



Univerza v Mariboru

**FAKULTETA ZA ELEKTROTEHNIKO, RAČUNLANIŠTVO IN
INFORMATIKO**

Doktorska disertacija

**Robustna polinomska sinteza regulatorja z
optimizacijo norme \mathcal{H}_∞**

Julij, 2011

Andrej Sarjaš

Avtor:	Andrej Sarjaš
Štev. raziskovalca:	27703
Štev. indeksa:	95029356
Študijski program:	Elektrotehnika
Naslov:	Robustna polinomska sinteza regulatorja z optimizacijo norme \mathcal{H}_∞
Ang. naslov:	Robust pole placement technique with optimization of norm \mathcal{H}_∞
UDK:	681.515.2(043.3)
Štev. izvodov:	9
Mentor:	izr. prof. dr. Rajko Svečko



Univerza v Mariboru

Maribor, 29. 3. 2011
Številka: DR 29/2011/425-MGM

Na osnovi 287., 140., 142. in 144. člena Statuta Univerze v Mariboru (Statut UM-UPB8, Ur. l. RS, št. 1/2010) ter sklepa 40. redne seje Senata Univerze v Mariboru z dne 29. 3. 2011 v zvezi z vlogo doktorske kandidata Andreja Sarjaša za sprejem odločitve o predlagani temi doktorske disertacije in mentorja,

izdajam naslednji

SKLEP

Odobri se tema doktorske disertacije Andreja Sarjaša s Fakultete za elektrotehniko, računalništvo in informatiko z naslovom »Robustna polinomna sinteza regulatorja z optimizacijo norme H_{∞} «. Za mentorja se imenuje izr. prof. dr. Rajko Svečko. Kandidat mora članici predložiti izdelano doktorsko disertacijo v zadostnih izvodih najpozneje do 28. 3. 2015.

Obrazložitev:

Kandidat Andrej Sarjaš je dne 29. 11. 2010 na Fakulteti za elektrotehniko, računalništvo in informatiko vložil vlogo za potrditev teme doktorske disertacije z naslovom »Robustna polinomna sinteza regulatorja z optimizacijo norme H_{∞} «. Za mentorja je bil predlagan izr. prof. dr. Rajko Svečko.

Senat Fakultete za elektrotehniko, računalništvo in informatiko je na osnovi pozitivnega mnenja komisije za oceno teme doktorske disertacije, ki je ugotovila, da kandidat izpolnjuje pogoje za pridobitev doktorata znanosti, in ocenila, da je predlagana tema ustrezna, sprejel pozitivno mnenje in poslal predlog teme doktorske disertacije s predlogom mentorja v odobritev Senatu univerze.

Senat Univerze v Mariboru je po proučitvi vloge in na osnovi določil Statuta Univerze v Mariboru sprejel svojo odločitev o predlagani temi doktorske disertacije in imenoval mentorja, kot izhaja iz izreka.

V skladu s 144. členom Statuta Univerze v Mariboru mora kandidat za pridobitev doktorata znanosti najpozneje v štirih letih od dneva izdaje tega sklepa, članici predložiti izdelano doktorsko disertacijo v zadostnih izvodih. Kandidatu je bil določen rok glede na datum sprejetja teme na pristojnem organu.

Pouk o pravnem sredstvu:

Zoper ta sklep je možna pritožba na Senat Univerze v Mariboru v roku 8 dni od prejema tega sklepa.

Rektor:
Prof. dr. Ivan Rozman

Obvestiti:

1. Kandidata.
2. Fakulteto.
3. Arhiv.



"Life is like riding a bicycle. To keep your balance, you must keep moving. "

Albert Einstein (1879-1955)

ZAHVALA:

Na tem mestu bi se rad zahvalil vsem, ki ste mi kakor koli pomagali in mi stali ob strani na tej poti.

Najprej bi se rad zahvalil mentorju dr. Rajku Svečku, ki mi je nudil pomoč, me usmerjal na poti študija in raziskovanja ter mi vlival polno mero upanja v moj uspeh. Hvala Vam za zaupanje in strokovno pomoč.

Še posebej bi se na tem mestu rad zahvalil dr. Amorju Chowdhuryu pri neizmerni strokovni pomoči, mnogim koristnim nasvetom in idej, ki so bili plod dolgih pogovor in razprav, ne glede na čas in vremenske pogoje. Ami, hvala za mnoge žrtvovane ure in dobro voljo.

Zahvali bi se tudi kolektivu laboratorija za sisteme in vodenje za ustvarjalno klimo. Še posebej se zahvaljujem sodelavcu Andreju Knupležu za podporo ter bodrenje v času raziskovanja. Andrej, hvala.

Zahvalil bi se tudi staršem, ki so verjeli vame ter me neizmerno vzpodbujali v raziskovalnem 'delu' že od malih nog. Hvala Vama za potrpežljivo, ljubečo in finančno podporo.

In nenazadnje se zahvaljujem soprogi Janji za ljubečo skrb, veliko mero razumevanja ter neizmerno podporo v trenutkih nastajanja tega dela. Hvala ti za tvojo neizmerno potrpežljivost in ljubezen.

Hvala tudi vsem, ki ste mi tako ali drugače pomagali pri nastajanju tega dela.

Robustna polinomska sinteza regulatorja z optimizacijo norme \mathcal{H}_∞

UDK: 681.515.2(043.3)

Ključne besede: *robustno vodenje, tehnika pomikanja polov, nestrukturirana odstopanja, Lipatov stabilnostni kriterij, spektralni polinom, Šiljakov test pozitivnosti, numerična optimizacija*

Povzetek:

V disertaciji je predstavljena nova metoda sinteze robustnega regulatorja s tehniko pomikanja polov. Metoda vključuje rešitev polinomske enačbe na osnovi izbranega karakterističnega polinoma, s pomočjo Manabe-jeve standardne oblike polinoma ter vpeljanimi parametričnimi rešitvami. Parametrične rešitve so vpeljane direktno v strukturo regulatorja. Na osnovi izbranih parametričnih rešitev se s pomočjo modelov odstopanj in vrednotenjem norme $\|\cdot\|_\infty$ oceni robustnost zaprto zančnega sistema. Postopek načrtovanja z optimizacijo je izvedena z genetskim algoritmom Diferencialna evolucija – *DE*. Optimizacijski algoritem *DE* tekom optimizacije določa sub-optimalno rešitev na osnovi koeficientov spektralnega kvadratičnega polinoma in Šiljakovim absolutnim testom stabilnosti. Stabilnost sintetiziranega regulatorja je možno, ob postavljeni zahtevi stabilnosti regulatorja tekom optimizacije testirati s Lipatov-im kriterijem. Oba uporabljena pristopa; Šiljakov test in Liaptov kriterij, preverjata lastnost robustne stabilnosti in stabilnost regulatorja na osnovi koeficientov danega polinoma. Kriterija sta primerna, za avtomatizirano načrtovanje zaprto zančnega sistema in uporabo v sklopu optimizacijskih algoritmov, kot je *DE*. Primer načrtovanja regulatorja z razvito metodo, je predstavljen za izbran problem servo sistema z enosmernim elektromotorjem. Tekom postopka sinteze upoštevamo odstopanje parametrov motorja ter spremembo delovne točke zaradi spremenljivega bremena.

Robust pole placement technique with optimization of norm \mathcal{H}_∞

UDK: 681.515.2(043.3)

Keywords: *robust control, pole placement technique, unstructured uncertainty, Lipatov's stability condition, spectral polynomial, Šiljak's positivity test, numerical optimization*

Abstract:

The dissertation describes the area of robust controller synthesis with pole placement technique. The new method includes solving a polynomial equation on the basis of the chosen characteristic polynomial using the Manabe standard polynomial form and parametric solutions. Parametric solutions are introduced directly into the structure of the controller. On the basis of the chosen parametric solutions the robustness of a closed-loop system is assessed through uncertainty models and assessment of the norm $\|\cdot\|_\infty$. The design procedure and the optimisation are performed with a genetic algorithm Differential evolution – *DE*. The *DE* optimisation method is determining a suboptimal solution throughout the optimisation on the basis of a spectrally square polynomial and Šiljak's absolute stability test. In case that stable controller is demanded, the stability of the designed controller can be checked during the optimisation with Lipatov's stability test. Approaches like Šiljak's test and Lipatov's test, checks the robustness criterion and controller stability characteristics on the basis of polynomial's coefficients. Both are very convenient for automated design of the closed-loop controlled systems and for application that include optimisation algorithms such as *DE*. In the dissertation an example of the robust controller synthesis with a presented method is described for the control of a servo mechanism with BDC electric motors, where uncertainty of the motor parameters and changing load is considered.

Kazalo

1	Uvod	1
1.1	Razvoj robustne teorije vodenja	3
1.2	Odstopanje in robustnost sistemov	6
1.3	Izpostavitev teze in ciljev	10
1.4	Organizacija doktorske disertacije	12
2	Lastnosti zaprto zračnih sistemov	14
2.1	Enoznačni zaprto zračni sistemi	14
2.2	Notranja stabilnost zaprto zračnih sistemov	18
2.3	Parametrizacija regulatorja	21
2.3.1	Parametrizacija regulatorja K s stabilnim objektom vodenja P	21
2.3.2	Parametrizacija regulatorja K za splošni objekt vodenja P	22
2.4	Močno stabilizirani zaprto zračni sistemi	28
2.5	Učinkovitost in omejitve zaprto zračnih sistemov	29
3	Negotovost in robustnost zaprto zračnih sistemov	35
3.1	Nestrukturirani modeli odstopanj	36
3.1.1	Multiplikativni model	36
3.1.2	Aditivni model	37
3.1.3	Inverzni model	38
3.2	Robustna stabilnost	40
3.2.1	Teorem majhnih ojačenj	41
3.3	Robustna stabilnost z nestrukturiranimi modeli odstopanj	44
3.3.1	Robustna stabilnost za sisteme z multiplikativnim odstopanjem	44
3.3.2	Robustna stabilnost za sisteme z aditivnim odstopanjem	45
3.3.3	Robustna stabilnost za sisteme z inverznim odstopanjem	46
3.4	Robustni učinek	48
3.4.1	Vrednotenje robustnega učinka za performančni kriterij $\ W_S S\ _\infty < 1$ ter multiplikativnim odstopanjem	49

3.4.2	Vrednotenje robustnega učinka za performančni kriterij $\ W_S S\ _\infty < 1$ ter aditivnim odstopanjem	51
3.4.3	Vrednotenje robustnega učinka za performančni kriterij $\ W_S S\ _\infty < 1$ ter inverznim odstopanjem.....	52
3.4.4	Vrednotenje robustnega učinka za performančni kriterij $\ W_T T\ _\infty < 1$ ter multiplikativnim odstopanjem.....	53
3.4.5	Vrednotenje robustnega učinka za performančni kriterij $\ W_T T\ _\infty < 1$ ter aditivnim odstopanjem	54
3.4.6	Vrednotenje robustnega učinka za performančni kriterij $\ W_T T\ _\infty < 1$ ter inverznim odstopanjem.....	54
3.5	Problem mešane občutljivosti	57
4	Robstno načrtovanje regulatroja s tehniko pomikanja polov	63
4.1	Tehnika pomikanja polov	65
4.1.1	Parametrične rešitve polinomske enačbe.....	71
4.1.2	Izbira prostega parametra	72
4.1.3	Izbira prostih parametrov.....	75
4.1.4	Določitev karakterističnega polinoma $C(s)$	77
4.1.5	Sinteza predfiltra $F(s)$	79
4.2	Vrednotenje robustnosti zaprto zanke sistema z metriko norme \mathcal{H}_∞ ter prostimi parametri \tilde{r}_z, \tilde{l}_w	80
4.2.1	Dodatni performančni kriterij $W_p(s)$ za poenostavitev zaprto zanke strukture ..	83
4.3	Vpliv parametričnih rešitev \tilde{r}_z, \tilde{l}_w na vrednost norme \mathcal{H}_∞	85
4.3.1	Šiljakov stabilnostni test.....	87
5	Optimizacija kriterijev robustnosti s prostimi parametri	93
5.1	Optimizacijske tehnike	93
5.2	Diferencialna evolucija - DE.....	95
5.2.1	Mutacija.....	95
5.2.2	Križanje	96
5.2.3	Selekcija	97
5.2.4	Algoritem diferencialne evolucije	97

5.3	Kriterijska funkcija.....	99
5.3.1	Spektralni polinom $\Pi_M(\omega^2, \tilde{p})$ za multiplikativni model odstopanj ter prostimi parametri \tilde{p}	99
5.3.2	Spektralni polinom $\Pi_A(\omega^2, \tilde{p})$ za aditivnim model odstopanj ter prostimi parametri \tilde{p}	101
5.3.3	Spektralni polinom $\Pi_I(\omega^2, \tilde{p})$ za inverzni model odstopanj ter prostimi parametri \tilde{p}	102
5.3.4	Določitev kriterijske funkcije	104
5.4	Lipatov stabilnostni kriterij	105
6	Avtomatiziran postopek načrtovanja robustnega regulatorja	107
7	Primer uporabe predlaganega postopka polinomske sinteze robustnega regulatorja	110
7.1	Sinteza robustnega regulatorja hitrosti	112
7.2	Sinteza robustnega regulatorja pozicije.....	121
7.3	Primerjava predlagane robustne polinomske sinteze s standardnim \mathcal{H}_∞ postopkom rešitve problema mešane občutljivosti	127
8	Zaključek	131

Kazalo slik

Slika 1-1 Grafična predstavitev nestrukturnega odstopanja v frekvenčne prostoru	8
Slika 2-1 Osnovna zaprto zanáčna struktura	14
Slika 2-2 Posplošen struktura zaprto zanáčnega sistema	17
Slika 2-3 Zaprto zanáčna struktura z motnjami d, d_i, n	30
Slika 3-1 Vhodni multiplikativni model odstopanj	37
Slika 3-2 Izhodni multiplikativni model odstopanj	37
Slika 3-3 Izhodni multiplikativni model odstopanj	38
Slika 3-4 Vhodni inverzni model odstopanj	38
Slika 3-5 Vhodni inverzni model odstopanj	39
Slika 3-6 Inverzni model odstopanj	39
Slika 3-7 Posplošena struktura zaprto zanáčnega sistema	42
Slika 3-8 Zaprto zanáčni sistem z odstopanjem ΔP	43
Slika 3-9 Preoblikovan zaprto zanáčni sistem z izraženim odstopanjem ΔP	43
Slika 3-10 Konfiguracija zaprto zanáčnega sistema za vrednotenje robustnega učinka z utežema W_S in W_T	48
Slika 3-11 Standardni problem mešane občutljivosti	57
Slika 3-12 Grafična predstavitev izbire uteži $W_1(j\omega), V_2(j\omega)$ in $W_2(j\omega), V_2(j\omega)$	61
Slika 3-13 Razširjen problem mešane občutljivosti	62
Slika 4-1 Zaprto zanáčni sistem z regulatorjem K v direktni veji in predfiltrom F	65
Slika 4-2 Zaprto zanáčna shema z utežnostnimi funkcijami $W(s)$	80
Slika 4-3 Potek polinoma $\Pi(\omega^2)$	90
Slika 4-4 Potek norme $\ P(a)\ _\infty$ v odvisnosti od parametra 'a'	92
Slika 5-1 Potek evolucijskih algoritmov	95
Slika 5-2 Potek algoritma diferencialna evolucija	98
Slika 6-1 Diagram poteka načrtovanja regulatorja $K(s)$	108
Slika 7-1 Sistem za testiranje algoritmov vodenja v realnem času	111
Slika 7-2 Frekvenčna karakteristika motorja z odstopanjem parametrov R_L, L, B, J_n, k_m, k_e za vodenje hitrosti	113
Slika 7-3 Uteži $W_I(s), W_M(s), W_p(s), W_u(s)$	114

Slika 7-4 Potek kriterijska funkcija f , optimizacije regulatorja hitrosti $K_{hit}(s, r_0, r_1)$ z r_0 in r_1	116
Slika 7-5 Vrednost pogoja $\ W_p S\ _\infty$ v odvisnosti od r_0, r_1	117
Slika 7-6 Vrednost pogoja $\ W_M T\ _\infty$ v odvisnosti od r_0, r_1	117
Slika 7-7 Vrednost pogoja $\ W_2 U\ _\infty$ v odvisnosti od r_0, r_1	118
Slika 7-8 Odziv sistema na stopnični referenčni signal z $K_{hit}(s, r_0, r_1)$	118
Slika 7-9 Napetostni izhod regulatorja $K_{hit}(s, r_0, r_1)$	119
Slika 7-10 Odziv sistem na izhodne motnje	119
Slika 7-11 Frekvenčna karakteristika motorja z odstopanjem parametrov R_L, L, B, J_n, k_m, k_e za vodenje pozicije	121
Slika 7-12 Potek kriterijske funkcije f , optimizacije regulatorja pozicije $K_{poz}(s, r_0, r_1)$ z r_0 in r_1	123
Slika 7-13 Vrednost pogoja $\ W_p S\ _\infty$ v odvisnosti od r_0, r_1	124
Slika 7-14 Vrednost pogoja $\ W_M T\ _\infty$ v odvisnosti od r_0, r_1	124
Slika 7-15 Vrednost pogoja $\ W_2 U\ _\infty$ v odvisnosti od r_0, r_1	125
Slika 7-16 Odziv sistema na stopnični referenčni signal z $K_{poz}(s, r_0, r_1)$	125
Slika 7-17 Napetostni izhod regulatorja $K_{poz}(s, r_0, r_1)$	126
Slika 7-18 Odziv sistema na izhodne motnje	126
Slika 7-19 Primerjava vodenja hitrosti s $K_{hit}(s)$ in $K_{hit_mixzs}(s)$	129
Slika 7-20 Primerjava vodenja pozicije s $K_{poz}(s)$ in $K_{pot_mixzs}(s)$	129

1 Uvod

Današnji čas je v znamenju silovitega razvoja na vseh področjih tehničnih znanosti ter strmega naraščanja novih sodobnih tehnologij, ki intenzivno in hitro pronicajo v vsakodnevno uporabo. Veliki razmah se kaže na vseh področjih družbene aktivnosti, tako v industrijskih okoljih, servisnih dejavnosti, kakor tudi v svetu zabave. Predvsem naraščanje novih sodobnih tehnologij narekuje vse višje standarde in zahteve, za zagotavljanje zelenega ali izboljšanja učinka tehnoloških procesov. Ti posredno vzajemno vzpodbujajo raziskovalne aktivnosti k novim odkritjem in iskanju primernih rešitev za nove postopke. Večina modernih naprav ter hibridnih sistemov vsebuje skupek procesov, kateri zagotavljajo funkcionalno delovanje naprave ter množico procesov, ki skrbijo za nadzor delovanja celotnega sistema in njegovih posameznih segmentov. Tako lahko povzamemo, da je vodenje ena izmed ključnih področij modernizacije in napredka sodobne tehnike. Brez vodenja si danes ne bi mogli predstavljati vozil, plovil, robotov itd.. Na kratko lahko strnemo, brez vodenja ne bi bilo tehnologije.

Regulacija sistemov je poglobljena naloga avtomatskega vodenja in sloni na osnovi zaprto-zančne arhitekture, kjer izhodno veličino primerjamo z zeleno in na osnovi odstopanja tvorimo novo veličino na vhodu sistema. Zaprto-zančna arhitektura vodenja je posnemanje naravnega okolja in izhaja iz naravnih principov. Poglejmo si enostaven primer človeškega telesa. Človeški organizem z imunskim sistemom ohranja in nadzira telo v normalnem zdravem stanju, načelo samoohranitve. Vsak napad na organizem, bodisi tuje snovi ali zunanji organizmi z aktivnostjo imunskega sistema obvarujejo telo pred vdorom tujkov. Aktivnost imunskega sistema z nalogo, da ohrani organizem v normalnem stanju, se kaže preko različnih dejavnikov, kot so povišanje telesne temperature, sprememba krvnega tlaka, srčnega impulza itd.. Podobno velja pri ostalih telesnih in bioloških procesih. Na primer, pri povečanju človeške fizične aktivnosti, se posledično dviguje srčni utrip in s tem hitrost pretoka krvi v krvožilnem

sistemu. Povečan pretok krvožilnega sistema zagotavlja zadostno količino kisika aktivnemu mišičevju, katerega potrebuje za sprotno regeneracijo ATP molekul¹. Obratno se zgodi v fazi počitka, kjer se srčni utrip v normalnih pogojih zniža. Podobne primere zaprto-zančnega vodenja je lahko zaslediti povsod v naravi, tako v bioloških, kot nebioloških procesih. V tehničnih znanstvenih vedah je zaprto zančna arhitektura ponazorjena z algebraično povratno zanko, običajno negativna. Na osnovi povratno zančne strukture so postavljeni temelji današnje teorije vodenja, katera je v poznem obdobju industrijske revolucije v smislu determinizma, dobila prva zelo preprosta matematična orodja za analizo sistemov. Širok razmah v smislu eksaktnosti, sistematičnosti je teorija doživela v drugi polovici 19. stoletja, podkrepljena z močnimi matematičnimi temelji, iz katerih se je razvila množica analitičnih pristopov obravnave zaprto zančnih sistemov. Teorija vodenja je v današnjem času področje v razvoju, ki vsebuje množico orodij in postopkov za analizo, sintezo in vrednotenje zaprto, kakor tudi odprto zančnih sistemov.

Zaprto zančno vodenje sega že v zgodnje antično obdobje človeštva in je globoko povezano s problematiko takratnega časa, kot so; zagotovitev zadostnega pretoka vode mestnega vodovoda, namakalni sistemi, ogrevalni sistemi, ohranitev točnega časa, regulator teleskopske cevi (gravitacijski regulator) itd.. Občutni razmah je uporaba zaprto zančnega vodenja doživela v času industrijske revolucije z razvojem prvih parnih strojev in vse do danes. Skladno z razvojem tehnike in novih tehnologij rastejo zahteve vodenja sistemov ter posledično kompleksnejši in naprednejši postopki načrtovanj zaprto zančnih sistemov. Tako v današnjem času govorimo o moderni teoriji vodenja, katera se je razvila iz klasične teorije v drugi polovici 20. stoletja. Postopki zgodnjega obdobja v 19. stoletju so temeljili večinoma na intuiciji načrtovalca ter metodi napak in poizkusov. Postopki klasične teorije vodenja, so večinoma temeljile na grafičnih metodah in teoriji stabilnosti zaprto-zančnih sistemov po Bodeju, Nyquistu in Ljapunu. V obdobju klasične teorije je nastalo mnogo uporabnih in enostavnih metod načrtovanja, katere so še danes pogosto orodje inženirske prakse in so z leti doživeli mnoge modifikacije in izboljšave.

¹ ATP molekula - energijsko bogata in življenjsko pomembna molekula, katere pridobiva energijo preko dihalne verige

Moderna teorija vodenja zajema klasične pristope s širšim izhodiščem predstavitve problematike vodenja, kot so; prilagodljivost, robustnost, zanesljivost, nelinearnost. Na razvoj modernih metod je intenzivno vplival tudi tehnološki razvoj, predvsem s porastom zmogljivih mikroračunalniških struktur, ki so v današnjem času popolnoma izpodrinili konvencionalne zvezne oblike regulatorjev. Moderne metode upoštevajo kompromis med zelenimi lastnostmi vodenja, zato so ponavadi sklop analitičnih in numeričnih optimizacijskih postopkov na osnovi iskanja globalnega ekstrema kompozituma izbranih kriterijev. Moderne metode vodenja so v današnjem času razdeljene na več različnih področij, katere se ločijo glede na strukturo vodenja in predstavitev izhodišča problematike vodenja. Tako poznamo mnoga podpodročja, kot so; robustno vodenje, inteligentno vodenje (mehki sistemi, nevronske mreže, genetski algoritmi ...), adaptivni sistemi, stohastično vodenje. Meje med posameznimi področji so zabrisane in so v rabi zgolj v znanstvenih krogih. Določena področja mnogokrat v posameznih tehnikah interferirajo in niso zgolj namenjena za specifične sisteme.

1.1 Razvoj robustne teorije vodenja

Razvoj robustne teorije ni moč natanko opredeliti, saj je tehnološki napredek v razvitem svetu ter svetovne politične razmere po drugi svetovni vojni in v obdobju hladne vojne zakrile smernice razvoja. Je pa moč trditi, da je vojaška industrija ter vesoljska bitka med ZDA in tedanjo ZSSR močno vplivala na razvoj robustne teorije vodenja. Prvi zametki robustne teorije so bili postavljeni v zgodnjih tridesetih prejšnjega stoletja z delih H. W. Bodeja in H. S. Blacka, kjer so izhodišče vodenja obravnavali, kot problem občutljivosti zaprte zanke. V obdobju med 1960 do zgodnjih 70-ih je teorijo zaznamovalo delo R. Kalmana, S. Bucy (Kalman- Bucy filter) ter delo L. Pontryagina, L. Bellmana z LQ regulatorjem. Delo Kalmana in Pontryagina bi lahko označili, kot prelomnico v klasični teoriji vodenja ter začetek robustne teorije vodenja. Delo R. Kalmana je obravnavalo sintezo filtra, z vključevanjem dinamičnega modela vodenje ter stohastično komponento šuma. Kalmanov filter izračunava uteženo povprečje med ocenjeno in izmerjeno vrednostjo stanja. LQ metoda temelji na

minimizaciji integralskega kriterija kvadrata pogreška, s vključevanjem komponente šuma z znanimi statističnimi lastnostmi. V zgodnjem obdobju je veljalo, da LQ metoda načrtovanja regulatorja zagotavlja robustnost za odstopanje modela, kjer je odstopanje izrazito v resonančnih vrhovih frekvenčne karakteristike ter časovno spremenljivih in nelinearnih sistemih. Trditev je bila podkrepljena z delom M. Safonova in M. Athansa (1977) [70]. Kljub tej trditvi je J. Doyle delo Safonova in Athansa demantiral v letu 1978, pri čemer je z enostavnim primerom dokazal, da LQ regulator ne zagotavlja takšne stopnje robustnosti, kot sta opisovala Safonov in Athans. Za robustno stabilnost LQ metode je veljalo 6dB amplitudne ter 60 stopinj fazne rezerve [43]. Še več, Doyle je dokazal, da pri LQ sintezi ni nobenega zagotovila robustnosti, katero bi bilo moč preprosto predstaviti v posplošeni obliki frekvenčnega prostora.

