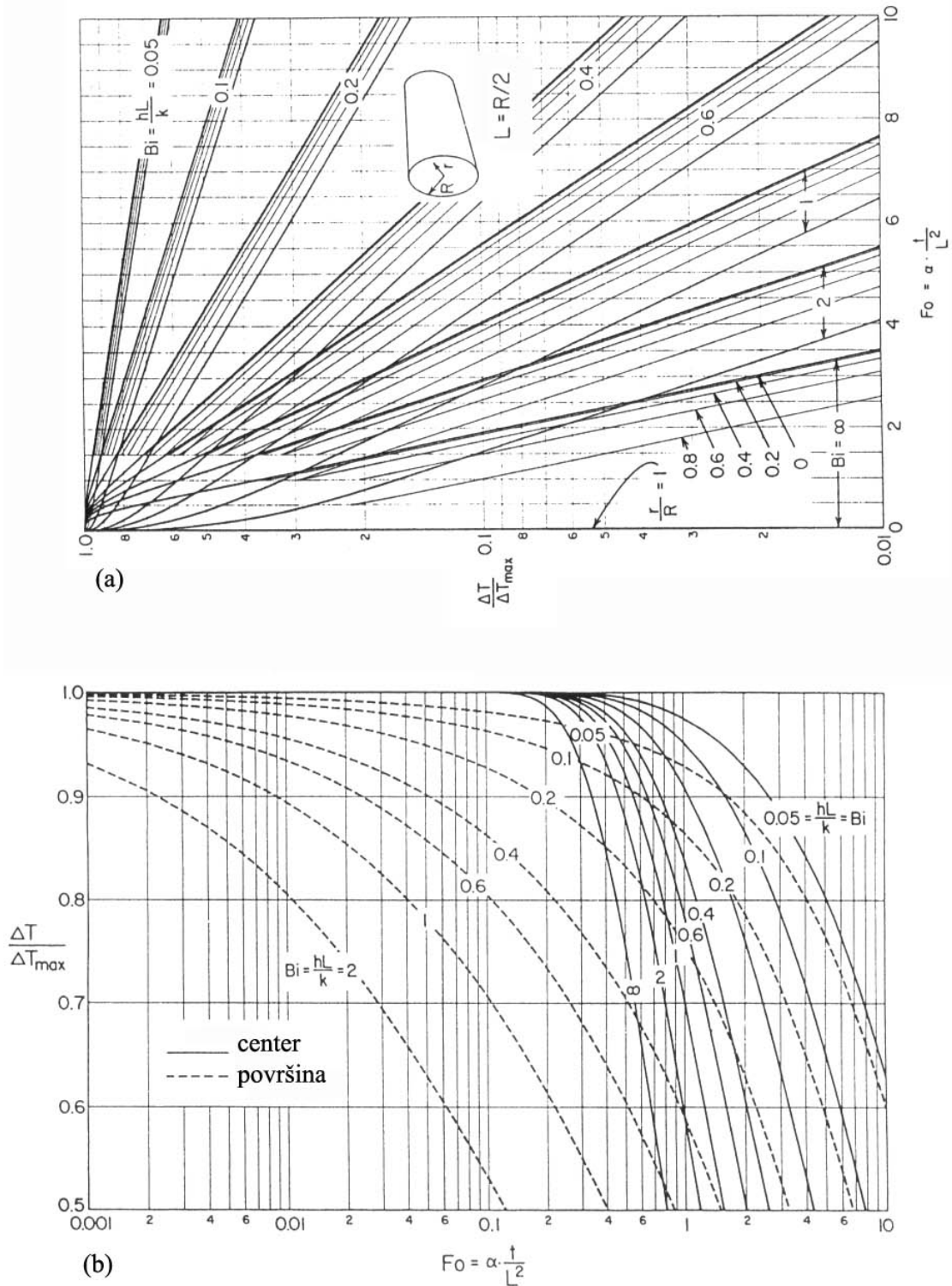
$$\phi = -\alpha A(T_{x=L} - T_f) = -\lambda A \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L}$$

Rešitve vsebujejo počasi konvergirajoče neskončne vrste, ki jih je težko numerično ovrednotiti. Grafično so predstavljene na slikah 5.4 do 5.6 za ploščo, neskončen valj in kroglo. Slika 5.7 prikazuje delež zadržane toplote za vse tri oblike telesa in celotno območje Bi. Iz diagrama je razvidno, da s padajočim Biotovim številom upada vpliv oblike telesa in postane oblika praktično nepomembna pri $Bi = 0,1$, kot je bilo pokazano v razdelku 5.1.

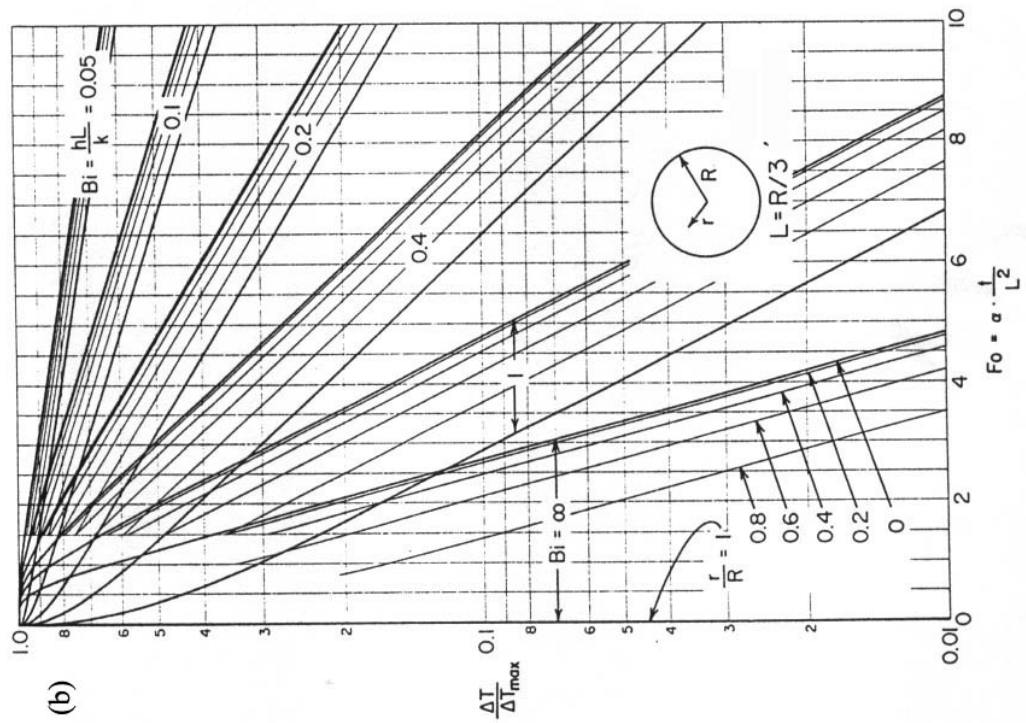
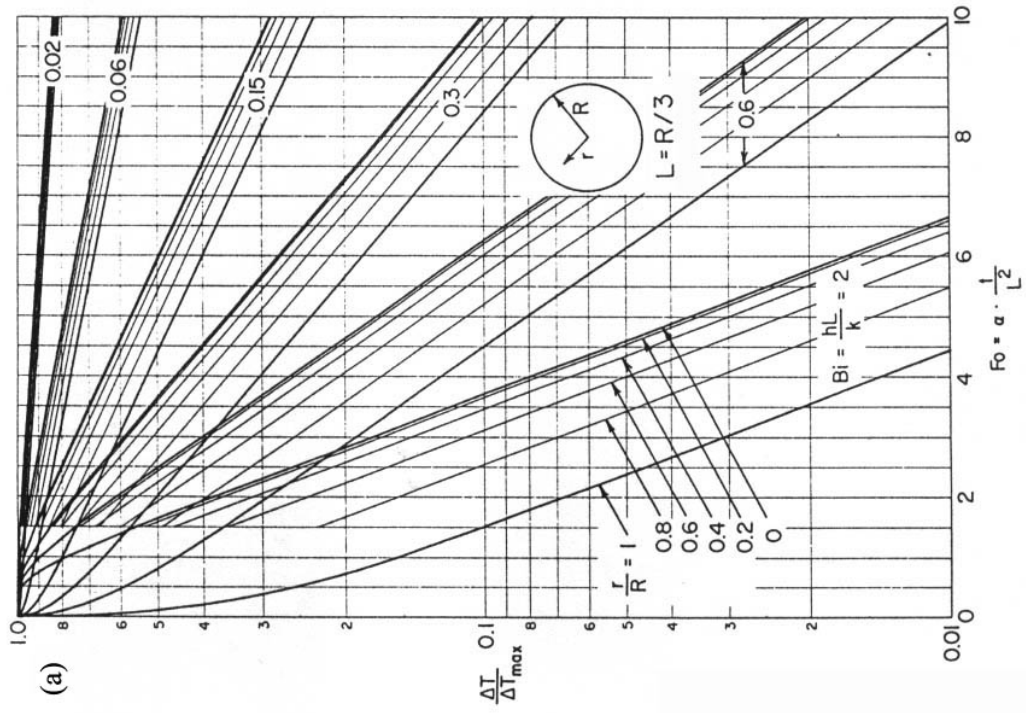
Prav tako je nepomembna oblika praktično pri $Fo < 0,1$ za valj in kroglo ter pri $Fo < 0,05$ za ploščo.



