UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

DIPLOMSKO DELO

Tamara Zavec

Maribor, 2012

UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO
Oddelek za matematiko in računalništvo

Diplomsko delo

EKSPONENTNA FUNKCIJA NA MATRIČNIH GRUPAH

Mentor: red. prof. dr. Dušan Pagon

Kandidatka: Tamara Zavec

Maribor, 2012

Vsi cvetovi bodočnosti so v semenu sedanjosti.
(Kitajski pregovor)

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujem mentorju dr. Dušanu Pagonu za njegov čas, prijaznost, strokovno pomoč in usmerjanje pri izdelavi diplomskega dela.

Posebna zahvala moji družini, ki me je v času študija vzpodbujala, podpirala, mi stala ob strani in tako pripomogla k mojemu uspehu.

To si, kar je globoka želja, ki te žene.
Kakršna je tvoja želja, takšna je tvoja volja.
Kakršna je tvoja volja, takšno je tvoje dejanje.
Kakršno je tvoje dejanje, takšna je tvoja usoda.

(Brihadaranjaka upanišada IV 4,5)

UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

IZJAVA

Podpisana Tamara Zavec, rojena 26. novembra 1986, študentka Fakultete za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru, študijskega programa matematika, izjavljam, da je diplomsko delo z naslovom

EKSPONENTNA FUNKCIJA NA MATRIČNIH GRUPAH

pri mentorju prof. dr. Dušanu Pagonu avtorsko delo. V diplomskem delu so uporabljeni viri in literatura korektno navedeni; teksti niso uporabljeni brez navedbe avtorjev.

Maribor, marec 2012

Tamara Zavec

PROGRAM DIPLOMSKEGA DELA

V diplomskem delu predstavite definicijo eksponentne funkcije v polnem metričnem prostoru kompleksnih kvadratnih matrik. Opišite strukturo nekaterih klasičnih matričnih grup in njihovih tangentnih prostorov.

Poudarek naj bo na algoritmih za izračun vrednosti eksponentne in logaritemske matrične funkcije, ki temeljijo na preoblikovanju matrike v normalno obliko.

prof. dr. Dušan Pagon

Osnovna vira:

1. A. Baker. Matrix groups: An Introduction to Lie group theory, Springer Verlag (2002).
2. M. Boij, D. Laksov. An Introduction to Algebra and Geometry via Matrix Groups, KTH - Royal Institute of Technology, Stockholm (2005).

Maribor, 14. 3. 2011

ZAVEC, T.: Eksponentna funkcija na matričnih grupah.
Diplomsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2012.

IZVLEČEK

V diplomskem delu obravnavamo eksponentno funkcijo na matričnih grupah.

Prvo poglavje je namenjeno vpeljavi grup iz matrik s kompleksnimi koeficienti. Te grupe, ki so hkrati tudi Liejeve grupe, in poznavanje njihovih lastnosti je temeljnega pomena pri vpeljavi osrednjih matematičnih struktur v diplomskem delu. Sledi konstrukcija bilinearnih form, tako na poljubnih vektorskih prostorih, kot na na matričnih grupah. Glede na njih opredelimo simplektične ter ortogonalne matrične grupe.

V drugem poglavju ilustriramo geometrično strukturo na matrikah z vpeljavo pojmov metrika in norma. V nadaljevanju definiramo eksponentno funkcijo na matrikah. Seznanimo se z dvema metodama, s pomočjo katerih lahko izračunamo vrednost matrične funkcije: z metodo razvoja v potenčno vrsto in metodo diagonalizacije dane matrike. Obe metodi podkrepimo s primeri.

Ključne besede: matrične grupe, bilinearne forme, ortogonalne grupe, simplektične grupe, eksponentna funkcija na matričnih grupah.

Math. Subj. Class. (2012): 15A16, 65F60.

.

ZAVEC, T.: Exponential function on matrix groups.
Graduation Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Scicences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2012.

ABSTRACT

This diploma thesis discusses exponential function on matrix groups.

The first part introduces matrix groups with complex coefficients. These groups that are also Lie groups and knowledge of their characteristics are of the greatest significance by introduction of central mathematical structures in this thesis. Then a construction of bilinear forms follows, both in arbitrary vector space and in matrix groups. With regard to these we define orthogonal and symplectic groups.

The second part illustrates geometric structure on matrices with introduction of the concepts of metrics and norm. In the following we define exponential function on matrix groups. We introduce two methods, by means of which we calculate the value of matrix function: by method of development in power series and method of diagonalization of given matrix. Both methods are illustrated by concrete examples.

Ključne besede: matrix groups, bilinear forms, orthogonal groups, symplectic groups, exponential function on matrix groups.

Math. Subj. Class. (2012): 15A16, 65F60.

.

Kazalo

Uvod

Osrednja tema diplomskega dela je eksponentna funkcija na matričnih grupah. S tem imamo v mislih funkcijo $A \mapsto e^A$, kjer je A kvadratna matrika. Za izračun njene vrednosti obstaja mnogo najrazličnejših metod, ki temeljijo na različnih teorijah: metoda potenčne vrste, izračun vrednosti s pomočjo diagonalizacije matrike, z njenim razcepom, s pomočjo Jordanove kanonične forme, metoda ki temelji na diferencialnih enačbah, polinomske metode in druge. V diplomski nalogi se bom omejila na obravnavo le prvih dveh.

Na samem začetku prvega poglavja bomo navedli nekatere že znane pojme linearne algebre. Omejili se bomo le na tiste osnovne algebrske pojme, lastnosti in konstrukcije, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Podrobneje bomo obravnavali matrične grupe s kompleksnimi koeficienti, ki so osrednjega pomena na več področjih matematike. Te grupe so hkrati tudi Liejeve grupe. Poznavanje njihovih lastnosti bo temeljnega pomena pri vpeljavi osrednjih matematičnih struktur in obravnavi le teh v nadaljevanju. Nenazadnje so matrične grupe osrednji pojem diplomskega dela, saj bomo ravno na njih ilustrirali eksponentno funkcijo. V prvem poglavju bomo podrobneje obravnavali tudi bilinearne forme. Glede na njih bomo opredelili ortogonalne in simplektične grupe.

V drugem poglavju bomo najprej vpeljali geometrično strukturo na matrikah. Na množici matrik bomo torej obravnavali pojma norma in metrika, ki sta posplošitvi pojmov razdalje in dolžine. Njihova vpeljava nam bo nato služila kot eno izmed pomembnejših orodij pri obravnavi matrične eksponentne preslikave. Sprva bomo obravnavali metodo, kjer vrednost te funkcije dobimo s pomočjo razvoja v potenčno vrsto, nato pa bomo omenili še metodo, kjer njeno vrednost izračunamo s pomočjo diagonalizacije dane matrike.

Poglavje 1

Algebraične lastnosti matričnih grup

1.1 Matrične grupe

V tem razdelku bomo navedli nekatere že znane pojme linearne algebre. Omejili se bomo le na tiste osnovne algebrske pojme, lastnosti in konstrukcije, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Podrobneje bomo obravnavali matrične grupe s kompleksnimi koeficienti, ki so osrednjega pomena na več področjih matematike. Te grupe so hkrati tudi Liejeve grupe. Poznavanje njihovih lastnosti bo temeljnega pomena pri vpeljavi osrednjih matematičnih struktur in obravnavi le teh v nadaljevanju.

1.1.1 Osnovni pojmi

Naj bo $M_n(\mathbf{C})$ množica vseh kvadratnih matrik $A = (a_{ij})_{n\times n}$ s kompleksnimi elementi a_{ij}.

Matriko, katere elementi na glavni diagonali imajo vrednost 1, vsi preostali pa 0, imenujemo **identična matrika**. Označimo jo z I_n. Matriko, ki ima vse elemente enake 0, imenujemo **ničelna matrika**. Označimo jo z 0, ne glede na to, kakšne velikosti je.

Transponirana matrika matrike $A = (a_{ij})$ je matrika oblike (a_{ji}). Označimo jo z A^T. Velja enakost

$$\det A = \det A^T.$$

Množenje kvadratnih matrik (matrično množenje) definiramo kot preslikavo:

$$M_n(\mathbf{C}) \times M_n(\mathbf{C}) \to M_n(\mathbf{C}),$$

ki urejenemu paru $(A,B) \in M_n(\mathbf{C})$ priredi matriko $AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)$. Za produkt poljubnih matrik $A, B, C \in M_n(\mathbf{C})$ veljajo naslednje lastnosti:

$$A = I_n A = A I_n,$$

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Velja tudi enakost

$$\det AB = \det A \det B.$$

Matriko $A \in M_n(\mathbf{C})$ imenujemo **obrnljiva** ali nesingularna matrika, če obstaja takšna matrika $B \in M_n(\mathbf{C})$, da velja

$$AB = BA = I_n.$$

Matrika B je enolično določena. Imenujemo jo **inverz** matrike A in jo označimo z A^{-1}. Velja ekvivalenca

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ je obrnljiva matrika.}$$

V tem primeru je

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Poleg tega velja tudi

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Grupa $(G, *)$ je neprazna množica G, na kateri je definirana binarna operacija:

$$* : G \times G \to G,$$

za vsak element $a, b, c \in G$ pa veljajo naslednje lastnosti:

(i) operacija je asociativna: $(a * b) * c = a * (b * c)$,

(ii) v G obstaja tak nevtralni element e, da velja $e * a = a * e$,

(iii) za vsak element a obstaja inverzni element $a^{-1} \in G$, tako da velja $a * a^{-1} = a^{-1} * a$.

V matematiki je grupa eden od osnovnih pojmov sodobne algebre in predstavlja temelj drugim algebrskim strukturam. V naslednjem poglavju bomo spoznali nekatere pomembne matrične grupe s kompleksnimi elementi.

1.1.2 Liejeve grupe

(i) Podmnožico množice $M_n(\mathbf{C})$, sestavljeno iz obrnljivih matrik, označimo z $Gl_n(\mathbf{C})$.

Za produkt AB poljubnih dveh matrik $A, B \in Gl_n(\mathbf{C})$ velja

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

iz česar sledi, da je tudi produkt AB obrnljiva matrika $\Rightarrow AB \in Gl_n(\mathbf{C})$.

$Gl_n(\mathbf{C})$ je torej grupa, ki jo imenujemo **splošna linearna grupa**.

(ii) Podmnožico množice $Gl_n(\mathbf{C})$, sestavljeno iz matrik, katerih determinanta je enaka 1, označimo z $Sl_n(\mathbf{C})$.

Iz enačbe $\det AB = \det A \det B$ za poljubni dve matriki $A, B \in Sl_n(\mathbf{C})$ sledi, da je tudi njun produkt $AB \in Sl_n(\mathbf{C})$. Hkrati $A^{-1} \in Sl_n(\mathbf{C})$, saj $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = 1$.

Iz navedenih lastnosti izhaja, da je tudi $Sl_n(\mathbf{C})$ grupa. Imenujemo jo **posebna linearna grupa**.

(iii) Naj bo $S \in M_n(\mathbf{C})$. Označimo z $G_S(\mathbf{C})$ podmnožico takšnih matrik $A \in Gl_n(\mathbf{C})$, ki zadoščajo relaciji

$$A^T S A = S.$$

Če sta $A, B \in G_S(\mathbf{C})$, potem je tudi njun produkt $AB \in G_S(\mathbf{C})$, saj

$$(AB)^T SAB = B^T A^T SAB = B^T (A^T SA) B = B^T SB = S.$$

Tudi inverz $A^{-1} \in G_S(\mathbf{C})$, saj v primeru, ko enakost $S = A^T SA$ pomnožimo z desne strani z matriko A^{-1} in z leve z matriko $(A^{-1})^T$, dobimo

$$(A^{-1})^T S A^{-1} = S.$$

Če je $S \in Sl_n(\mathbf{C})$, iz enakosti $\det A^T \det S \det A = \det S$ sledi $(\det A)^2 = 1$. Zato je $\det A = \pm 1$. V tem primeru podmnožico matrik $A \in G_S(\mathbf{C})$, katerih determinanta je enaka 1, označimo z $SG_S(\mathbf{C})$. Ponovno velja, da če sta matriki $A, B \in SG_S(\mathbf{C})$ potem sta tudi matriki AB, $A^{-1} \in SG_S(\mathbf{C})$.

V nadaljevanju bomo obravnavali dva posebna primera ravnokar omenjenih matrik:

(iii.i) Naj bo $S = I_n$. V tem primeru ustrezni grupi $G_S(\mathbf{C})$ in $SG_S(\mathbf{C})$ označimo z $O_n(\mathbf{C})$ in $SO_n(\mathbf{C})$. Torej, podmnožico $Gl_n(\mathbf{C})$ sestavljeno iz ortogonalnih matrik ($AA^T = A^T A = I_n$), za katere hkrati velja $\det A = \pm 1$, označimo z $O_n(\mathbf{C})$ in jo imenujemo **ortogonalna grupa**. Njeno podgrupo, ki jo sestavljajo ortogonalne matrike z determinanto 1, pa imenujemo **posebna ortogonalna grupa**. Označimo jo z $SO_n(\mathbf{C})$.