Na osnovi predhodnih del, se je razvoj teorije začel pomikati k bolj sofisticiranim opisom odstopanja in robustnosti. Na začetku 80-tih, je Zames razvil metodo H_∞ s formulacijo problema zmanjšanja občutljivosti sistema preko povratne zveze, kot problem optimizacije norme $\|\cdot\|_\infty$. K razvoju te teorije so veliko prispevali tudi Helton (1976), Tannenbaum (1977), Sarason (1967), Adamjan, Arov in Krein (1971), ti so postavili matematične temelje povezave med teorijo operatorjev in teorijo kompleksnih funkcij [3],[4]. V poznem obdobju med leti 70 in 80, je teorija vključevala mnoga orodja ter kriterije za določitev robustnosti zaprto zanke sistema [33],[30],[102]. Izkazalo se je, da je formulacija norme $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ zelo široka in jo je moč uporabiti iz različnih vidikov; ocenitev robustnosti, oblikovanje frekvenčne karakteristike, optimizaciji energije itd.. Večina robustnih kriterijev izhaja iz kriterijev klasične teorije vodenja, podkrepljenimi z vpeljavo operatorja norme $\|\cdot\|_\infty$ in $\|\cdot\|_2$. Robustne metode se razlikujejo glede na klasifikacijo odstopanja modela [40],[41],[99]. Odstopanje je bilo predstavljeno, kot parametrično ali strukturno. Rešitev problema optimizacije in iskanje minimuma norme $\|\cdot\|_\infty$ ali $\|\cdot\|_2$ temelji na iterativnih preiskovalnih tehnikah in suboptimalnih rešitvah problema. Prvotni postopki sinteze so za reševanje uporabljali štiri blokovno obliko ter Youl-Kučera parametrizacijo regulatorja. Pristop je bil predstavljen v frekvenčnem prostoru ter opisom sistema v prostoru stanj. V poznih 80-tih, so Doyle, Francis, Glover, Khargonekar (1989) predstavili eksplicitno matematično rešitev standardnega H_∞ in H_2 problema z opisom sistema v prostoru stanj [44]. Postopek je temeljil na redukciji štiriblokovnega

problema na dvoblokovni problem ter rešitvi dveh algebrajčnih Riccatijevih enačb. Doyle-ov pristop je popolnoma zasenčil prvotne metode, saj pristop nadalje omogočal razširitev problema na sisteme s časovno spremenljivimi parametri ter na nelinearne sisteme. Po predstavitvi Doyle-ove metode v prostoru stanj, je popolnoma neodvisno H. Kwakernaak (1991) predstavil optimizacijo norme $\|\cdot\|_\infty$, na osnovi J-spektralne faktorizacije v vhodno izhodnem načinu [34]. Delo Kwakernaak-a je omogočilo reševanje splošnih problemov in odprlo nove vidike ter dalo zagon robustni polinomske sintezi z opisom v vhodno izhodnem načinu. Robustna sinteza je do današnjega časa doživela razcvet, tako v smislu razvoja različnih analitičnih, kot tudi optimizacijskih tehnik. Sinteza se vse bolj uveljavlja, kot zanesljivo orodje inženirske prakse pri načrtovanju in vodenju realnih sistemov. Iz robustne teorije vodenja je nastalo mnogo učinkovitih načrtovalskih tehnik-metod, ki so množično uporabljena v letalski, vesoljski, avtomobilski industriji, skratka povsod, kjer mora biti zagotovljeno robustno in zanesljivo vodenje. Teorija prav tako preko kriterijev robustnosti omogoča interakcijo s klasičnimi postopki, kjer se robustnost ocenjuje posredno in ni direktno vpeljana v sintezo.

Razvoj robustne teorije v Sloveniji je zaznamovan z začetnimi deli J. Kocjana [56] v zgodnjih 90-tih prejšnjega stoletja ter poglobljenim delom A. Chowdhurija v poznih 90-tih in vse do danes [2]-[5]. Predvsem delo A. Chowdhurija je dalo nove tehnike načrtovanja na področju robustne polinomske sinteze, zaznamovano z deli H. Kwakernaaka, V. Kučere in M. Šebeka, [23],[34]. Delo A. Chowdhurija obravnava robustno polinomske sintezo z linearnim skaliranjem referenčne prenosne funkcije ter vrednotenjem robustnosti z metriko norme $\|\cdot\|_\infty$ [4]. Delo je alternativni pristop Y-K parametrizacije [23],[35],[100],[101] ter robustni polinomske tehniki po H. Kwakernaku [33] in omogoča optimizacijo norme $\|\cdot\|_\infty$ na osnovi skalirnega parametra η [2]. Metoda vpeljuje transparentnejši pristop k načrtovanju ter zagotavlja fiksno strukturo regulatorja brez vpliva odstopanj, kar je ena izmed pglavitnih slabosti prvotnih metod. Robustno vodenje sistemov je prav tako zaznamovalo delo M. Peca [71], ki je v delu predstavil optimalno določanje uteži odstopanj, standardnega problema robustne sinteze po Doyleu [44],[45].

1.2 Odstopanje in robustnost sistemov

Ena izmed poglobitnejših področij moderne teorije, je robustna sinteza vodenja, kar dokazujejo mnoga objavljena znanstvena dela in študije. Cilj zaprto zadržnega vodenja je stabilno delovanje in zagotovitev želene dinamike realnega sistema [85]. Zaprto zadržno vodenje ne bi bilo potrebno, če ne bi bilo vpliva zunanjih motenj ter pojava negotovosti objekta vodenja. Vodenje bi bilo preprosto izvedeno s krmiljenjem na osnovi idealnih predikativnih modelov. V svetu, ki učinkuje po principu vzrok-posledica ter z mnogimi naključnimi dejavniki, ni mogoče zagotovo napovedovati dogodkov v prihodnosti, tako je zaprto zadržno vodenje z negativno povratno zanko, najprimernejši način, s katerim lahko z veliko mero zanesljivosti vodimo realne sisteme. Torej izhodišče robustnega vodenja je zagotovitev stabilnega delovanja sistema ter zagotovitev želenega učinka, kljub negotovosti objekta vodenja, možnega vpliva zunanjih motenj ter šuma na vhodu ali izhodu sistema.

Pomemben segment vrednotenja robustnosti je določitev modela ter njegova možna odstopanja. Segment določitve modela ključno vpliva na rezultat sinteze, ki mora zagotavljati robustnost zaprto zadržnega sistema, kakor tudi dinamične lastnosti zaprto zadržnega vodenja. Vzrok odstopanje modela, lahko nekako razdelimo v dve skupini in sicer, odstopanje zaradi nepopolnega poznavanja sistema in odstopanje zaradi poenostavitve modela. Odstopanje zaradi nepopolnega poznavanja sistema je pogost vzrok, pri čemer sistem opišemo s fizikalnimi zakonitostmi. Velikokrat se zgodi, da vrednost določenih parametrov ali učinka sistema ne moremo natančno ali ni mogoče ovrednotiti ali zapisati s fizikalnimi zakonitostmi. Prav tako odstopanje zaradi nepopolnega poznavanja sistema, je rezultat različnih identifikacijskih metod [64]. Te temeljijo na osnovi eksperimentalnih rezultatov ter izbiri poljubne strukture modela, katere rezultirajo k nepopolnem opisu realnega sistema. Odstopanja, katera nastanejo zaradi poenostavitve modela [94], so pogost vzrok analize in načrtovanja sistemov. Poenostavitev modela se izvede zaradi zmanjšanja kompleksnosti obravnavanega modela in je velikokrat rezultat linearizacije nelinearnega modela ali redukcija linearnega modela visoke stopnje. Linearne modele lahko predstavimo v časovnem ali frekvenčnem prostoru [89] ter vhodno izhodnem opisu ali v prostoru stanj [53],[57].

Matematični model za katerega načrtujemo robustni regulator imenujemo nominalni model. Nominalni model je opis sistema v delovni točki z nominalnimi vrednostmi parametrov modela ali nominalno frekvenčno karakteristiko. Nominalne vrednosti parametrov so določene na osnovi fizikalnih, snovnih, geometrijskih lastnosti sistema ali kot signifikantne vrednosti parametrov, kateri imajo najvišjo raven verjetnosti.

Odstopanje modela delimo na strukturalno [5],[42] in nestrukturalno [5],[42][71],[84]. Strukturalna odstopanja opisujejo odstopanje parametrov linearnega ali nelinearnega modela, predstavljenega v prostoru stanj ali vhodno izhodnem opisu. Odstopanje posameznega parametra je podano z intervalom variacije, kjer je določena zgornja, spodnja in nominalna vrednost parametra. Strukturalna odstopanja so primerna za opis modelov s stalno strukturo ter časovno spremenljivimi parametri ali parametri z znano karakteristiko variacije.

Zapis v vhodno izhodnem načinu,

$$\mathcal{P} = \left\{ P(s,a) = \frac{1}{s+a}; \quad a_{\min} \leq a \leq a_{\max}; \quad a_0 \in [a_{\min} \quad a_{\max}] \right\},$$

$$P_0(s,a_0) = \frac{1}{s+a_0}.$$

Zapis v prostoru stanj,

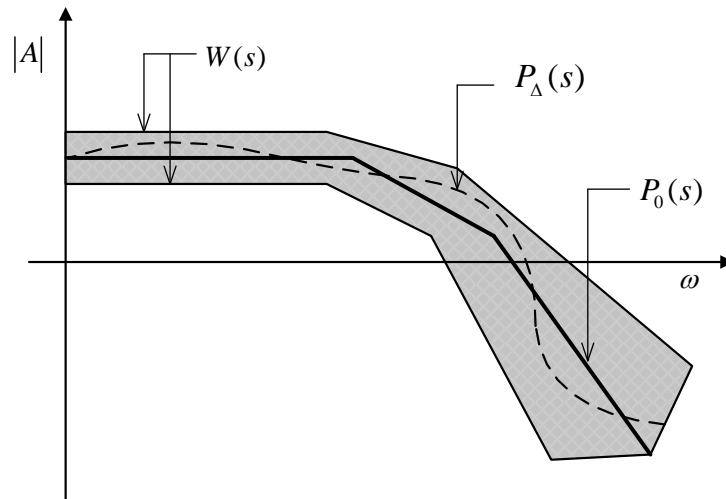
$$\mathcal{P} = \left\{ \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad y = [1 \quad 0]x : \quad a_{\min} \leq a \leq a_{\max}; \quad a_0 \in [a_{\min} \quad a_{\max}] \right\},$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -a_0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad y = [1 \quad 0]x,$$

kjer je a_{\min} spodnja, a_{\max} zgornja vrednost intervala variacije in a_0 nominalna vrednost parametra a . \mathcal{P} je množica modelov $P(s,a)$ ter $P_0(s,a_0)$ nominalni model.

Nestrukturalna odstopanja opisujejo odstopanje modela, ki so največkrat plod nemodelirane dinamike, nepopolnega opisa ali strukture modela. Velikokrat se nestrukturalna odstopanja uporabljajo za opis odstopanja linearnega od nelinearnega

modela, po postopku linearizacije. Nestrukturirana odstopanja so primerna za opis sistemov z variabilno strukturo pri spreminjajoči dinamiki ali delovni točki. Na osnovi nestrukturiranih odstopanj, je možno podati splošne kriterije stabilnosti in razviti metode načrtovanja. Nestrukturirana odstopanja so predstavljena z utežnostnimi funkcijami v frekvenčnem prostoru $W(s)$, katere podajajo zgornjo in/ali spodnjo mejo odstopanja nominalnega modela $P_0(s)$, Slika 1-1.



Slika 1-1 Grafična predstavitev nestrukturiranega odstopanja v frekvenčnem prostoru

Za oba tipa odstopanj tako strukturirana, kot nestrukturirana, lahko govorimo, da nominalni model $P_0(s)$ pripada množici modelov \mathcal{P} . Torej lahko govorimo, zaprto zančni sistem z regulatorjem $K(s)$, je robustno stabilen, če regulator $K(s)$ notranje stabilizira vse modele iz množice \mathcal{P} . V naslednjih poglavjih bomo predstavili kriterije stabilnosti za posamezne tipe odstopanj. Glede na različne vrste odstopanj se razlikujejo metode načrtovanja regulatorjev ter kriteriji stabilnosti. V delu se bomo osredotočili na metode in kriterije, ki v sintezo vključujejo nestrukturirana odstopanja.

Metode, ki vključujejo strukturalna odstopanja temeljijo na preiskovalnih optimizacijskih tehnikah in veliko poenostavitvah, predvsem pri modelih visoke stopnje in velikega nabora variabilnih parametrov. Metode največkrat vključujejo tehnike optimizacije, kot so linearno nelinearno programiranje, genetski algoritmi ter LMI optimizacija [8],[23],[25],[63]. Robustnost zaprto zančnega sistema je moč ovrednotiti

z različnimi kriteriji, Kartinov teorem, mejni teorem, politopska predstavitev karakterističnega polinoma, temenski polinomi. Temenski polinomi tvorijo aproksimiran prostor parametričnega odstopanja [5],[35],[36]. Predvsem politopska predstavitev ter temenski polinomi veljajo za kompleksno in zahtevno analizo stabilnosti z mnogimi poenostavitvami, zato za strukturna odstopanja ni posplošenih metod načrtovanj. Robustna stabilnost se ponavadi vrednoti na osnovi področne stabilnosti zaprto zračnih polov 'D-stability' [19],[21],[36]. Mnoge metode podajajo področno stabilnost, kot začetni kriterij načrtovanja.

Za nestrukturna odstopanja poznamo posplošene metode, kot so \mathcal{H}_∞ , \mathcal{H}_2 , μ -sinteza [59],[60] in *QFT* - Quantitative feedback theory [38], ki temeljijo na opisu odstopanj z utežnostnimi funkcijami. Utežnostne funkcije največkrat predstavljajo odstopanje dinamike, vpliv nelinearnosti ali motnje v frekvenčnem prostoru in so določene na osnovi modelov odstopanj [1],[42],[59] ali po priporočilih [60]. Metode, kot so \mathcal{H}_∞ , \mathcal{H}_2 , μ -sinteza in *QFT* omogočajo sistematični pristop sinteze regulatorja, ki zagotavlja izpolnjevanje kriterijev robustnosti ter minimizira vpliv odstopanja ter eliminira motnje in šume. Metoda \mathcal{H}_∞ operira z metriko norme $\|\cdot\|_\infty$ in z nastavkom po Doyleu zagotavlja optimalno rešitev z zapisom v prostoru stanj [44]. Doyleov pristop robustne sinteze je osrednja in pomembnejša tehnika robustnega načrtovanja v \mathcal{H}_∞ . Načrtovanje v \mathcal{H}_∞ je izvedljivo tudi z γ -iteracijo ter $Y - K$ parametrizacijo v prostoru stanj ali s J-spektralno faktorizacijo po delu H. Kwakernaka v vhodno izhodnem opisu. Metoda \mathcal{H}_2 operira z metriko norme $\|\cdot\|_2$ in je razširjen problem *LQ* načrtovanja, kjer je izhodiščna postavitev strukture sistema enaka, kot pri metodi \mathcal{H}_∞ . Metoda minimizira integralsko kvadratično cenilno funkcijo med vhodnimi ter izhodnimi relacijami zaprto zračne karakteristike. Kljub enakemu izhodišču obeh metod, imata normi $\|\cdot\|_\infty$ in $\|\cdot\|_2$ različen pomen in zato različne rezultate sinteze. Na kratko lahko strnemo, tehnike \mathcal{H}_∞ optimirajo ekstreme frekvenčnih karakteristik, pri čemer tehnike \mathcal{H}_2 optimirajo celotno frekvenčno karakteristiko in je pogosto uporabljen pristop za optimizacijo energije zaprto zračnih sistemov. μ -sinteza je tehnika, ki operira s singularnimi vrednostmi

zaprto značnih karakteristik in za doseg rešitve je potrebno vpeljati mnogo poenostavitev. Metoda je zahtevnejša in kompleksnejša. Ne podaja direktnih kriterijev optimalnosti ampak le izkustvene predpostavke načrtovalca. Načrtovanje poteka na osnovi $D - K$ iteracij, kjer je K sintetiziran regulator in D variabilni kriterij, ki predstavlja zgornjo mejo največje singularne vrednosti v odvisnosti od frekvence. Metod *QFT* za sintezo uporablja grafični pristop na osnovi Nicholsovega diagrama ter je edina robustna tehnika, ki v vrednotenju robustnosti vključuje tudi fazni potek karakteristik. *QFT* načrtovanje zahteva veliko izkušenj načrtovalca ter ponuja sistematično načrtovanje regulatorja ter sprotni nadzor nad strukturo regulatorja.

Kljub razvoju modernih tehnik ter mnogih različnih aspektih predstavitev problema zaprto značnega vodenja, predvsem pri metodi \mathcal{H}_∞ in \mathcal{H}_2 , imajo metode nekatere pomanjkljivosti. Največje pomanjkljivosti tehnik so visok red regulatorja, ki je odvisen od izbranih uteži ter reda sistema, netransparenta dinamika ter prikritost časovno kvalitativnih kriterijev vodenja, kar velikokrat primora načrtovalca k ponovitvam sinteze z novo postavitvijo uteži ali zamenjavo modela vodenja.

V doktorskem delu bomo predstavili robustno polinomske tehnike z vpeljavo nestrukturnih odstopanj, katera odpravljajo pomanjkljivosti vpliva reda in strukture utežnostnih funkcij na red regulatorja. Metoda prav tako nudi transparentno lego polov in s tem zagotovi posredno vrednotenje časovnih pokazateljev kvalitete vodenja. Osredotočili se bomo na robustno polinomske sinteze z vrednotenjem robustnosti z metriko norme $\|\cdot\|_\infty$ na osnovi različnih modelov odstopanj. Metodo je nadalje možno preprosto preoblikovati na metodo z metriko $\|\cdot\|_2$ ter metriko $\|\cdot\|_\infty/\|\cdot\|_2$.

1.3 Izpostavitev teze in ciljev

Teza: Robustna tehnika pomikanja polov z uvedbo parametričnih rešitev za optimizacijo kriterijev robustnosti z metriko norme $\|\cdot\|_\infty$.

Cilj doktorske disertacije je razvoj postopka oziroma metode sinteze zaprto značnega vodenja. Postopek mora zagotavljati robustno stabilnost in robustni učinek

vodenega sistema, zagotoviti želeno dinamiko ter rezultirati s sorazmerno preprostim regulatorjem, katerega struktura ni odvisna od izbranih kriterijskih oz. utežnostnih funkcij. Postopek načrtovanja vključuje znane postopke vrednotenja robustnosti in metode, katere zajemajo lastnosti obnašanja sistema. Postopek sinteze temelji na vrednotenju robustnosti z metriko \mathcal{H}_∞ ter določitvi regulatorja, s pomočjo tehnike pomikanja zaprto zančni polov v vhodno izhodnem opisu. Postopek načrtovanja je sestavljen iz več segmentov; izbira strukture regulatorja, izbira dinamike zaprto-zančnega sistema, rešitev polinomske enačbe s parametričnimi rešitvami, ocenitve robustnosti z metriko \mathcal{H}_∞ . Rešitev problema je kompromis med želeno dinamiko vodenja ter robustnostjo. V ta namen uporabimo numerične optimizacijske tehnike – evolucijsko računanje.

Robustna polinomska sinteza z metriko norme \mathcal{H}_∞ je sestavljena iz tehnike pomikanja polov ter vrednotenjem robustnosti z normo \mathcal{H}_∞ . Za vrednotenje robustnosti so vpeljani različni modeli odstopanj. Takšen pristop načrtovanja vodenja zaprto zančnih sistemov nudi sistematično načrtovanje od izbire želene dinamike zaprto zančnega sistema, izbire strukture ter arhitekture vodenja, kakor tudi zagotovitev robustnosti, v primeru zunanjih motenj ali odstopanj modela vodenja. S sistematičnim načrtovanjem vodenja je sinteza regulatorja bistveno izboljšana ter preglednejša. Vsak del sinteze inducira naslednji korak, izbira strukture vodenja določi red zaprto zančnega polinoma ter število parametričnih rešitev, s katerimi direktno oceni robustnost zaprto zančnega sistema. Metoda nudi načrtovanje robustnih regulatorjev poljubne stopnje od preprostih P,PI, PID, kompenzacijskih struktur, do regulatorjev višjih stopenj, kakor tudi izbire poljubne arhitekture (regulator v direktni veji, regulator v povratni veji s predfiltrom, arhitektura z dvema ali več prostostnimi stopnjami....).

1.4 Organizacija doktorske disertacije

Doktorska disertacija je sestavljena iz osmih poglavij. Uvodno poglavje opisuje razvoj klasične teorije vodenja in začetke razvoja robustne teorije vodenja. Prav tako so podane smernice trenutnih raziskav na tem področju in pomen vrednotenja robustnosti zaprto zračnih sistemov.

Drugo poglavje opisuje lastnosti zaprto zračnih sistemov, katere so uporabljene za analizo robustnosti ter razvoj robustne metode načrtovanja regulatorja. Poglavje opisuje pomen enoznačno popolnih sistemov ter vloga obstoja vseh notranjih izvedljivih prenosnih funkcij zaprto zračnega sistema. Podrobno je opisana notranja stabilnost v sklopu z močno stabiliziranimi sistemi. Zadnji del drugega poglavja opisuje Q - parametrizacijo regulatorja ter vloga parametra Q , pri zagotavljanju zelenih lastnosti zaprto zračnega sistema. Poglavje se zaključi z opisom omejitev zaprto zračnih sistemov, kot izhodišče za določitev kriterijev vodenja, ki so sklop kompromisov med različnimi nasprotujočimi si lastnostmi zaprto zračnih sistemov.

Tretje poglavje opisuje vrednotenje robustnosti za sisteme z nestrukturiranimi odstopanji. V poglavju so predstavljeni modeli odstopanj ter njihov pomen pri opisu odstopanja v frekvenčnem prostoru. Opisan je teorem majhnih ojačen, kot izhodiščno orodje vrednotenja robustnosti za sisteme z modeli odstopanj. Robustnost zaprto zračnih sistemov obravnavamo, kot robustno stabilnost in robustni učinek vodenega sistema. Na koncu poglavja je opisan problem mešane občutljivosti ter pomen in lastnosti posameznih uteži.

Četrto poglavje je jedro disertacije, v katerem je predstavljena nova, predlagana metoda sinteze regulatorja. Poglavje opisuje robustno tehniko pomikanja polov. Predstavljena je vpeljava družine parametričnih rešitev in njihov vpliv na rešitev polinomske Diofantove enačbe ter izvedljivost regulatorja. V poglavju so podane smernice in kriteriji izbire lege prostih parametrov ter princip reševanja polinomske enačbe s pomočjo Sylvestrove matrike. Druga polovica poglavja opisuje vpliv prostih parametrov na kriterije robustnosti z metriko norme $\|\cdot\|_\infty$, na osnovi lastnosti spektralnega polinoma. Podrobno je opisan postopek določitve spektralnih polinomov

za posamezen kriterij ter testiranje pozitivnosti polinoma s Šiljakovim stabilnostnim kriterijem. Na osnovi spektralnih polinomov so izpeljani intervali za posamezni parameter regulatorja, pri čemer zagotavljamo lastnost močno stabiliziranega zaprto zančnega sistema.

Peto poglavje opisuje numerično optimizacijo z algoritmom diferencialne evolucije. Predstavljen je potek algoritma diferencialne evolucije s prvinami evolucijskih algoritmov, kot so križanje, mutacija in selekcija. Večji del poglavja je namenjen določitvi kriterijske funkcije glede na izhodišče vrednotenja robustnosti. Opisan je postopek izbire kompozituma kriterijske funkcije ter robnimi pogoji. Na koncu poglavja je opisan Lipatov kriterij za testiranje stabilnosti regulatorja, kot dodatno orodje tekom optimizacije z diferencialno evolucijo.

Šesto poglavje opisuje postopek avtomatiziranega načrtovanja regulatorja. Potek načrtovanja je predstavljen z diagramom poteka, ki prikazuje tako inicializacijo parametrov, kot so izbira karakterističnega polinoma, uteži odstopanj, izbira strukture regulatorja, kakor tudi potek optimizacije s sestavljeno kriterijsko funkcijo in njenimi robnimi pogoji.

V sedmem poglavju je prikazan primer načrtovanja robustnega servo regulatorja, z optimizacijo kriterijev robustnosti, kot problem mešane občutljivosti. Potek algoritma vodenja je preizkušen na mikrokontrolerju PIC16Fxxx v sklopu s simuliranim objektom vodenja. Na koncu poglavja je predstavljena primerjava vodenja s klasičnim postopkom sinteze \mathcal{H}_∞ za problem mešane občutljivosti.

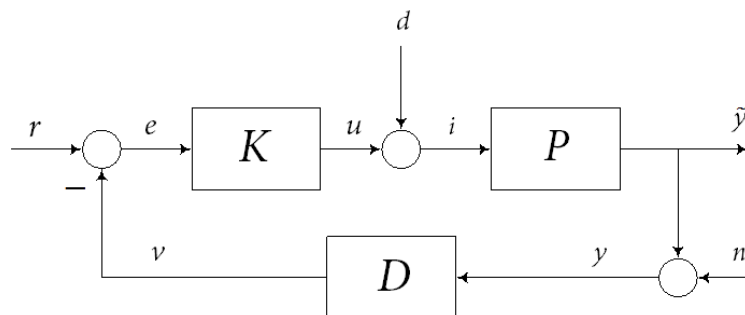
Osmo poglavje je zaključek disertacije in na kratko povzame predstavljeno delo ter podaja smernice nadaljnjega raziskovanja.

2 Lastnosti zaprto zračnih sistemov

Lastnosti ter omejitve zaprto zračnih sistemov so temelj obravnave in analize teorije vodenja. Poglavitno izhodišče obravnave zaprto zračnih sistemov so kriteriji stabilnosti (notranja/zunanja stabilnost, močno stabilizirani sistemi, asimptotična stabilnost, robustna stabilnost...), kjer zaprto zračni sistem po pretečenem času doseže ustaljeno končno stanje. Prav tako velik del obravnave zajemajo performančne karakteristike, kot so na primer, sposobnost sledenja referenčnim signalom, zagotovitev želenega učinka prehodnih pojavov, odpravo motenj itd. [29],[80]. Vpliv negotovosti ter robustnost zaprto zračnih sistemov, bomo podrobno obravnavali v naslednjem poglavju.

2.1 Enoznačni zaprto zračni sistemi

Elementarna struktura zaprto zračnega sistema je sestavljena iz treh gradnikov: objekt vodenja P , senzor D ter regulator K , kateri generira vhodni signal objektu vodenja P , Slika 2-1.



Slika 2-1 Osnovna zaprto zračna struktura

Vsaka od treh komponent ima dva vhodna in en izhod. Vsak par vhodov sestavlja en zunanji in en notranji vhod. Signali imajo naslednji pomen, Slika 2-1:

r	referenčna vhodna vrednost,
d	zunanja motnja,
n	senzorski šum,
i	vhod objekta vodenja,
y	izhod objekta vodenja,
\tilde{y}	merjen izhod objekta vodenja,
u	izhod regulatorja,
v	izhod senzorja,
e	regulacijsko odstopanje.