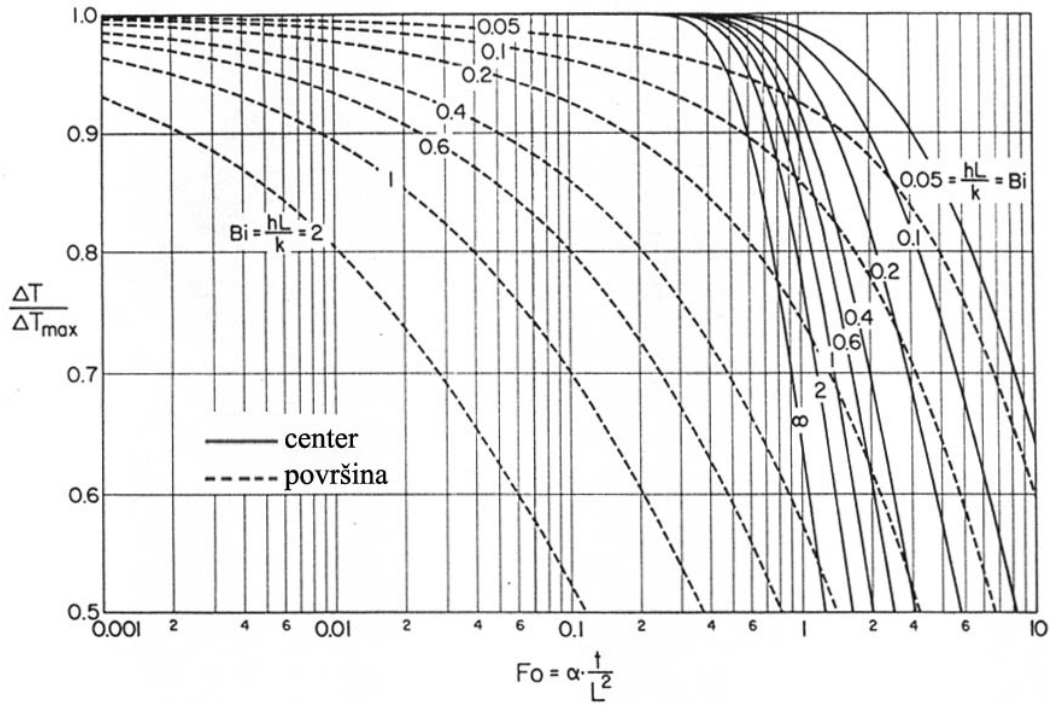
Sl. 5.4: Porazdelitev temperature v ohlajani neskončni plošči (diagram (b) je v zgornjem levem kotu diagrama (a)) [5]



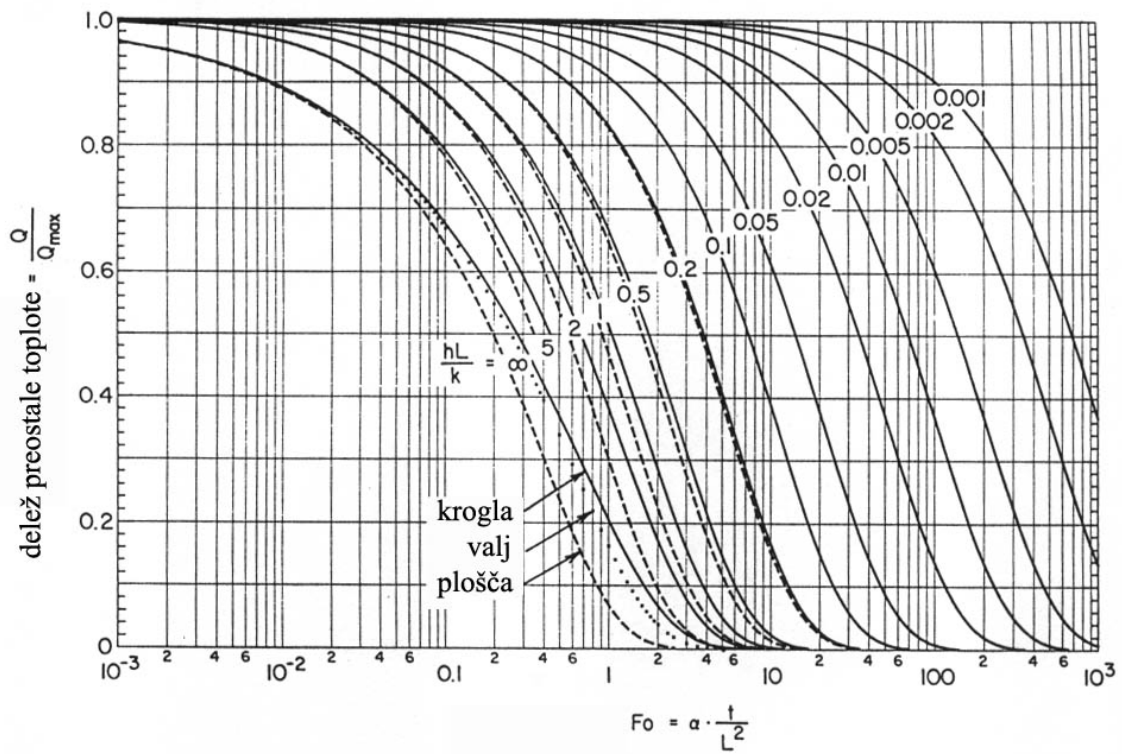
Sl. 5.5: Porazdelitev temperature v ohlajanem neskončnem valju (diagram (b) je v zgornjem levem kotu diagrama (a)) [5]



Sl. 5.6: Porazdelitev temperature v ohlajani krogli [5]



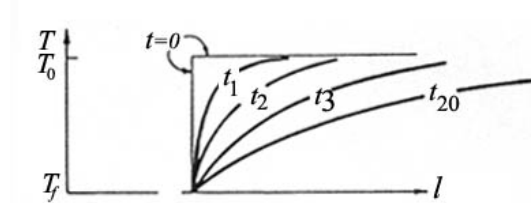
Sl. 5.6c: Porazdelitev temperature v ohlajani krogli (diagram je v zgornjem levem kotu diagrama (a) in (b)) [5]



Sl. 5.7: Zadržana toplota pri ohlajanju telesa (neskončna plošča, neskončen valj in krogla) [5]

5.4 Nestacionarni prenos v POLNESKONČNEM TELESU ($AT/L^2 < 0,05$) z ZANEMARLJIVIM UPOROM POVRŠJA ($Bi > 40$)

Telo lahko obravnavamo kot polneskončno, ko je globina ohlajanja oziroma segrevanja bistveno manjša od karakteristične dolžine telesa. Porazdelitev temperature se s časom spreminja po shemi na sliki 5.8.