(iii.ii) Naj bodo dane matrike A, B, C in D velikosti $r \times s$, $r \times (n-s)$, $(n-r) \times s$ in $(n-r) \times (n-s)$. Označimo z

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$n \times n$ bločno matriko z A, B, C in D v zgornjem levem, zgornjem desnem, spodnjem levem in spodnjem desnem kotu.

Naj bo $J_m \in M_m(\mathbf{C})$ matrika, ki ima vse elemente na stranski diagonali enake 1, preostale pa nič. Vzemimo

$$S = \begin{bmatrix} 0 & J_m \\ -J_m & 0 \end{bmatrix}.$$

Ustrezno množico $G_S(\mathbf{C})$ označimo z $Sp_{2m}(\mathbf{C})$ in jo imenujemo **simplektična grupa**. Pogosto uporabimo tudi oznako $Sp_n(\mathbf{C})$, pri čemer vedno predpostavimo, da je n sod.

Videli smo, da množice $Gl_n(\mathbf{C})$, $Sl_n(\mathbf{C})$, $G_S(\mathbf{C})$ in $SG_S(\mathbf{C})$ z operacijo matričnega množenja predstavljajo grupe. Imenujemo jih **matrične grupe**. Hkrati so le-te posebni primeri **Liejevih grup**, ki so nadvse pomembne v matematični analizi, fiziki in geometriji, saj služijo za opisovanje simetrij analitičnih struktur.

Opomba 1.1 *V nadaljevanju bo pomembno videti matrične grupe $O_n(\mathbf{C})$, $SO_n(\mathbf{C})$ in $Sp_n(\mathbf{C})$ kot avtomorfizme bilinearnih form.*

Definicija 1.2 *Definirajmo preslikavo*

$$\langle , \rangle : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C},$$

ki slika:

$$\langle (a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \rangle = [a_1, ..., a_n] \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

in zadošča naslednjim lastnostim:

(i) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$,

(ii) $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$,

(iii) $\langle ax,y\rangle = \langle x,ay\rangle = a\langle x,y\rangle$,

kjer $x,y,z \in \mathbf{C}^n$ *in* $a \in \mathbf{C}$.

Preslikava $\langle , \rangle$ *je osnovni pimer* ***bilinearne forme*** *na prostoru* $\mathbf{C}^n$. *Rezultat tega produkta je matrika razsežnosti* 1×1, *ki jo identificiramo s skalarjem.*

Matrika $A \in Gl_n(\mathbf{C})$ *je* ***avtomorfizem*** *dane forme, če velja:*

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x,y\rangle, \ \text{za vsak par } x,y \in \mathbf{C}^n.$$

Definicija 1.3 *Bilinearna forma na poljubnem vektorskem prostoru* V *je* ***simetrična****, če velja* $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ *za vsaka* $x,y \in V$ *in je* ***poševno simetrična*** *oz. alternirajoča, če velja* $\langle x,x\rangle = 0$ *za vsak* $x \in V$.

Primeri:

1. Pokaži, da je grupa $G_S(\mathbf{C})$ grupa avtomorfizmov bilinearne forme $\langle , \rangle$, definirane s predpisom

$$\langle (x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\rangle = [x_1,...,x_n]\begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{bmatrix}!$$

Kot vemo je $G_S(\mathbf{C})$ grupa avtomorfizmov dane forme, če za vsako matriko $A \in G_S(\mathbf{C})$ velja $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x,y\rangle$ za vsak par $x,y \in \mathbf{C}^n$:

$$\langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^T S(Ay) = (x^T A^T)S(Ay) = x^T(A^T SA)y = x^T Sy = \langle x,y\rangle$$

. □

2. Pokaži, da velja $Sl_2(\mathbf{C}) = Sp_2(\mathbf{C})$!

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp_2(\mathbf{C}) \Leftrightarrow A^T SA = S, \text{ kjer } S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T SA =$$

$$= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -cb + ad \\ -ad + bc & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ad - cb = 1 = \det A \Leftrightarrow A \in Sl_2(\mathbf{C}). \qquad \square$$

3. Pokaži, da velja $SSp_2(\mathbf{C}) = Sp_2(\mathbf{C})$!

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp_2(\mathbf{C}) \Leftrightarrow A^T SA = S, \text{ kjer } S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T SA =$$

$$= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -cb + ad \\ -ad + bc & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ad - cb = 1 = \det A \Leftrightarrow A \in SSp_2(\mathbf{C}). \qquad \square$$

1.2 Bilinearne forme

V naslednjih dveh podpoglavjih bomo podrobneje spoznali nekatere pomembne lastnosti bilinearnih form. Obravnavali jih bomo na poljubnem vektorskem prostoru, v nekaterih primerih pa se bomo omejili le na prostor $\mathbf{C}^n$, na katerem bo bilinearna forma definirana kot v prejšnjem razdelku.

Definicija 1.4 *Naj bo $\langle , \rangle$ bilinearna forma na končno razsežnem vektorskem prostoru V in $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ baza tega prostora. Naj bo $S = (c_{ij})_{n \times n}$ matrika, katere elementi so določeni s predpisom $c_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Potem lahko bilinearno formo za vsak*

$$x = a_1 e_1 + ... + a_n e_n \text{ in } y = b_1 e_1 + ... + b_n e_n$$

indentificiramo s produktom

$$\langle x, y \rangle = [a_1, ..., a_n] \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = x^T S y = \sum_{ij=1}^{n} a_i c_{ij} b_j.$$

Bilinearna forma je ***neizrojena*** *oz. nedegenerirana natanko tedaj, ko je S obrnljiva matrika.*

Forma je simetrična natanko tedaj, ko je matrika S simetrična ($S = S^T$) in je poševno simetrična, ko je matrika S poševno simetrična ($S = -S^T$) .

Definicija 1.5 *Naj bo S podprostor prostora $\mathbf{C}^n$. Vektor $x \in \mathbf{C}^n$ je* ***ortogonalen*** *na množico S, če velja*

$$\langle x, y \rangle = 0, \text{ za vsak vektor } y \in S.$$

Množico vseh takšnih vektorjev x označimo z

$$S^\perp = \{x \in \mathbf{C}^n | \langle x, y \rangle = 0, \text{za vsak } y \in S\}$$

in jo imenujemo ***ortogonalni komplement*** *množice S.*

Naj bo odslej V končno dimenzionalen vektorski prostor nad poljem $\mathbf{P}$, na katerem je definirana simetrična bilinearna forma $\langle , \rangle$.

Definicija 1.6 *Forma je* ***neizrojena*** *oz. nedegenerirana, če je $V^\perp = 0$ ali ekvivalentno, če za vsak $y \in V$ enakost $\langle x, y \rangle = 0$ velja le tedaj, ko je $x = 0$.*

Lema 1.7 *Naj bo V vektorski prostor z neizrojeno formo in W njegov podprostor. Potem velja*

$$\dim_{\mathbf{P}} V = \dim_{\mathbf{P}} W + \dim_{\mathbf{P}} W^\perp.$$

Dokaz. Naj bo W podprostor prostora V. Potem imamo kanonično preslikavo $\check{V} \to \check{W}$, ki pošlje preslikavo $\alpha : V \to \mathbf{P}$ v preslikavo $\alpha \mid_W : W \to \mathbf{P}$. Ta preslikava je surjektivna, kar lahko preverimo z izbiro baze prostora W, ki jo razširimo na bazo prostora V. Sestavljanje izomorfizma Φ, povezanega z bilinearno formo, z navedeno surjekcijo nam porodi preslikavo $V \to \check{W}$ z jedrom $W^\perp$. Vemo, da v danem primeru velja

$$\dim_{\mathbf{P}} V = \dim_{\mathbf{P}} ker\Phi + \dim_{\mathbf{P}} im\Phi.$$

Če velja navedena lastnost in če je $\dim_{\mathbf{P}} V = \dim_{\mathbf{P}} W$, potem je Φ surjektivna preslikava natanko tedaj, ko je Φ izomorfizem. □

Lema 1.8 *Naj bo V vektorski prostor z neizrojeno formo in naj bo W njegov podprostor. Če je*

$$W \cap W^\perp = 0$$

potem velja

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

in dana forma $\langle , \rangle$ *inducira neizrojeno formo na* W*.*

Dokaz. Če je $U = W + W^{\perp}$ velja $U = W \oplus W^{\perp}$, saj $W \cap W^{\perp} = 0$. Iz leme 1.7 sledi $\dim_{\mathbf{P}} V = \dim_{\mathbf{P}} W + \dim_{\mathbf{P}} W^{\perp}$. Zato je U podprostor prostora V dimenzije $\dim_{\mathbf{P}} V$. Posledično $U = V$ in tako smo dokazali drugo trditev leme. □

1.3 Ortogonalne in simplektične grupe

Naj bo V vektorski prostor nad poljem $\mathbf{P}$ z neizrojeno bilinearno formo $\langle , \rangle$. V primeru simetričnih bilinearnih form bomo vedno predpostavili, da je 2 obrnljiv element polja $\mathbf{P}$, torej karakteristika $\mathbf{P}$ ni enaka 2.

Lema 1.9 *Predpostavimo, da je forma simetrična. Potem obstaja tak element* $x \in V$*, da* $\langle x, x \rangle \neq 0$*.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $\langle x, x \rangle = 0$ za vsak $x \in V$. Ker je forma simetrična, velja

$$\langle y + z, y + z \rangle = \langle y, y \rangle + 2\langle y, z \rangle + \langle z, z \rangle$$

za poljubna $y, z \in V$. Na začetku poglavja smo predpostavili, da je 2 obrnljiv element, zato lahko enačbo preuredimo in dobimo

$$\langle y, z \rangle = \frac{\langle y + z, y + z \rangle - \langle y, y \rangle - \langle z, z \rangle}{2}$$

kar je enako 0, saj po predpostavki velja $\langle x, x \rangle = 0$. To pomeni, da je $\langle , \rangle$ izrojena, kar je v nasprotju z našo predpostavko. Torej mora obstajati tak element $x \in V$, za katerega $\langle x, x \rangle \neq 0$. □

Izrek 1.10 *Predpostavimo, da je forma simetrična. Potem obstaja taka baza prostora* V*, da je matrika* S*, ki pripada dani formi v tej bazi, diagonalna.*

Bazo lahko izberemo tako, da vključuje katerikoli neničeln vektor x*.*

Dokaz. Iz leme 1.9 sledi, da obstaja takšen element $x \in V$ za katerega $\langle x, x \rangle \neq 0$. Naj bo $e_1 = x$ in $W = \langle e_1 \rangle$. Potem je W podprostor prostora V in $W \cap W^{\perp} = 0$, iz česar sledi, da je $V = W \oplus W^{\perp}$. Velja še več: imamo omejitev, da je bilinearna forma na $W^{\perp}$ neizrojena. Potem lahko uporabimo indukcijo po $\dim_{\mathbf{P}} V$ za sklep, da obstaja takšna baza $\mathcal{B} = \{e_2, ..., e_n\}$ na $W^{\perp}$, da $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ in $\langle e_i, e_i\rangle \neq 0$, za $i, j = 2, ..., n$ in $i \neq j$. Po definiciji velja $\langle e_1, e_i\rangle = 0$, za $i = 2, ..., n$. Dokazali smo trditev. □

Opomba 1.11 *Izrek lahko razložimo tudi na naslednji način:*

Obstaja takšna baza $\mathcal{B} = \{e_2, ..., e_n\}$ prostora V, da velja $\langle e_i, e_i\rangle = c_i$ in $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ za $i, j = 1, ..., n$ in $i \neq j$. Za e_1 lahko izberemo katerikoli x, za katerega velja $\langle x, x\rangle \neq 0$.

Če je $x = (a_1, ..., a_n)$ in $y = (b_1, ..., b_n)$ glede na bazo v V, potem obstajajo neničelni elementi $c_1, ..., c_n$ v $\mathbf{P}$, tako da velja

$$\langle x, y\rangle = a_1 b_1 c_1 + ... + a_n b_n c_n.$$

Definicija 1.12 *Bazo, kot je podana v izreku 1.10, imenujemo **ortogonalna baza**. To je baza, ki je sestavljena iz paroma pravokotnih vektorjev.*

*Če je $c_i = 1$, za $i = 1, ..., n$ je baza ortogonalna in hkrati normirana, torej je sestavljena iz enotskih vektorjev, ki so med seboj pravokotni. Takšno bazo imenujemo **ortonormirana baza**.*

Linearno preslikavo

$$\alpha : V \to V,$$

za katero velja

$$\langle \alpha(x), \alpha(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

*za vse pare vektorjev $x, y \in V$, imenujemo **ortogonalna linearna preslikava**.*

Množico vseh ortogonalnih linearnih preslikav označimo z $O(V, \langle,\rangle)$. Podmnožico, sestavljeno iz vseh ortogonalnih linearnih preslikav z determinanto 1 pa označimo s $SO(V, \langle,\rangle)$.