Za nadaljnjo obravnavo predpostavimo, da ima sistem Slika 2-1 tri eksogene vhode r, d, n ter tri izhode i, e, y , s katerimi bomo obravnavali lastnost zaprto zančnih sistemov v obliki prenosnih funkcij. Zaprto zančni sistem vrednotimo iz vidika različnih performančnih kriterijev med vhodi in izhodi. Kljub temu lahko strnemo, izhod sistema y se mora približati vrednosti vhoda r , v smislu sledenja ter različnih dinamičnih performančnih kriterijev vodenja. Podobno lahko vrednotimo izhod sistema y ter vpliva zunanje motnje d ali merilnega šuma n . Veliko krat je iz praktičnih razlogov težnja po omejitvi izhoda regulatorja u , v primeru spremembe reference r ali nastopa zunanjih motenj d .

Zaprto zančni sistem je enoznačno popoln, če obstajajo vse prenosne funkcije med tremi exogenimi vhodi r, d, n ter notranjimi izhodi i, e, y . Zapis enačb na sumacijskih mestih Slika 2-1,

$$\begin{aligned} e &= r - D y, \\ i &= d + K e, \\ y &= n + P i. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Zapis v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & D \\ -K & 1 & 0 \\ 0 & -P & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ i \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ d \\ n \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

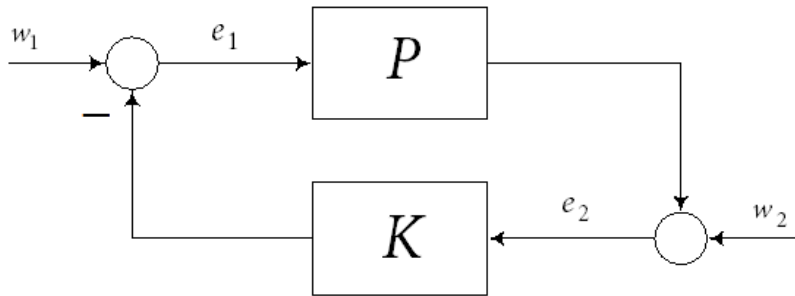
Sistem je enoznačno popoln, če matrika prenosnih funkcij ni singularna, kar pomeni, da determinanta $1 + DKP$ ni enka nič. Definiramo prenosne zaprto zanke funkcije iz izraza (2.1),

$$\begin{pmatrix} e \\ i \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1+DKP} \begin{bmatrix} 1 & -PD & -D \\ K & 1 & -KD \\ KP & P & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \\ n \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Iz izraza (2.3) lahko podamo popolno kriterij enoznačne popolnosti zaprto zanke sistema (2.1). Sistem je enoznačno popoln, če je vseh devet prenosnih funkcij pravih, kjer strogo velja, da so prenosne funkcije D, K, P prave in $1 + DKP$ ni strogo prava prenosna funkcija [42].

Vsak naravni realni sistem je strogo pravi, kar pomeni, da je model objekta vodenja P strogo prava prenosna funkcija [42]. Primer neprave in neizvedljive prenosne funkcije je zvezni PID regulator, katerega je potrebno preoblikovati z dodatnim polom s kratko časovno konstanto. Trditev lahko povzamemo, zaprto zanke sistem bo enoznačno popoln, če bodo vse prenosne funkcije D, K, P prave in ena izmed njih bo strogo prava funkcija. Na navedeno dejstvo o prenosni funkciji P , morata prenosni funkciji D, K biti pravi.

Na splošno lahko zaprto zanke sistem predstavimo z različnim naborom vhodnih in izhodnih signalov, tako je velikokrat strukturi Slika2-1, moč dodati še dodatne vhodne signale, v obliki motnje na izhodu sistema ali na vhodu v regulator K . V tem primeru uvedemo posplošen matrični opis, kjer vse eksogene vhodne signale r, d, n združimo v vhodni spremenljivki w_1 in w_2 ter vse notranje vhode i, e, y označimo s spremenljivkami e_1 in e_2 . Zaprto zanke sistem predstavimo v posplošeni strukturi, Slika 2-2. Sistem je enoznačno popoln, če so prenosne funkcije med vhodi w_1, w_2 in izhodi e_1, e_2 prave.



Slika 2-2 Posplošen struktura zaprto zančnega sistema

Definicja 2.1 *Zaprto zančni sistem je enoznačno popoln, samo če je,*

$$I + K(\infty)P(\infty), \quad (2.4)$$

invertabilna funkcija, Slika 2-2.

Dokaz Za sistem, Slika 2-2 zapišemo izraza,

$$\begin{aligned} e_1 &= w_1 - K e_2, \\ e_2 &= w_2 + P e_1. \end{aligned}$$

Izraz e_2 vstavimo v e_1 ,

$$(I + KP)e_1 = w_1 - K w_2.$$

Sledi, da je invertabilnost izraza $(I + KP)$ pogoj enoznačne popolnosti zaprto zančnega sistema, kjer je izraz $(I + KP)^{-1}$ prava funkcija [60].

Zapišemo matrično formo sistema, Slika 2-2,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I & K \\ -P & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

In velja, matrika $\begin{bmatrix} I & K \\ -P & I \end{bmatrix}$ mora biti invertabilna.

Lastnosti enoznačne popolnosti zaprto zančne karakteristike ter prave in strogo prave prenosne funkcije, so pogoj za izvedljivost ter nadaljnjo obravnavo robustnosti z metriko norme $\|\cdot\|_\infty$.

2.2 Notranja stabilnost zaprto zančnih sistemov

Obravnavamo strukturo Slika 2-1 in Slika 2-2, kjer predpostavimo, da je zaprto zančni sistem enoznačno popoln. Notranja stabilnost pomeni, da amplitudno omejeni eksogeni vhodni signali r, d, n ali w_1, w_2 rezultirajo amplitudno omejene endogene signale i, e, y, e_1, e_2 . Ideja notranje stabilnosti izvira iz opazovanja vseh prenosnih funkcij znotraj zaprto zančne strukture, kar pomeni, da ni dovolj opazovati stabilnost prenosne funkcije na relaciji r napram y (zunanja stabilnost). Kljub zunanji stabilnosti zaprto zančnega sistema, so lahko nekatere notranje prenosne funkcije nestabilne. Te povzročajo amplitudno neomejene odzive notranjih signalov, kar je nezaželen pojav, saj obstaja velika možnost okvare zaprto zančnega sistema.

Vpeljemo zapis prenosnih funkcij za model objekta vodenja P , regulatorja K ter senzorja D .

$$P = \frac{B}{A}, \quad K = \frac{L}{R}, \quad D = \frac{N}{M}. \quad (2.6)$$

Velja, da so si polinomi A, B, R, L, N, M tuji. Karakteristični polinom zaprto zančnega sistema je formiran, kot vsota produktov polinomov števca in polinomov imenovalcev prenosnih funkcij P, K, D .

$$A R M + B L N \quad (2.7)$$

Teorem 1 *Zaprto zančni sistem je notranje stabilne, če nima zaprto zančnih polov v desni polravnini ravnine s , $\text{Res} \geq 0$.*

Dokaz Za poenostavitev teorema predpostavimo, da je $D = 1$ in uporabimo izraz (2.3) v katerega vpeljemo polinomski zapis prenosnih funkcij iz (2.6),

$$\begin{pmatrix} e \\ i \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{AR+BL} \begin{bmatrix} AR & -BR & -AR \\ AL & AR & -AL \\ BL & BR & AR \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \\ n \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Iz izraza (2.8) je razvidno, da je zaprto zančni sistem notranje stabilen, če karakteristični polinom $AR + BL$ nima ničel v $Res \geq 0$, kar pomeni, da je vseh devet prenosnih funkcij sistema (2.8) stabilnih. Kljub Teoremu 1, ne moremo prehitro zaključiti pogoja o notranji stabilnosti. Karakteristični polinom $AR + BL$ ima lahko ničle v $Res \geq 0$, vendar se le te lahko krajšajo z nestabilnimi ničlami števca prenosnih funkcij. Zato k Teoremu 1 vpeljemo še dodatne kriterij notranje stabilnosti.

Teorem 2 *Zaprto zančni sistem je notranje stabilne, če sta izpolnjena naslednja pogoja:*

- (i) *Prenosna funkcija $1 + DKP$ nima ničel v $Res \geq 0$.*
- (ii) *Ni krajšanja para ničla-pol v $Res \geq 0$ pri produktu DKP .*

Dokaz Za pogoj (i) velja, če je sistem notranje stabilen, potem je $(1 + KP)^{-1}$ stabilna prenosna funkcija, kakor tudi $(1 + KP)$ nima ničel v $Res \geq 0$.

Za dokaz pogoja (ii) predpostavimo zapis prenosnih funkcij v obliki racionalnih funkcij s tujimi si polinomi (2.6). Po Teoremu 1, karakteristični polinom (2.7) nima ničel v $Res \geq 0$, zato par A, R nima skupne ničle v $Res \geq 0$ in enako velja, za druge pare števca imenovalca prenosnih funkcij P, K, D .

Prav tako z vpeljavo splošne zaprto zančne strukture Slika 2-2, velja pogoj notranje stabilnosti zaprto zančnega sistema definirane v prostoru \mathcal{H}_∞ .

Definicija 2.2 *Sistem, Slika 2-2 je notranje stabilen, če matrika prenosnih funkcij,*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I & K \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} (I + KP)^{-1} & -K(I + KP)^{-1} \\ P(I + KP)^{-1} & (I + KP)^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I - K(I + KP)^{-1}P & -K(I + KP)^{-1} \\ P(I + KP)^{-1} & (I + KP)^{-1} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

od spremenljivk w_1, w_2 do e_1, e_2 pripada podprostoru \mathcal{RH}_∞^{ii} .

Za test notranje stabilnosti je potrebno preveriti ali vse štiri prenosne funkcije pripadajo prostoru \mathcal{H}_∞ . Po definiciji 2.2, lahko izpeljemo nekaj pogojev za notranjo stabilnosti zaprto zančnih sistemov.

Zaključek 2.1 Če regulator izpolnjuje pogoj $K \in \mathcal{RH}_\infty$, je sistem notranje stabilen natanko takratna, če je sistem enoznačno popoln in $P(I + KP)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$.

Zaključek 2.2 Če objekt vodenja izpolnjuje pogoj $P \in \mathcal{RH}_\infty$, je sistem notranje stabilen natanko takratna, če je sistem enoznačno popoln in $-K(I + KP)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$.

Zaključek 2.3 Če je izpolnjen pogoj $(P \wedge K) \in \mathcal{RH}_\infty$, je sistem notranje stabilen natanko takratna, če je $(I + KP)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ ali $\det(I + KP)$ nima ničel v $\text{Res} \geq 0$.

Notranja stabilnost zaprto zančnih sistemov je osnovni pogoj izvedbe zaprto zančnih sistemov in je ključnega pomena pri načrtovanju regulatorjev. V praktičnih aplikacijah notranja nestabilnost pomeni, da neničelni začetni pogoj ali že mala napaka lahko povzroči nestabilno delovanje sistema. Nestabilno delovanje povzroči nenadzorovane odzive sistema, kar lahko vodi do poškodb ali uničenja fizičnih komponent zaprto zančnega sistema. Zato je pomembno, da vsi amplitudno omejeni vhodni signali povzročijo amplitudno omejene izhodne signale, v vseh točkah zaprto zančne karakteristike.

ⁱⁱ \mathcal{RH}_∞ -množica stabilnih in pravih prenosih funkcij

2.3 Parametrizacija regulatorja

Zaprto zančni sistem mora izpolnjevati različne kriterije vodenja, med katerimi so pomembnejši zagotovitev notranje stabilnosti ter izpolnitev performančnih kriterijev vodenja. V naslednjem poglavju bomo predstavili parametrizacijo regulatorja, ki zagotavlja notranjo stabilnost zaprto zančnega sistema, za poljuben izvedljivi objekt vodenja.

2.3.1 Parametrizacija regulatorja K s stabilnim objektom vodenja P

Predpostavimo, da je objekt vodenja P stabilna in prava prenosna funkcija, za katero želimo parametrizirati množico regulatorjev K , ki zagotavljajo notranjo stabilnost zaprto zančnega sistema. Vpeljemo množico stabilnih in pravih prenosnih funkcij \mathcal{S} . Za množico \mathcal{S} velja, če sta $K \wedge P \in \mathcal{S}$ potem je tudi $(K + P) \in \mathcal{S}$ in $KP \in \mathcal{S}$, prav tako velja $1 \in \mathcal{S}$.

Teorem 3 Če objekt vodenja izpolnjuje $P \in \mathcal{S}$, potem je množica vseh regulatorjev K , ki notranje stabilizirajo zaprto zančni sistem enaka,

$$\left\{ \frac{U}{1 - P U} : U \in \mathcal{S} \right\}.$$

Dokaz Predpostavimo, da regulator K zagotavlja notranjo stabilnost, kjer je U prenosna funkcija izhoda regulatorja K ,

$$U = \frac{K}{1 + K P}.$$

Če je $U \in \mathcal{S}$ potem velja,

$$K := \frac{U}{1 - PU}. \quad (2.10)$$

Glede na Teorem 1, kjer velja, da je sistem notranje stabilen, če je vseh devet prenosnih funkcij zaprto znančnega sistema stabilnih in pravih (2.8). Po vpeljavi izraza (2.8) v (2.10) dobimo matriko prenosnih funkcij,

$$\begin{bmatrix} 1 - PU & -P(1 - PU) & -(1 - PU) \\ U & 1 - PU & -U \\ PU & P(1 - PU) & 1 - PU \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Iz izraza (2.11) je razvidno, da vseh devet prenosnih funkcij pripada množici \mathcal{S} , saj so vse neposredno povezane s prenosno funkcijo izhoda regulatorja U .

Tako je možno za stabilni objekt vodenja P sintetizirati regulator K , ki bo notranje stabilizira zaprto znančni sistem, pri čemer je U prost parameter načrtovanja in mora izpolnjevati pogoj $U \in \mathcal{S}$.

2.3.2 Parametrizacija regulatorja K za splošni objekt vodenja P

V prejšnjem poglavju smo obravnavali parametrizacijo regulatorja le za stabilne objekte vodenja P . V nadaljevanju bomo obravnavali parametrizacijo regulatorjev za množico poljubnih izvedljivih objektov vodenja, ki so lahko stabilni ali nestabilni. Predpostavimo, da je prenosna funkcija objekta vodenja P definirana z razmerjem tujih si polinomov A in B . Izvedemo faktorizacijo regulatorja s tujimi polinomi v množici \mathcal{S} , kjer sta funkciji X in Y prav tako elementa množice \mathcal{S} .

Zapišemo objekt vodenja, kot razmerje tujih si polinomov A in B .

$$P = \frac{B}{A}$$

Z Evklidovim algoritmom določimo funkciji X in Y , ki izpolnjujeta pogoj,

$$A Y + B X = 1. \quad (2.12)$$

Izraz (2.12) je poznan, kot Bezoutova identiteta, kjer je največji skupni delitelj polinomov A in B enak ena [7]. Zaprto zankni sistem je notranje stabiliziran po Teoremu 1, če velja, da karakteristični polinom nima ničel v $Res \geq 0$. Iz izraza (2.12) in (2.7) zapišemo strukturo regulatorja,

$$K = \frac{X}{Y}. \quad (2.13)$$

Analitična rešitev z Evklidovim algoritmom izraz (2.12), lahko rezultira neizvedljiv regulator v primeru rešitve, če je $Y = 0$ ali če je Y nižje stopnje od X . Zato je potrebno namesto polinomov oblikovati takšne prenosne funkcije A' , B' , X , Y , ki bodo elementi množice \mathcal{S} . Prenosni funkciji A' in B' sta tuji v množici \mathcal{S} , če obstajata takšni funkciji X in Y v množici \mathcal{S} , ki izpolnjujeta pogoj,

$$A Y + B X = 1.$$

Za izraz (2.12) drži, da A' in B' nimata skupnih ničel v $Res \geq 0$, niti v $s = \infty$, če ne obstaja nobena točka s_0 za katero velja,

$$0 = A(s_0)Y(s_0) + B(s_0)X(s_0) \neq 1.$$

Izraz je zadosten pogoj za zagotovitev obstoja tujih prenosnih funkcij.

Za lažje razumevanje oblikovanja prenosnih funkcij A' in B' ter X in Y predstavimo naslednji primer.

Primer 2.1:

Uporabimo nestabilno prenosno funkcijo objekta vodenja P ,

$$P(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{(s-1)(s-2)}.$$

Oblikujemo stabilne prenosne funkcije $A'(s)$ in $B'(s)$ v množici \mathcal{S} z izbranim skupnim faktorjem $(s+1)^2$,

$$A'(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2},$$

$$B'(s) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Določimo X in Y z nastavkom,

$$\frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2} Y(s) + \frac{1}{(s+1)^2} X(s) = 1.$$

Rešitev enačbe,

$$X(s) = \frac{19s-11}{(s+1)},$$

$$Y(s) = \frac{s+6}{(s+1)}.$$

Sedaj lahko zapišemo pogoj za parametrizacijo regulatorjev K za posplošen objekt vodenja P .

Teorem 4 *Množica vseh regulatorjev K , ki notranje stabilizirajo zaprto zančni sistem je enaka,*

$$\left\{ \frac{X+AQ}{Y-BQ} : Q \in \mathcal{S} \right\}.$$

V primeru, če je $P \in \mathcal{S}$ sledi, da je Teorem 4 enak Teoremu 3. Izberemo $B = P$, $A = 1$, $X = 0$, $Y = 1$ in vstavimo v izraz Teorema 4.

Tako je,

$$\frac{Q}{1-PQ} = \frac{U}{1-PU},$$

kjer velja, da je $(U = Q) \in \mathcal{S}$.

Dokaz Predpostavimo, da je prenosna funkcija $Q \in \mathcal{S}$ in regulator K ,

$$K := \frac{X+AQ}{Y-BQ}. \quad (2.14)$$

Za dokaz uporabimo, da sta polinoma regulatorja R in L (2.6),

$$L = X + AQ, \quad R = Y - BQ.$$

Če velja,

$$AY + BX = 1,$$

potem sledi, da je,

$$AR + BL = 1.$$

Regulator (2.14) je faktoriziran s tujimi si polinomi in drži, če je karakteristični polinom $(AR + BL) \in \mathcal{S}$, je sistem notranje stabiliziran po Teoremu 2.

Poglejmo dokaz iz nasprotne strani, če regulator K zagotavlja notranjo stabilnost sistema, je potrebno določiti parameter Q v množici \mathcal{S} pri čemer je regulator K enak,

$$K = \frac{X+AQ}{Y-BQ}.$$

Regulator K je faktoriziran s tujimi si polinomi v množici \mathcal{S} . Predpostavimo naslednje,

$$S_0 := (A R + B L)^{-1},$$

kar pomeni da je,

$$S_0 A R + S_0 B L = 1. \quad (2.15)$$

Po Teoremu 2, S_0 pripada množici \mathcal{S} . Naj bo Q rešitev izraza,

$$S_0 R = Y - B Q. \quad (2.16)$$

Vstavimo (2.16) v (2.15) in dobimo,

$$A (Y - B Q) + S_0 B L = 1. \quad (2.17)$$

Prav tako naredimo s $S_0 L$ in vstavimo v izraz (2.12),

$$A (Y - B Q) + B (X + A Q) = 1. \quad (2.18)$$

Kjer je,

$$S_0 B = X + A Q. \quad (2.19)$$

Po izrazu (2.15) in (2.18) je regulator enak,

$$K = \frac{S_0 L}{S_0 R} = \frac{X + A Q}{Y - B Q}.$$

Ostane še dokaz $Q \in \mathcal{S}$. Množimo (2.16) z X in (2.19) z Y , izraza med seboj odštejemo ter zamenjamo strani.

$$S_0 R X = (Y - B Q) X,$$

$$S_0 B Y = (X + A Q) Y,$$

$$S_0 B Y - S_0 R X = (X + A Q) Y - (Y - B Q) X,$$

$$S_0 B Y - S_0 R X = (A Y + B X) Q.$$

Desna stran izraza je enaka Q po izrazu (2.12), zato leva stran enačbe pripada množici \mathcal{S} . Tako Teorem 4 notranje stabilizira zaprto zančni sistem. Parametrizacija nosi ime po avtorjih D.C. Youla in V. Kučera in se imenuje Youla-Kučera parametrizacija ali krajše Q – parametrizacija regulatorja [100].

Prenosna funkcija Q je prost parameter, katero je možno izbrati tako, da je zaprto zančni sistem notranje stabiliziran ter izpolnjuje performančne kriterije vodenja. Faktorizacija s tujimi si polinomi je velikokrat uporabljena tehnika robustnega načrtovanja zaprto zančnih sistemov. Robustnost sistema je funkcija parametra Q , saj so notranje prenosne funkcije pri faktorizaciji s tujimi polinomi posredno odvisne od izbire parametra Q [50],[51],[66],[93],[107].

$$\text{Občutljivost: } S = \frac{1}{1+KP} = A(Y-BQ).$$

$$\text{Komplementarna občutljivost: } T = \frac{KP}{1+KP} = B(X+AQ).$$

$$\text{Izhod regulatorja: } U = \frac{P}{1+KP} = A(X+AQ).$$

Koeficienti prenosne funkcije Q so rezultat optimizacijskih metod na osnovi postavljenih kriterijev vodenja in robustnosti. Največkrat je problem optimizacije obravnavan s konveksnimi optimizacijskimi tehnikami, kjer se nekonveksni optimizacijski problem preoblikuje v konveksnega. Zelo znani tehniki konveksne

optimizacije v robustnih metodah načrtovanja sta LMIⁱⁱⁱ in LP^{iv}. Tehniki sta pogosto v sklopu parametrizacije na osnovi tujih polinomov uporabljeno orodje za določitev optimalnega regulatorja robustne sinteze [9],[49],[67],[68],[81].

2.4 Močno stabilizirani zaprto zančni sistemi

Klasične, kakor tudi moderne metode načrtovanja regulatorjev imajo poglavitni cilj zagotovitev notranje stabilnosti zaprto zančnega sistema. Notranja stabilnost je ključnega pomena pri izvedbi zaprto zančnega sistema. Predvsem pri modernih metodah je sintetiziran regulator dosežen z optimizacijskimi tehnikami, kjer skoraj ni mogoče neposredno vpeljati kriterija zagotavljanja stabilnosti regulatorja. Stabilnost regulatorja ni posredno povezana z notranjo stabilnostjo zaprto zančnega sistema, saj nestabilni regulator in nestabilni objekt vodenja lahko notranje stabilizirata zaprto zančni sistem. Toda v aplikativni regulacijski tehniki je zaželena implementacija stabilnih regulatorjev, saj le ti v primeru prekinitve zaprto zančnega vodenja zaradi izpada senzorja ali aktuatorja stabilizirajo izhod regulatorja. V primeru nestabilnega delovanja regulatorja pri navedenih dogodkih, izhod regulatorja lahko povzroči okvaro na sistemu [75]. Zelo smotrna je uporaba stabilnega regulatorja v sklopu s stabilnim objektom vodenja, saj je tako ohranjena stabilnost odprto zančnega sistema v primeru izpada ali okvare na sistemu [24],[90],[106].

Sistem je močno stabiliziran, če je dosežena notranja stabilizacija zaprto zančnega sistema s stabilnim regulatorjem K . Nadalje bomo uporabljali izraz močno stabiliziran P . Kljub želji po načrtovanju stabilnih regulatorjev, je pogoj močno stabiliziran sistem odvisen od lastnosti izbranega objekta vodenja P .

Teorem 5 P je močno stabiliziran, če ima sodo število realnih polov med parom realnih ničel v $Res \geq 0$.

Pogoj v Teoremu 5, se še drugače imenuje P.I.P^v-kriterij.

ⁱⁱⁱ LMI - ang. linear matrix inequality – linearna matrična neenakost

^{iv} LP – ang. linear programming – linerarno programiranje

Dokaz Predpostavimo, da kriterij iz Teorema 5 ni izpolnjen, kar pomeni, da P nima dveh pozitivnih realnih polov med pozitivnima realnima ničloma. Želimo dokazati, da je vsak notranje stabilizirajoči regulator zaprto zančnega sistema nestabilen. Izhajamo iz izrazov (2.6), (2.12), (2.14), kjer velja $Q \in \mathcal{S}$ in želimo dokazati, da izraz $Y - BQ$ ima ničle v $Res \geq 0$. Predpostavimo, da polinom B ima par ničel v $Res \geq 0$, $s_1 = n_1$, $s_2 = n_2$ in polinom A ima liho število ničel med ničloma s_1, s_2 . Tako sledi, da vrednosti polinoma $A(n_1)$ in $A(n_2)$ imata različen predznak, kar velja tudi za polinoma $Y(n_1)$ in $Y(n_2)$ in velja $AY = 1$. Teorem 5 t.i. P.I.P kriterij velja, tudi za poljubne tehnike načrtovanja regulatorjev in je splošen pogoj za izvedbo stabilnega regulatorja za dan objekt vodenja P .

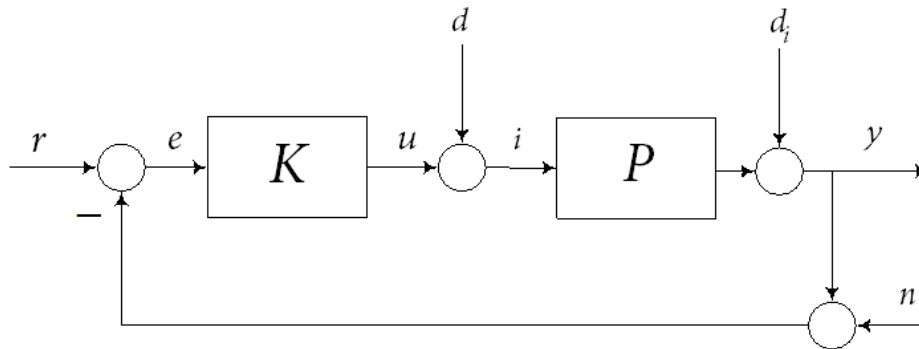
2.5 Učinkovitost in omejitve zaprto zančnih sistemov

Zaprto zančni sistemi ob pogoju stabilnega delovanja morajo izpolnjevati še ostale kriterije, ki so prav tako pomembni pri vrednotenju učinkovitosti vodenja. Enoznačnost, notranja stabilnost so pomembne lastnosti, brez katerih uporaba zaprto zančnega vodenja ne bi bila izvedljiva. Tako zagotovitev stabilnosti ni edina relevantna, potrebno je doseči tudi lastnosti, katere so postavljene iz vidika uporabnosti in funkcionalnosti zaprto zančnega sistema. Pogosto se zgodi, da regulator kljub doseženi stabilnosti sistema ni možno uporabiti zaradi različnih razlogov, bodisi prevelik pogrešek vodenja, nizka dinamika sistema, slaba kompenzacija motenj, veliki prenehaji vodenega izhoda, previsok red regulatorja, visoki izhodi regulatorja itd.. Takšne omejitve velikokrat zahtevajo ponovno načrtovanje ali celo zamenjavo tehnike načrtovanja. Moderna teorija vodenja ter moderne tehnike načrtovanja zaprto zančne sisteme vrednotijo iz različni aspektov, katerih kriteriji so vključeni direktno ali indirektno v postopek načrtovanja. Predvsem je pomembno poudariti, da si kriteriji velikokrat med seboj nasprotujejo. Vzemimo primer kriterij iznosa prenehaj napram visoki dinamiki [46] ali robustna stabilnost napram robustnemu učinku itd. [61].