Sl. 5.8: Porazdelitev temperature pri ohlajanju polneskončnega telesa z zanemarljivim uporom površja

Porazdelitev temperature je podobno kot v razdelku 5.2 opisana z diferencialno enačbo (5.1) za enodimenzionalni prevod:

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial l^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Temperatura T pripada poljubni globini $l \in (0, L)$ v poljubnem trenutku t . Integral enačbe izvedemo ob časovnem pogoju in dveh robnih pogojih:

- v začetku je po vsem telesu temperatura enotna $T(t=0) = T_0; l \in (0, L)$
- na površini se vzpostavi stalna temperatura okolice $T(l=0) = T_f; t > 0$
- v večjih globinah je temperatura nespremenjena $T(l=\infty) = T_0; t > 0$

Integralna rešitev (5.8) vsebuje Gauss-ovo funkcijo napake, ki je definirana z izrazom (5.9) in je numerično podana v tabeli 5.1.

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_{\max}} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \operatorname{erf}\left(\frac{l}{\sqrt{4at}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{Fo}_l}}\right); \quad \operatorname{Fo}_l = \frac{at}{l^2} \quad (5.8)$$

$$\operatorname{erf}(Y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Y \exp(-Y^2) \cdot dY \quad (5.9)$$

V tabeli 5.1 so v zadnje vrednosti $\operatorname{erf}(Y) \approx 1$, kar glede na (5.8) pomeni, da je pri tako velikih globinah l in tako kratkih časih t temperatura $T(l, t) \approx T_0$ in torej do ohlajanja oziroma ogrevanja še ni prišlo. Polneskončno telo ima karakteristično dolžino L večjo od teh vrednosti l . V razdelku 5.2 navedena omejitev $\operatorname{Fo} \leq 0,05$ ustreza vrednostim $Y \geq 2,2$.

Tab. 5.1: Vrednosti Gaussove »erf« funkcije

Y	erf(Y)	Y	erf(Y)	Y	erf(Y)
0,00	0,00000	0,36	0,38933	1,04	0,85865
0,02	0,02256	0,38	0,40901	1,08	0,87333
0,04	0,04511	0,40	0,42839	1,12	0,88679
0,06	0,06762	0,44	0,46622	1,16	0,89910
0,08	0,09008	0,48	0,50275	1,20	0,91031
0,10	0,11246	0,52	0,53790	1,30	0,93401
0,12	0,13476	0,56	0,57162	1,40	0,95228
0,14	0,15695	0,60	0,60386	1,50	0,96611
0,16	0,17901	0,64	0,63459	1,60	0,97635
0,18	0,20094	0,68	0,66378	1,70	0,98379
0,20	0,22270	0,72	0,69143	1,80	0,98909
0,22	0,24430	0,76	0,71754	1,90	0,99279
0,24	0,26570	0,80	0,74210	2,00	0,99532
0,26	0,28690	0,84	0,76514	2,20	0,99814
0,28	0,30788	0,88	0,78669	2,40	0,99931
0,30	0,32863	0,92	0,80677	2,60	0,99976
0,32	0,34913	0,96	0,82542	2,80	0,99992
0,34	0,36936	1,00	0,84270	3,00	0,99998

Količino zadržane toplote Q lahko izpeljemo iz znanega toplotnega toka skozi površino telesa

$\phi = -\lambda A \left(\frac{\partial T}{\partial l} \right)_{l=0}$, kjer gradient temperature določimo iz enačb (5.8) in (5.9):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial l} \right)_{l=0} = \left(\frac{\partial(T - T_f)}{\partial l} \right)_{l=0} = (T_0 - T_f) \left(\frac{\partial \operatorname{erf}(Y)}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial l} \right)_{l=0} = \frac{2(T_0 - T_f)}{\sqrt{\pi}} \left(\exp(-Y^2) \frac{\partial Y}{\partial l} \right)_{l=0} = \frac{2(T_0 - T_f)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4at}}$$

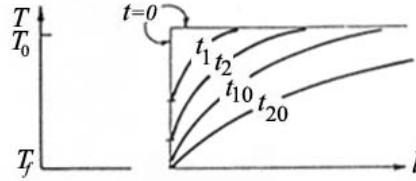
$$\phi = -\lambda A (T_0 - T_f) \frac{1}{\sqrt{\pi at}} \quad (5.10)$$

$$\int_{Q_{\max}}^Q dQ = -\frac{\lambda A (T_0 - T_f)}{\sqrt{\pi a}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2\lambda A (T_0 - T_f) \sqrt{\frac{t}{\pi a}}$$

$$Q = Q_{\max} - 2\lambda A (T_0 - T_f) \sqrt{\frac{t}{\pi a}} \quad (5.11)$$

5.5 Nestacionarni prenos v POLNESKONČNEM TELESU ($at/L^2 < 0,05$) s PRIMERLJIVIMA UPOROMA NOTRANJOSTI IN POVRŠJA (BI MED 0,1 IN 40)

V teh primerih sta upora kondukcije in konvekcije primerljiva. Porazdelitev temperature se s časom spreminja po shemi na sliki 5.9 in je podana z zvezo (5.12) ter grafično prikazana na sliki 5.10.

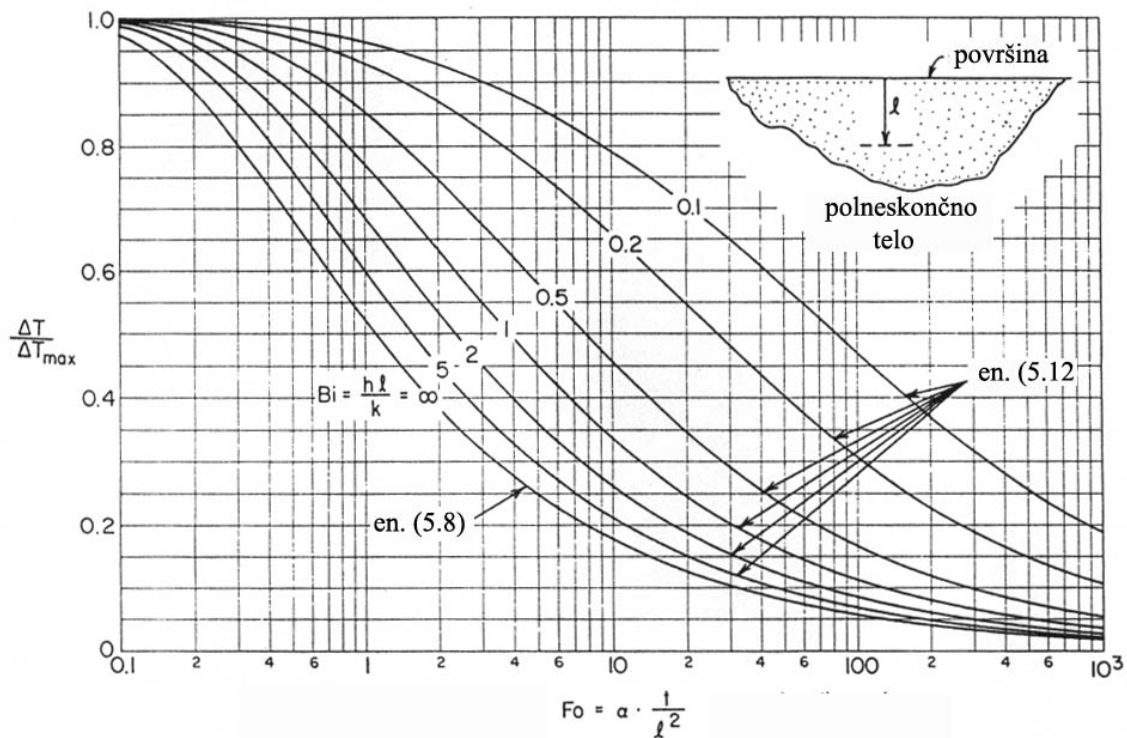


Sl. 5.9: Porazdelitev temperature pri ohlajanju polneskončnega telesa s primerljivima uporoma notranjosti in površja

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_{\max}} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{Fo_l}}\right) + \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{Fo_l}} + Bi_l \cdot \sqrt{Fo_l}\right)\right] \cdot \exp(Bi_l + Bi_l^2 \cdot Fo_l); \quad (5.12)$$

$$Fo_l = \frac{at}{l^2}, \quad Bi_l = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

Pri $Bi > 40$ se enačba (5.12) poenostavi v enačbo (5.8).