*Kot smo videli v poglavju 1.1 je $O(V, \langle,\rangle)$ podgrupa grupe $Gl(V)$ in $SO(V, \langle,\rangle)$ podgrupa grupe $Sl(V)$. Grupo $O(V, \langle,\rangle)$ in $SO(V, \langle,\rangle)$ imenujemo **ortogonalna grupa**, oziroma **posebna ortogonalna grupa forme** $\langle,\rangle$.*

Opomba 1.13 *Kadar polje $\mathbf{P}$ vsebuje kvadratne korene vseh svojih elementov, lahko bazne vektorje e_i dane ortogonalne baze, nadomestimo s $\sqrt{c_i}^{-1} e_i$. Potem dobimo ortonormirano bazo. Posledično so v tem primeru bilinearne forme enake formi $\langle x, y\rangle = a_1 b_1 + ... + a_n b_n$.*

Izrek 1.14 *Predpostavimo, da je V n-dimenzionalen vektorski prostor in $\langle x, y\rangle$ neizrojena, poševno simetrična forma. Tedaj je $n = 2m$ sod in obstaja baza $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ prostora V, glede na katero dani formi pripada matrika S oblike:*

$$S = \begin{bmatrix} 0 & J_m \\ -J_m & 0 \end{bmatrix}.$$

$J_m \in M_m\mathbf{C}$ je matrika, katere elementi na stranski diagonali so enaki 1, preostali pa 0.

Bazo lahko izberemo tako, da vsebuje katerikoli neničeln vektor x.

Dokaz. Če je $n = 1$, ne obstaja neizrojena forma. Torej predpostavimo, da je $n > 1$. Naj bo e_1 poljuben neničeln vektor. Ker je forma neizrojena, obstaja takšen vektor v, da $\langle e_1, v\rangle \neq 0$. Naj bo $e_n = \frac{1}{\langle e_1,v\rangle}v$. Potem je $\langle e_1, e_n\rangle = 1$. Naj bo $W = \langle e_1\rangle + \langle e_n\rangle$ podprostor prostora V, razpet na e_1 in e_n. Potem $W \cap W^\perp = 0$. Iz leme 1.7 sledi, da je $\dim_{\mathbf{P}}(W \oplus W^\perp) = \dim_{\mathbf{P}} V$. Posledično velja $V = W \oplus W^\perp$. Sedaj lahko uporabimo indukcijo za sklep, da sta $\dim_{\mathbf{P}} W^\perp$ in tako tudi $\dim_{\mathbf{P}} V$ sodi in da obstaja taka baza $\mathcal{B} = \{e_2, ..., e_{n-1}\}$, da je $\langle e_i, e_{n+1-i}\rangle = 1$ za $i = 2, ..., m$. Za vse ostale indekse pa velja $\langle e_i, e_j\rangle = 0$. Torej $\langle e_1, e_i\rangle = 0 = \langle e_n, e_i\rangle$ za $i = 2, ..., n-1$. Tako smo dobili bazo $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, ki zadošča pogojem iz izreka. □

Opomba 1.15 *Izrek pravi, da obstaja taka baza $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ prostora V, da velja*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & \textit{če je } i + j = n + 1 \\ 0, & \textit{sicer} \end{cases}$$

Glede na to bazo je forma enaka:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{m}(a_i b_{n+1-i} - a_{n+1-i} b_i).$$

Iz izreka sledi, da so vse neizrojene alternirajoče bilinearne forme na danem vektorskem prostoru ekvivalentne.

Definicija 1.16 *Bazo, kot je podana v izreku* 1.14*, imenujemo* ***simplektična baza****.*

Linearno preslikavo

$$\alpha : V \to V,$$

za katero velja

$$\langle \alpha(x), \alpha(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

za vsak par $x, y \in V$ pa ***simplektična linearna preslikava****.*

Množico vseh simplektičnih linearnih preslikav označimo s $Sp(V,\langle,\rangle)$ *in jo imenujemo* ***simplektična grupa forme*** $\langle,\rangle$. *Kot smo videli v poglavju* 1.1, *je* $Sp(V,\langle,\rangle)$ *podgrupa grupe* $Gl(V)$.

1.4 Generatorji ortogonalnih in simplektičnih grup

Naj bo V vektorski prostor nad poljem P s fiksno neizrojeno bilinearno formo $\langle,\rangle$.

Definicija 1.17 *Predpostavimo, da je* $2 = 1 + 1$ *neničelni element v polju* $\mathbf{P}$ *in forma* $\langle,\rangle$ *simetrična. Linearno preslikavo*

$$\alpha : V \to V,$$

ki ohranja vse vektorje v podprostoru H *kodimenzije* 1 ($dim_{\mathbf{P}}H = dim_{\mathbf{P}}V - 1$)*, hkrati pa za njo velja*

$$\alpha(x) = -x$$

za nek neničeln vektor $x \in V$, *imenujemo* ***zrcaljenje*** *prostora* V.

Naj bo $x \in V$ *takšen element, da velja* $\langle x, x\rangle \neq 0$. *Preslikava* $s_x : V \to V$, *definirana s predpisom:*

$$s_x(y) = y - 2\frac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle}x$$

je linearna.

Opomba 1.18 *Naj bo* $e_1 = x$ *in* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *ortogonalna baza prostora* V *glede na formo* $\langle,\rangle$. *Potem velja*

$$s_x(a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n) = -a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n,$$

kjer je matrika s_x *v tej bazi oblike:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Opazimo, da je determinanta matrike, ki pripada preslikavi s_x *enaka* -1.

Preslikava oblike s_x *je zrcaljenje. Naj bo* $W = \langle x\rangle$. *Iz leme 1.7 sledi, da je* $dim_{\mathbf{P}}W^{\perp} = n-1$. *Za* $y \in W^{\perp}$ *velja* $s_x(y) = y$ *in* $s_x(x) = -x$. s_x^2 *je identična preslikava. Še več, preslikava* s_x *je ortogonalna, saj*

$$\langle s_x(y), s_x(z)\rangle \quad = \quad \langle y - 2\frac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle}x, z - 2\frac{\langle z, x\rangle}{\langle x, x\rangle}x\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle y, z\rangle - 2\frac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle}\langle x, z\rangle - 2\frac{\langle z, x\rangle}{\langle x, x\rangle}\langle y, x\rangle + 4\frac{\langle y, x\rangle\langle z, x\rangle}{\langle x, x\rangle^2}\langle x, x\rangle \\
&= \langle y, z\rangle.
\end{aligned}
$$

Če je $\det s_x = -1$*, velja* $s_x \in O(V) \setminus SO(V)$*.*

Lema 1.19 *Naj bosta* x *in* y *elementa iz* V*, za katera velja* $\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle \neq 0$*. Potem obstaja linearna preslikava, ki preslika* x *v* y *in je produkt največ dveh zrcaljenj oblike* s_z*.*

Dokaz. Predpostavimo, da velja $\langle x, y\rangle \neq \langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle$. Potem

$$\langle x - y, x - y\rangle = 2(\langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle) \neq 0.$$

Vzemimo $z = x - y$. Potem $\langle z, z\rangle \neq 0$ in

$$s_z(x) = x - 2\frac{\langle x, x - y\rangle}{\langle x - y, x - y\rangle}(x - y) = y,$$

saj je $2\frac{\langle x, x-y\rangle}{\langle x-y, x-y\rangle} = 1$.

Če je $\langle x, y\rangle = \langle x, x\rangle$, drži neenakost $\langle -x, y\rangle \neq \langle x, x\rangle$. V tem primeru je linearna preslikava produkt zrcaljen $s_z s_x$, kjer je $z = -x - y$. □

Izrek 1.20 *Ortogonalna grupa* $O(V)$ *je generirana z zrcaljenji oblike* s_x*, kjer* $\langle x, x\rangle \neq 0$*, njena podgrupa* $SO(V)$ *pa s produktom* $s_x s_y$*.*

Dokaz. Iz leme 1.9 sledi, da obstaja takšen element $x \in V$, da $\langle x, x\rangle \neq 0$. Posledično iz leme 1.8 sledi, da v primeru, ko je $W = \langle x\rangle$ velja $V = W \oplus W^\perp$ in da bilinearna forma inducira neizrojeno bilinearno formo na $W^\perp$.

Naj bo α element grupe $O(V)$. Potem:

$$\langle \alpha(x), \alpha(x)\rangle = \langle x, x\rangle \neq 0.$$

Iz leme 1.19 sledi, da obstaja takšen produkt β največ dveh zrcaljenj oblike s_y, da velja $\beta(x) = \alpha(x)$. Posledično $\beta^{-1}\alpha$ inducira linearno preslikavo $\beta^{-1}\alpha\mid_{W^\perp}$ na $W^\perp$. Sedaj lahko uporabimo indukcijo po $\dim_{\mathbf{P}} V$, da zapišemo $\beta^{-1}\alpha\mid_{W^\perp}$ kot produkt zrcaljenj oblike s_z na $W^\perp$, $z \in W^\perp$. Zrcaljenje s_z, obravnavano kot zrcaljenje na $W^\perp$, je omejitev zrcaljenja s_z, obravnavanega kot zrcaljenje na V. Zato $\beta^{-1}\alpha$ in s tem α lahko zapišemo kot produkt zrcaljenj oblike s_z. Dokazali smo prvi del izreka.

Ker je $\det s_z = -1$ velja, da je celoten dobljeni produkt vsebovan v $SO(V)$ natanko tedaj, ko vsebuje sodo število faktorjev. Zato drži tudi drugi del izreka. □

Definicija 1.21 *Predpostavimo, da je bilinearna forma alternirajoča. Naj bo x neničelni vektor v V in a element polja $\mathbf{P}$. Definiramo preslikavo*

$$\Psi : V \to V,$$

ki slika

$$\Psi(y) = y + a\langle x, y\rangle x.$$

*Linearne preslikave te oblike imenujemo **strigi**. Strig je torej linearna transformacija, v kateri vse točke vzdolž dane premice ostanejo negibne, ostale pa se premaknejo vzporedno s premico za razdaljo, ki je sorazmerna z oddaljenostjo od premice.*

*Strig ali strižno transformacijo predstavlja **strižna matrika**. To je elementarna matrika, ki nastane z dodajanjem ene vrstice ali stolpca neki drugi vrstici ali stolpcu.*

Opomba 1.22 *Naj bo vsaka strižna matrika v $Sp(V)$. Iz zadnje trditve izreka* 1.14 *sledi, da lahko za bilinearno formo izberemo simplektično bazo $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, kjer je $x = e_1$. Potem imamo:*

$$\Psi(e_i) = e_i \text{ za } i \neq n \text{ in } \Psi(e_n) = e_n + ae_1.$$

Zato je $\det \Psi = 1$.

Lema 1.23 *Naj bo $\langle , \rangle$ neizrojena alternirajoča forma na vektorskem prostoru V. Potem za vsak par x, y neničelnih vektorjev iz V obstaja produkt največ dveh strižnih transformacij, ki vektorju x priredi vektor y.*

Dokaz. Za vsak par vektorjev $x, y \in V$, za katera velja $\langle x, y\rangle \neq 0$, bo strižna transformacija pripadajoča vektorju $x - y$, pri čemer je element a definiran tako, da velja $a\langle x, y\rangle = 1$, ustrezala enakosti $\Psi(x) = y$. To res drži, saj

$$\Psi(x) = x + a\langle x - y, x\rangle(x - y) = x - a\langle x, y\rangle x + a\langle x, y\rangle y = y.$$

Predpostavimo, da $x \neq y$. Zadostuje najti takšen element z, da $\langle x, z\rangle \neq 0$ in $\langle y, z\rangle \neq 0$. Če velja $\langle x\rangle^\perp = \langle y\rangle^\perp$, lahko za z izberemo katerikoli element izven $\langle x\rangle^\perp$. Če pa $\langle x\rangle^\perp \neq \langle y\rangle^\perp$ izberemo $u \in \langle x\rangle^\perp \setminus \langle y\rangle^\perp$ in $u' \in \langle x\rangle^\perp \setminus \langle y\rangle^\perp$ ter $z = u + u'$. □

Lema 1.24 *Naj bo $\langle , \rangle$ neizrojena alternirajoča forma na V in naj bodo x, y, x', y' takšni vektorji v V, da velja*

$$\langle x, y\rangle = 1 \text{ in } \langle x', y'\rangle = 1.$$

Potem obstaja produkt največ štirih strižnih preslikav, ki pošlje x v x' in y v y'.