^v P.I.P- ang. parity interlacing property – pariteta lege ničla pol

Moderni regulator je optimum kompromisov med postavljenimi kvalitativnimi kriteriji vodenja ter zaprto zračno stabilnostjo.

Za vrednotenje lastnosti ter omejitev zaprto zračnega sistema uporabimo strukturo, Slika 2-3.



Slika 2-3 Zaprto zračna struktura z motnjami d, d_i, n

Definirajmo odprto zračno karakteristiko sistema, Slika 2-3,

$$L = KP. \quad (2.20)$$

Kjer je komplementarna občutljivost y/r ,

$$T = \frac{L}{1+L}. \quad (2.21)$$

Prenosna funkcija občutljivosti e/r definirana, kot občutljivost spremembe komplementarne občutljivosti T , s spremembo objekta vodenja P ,

$$S = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta T / T}{\Delta P / P} = \frac{dT}{dT} \frac{P}{T} = \frac{1}{1+L}. \quad (2.22)$$

Občutljivost S je pogosto uporabljena funkcija za vrednotenje robustnosti zaprto zančnega sistema [37]. Zaprto zančna prenosna funkcija T je komplement funkcije občutljivosti S (2.23), od tod izraz komplementarna občutljivost.

$$T=1-S \quad (2.23)$$

Če je sistem notranje stabiliziran potem drži naslednje,

$$\begin{aligned} a.) \quad y &= T r + P S d + S d_i - T n, \\ b.) \quad e &= S r - P S d - S d_i - S n, \\ c.) \quad u &= K S r - T d - K S d_i - K S n, \\ d.) \quad i &= K S r + S d - K S d_i - K S n. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Iz izrazov (2.24) so razvidne mnoge lastnosti zaprto zančnega sistema. Dobro sledenje izhodnega signala y referenčnemu signalu r po izrazu $a.$ (2.24) zagotovimo, če je prenosna funkcija T pri frekvenci referenčnega signala ω enaka $|T(\omega)| = 1$. Enako velja za sledenje $y \rightarrow r$ po izrazu $b.$ (2.24). Pogrešek sledenja $e = 0$, če je vrednost prenosne funkcije občutljivosti pri dani frekvenci ω referenčnega signala r enaka $|S(\omega)| = 0$ ali $T = 1$ (2.23).

Majhen vpliv izhodne motnje d_i na izhod sistema y zagotovimo, če je prenosna funkcija občutljivosti S v frekvenčnem področju motilnega signala majhna, izraz $a.$ (2.24). Prav tako dobro odpravo vhodne motnje d na vhod sistema i , zagotovimo s majhno vrednostjo funkcije občutljivosti S , izraz $d.$ (2.24). Lastnosti je preprosteje predstaviti s frekvenčno odvisnimi singularnimi vrednostmi σ . Izraz $\bar{\sigma}(S) < 1$ pomeni, da funkcija občutljivosti S slabi vhodni signal d, d_i v določenem frekvenčnem območju.

Dobro odpravo motenj na izhodu sistema y zagotovimo, če so naslednji izrazi majhni,

$$\bar{\sigma}(S) = \bar{\sigma}\left(\frac{1}{I+KP}\right) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I+KP)} \quad (\text{za izhodno motnjo } d_i),$$

$$\bar{\sigma}(S) = \bar{\sigma}\left(\frac{P}{I+KP}\right) = \bar{\sigma}(PS) \quad (\text{za vhodno motnjo } d).$$

Dobro odpravo motenj na vhodu sistema zagotovimo z lastnostmi,

$$\bar{\sigma}(KS) = \bar{\sigma}\left(\frac{K}{I+KP}\right) = \bar{\sigma}(KS) \quad (\text{za izhodno motnjo } d_i),$$

$$\bar{\sigma}(S) = \bar{\sigma}\left(\frac{1}{I+KP}\right) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I+KP)} \quad (\text{za vhodno motnjo } d).$$

Odpravo motenj na vhodu ali izhodu sistema i, y obravnavamo za nizko frekvenčna motilna signala d, d_i . Vhod n obravnavamo, kot visoko frekvenčni šum senzorja.

Upoštevajmo,

$$\underline{\sigma}(KP) - 1 \leq \underline{\sigma}(I+KP) \leq \underline{\sigma}(KP) + 1,$$

potem sledi,

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(KP) + 1} \leq \bar{\sigma}(S) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(KP) - 1}, \quad \text{če je } \underline{\sigma}(KP) > 1.$$

Izraz pomeni,

$$\bar{\sigma}(S) \ll 1 \Leftrightarrow \underline{\sigma}(KP) \gg 1 = \underline{\sigma}(L) \gg 1.$$

Predpostavimo, če sta K in P invertabilna,

$$\underline{\sigma}(KP) \gg 1 \Leftrightarrow \leq \bar{\sigma}(PS) = \bar{\sigma}\left(\frac{P}{I+KP}\right) \approx \bar{\sigma}(K^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(K)},$$

$$\underline{\sigma}(KP) \gg 1 \Leftrightarrow \leq \bar{\sigma}(KS) = \bar{\sigma}\left(\frac{K}{I+KP}\right) \approx \bar{\sigma}(P^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(P)}.$$

Dober učinke izhoda zaprto zančnega sistema y v smislu sledenja ali odprave motnje, zahteva veliko ojačenje odprto zančnega sistema $\underline{\sigma}(L) = \underline{\sigma}(KP) \gg 1$ v področju frekvenc referenčnega signala r in motilnega signala d_i ali visoko ojačenje regulatorja $\underline{\sigma}(K) \gg 1$, v področju frekvenc motilnega signal d . Podobno velja za učinek vhodnega signala i v objekt vodenja P . Visoko ojačenje $\underline{\sigma}(KP) \gg 1$ v frekvenčnem področju d zmanjšuje vpliv motnje na vhod i , prav tako visoko ojačenje objekta vodenja $\underline{\sigma}(P) \gg 1$ zmanjšuje vpliv motnje d_i na vhod i .

Kljub prej navedenim lastnostim zaprto zančnega sistema, načrtovanje regulatorja ni tako preprosto in vsebuje mnogo omejitev. Problem se nahaja predvsem pri oblikovanju frekvenčnih karakteristik S, T, U po vzoru navedenega. Ni možno poljubno izbrati velikosti ojačenja določene karakteristike pri poljubni frekvenci, saj sprememba ene karakteristike pomeni sprememba druge, v nasprotno smer (komplementarnost). Zanimiv primer je zagotovitev sledenja $y \rightarrow r$ ter odpravo izhodne motnje d_i napram zagotovitve robustne stabilnosti za model, katerega negotovost je podana, kot $P + \Delta P$. Sistem je stabilen če zaprto zančni poli ležijo v $Res < 0$.

$$\det(I + (P + \Delta P)K) = \det(I + PK) \det(I + \Delta T)$$

Zaprto zančni sistem je robustno stabilen, če je $\bar{\sigma}(T) < 1$, kar pomeni, da odprto zančni sistem L mora biti v frekvenčne področju odstopanja Δ čim manjši $\bar{\sigma}(KP) < 1$. Navedeno je v protislovju z zagotovitvijo dobrega sledenja in odpravo motenj, kjer mora veljati $\bar{\sigma}(KP) > 1$.

Poglejmo podoben konflikt, odpravo senzorskega šuma n ter motnje d_i , izraz a.(2.24). Če zagotovimo veliko ojačenje odprto zančne karakteristike $\bar{\sigma}(L(j\omega)) \gg 1$ v širokem frekvenčnem območju pomeni, da onemogočimo slabljenje šuma n , ki se ojačen preslika na izhod y ,

$$y = Tr + PSd + Sd_i - Tn \approx (r - n).$$

Prav tako visoko frekvenčne lastnosti šuma n izven pasoven širine P in zagotovljeni lastnosti $\bar{\sigma}(L(j\omega)) \gg 1$. Kljub $\bar{\sigma}(P(j\omega)) \ll 1$ lahko povzroči nespremenljive odzive izhoda regulatorja u in limitno delovanje aktuatorjev,

$$u = KS r - T d - KS d_i - K S n = KS(r - d_i - n) - T d \approx P^{-1}(r - d_i - n) - d.$$

Prav tako ni smiselno vzdrževati visokega ojačenja regulatorja $\bar{\sigma}(K)$ v frekvenčnem področju, kjer je ojačenje odprte zanke nizko $\bar{\sigma}(L)$. S primernim ojačenjem regulatorja K se izognemo zasičenju izhoda regulatorja u v primeru $\bar{\sigma}(L) \ll 1$,

$$u = KS r - T d - KS d_i - K S n = KS(r - d_i - n) - T d \approx K(r - d_i - n).$$

Zasičenje regulatorja K pomeni limitno delovanje aktuatorjev, kateri največkrat povzročijo nepričakovane oscilacije izhoda y ali celo destabilizirajo zaprto znančnega sistema. Če želimo zagotoviti zaprto znančni sistem z zadovoljivim sledenjem, odpravo motenj ter robustnostjo lahko na kratko povzamemo. V področju nizkih frekvenc zagotovimo,

$$\underline{\sigma}(KP) \gg 1 \quad \underline{\sigma}(K) \gg 1,$$

v področju visokih frekvenc,

$$\underline{\sigma}(KP) \ll 1 \quad \underline{\sigma}(K) \leq M.$$

Vrednost M izberemo tako, da ta ne vpliva na zasičenje izhoda regulatorja K . Sinteza regulatorja K je kompromis med dinamiko, stabilnostjo ter učinkovitostjo zaprto znančnega sistema, kjer suboptimalnost regulatorja pomeni presek izbranih kriterijev in optimalnost najboljša rešitev iz množice suboptimalnih rešitev.

3 Negotovost in robustnost zaprto zančnih sistemov

Negotovost modela vodenja vrednotimo, kot razhajanje dinamike med nominalnim modelom in realnim objektom vodenja. Razlike zaradi katerih nastanejo odstopanja smo opisali v uvodnem poglavju. V teoriji robustnega vodenja odstopanje ter negotovost modela razvrščamo v dve skupini. Odstopanje formuliramo, kot parametrično ali strukturno odstopanje. Parametrična odstopanja podajajo razliko med nominalno ter dejansko vrednostjo parametra in so največkrat podana z intervalom odstopanja za posamezen parameter. Strukturna odstopanja po lastnosti opisa delimo še na dve podvrsti; strukturirana in nestrukturirana odstopanja. Strukturirana odstopanja ob vrednosti podajajo tudi informacijo o položaju, kjer odstopanje nastopa. Tako je odstopanje podano s toleranco ali množico reprezentativnih elementov istega sistema. Nestrukturirana odstopanja podajajo le celoten iznos odstopanja na obnašanje sistema. Pri nestrukturiranih odstopanjih nimamo nobene informacije o položaju odstopanja znotraj podane strukture in jih je možno predstaviti z različnimi modeli odstopanj, kjer je odstopanje opisano z utežnostnimi funkcijami v frekvenčnem prostoru [42],[60].

Glede na vrsto odstopanj so podane različne metode vrednotenja robustnosti zaprto zančnega sistema. Predvsem za strukturna odstopanja obstaja množica postopkov in kriterijev, po katerih je moč vrednotiti robustnost zaprto zančnih sistemov [42],[108]. Prav tako obstajajo priporočila za določitev uteži odstopanj na osnovi modelov odstopanja [55],[88] ali izbire kvalitativnih performančnih kriterijev [59],[60]. Orodja za vrednotenje robustnosti sistemov s parametričnimi odstopanji so mnogo kompleksnejša in zahtevnejša, zato vsebujejo mnogotere poenostavitve s katerimi je olajšano vrednotenje robustnosti [28]. Prav zaradi kompleksnosti ter vpeljave poenostavitev, ki se razlikujejo do sistema do sistema in so prosta izbira načrtovalca, ni posplošenih kriterijev s katerimi bi tako preprosto, kot za strukturna odstopanja

vrednotili robustnost. Smiselno je poudariti, da je parametrična odstopanja možno dokaj preprosto preoblikovati v nestrukturirana odstopanja [71], kar nasprotno ni izvedljivo, saj parametrična odstopanja temeljijo na snovno fizikalnih lastnostih sistema. V nadaljevanju dela se bomo osredotočili zgolj na vrednotenje robustnosti za sisteme s strukturnimi odstopanji.

3.1 Nestrukturirani modeli odstopanj

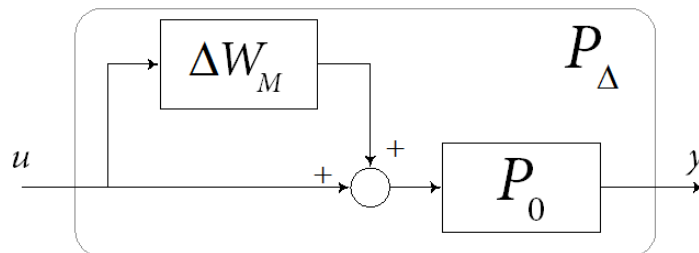
Kot smo že omenili v uvodu tretjega poglavja, nestrukturna odstopanja opisujejo celotne iznos odstopanj in ne podajajo relativne točke, kje odstopanje nastopa. Za boljše modeliranje odstopanja ter posredno vrednotenje robustnosti uvedemo različne modele odstopanj. Vsak model odstopanj ima svojstvene lastnosti, s katerimi lahko določimo odstopanja vzdolž celotne frekvenčne karakteristike objekta vodenja.

Enako, kot v uvodnem podpoglavju 1.2 predpostavimo množico modelov odstopanj \mathcal{P} , kjer je P_0 nominalni model in P_Δ element množice \mathcal{P} . Modeli odstopanj z utežnostnimi funkcijami temeljijo na opisu odstopanj, glede na nominalni model vodenja P_0 .

3.1.1 Multiplikativni model

Z multiplikativnim modelom odstopanj modeliramo zanemarjeno visoko frekvenčno dinamiko dejanskega objekta vodenja ter negotovost ničel P_0 v področju $Res > 0$. Prav tako z vhodnim ali izhodnim multiplikativnim modelom modeliramo negotovost vhodnega aktuatorja ali negotovost senzorja na izhodu modela objekta vodenja P_0 .

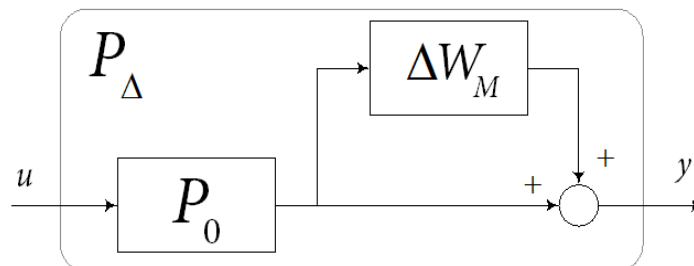
Vhodni multiplikativni model



Slika 3-1 Vhodni multiplikativni model odstopanj

$$\Delta W_M = (P_\Delta - P_0) P_0^{-1}$$

Izhodni multiplikativni model

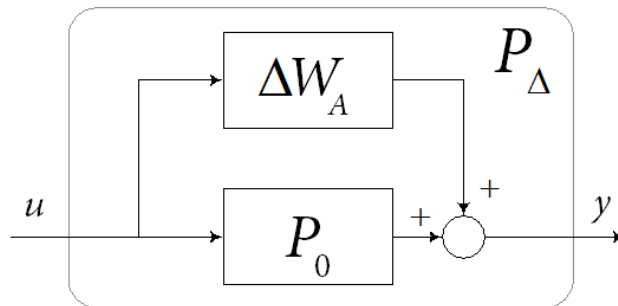


Slika 3-2 Izhodni multiplikativni model odstopanj

$$\Delta W_M = P_0^{-1} (P_\Delta - P_0)$$

3.1.2 Aditivni model

Aditivni model odstopanj je primeren za modeliranje zanemarjene visoke frekvenčne dinamike ter negotovost polov ni ničel modela objekta vodenja P_0 v področju $Res > 0$ in $Res < 0$.



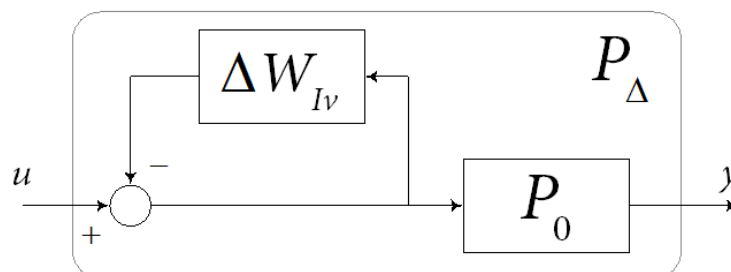
Slika 3-3 Aditivni model odstopanj.

$$\Delta W_A = P_\Delta - P_0$$

3.1.3 Inverzni model

Inverzni model je primeren za modeliranje odstopanja pri nizkih frekvencah ter negotovost odstopanja polov modela objekta vodenja P_0 v področju $Res < 0$. Prav tako ga je možno predstaviti v vhodni in izhodni različici.

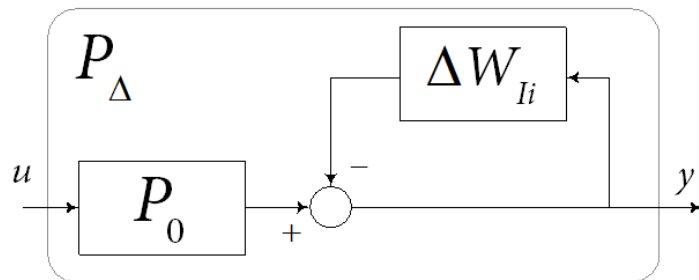
Vhodni inverzni model



Slika 3-4 Vhodni inverzni model odstopanj.

$$\Delta W_{Iv} = (P_0 - P_\Delta)P_\Delta^{-1}$$

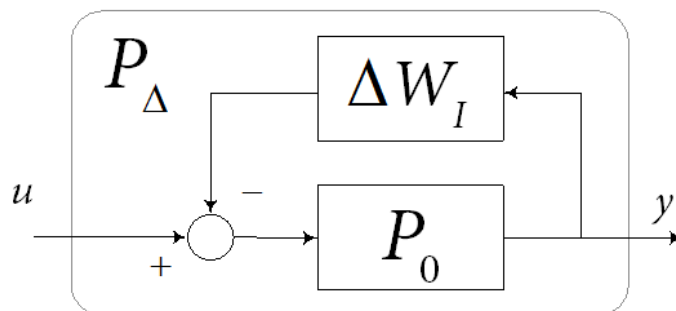
Izhodni inverzni model



Slika 3-5 Izhodni inverzni model odstopanj.

$$\Delta W_{Ii} = P_{\Delta}^{-1}(P_0 - P_{\Delta})$$

Inverzni model



Slika 3-6 Inverzni model odstopanj.

$$\Delta W_I = P_{\Delta}^{-1}(P_0 - P_{\Delta})P_0^{-1}$$

Za vse modele velja, da morajo uteži $W_M(s), W_A(s), W_{Iv}(s), W_{Ii}(s), W_I(s)$ biti prave in stabilne prenosne funkcije, kjer je utež $\Delta(s)$ spremenljiva stabilna prenosna funkcija, ki mora izpolnjevati pogoj $\|\Delta\|_{\infty} < 1$. Navedeni pogoji so pomembni za nadaljnjo obravnavo robustnosti, robustne stabilnost ter robustnega učinka.

3.2 Robustna stabilnost

Zaprto zančni sistem z modelom vodenja $P_0 \in \mathcal{P}$ je robustno stabilen, če regulator K zagotavlja stabilnost za vse modele vodenja P_Δ , ki so elementi množice \mathcal{P} . Robustnost lahko opišemo, kot zagotavljanje vseh postavljenih kriterijev vodenja za vse modele, ki pripadajo množici \mathcal{P} . Kriteriji vodenja so izbrane lastnosti zaprto zančnega sistema in so izhodišče ter hkrati cilj načrtovanja zaprto zančnega sistema. Kriterije vodenja, ki vsebujejo kvalitativne in strukturne lastnosti zaprto zančnega sistema ter lastnosti regulatorja K predstavimo, kot množico \mathcal{D} . Tako vpeljemo splošno definicijo robustnosti.

Definicija 3.1 *Zaprto zančni sistem z regulatorjem K je robusten, če za vsak model P_Δ , ki pripada množici \mathcal{P} , zaprto zančni sistem $(1 + KP_\Delta)^{-1}[1 \ K \ KP_\Delta]$ pripada množici \mathcal{D} .*

Množico kriterijev in specifikacij zaprto zančnega sistema \mathcal{D} razdelimo na dve podmnožici, kjer robustnost zaprto zančnih sistemov podrobneje vrednotimo, kot robustna stabilnost ter robustni učinek zaprto zančnega sistema. Lastnosti robustnega učinka bomo predstavili v naslednjem poglavju.

Regulator K zagotavlja robustno stabilnost zaprto zančnega sistema, če zagotavlja notranjo stabilnost za vse modele iz množice \mathcal{P} . Prav tako je smiselno podati test, ki ob regulatorju K in množici modelov \mathcal{P} stabilizirajo zaprto zančni sistem in določajo mejo stabilnosti sistema. Nyquistova krivulja podaja mejo stabilnosti zaprto zančnega sistema, kjer je razdalja med kritično točko -1 in njeno najbližjo točko Nyquistove krivulje prenosne funkcije KP enaka $\|S\|_\infty^{-1}$,

$$\begin{aligned}
\text{razdalja od } -1 \text{ do } L &= \inf_{\omega} | -1 - L(j\omega) |, \\
&= \inf_{\omega} | 1 + L(j\omega) |, \\
&= \left[\sup_{\omega} \frac{1}{| 1 + L(j\omega) |} \right]^{-1}, \\
&= \| S \|_{\infty}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Zatorej velja, če je $\|S\| \gg 1$, potem je Nyquistova krivulja blizu kritične točke -1 , kar pomeni, da je sistem blizu nestabilnosti. Čeprav Nyquistova krivulja podaja mejo nestabilnosti zaprto zančnega sistema, ta metrika ni popolna in ustrezna, saj ne vsebuje informacijo o frekvenci. Natančnejši opis robustne stabilnosti je moč podati, če nominalni model P_0 ter model P_{Δ} imata enako število nestabilnih polov in za njuno razliko velja,

$$(P_{\Delta}(j\omega)K(j\omega) - P_0(j\omega)K(j\omega)) < \|S\|_{\infty}^{-1}. \tag{3.2}$$

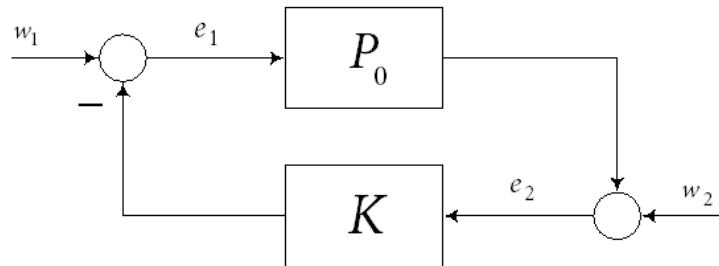
Kljub natančnejšemu kriteriju (3.2), je ocena robustnosti precej konzervativna, saj so v področju nizkih frekvenc KP_0 , ki so bolj oddaljena od kritične točke -1 , dopuščena večja odstopanja modela P_{Δ} , kot jih opisuje izraz (3.2).

Boljša ocena robustne stabilnosti je podana z vrednotenjem zaprto zančnega sistema z različnimi modeli odstopanj. Preden predstavimo robustno stabilnost zaprto zančnih sistemov na osnovi različnih modelov odstopanj, bomo še prej vpeljali teorem majhnih ojačenj, ki je izhodišče vrednotenja robustne stabilnosti z različnimi modeli odstopanj.

3.2.1 Teorem majhnih ojačenj

Teorem majhnih ojačenj je prvi vpeljal G. Zames 1966, kot kriterij za ocenjevanje stabilnosti nelinearnih in MIMO sistemov. Prav tako je teorem primeren za vrednotenje stabilnosti SISO sistemov ter analiziranje drugih lastnosti zaprto zančnega

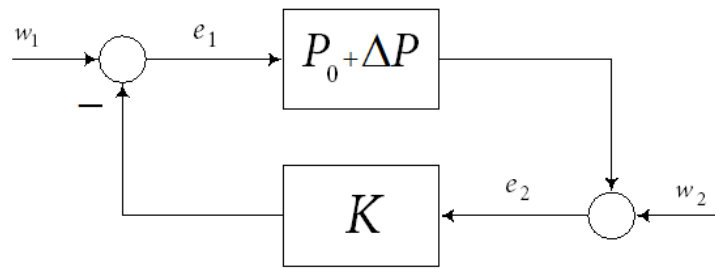
vođenja, kot so pasivnost, stabilnost, robustna stabilnost itd. [13]. Teorem majhnih ojačenj predstavlja splošen pogoj Nyquistovega kriterija in je tako primeren za vrednotenje robustne stabilnosti zaprto zančnih sistemov z nestrukturiranimi odstopanji, kjer je odstopanje podano z utežnostnimi funkcijami, ki predstavljajo mejo odstopanj v frekvenčnem prostoru.



Slika 3-7 Posplošena struktura zaprto zančnega sistema

Najprej predstavimo poenostavljen teorem majhnih ojačenja za sistem Slika 3-7. P_0 in K sta stabilni ter strogo pravi matriki prenosnih funkcij in velja, da je sistem notranje stabilen in enoznačno popoln, če izraz $(1 + P_0K)$ nima ničel v $Res > 0$, Teorem 2. Iz tega sledi, da so vse notranje prenosne funkcije omejene in prave. Po Nyquistovem kriteriju velja, da je sistem notranje stabilen, če krivulja ne obkroži ali se ne dotakne kritične točke -1 . Zadosten pogoj notranje stabilnosti po teoremu majhnih ojačenj in po vzgledu Nyquistovega kriterija je izraz $\|P_0K\|_\infty < 1$. Teorem majhnih ojačenj ima pragmatično razlago, če se zaprto zančni sistem bliža točki nestabilnosti, bodisi fazno proti -180° ali kritični točki -1 , mora biti ojačenje sistema manjše od 1. V področju nestabilnosti sistem slabi vhodne signale w_1, w_2 .