Sl. 5.10: Porazdelitev temperature v polneskončnem telesu pri $Bi > 0,1$. [5]

5.6 Nestacionarni prenos toplote v TELESIH KONČNE VELIKOSTI

Kadar je telo končne velikosti in je po vsej svoji površini izpostavljeno zunanji spremembi temperature, je potrebno upoštevati prenos toplote v vseh smereh prostora. Spremembe temperature in celotne izgube toplote lahko določimo po zvezah (5.13) in (5.14), če smo predhodno določili spremembe temperature oziroma izgube toplote v posameznih smereh prostora. Tako lahko za kratek valj, kocko ali kvader uporabimo zveze iz prejšnjih razdelkov tega poglavja.

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_{\max}} = \left(\frac{\Delta T}{\Delta T_{\max}} \right)_x \cdot \left(\frac{\Delta T}{\Delta T_{\max}} \right)_y \cdot \left(\frac{\Delta T}{\Delta T_{\max}} \right)_z \quad (5.13)$$

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_x \cdot \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_y \cdot \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_z \quad (5.14)$$

Veljavnost teh zvez lahko predstavimo na primeru dvodimenzionalnega prevoda.

- prevod le v smeri x je določen z diferencialno enačbo
$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \quad (5.1x)$$

- prevod le v smeri y je določen z diferencialno enačbo
$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \quad (5.1y)$$

- prevod v smeri x in y je določen z enačbo
$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \quad (5.1x,y)$$

Splošna rešitev $\Delta T(x, y, t)$ enačbe (5.1x,y) je produkt rešitve $X(x, t)$ enačbe (5.1x) in rešitve $Y(y, t)$ enačbe (5.1y). Če namreč rešitev $\Delta T = X \cdot Y$ vstavimo v zgornje diferencialne enačbe, dobimo:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} \quad (5.1X)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} \quad (5.1Y)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} X = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} Y + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} X \quad (5.1X,Y)$$

Če enačbo (5.1X) pomnožimo z Y in enačbo (5.1Y) pomnožimo z X ter ju seštejemo, dobimo enačbo (5.1X,Y). Rešitvi enačb (5.1X) in (5.1Y) sta tako hkrati tudi rešitev enačbe (5.1X,Y).

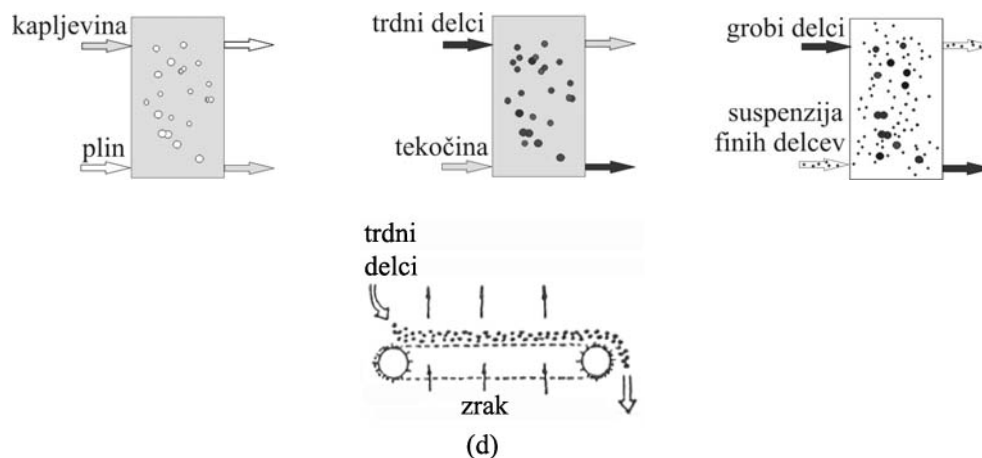
6 PRENOSNIKI TOPLOTE

Toplotni prenosniki so naprave, ki omogočajo prenos toplote s toplega toka snovi na hladen tok snovi. Izbira oblike prenosnika je odvisna od agregatnega stanja tekočin in topnosti oziroma reaktivnosti med njimi. Najučinkovitejši prenos toplote je ob neposrednem stiku snovi, vendar je ta način možen le med snovmi, ki so medsebojno netopne in nereaktivne. V večini izvedb prenosnikov se prenos toplote vrši skozi vmesno pregrado ali posredno sredstvo. Glede na to ločimo tri tipe prenosnikov:

- *rekuperatorji*
- *kontaktni prenosniki* in
- *regeneratorji*.

V *regeneratorjih* se skozi isti prostor izmenično pretaka vroča in hladna tekočina, pri čemer je zaželeno, da se tekočini čim manj mešata. Prostor je zapolnjen s sredstvom (npr. kamni ali jekleno mrežo), ki ima dovolj visoko toplotno prevodnost in toplotno kapaciteto. V fazi pretakanja vroče tekočine se polnilo ogreje, v fazi pretakanja hladne tekočine pa polnilo ogreva tekočino. Kadar sta topli in hladni tok medsebojno oddaljena, se toplota prenaša s posrednim tokovnim sistemom tekočine ali trdnih delcev.

V *kontaktnih prenosnikih* (sl. 6.1) sta hladna in vroča tekočina v neposrednem stiku.

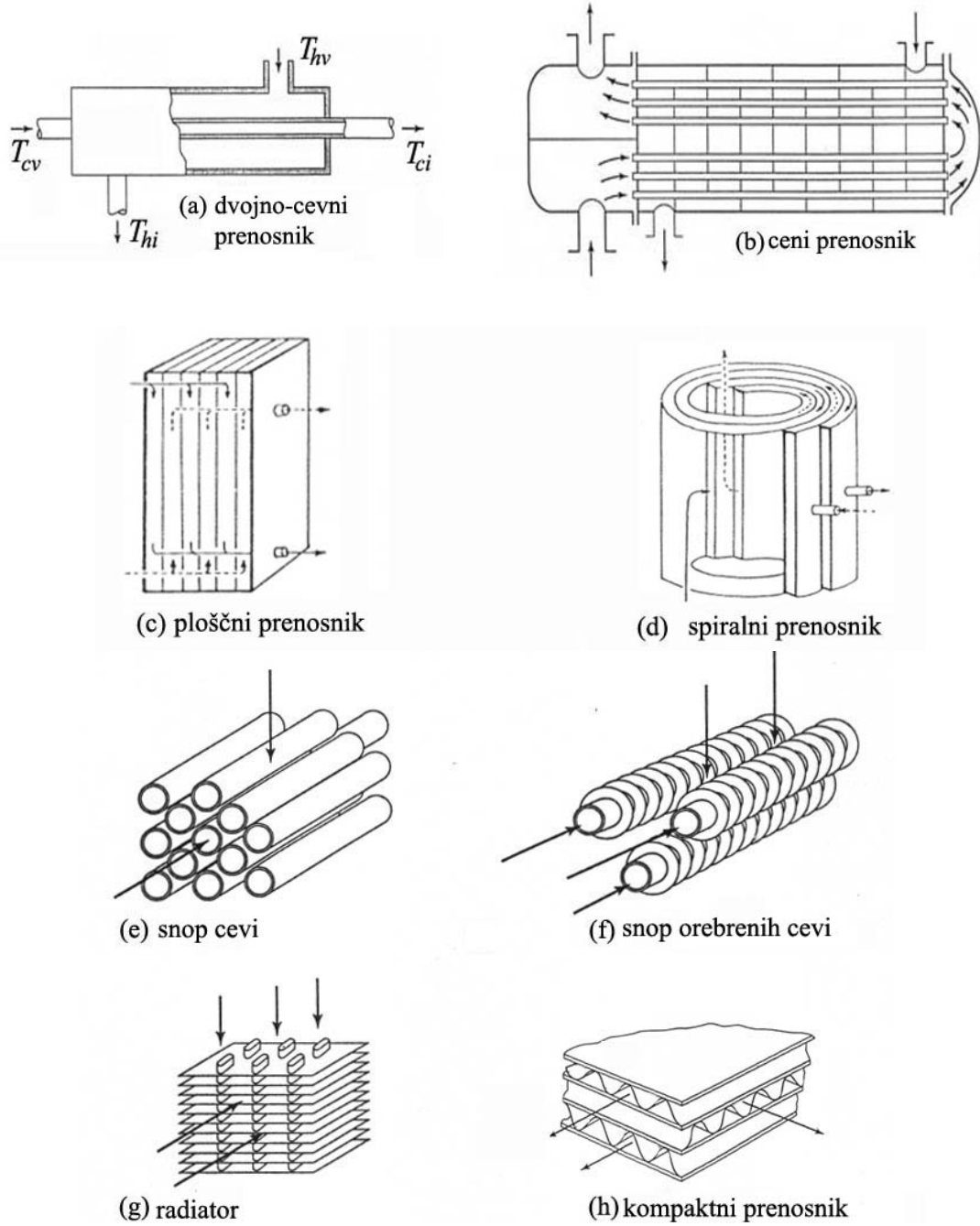


Sl. 6.1: Nekaj tipov kontaktnih prenosnikov

Najpogostejši so *rekuperatorji*, kjer sta vroča in hladna tekočina ločeni s steno. Obstajajo različne izvedbe. Osnovne tipe prikazuje slika 6.2