Dokaz. Po lemi 1.23 lahko najdemo dve strižni transformaciji, katerih produkt Φ pošlje x v x'. Naj bo $\Phi(y) = y''$. Potem:

$$1 = \langle x', y' \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x', y'' \rangle.$$

Posledično zadostuje najti še dve strižni transformaciji, ki pošljeta y'' v y' in določiti x'. Če $\langle y', y'' \rangle \neq 0$ velja

$$\Psi(z) = z + a\langle y'' - y', z \rangle (y'' - y').$$

Potem dobimo $\Psi(y'') = y'$ na enak način kot zgoraj in $\Psi(x') = x'$, saj $\langle y'' - y', x' \rangle = 1 - 1 = 0$. Zraven tega, v primeru ko je $\langle y', y'' \rangle = 0$, velja

$$1 = \langle x', y'' \rangle = \langle x', x' + y'' \rangle = \langle x', y' \rangle \text{ in } \langle y'', x' + y'' \rangle \neq 0 \neq \langle y', x' + y'' \rangle.$$

Torej lahko najprej preslikamo par (x', y'') v $(x', x' + y'')$ in nato slednji par v (x', y'). □

Izrek 1.25 *Simplektična grupa $Sp(V)$ je generirana s strižnimi matrikami. V splošnem je simplektična grupa vsebovana v grupi $Sl(V)$.*

Dokaz. Izberimo bazne vektorje $e_1, e_1', ..., e_m, e_m'$ prostora V, za katere bo veljalo $\langle e_i, e_i' \rangle = 1$ za $i = 1, ..., m$, vsi preostali produkti baznih elementov pa bodo enaki 0. Naj bo Φ element simplektične grupe. Zapišimo $\Phi(e_i) = \overline{e}_i$ in $\Phi(e_i') = \overline{e}_i'$. Videli smo že, da lahko najdemo produkt Ψ strižnih transformacij, ki pošljejo par (e_1, e_1') v $(\overline{e}_1, \overline{e}_1')$. Potem je $\Psi^{-1}\Phi$ identiteta na prostoru generiranem z (e_1, e_1'). Tako $\Psi^{-1}\Phi$ deluje na ortogonalnem komplementu $\langle e_1, e_1' \rangle^{\perp}$, ki je generiran s preostalimi baznimi vektorji. Zato lahko uporabimo indukcijo po dimenziji V za sklep, da lahko Ψ zapišemo kot produkt strižnih transformacij.

Zadnji del izreka sledi iz opombe 1.22 . □

1.5 Centri matričnih grup

Definicija 1.26 *Naj bo G grupa. Množico*

$$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba, \forall b \in G\}$$

*imenujemo **center grupe**.*

$Z(G)$ je podgrupa edinka grupe G. Dve med seboj izomorfni grupi imata izomorfne centre.

Izrek 1.27 *Center grupe $Gl_n(\mathbf{P})$ sestavljajo skalarne matrike, to so vse matrike oblike aI_n, kjer je a nek neničeln element v $\mathbf{P}$.*

Center grupe $Sl_n(\mathbf{P})$ sestavljajo vse matrike oblike aI_n, kjer je $a^n = 1$.

Dokaz. Naj bo $A \in Z(Gl_n(\mathbf{P}))$. Potem matrika A komutira z elementarnimi matrikami $E_{ij}(a)$. Iz enakosti $AE_{ij}(1) = E_{ij}(1)A$ sledi:

$$a_{ij} + a_{jj} = a_{ij} + a_{ii} \text{ in } a_{ii} = a_{ii} + a_{ji}.$$

Posledično $a_{ji} = 0$ in $a_{ii} = a_{jj}$, ko $i \neq j$. Tako smo dokazali prvi del izreka.

Zadnja trditev izreka sledi iz prve, saj velja, da je center grupe $Sl_n(\mathbf{P})$ enak centru preseka grup $Gl_n(\mathbf{P})$ in $Sl_n(\mathbf{P})$. □

Lema 1.28 *Naj bo V vektorski prostor dimenzije najmanj 3 nad poljem $\mathbf{P}$, kjer $2 \neq 0$ in naj bo $\langle , \rangle$ simetrična neizrojena forma. Če je Ψ takšen element grupe $O(V)$, da komutira z vsakim elementom grupe $SO(V)$, potem Ψ komutira z vsakim elementom iz grupe $O(V)$. Velja torej*

$$Z(SO(V)) = Z(O(V)) \cap SO(V)).$$

Dokaz. Naj bo x takšen element vektorskega prostora V, da velja $\langle x, x\rangle \neq 0$. Iz zadnje trditve izreka 1.10 sledi, da lahko najdemo takšno ortogonalno bazo $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, da velja $e_1 = x$. Naj bosta W_1 in W_2 prostora generirana z e_n, e_1 in e_1, e_2. Ko je $n \geq 3$ velja, da sta W_1 in W_2 med seboj različna in dobimo $W_1 \cap W_2 = \langle e_1\rangle = \langle x\rangle$.

Označimo z s_i zrcaljenje s_{e_i} iz definicije 1.17 . Za $i = 1, 2$ velja $\Psi(W_i) \subseteq W_i$ in:

$$\begin{aligned}
-\Psi(e_1) &= \Psi(s_1 s_2 e_1) \\
&= s_1 s_2 \Psi(e_1) \\
&= s_1(\Psi(e_1) - 2\frac{\langle \Psi(e_1), e_1\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2) \\
&= \Psi(e_1) - 2\frac{\langle \Psi(e_1), e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 - 2\frac{\langle \Psi(e_1), e_1\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2.
\end{aligned}$$

Sledi:

$$\Psi(e_1) = \frac{\langle \Psi(e_1), e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 - \frac{\langle \Psi(e_1), e_1\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2,$$

torej je $\Psi(e_1) \in W_2$.

Podoben argument uporabimo, ko sta indeksa namesto $1, 2$ enaka $n, 1$ in dobimo, da je $\Psi(W_1) \subseteq W_1$. Iz tega sledi $\Psi(W_1 \cap W_2) \subseteq W_1 \cap W_2$. Posledično velja $\Psi(x) = ax$, za nek $a \in \mathbf{P}$.

Ker je x poljuben vektor, za katerega velja $\langle x, x\rangle \neq 0$, imamo $\Psi(y) = a_y y$, za nek element $a_y \in \mathbf{P}$ in za vsak $y \in V$, za kateri $\langle y, y\rangle \neq 0$. V splošnem je $\Psi(e_i) = a_i e_i$, za $i = 1, ..., n$. Sedaj ni težko preveriti, da Ψs_x in $s_x\Psi$ zavzameta iste vrednosti na vseh vektorjih $e_1, ..., e_n$ in zato $\Psi s_x = s_x\Psi$. Iz izreka 1.20 sledi, da Ψ komutira z vsemi generatorji grupe $O(V)$ in posledično z vsemi elementi te grupe. Dokazali smo prvi del leme, drugi del pa sledi neposredno iz prvega. □

Izrek 1.29 *Naj bo V vektorski prostor nad poljem $\mathbf{P}$ z več kot s tremi elementi, kjer $2 \neq 0$ in naj bo $\langle , \rangle$ simetrična neizrojena forma. Potem velja:*

(i) Z(O(V))={I,-I }.

(ii) Z(SO(V))={I,-I }, če je $dim_{\mathbf{P}}V > 2$ in $dim_{\mathbf{P}}V$ je sodo število.

(iii) Z(SO(V))={I }, če je $dim_{\mathbf{P}}V > 2$ in $dim_{\mathbf{P}}V$ je liho število.

Dokaz. Naj bo $n = dim_{\mathbf{P}}V$ in naj bo Φ element iz centra grupe $O(V)$. Iz izreka 1.20 sledi, da Φ komutira z vsemi zrcaljenji oblike s_x, kjer $\langle x, x\rangle \neq 0$. Za vsak $y \in V$ velja

$$\Phi(y) - 2\frac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle}\Phi(x) = \Phi s_x(y) = s_x\Phi(y) = \Phi(y) - 2\frac{\langle \Phi(y), x\rangle}{\langle x, x\rangle}x.$$

Posledično je $\langle y, x\rangle\Phi(x) = \langle \Phi(y), x\rangle x$. V splošnem mora veljati $\Phi(x) = a_x x$, za nek $a_x \in \mathbf{P}$. Dobimo:

$$a_x^2\langle x, x\rangle = \langle a_x x, a_x x\rangle = \langle \Phi(x), \Phi(x)\rangle = \langle x, x\rangle,$$

torej $a_x = \pm 1$. Iz izreka 1.10 sledi, da obstaja ortogonalna baza $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ za $\langle , \rangle$. Potem je $\Phi(e_i) = a_i e_i$, z $a_i = \pm 1$. Pokazati moramo, da so vsi a_i enaki. Predpostavimo:

$$\langle e_i + ae_j, e_i + ae_j\rangle = \langle e_i, e_i\rangle + a^2\langle e_j, e_j\rangle,$$

za vsak $a \in \mathbf{P}$. Ker ima $\mathbf{P}$ več kot tri elemente, lahko najdemo tak $a \neq 0$, da $\langle e_i, e_i\rangle + a^2\langle e_j, e_j\rangle \neq 0$. Potem:

$$a_i e_i + aa_j e_j = \Phi(e_i + ae_j) = b(e_i + ae_j)$$

za nek $b \in \mathbf{P}$. Posledično velja, da je $a_i = a_j$, za $\forall x, y$. Dokazali smo prvi del izreka. Pravilnost trditve za grupo $SO(V)$ sledi iz prvega dela izreka in iz leme 1.28 . □

Izrek 1.30 *Center grupe $Sp(V)$ je enak $\{I, -I\}$.*

Dokaz. Naj bo Φ v centru grupe $Sp(V)$. Iz izreka 1.25 sledi, da Φ komutira z vsemi strižnimi matrikami. Naj bo Φ strižna matrika, ki ustreza x-u v V in $a \in \mathbf{P}$. Potem za vsak $y \in V$ velja

$$\Phi(y) + a\langle y, x\rangle\Phi(x) = \Phi\Psi(y) = \Psi\Phi(y) = \Phi(y) + \langle\Phi(y), x\rangle x.$$

Naj bo z nek drug vektor iz V. Na enak način dobimo:

$$\Phi(z) = a_z z \text{ in } \Phi(x+z) = a_{x+z}(x+z).$$

Posledično velja

$$a_x x + a_z z = \Phi(x+z) = a_{x+z}(x+z).$$

Torej $a_x = a_z$ in obstaja element a v $\mathbf{P}$, da velja $\Phi(x) = ax$ za $\forall x \in V$.

Izberemo tak y, da $\langle y, x\rangle \neq 0$. Vidimo, da je $\Phi(x) = ax$ za nek $a \in \mathbf{P}$. Še več, velja

$$a^2\langle x, y\rangle = \langle ax, ay\rangle = \langle\Phi(x), \Phi(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Torej je $a = \pm 1$. □

Primeri:

1. Dokaži $Z(Gl_n(\mathbf{C})) \cong \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus 0$ za vsak n!

   Ponovimo: Naj bosta $(G, *)$ in $(H, \circ)$ grupi. Preslikava $f : G \to H$ je izomorfizem grup, če:

   - je preslikava f homomorfizem: $\forall a, b \in G : f(a * b) = f(a) \circ f(b)$.
   - je preslikava f bijektivna.

   Pravimo, da sta grupi G in H med seboj izomorfni.

   Po izreku 1.27 vemo, da center grupe $Gl_n(\mathbf{C})$ sestavljajo vse skalarne matrike, torej vse matrike oblike $A = aI_n$, kjer je a nek neničeln element v $\mathbf{C}$.

   Poiščemo izomorfizem $f : Z(Gl_n(\mathbf{C})) \to \mathbf{C} \setminus 0$.

Naj bo $f(\begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & a \end{bmatrix}) = a$. Preverimo ali je preslikava res izomorfizem:

- f je homeomorfizem:

$$\forall A, B \in Z(Gl_n(\mathbf{C})) : f(A \cdot B) = f(\begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & b \end{bmatrix}) =$$

$$= \begin{bmatrix} ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ab & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & ab \end{bmatrix} = ab = f(a) \cdot f(b)$$

- f je bijektivna

Ugotovili smo, da preslikava f je izomorfizem, torej trditev $Z(Gl_n(\mathbf{C})) \cong \mathbf{C} \setminus 0$ res drži. $\square$

2. Dokaži $Z(O_n(\mathbf{C})) \cong \{\pm 1\}$, za vsak n!

Po prvi trditvi izreka 1.29 vemo, da je $Z(O_n(\mathbf{C})) = \{I, -I\}$. Poiščemo izomorfizem $f : \{I, -I\} \to \{\pm 1\}$.

Naj bo $A = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & a \end{bmatrix} \in \{I, -I\}$ in $f(A) = a$.

Že v prejšnjem primeru smo pokazali, da je preslikava f homomorfizem in da je bijektivna, torej sta prostora res izomorfna $\Rightarrow Z(O_n(\mathbf{C})) \cong \{\pm 1\}$. $\square$

3. Dokaži $Z(SO_n(\mathbf{C})) \cong \{1\}$, kjer je $n \geq 3$ lih!

Po tretji alineji izreka 1.29 vemo, da je $Z(SO_n(\mathbf{C})) = \{I\}$, kjer je $n \geq 3$ lih. Da bo prvotna trditev res držala, mora obstajati bijektivni homomorfizem $f : \{I\} \to \{1\}$.