Sedaj vpeljemo teorem majhnih ojačenj za ocenitev robustne stabilnosti zaprto zančnega sistema. Predpostavimo, da je ΔP prava, stabilna prenosna funkcija, ki predstavlja poljubno odstopanje strogo prave in stabilne prenosne funkcije P_0 , Slika 3-8. Prav tako velja, da je K prava in stabilna funkcije, kjer v primeru $\Delta P = 0$ velja $\|P_0K\|_\infty < 1$.



Slika 3-8 Zaprto zančni sistem z odstopanjem ΔP

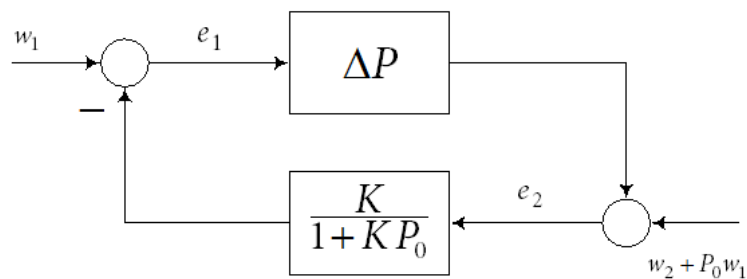
Lastnost teorema majhnih ojačenj uporabimo za določitev dopustne meje spremembe prenosne funkcije ΔP , pri čemer je ohranjena notranja stabilnost zaprto zančnega sistema. Vpeljemo stabilno, pravo, racionalno prenosno funkcijo W , ki predstavlja mejo odstopanja pri kateri je zagotovljena notranja stabilnost sistema Slika 3-8 in velja,

$$|\Delta P(j\omega)| < |W(j\omega)|, \omega = [0 \ \infty]. \quad (3.3)$$

Iz izraza sledi,

$$\|W^{-1}\Delta P\|_{\infty} < 1. \quad (3.4)$$

Sistem, Slika 3-8 preoblikujemo v sistem, Slika 3-9.



Slika 3-9 Preoblikovan zaprto zančni sistem z izraženim odstopanjem ΔP

Iz sistema Slika 3-9 in izraza (3.4) lahko povzamemo, nominalni zaprto zančni sistem je stabilen, če so vse ničle izraza $(1 + P_0K)$ v $Res < 0$.

Nadalje sledi, zaprto zančni sistem je robustno stabilen, za množico odstopanj ΔP in pogojem (3.3), če drži,

$$\left\| \frac{\Delta P K}{1 + KP_0} \right\|_{\infty} < 1. \quad (3.5)$$

Na osnovi teorema majhnih ojačenj bomo izpeljali pogoje robustne stabilnosti za različne modele odstopanj.

3.3 Robustna stabilnost z nestrukturiranimi modeli odstopanj

Na osnovi teorema majhnih ojačenj, bomo analizirali robustno stabilnost zaprto zančnih sistemov za posamezne modele odstopanj v podpoglavju 3.1. Za predstavitev zaprto zančnega sistema, bomo uporabili posplošeno strukturo sistema Slika 3-7.

3.3.1 Robustna stabilnost za sisteme z multiplikativnim odstopanjem

Negotovost modela z multiplikativnim odstopanjem predstavimo, kot

$$\Delta P = P_0 (1 + \Delta W_M). \quad (3.6)$$

Teorem 6 Če je odstopanje modela podano s $\Delta P = P_0(1 + \Delta W_M)$ in regulator K stabilizira zaprto zančni sistem z nominalnim modelom P_0 , je zaprto zančni sistem robustno stabilen in enoznačno popoln za vse $\|\Delta\|_{\infty} < 1$, če je izpolnjen pogoj,

$$\|\Delta W_M T\|_{\infty} < 1. \quad (3.7)$$

Dokaz Zapišemo zaprto znančni sistem z multiplikativnim odstopanjem $\Delta P = P_0(1 + \Delta W_M)$,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & K \\ -\Delta P & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & K \\ -P_0(I + \Delta W_M) & 1 \end{bmatrix}^{-1}, \\
&= \left(1 + KP_0(I + \Delta W_M)\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -K \\ P_0(I + \Delta W_M) & 1 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} (1 + KP_0)^{-1}(1 + \Delta W_M T)^{-1} & -(1 + KP_0)^{-1}(1 + \Delta W_M T)^{-1}K \\ (1 + KP_0)^{-1}(1 + \Delta W_M T)^{-1}P_0(I + \Delta W_M) & (1 + KP_0)^{-1}(1 + \Delta W_M T)^{-1} \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} S(1 + \Delta W_M T)^{-1} & -S(1 + \Delta W_M T)^{-1}K \\ S(1 + \Delta W_M T)^{-1}P_0(I + \Delta W_M) & S(1 + \Delta W_M T)^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Zaprto znančni sistem je po Teoremu 2 notranje stabilen in enoznačno popoln, če prenosna funkcija občutljivosti S (zadnja matrika prenosnih funkcij) nima polov v $Res > 0$ in robustno stabilen, če pripada $(1 + \Delta W_M T)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$. Po teoremu majhnih ojačenj je sistem robustno stabilen, če je izpolnjen pogoj $\|\Delta W_M T\|_\infty < 1$.

3.3.2 Robustna stabilnost za sisteme z aditivnim odstopanjem

Odstopanje z aditivnim model predstavimo, kot

$$\Delta P = P_0 + \Delta W_A. \quad (3.8)$$

Teorem 7 Sistem podan z odstopanjem $\Delta P = P_0 + \Delta W_A$ in regulatorjem K , ki stabilizira zaprto znančni sistem z nominalnim modelom P_0 , je robustno stabilen in enoznačno popoln za vse $\|\Delta\|_\infty < 1$, če je izpolnjen pogoj,

$$\|\Delta W_A K S\|_\infty < 1. \quad (3.9)$$

Dokaz Za zaprto zančni sistem z aditivnim odstopanjem, robustno stabilnost izpeljemo enako, kot v prejšnjem primeru, kjer zaprto zančni sistem predstavimo v matrični formi,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & K \\ -\Delta P & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & K \\ -(P_0 + \Delta W_A) & 1 \end{bmatrix}^{-1}, \\ &= \begin{bmatrix} S(1 + \Delta W_A K S)^{-1} & -S(1 + \Delta W_A K S)^{-1} K \\ S(1 + \Delta W_A K S)^{-1} (P_0 + \Delta W_A) & S(1 + \Delta W_A K S)^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Po Teoremu 2 in teoremu majhnih ojačenj velja, zaprto zančni sistem je robustno stabilen, če determinanta matrike nima polov v $Res > 0$ in pripada $(1 + \Delta W_A K S)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$, kar pomeni $\|\Delta W_A K S\|_\infty < 1$.

3.3.3 Robustna stabilnost za sisteme z inverznim odstopanjem

Odstopanje z vhodnim ali izhodnim inverznim modelom odstopanja predstavimo, kot

$$\Delta P = P_0 (1 + \Delta W_{I_1})^{-1}, \quad (3.10)$$

ter inverznim odstopanjem,

$$\Delta P = P_0 (1 + \Delta W_{I_2} P_0)^{-1}. \quad (3.11)$$

Teorem 8 Sistem podan z odstopanjem $\Delta P = P_0 (1 + \Delta W_{I_1})^{-1}$ in regulatorjem K , ki stabilizira zaprto zančni sistem z nominalnim modelom P_0 , je robustno stabilen in enoznačno popoln za vse $\|\Delta\|_\infty < 1$, če je izpolnjen pogoj,

$$\|\Delta W_{I_1} S\|_\infty < 1. \quad (3.12)$$

Dokaz Sistem predstavljen v matrični obliki,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & K \\ -\Delta P & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & K \\ -P_0(1+\Delta W_{I_1})^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1}, \\
&= S \frac{(1+\Delta W_{I_1})}{(1+\Delta W_{I_1}S)} \begin{bmatrix} 1 & -K \\ P_0(1+\Delta W_{I_1})^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} S(1+\Delta W_{I_1}S)^{-1}(1+\Delta W_{I_1}) & -S(1+\Delta W_{I_1}S)^{-1}(1+\Delta W_{I_1})K \\ S(1+\Delta W_{I_1}S)^{-1}P_0 & S(1+\Delta W_{I_1}S)^{-1}(1+\Delta W_{I_1}) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Sistem je robustno stabilen, če S nima polov v $Res > 0$ in $(1 + \Delta W_{I_1}S)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$, pri čemer je izpolnjen pogoj $\|\Delta W_{I_1}S\|_\infty < 1$.

Teorem 9 Sistem podan z odstopanjem $\Delta P = P_0(1 + \Delta W_{I_2}P_0)^{-1}$ in regulatorjem K , ki stabilizira zaprto zančni sistem z nominalnim modelom P_0 , je robustno stabilen in enoznačno popoln za vse $\|\Delta\|_\infty < 1$, če je izpolnjen pogoj,

$$\|\Delta W_{I_2}SP_0\|_\infty < 1. \quad (3.13)$$

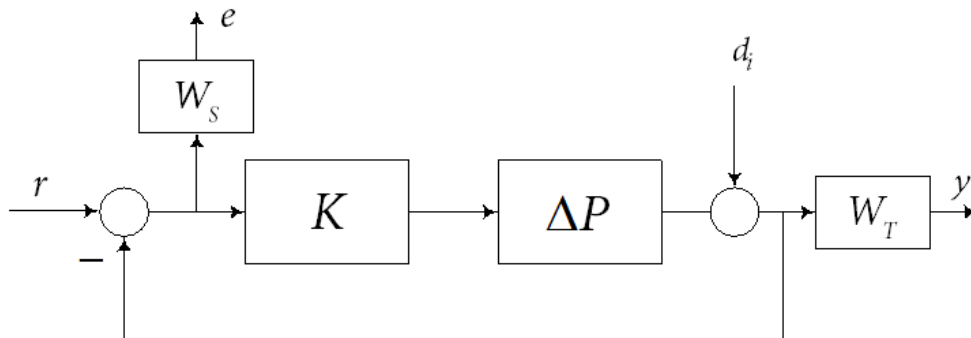
Dokaz Matrična oblika zaprto zančnega sistema,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & K \\ -\Delta P & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & K \\ -P_0(1+\Delta W_{I_2}P_0)^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1}, \\
&= \begin{bmatrix} S(1+\Delta W_{I_2}SP_0)^{-1}(1+\Delta W_{I_2}P_0) & -S(1+\Delta W_{I_2}SP_0)^{-1}(1+\Delta W_{I_2}P_0)K \\ S(1+\Delta W_{I_2}SP_0)^{-1}P_0 & S(1+\Delta W_{I_2}SP_0)^{-1}(1+\Delta W_{I_2}P_0) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Sistem je robustno stabilen, če S nima polov v $Res > 0$ in $(1 + \Delta W_{I_2}SP_0)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$, za katere po teoremu majhnih ojačenj velja, $\|\Delta W_{I_2}SP_0\|_\infty < 1$.

3.4 Robustni učinek

Robustni učinek je pogoj zagotovitve performančnih lastnosti, za vse modele iz množice \mathcal{P} . Pri tem predpostavimo, da regulator K stabilizira nominalni model P_0 . Robustni učinek, bi lahko opisali, kot meja performančnih lastnosti pri odstopanju modela ΔP iz množice \mathcal{P} . Vrednotenje robustnega učinka ima širok pomen in ponuja različne vidike obravnave. Pri vrednotenju robustnega učinka, se bomo omejili zgolj na zaprto zanke sisteme z nestrukturiranimi modeli odstopanj ter vpliv le teh na frekvenčno karakteristiko funkcije občutljivosti S in komplementarne občutljivosti T . Širši pomen, le teh smo obravnavali v podpoglavju 2.5. Lastnosti robustnega učinka predstavimo s performančnima kriterijema W_S in W_T , kjer velja, da pripadata množici racionalnih prenosnih funkcij v množici \mathcal{RH}_∞ .



Slika 3-10 Konfiguracija zaprto zanke sistema, za vrednotenje robustnega učinka z utežema W_S in W_T

Na primer analizirajmo vpliv izhodne motnje d_i na pogrešek regulacije e in izhod sistema y za sistem Slika 3-10. Zapišemo vpliv motnje d_i na e ,

$$S_{d_i e} = -\frac{1}{1 + K \Delta P} \quad (3.14)$$

in vpliv d_i na y ,

$$T_{d_i,y} = \frac{1}{1 + K \Delta P}. \quad (3.15)$$

Iz izrazov (3.14) in (3.15) ter vpeljavo performančnih karakteristik W_S in W_T izpeljemo splošna kriterija robustnega učinka za funkcijo občutljivosti,

$$\left\| \frac{W_S}{1 + K \Delta P} \right\|_{\infty} < 1 \quad \forall \Delta P \in \mathcal{P}. \quad (3.16)$$

ter komplementarno občutljivost,

$$\left\| \frac{W_T}{1 + K \Delta P} \right\|_{\infty} < 1 \quad \forall \Delta P \in \mathcal{P}. \quad (3.17)$$

Nadalje robustni učinek obravnavamo posebej za performančni kriterij občutljivosti $\|W_S S\|_{\infty} < 1$ ter komplementarno občutljivost $\|W_T T\|_{\infty} < 1$, za posamezne modele odstopanj.

3.4.1 Vrednotenje robustnega učinka za performančni kriterij

$\|W_S S\|_{\infty} < 1$ ter multiplikativnim odstopanjem

Za model podan z multiplikativnim odstopanjem $\Delta P = P_0(1 + \Delta W_M)$ ter performančnim kriterijem $\|W_S S\|_{\infty} < 1$ zapišemo,

$$\left\| \frac{W_S}{(1 + K(1 + \Delta W_M)P_0)} \right\|_{\infty} = \left\| \frac{W_S}{(1 + KP_0)(1 + \Delta W_M T)} \right\|_{\infty} = \left\| \frac{W_S S}{(1 + \Delta W_M T)} \right\|_{\infty} < 1. \quad (3.18)$$

Iz izraza sledi,

$$|W_S S| < |1 + \Delta W_M T|.$$

Teorem 10 *Robustni učinek zaprto zančnega sistema s performančnim kriterijem $\|W_S S\|_\infty < 1$ ter multiplikativnim odstopanjem $\Delta P = P_0(1 + \Delta W_M)$, je zagotovljen natanko takrat, če velja,*

$$\| |W_S S| + |W_M T| \|_\infty < 1. \quad (3.19)$$

Dokaz Iz navedenega kriterija sledi,

$$\| W_M T \|_\infty < 1 \text{ in } \left\| \frac{|W_S S|}{1 - |W_M T|} \right\|_\infty < 1. \quad (3.20)$$

Za spremenljivo stabilno prenosno funkcij $\Delta(s)$, ki izpolnjuje pogoj $\|\Delta\|_\infty < 1$, izberemo poljubno fiksno točko $j\omega$ ter poenostavimo izraz,

$$1 = |1 + \Delta W_M T - \Delta W_M T| \leq |1 + \Delta W_M T| + |W_M T|, \quad (3.21)$$

in nadalje,

$$1 - |W_M T| \leq |1 + \Delta W_M T|.$$

Izraz vstavimo v izraz (3.20),

$$\left\| \frac{|W_S S|}{1 - |W_M T|} \right\|_\infty \geq \left\| \frac{W_S S}{1 + \Delta W_M T} \right\|_\infty.$$

Sedaj lahko zaključimo, po izrazu (3.18) ter (3.20) velja, da poenostavljen izraz brez Δ mora izpolnjevati pogoj,

$$\left\| \frac{|W_S S|}{1 - |W_M T|} \right\|_\infty < 1.$$

Pri čemer velja,

$$|W_S S| < 1 - |W_M T|,$$

sledi,

$$\left\| |W_S S| + |W_M T| \right\|_{\infty} < 1.$$

Izraz za robustni učinek ima tudi grafično predstavitev z Nyquistovo krivuljo. Kriterij W_S predstavlja krožnico s središčem v kritične točke -1 in W_M krožnico s središčem na krivulji KP pri frekvenci ω [5],[42]. Robustni učinek je izpolnjen, če se področji krožnic W_S in W_M ne prekrivata.

3.4.2 Vrednotenje robustnega učinka za performančni kriterij

$\|W_S S\|_{\infty} < 1$ ter aditivnim odstopanjem

Aditivno dostopanje $\Delta P = P_0 + \Delta W_A$ ter performančni kriterij $\|W_S S\|_{\infty} < 1$,

$$\left\| \frac{W_s}{(1+K(P_0+\Delta W_A))} \right\|_{\infty} = \left\| \frac{W_s S}{(1+\Delta W_A K S)} \right\|_{\infty} < 1. \quad (3.22)$$

Teorem 11 *Robustni učinek zaprto zadržnega sistema s performančnim kriterijem $\|W_S S\|_{\infty} < 1$ ter aditivnim odstopanjem $\Delta P = P_0 + \Delta W_A$, je zagotovljen natanko takrat, če velja,*

$$\left\| |W_S S| + |W_A K S| \right\|_{\infty} < 1. \quad (3.23)$$

Dokaz Za dokaz uporabimo enako poenostavitev, kot v izrazu (3.21), kjer velja,

$$1 - |W_A K S| \leq |1 + \Delta W_A K S|,$$

sledi,

$$\left\| \frac{|W_S S|}{1 - |W_A K S|} \right\|_{\infty} \geq \left\| \frac{W_S S}{1 + \Delta W_A K S} \right\|_{\infty}.$$

Če je,

$$\left\| \frac{|W_S S|}{1 - |W_A K S|} \right\|_{\infty} < 1,$$

potem velja,

$$\left\| |W_S S| + |W_A K S| \right\|_{\infty} < 1.$$

Oba kriterija robustnega učinka za multiplikativni in aditivni model s poenostavitvijo (3.21) sta preprosta. Prvi del kriterija predstavlja kriterij robustnega učinka, drugi predstavlja kriterij robustne stabilnosti. Za oba kriterija velja, če je $\|W_S S\|_{\infty} \leq 0.5$, $\|W_M T\|_{\infty} \leq 0.5$ in $\|W_A K S\|_{\infty} \leq 0.5$ potem je kriterij robustnega učinka (3.19),(3.23) zagotovo izpolnjen.

3.4.3 Vrednotenje robustnega učinka za performančni kriterij $\|W_S S\|_{\infty} < 1$ ter inverznim odstopanjem

Inverzno dostopanje $\Delta P = P_0(1 + \Delta W_{I_1})^{-1}$ s performančnim kriterijem $\|W_S S\|_{\infty} < 1$,

$$\left\| \frac{W_s}{\left(1 + KP_0(1 + \Delta W_{I_1})^{-1}\right)} \right\|_{\infty} = \left\| \frac{W_s S(1 + \Delta W_{I_1})}{(1 + \Delta W_{I_1} S)} \right\|_{\infty} < 1. \quad (3.24)$$

Podobno, kot v prejšnjem primeru predpostavimo,

$$|W_s S(1 + \Delta W_{I_1})| < |(1 + \Delta W_{I_1} S)| \quad \forall \omega.$$

Za vsako frekvenco ω velja,

$$|W_s S(1 + \Delta W_{I_1})| \leq |W_s S|(1 + |W_{I_1}|),$$

prav tako,

$$1 - |W_I S| \leq |1 + \Delta W_I S|.$$

Tako je zadosten pogoj robustnega učinka izraz,

$$\left\| \frac{|W_s S| (1 + |W_I|)}{(1 - |W_I S|)} \right\|_{\infty} < 1. \quad (3.25)$$

Podobno velja za inverzni model z odstopanjem $\Delta P = P_0(1 + \Delta W_I P_0)^{-1}$.

Zapišemo performančni kriterij,

$$\left\| \frac{W_s}{(1 + K P_0 (1 + \Delta W_I P_0)^{-1})} \right\|_{\infty} = \left\| \frac{W_s S (1 + \Delta W_I P_0)}{(1 + \Delta W_I P_0 S)} \right\|_{\infty} < 1. \quad (3.26)$$

Enako, kot pri prejšnjem dokazu, je zadosten pogoj robustnega učinka,

$$\left\| \frac{|W_s S| (1 + |W_I P_0|)}{(1 - |W_I P_0 S|)} \right\|_{\infty} < 1. \quad (3.27)$$

Iz izraza (3.24) in (3.26) ni možno, kot v prejšnjih primerih izpeljati preprostega kriterija za vrednotenje robustnega učinka.

3.4.4 Vrednotenje robustnega učinka za performančni kriterij

$\|W_T T\|_{\infty} < 1$ ter multiplikativnim odstopanjem

Multiplikativni model odstopanja $\Delta P = P_0(1 + \Delta W_M)$ s performančnim kriterijem $\|W_T T\|_{\infty} < 1$,

$$\left\| \frac{W_T K P_0 (1 + \Delta W_M)}{(1 + K P_0 (1 + \Delta W_M))} \right\|_{\infty} = \left\| \frac{W_T T (1 + \Delta W_M)}{(1 + \Delta W_M T)} \right\|_{\infty} < 1. \quad (3.28)$$

Za izpeljavo uporabimo enako poenostavitvev, kot v (3.21). Zadosten pogoj zagotovitve robustnega učinka s performančnim kriterijem $\|W_T T\|_\infty < 1$ in multiplikativnim odstopanjem je,

$$\left\| \frac{|W_T T|(1+|W_M|)}{(1-|W_M T|)} \right\|_\infty < 1. \quad (3.29)$$

3.4.5 Vrednotenje robustnega učinka za performančni kriterij

$\|W_T T\|_\infty < 1$ ter aditivnim odstopanjem

Aditivni model odstopanja $\Delta P = P_0 + \Delta W_A$ s kriterijem $\|W_T T\|_\infty < 1$,

$$\left\| \frac{W_T K(P_0 + \Delta W_A)}{(1 + K(P_0 + \Delta W_A))} \right\|_\infty = \left\| \frac{W_T K S(P_0 + \Delta W_A)}{(1 + \Delta W_A K S)} \right\|_\infty < 1. \quad (3.30)$$

Robustni učinek s poenostavitvijo (3.21), je zagotovljen z izrazom,

$$\left\| \frac{|W_T K S|(|P_0| + |W_A|)}{(1 - |W_A K S|)} \right\|_\infty < 1.$$

3.4.6 Vrednotenje robustnega učinka za performančni kriterij

$\|W_T T\|_\infty < 1$ ter inverznim odstopanjem

Inverzni model odstopanja $\Delta P = P_0(1 + \Delta W_{I_1})^{-1}$ ter kriterijem $\|W_T T\|_\infty < 1$,

$$\left\| \frac{W_T K P_0 (1 + \Delta W_{I_1})^{-1}}{(1 + K P_0 (1 + \Delta W_{I_1})^{-1})} \right\|_\infty = \left\| \frac{W_T T}{(1 + \Delta W_{I_1} S)} \right\|_\infty < 1. \quad (3.31)$$

Teorem 12 Robustni učinek zaprto zadržnega sistema s performančnim kriterijem $\|W_T T\|_\infty < 1$ ter inverznim odstopanjem $\Delta P = P_0(1 + \Delta W_I S)^{-1}$, je zagotovljen natanko takrat, če velja,

$$\left\| |W_T T| + |W_I S| \right\|_\infty < 1. \quad (3.32)$$

Dokaz S poenostavitvijo (3.21) velja,

$$\left\| \frac{W_T T}{(1 + \Delta W_I S)} \right\|_\infty \leq \left\| \frac{|W_T T|}{(1 - |W_I S|)} \right\|_\infty < 1,$$

sledi dokaz izraza (3.32),

$$|W_T T| < 1 - |W_I S|,$$

$$\left\| |W_T T| + |W_I S| \right\|_\infty < 1.$$

Vzemimo inverzni model odstopanja $\Delta P = P_0(1 + \Delta W_I P_0)^{-1}$ ter kriterij $\|W_T T\|_\infty < 1$,

$$\left\| \frac{W_T K P_0 (1 + \Delta W_I P_0)^{-1}}{(1 + K P_0 (1 + \Delta W_I P_0)^{-1})} \right\|_\infty = \left\| \frac{W_T T}{(1 + \Delta W_I P_0 S)} \right\|_\infty < 1. \quad (3.33)$$

Teorem 13 Robustni učinek zaprto zadržnega sistema s performančnim kriterijem $\|W_T T\|_\infty < 1$ ter inverznim odstopanjem $\Delta P = P_0(1 + \Delta W_I P_0)^{-1}$, je zagotovljen natanko takrat, če velja,

$$\left\| |W_T T| + |W_I P_0 S| \right\|_\infty < 1. \quad (3.34)$$

Dokaz Podobno, kot v prejšnjem primeru uporabimo poenostavitev (3.21) , kjer velja,

$$\left\| \frac{W_T T}{(1 + \Delta W_I P_0 S)} \right\|_{\infty} \leq \left\| \frac{|W_T T|}{(1 - |W_I P_0 S|)} \right\|_{\infty} < 1.$$

Dokaz izraza (3.34),

$$|W_T T| < 1 - |W_I P_0 S|,$$

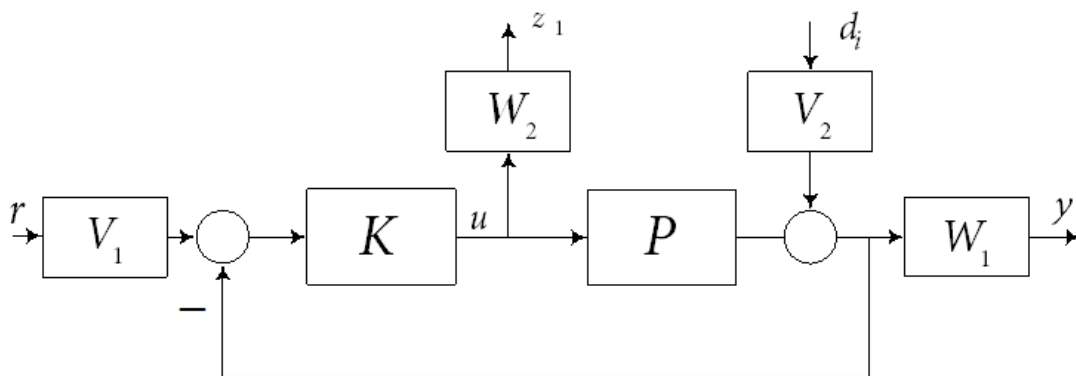
$$\| |W_T T| + |W_I P_0 S| \|_{\infty} < 1.$$

Za inverzna modela odstopanj ter performančni kriterij $\|W_T T\|_{\infty} < 1$ je podobno, kot za kriterij $\|W_S S\|_{\infty} < 1$ in multiplikativnim ter aditivnim modelom odstopanj, možno v obeh primerih uporabiti preprostejši kriterij. Kriterij je sestavljen iz kriterija performančnega učinka in kriterija robustne stabilnosti za posamezni model odstopanj.