Pretočni režim v teh prenosnikih je lahko:

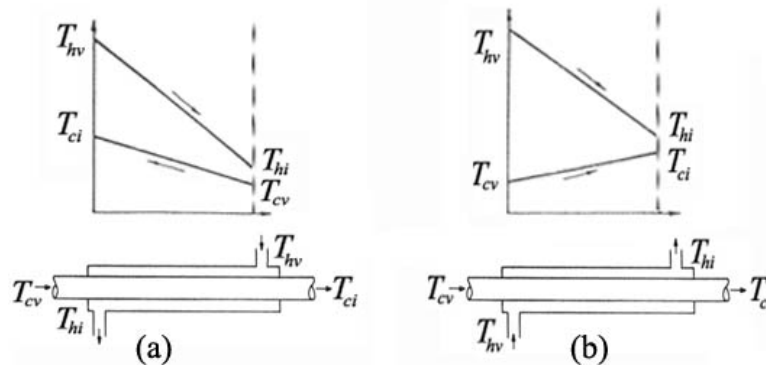
- *so-točni*, kjer se tekočini pretakata v isti smeri,
- *proti-točni*, kjer se tekočini pretakata v nasprotni smeri in
- *križno-točni*, kjer se ena tekočina pretaka prečno na drugo.



Sl. 6.2: Osnovne izvedbe rekuperatorjev

6.1 Dvojno-cevni prenosnik toplote

Dvojno-cevni prenosniki toplote sestojijo iz dvojnih koncentričnih cevi, kot je prikazano na sliki 6.2a. V notranji cevi se pretaka ena tekočina, v vmesnem prostoru med notranjo in zunanjo cevjo pa druga tekočina. Obe tekočini sta lahko plin ali kapljevina. Označimo toplejšo tekočino z indeksom h (angl. hot) in hladnejšo z indeksom c (angl. cold). Vstopne vrednosti označimo z indeksom v in izstopne z indeksom i . Slika 6.3 prikazuje porazdelitev temperature vzdolž cevi (koordinate x) za proti-točni in so-točni režim.



Sl. 6.3: Porazdelitev temperature vzdolž dvojno-cevnega prenosnika toplote: proti-točni režim in (b) so-točni režim

6.1.1 Toplotna bilanca za dvojno-cevni prenosnik toplote

Izpeljimo toplotno bilanco za proti-tok, naslanjajoč se na sliko 6.3a.

$$\text{Celotni tok toplote iz vroče tekočine je} \quad \phi = C_h (T_{hv} - T_{hi}) \quad (6.1)$$

$$\text{in celotni tok toplote v hladno tekočino je} \quad \phi = C_c (T_{ci} - T_{cv}) \quad (6.2)$$

V enačbah je vpeljan *kapacitivni koeficient* $C = \dot{m}c_p$, produkt masnega toka, \dot{m} , in specifične toplotne kapacitete, c_p , za dano tekočino.

Na določenem odseku cevi dx

$$\text{se notranja energija v vroči tekočini spremeni za} \quad d\phi = C_h dT_h \quad (6.1a)$$

$$\text{in notranja energija v hladni tekočini spremeni za} \quad d\phi = C_c dT_c \quad (6.2a)$$

$$\text{Sprememba je enaka prehodu toplote} \quad d\phi = k(T_h - T_c)dA \quad (6.3)$$

skozi steno zunanje cevi (s površino odseka dA).

Iz enačb (6.1a) in (6.2a) izrazimo dT_h in dT_c ter $d\phi$ izrazimo z razliko $dT_h - dT_c$ in tega vstavimo v enačbo (6.3). Izraz integriramo po vsej dolžini cevi ob postavitvi, da so toplotna prehodnost k in kapacitivna koeficienta C_h in C_c konstantni. Nato koeficienta C_h in C_c izrazimo iz enačb (6.1) in (6.2) in tako dobimo izraz (6.4).

$$\int_{\Delta T_1}^{\Delta T_2} \frac{d(T_h - T_c)}{T_h - T_c} = k \left(\frac{1}{C_h} - \frac{1}{C_c} \right) \int_0^A dA \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = kA \left(\frac{1}{C_h} - \frac{1}{C_c} \right) = kA \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\phi} \quad \Rightarrow$$

$$\phi = kA\Delta T_{\ln} ; \quad \Delta T_{\ln} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \quad (6.4)$$

Temperaturno razliko ΔT_{\ln} imenujemo *srednja logaritemska temperatura*. S podobno izpeljavo za primer na sliki 6.3b bi lahko pokazali, da enačba (6.4) velja tudi za so-točni režim.

Če povzamemo enačbe (6.1), (6.2) in (6.4) za dvojno-cevni prenosnik toplote, velja toplotna bilanca:

$$\phi = C_h(T_{hv} - T_{hi}) = C_c(T_{ci} - T_{cv}) = kA\Delta T_{\ln} \quad (6.5)$$

6.1.2 Ovrednotenje toplotne prehodnosti

Nekaj okvirnih vrednosti toplotne prehodnosti v cevnih toplotnih prenosnikih je podanih v tabeli 6.1.

Prehodnost toplote skozi steno je določena s kondukcijo skozi steno in konvekcijo na obeh straneh stene. Odvisna je od vrste, hitrosti tekočine, dimenzij prenosnika in prevodnosti vmesnih sten. V primeru cevi velja enačba (2.40).

Sčasoma se toplotna prehodnost zniža zaradi tvorbe oblog. Za primer cevi je ta vpliv oblog vključen v enačbi (6.6), kjer indeks n označuje notranjost cevi in indeks z zunanost cevi. Upornost oblog, R , je v tej enačbi izražena v enotah $\text{m}^2\text{K}/\text{W}$. Njene okvirne vrednosti so za nekaj tekočin podane v tabeli 6.2.

Tab. 6.1: Okvirne vrednosti toplotne prehodnosti k v cevnih toplotnih prenosnikih [1,3,7]

tekočina - tekočina	k (W/m ² K)
para – težko kurilno olje	60 ÷ 170
para – lahko kurilno olje	170 ÷ 340
para - plin	28 ÷ 280
para - voda	990 ÷ 3400
kondenzirajoča para – voda v ceveh	1000 ÷ 6000
uparevajoča voda - para v ceveh	1500 ÷ 6000
voda – stisnjen zrak	60 ÷ 170
voda – mazilno olje	115 ÷ 340
voda – bencin	340 ÷ 510
voda – voda	850 ÷ 1700

$$kA = \frac{2\pi L}{\frac{1}{r_n \left(\frac{1}{\alpha_n} + R_n \right)} + \frac{\ln(r_z / r_n)}{\lambda} + \frac{1}{r_z \left(\frac{1}{\alpha_z} + R_z \right)}} \quad (6.6)$$

Tab. 6.2: Okvirne vrednosti upornosti oblog [1,3]

tekočina	R (m ² K/W)
kemično pripravljena vodovodna voda pod 50 °C	0,0001
kemično pripravljena vodovodna voda nad 50 °C	0,0002
neobdelana vodovodna voda pod 50 °C	0,0001 ÷ 0,001
vodna para	0,0001
industrijski zrak	0,0004
kurilno olje	0,0009

6.1.3 Izbira toplotnega prenosnika glede na zahtevane temperature

Ob znanih vstopnih temperaturah T_{hv} in T_{cv} ter zahtevani eni izmed izstopnih temperatur (npr. T_{hi}) se lahko iz enakosti zvez (6.1) in (6.2) izračuna druga izstopna temperatura (T_{ci}). Toplotni prenosnik se izbere glede na potrebno vrednost kA . Ta se določi iz enakosti zvez (6.4) in (6.1) oziroma (6.4) in (6.2).