Takšna preslikava je $f(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & 1 \end{bmatrix}) = 1$, saj je bijektivna in kot smo videli v prejšnjih primerih tudi homomorfizem. $\square$

Poglavje 2

Eksponentna funkcija in geometrija matričnih grup

2.1 Norme in metrike na matričnih grupah

Matrične grupe, ki smo jih obravnavali v prvem poglavju, so bile podmnožice kvadratnih matrik $M_n(\mathbf{P})$ s kompleksnimi koeficienti. V tem razdelku bomo pokazali kako jim priredimo geometrično strukturo. Na množici kvadratnih matrik bomo torej obravnavali pojma norma in metrika, ki sta posplošitvi pojmov razdalje in dolžine. Njihova vpeljava nam bo kasneje služila kot eno izmed pomembnejših orodij pri obravnavi matrične eksponentne preslikave.

Naj bo v nadaljevanju polje $\mathbf{P}$ polje realnih ali kompleksnih števil, razen, ko bo izrecno navedeno drugače in V vektorski prostor nad poljem $\mathbf{P}$.

Definicija 2.1 *Naj bo $x = (a_1, ..., a_n)$ vektor prostora $V_{\mathbf{P}}^n$. Normo vektorja x definiramo na naslednji način:*

$$\| x \| = C \max_i | a_i |,$$

kjer je $| a |$ običajna norma elementa a v $\mathbf{P}$ in C neko fiksno, pozitivno realno število. Normo na vektorkem prostoru $\mathbf{P^n}$ imenujemo ***vektorska norma****.*

Opomba 2.2 $V_{\mathbf{P}}^1$ *in* $\mathbf{P}$ *sta kanonično izomorfna kot vektorska prostora. Znotraj tega izomorfizma norma $\|\|$ na $V_{\mathbf{P}}^1$ ustreza normi $||$ na $\mathbf{P}$.*

Izrek 2.3 *Za vsaka vektorja $x, y \in \mathbf{P}^n$ in vsak element $a \in \mathbf{P}$ veljajo naslednje lastnosti:*

(i) $\| x \| \geq 0$ *in* $\| x \| = 0$ *natanko tedaj, ko je* $x = 0$,

(ii) $\| ax \| = | a | \| x \|$,

(iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Dokaz. Navedene lastnosti držijo za normo $| |$ na $\mathbf{P}$ (glej opombo 2.2). Posledično iz definicije 2.1 sledijo vse naštete lastnosti tudi za normo na $V_{\mathbf{P}}^n$. □

Opomba 2.4 *$M_n(\mathbf{P})$ lahko obravnavamo kot vektorski prostor $V_{\mathbf{P}}^{n^2}$ dimenzije n^2, kjer seštevanje vektorjev poteka pokomponentno, enako kot seštevanje matrik. V definiciji norme na $M_n(\mathbf{P})$ bomo izbrali $C = n$, v vseh ostalih primerih pa izberemo $C = 1$, razen, če ni izrecno navedeno drugače. Tako je norma na $M_n(\mathbf{P})$ definirana kot:*

$$\| x \| = n \max_{ij} | a_{ij} | .$$

Normo na $M_n(\mathbf{P})$ imenujemo ***matrična norma****.*

V nadaljevanju bomo videli, kako se norme obnašajo glede na množenje v $M_n(\mathbf{P})$.

Izrek 2.5 *Naj bosta X in Y matriki v $M_n(\mathbf{P})$. Potem velja neenakost*

$$\| XY \| \leq \| X \| \| Y \| .$$

Dokaz. Naj bo $X = (a_{ij})$ in $Y = (b_{ij})$. Potem velja

$$\begin{aligned}
\| XY \| = n \max_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right) &\leq n \max_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} | a_{ik} | | b_{kj} |\right) \\
&\leq nn \max_{ij}(| a_{ik} | | b_{kj} |) \\
&\leq n^2 \max_{ij} | a_{ij} | \max_{ij} | b_{ij} | = \| X \| \| Y \| .
\end{aligned}$$

□

Na prostoru $V_{\mathbf{P}}^n$ lahko obstajajo različne, med seboj povezane norme. Posledično je priročno podati bolj splošno definicijo norme, ki bo veljala za vse vektorske prostore.

Definicija 2.6 ***Norma*** *na vektorskem prostoru V je preslikava*

$$\| \cdot \|: V \to \mathbf{R},$$

za katero velja:

(i) $\| x \| \geq 0$ *in* $\| x \| = 0$ *natanko tedaj, ko je* $x = 0$,

(ii) $\| ax \| = | a | \| x \|$,

(iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$,

za vsaka vektorja $x, y \in V$ *in vsak element* $a \in \mathbf{P}$.

Par $(V, \| \cdot \|)$ *imenujemo* ***normiran vektorski prostor***.

Primer 1. Za vektorski prostor V izberimo bazo $e = (e_1, ..., e_n)$ in kanonični izomorfizem

$$\Psi_e : V \to V_{\mathbf{P}}^n,$$

podan s predpisom:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Norma $\| \cdot \|$ iz definicije 2.1, podana na $V_{\mathbf{P}}^n$, inducira normo $\| \cdot \|_e$ na V:

$$\| x \|_e = \| \Psi_e(x) \| .$$

Če izberemo drugo bazo $f = (f_1, ..., f_n)$ v V, dobimo drugačno normo $\| \cdot \|_f$ na tem prostoru, ki je tesno povezana z normo $\| \cdot \|_e$. Natančneje, imamo dve takšni pozitivni konstanti C_1 in C_2, da velja

$$C_2 \| x \|_f \leq \| x \|_e \leq C_1 \| x \|_f .$$

Naj bo $f_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} e_j$ za $i = 1, ..., n$. Za vsak vektor $x = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i$ iz V velja

$$\begin{aligned} \| x \|_e &= \| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \| = \| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i p_{ij} e_j \|_e \\ &= \max_j (\| \sum_{i=1}^{n} a_i p_{ij} \|) = \max_j (\sum_{i=1}^{n} \| a_i \| \| p_{ij} \|) \end{aligned}$$

$$\leq \quad n\max_i(\| a_i \|)\max_{ij}(\| p_{ij} \|) = n \| x \|_f \max(\| p_{ij} \|).$$

Za konstanto lahko izberemo $C_1 = n\max(\| p_{ij} \|)$. Podobno poiščemo konstanto C_2.

Z normo na vektorskem prostoru lahko definiramo funkcijo razdalje na tem prostoru.

Definicija 2.7 *Naj bo $(V, \| \cdot \|)$normiran vektorski prostor. Za vsak par vektorjev $x, y \in V$ definiramo funkcijo razdalje ali **metriko** na naslednji način:*

$$d(x, y) = \| x - y \| .$$

Definicija 2.8 *Naj bo X neprazna množica. **Metrika** na X je preslikava*

$$d : X \times X \to \mathbf{R},$$

kjer za vsako trojico točk $x, y, z \in X$ velja:

(i) $d(x, y) \geq 0$ *in* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

*Par (X, d) imenujemo **metrični prostor**.*

Metrika je posplošitev pojma razdalje, saj podaja oddaljenost med elementoma dane množice.

Opomba 2.9 *Naj bo (X, d_X) metričen prostor. Za vsako podmnožico $Y \subset X$ obstaja metrika d_Y na Y, definirana kot $d_Y(x, y) = d_X(x, y)$, kjer $x, y \in Y$. (Y, d_Y) imenujemo **metričen podprostor** prostora (X, d_X).*

Definicija 2.10 *Naj bo r pozitivno realno število in x točka v X. **Krogla** $B(x, r)$ z radijem r in s središčem x je množica*

$$\{y \in X : d(x, y) \ < r\}.$$

*Pravimo, da je podmnožica $U \subset X$ **odprta**, če za vsako točko $x \in U$ obstaja takšno pozitivno realno število r, da je krogla $B(x, r)$ vsebovana v U.*

Opomba 2.11 *Naj bo $B(x,r)$ poljubna odprta krogla, $y \in B(x,r)$ ter $s = r - d(x,y)$. Krogla $B(y,s)$ je vsebovana v $B(x,r)$, saj za vsak $z \in B(y,s)$ velja*

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + s = r.$$

Metrika na $V_{\mathbf{P}}^n$ je definirana kot:

$$d((a_1,...,a_n),(b_1,...,b_n)) = max_i \mid a_i - b_i \mid .$$

Zato je krogla $B(x,r)$ s središčem v x in radijem r v tem primeru geometrično kocka s središčem v x in robom dolžine $2r$. Vidimo, da če je podprostor U prostora $V_{\mathbf{P}}^n$ odprt glede na normo, izračunano po eni konstanti C, potem je odprt glede na norme, definirane z vsemi drugimi pozitivnimi konstantami.

Definicija 2.12 *Preslikava $\Phi : X \to Y$ iz metričnega prostora (X, d_X) v metričen prostor (Y, d_Y) je* ***zvezna****, če za vsako točko $x \in X$ in katerokoli pozitivno realno število ϵ, obstaja takšno pozitivno realno število δ, da je slika krogle $B(x,\delta)$ pri preslikavi Φ vsebovana v $B(\Phi(x),\epsilon)$.*

Zvezno preslikavo med metričnima prostoroma, ki je bijektivna in katere inverz je zopet zvezna preslikava, imenujemo ***homomorfizem*** *metričnih prostorov.*

Izrek 2.13 *Naj bo $\Phi : X \to Y$ preslikava med metričnima prostoroma (X, d_X) in (Y, d_Y). Preslikava Φ je zvezna natanko tedaj, ko je praslika vsake odprte množice $V \subset Y$ odprta množica v X.*

Dokaz. Privzemimo, da je Φ zvezna preslikava. Naj bo V odprta podmnožica v Y. Pokazati moramo, da je $U = \Phi^{-1}(V)$ odprta v X.

Izberimo $x \in U$. Ker je V odprta množica, lahko najdemo takšno pozitivno število ϵ, da je

$$B(\Phi(x),\epsilon) \in V$$

in ker je Φ zvezna, lahko najdemo takšno pozitivno število δ, da velja

$$\Phi(B(x,\delta)) \subseteq B(\Phi(x),\epsilon).$$

Sledi, da je krogla $B(x,\delta)$ vsebovana v U. Posledično je vsak $x \in U$ vsebovan v neki krogli v U. Zato je U odprt podprostor.

Obratno, predpostavimo, da je slika pri inverzni preslikavi Φ^{-1} katerekoli odprte podmnožice iz Y odprta v X. Naj bo $x \in X$ in naj bo ϵ pozitivno realno število. Potem je $B(\Phi(x),\epsilon)$

odprta v Y. Posledično je množica $U = \Phi^{-1}(B(\Phi(x), \epsilon))$ odprta v X. Zato lahko najdemo takšno pozitivno realno število δ, da je krogla $B(x, \delta)$ vsebovana v U. Zato velja

$$\Phi(B(x, \delta)) \subseteq \Phi(U) = B(\Phi(x), \epsilon).$$

To pomeni, da je Φ zvezna. $\square$

Opomba 2.14 *Veliko lastnosti zveznih preslikav sledi neposredno iz izreka 2.13 . Tudi ta, da je kompozitum $\Psi\Phi$ dveh zveznih preslikav $\Phi : X \to Y$ ter $\Psi : Y \to Z$ zvezna preslikava.*

Primer 2. Preslikava

$$det : M_n(\mathbf{P}) \to \mathbf{P}$$

je podana s polinomom

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} sign(\pi) x_{1\pi(1)} x_{2\pi(2)} \ldots x_{n\pi(n)}$$

stopnje n, s spremenljivkami x_{ij}, kjer sta $i, j = 1, ..., n$. Znak $sign(\pi)$ je v primeru, ko je π soda permutacija enak 1 in je enak -1, ko je le-ta liha permutacija.

Determinanta je zvezna preslikava. Za vsako matriko $A \in Gl_n(\mathbf{P})$ velja, da $\det A \neq 0$.

Naj bo $\epsilon = \mid \det A \mid$. Potem obstaja takšno pozitivno realno število δ , da se krogla $B(A, \delta)$ v $V_{\mathbf{P}}^{n^2}$ preslika v kroglo $B(\det A, \epsilon)$ v $\mathbf{P}$. Ta krogla ne vsebuje 0. Torej lahko najdemo kroglo v okolici A, ki je vsebovana v $Gl_n(\mathbf{P})$. Zato je $Gl_n(\mathbf{P})$ odprta podmnožica prostora $M_n(\mathbf{P})$.

Primer 3. Imamo determinanto, ki določa zvezno preslikavo

$$\det : O_n(\mathbf{P}) \to \{\pm 1\}.$$

Inverz slike točke 1 pri tej preslikavi je množica $SO_n(\mathbf{P})$. Ker je točka 1 odprta v $\{\pm 1\}$, sledi, da je $SO_n(\mathbf{P})$ odprta podmnožica množice $O_n(\mathbf{P})$.

2.2 Eksponentna preslikava

Osrednja tema diplomske naloge so matrične grupe in na njih definirana eksponentna funkcija. Torej analitična matrična funkcija $A \mapsto e^A$. Za izračun le te obstaja mnogo najrazličnejših metod, kot je metoda potenčne vrste, polinomske metode, metoda razcepa matrike A, izračun vrednosti s pomočjo diagonalizacije matrike in Jordanove kanonične forme, metoda, ki temelji na diferencialnih enačbah in druge. Obravnavali bomo le dve izmed naštetih in sicer, metodo kjer vrednost funkcije dobimo s pomočjo razvoja v potenčno vrsto, v naslednjem razdelku pa še metodo, kjer le to izračunamo s pomočjo diagonalizacije dane matrike.