3.5 Problem mešane občutljivosti

Problem mešane občutljivosti je razširjena obravnava robustnosti zaprto zančnega sistema in ima različne vidike vrednotenja zaprto zančnega sistema. Tako je možno hkrati analizirati vpliva odstopanja modela, kakor tudi vpliva zunanjih motenje ter performančnih lastnosti izbrane zaprto zančne strukture. Problem mešane občutljivosti je obravnavan na različne načine ter različnimi postavljenimi kriteriji [79],[95],[108], kjer rešitev eksplicitno podana v prostoru stanj [45] ali v vhodno izhodnem načinu s spektralno faktorizacijo [34]. Problem je možno vpeljati tudi v standardne metode načrtovanja, kjer kriterije občutljivosti vrednotim posredno med načrtovanjem [4],[6].

Standardni problem mešane občutljivosti z izhodno motnjo d_i , referenco r , izhodoma u , y ter utežmi W_1, W_2, V_1, V_2 .



Slika 3-11 Standardni problem mešane občutljivosti

Za uteži velja $W_1, W_2, V_1, V_2 \in \mathcal{RH}_\infty$, kjer $W_1(j\omega)$ in $W_2(j\omega)$ predstavljata želeni frekvenčni potek karakteristike $u(j\omega)$ in $y(j\omega)$. Uteži $V_1(j\omega)$ in $V_2(j\omega)$ predstavljata frekvenčne lastnosti referenčnega signala $r(j\omega)$ in izhodnje motenj $d_i(j\omega)$. Zapišemo relacije med spremenljivkami r, y, u, d_i .

Zapis izhoda y ,

$$y = W_1 T V_1 r + W_1 S V_2 d_i. \quad (3.35)$$

Zapis izhoda z_1 ,

$$z_1 = W_2 U V_1 r - W_2 U V_2 d_i. \quad (3.36)$$

Postavitev problema mešane občutljivosti s kriterijem,

$$\min_{K \in \mathcal{RH}_\infty} \|H\|_\infty = \gamma. \quad (3.37)$$

Kjer je $\gamma \in \mathfrak{R}$, $\gamma > 0$ in H je povezovalna matrika kriterijev optimizacije.

Premisa 1 Če je optimalni regulator K edinstven, potem velja $|H_{opt}(j\omega)| = \gamma$, za vse frekvence ω .

Premisa 2 Če je optimalni regulator K ni edinstven, potem obstaja regulator K_{opt} za katerega velja $|H_{opt}(j\omega)| = \gamma$, za vse frekvence ω .

Rešitev problema mešane občutljivosti je stabilizirajoči regulator K , ki izpolnjuje pogoj,

$$\|H\|_\infty = \gamma,$$

po Premisi 2.

$$\|H\|_\infty^2 \leq \gamma^2,$$

$$|H(j\omega)|_\infty^2 \leq \gamma^2,$$

$$H(-s)H(s) \leq \gamma^2 \quad \forall \omega,$$

$$\tilde{H}H \leq \gamma^2,$$

Izhodišče problema mešane občutljivosti za vpliv vhodov d_i , r na izhod y , (3.36), (3.37),

$$\min_{K \in \mathcal{RH}_\infty} \left\| \begin{array}{c} W_1 S V_2 \\ W_1 T V_1 \end{array} \right\|_\infty^2 \leq \gamma^2. \quad (3.38)$$

Velja,

$$\left(\tilde{W}_1 \tilde{S} \tilde{V}_2 W_1 S V_2 + \tilde{W}_1 \tilde{T} \tilde{V} W_1 T V_1 \right) \leq \gamma^2,$$

$$\left(|W_1(j\omega)S(j\omega)V_2(j\omega)|^2 + |W_1(j\omega)T(j\omega)V_1(j\omega)|^2 \right) \leq \gamma^2. \quad (3.39)$$

Izhodišče problema mešane občutljivosti za vpliv vhoda d_i na izhoda y in z_1 ,

$$\min_{K \in \mathcal{RH}_\infty} \left\| \begin{array}{c} W_1 S V_2 \\ -W_2 U V_2 \end{array} \right\|_\infty^2 \leq \gamma^2. \quad (3.40)$$

Velja,

$$\left(|W_1(j\omega)S(j\omega)V_2(j\omega)|^2 + |W_2(j\omega)U(j\omega)V_2(j\omega)|^2 \right) \leq \gamma^2. \quad (3.41)$$

Izhodišče problem mešane občutljivosti za vpliv vhoda r na izhod y in z_1 ,

$$\min_{K \in \mathcal{RH}_\infty} \left\| \begin{array}{c} W_1 T V_1 \\ W_2 U V_1 \end{array} \right\|_\infty^2 \leq \gamma^2. \quad (3.42)$$

Velja,

$$\left(|W_1(j\omega)T(j\omega)V_1(j\omega)|^2 + |W_2(j\omega)U(j\omega)V_1(j\omega)|^2 \right) \leq \gamma^2. \quad (3.43)$$

Iz postavljenih kriterijev (3.39), (3.41), (3.43) je razvidno, da rešitev problema mešane občutljivosti določa potek frekvenčnih karakteristik $S(j\omega)$, $U(j\omega)$ in $T(j\omega)$, kjer je ključnega pomena izbira uteži $W_1(j\omega)$, $W_2(j\omega)$ in $V_1(j\omega)$, $V_2(j\omega)$. Z izpolnitvijo Premise 1 velja,

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)V_2(j\omega)|^2 + |W_1(j\omega)T(j\omega)V_1(j\omega)|^2 = \gamma^2,$$

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)V_2(j\omega)|^2 + |W_2(j\omega)U(j\omega)V_2(j\omega)|^2 = \gamma^2,$$

$$|W_1(j\omega)T(j\omega)V_1(j\omega)|^2 + |W_2(j\omega)U(j\omega)V_1(j\omega)|^2 = \gamma^2.$$

Optimalna rešitev problema mešane občutljivosti je,

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)V_2(j\omega)|^2 \leq \gamma^2 \quad \wedge \quad |W_1(j\omega)T(j\omega)V_1(j\omega)|^2 \leq \gamma^2 \quad \forall \omega,$$

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)V_2(j\omega)|^2 \leq \gamma^2 \quad \wedge \quad |W_2(j\omega)U(j\omega)V_2(j\omega)|^2 \leq \gamma^2 \quad \forall \omega,$$

$$|W_1(j\omega)T(j\omega)V_1(j\omega)|^2 \leq \gamma^2 \quad \wedge \quad |W_2(j\omega)U(j\omega)V_1(j\omega)|^2 \leq \gamma^2 \quad \forall \omega.$$

Izraze korenimo in za problem mešane občutljivosti (3.38) velja,

$$|S(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)V_2(j\omega)|} \quad \wedge \quad |T(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)V_1(j\omega)|} \quad \forall \omega. \quad (3.44)$$

Za problem v izrazu (3.40),

$$|S(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)V_2(j\omega)|} \quad \wedge \quad |U(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)V_2(j\omega)|} \quad \forall \omega. \quad (3.45)$$

In problem (3.42),

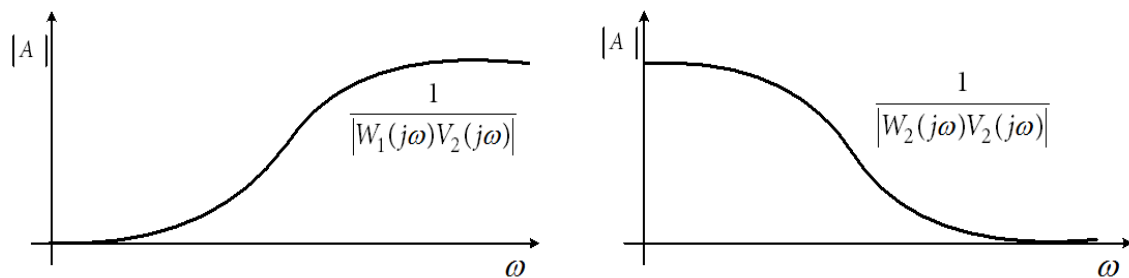
$$|T(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)V_1(j\omega)|} \wedge |U(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)V_1(j\omega)|} \quad \forall \omega. \quad (3.46)$$

Z ustrezno izbiro utežnostnih funkcij $W_1(j\omega)$, $W_2(j\omega)$, $V_1(j\omega)$, $V_2(j\omega)$ vplivamo na lastnosti zaprto zanke karakteristike ter posledično oblikujemo frekvenčne karakteristike zaprto zanke sistema. Vzemimo problem mešane občutljivosti (3.40) in pogoj (3.45), kjer želimo zagotoviti čim manjši vpliv izhodne motnje d_i na izhodni spremenljivki y , u . Izhodno motnjo d_i obravnavamo, kot nizko frekvenčni signal, zato izbrana utež $V_1(j\omega)$ izpolnjuje lastnost nizko pasovnega sita. Rešitev problema mešane občutljivosti ter tako smiselna izbira uteži $W_1(j\omega)$ in $W_2(j\omega)$ nakazuje izbiro $W_1(j\omega)$, kot nizko pasovno sito ter $W_2(j\omega)$, kot visoko pasovno sito. Kjer velja,

$$|S(j\omega)| \approx \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)V_2(j\omega)|} \quad \text{za nizke } \omega,$$

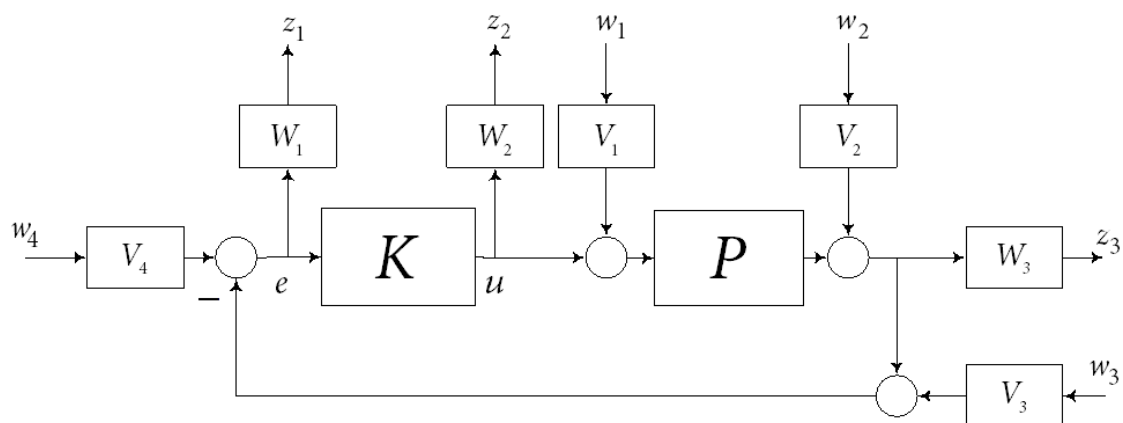
$$|U(j\omega)| \approx \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)V_2(j\omega)|} \quad \text{za visoke } \omega.$$

Uteži $W_1(j\omega)$, $W_2(j\omega)$, $V_2(j\omega)$.



Slika 3-12 Grafična predstavitev izbire uteži $W_1(j\omega)$, $V_2(j\omega)$ in $W_2(j\omega)$, $V_2(j\omega)$

Podobno, kot primer (3.40), lahko predstavimo tudi primera (3.38),(3.42) ter ustrezno izbiro uteži $W_1(j\omega)$, $W_2(j\omega)$, $V_1(j\omega)$, $V_2(j\omega)$ [82],[83]. Problem mešane občutljivosti je možno razširiti na vse točke zaprto zanke karakteristike, kjer s spremenljivko z_i opišemo izhode ter z w_i vhode sistema, Slika 3-13.



Slika 3-13 Razširjen problem mešane občutljivosti

Določimo povezovalno matriko,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -PS & -S & -S & S \\ -T & -KS & -KS & KS \\ PS & S & -T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Kjer je matrika prenosnih funkcij,

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -PS & -S & -S & S \\ -T & -KS & -KS & KS \\ PS & S & -T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev razširjenega problema mešane občutljivosti je minimizacija norme matrike prenosnih funkcij T_{zw} ,

$$\min_{K \in \mathcal{RH}_\infty} \|T_{zw}\|_\infty^2 \leq \gamma^2. \quad (3.48)$$

Problem mešane občutljivosti ter pomen posameznih uteži W in V bomo podrobneje obravnavali v poglavju polinomske sinteze.

4 Robustno načrtovanje regulatorja s tehniko pomikanja polov

Načrtovanje regulatorja s tehniko pomikanja polov temelji na izbiri zaprto znančnega karakterističnega polinoma, ki določa obnašanje in tako posredno vpliva na kakovost vodenja zaprto znančnega sistema [100]. Tehniko pomikanja polov je možno uporabiti za načrtovanje regulatorjev v prostoru stanj, vhodno - izhodnem opisu, za MIMO^{vi}, SISO^{vii} in mešane sisteme [14],[62],[104],[78]. Metoda temelji na algebralnem izračunu koeficientov regulatorja, kjer je enoličnost rezultata odvisna od stopnje izbranega zaprto znančnega polinoma, števila merljivih stanj, reda sistema ter izpolnjenega pogoja vodljivosti [32],[26],[27]. Za sisteme opisane v vhodno izhodnem načinu, je pogosto na koncu načrtovanja s tehniko pomikanja polov potrebno določiti predfilter. S predfiltrom korigiramo učinek polinoma števca, saj tekom sinteze nimamo informacijo o števcih posameznih zaprto znančnih karakteristik. Števec zaprto znančne karakteristike prav tako vpliva na performančne lastnosti, ki se odražajo v obliki neželenega prenihaja, podnihaja, frekvenčnih vrhov, časa vzpona itd.. Prednostna lastnost tehnike pomikanja polov je transparentno načrtovanje in znana lega zaprto znančnih polov. Lega zaprto znančnih polov je določena na začetku načrtovanja z izbiro karakterističnega polinoma. Znana lega polov omogoča višjo raven prilagodljivost in realizacije zaprto znančnega sistema. Z velikim razmahom zmogljivih mikrokontrolerskih sistemov, so sistemi vodenja predstavljeni v diskretni obliki, za katere je potrebno zagotoviti ustrezen čas tipanja. Iz znane lege polov karakterističnega polinoma je moč določiti čas tipanja in tako v naprej predvidi možnost izvedbe vodenja na realnem sistemu.

^{vi} MIMO – ang. **Multi**-Input **Multi**-Output – več vhodni več izhodni

^{vii} SISO – ang. **Single**- Input **Single**-Output – eno vhodni eno izhodni

Z razvojem robustne teorije vodenja ter razvitimi robustnimi metodami načrtovanja, so kljub izvirnosti analitičnih postopkov, metode imele določene omejitve glede uporabe na realnih sistemih. Za klasične robustne metode načrtovanja regulatorjev \mathcal{H}_∞ , \mathcal{H}_2 velja, da je stopnja regulatorja enaka stopnji modela ter stopnji uteži odstopanja, kar velikokrat rezultira regulatorje visoke stopnje tudi za preproste sisteme. Slabost omenjenih robustnih metod je sprožilo veliko raziskav z namenom, da bi omejili ali odpravili posredni vpliv odstopanj na stopnjo regulatorja. Ena izmed dobrih možnosti eliminacije odstopanj na red regulatorja nudi tehnika pomikanja polov, ki v osnovi ne vsebuje nobene posredne informacije o frekvenčnih lastnostih zaprto zračnih karakteristik ter njihovem poteku. Toda z znanimi učinki posameznih komponent, kot so integralno delovanje, učinek preprostih kompenzatorjev, Noch karakteristik itd., imamo mnogo gradnikov, s katerimi lahko neposredno oblikujemo frekvenčni potek karakteristik ter vrednotimo robustnost z normo \mathcal{H}_∞ . Robustna tehnika pomikanja polov ohranja dobre lastnosti primarne metode ter posredno vključuje kriterije robustnosti. Večina robustnih polinomskih tehnik vključuje parametrična odstopanja in opis sistema v prostoru stanj [81],[95],[98] in nekoliko manj v vhodno izhodnem opisu [23],[74],[105]. Rezultat tehnik je pomik zaprto zračnih polov v željeno stabilno področje (D - stabilnost), katero je določeno s karakterističnim polinomom in intervalom odstopanja posameznega parametra [19],[72],[73]. Pri tem je velikokrat uporabljena Q -parametrizacija regulatorja ter optimizacijske tehnike, kot so LMI^{viii}, LP^{ix}, NP^x.

V disertaciji bomo predstavili tehniko pomikanja polov s vpeljavo množice parametričnih rešitev v polinomsko enačbo, katere bomo posredno uporabili za vrednotenje robustnosti, preko modelov odstopanje ter metriko norme H_∞ . Vpeljana polinomska tehnika s parametričnimi rešitvami ne vpliva na lego zaprto zračnih polov, kljub optimizaciji norme \mathcal{H}_∞ ter posrednega vrednotenja robustnosti.

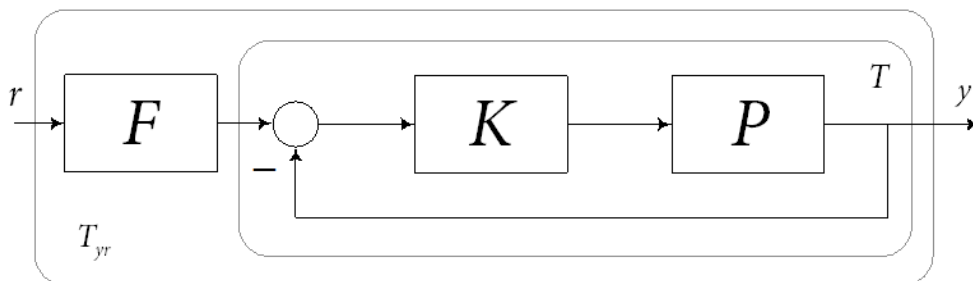
^{viii} LMI-linearna matrična neenakost

^{ix} LP - linearno programiranje

^x NP-nelinearno programiranje

4.1 Tehnika pomikanja polov

Zaprto zančno strukturo tehnike pomikanja polov predstavimo, kot sistem z dvema prostostnima stopnjama. Prvi korak sinteze je določitev regulatorja K in nato določitev predfilter F .



Slika 4-1 Zaprto zančni sistem z regulatorjem K v direktni veji in predfiltrom F

Kjer je P prenosni funkciji modela objekta vodenja, K prenosna funkcija regulatorja in F prenosna funkcija predfiltera. Na začetku predpostavimo $F = 1$. Prenosne funkcije predstavimo, kot Laplace-ove transformiranke z laplace-ovim operatorjem s ,

$$P_0(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad K(s) = \frac{S(s)}{R(s)}. \quad (4.1)$$

Znana polinoma $A(s)$ in $B(s)$ realnih koeficientov zapišemo, kot

$$\begin{aligned} A(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \\ B(s) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Neznana polinoma $R(s)$ in $L(s)$ prenosne funkcije regulatorja $K(s)$,

$$\begin{aligned} R(s) &= r_r s^r + r_{r-1} s^{r-1} + \dots + r_1 s + r_0, \\ L(s) &= l_k s^k + l_{k-1} s^{k-1} + \dots + l_1 s + l_0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Zaprto zančna karakteristika $T(s)$ z regulatorjem v direktni veji,

$$T(s) = \frac{K(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)} = \frac{B(s)S(s)}{A(s)R(s) + B(s)S(s)} = \frac{N(s)}{C(s)}, \quad (4.4)$$

in predfiltrom $T_{yr}(s)$,

$$T_{yr}(s) = \frac{F(s)K(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)} = F(s) \frac{N(s)}{C(s)}. \quad (4.5)$$

Polinom $C(s)$ je zaprto zančni karakteristični polinom, ki je izbran glede na dinamične zahteve vodenja,

$$C(s) = c_i s^i + c_{i-1} s^{i-1} + \dots + c_1 s + c_0. \quad (4.6)$$

Predpostavimo, da je polinom $C(s)$ moničen, kjer velja $c_i = 1$. Koeficiente polinoma regulatorja $R(s)$ in $L(s)$ določimo z rešitvijo Diofantove polinomske enačbe [6]. Če je enačba rešljiva, potem so želeni poli zaprto zančne karakteristike enaki ničlam karakterističnega polinoma $C(s)$ [96].

$$A(s)R(s) + B(s)S(s) = C(s) \quad (4.7)$$

Osnovi pogoj obstoja rešitve polinomske enačbe je, da polinoma $A(s)$ in $B(s)$ nimata skupnih faktorjev, sta si tuja. Enačba (4.7) lahko ima glede na stopnjo izbranega polinoma $C(s)$ ter struktur regulatorja $K(s)$, natanko eno, množico parametričnih ali nima rešitve. Pogoj rešitve polinomske enačbe.

Ni rešitve,

$$\deg R < \deg A - 1. \quad (4.8)$$

Množica parametričnih rešitev,

$$\deg R > \deg A - 1. \quad (4.9)$$

Natanko ena rešitev,

$$\deg R = \deg A - 1. \quad (4.10)$$

Za nadaljnjo obravnavo robustne tehnike pomikanja polov, se bomo osredotočili zgolj na pogoja (4.9),(4.10), kjer bomo največjo pozornost namenili pogoju (4.9). Pogoj (4.9) omogoča fiksno lego polov, z izbranim karakterističnim polinomom $C(s)$ ter vpeljavo množice parametričnih rešitev, katere bomo uporabili za ocenitev robustnosti ter optimizacije norme \mathcal{H}_∞ .

Preprost in učinkovit postopek reševanja polinomske enačbe (4.7) je možen z razvojem enačbe v sistem linearnih enačb. Pri tem upoštevamo pogoj izvedljivosti prenosnih funkcij $P(s)$ in $K(s)$,

$$\deg A - \deg B \geq 0, \quad (4.11)$$

$$\deg R - \deg L \geq 0.$$

Stopnja karakterističnega polinoma $C(s)$,

$$\deg A + \deg R = \deg C, \quad (4.12)$$

$$\deg A(s) + \deg R(s) \geq \deg B(s) + \deg L(s). \quad (4.13)$$

Razvoj v sistem linearnih enačb je primeren za nadaljnjo avtomatizirano načrtovanje, saj za sistem linearnih enačb poznamo množico računskih algoritmov, kot so; Sylvestrova matrična enačba [12],[58], Gaussova eliminacija, Cramerjevo pravilo, Thomsonov algoritem in drugi [96]. Zapišemo enačbe (4.7) v sistem linearnih enačb, kjer predpostavimo, da je $P(s)$ prava prenosna funkcija, ki izpolnjuje pogoj (4.10),

$$\begin{aligned}
a_n r_r + b_m l_k &= c_i \\
a_{n-1} r_r + a_n r_{r-1} + b_{m-1} l_k + b_m l_{k-1} &= c_{i-1} \\
&\vdots \\
a_0 r_r + a_1 r_{r-1} + a_2 r_{r-2} + \dots + a_n r_0 + b_0 l_k + b_1 l_{k-1} + b_2 l_{k-2} + \dots + b_n l_0 &= c_{i-r} \\
a_0 r_{r-1} + a_1 r_{r-2} + \dots + a_{n-1} r_0 + b_0 l_{k-1} + b_1 l_{k-2} + \dots + b_{n-1} l_0 &= c_{i-r-1} \\
&\vdots \\
a_0 r_1 + a_1 r_0 + b_0 l_1 + b_1 l_0 &= c_1 \\
a_0 r_0 + b_0 l_0 &= c_0
\end{aligned}$$

Sistem linearnih enačb zapišemo v obliki Sylvestrove matrične enačbe, kjer Sylvestrova matrika S_y vsebuje koeficiente polinoma $A(s)$ in $B(s)$,

$$S_y = \begin{matrix} & r_r & r_{r-1} & \dots & r_0 & l_k & l_{k-1} & \dots & \dots & l_0 \\ \begin{matrix} i+1 \\ i \\ i-1 \\ i-2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ i-i+1 \\ 0 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} a_n & 0 & 0 & 0 & b_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & 0 & b_{m-1} & b_m & 0 & \ddots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & 0 & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & \ddots & 0 \\ \vdots & a_{n-2} & \ddots & 0 & \vdots & b_{m-2} & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ a_0 & \vdots & \ddots & 0 & b_0 & \vdots & b_{m-2} & \ddots & 0 \\ 0 & a_0 & \ddots & a_n & 0 & b_0 & \vdots & \ddots & b_m \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1} & 0 & 0 & b_0 & \ddots & b_{m-1} \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \ddots & b_{m-2} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{array} \right]_{(r+k+2) \times (r+k+2)}
\end{matrix}$$

S_y je kvadratična matrika, dimenzije $(r + k + 2) \times (r + k + 2)$. Število neznanih koeficientov polinoma regulatorja $R(s)$ in $L(s)$ je enako $r + k + 2$. Koeficiente regulatorja $K(s)$ izračunamo z matrično enačbo,

$$\begin{bmatrix} c_i \\ c_{i-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}_{(i+1) \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & b_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & 0 & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & \dots & 0 \\ \vdots & a_{n-2} & \dots & 0 & \vdots & b_{m-2} & b_{m-1} & \dots & 0 \\ a_0 & \vdots & \dots & 0 & b_0 & \vdots & b_{m-2} & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_n & 0 & b_0 & \vdots & \dots & b_m \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{bmatrix}}_{S_y} \underbrace{\begin{bmatrix} r_r & r_{r-1} & r_{r-2} & \dots & r_0 & l_k & l_{k-1} & l_{k-2} & \dots & l_0 \end{bmatrix}^T}_{(r+k+2) \times 1},$$

krajše zapišemo,

$$C = S_y \cdot R. \tag{4.14}$$

C in S_y sta znani matriki. Matrika C vsebuje koeficienti karakterističnega polinoma $C(s)$ in S_y Sylvestrova matrika koeficiente polinoma $A(s)$ in $B(s)$. Matrika R vsebuje neznane koeficiente polinoma regulatorja $R(s)$, $L(s)$, kjer je $r + 1$ število koeficientov polinoma $R(s)$ in $k + 1$ število koeficientov polinoma $L(s)$. Velja $r + k + 2 = i + 1$. Neznane koeficiente regulatorja izračunamo iz izraza (4.14) kjer je,

$$R = S_y^{-1} \cdot C. \tag{4.15}$$

Izraz je rešljiv, če velja $|S_y| \neq 0$. Pogoj $|S_y| \neq 0$ je izpolnjen, če sta si polinoma $A(s)$ in $B(s)$ tuja. Število skupnih faktorjev polinoma $A(s)$ in $B(s)$ zmanjša rang matrike S_y za število skupnih faktorjev $A(s)$, $B(s)$, kar rezultira singularnost matrike S_y , pri čemer velja $|S_y| = 0$.