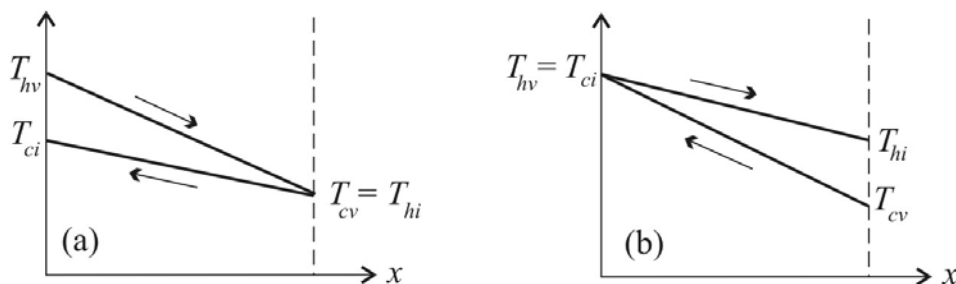
6.1.4 Ovrednotenje izstopnih temperatur dvojno-cevnega prenosnika

Kadar za znan toplotni prenosnik (z znanim kA) določamo izstopne temperature, je primerna uporaba NTU – metode.

Nusselt je predlagal uporabo učinkovitosti ε , definirane kot razmerje med dejansko preneseno toploto in *maksimalno preneseno toploto*. Ta maksimalna prenesena toplota je namišljena vrednost in se računa za tekočino z manjšim kapacitivnim koeficientom (C_{\min}) ob predpostavki, da bi tekočina ob izstopu iz prenosnika dosegla vstopno temperaturo druge tekočine:

$$\varepsilon = \frac{\phi_{\text{dejanski}}}{C_{\min} \Delta T_v} \quad (6.7)$$

Slika 6.4 prikazuje porazdelitve temperature pri proti-točnem režimu glede na razmerje kapacitivnih koeficientov vroče in hladne tekočine. Tekočina z manjšim koeficientom (C_{\min}) doseže večjo razliko med vstopno in izstopno temperaturo. Izstopna temperatura te tekočine bi lahko pri dovolj veliki površini cevi praktično dosegla vrednost vstopne temperature druge tekočine (s C_{\max}).



Sl. 6.4: Porazdelitev temperature pri proti-točnem režimu
 hladna tekočina ima manjši kapacitivni koeficient ($C_c = C_{\min}$)
 vroča tekočina ima manjši kapacitivni koeficient ($C_h = C_{\min}$)

Glede na definicijo (6.7) lahko učinkovitost zapišemo kot razmerje temperaturnih razlik.

V primeru $C_{\min} = C_c$ je učinkovitost izražena

$$\varepsilon_c = \frac{T_{ci} - T_{cv}}{T_{hv} - T_{cv}} \quad (6.8)$$

in v primeru $C_{\min} = C_h$

$$\varepsilon_h = \frac{T_{hv} - T_{hi}}{T_{hv} - T_{cv}} \quad (6.9)$$

Razlike temperatur v enačbah (6.8) in (6.9) lahko izrazimo z vrednostmi kA , C_{\min} in C_{\max} iz toplotne bilance (6.5). Izpeljava je daljša in za proti-točni režim da zvezo (6.10), za so-točni pa (6.11). V enačbah je vpeljan kvocient $NTU = \frac{kA}{C_{\min}}$, imenovan *število enot prenosa* (angl. Number of Transfer Units).

- proti-točni režim

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1-C)]}{1 - C \exp[-NTU(1-C)]}; \quad C = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \quad (6.10)$$

- so-točni režim

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1+C)]}{1+C}; \quad C = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \quad (6.10a)$$

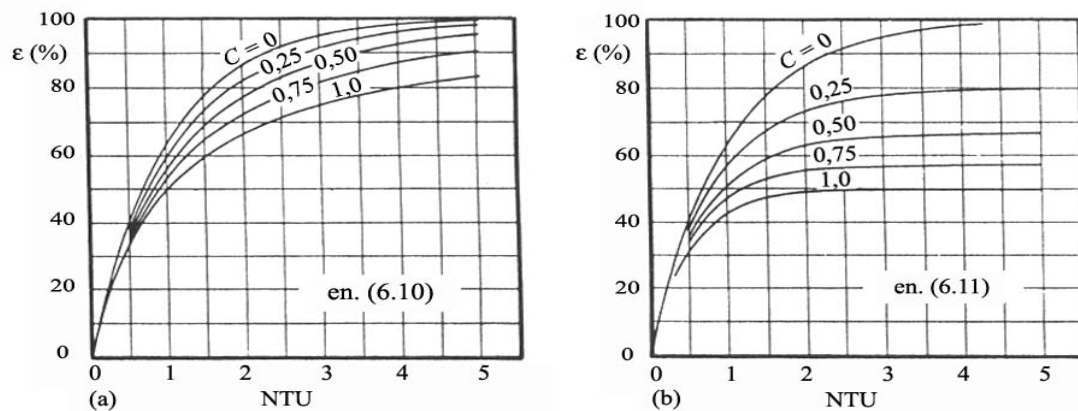
Če imata vroča in hladna tekočina enak kapacitivni koeficient ($C_{\min} = C_{\max}$), imata krivulji porazdelitve temperature ista naklona. Enačba za so-tok (6.10a) se poenostavi v zvezo (6.11a), za proti-tok pa je enačba (6.10) nedefinirana in je potrebna neposredna izpeljava iz toplotne bilance (5.6). Zveze učinkovitosti (6.10) do (6.11a) so grafično prikazane na sliki 6.5.

- proti-točni režim

$$\varepsilon = \frac{NTU}{NTU+1}; \quad C = 1 \quad (6.11a)$$

- so-točni režim

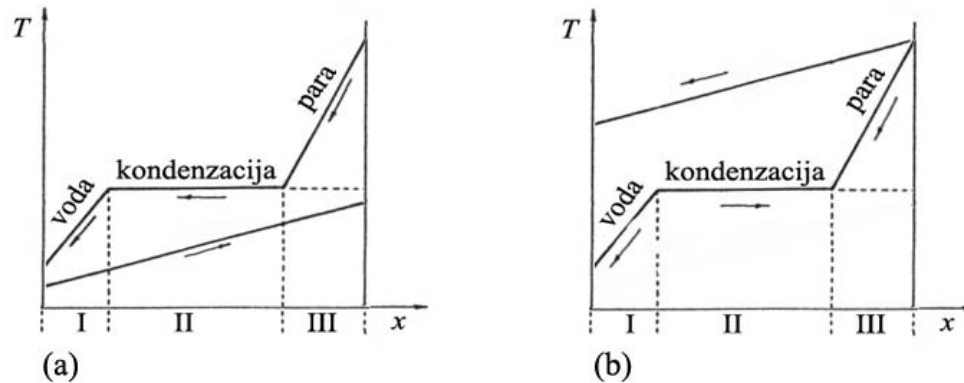
$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-2NTU]}{2}; \quad C = 1 \quad (6.11a)$$



Sl. 6.5: Učinkovitost dvojno-cevnega prenosnika: (a) proti-tok in (b) so-tok [7]

6.1.5 Toplotni prenosnik s fazno pretvorbo

Hladna tekočina lahko pri ogrevanju v toplotnem prenosniku preseže temperaturo rosišča in upareva, vroči plin pa lahko pri ohlajanju kondenzira.