Definicija 2.15 *Naj bo (X, d) metričen prostor. Zaporedje $x_1, x_2, ...$ elementov iz X* ***konvergira*** *k nekemu elementu $x \in X$, če za vsako pozitivno realno število ϵ obstaja takšno naravno število n, da za vsak $i > n$ velja $d(x, x_i) < \epsilon$.*

Zaporedje $x_1, x_2, ...$ je ***Cauchyevo zaporedje****, če za vsako pozitivno realno število ϵ obstaja tako naravno število n, da velja $d(x_i, x_j) < \epsilon$, ko sta $i, j > n$.*

Vsako konvergentno zaporedje v metričnem prostoru je Cauchyevo.

Metričen prostor X je ***poln****, če je v njem vsako Cauchyevo zaporedje konvergentno.*

Naj bo X vektorski prostor, pripadajoča metrika pa naj izhaja iz norme. Vrsta $x_1 + x_2 + ...$ je konvergentna, če je zaporedje delnih vsot $\{y_n = x_1 + x_2 + ... + x_n\}_{n=1,2,...}$ konvergentno.

Izrek 2.16 *Prostor $V_{\mathbf{P}}^n$ z normo $\| x \| = C \max_i \mid a_i \mid$ je poln.*

Dokaz. Naj bo $x_i = (a_{i_1}, ..., a_{i_n})$ Cauchyevo zaporedje v $V_{\mathbf{P}}^n$. Za dan ϵ obstaja takšno naravno število m, da:

$$\| x_i - x_j \| = max_k \mid a_{i_k} - a_{j_k} \mid < \epsilon \text{ za vsaka } i, j > m.$$

Posledično so zaporedja $a_{1_k}, a_{2_k}, ...$ Cauchyeva v $\mathbf{P}$, za $k = 1, ..., n$. Ker je $\mathbf{P}$ poln prostor, ta zaporedja konvergirajo k elementom $a_1, ..., a_n$. Torej zaporedja $x_1, x_2, ...$ konvergirajo k $x = (a_1, ..., a_n)$. □

Definicija 2.17 *Eksponentna funkcija $f(x) = e^x$ je analitična funkcija. Njena potenčna vrsta je*

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

in konvergira za vsak $x \in \mathbf{C}$.

Opomba 2.18 *Eksponentno funkcijo, kjer v eksponentu nastopa matrika, torej funkcijo s predpisom $A \mapsto e^A$, imenujemo* ***eksponentna matrična funkcija****.*

V nadaljevanju bomo, zaradi lažjega zapisa, namesto oznake e^A uporabljali oznako $exp(A)$.

Primer 1. Za poljubno matriko $X \in M_n(\mathbf{P})$ in $m = 0, 1, ...$ naj bo $\exp_m(X)$ matrika

$$\exp_m(X) = I_n + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{m!}X^m.$$

Zaporedje $\{\exp_m(X)\}_{m=0,1...}$ je Cauchyevo zaporedje v $M_n(\mathbf{P})$, ker za $q > p$ velja

$$\begin{aligned} \| \exp_q(X) - \exp_p(X) \| &= \| \frac{1}{(p+1)!}X^{p+1} + \cdots + \frac{1}{q!}X^q \| \\ &\leq \frac{1}{(p+1)!} \| X^{p+1} \| + \cdots + \frac{1}{q!} \| X^q \| \\ &\leq \frac{1}{(p+1)!} \| X \|^{p+1} + \cdots + \frac{1}{q!} \| X \|^q . \end{aligned}$$

Izraz na desni bo postal poljubno majhen z velikim številom p, ker zaporedje $\{1 + \frac{1}{1!} \| X \| + ... + \frac{1}{m!} \| X \|^m\}_{m=0,1,...}$ konvergira k $\exp(\| X \|)$, kjer je $\exp(x)$ običajna eksponentna funkcija na $\mathbf{P}$.

Definicija 2.19 *Za poljubno matriko* $X \in M_n(\mathbf{P})$ *definiramo* $\exp(X)$ *kot limito zaporedja matrik* $\exp_0(X)$, $\exp_1(X), ...$.

Posledica 2.20 *Naj bo* $\Phi : \mathbf{C} \to M_2(\mathbf{R})$ *preslikava, podana s predpisom:*

$$\Phi(x + iy) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}.$$

Potem velja enakost

$$\Phi(\exp(iy)) = \exp(\Phi(iy)).$$

Eksponentna funkcija na levi strani dane enačbe je običajna eksponentna funkcija s kompleksnim argumentom, na desni strani pa imamo matrično eksponentno preslikavo.

Opomba 2.21 *Eksponentna funkcija določa zvezno preslikavo:*

$$\exp : M_n(\mathbf{P}) \to M_n(\mathbf{P}).$$

Dejansko moramo videti, da velja

$$\| \exp_m(X) \| \leq \exp(\| X \|).$$

Naj bo $B(Z, r)$ *krogla v* $M_n(\mathbf{P})$*. Izberimo tako matriko* $Y \in M_n(\mathbf{P})$*, da bo velja neenakost*

$\| Z \| + r \leq \| Y \|$. *Potem za katerokoli* $X \in B(Z,r)$*:*

$$\| X \| \leq \| X - Z \| + \| Z \| \leq r + \| Z \| \leq \| Y \| .$$

Posledično velja tudi

$$\| \exp_m(X) \| \leq \exp(\| X \|) \leq \exp(\| Z \|).$$

Sledi, da zaporedje $\exp_0(X)$,$\exp_1(X)$,... *konvergira enakomerno na* $B(Z,r)$.

Funkcije $\exp_m : M_n(\mathbf{P}) \to M_n(\mathbf{P})$ *so podane s polinomi, zato so zvezne. Ker konvergirajo enakomerno, je njihova limita* exp *zvezna na* $B(Z,r)$. *Posledično je* exp *zvezna kjerkoli.*

Primer 2. Naj bo $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Potem $X^2 = -I_2$, $X^3 = -X$, $X^4 = I_2, \ldots$. Za vsak $t \in \mathbf{P}$ velja

$$\exp(tX) = I_2 + \frac{1}{1!}tX - \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3X + \frac{1}{4!}t^4 + \ldots = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je dana preslikava homomorfizem grup $\mathbf{P} \to SO_2(\mathbf{P})$, ki povezuje okolice točke $I_2 \in SO_2(\mathbf{P})$ z majhnimi okolicami točk v $\mathbf{P}$.

Za eksponentno preslikavo na $M_n(\mathbf{P})$ veljajo enake lastnosti, kot za eksponentno funkcijo na $\mathbf{P}$, kar vidimo iz naslednjega izreka.

Izrek 2.22 *Za matrično eksponentno funkcijo veljajo naslednje lastnosti:*

(i) $\exp(0) = I_n$,

(ii) $\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$, *če je* $XY = YX$,

(iii) $\exp(-X)\exp(X) = I_n$. *Posledično* $\exp(X) \in Gl_n(\mathbf{P})$.

(iv) $\exp(X^T) = (\exp(X))^T$,

(v) $\exp(Y^{-1}XY) = Y^{-1}\exp(X)Y$, *za vse obrnljive matrike* Y.

(vi) Če je $X = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ *diagonalna* $\Rightarrow \exp(X) = \begin{bmatrix} \exp(a_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \exp(a_n) \end{bmatrix}$.

Dokaz. Trditev (i) je očitna.

Pri dokazovanju druge trditve moramo upoštevati, da iz komutativnosti $XY = YX$ sledi $(X+Y)^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} X^j Y^{i-j}$. Dobimo:

$$\exp_m(X+Y) = I_n + (X+Y) + ... + \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!(m-i)!} X^i Y^{m-i}.$$

Hkrati velja

$$\exp_m(X)\exp_m(Y) = (I_n + \frac{1}{1!}X + ... + \frac{1}{m!}X^m)(I_n + \frac{1}{1!}Y + ... + \frac{1}{m!}Y^m) =$$

$$= I_n + \frac{1}{1!}(X+Y) + ... + \frac{1}{m!}X^m + \frac{1}{(m-1)!}X^{m-1}Y + ... + \frac{1}{m!}Y^m + \frac{1}{m!}g_m(X,Y),$$

kjer $g_m(X,Y)$ sestavljajo vsote produktov oblike:

$$\frac{1}{(p-j)!j!} X^j Y^{(p-j)}, \text{ kjer } p > m.$$

Torej je

$$\parallel g_p(X,Y) \parallel = \parallel \exp_{2p}(X+Y) - \exp_p(X+Y) \parallel .$$

Ker zaporedje $\{\exp_m(X+Y)\}_{m=0,1,...}$ konvergira k $\exp(X+Y)$, velja da zaporedje $\{g_m(X,Y)\}_{m=0,1,...}$ konvergira k 0. Tako smo dokazali trditev (ii).

Trditev (iii) izpeljemo iz trditve (i) in (ii), ko je $Y = -X$.

Trditev (iv) sledi iz formule $(X^m)^T = (X^T)^m$, za $m = 1, 2, ...$.

Trditev (v) pa iz enakosti

$$(Y^{-1}XY)^m = Y^{-1}X^mY \text{ ter } Y^{-1}XY + Y^{-1}ZY = Y^{-1}(X+Z)Y.$$

Trditev (vi) sledi iz definicije eksponentne funkcije. □

Opomba 2.23 *Komutativnost matrik* $A, B \in M_n(\mathbf{P})$ *je potreben pogoj za veljavnost identitete*

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A),$$

ni pa nujen. Kljub temu lahko velja:

$$\exp(A+B) \;=\; \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A) \;\; \textit{ali}$$

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &\neq \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A) \ \textit{ali} \\ \exp(A+B) &= \exp(A)\exp(B) \neq \exp(B)\exp(A)\ ,\end{aligned}$$

pri tem pa matriki A in B ne komutirata.

Primer 3. Čeprav ima matrična eksponentna funkcija podobne lastnosti kot realna eksponentna funkcija, lahko v splošnem izgleda precej drugače. Na primer, za matriko

$A = \exp\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dobimo, da je $\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & x & y + \frac{1}{2}xz \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, saj je $A^3 = 0$.

Opomba 2.24 *Za **nilpotentne matrike**, to so matrike za katere je $A^n = 0$ za poljubno naravno število n, je eksponentna funkcija* $\exp(A)$ *vedno polinom spremenljivke A. V tem primeru lahko torej eksponentno funkcijo matrike izračunamo neposredno iz razvoja v vrsto, ker se le ta konča po končnem številu členov.*

Primer 4. Za $A \in M_n(\mathbf{P})$ in $m = 1, 2, ...$, naj bo $\log_m(A)$ matrika:

$$\log_m(A) = (A - I_n) - \frac{1}{2}(A - I_n)^2 + ... + (-1)^{m-1}\frac{1}{m}(A - I_n)^m.$$

Predpostavimo, da je $\| A - I_n \| < 1$. Potem je zaporedje $log_1(A), log_2(A), ...$ Cauchyevo zaporedje.

Za $q > p$ velja

$$\begin{aligned}\| \log_q(A) - \log_p(A) \| &= \| (-1)^p\frac{1}{p+1}(A - I_n)^{p+1} + \ldots + (-1)^q\frac{1}{q}(A - I_n)^q \| \\ &\leq \frac{1}{p+1} \| A - I_n \|^{p+1} + ... + \frac{1}{q} \| A - I_n \|^q\ .\end{aligned}$$

Izraz na levi strani je lahko poljubno majhen z velikim p, ker zaporedje $\{\| A - I_n \| + \frac{1}{2} \| A - I_n \|^2 + ... + \frac{1}{m} \| A - I_n \|^m\}_{m=1,2,...}$ konvergira, ko je $\| A - I_n \| < 1$.

Definicija 2.25 *Naj bo matrika $A \in M_n(\mathbf{P})$. Definiramo logaritemsko funkcijo* $\log(A)$ *kot limito zaporedja* $\log_1(A), \log_2(A), ...$ *, ko je le-to konvergentno.*

Izrek 2.26 *Za logaritemsko funkcijo na matrikah veljajo naslednje lastnosti:*

(i) $\log(I_n) = 0$,

(ii) $\log(A^T) = (log(A))^T$,

(iii) $\log(A)$ *je definiran natanko tedaj, ko je definiran* $\log(B^{-1}AB)$, *kjer je* B *obrnljiva matrika in velja*

$$\log(B^{-1}AB) = B^{-1}\log(A)B.$$

(iv) *Če je* $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ *diagonalna* $\Rightarrow log(A) = \begin{bmatrix} log(a_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & log(a_n) \end{bmatrix}$.