Teorem 14 *Polinomska Diofantova enačba s silvestrovo matriko S_y dimenzije $i + 1$ ter karakterističnim polinomom $C(s)$ stopnje i , ima natanko eno rešitev, če sta polinoma $A(s)$ in $B(s)$ prenosne funkcije objekta vodenja $P(s)$ stopnje n in m si tuja in je stopnja regulatorja $\deg R = \deg A - 1$. Če je matrika R dimenzije $1 \times (r + k + 2)$ in velja $r + k + 2 = i + 1$ so koeficienti matrike R enolično določeni po izrazu (4.15).*

Dokaz Za primer vzemimo preprosto prenosno funkcijo,

$$H(s) = \frac{s+b}{s+a}.$$

Po izrazu (4.8) ima matrična enačba natanko eno rešitev, če je dimenzija Silvestrove matrike S_y , $(r + k + 2) \times (r + k + 2) = 2 \times 2$,

$$S_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$

in je izbran karakteristični polinom $C(s)$, $\deg C = 2$. Število neznanih parametrov regulatorja $r + k + 2 = 2$. Sistem linearnih enačb je popolnoma definiran in je enolično rešljiv. Matrična enačba ima obliko,

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ l_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}.$$

V primeru, $a = b$ matrična enačba nima rešitve. Matrika S_y je singularna $|S_y| = 0$, pri čemer ima prenosna funkcija $H(s)$ skupna faktorja.

Premisa 3 *Matrična Sylvestrova enačba je rešljiva, če je število neznanih koeficientov regulatorja $K(s)$ enako številu koeficientov karakterističnega polinoma $C(s)$.*

4.1.1 Parametrične rešitve polinomske enačbe

Parametrične rešitev polinomske enačbe zagotovimo v primeru, če stopnjo regulatorja izberemo z upoštevanjem pogoja (4.9). Število parametričnih rešitev je enako,

$$\tilde{p} = \left\{ (r+k+2) - (i+1); \tilde{p} = \tilde{r} + \tilde{l}; \tilde{r} = \sum \hat{z} \wedge \tilde{l} = \sum \hat{w}; \tilde{r}_{\hat{z}} \in R(s) \wedge \tilde{l}_{\hat{w}} \in L(s) \right\}. \quad (4.16)$$

Število prostih parametrov \tilde{p} je vsota prostih parametrov \hat{z} , izbranih v polinomu $R(s)$ in številu prostih parametrov \hat{w} , izbranih v polinomu $L(s)$. Glede na proste parametre \hat{z} in \hat{w} ter upoštevanjem pogoja (4.9), tvorimo matrično enačbo,

$$C_y = S_{yp} R_y + \tilde{S}_{yp} \tilde{P}. \quad (4.17)$$

Matrika C_y vsebuje koeficiente karakterističnega polinoma $C(s)$. S_{yp} in \tilde{S}_{yp} sta modificirani Sylvestrovi matriki pri vpeljavi parametričnih rešitev, kjer vsak stolpec matrike \tilde{S}_{yp} , S_{yp} pripada izbranim prostim parametrom $\tilde{r}_{\hat{z}}$, $\tilde{l}_{\hat{w}}$ matrike \tilde{P} ali neznanim koeficientom r_r , l_k matrike R .

Zapis izraza (4.17) v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} c_i \\ c_{i-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \\ C_y \end{bmatrix}_{(i+1) \times 1} = \left(\begin{bmatrix} a_n & 0 & & 0 & b_m & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & 0 & b_{m-1} & b_m & 0 & \ddots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & 0 & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & \ddots & 0 \\ \vdots & a_{n-2} & \ddots & 0 & \vdots & b_{m-2} & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ a_0 & \vdots & \ddots & 0 & b_0 & \vdots & b_{m-2} & \ddots & 0 \\ 0 & a_0 & \ddots & a_n & 0 & b_0 & \vdots & \ddots & b_m \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1} & 0 & 0 & b_0 & \ddots & b_{m-1} \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \ddots & b_{m-2} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & b_0 \end{bmatrix}_{(i+1) \times (i+1)} \cdot \begin{bmatrix} r_j \\ r_{j-1} \\ r_{j-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ l_k \\ l_{k-1} \\ l_{k-2} \\ \vdots \\ l_0 \end{bmatrix}_{(r+k-i+1) \times 1} \right) + \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ a_n & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \ddots & \ddots & b_m & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & a_{n-1} & 0 & \ddots & \ddots & b_{m-1} & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ a_0 & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & b_m & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(i+1) \times \tilde{p}} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{r}_{\tilde{p}} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{r}_{\tilde{p}-1} & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{r}_{\tilde{p}-2} & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{l}_0 \end{bmatrix}_{\tilde{p} \times (i+1)} \right)$$

Neznane koeficiente regulatorja r_r, l_k določimo iz izraza (4.17),

$$R_y = S_{yp}^{-1} \cdot (C_y - \tilde{S}_{yp} \cdot \tilde{P}). \quad (4.18)$$

Podobno, kot izraz (4.15) je matrična enačba rešljiva le, če je izpolnjen pogoj $|S_{yp}| \neq 0$. Matrika S_{yp} z vpeljavo prostih parametrov ima drugačno razporeditev koeficientov polinomov $A(s)$ in $B(s)$, kot matrika S_y v izrazu (4.15). Kljub izpolnjenemu pogoju tujih si polinomov $A(s)$ in $B(s)$ ter izbire ustrezne stopnje polinomov regulatorja $R(s)$, $L(s)$ in karakterističnega polinoma $C(s)$, lahko izbira prostih parametrov vpliva na singularnost matrike S_{yp} . Izbira prostih parametrov je ključnega pomena pri zagotovitvi rešljivosti izraza (4.18), zato bomo izbiro parametrov natančneje obravnavali v naslednjem podpoglavju.

4.1.2 Izbira prostega parametra

V podpoglavju se bomo osredotočili na izbiro prostih parametrov v primeru, ko imamo v sistemu linearnih enačb družino parametričnih rešitev (4.9). Predstavili bomo, kako izbira parametričnih rešitev vpliva na rešitev sistema linearnih enačb, njihov vpliv na dinamiko zaprto zanke sistema ter vrednost norme $\|\cdot\|_\infty$.

Po Teoremu 14, je linearni sistem enačb v matrični obliki rešljiv, če matrika S_{yp} ni singularna. Matrika S_{yp} ni singularna, če posamezni stolpci ali vrstice niso linearno odvisni in če matrika ne vsebuje ničelne vrstice ali stolpca. Linearna odvisnost stolpcev ali vrstic je vzrok skupnih faktorjev polinoma $A(s)$ in $B(s)$, ničelnost vrstice ali stolpca je vzrok napačne izbire parametričnih rešitev \tilde{r}_z, \tilde{l}_w , ki prav tako lahko povzročijo znižanje ranga matrike S_{yp} . Iz tega sledi, da položaj prostih parametrov ne smemo izbirati poljubno. Preden podamo pravila, kako izbrati parametrične rešitve, bomo definirali pomen položaja prostega parametra. Položaj prostega parametra je lahko izbran koeficient \tilde{r}_z, \tilde{l}_w v polinomu $R(s)$ ali $L(s)$ ob pogoju (4.9) in (4.11). Parametrične rešitve označujemo z \tilde{r}_z, \tilde{l}_w odvisno ali smo izbrali koeficient v imenovalcu $R(s)$ ali števcu regulatorja $L(s)$. Indeks d pomeni potenco, ob kateri

izberemo parametrično rešitev. Če je stopnja regulatorja $r = 2$, potem indeks parametrične rešitve d lahko zavzame vrednost od 0 do 2, kar pomeni $d = 0$ pri ničti potenci s^0 laplace-jevega operatorja in $d = 2$ pri drugi potenci s^2 laplace-jevega operatorja. Z izbiro prostih parametrov vplivamo na obstoj rešitve matrične enačbe (4.18). Matrika S_{yp} ima neničelne elemente razporejene stopnično in izbira prostih parametrov je odvisna od stopnje polinomov $A(s)$ in $B(s)$. Nadalje bomo pravila izbire prostih parametrov posebej obravnavali za primer enakih stopenj polinomov $A(s)$ in $B(s)$, $\deg A = \deg B$, $n = m$ ter primer, ko je stopnja polinoma $B(s)$ nižja od stopnje polinoma $A(s)$, $n > m$.

Pogoj $n = m$

Predpostavimo parametrično rešitev (4.9) za prave sistem, $n = m$ in izbiro stopnje regulatorja,

$$\deg R = \deg A.$$

V primeru izbir enakih stopenj $n = r$ zagotovimo eno parametrično rešitev. Poljubna postavitev prostega parametra v polinomu $R(s)$ ali $L(s)$ ne vpliva na obstoj rešitve, saj valja, da je determinanta matrike S_{yp} vedno različna od nič.

V primeru izbire stopnje polinoma $R(s)$ večjo od stopnje polinoma $A(s)$, $n < r$,

$$\deg R > \deg A,$$

dobimo družino parametričnih rešitev. Rešitev matrične enačbe zagotovimo tako, da dvojice prostih parametrov \tilde{r} , \tilde{l} ne smemo hkrati izbrati pri najvišji ali najnižji potenci polinoma $R(s)$ in $L(s)$, ~~\tilde{r}_r, \tilde{l}_k~~ in ~~\tilde{r}_0, \tilde{l}_0~~ . Ob takšni izbiri prostih parametrov dobimo ničelno vrstico matrike S_{yp} , pri čemer velja $|S_{yp}| = 0$. V ostalih primerih lahko izberemo poljubne kombinacije položajev prostih parametrov in s tem ne vplivamo na singularnost matrike S_{yp} .

Pogoj $n > m$

Pri strogo pravih sistemih, kjer je red polinoma števca $B(s)$ manjša od reda polinoma v imenovalcu $A(s)$, je pri izbiri lege prostega parametra potrebno upoštevati naslednje pravilo. Prosti parameter v polinomu $R(s)$, lahko postavimo le v območju potenc, $(\deg A + \deg R) - (\deg B + \deg S) = t$,

$$(\deg A + \deg R) - (\deg B + \deg S) = t, \quad (4.19)$$

$$d < (r - t). \quad (4.20)$$

Proste parametre v polinomu $L(s)$ lahko izbiramo poljubno, pri čemer je potrebno upoštevati pravilo, ki smo ga navedli prej, dvojica prostih parametrov izbrana pri potenci $d = 0$, \tilde{r}_0, \tilde{l}_0 .

Zelo preprosto je moč dokazati, da pri izbranih prostih parametrih \tilde{r}_r, \tilde{l}_k ali \tilde{r}_0, \tilde{l}_0 in $d \geq (r - t)$ je matrika S_{yp} singularna. Matrika S_{yp} je dimenzije $i + 1$, kar je enako številu koeficientov karakterističnega polinoma $C(s)$. Koeficienti matrike so razporejeni stolpično in vsak stolpec pripada neznanemu koeficientu polinomov regulatorja $R(s)$, $L(s)$ (4.18). Ob izbiri prostih parametrov se pripadajoči stolpci v matriki S_{yp} pomaknejo v matriko \tilde{S}_{yp} . Lahko zgodi, da matrika S_{yp} dobi ničelne vrstice ali linearno odvisnost ene ali večih vrstic. Če pogledamo primer $n = r$, $\deg R > \deg A$ ter izbiro prostih parametrov \tilde{r}_r, \tilde{l}_k ali \tilde{r}_0, \tilde{l}_0 .

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & r_{r-1} & r_{r-2} & \dots & r_0 & l_{k-1} & \dots & l_0 \\ \begin{array}{c} i+1 \\ i \\ i-1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \ddots & 0 & b_m & \ddots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_0 & 0 & \ddots & b_0 & 0 \end{array} \right] & \vdots & \begin{array}{cccccccc} & r_{r-1} & r_{r-2} & \dots & r_0 & l_{k-1} & \dots & l_0 \\ \begin{array}{c} i+1 \\ i \\ i-1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} a_n & 0 & 0 & 0 & b_m & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & 0 & \vdots & b_m & 0 & 0 \\ \vdots & a_n & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{S_{yp}(\tilde{r}_r, \tilde{s}_r)} & & \underbrace{\hspace{10em}}_{S_{yp}(\tilde{r}_0, \tilde{s}_0)} \end{array}$$

Iz primera ja razvidno, da sta v obeh primerih matriki $S_{yp}(\tilde{r}_r, \tilde{l}_k)$ in $S_{yp}(\tilde{r}_0, \tilde{l}_0)$ singularni, saj obe vsebujeta ničelni vrstici.

Vzemimo primer, ko je $r > n$, $\deg R > \deg A$ in $d \geq (r - t)$. Matrika S_{yp} ima obliko.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & r_r & r_{r-t} & \dots & r_0 & s_k & s_{k-1} & \dots & s_0 \\
 i+1 & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & a_{n-1} & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\
 i-t & \vdots & a_n & \ddots & \vdots & b_m & 0 & \vdots & 0 \\
 i-t-1 & a_0 & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & b_m & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & a_0 & \ddots & a_n & b_0 & \vdots & b_m & b_m \\
 \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \ddots & a_0 & 0 & 0 & 0 & b_0
 \end{array} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{S_{yp}(d \geq (r-t))}
 \end{array}$$

V zgornjem delu matrike $S_{yp}(d \geq (r-t))$ dobimo t linearno odvisnih vrstic, kar pomeni, da je matrika S_{yp} singularna. Podoben primer je s pogojem \tilde{r}_0, \tilde{l}_0 , kjer dobimo spodnjo ničto vrstico, kot v prejšnjem primeru.

4.1.3 Izbira prostih parametrov

Glede na stopnjo polinomov imenovalca in števca $A(s), B(s)$ modela vodenja $P(s)$ ter pogoj (4.9), lahko proste parametre postavimo v skladu s pravili tako, da zagotovimo obstoj rešitve matrične enačbe. Postavitev prostega parametra je ključnega pomena, saj tako vplivamo na lego polov in ničel regulatorja ter ničel prenosne funkcije občutljivosti, izhod regulatorja ter komplementarne občutljivosti. Pri tem je potrebno poudariti, da z izbiro ter vrednostjo prostih parametrov ne vplivamo na lego zaprto zračnih polov, določenih s polinomom $C(s)$. Zapišemo prenosne funkcije zaprto zračnega sistema .

Občutljivost,

$$\begin{aligned}
 S_c(s) &= \frac{1}{1+K(s)P_0(s)} = \frac{A(s)R(s)}{A(s)R(s)+B(s)S(s)} = \frac{A(s)R(s)}{C(s)}, \\
 &= \frac{a_n r_r s^{r+n} + (a_n r_{r-1} + a_{n-1} r_r) s^{r+n-1} + \dots + a_0 r_0}{c_i s^i + c_{i-1} s^{i-1} + \dots + c_1 s + c_0}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Izhod regulatorja,

$$\begin{aligned}
 U(s) &= \frac{K(s)}{1+K(s)P_0(s)} = \frac{A(s)S(s)}{A(s)R(s)+B(s)S(s)} = \frac{A(s)S(s)}{C(s)}, \\
 &= \frac{a_n s_k s^{n+k} + (a_n s_{k-1} + a_{n-1} s_k) s^{n+k-1} + \dots + a_0 s_0}{c_i s^i + c_{i-1} s^{i-1} + \dots + c_1 s + c_0}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Komplementarna občutljivost,

$$\begin{aligned}
 T(s) &= \frac{K(s)P_0(s)}{1+K(s)P_0(s)} = \frac{B(s)S(s)}{A(s)R(s)+B(s)S(s)} = \frac{B(s)S(s)}{C(s)}, \\
 &= \frac{b_m s_k s^{m+k} + (b_m s_{k-1} + b_{m-1} s_k) s^{m+k-1} + \dots + b_0 s_0}{c_i s^i + c_{i-1} s^{i-1} + \dots + c_1 s + c_0}.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Po pregledu koeficientov polinomov števecv in imenovalcev prenosnih funkcije (4.21), (4.22), (4.23) je razvidno, da z izbiro lege prostih parametrov ter njihovimi vrednostmi, vplivamo na potek frekvenčnih karakteristik ter iznos ekstremov, kar pomeni, da vplivamo na vrednost norme $\|\cdot\|_\infty$. Če na kratko analiziramo koeficiente polinomov izrazov (4.21), (4.22), (4.23), lahko ugotovimo, da vrednosti koeficientov regulatorja pri nižjih in višjih potencah intenzivneje vplivajo na potek frekvenčnih karakteristik (4.21), (4.22), (4.23). Vzemimo primer gladkega nizko frekvenčnega spektra stabilne prenosne funkcije, kjer velja $s = j\omega$. Maksimalna vrednost karakteristike je pri $\omega = 0$, kar je enako vrednosti norme $\|\cdot\|_\infty$. Za primer prenosnih funkcij (4.21), (4.22), (4.23) lahko zapišemo,

$$S_c(0) = \frac{a_0 r_0}{c_0}, \quad T(0) = \frac{b_0 l_0}{c_0}, \quad U(0) = \frac{a_0 l_0}{c_0},$$

$$\|S_c\|_\infty = \frac{a_0 r_0}{c_0}, \quad \|T\|_\infty = \frac{b_0 l_0}{c_0}, \quad \|U\|_\infty = \frac{a_0 l_0}{c_0}.$$

Z izbiro prostega parametra $\tilde{r}_0 = 0$ je vrednost parametra $\tilde{l}_0 = c_0/b_0$, enako velja z izbiro $\tilde{l}_0 = 0$ je $\tilde{r}_0 = c_0/a_0$. Podobno drži z izbiro prostih parametrov pri najvišji

potenci. Kot smo že omenili, največji vpliv na potek frekvenčnih karakteristik dosežemo z izbiro prostih parametrov pri najnižjih ter najvišjih potencah in nekoliko manj pri srednjih. Omenjeno je moč preprosto potrditi. Linearni sistem enačb ima pri najnižji in najvišji potenci le dva neznana parametra r_0, l_0 ali r_r, l_k , z izbiro poljubnega parametra pri $d=0$ ali $d = r \wedge k$, kot parametrično rešitev, posledično neposredno vplivamo na vrednost drugega, kar pomeni, da intenzivneje vplivamo na frekvenčno karakteristiko zaprto zančnega sistem ter posledično na vrednost norme $\|\cdot\|_\infty$.

4.1.4 Določitev karakterističnega polinoma $C(s)$

Izbira koeficientov karakterističnega polinoma $C(s)$ glede na zaprto zančno dinamiko za sisteme višjega reda, je osnovni problem tehnike pomikanja polov. Določite ničel karakterističnega polinoma, glede na kvalitativne lastnosti zaprto zančnih sistemov, je bilo osrednje področje raziskovanja v zgodnjem obdobju razvoja moderne teorije vodenja. Na področju izbire $C(s)$ je vpeljanih veliko različnih pristopov ter metod, ki delno reflektirajo kvalitativne lastnosti zaprto zančnega sistema. Veliko krat določitev ničel polinoma $C(s)$ temelji na izbranem času vzpona, času nastavitve, velikosti prenihaja itd., kjer ni moč popolnoma natančno navedene parametre preslikati v koeficiente polinoma $C(s)$. Karakteristični polinom je tako možno izbrati na osnovi različnih form, ki delno vključujejo kvalitativne lastnosti zaprto zančnih sistemov. Poznane so: ITAE^{xi}, IAE^{xii}, ISE^{xiii} polinomi, Kesslerjeva forma, Besselove funkcije, Manabe forma in druge. Večina form vsebujejo kriterij stabilnosti po Hurwitz-u [77] in nekatere po Lipatov-em stabilnostnem kriteriju [10],[11],[76]. Predvsem slednji je dopolnilo Hurwitzevih polinomov in je izhodišče Manabejeve oblike karakterističnega polinoma. Lipatov stabilnostni kriterij je preko Lipatovih indeksov direktno vpeljan v Manabe-jevo formo. Manabe-jeva forma

^{xi}ITAE – ang. integral of time multiplied absolute error –integral absolutne napake množene s časom

^{xii}IAE – ang. integral of absolute error – integral absolutne napake

^{xiii}ISE – ang. integral of square error –integral kvadrata napake

polinoma $C(s)$ je osrednje orodje robustnega grafičnega načrtovanja regulatorjev CDM^{xiv}, razvitega namensko za sisteme nižjega reda[91],[92].

Za avtomatizirano načrtovanje robustnih regulatorjev, bomo za izbiro karakterističnega polinoma $C(s)$ uporabili Manabe-jevo formo polinoma. Manabe-jeva forma polinoma omogoča določitev ničel polinoma poljubnega reda, na osnovi izbranega časa nastavitve, kjer je Lipatov stabilnostni kriterij direktno vpeljan z določitvijo koeficientov Manabe polinoma na osnovi Lipatovih indeksov.

Manabe-jeva forma karakterističnega polinoma,

$$C(s) = c_0 \left[\left\{ \sum_{v=2}^i \left(\prod_{w=1}^{v-1} \frac{1}{\gamma_{v-w}^w} \right) (\tau s)^v \right\} + \tau s + 1 \right]. \quad (4.24)$$

Kjer je γ Lipatovova matrika stabilnostnih indeksov,

$$\gamma_v = [2.5, 2, 2, \dots, 2], \quad (4.25)$$

in velja: $v = 2, \dots, i - 1$, $\gamma_0 = \gamma_\infty = 0$.

Časovna konstanta pri izbranem času nastavitve t_s ,

$$\tau = \frac{t_s}{(2.5 \sim 3)}. \quad (4.26)$$

Forma (4.24) je preprosta za implementacijo v obliki računalniškega algoritma, saj so koeficienti polinoma določeni le s parametrom t_s . Za monični polinom $C(s)$ izberemo $c_i = 1$, kjer velja $c_0 = c_i^{-1}$.

^{xiv} CDM – ang. Coefficient Diagram Method - metoda načrtovanja regulatorja, na osnovi koeficientov karakterističnega polinoma

4.1.5 Sinteza predfiltra $F(s)$

Zaprto zančna struktura z dvema prostostnima stopnjama Slika 4-1 ter tehniko pomikanja polov, se pogosto zaključi s sintezo predfiltra $F(s)$. Prefilter $F(s)$ načrtujemo ločeno od regulatorja $K(s)$. Predpostavimo, da želena zaprto zančna karakteristika $T_{yr}(s)$ in $T(s)$ imata enak karakterističnim polinomom $C(s)$, potem lahko prefilter $F(s)$ določimo po izrazu [2],[4],

$$T_{yr}(s) = F(s)T(s). \quad (4.27)$$

Teorem 15 Če prenosni karakteristiki $T_{yr}(s)$ in $T(s)$ z enakim karakterističnim polinomom $C(s)$, nimata ničel ali imata skupne ničel v $Res > 0$ in je stopanja števca prenosne karakteristike $T_{yr}(s)$ manjša ali enaka stopnji števca $T(s)$, je prenosna funkcija predfiltra $F(s)$ enaka,

$$F(s) = \frac{T_{yr}(s)}{T(s)} \in \mathcal{RH}_\infty.$$

Dokaz Predpostavimo, da je ničla z_0 v $Res > 0$ ničla prenosne karakteristike $T(s)$ in ni ničla prenosne karakteristike $T_{yr}(s)$ po izrazu (4.27) prenosna funkcija predfiltra $F(s)$ ni element \mathcal{RH}_∞ .

Prav tako sledi, če stopanja imenovalca števca $T_{yr}(s)$ ni manjša ali enaka $T(s)$ po izrazu (4.27) sledi, da prenosna funkcija predfiltra $F(s)$ ni izvedljiva in ne pripada množici \mathcal{RH}_∞ .

V primeru, da želene prenosni funkciji $T_{yr}(s)$ in $T(s)$ nimata enakih polinomov v imenovalcu, lahko načrtovanje predfiltra $F(s)$ predstavimo, kot problem uskladitve modelov [42]. Problem predstavimo kot,

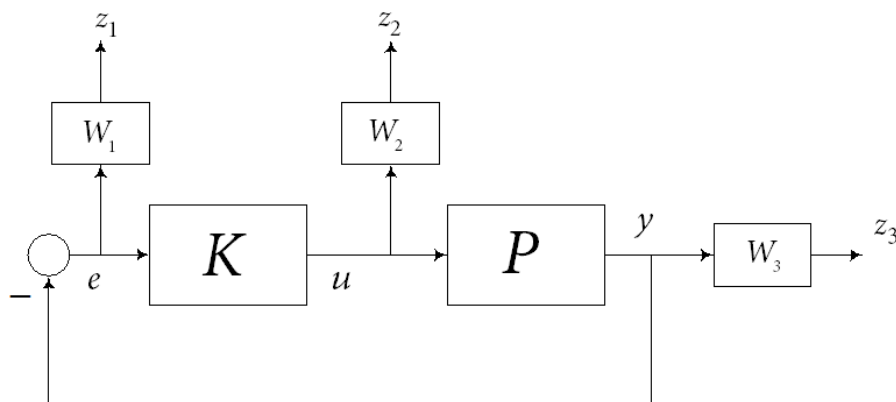
$$\min_F \|T_{yr} - FT\|_\infty. \quad (4.28)$$

Rešitev problema je iskanje $F(s)$, ki minimizira problem v smislu čim manjšega odstopanja med $T_{yr}(s)$ in $F(s)T(s)$, kjer velja $F(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ [42],[44].

4.2 Vrednotenje robustnosti zaprto zančnega sistema z metriko norme \mathcal{H}_∞ ter prostimi parametri $\tilde{r}_{\hat{z}}$, $\tilde{l}_{\hat{w}}$

Z vpeljavo parametričnih rešitev po izrazu (4.16) ter izbiro prostih parametrov d v polinomu $R(s)$ in $L(s)$, bomo nadalje obravnavali vpliv vrednosti prostih parametrov na vrednost norme H_∞ . Izbira lege prostih parametrov d ter določitev vrednosti $\tilde{r}_{\hat{z}}$, $\tilde{l}_{\hat{w}}$, so ključnega pomena pri zagotavljanju robustne stabilnosti in robustnega učinka zaprto zančnega sistema, opisanega z nestrukturiranim odstopanjem.

Podobno, kot smo obravnavali robustnost ter problem mešane občutljivost v podpoglavju 3.2 in 3.4, vzemimo zaprto zančno strukturo z utežnostnimi funkcijami $W_1(s)$, $W_2(s)$, $W_3(s)$,



Slika 4-2 Zaprto zančna shema z utežnostnimi funkcijami $W(s)$

Utežnostne funkcije $W_1(j\omega)$, $W_2(j\omega)$, $W_3(j\omega)$ so stabilne in prave prenosne funkcije, katerih inverz $W_1^{-1}(j\omega)$, $W_2^{-1}(j\omega)$, $W_3^{-1}(j\omega)$ predstavlja zgornjo mejo

frekvenčne karakteristike $S_c(j\omega)$, $U(j\omega)$, $T(j\omega)$. Robustnost zaprto zančnega sistema lahko vrednotimo z različnimi testi,

$$\|W_1 S\|_\infty < 1, \quad (4.29)$$

$$\|W_2 U\|_\infty < 1, \quad (4.30)$$

$$\|W_3 T\|_\infty < 1. \quad (4.31)$$

Z izpolnitvijo pogojev (4.29), (4.30), (4.31) izpolnimo več pogojev hkrati. Z izpolnitvijo pogoja (4.29) dosežemo robustno stabilnost za inverzne modele odstopanj (3.12) ter hkrati izpolnimo performančne kriterije povezave med signali (2.24), Slika 4-2. Vpliv referenčnega signala r na pogrešek e , vpliv izhodne motnje d_i na pogrešek e , vpliv izhodne motnje d_i na izhod y ter vpliv šuma n na pogrešek e .