Sl. 6.6: Porazdelitev temperature v dvojno-cevnem prenosniku s fazno pretvorbo:
 kondenzacija vodne pare v proti-toku s hladilno vodo in
 (b) uparjevanje vode v proti-toku z grelno paro

Slika 6.6a prikazuje kondenzacijo vodne pare v proti-toku s hladilno vodo. Celotni diagram $T(x)$ je razdeljen na tri območja. V območjih I in III velja toplotna bilanca (6.5). V območju II je temperatura vroče tekočine enaka temperaturi rosišča ($T_{hvII} = T_{hiII} = T_{ros}$). S kondenzacijo se sprošča toplota $\dot{m}_h \Delta h_{izp}$, kjer je \dot{m}_h masna hitrost nastajanja kondenzata (kg/s) in Δh_{izp} izparilna toplota, ki se sprosti pri nastanku ene masne enote kondenzata (J/kg). Ta toplota ogreva segreva hladno vodo, temperatura zmesi vroče vode in pare pa ostaja nespremenjena. Izpeljava srednje logaritemske temperature je podana v razdelku 6.1.1. Končni izraz je identičen izrazu (6.4).

Toplotna bilanca za proti-točni in so-točni režim v območju II je:

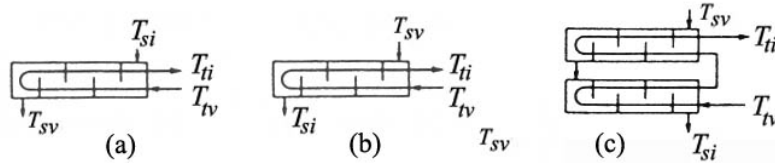
$$\text{- kondenzacija} \quad \boxed{\phi = \dot{m}_h \Delta h_{izp} = C_c (T_{ci} - T_{cv})_{II} = (kA \Delta T_{ln})_{II}} \quad (6.12)$$

$$\text{- uparjevanje} \quad \boxed{\phi = \dot{m}_c \Delta h_{izp} = C_h (T_{hv} - T_{hi})_{II} = (kA \Delta T_{ln})_{II}} \quad (6.13)$$

Podobno bi lahko pokazali veljavnost enačbe za uparjevanje in veljavnost obeh enačb tudi za so-točni režim.

6.2 Cevni prenosnik toplote

V kemijski procesni industriji je najpogosteje v rabi prenosnik, ki sestoji iz cevi in ohišja. Temperatura tekočine v cevah bo označena z indeksom *t* (angl. tube) in tekočine v prostoru med cevmi in ohišjem z indeksom *s* (angl. shell).



Sl. 6.7: Različne izvedbe cevnih prenosnikov

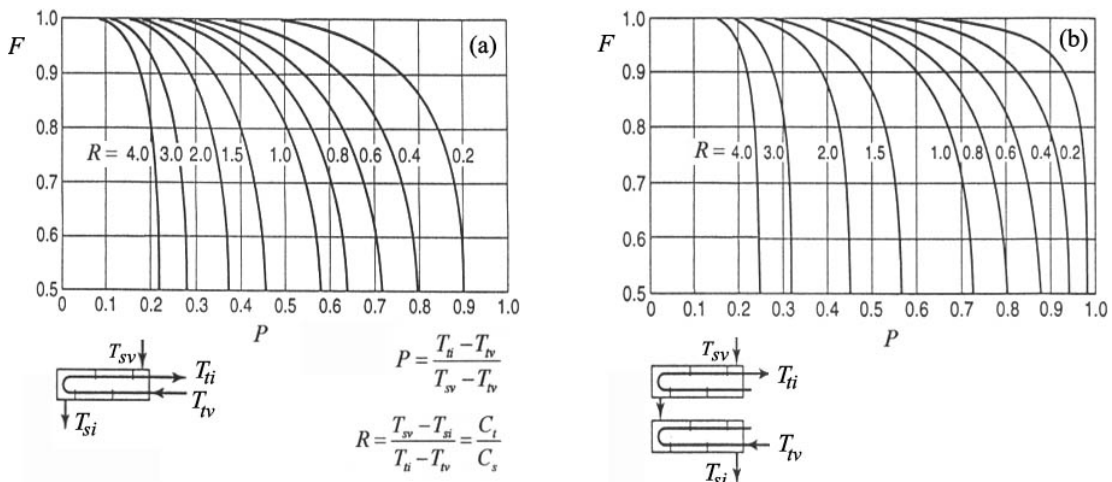
V prenosniku na sliki 6.2b sta dva prehoda tekočine v cevah in en prehod tekočine v prostoru med cevmi in ohišjem. Vgrajene pregrade omogočajo križni tok in boljše mešanje tekočine, saj brez njih prihaja do zastojev tekočine v določenih področjih prenosnika. Shematsko je ta režim prikazan na sliki 6.7b.

S povečevanjem števila prehodov se povečuje učinkovitost prenosnika. Tako je prenosnik po shemi (c) na sliki 6.7 učinkovitejši od prenosnika po shemi (b). Glede na število prehodov obstajajo razne izvedbe prenosnika, vendar le redko z več kot z dvema prehodoma tekočine v prostoru med cevmi in ohišjem.

Tokovni režim je razna kombinacija proti-toka, so-toka in križnih tokov. Za dobro učinkovitost prenosnika je pomemben proti-tok sveže tekočine v ohišju in izstopajoče tekočine v cevi. Zaradi tega je prenosnik po shemi (b) na sliki 6.7 učinkovitejši od prenosnika po shemi (a).

Cevni prenosniki so na enoto površine manj učinkoviti kot dvojno-cevni prenosniki, vendar so kljub temu bolj uporabni zaradi enostavnejše in cenejše izdelave ter večjih pretočnih kapacitet. Pri določanju potrebne površine so obravnavani kot dvojno-cevni proti-točni prenosniki, pri čemer se v enačbi (6.4) vpelje korekcijski faktor *F*.

$$\phi = C_s |T_{sv} - T_{si}| = C_t |T_{ti} - T_{tv}| = FkA\Delta T_{ln} \quad (6.14)$$



Sl. 6.8: Korekcijski faktor [3]:

- (a) prenosnik z enojnim prehodom skozi ohišje in dvema, štirimi ali večkrat-dvojnimi prehodi cevi,
- (b) prenosnik z dvojnimi prehodi skozi ohišje in štirimi, osmimi ali večkrat-četvernimi prehodi cevi

Ob znanih vstopnih temperaturah in željeni izstopni temperaturi ene izmed tekočin lahko iz toplotne bilance (6.14) določimo izstopno temperaturo druge tekočine, izračunamo razmerja P in R ter iz diagramov na sliki 6.8 odčitamo vrednost F . Nato toplotni prenosnik izberemo glede na potrebno vrednost kA , ki jo ovrednotimo iz toplotne bilance (6.14).

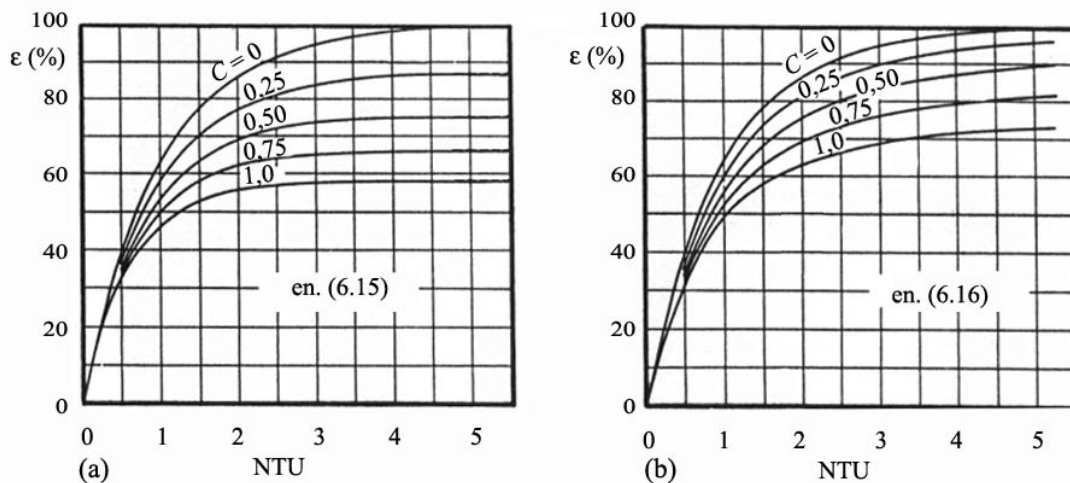
Za dani cevni prenosnik se izstopne temperature določajo po enakem postopku kot pri dvojno-cevnih prenosnikih. Učinkovitost ε (za tekočino s C_{\min}) je podana z enačbama (6.15) in (6.16) ter grafično prikazana na sliki 6.9.