(v) *Kadar je* $AB = BA$ *in so logaritemske funkcije* $\log(A)$, $\log(B)$ *ter* $log(AB)$ *definirane, velja*

$$\log(A)\log(B) = \log(B)\log(A).$$

Dokaz. Vse navedene lastnosti dokažemo na podoben način, kot smo dokazali lastnosti eksponentne funkcije (izrek 2.22). Pri dokazovanju zadnje trditve upoštevamo, da so v primeru komutativnosti $AB = BA$ delne vsote zaporedij $\log_m(A)\log_m(B)$ in $\log_m(B)log_m(A)$ prav tako enake. □

Opomba 2.27 *Logaritemska funkcija določa zvezno preslikavo:*

$$\log : B(I_n, 1) \to M_n(\mathbf{P}),$$

kar sledi iz neenakosti

$$\| \frac{1}{m}X^m \| \leq \frac{1}{m} \| X \|^m,$$

saj zaporedje $\log(1-x) = -(x + \frac{1}{2}x^2 + ...)$ *konvergira za* $| x |< 1$.

Primer. Poišči matriki $\exp \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ in $\exp \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$!

a.) $\exp \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right) = \exp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \exp \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

- $\exp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}$

- $$\exp\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{1!}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2!}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{3!}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\tfrac{1}{4!}\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} + ... = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2!}\cdot 4+\frac{1}{4!}\cdot 16+... & 1+\frac{1}{3!}\cdot 4+\frac{1}{5!}\cdot 16+... \\ 4+\frac{1}{3!}\cdot 16+\frac{1}{5!}\cdot 64+... & 1+\frac{1}{2!}\cdot 4+\frac{1}{4!}\cdot 16+... \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ch2 & \frac{1}{2}sh2 \\ 2sh2 & ch2 \end{bmatrix}$$

Torej:

$$\exp\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ch2 & \frac{1}{2}sh2 \\ 2sh2 & ch2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{e^2+e^{-2}}{2} & \frac{e^2-e^{-2}}{4} \\ e^2-e^{-2} & \frac{e^2+e^{-2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^3+e^{-1}) & \frac{1}{4}(e^3-e^{-1}) \\ e^3-e^{-1} & \frac{1}{2}(e^3+e^{-1}) \end{bmatrix}.$$

b.) $$\exp\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{1!}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2!}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{3!}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+\tfrac{1}{4!}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{5!}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + ...$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+... & 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+... & \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdot 3+\frac{1}{4!}\cdot 6+\frac{1}{5!}\cdot 10+... \\ 0 & 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+... & 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+... \\ 0 & 0 & 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+... \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & e & \frac{1}{2}\cdot(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...) \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & e & \frac{1}{2}\cdot(1+1+\frac{12}{4!}+\frac{20}{5!}+...) \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & e & \frac{1}{2}e \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

2.3 Izračun vrednosti eksponentne in logaritemske funkcije s pomočjo diagonalizacije matrik

Najlažji način za dokazovanje lastnosti eksponentnih in logaritemskih funkcij na matrikah je, da jih izpeljemo iz ustreznih lastnosti realnih eksponentnih in logaritemskih funkcij. Iz trditev (v) in (vi) izreka 2.22 ter (iii) in (iv) izreka 2.26 sledi, da so lastnosti eksponentne in logaritemske matrične funkcije podedovane iz njunih lastnosti na množici diagonalizabilnih matrik. Uporabimo dejstvo, da so navedene funkcije zvezne in da obstajajo diagonalizabilne matrike, kar nam pomaga pri izpeljavi želenih lastnosti za vse matrike.

Definicija 2.28 *Podmnožica S metričnega prostora (X, d) je* ***gosta****, če vsaka krogla $B(x, \epsilon) \in X$ vsebuje kakšen element iz S. Ekvivalentno, množica S je gosta, če vsaka neprazna, odprta množica v X vsebuje element iz S.*

Lema 2.29 *Naj bosta (X, d_X) in (Y, d_Y) metrična prostora, T gosta podmnožica prostora X ter f in g zvezni funkciji, ki slikata iz X v Y. Če je $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in T$, potem velja, da je $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in X$.*

Dokaz. Predpostavimo, da lema ne drži. Potem obstaja takšen $x \in X$, da $f(x) \neq g(x)$. Naj bo $\epsilon = d_Y(f(x), g(x))$. Krogli:

$$B_1 = B(f(x), \frac{\epsilon}{2}) \text{ in } B_2 = B(g(x), \frac{\epsilon}{2})$$

se ne sekata, množici:

$$U_1 = f^{-1}(B_1) \text{ ter } U_2 = g^{-1}(B_2)$$

pa sta odprti v X in vsebujeta x. Ker je T gosta, je točka $y \in T$ vsebovana v $U_1 \cap U_2$. Velja $z = f(y) = g(y)$ in posledično je z vsebovana v obeh kroglah B_1 in B_2. To je nemogoče, saj sta B_1 in B_2 disjunktni. Posledično velja, da ne obstaja nobena točka x, za katero bi bilo $f(x) \neq g(x)$. □

Definicija 2.30 *Pravimo, da je matrika $X \in M_n(\mathbf{C})$* ***diagonalizabilna****, če obstaja taka obrnljiva matrika P, da je $P^{-1}XP$ diagonalna matrika.*

Posledica 2.31 *Naj bo matrika A diagonalizibilna: $D = P^{-1}AP$. Potem velja*

$$\exp(D) = P^{-1}\exp(A)P \Longrightarrow \exp(A) = P\exp(D)P^{-1}.$$

Primer. Naj bo matrika $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ diagonalizabilna matrika, podobna diagonalni matriki $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, matrika prehoda pa je $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Poišči eksponentno funkcijo matrike A s pomočjo razvoja v vrsto ter s pomočjo njene diagonalizacije.

a.) izračun vrednosti s pomočjo diagonalizacije matrike:

$$\begin{aligned} \exp(A) = P\exp(D)P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2} & -e^{-2}+e \\ 0 & e \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b.) razvoj funkcije v potenčno vrsto:

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} -8 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \ldots \\ &= \begin{bmatrix} 1-2+\frac{4}{2!}-\frac{8}{3!}+\ldots & 0+3-\frac{3}{2!}+\frac{9}{3!}-\ldots \\ 0 & 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2} & -e^{-2}+e \\ 0 & e \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vidimo, da sta končni vrednosti v obeh primerih res enaki.

Izrek 2.32 *Naj bo matrika $X \in M_n(\mathbf{C})$. Potem obstajajo matrika Y, kompleksna števila d_i in e_i za $i = 1, ..., n$ (kjer so e_i med seboj različna števila), ter takšno realno pozitivno število ϵ, da za vsak neničeln $t \in \mathbf{C}$, $\mid t \mid < \epsilon$ velja, da je $X + tY$ diagonalizabilna matrika. Pripadajoča diagonalna matrika ima (i, i)-to koordinato enako $d_i + te_i$, za $i = 1, ..., n$.*

Dokaz. Trditev zagotovo drži za $n = 1$. Nadaljujemo z indukcijo po n. Predpostavimo, da trditev drži za $n - 1$. Izberimo lastno vrednost $d_1 \in X$ in neničeln lastni vektor x_1 za d_1. Torej $Xx_1 = d_1x_1$. Izberemo lahko bazo $\mathcal{B} = \{x_1, ..., x_n\}$ za $V^n_{\mathbf{P}}$. Glede na to bazo je matrika X oblike:

$$X = \begin{bmatrix} d_1 & a \\ 0 & X_1 \end{bmatrix},$$

kjer je $a = (a_{12}, ..., a_{1n})$, X_1 pa je neka $(n - 1) \times (n - 1)$ matrika.

Po indukcijski predpostavki obstajajo matrika Y_1 in elementi $d_i, e_i \in \mathbf{C}$ za $i = 2, ..., n$, kjer so vsi e_i med seboj različni ter takšen ϵ_1, da za vsak neničeln $\mid t \mid < \epsilon_1$ obstaja taka obrnljiva matrika $C_1(t)$, da je $X_1 + tY_1 = C_1(t)D_1(t)C_1(t)^{-1}$ in je $D_1(t)$ neka $(n-1) \times (n-1)$ diagonalna matrika z $(i-1, i-1)$-to koordinato enako $d_i + te_i$ (za $i = 2, ..., n$) . Enakost lahko zapišemo tudi v obliki:

$$(X_1 + tY_1)C_1(t) = C_1(t)D_1(t). \tag{2.1}$$

Naj bo:

$$X = \begin{bmatrix} d_1 & a \\ 0 & X_1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{bmatrix}, C(t) = \begin{bmatrix} 1 & c(t) \\ 0 & C_1(t) \end{bmatrix}, D(t) = \begin{bmatrix} d_1 + te_1 & 0 \\ 0 & D_1(t) \end{bmatrix},$$

kjer je $c(t) = (c_{12}(t), ..., c_{1n}(t))$, za neke elemente $c_{1i}(t) \in \mathbf{P}$. Upoštevamo, da je

$$\det C(t) = \det C_1(t) \neq 0 \text{ za vse } t \neq 0 \text{ in } \mid t \mid < \epsilon_1.$$

Torej je matrika $C(t)$ obrnljiva za katerokoli izbiro elementov $c_{1i}(t) \in \mathbf{P}$. Naj bo $X(t) = X + tY$. Poiskati moramo takšna števila $c_{1i}(t)$ in e_1, da velja enakost

$$X(t)C(t) = C(t)D(t). \tag{2.2}$$

Imamo:

$$\begin{aligned} X(t)C(t) &= \begin{bmatrix} d_1 + te_1 & a \\ 0 & X_1 + tY_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c(t) \\ 0 & C_1(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1 + te_1 & (d_1 + te_1)c(t) + a'(t) \\ 0 & (X_1 + tY_1)C_1(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

kjer je $a'(t) = (\sum_{i=2}^{n} a_{1i}c_{i2}(t), ..., \sum_{i=2}^{n} a_{1i}c_{in}(t))$ in

$$C(t)D(t) = \begin{bmatrix} 1 & c(t) \\ 0 & C_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 + te_1 & 0 \\ 0 & D_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + te_1 & c'(t) \\ 0 & C_1(t)D_1(t) \end{bmatrix},$$

kjer je $c'(t) = ((d_2 + te_2)c_{12}(t), ..., (d_n + te_n)c_{1n}(t))$.

Ker velja enačba (2.1), potem velja enačba (2.2) natanko tedaj, ko je

$$(d_1 + te_1)c_{1i}(t) + a_{12}c_{2i}(t) + ... + a_{1n}c_{ni}(t) = (d_i + te_i)c_{1i}(t). \qquad (2.3)$$

za $i = 2, ..., n$.

Izberimo e_i različen od vseh $e_2, ..., e_n$. Potem ima vsaka enačba $d_1 + te_1 = d_i + te_i$ natanko eno rešitev $t = -(d_i - d_1)/(e_i - e_1)$ in lahko izberemo takšen $\epsilon < \epsilon_1$, da za neničelni t, $\mid t \mid < \epsilon$ velja $(d_i - d_1) + t(e_i - e_1) \neq 0$. Potem števila

$$c_{1i}(t) = \frac{1}{(d_i - d_1) + t(e_i - e_1)}(a_{12}c_{2i}(t) + ... + a_{1n}c_{ni}(t)), \text{ za } i = 2, ..., n$$

predstavljajo rešitev enačbe (2.3). □

Posledica 2.33 *Podmnožica $M_n(\mathbf{C})$, sestavljena iz diagonalizabilnih matrik, je gosta v $M_n(\mathbf{C})$.*

Dokaz. Naj bo $X \in M_n(\mathbf{C})$. Iz prejšnje trditve sledi, da lahko za dovolj majhen neničelni t najdemo diagonalizabilno matriko $X + tY$. Imamo $\| X + tY - X \| = \mid t \mid \| Y \|$. Posledično lahko najdemo diagonalizabilne matrike v vsaki krogli s središčem X. □

Izrek 2.34 *Naj bo U krogla $B(I_n, 1) \in Gl_n(\mathbf{P})$ in $V = \log(U)$. Potem držijo naslednje lastnosti:*

(i) $\log(\exp(X)) = X$ *za vsak tak* $X \in M_n(\mathbf{P})$, *da je* $\log(\exp(X))$ *definiran.*

(ii) $\exp(\log(A)) = A$ *za vsak tak* $A \in Gl_n(\mathbf{P})$, *da je* $\log(A)$ *definiran.*

(iii) $\det(\exp(X)) = \exp(trX)$ *za vsak* $X \in M_n(\mathbf{P})$, *kjer je* $tr\ a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(iv) Eksponentna preslikva $\exp : M_n(\mathbf{P}) \to Gl_n(\mathbf{P})$ *predstavlja homomorfizem* $V \to U$. *Inverzna preslikava je* $\log |_U$.

(v) $\log(AB) = \log(A) + \log(B)$ *za vse take matrike* $A, B \in U$, *za katere je* $AB \in U$ *in* $AB = BA$.

Dokaz. Pri dokazovanju prve lastnosti sprva opomnimo, da sta $\log(\exp(X))$ in X zvezni preslikavi, ki slikata iz $V \to M_n(\mathbf{C})$. Po izreku 2.32 so diagonalizabilne matrike goste v V. Tako iz leme 2.29 sledi, da je dovolj dokazati trditev za diagonalizabilno matriko X. Iz trditev izreka 2.22(v) in 2.26(iii) dobimo:

$$Y^{-1} \log(\exp(X))Y = \log(Y^{-1}(\exp(X))Y) = \log(\exp(Y^{-1}XY)).$$

Vidimo, da zadostuje dokazati prvo lastnost le za diagonalne matrike.