- prenosnik z enojnim prehodom skozi ohišje in dvema, štirimi ali večkrat-dvojnimi prehodi cevi

$$\varepsilon_1 = 2 \left[1 + C + \frac{1 + \exp(-NTU(1+C^2)^{1/2})}{1 - \exp(-NTU(1+C^2)^{1/2})} (1+C^2)^{1/2} \right]^{-1} \quad (6.15)$$

- prenosnik z dvojnimi prehodom skozi ohišje in štirimi, osmimi ali večkrat-četvernimi prehodi cevi

$$\varepsilon_2 = \left[\left(\frac{1 - \varepsilon_1 C}{1 - \varepsilon_1} \right)^2 - 1 \right] \left[\left(\frac{1 - \varepsilon_1 C}{1 - \varepsilon_1} \right)^2 - C \right]^{-1}; \quad C = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \quad (6.16)$$



Sl. 6.9: Učinkovitost [7]:

- (a) prenosnik z enojnim prehodom skozi ohišje in dvema, štirimi ali večkrat-dvojnimi prehodi cevi,
 (b) prenosnik z dvojnimi prehodom skozi ohišje in štirimi, osmimi ali večkrat-četvernimi prehodi cevi

6.3 Križno-točni kompaktni prenosniki

Ta tip prenosnikov se pogosto uporablja za ogrevanje ali ohlajanje plinov. Na sliki 6.2 so prikazane sledeče izvedbe križno-točnih prenosnikov: v (e) in (f) je ena tekočina mešana, v (g) in (h) pa vmesne pregrade preprečujejo mešanje tudi druge tekočine.

Vrednosti korekcijskega faktorja v enačbi (6.14) so podane na sliki 6.10. Učinkovitost ε (za tekočino s C_{\min}) je podana z enačbami (6.17) do (6.19) in diagrami na sliki 6.11.

- obe tekočini sta nemešani

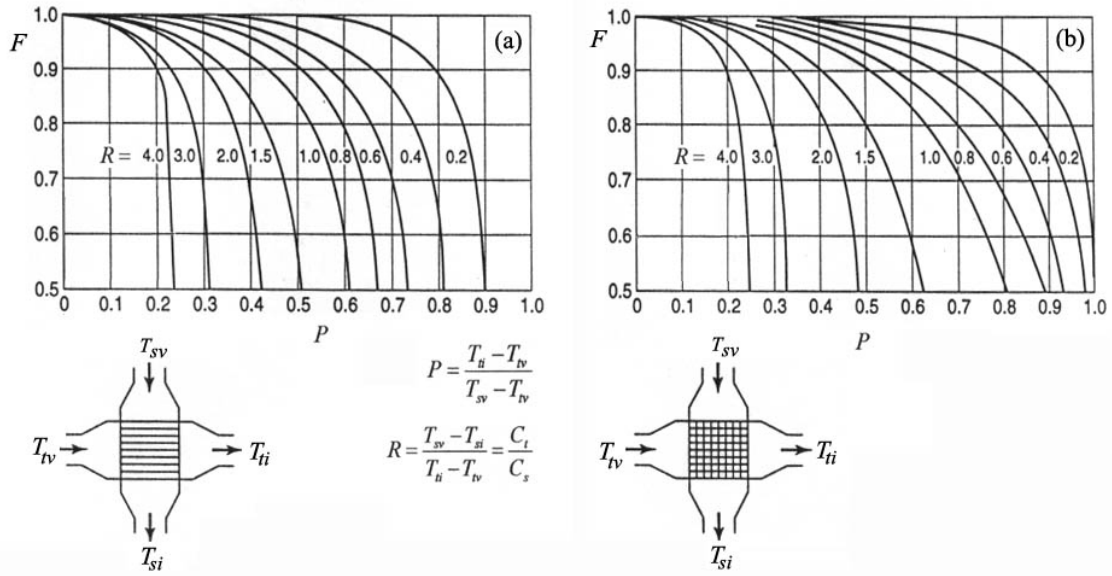
$$\varepsilon = 1 - \exp\left\{\frac{NTU^{0.22}}{C} [\exp(-C \cdot NTU^{0.78}) - 1]\right\} \quad (6.17)$$

- nemešana tekočina s C_{\min}

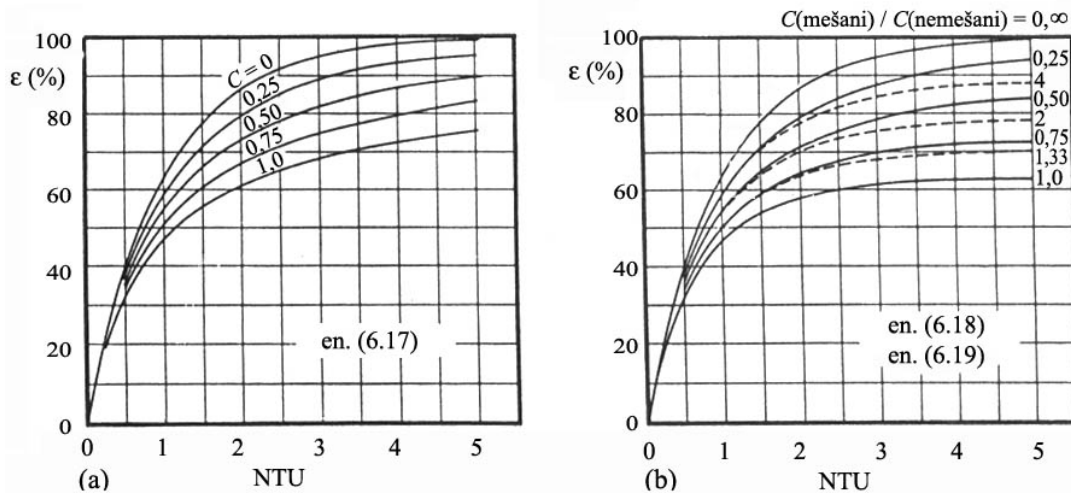
$$\varepsilon = \frac{1}{C} \{1 - \exp(-C[1 - \exp(-NTU)])\} \quad (6.18)$$

- nemešana tekočina s C_{\max}

$$\varepsilon = 1 - \exp\left(-\frac{1}{C} [1 - \exp(-NTU \cdot C)]\right); C = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \quad (6.19)$$



Sl. 6.10: Korekcijski faktor križno-točnega prenosnika [3]:
 (a) obe tekočini sta nemešani,
 (b) ena tekočina je nemešana



Sl. 6.11: Učinkovitost križno-točnega prenosnika [7]:
 (a) obe tekočini sta nemešani,
 (b) ena tekočina je nemešana
 (--- nemešana je tekočina s C_{\min}
 — nemešana je tekočina s C_{\max})

Liretatura:

- [1] Franc P. Incropera, David P. DeWitt:
Fundamentals of Heat and Mass Transfer;
4th Ed., John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [2] Kuzma Ražnjević:
Handbook of Thermodynamic Tables;
2nd Revision Ed., McGraw-Hill, Inc., 1995.
- [3] James R. Welty, Charles E. Wicks, Robert E. Wilson, Gregory L. Rorrer:
Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer;
4th Ed., John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [4] Anthony F. Mills:
Heat and Mass Transfer;
Richard D. IRWIN, Inc., 1995.
- [5] Octave Levenspiel:
Engineering Flow and Heat Exchange;
Revised Ed., Plenum Press, 1998.
- [6] Jack Phillip Holman:
Heat Transfer;
7th Ed., McGraw-Hill, Inc., 1992.
- [7] Donald Pitts:
Heat Transfer;
2nd Ed., Schaum's Outlines Series, McGraw-Hill Companies, Inc., 1998.