Iz trditev izreka 2.22(v) in 2.26(iv) dobimo:

$$\begin{aligned}
\log(\exp \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}) &= \log \begin{bmatrix} \exp(a_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \exp(a_n) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \log(\exp(a_1)) & \cdots & o \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \log(\exp(a_n)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dokazali smo prvo trditev.

Za dokazovanje druge trditve uporabimo lastnost, da sta $\exp(\log(A))$ in A zvezni funkciji, ki slikata iz $U \to M_n(\mathbf{C})$. Sklepamo enako kot v dokazu prve trditve in opazimo, da zadostuje dokazati lastnost le za diagonalne matrike. Metoda preverjanje le-te pa je podobna, kot smo jo uporabili za diagonalne matrike v prvi trditvi.

Pri dokazovanje trditve (iii) uporabimo dejstvo, da sta $\det \exp(X)$ in $\exp(trX)$ zvezni funkciji, ki slikata iz $M_n(\mathbf{C}) \to M_n(\mathbf{C})$. Velja

$$\det Y^{-1}XY = \det X \text{ in } \mathrm{tr}\ Y^{-1}XY = \mathrm{tr}\ X$$

za vse obrnljive matrike Y. Enako kot pri dokazovanju prve in druge trditve, zadostuje dokazati lastnost le za diagonalne matrike:

$$\det \exp \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \exp(a_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \exp(a_n) \end{bmatrix} = \exp(a_1) \cdot \ldots \cdot \exp(a_n),$$

in

$$\exp(\mathrm{tr} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}) = \exp(a_1 + \cdots + a_n) = \exp(a_1) \cdot \ldots \cdot \exp(a_n).$$

Tako smo dokazali tretjo trditev.

Trditev (iv) sledi iz trditve (i) in (ii), saj sta exp in log zvezni funkciji.

Za dokazovanje pete lastnosti izberimo $A, B \in U$ tako, da velja $AB \in U$. Iz trditve (iv) sledi, da lahko najdemo takšni $X, Y \in M_n(\mathbf{P})$, da velja

$$A = \exp(X) \text{ in } B = \exp(Y).$$

Posledično iz trditve (iv) sledi, da je

$$X = \log(A) \text{ in } Y = \log(B).$$

Iz izreka 2.26(v) pa enakost

$$XY = \log(A)\log(B) = \log(B)\log(A) = YX.$$

Torej po 2.22(ii) velja

$$\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y).$$

Uporabimo prvo lastnost in dobimo

$$\log(AB) = \log(\exp(X)\exp(Y)) = \log(\exp(X+Y)) = X + Y = \log(A) + \log(B).$$

□

V nadaljevanju bomo pokazali, da podobna lastnost, kot je navedena v prejšnjem izreku pod četrto alinejo, drži tudi za matrične grupe $Gl_n(\mathbf{P}), Sl_n(\mathbf{P})$ in $G_S(\mathbf{P})$, kjer je S obrnljiva matrika. Sprva pa moramo uvesti ustrezne podprostore $M_n(\mathbf{P})$.

Definicija 2.35 *Naj bo* $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{P}) = M_n(\mathbf{P})$. *Potem je*

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbf{P}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{P}) \mid \ tr\ X = 0\},$$

kjer je trX ***sled*** *matrike* $X = (a_{ij})$*, definirana kot* $trX = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Naj bo S *poljubna matrika v* $M_n(\mathbf{P})$. *Potem je*

$$\mathfrak{g}_S(\mathbf{P}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{P}) \mid X^T S + SX = 0\}.$$

V primeru, ko je $S = I_n$ *označimo* $\mathfrak{g}_S(\mathbf{P})$ *z* $\mathfrak{so}_n(\mathbf{P})$. *Če pa* $S = \begin{bmatrix} 0 & J_n \\ -J_n & 0 \end{bmatrix}$, *kjer je* $J_n \in M_n(\mathbf{P})$ *matrika, katere elementi na stranski diagonali so enaki 1, vsi preostali pa 0, pa* $\mathfrak{g}_S(\mathbf{P})$ *zamenja oznaka* $\mathfrak{sp}_n(\mathbf{P})$.

Opomba 2.36 *Vse množice* $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{P})$ *in* $\mathfrak{g}_S(\mathbf{P})$ *so podprostori prostora* $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{P})$. *Hkrati je* $\mathfrak{so}_n(\mathbf{P})$ *podprostor* $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{P})$, *saj velja* $trA^T = trA$ *torej* $2trA = 0$. *Vedno, ko obravnavamo ortogonalne grupe, privzamemo, da je* 2 *obrnljiv element v* $\boldsymbol{P}$.

Izrek 2.37 *Predpostavimo, da je* S *obrnljiva matrika. Potem eksponentna preslikava*

$$\exp : M_n(\mathbf{P}) \to Gl_n(\mathbf{P})$$

inducira preslikavi:

$$\exp : \mathfrak{sl}_n(\mathbf{P}) \to Sl_n(\mathbf{P}),$$

in

$$\exp : \mathfrak{g}_S(\mathbf{P}) \to G_S(\mathbf{P}).$$

Naj bo G *katerakoli izmed grup* $Gl_n(\mathbf{P}), Sl_n(\mathbf{P})$ *ali* $G_S(\mathbf{P})$. *Potem obstaja okolica* U *matrike* I_n *v* G, *na kateri je definirana logaritemska funkcija* log *in sicer tako da eksponentna funkcija* exp *inducira homomorfizem* $\log(U) \to U$. *Inverz preslikave* $\exp|_{\log U}$ *je* $\log|_U$.

Kot posebne primere dobimo preslikave:

$$\exp : \mathfrak{so}_n \to O_n(\mathbf{P}),$$

$$\exp : \mathfrak{so}_n \to SO_n(\mathbf{P}),$$

in

$$\exp : \mathfrak{sp}_n(\mathbf{P}) \to Sp_n(\mathbf{P}).$$

Če je G *ena izmed grup* $O_n(\mathbf{P}), SO_n(\mathbf{P})$ *ali* $Sp_n(\mathbf{P})$, *obstaja takšna odprta podmnožica* U *v* G, *da te preslikave inducirajo homomorfizem* $\log(U) \to U$ *z inverzom* $\log|_{\log(U)}$.

Dokaz. Za $Gl_n(\mathbf{P})$ smo trditev izreka že dokazali. Da dokažemo trditev za množico $Sl_n(\mathbf{P})$ izberimo $X \in \mathtt{sl}_n$. Iz trditve (iii) izreka 2.34 sledi, da je

$$\det \exp(X) = \exp(trX) = \exp(0) = 1.$$

Posledično velja, da je $\exp(X) \in Sl_n(\mathbf{P})$. Tako smo dokazali trditev.

Pri dokazu druge trditve za $Sl_n(\mathbf{P})$ vzamemo matriko $A \in U \cap Sl_n(\mathbf{P})$. Iz trditve (iii) izreka 2.34 sledi, da v primeru $\det A = 1$ dobimo

$$\exp(tr \log(A)) = \det \exp(\log(A)) = \det A = 1.$$

Torej je $tr\log(A) = 0$. Pokazali smo že, da funkcija exp inducira bijektivno preslikavo:

$$\mathtt{sl}_n(\mathbf{P}) \cap \log(U) \to Sl_n(\mathbf{P}) \cap U.$$

Ta preslikava in njen inverz, porojen z logaritemsko funkcijo, sta inducirani z zveznimi preslikavami, metriki na $Sl_n(\mathbf{P})$ in $\mathtt{sl}_n(\mathbf{P})$ pa z metrikami na $Gl_n(\mathbf{P})$, oziroma $\mathtt{gl}_n(\mathbf{P})$. Posledično, sta inducirana preslikava in njen inverz zvezna in zato homomorfizma.

Naj bo $X \in \mathtt{g}_S(\mathbf{P})$. Velja

$$X^T S + SX = 0.$$

Predpostavili smo, da je S obrnljiva matrika, zato lahko slednjo enačbo zapišemo kot

$$S^{-1}X^T S + X = 0.$$

Ker je $S^{-1}X^T S = -X$, velja da $S^{-1}X^T S$ in X komutirata, zato lahko uporabimo trditev (ii) izreka 2.22 in dobimo enakost

$$\begin{aligned} I_n &= \exp(S^{-1}X^T S + X) = \exp(S^{-1}X^T S)\exp(X) = S^{-1}(\exp(X^T))S\exp(X) \\ &= S^{-1}(\exp(X))^T S\exp(X). \end{aligned}$$

Torej $(\exp(X))^T S\exp(X) = S$ in $\exp(X) \in G_S(\mathbf{P})$. Dokazali smo trditev.

Dokažimo še zadnjo trditev. Naj bo $A \in G_S(\mathbf{P})$. Potem dobimo:

$$A^T SA = S \text{ ali ekvivalentno } S^{-1}A^T SA = I_n,$$

iz česar sledi:

$$\log((S^{-1}A^T S)A) = 0.$$

$S^{-1}A^T S$ je inverzna matrika matrike A in zato $S^{-1}A^T S$ ter A komutirata. Ker je preslikava na $Gl_n(\mathbf{P})$, ki slika $A \mapsto A^T$ zvezna, enako kot preslikava $A \mapsto S^{-1}A^T S$, lahko izberemo takšen U, da je funkcija log definirana na $S^{-1}A^T S$. Iz trditve (v) izreka 2.34 sledi, da je

$$\begin{aligned} \log((S^{-1}A^T S)A) &= \log(S^{-1}A^T S) + \log(A) = S^{-1}(\log(A^T))S + \log(A) \\ &= S^{-1}(\log(A))^T S + \log(A). \end{aligned}$$

Dokazati moramo, da je

$$S^{-1}(\log(A))^T S + \log(A) = 0.$$

Enačbo pomnožimo z leve z matriko S in dobimo:

$$(\log(A))^T S + S\log(A) = 0.$$

Torej $\log(A) \in \mathtt{g}_S(\mathbf{P})$. Dokazali smo, da funkcija exp inducira bijektivno preslikavo

$$\mathtt{g}_S(\mathbf{P}) \cap \exp^{-1}(U) \to G_S(\mathbf{P}) \cap U.$$

Podoben argument uporabimo v primeru $Sl_n(\mathbf{P})$, torej, da je dana bijekcija homomorfizem. Tako smo dokazali tudi to trditev. $\square$

Primeri:

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathtt{sl}_3(\mathbf{P})$. Preveri, da je $\exp(A) \in Sl_3(\mathbf{P})$!

$$\begin{aligned}
\exp A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \ldots \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots \\ 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots & e & \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots \\ 0 & 0 & 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 - e^{-1} \\ e-1 & e & ch1 - 1 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Izračunamo $\det\exp(A)$:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 - e^{-1} \\ e-1 & e & ch1 - 1 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} = e^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e-1 & e \end{bmatrix} = e^{-1}e = 1.$$

Ker je determinanta enaka 1, je res $\exp(A) \in Sl_3(\mathbf{P})$.

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathtt{sp}_4(\mathbf{P})$. Preveri, da je $\exp(B) \in Sp_n(\mathbf{P})$!

$$\exp(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + ...$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+... & 0 & 0 & 1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+... \\ 0 & 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+... & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+... & 1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+... \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & sh1 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & sh1 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix}.$$

Preverimo, ali držita enakosti $\det \exp(B) = 1$ in $(\exp(B))^T S \exp(B) = S$:

- $\det \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & sh1 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & sh1 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} = 1.$

- $(\exp(B))^T S \exp(B) =$

$$= \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & sh1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} & 0 \\ sh1 & 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & sh1 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & sh1 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & -sh1 & e & 0 \\ 0 & -e^{-1} & 0 & 0 \\ -e^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & sh1 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & sh1 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S.$$

Obe enakosti držita, torej $\exp(B) \in Sp_n(\mathbf{P})$.

Literatura

[1] M. Boij, D. Laksov, *An Introduction to Algebra and Geometry via Matrix Groups*, KTH - Royal Institute of Technology, Stockholm, 2005.

[2] A. Baker, *An Introduction to Lie group theory*, Springer Verlag, 2002.

[3] H. Jus, *Eksponentna funkcija matrike*, Diplomsko delo, Maribor, 2002.

[4] T. Košir, *Linearna algebra* (online). Dostopno na naslovu (januar 2012): `http://www.fmf.uni-lj.si/ kosir/poucevanje/linalg.html`.

[5] Z. Drmač, M. Marušić, S. Singer, V. Hari, M. Rogina, S. Singer, *Numerička analiza, Predavanja i vježbe* (online). Dostopno na naslovu (januar 2012): `http://www.scribd.com/doc/66458657/29/Matricne-norme`.

[6] Wikipedija (online). Dostopno na naslovu (februar 2012): `http://sl.wikipedia.org/wiki/Strižna_matrika`