Z izpolnitvijo pogoja (4.30), bo zaprto zančni sistem robusten za modele z aditivnim odstopanjem (3.9) ter hkrati vplivamo na povezave med signali, vpliv reference r , izhodne motnje d_i , šuma n na izhod regulatorja u (2.24).

Z izpolnitvijo pogoja (4.31), bo zaprto zančni sistem robustno stabilen za modele z multiplikativnim odstopanjem (3.7) ter posledično vplivamo na povezavo med signali, vpliv d_i na u , r na y , n na y (2.24).

Izpolnitev pogojev (4.29), (4.30), (4.31) ter optimizacijo norme $\|\cdot\|_\infty$, zagotovimo z izbiro prostih parametrov \tilde{r}_z , \tilde{l}_w na osnovi določenih potenc d v $R(s)$ in $L(s)$. Robustni regulator s tehniko pomikanja polov je funkcija karakterističnega polinoma $C(s)$, izbire potencia prostih parametrov d ter izbire vrednosti posameznih koeficientov \tilde{r}_z , \tilde{l}_w . Predpostavimo, da je karakteristični polinom $C(s)$ izhodišče načrtovanja ter je določen na podlagi funkcionalnih in kvalitativnih lastnosti zaprto zančnega sistema. Tako je regulator $K(s)$ funkcija izbranih potenc d in množice prosti parametrov \tilde{r} in \tilde{l} ,

$$K(s) = f\left(s, d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z, \tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_w\right), \quad (4.32)$$

kjer je so prosti parametri \tilde{r} in \tilde{l} koeficienti $R(s)$ in $L(s)$,

$$K\left(s, d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z, \tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_w\right) = \frac{L\left(s, d, \tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_w\right)}{R\left(s, d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z\right)}. \quad (4.33)$$

Zapis pogojev (4.29), (4.30), (4.31) v odvisnosti od d in \tilde{r}_z, \tilde{l}_w ,

$$\left\| W_1 \frac{AR\left(d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z\right)}{C} \right\|_{\infty} < 1, \quad (4.34)$$

$$\left\| W_2 \frac{AL\left(d, \tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_w\right)}{C} \right\|_{\infty} < 1, \quad (4.35)$$

$$\left\| W_3 \frac{BL\left(d, \tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_w\right)}{C} \right\|_{\infty} < 1. \quad (4.36)$$

Pogoje (4.34),(4.35),(4.36) lahko v sintezo vpeljemo, kot ločene kriterije ali kot nabor dveh/treh kriterijev, t.i. problem mešane občutljivosti. Problem mešane občutljivosti je smiselno obravnavati z razklopitvijo pogojev na kriterije robustne stabilnosti za posamezni model odstopanj ter performančne kriterije za določene zaprto znančne karakteristike $S_c(j\omega)$, $U(j\omega)$, $T(j\omega)$.

Problem mešane občutljivosti prav tako lahko razširimo na problem z vpeljavo vhodnih uteži $V_1(j\omega)$, $V_2(j\omega)$, $V_3(j\omega)$, $V_4(j\omega)$ Slika 3-13, izraz (3.48). Rešitev problema (3.48) je funkcija d , \tilde{r} in \tilde{l} ,

$$\min_{K \in \mathcal{RH}_{\infty}} \left\| T_{zw}\left(d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z, \tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_w\right) \right\|_{\infty} \leq \gamma, \quad (4.37)$$

kjer je,

$$T_{zw}(d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z, \tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_w) = [W] \begin{bmatrix} -C^{-1}BR(d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z) & -C^{-1}AR(d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z) & -C^{-1}AR(d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z) & C^{-1}AR(d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z) \\ -C^{-1}BL(d, \tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_w) & -KC^{-1}AR(d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z) & -C^{-1}AL(d, \tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_w) & C^{-1}AL(d, \tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_w) \\ C^{-1}BR(d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z) & C^{-1}AR(d, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_z) & -C^{-1}BL(d, \tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_w) & C^{-1}BL(d, \tilde{l}_0, \dots, \tilde{l}_w) \end{bmatrix} [V].$$

Z utežmi $V_1(j\omega)$, $V_2(j\omega)$, $V_3(j\omega)$, $V_4(j\omega)$ modeliramo lastnosti eksogenih signalov; reference, vhodne, izhodne motnje, šumi, kjer velja, da so $V_1(j\omega)$, $V_2(j\omega)$, $V_3(j\omega)$, $V_4(j\omega) \in \mathcal{RH}_\infty$.

4.2.1 Dodatni performančni kriterij $W_p(s)$ za poenostavitev zaprto zančne strukture

Dodatno performančno utež $W_p(s)$ vpeljemo, kot kriterij, s katerim želimo korigirati neželene učinke prenosne funkcije $T(s)$. Tako ni potrebe po dodatnem načrtovanju pred filtra $F(s)$ za korekcijo ničel prenosne funkcije $T(s)$, po Teoremu 15 ali [84], katerih ne moremo neposredno nadzorovati s tehniko pomikanja polov. V tem primeru predpostavimo $F(s) = 1$. Sintezo zaprtozančnega vodenja prevedemo iz 2DOF^{xv} na 1DOF strukturo in tako poenostavimo arhitekturo zaprtozančnega sistema. Utež $W_p(s)$ izberemo tako, da omejimo zgornjo mejo funkcije občutljivosti $S(j\omega)$ ali $T(j\omega)$. Z omejitvijo resonančnega vrha frekvenčne karakteristike $S(j\omega)$ ali $T(j\omega)$ vplivamo, na iznos prenehaja ter časa umiritve izhoda sistema. Za utež $W_p(s)$ velja $W_p(s) \in \mathcal{RH}_\infty$.

Utež $W_p(s)$ za prenosno funkcijo $S(j\omega)$ vpeljemo v primeru izbire pogoja (4.34), za opis robustne stabilnosti za inverzne modele odstopanj $W_1(s) = W_I(s)$, kjer za dodatni performančni kriterij $W_p(s)$ velja,

^{xv} DOF - ang. Degree of freedom – prostostne stopnje

$$\|W_p^{-1}S\|_{\infty} < 1, \quad (4.38)$$

sledi,

$$\|S\|_{\infty} < \|W_p\|_{\infty} < \|W_I^{-1}\|_{\infty},$$

kjer je ,

$$\|W_I W_p\|_{\infty} < 1. \quad (4.39)$$

V primeru izpolnjenega pogoja (4.39) in hkrati (4.38) izpolnimo pogoj (4.34).

V primeru vpeljave dodatnega kriterija $W_p(s)$ za prenosno funkcijo $T(j\omega)$, kjer z pogojem (4.36) vrednotimo robustno stabilnost za sisteme z multiplikativnim odstopanjem $W_3(s) = W_M(s)$, za kriterij $W_p(s)$ velja,

$$\|W_p^{-1}T\|_{\infty} < 1, \quad (4.40)$$

kjer velja,

$$\|S\|_{\infty} < \|W_p\|_{\infty} < \|W_M^{-1}\|_{\infty},$$

$$\|W_M W_p\|_{\infty} < 1. \quad (4.41)$$

Prav tako z izpolnitvijo kriterija (4.41) in (4.40) hkrati izpolnimo kriterij (4.36).

4.3 Vpliv parametričnih rešitev \tilde{r}_z, \tilde{l}_w na vrednost norme \mathcal{H}_∞

Vpliv vrednosti parametričnih rešitev \tilde{r}_z, \tilde{l}_w na vpliv norme $\|\cdot\|_\infty$, bomo obravnavali z $\Phi(s)$, ki je osrednja funkcija bisekcijskega algoritma za računanje norme $\|\cdot\|_\infty$. Norma $\|\cdot\|_\infty$ je maksimalna vrednost frekvenčne karakteristike $|P(j\omega)|$ ali točka Nyquistove krivulje, ki je najdlje oddaljena od izhodišča kompleksne ravnine.

$$\|P\|_\infty := \sup_{\omega} |P(j\omega)| \quad (4.42)$$

Normo $\|\cdot\|_\infty$ sistema $P(s)$ definiramo s funkcijo $\phi(s)$,

$$\Phi(s) = \gamma^2 I - P(s)P(-s). \quad (4.43)$$

Norma prenosne funkcije $P(s)$ je $\|P\|_\infty \leq \gamma$ samo, če je funkcija $\phi(j\omega) > 0$ za vse frekvence, $\omega \in \mathbb{R}$. Funkcija $\phi(s)$ je zvezna za vse $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ in nima ničel na imaginarni osi. Če velja $\|P\|_\infty = \gamma$ ima funkcija $\phi(s)$ natanko par kompleksnih ničel na imaginarni osi in γ je hkrati norma \mathcal{H}_∞ sistema $P(s)$.

Iz navedenega ter izraza (4.43) vpeljemo pogoje robustne stabilnosti za sisteme z nestrukturiranimi odstopanji (4.29), (4.30), (4.31), kjer splošno velja,

$$\|P\|_\infty < 1$$

Pogoj vpeljemo v izraz (4.43) in predpostavimo $\gamma = 1$,

$$P(s)P(-s) < \gamma^2 I, \quad (4.44)$$

$$P(s)P(-s) < I.$$

Kjer velja,

$$P(s)P(-s) = |P(j\omega)|^2. \quad (4.45)$$

Pri čemer sledi, da je izraz (4.44) enak,

$$|P(j\omega)| < 1. \quad (4.46)$$

Prenosno funkcijo $P(s)$ predstavimo, kot $P(s) = B(s)A^{-1}(s)$, kjer za pogoj (4.44) velja,

$$\frac{B(s)B(-s)}{A(s)A(-s)} < 1. \quad (4.47)$$

Pogoj $\|P\|_\infty < 1$ velja, če je,

$$A(s)A(-s) - B(s)B(-s) > 0. \quad (4.48)$$

Z vpeljavo $s = j\omega$, za izraz (4.48) drži,

$$|A(j\omega)|^2 - |B(j\omega)|^2 = \Pi(\omega^2) > 0, \quad (4.49)$$

$$A(\omega^2) - B(\omega^2) = \Pi(\omega^2) > 0.$$

Polinom $\Pi(\omega^2)$ je soda funkcija s sodimi potencami $\omega^{2n}, \omega^{2n-2} \dots \omega^0$. Določitev norme $\|\cdot\|_\infty$ je preoblikovana v določitev ničel spektralnega polinoma $\Pi(\omega^2)$.

Teorem 16 Norma $\|\cdot\|_\infty$ poljubnega pravega sistema $P(s)$, je strogo manjša od ena samo, če je njen spektralni polinom $\Pi(\omega^2)$ strogo pozitivna funkcija,

$$\Pi(\omega^2) > 0. \quad (4.50)$$

Dokaz Norma $\|\cdot\|_\infty$ poljubnega sistema $P(s)$, je maksimalna vrednost frekvenčne karakteristike $|P(j\omega)|$. Prenosna karakteristika $P(s)$ je razmerje polinomov $B(s)$ in $A(s)$, kjer je absolutna vrednost $|P(j\omega)|$ enaka,

$$|P(j\omega)| = \frac{|B(j\omega)|}{|A(j\omega)|} = \frac{|B(j\omega)|}{|A(j\omega)|}.$$

Izraz $|P(j\omega)| < 1$ samo, če bo absolutna vrednost polinoma v imenovalcu $|A(j\omega)|$ pri vseh frekvencah $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ večja od absolutne vrednosti polinoma števca $|B(j\omega)|$, kar velja enako za spektralne polinome $|A(j\omega)|^2$ in $|B(j\omega)|^2$. Če drži navedeno, velja enako za razliko polinomov $|A(j\omega)|^2$ in $|B(j\omega)|^2$, kjer je ta pri vseh frekvencah $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ strogo večja od nič,

$$|A(j\omega)|^2 - |B(j\omega)|^2 > 0.$$

Za izpolnitev pogojev robustnosti, je možno testirati pozitivnost spektralnega polinoma $\Pi(\omega^2)$. Če je $\Pi(\omega^2)$ spektralni polinom sistema $P(j\omega)$ strogo pozitiven in ima n parov kompleksnih ničel, kjer je supremum $\sup \Pi(\omega^2) = \gamma^2$ pri frekvenci ω_{sup}^2 velja, da je γ norma $\|\cdot\|_\infty$ sistema $P(j\omega)$, $|P(\omega_{sup})| = \gamma$.

4.3.1 Šiljakov stabilnostni test

Testiranje pozitivnosti sodih polinomov je možno izvesti s Šiljakovim algebraičnim testom pozitivnosti [18],[54]. Test je bil prvotno razvit za testiranje stabilnosti kompleksnih nelinearnih sistemov ter določitev pasivnosti odpro in zaprto zračnih sistemov [18]. Avtor je pravtako test uporabil, za določitev robustnosti zaprto zračnega sistema s parametričnim odstopanjem, kjer je s pomočjo Bernsteinovega algoritma reševal problem domenske stabilnosti parametričnega prostora odstopanj [20],[21]. Robustna metoda zaradi kompleksnosti Bernsteinovega algoritma ni doživela večje odmevnosti in je posledično Šiljakov test ostala poimenovana, kot algebraični test pozitivnosti sodih funkcij, prvotno Šiljakov stabilnostni test.

Šiljakov test pozitivnosti je modificirana Routh-ova tabela za določitev ničel polinoma v $Res < 0$ [89]. S testom je mogoče na osnovi koeficientov sodega polinoma $\Pi(\omega^2)$ določiti pozitivnost sodih funkcije $\Pi(\omega^2) > 0$. Polinom $\Pi(\omega^2)$ zapišemo, kot

$$\Pi(\omega^2) = \sum_{w=0}^{\nu} q_{2w} \omega^{2w} \geq 0, \quad \omega \in \mathbb{R} \wedge \omega \geq 0. \quad (4.51)$$

Vsi koeficienti q_{2w} polinoma $\Pi(\omega^2)$ so realni in velja $q_{2\nu} \neq 0$. Preprosto je mogoče podati dva osnovna pogoja obstoja pozitivnosti polinoma $\Pi(\omega^2)$. Polinom $\Pi(\omega^2)$ je strogo pozitiven, če so vsi koeficienti polinoma q_{2w} pozitivni. Pravtako velja, polinom ni strogo pozitiven, če je $q_0 < 0$, $q_0 = 0$ ali $q_{2\nu} < 0$.

V primeru, da vsi koeficienti q_{2w} niso pozitivni in velja $q_0 > 0$ in $q_{2\nu} > 0$, pozitivnosti polinoma $\Pi(\omega^2)$ testiramo s Šiljakovim testom pozitivnosti,

r						
1	$\omega^{2\nu}$	$(-1)^\nu q_{2\nu}$	$(-1)^{\nu-1} q_{2\nu-2}$	q_2	q_0
2	$\omega^{2\nu-1}$	$(-1)^\nu 2\nu q_{2\nu}$	$(-1)^{\nu-1} (2\nu-2) q_{2\nu-2}$	$-2q_2$	
.	.	.				
.	.	.				
.	.	.				
$(2\nu+1)$	ω^0	q_0				

Število pozitivnih realnih ničel π , polinoma $\Pi(\omega^2)$ je enako,

$$\pi = \nu - V \left[(-1)^\nu q_{2\nu}, (-1)^\nu 2\nu q_{2\nu}, \dots, q_0 \right]. \quad (4.52)$$

Kjer je V število sprememb predznaka prvega stolpca Šiljakove tabele in 2ν stopanja polinoma $\Pi(\omega^2)$. Če je $\pi = 0$, $V = \nu$, potem polinom $\Pi(\omega^2)$ ima ν parov kompleksnih ničel, kar pomeni $\Pi(\omega^2) > 0$ in norma $\|\cdot\|_\infty$ sistema $P(s)$ je enaka,

$$\|P\|_\infty := \min_{\omega} |\Pi(\omega^2)| < 1 \wedge \Pi(\omega^2) > 0. \quad (4.53)$$

Primer Določitev norme s spektralnim polinomom $\Pi(\omega^2)$ ter Šiljakovim testom.

Vzamemo prenosno funkcijo,

$$P(s) = \frac{s+1}{s^2 + 1.25s + 10.9}.$$

Kjer je,

$$P(s)P(-s) = \frac{-s^2 + 1}{s^4 + 20.24s^2 + 118.81}.$$

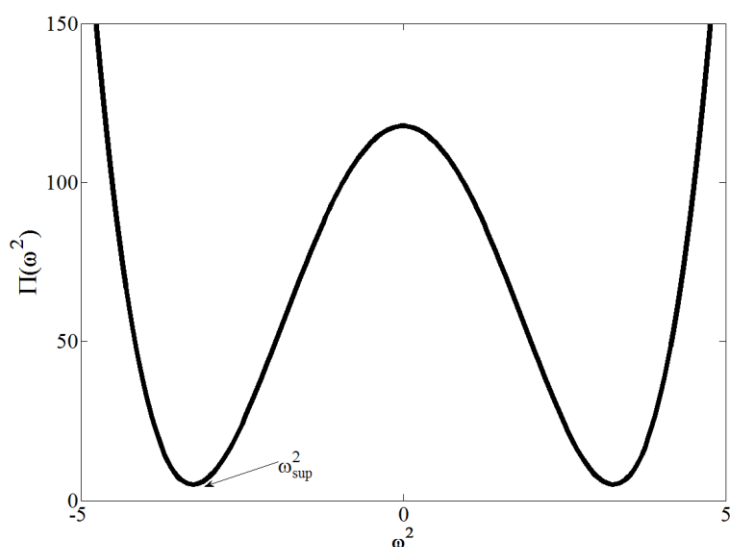
Upoštevamo izraza (4.48),(4.49), kjer je spektralni polinom $\Pi(\omega^2)$ enak,

$$\Pi(\omega^2) = \omega^4 - 21.24\omega^2 + 117.81.$$

Šiljakova tabela spektralnega polinom $\Pi(\omega^2)$,

r				
1	ω^4	1	21.24	117.8
2	ω^3	2	21.24	
3	ω^2	10.61	117.8	
4	ω^1	-0.95		
5	ω^0	117.8		

V prvem stolpcu tabele imamo natanko dve spremembi predznaka $V = 2$. Sledi po izrazu (4.52), $\pi = V - v = 0$, polinom $\Pi(\omega^2)$ izpolnjuje pogoj $\Pi(\omega^2) > 0$, kar pomeni, da je norma $\|\cdot\|_\infty$ sistema $P(s)$ manjša od ena. Grafična predstavitev polinoma $\Pi(\omega^2)$, Slika 4-3.



Slika 4-3 Potek polinoma $\Pi(\omega^2)$

Izračun norme s pomočjo bisekcijskega algoritma $\|P\|_\infty = 0.83$. S testiranjem pozitivnosti spektralnega polinoma $\Pi(\omega^2)$ je moč določiti izpolnitev pogoja $\|P\|_\infty < 1$.

Z upoštevanjem pogojev (4.34)-(4.36) ter preoblikovanjem le teh z vpeljavo spektralnega polinoma $\Pi(\omega^2)$, je moč določiti suboptimalnost rešitve $\|\cdot\|_\infty < 1$ s preiskovanjem koeficientov $\Pi(\omega^2)$ ter Šiljakovim testom. Polinom $\Pi(\omega^2)$ z uvedbo družine parametričnih rešitev in tehniko pomikanja polov je funkcija $\Pi(\omega^2, d, \tilde{r}_z, \tilde{l}_w, W(s))$ za pogoje (4.34)-(4.36) ter $\Pi(\omega^2, d, \tilde{r}_z, \tilde{l}_w, W(s), V(s))$ za pogoj (4.37).

Dokazati je potrebno, da z izbiro vrednosti prostih parametrov \tilde{r}_z, \tilde{l}_w vplivamo na iznos polinoma $\Pi(\omega^2)$ ter posledično vrednost norme $\|\cdot\|_\infty$. S spreminjanjem vrednosti prostih parametrov \tilde{r}_z, \tilde{l}_w , vplivamo na števec polinomov v pogojih (4.34)-(4.36). Imenovalec pogojev (4.34)-(4.36) je določen z izbiro karakterističnega polinoma $C(s)$ in je nespremenljiv. Če normo sistema $\|\cdot\|_\infty$ obravnavamo, kot največje ojačenje pri dani frekvenci ω pomni, da s spreminjanjem frekvenčnega spektra polinoma v števcu pri konstantnem spektru polinoma v imenovalcu, vplivamo na frekvenčne lastnosti celotne prenosne karakteristike, formirane z razmerjem danih

polinomov. Posledično pomeni, da vplivamo na potek celotne frekvenčne karakteristike prenosne funkcije ter tako vplivamo na iznos ekstremov in resonančnih vrhov, kar je enako normi $\|\cdot\|_\infty$ po Teoremu 16.

Poglejmo preprost primer za prenosno funkcijo prvega reda s spremenljivim parametrom 'a' v polinomu števec ter nespremenljivim polinomom imenovalca.

$$P(s) = \frac{s+a}{s^2+3s+2}.$$

Normo $\|\cdot\|_\infty$ je moč določiti z iskanjem ekstremov prenosne funkcije $P(s)$,

$$\frac{\partial}{\partial \omega} |P(j\omega)| = \frac{\partial}{\partial \omega} \left| \frac{j\omega+a}{(j\omega)^2+3j\omega+2} \right|.$$

Iskanje ekstremov je dolgotrajnejši in kompleksen postopek, zato uporabimo vpeljavo polinoma $\Pi(\omega^2, a)$ po (4.48),(4.49),

$$\Pi(\omega^2) = \omega^4 + 4\omega^2 + 4 - a^2.$$

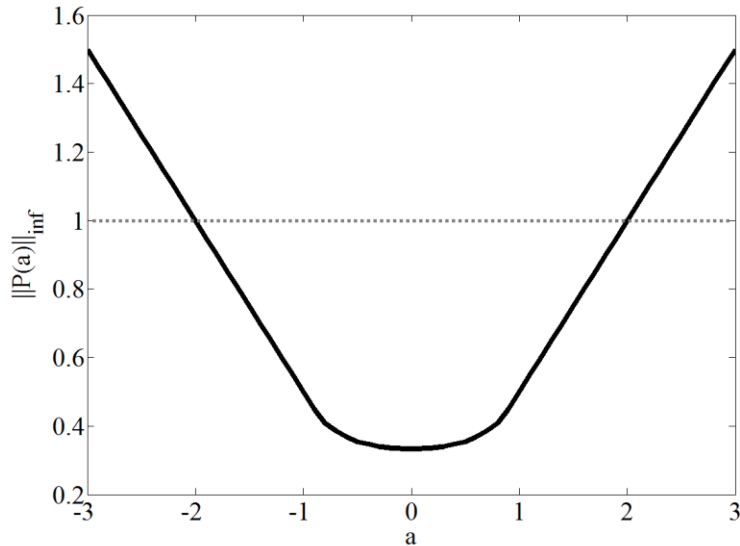
Šiljakova tabela,

r				
1	ω^4	1	-4	$4-a^2$
2	ω^3	2	-4	
3	ω^2	-2	$4-a^2$	
4	ω^1	-1		
5	ω^0	$4-a^2$		

Če želimo, da prvi stolpec Šiljakove tabele spremeni predznak natanko dvakrat, pri čemer bo število realnih ničel $\pi = 0$, je potrebno zagotoviti pogoj $4 - a^2 > 0$. Pogoj zagotavlja pozitivnosti polinoma $\Pi(\omega^2, a)$ tudi po $q_0(a) > 0$. Vrednost parametra 'a' za zagotovitev pogoja $\Pi(\omega^2, a) > 0$ in $\|P(a)\|_\infty < 1$,

$$|a| < 2.$$

Minimum norme $\min\|P(a)\|_\infty$ dosežemo s $\frac{\partial}{\partial a}(4 - a^2) = 0$, kar pomeni, da je $a = 0$. Grafična predstavitev pogoja $|a| < 2$ z izrisom norme $\|P(a)\|_\infty$, izračunane s bisekcijskim algoritmom Slika4-4.



Slika 4-4 Potek norme $\|P(a)\|_\infty$ v odvisnosti od parametra 'a'

Iz Slike 4-4 je razvidno, da je na intervalu $a[-2 \ 2]$ norma sistema $\|P(a)\|_\infty < 1$. S testom pozitivnosti polinoma $\Pi(\omega^2)$, je moč določiti vrednost prostih parametrov, za zagotovitev suboptimalnosti ter optimalnosti robustnih pogojev podanih z metriko norme \mathcal{H}_∞ .

V primeru prenosnih funkcij višjih redov ter z vpeljavo družine parametričnih rešitev, je analitična rešitev prezahtevna in računsko dolgotrajna. V ta namen uporabimo večkriterijsko optimizacijsko tehniko, na osnovi evolucijskega računanja. Evolucijske računske tehnike so primerne za iskanje globalnih minimumov raznovrstnih problemov na osnovi postavljene kriterijske funkcije [31],[39],[97]. Kriterijska funkcija zagotavlja optimalnost rešitve in je niz matematičnih izrazov ter pogojev, ki so lahko podani z logičnimi relacijami ali preprostimi pravili. Določitev kriterijske funkcije, bomo obravnavali v naslednjem poglavju, kjer se bomo še posebej osredotočili na optimizacijski algoritem diferencialna evolucija [103].

5 Optimizacija kriterijev robustnosti s prostimi parametri

Predstavitev problematike robustnosti je velikokrat niz kompleksnih kriterijev, ki velikokrat med seboj niso povezani ali so si nasprotujoči. Prav nepovezljivost, kontradiktornost ter delno tudi kompleksnost kriterijev, so glavne omejitve analitičnih pristopov reševanj. V moderni teoriji in še posebej izrazito v robustni teoriji vodenja, so optimizacijske tehnike v večini primerov najprimerjense orodja za doseg rešitve problema. Mnoge robustne tehnike tako rešitev dosežejo z različnimi optimizacijskimi tehnikami, kot so optimizacija z rojem delcev [69], genetski algoritmi [15],[16],[48], *LMI*, *LP*, *NLP* optimizacijskimi tehnikami na osnovi pretvorbe problema v konveksni [23],[36],[51] ali nekonveksni optimizacijski prostor [52].

5.1 Optimizacijske tehnike

Postopek optimizacije je iskanje najboljše rešitve danega problema v množici možnih rešitev. Optimizacijske tehnike so v splošnem iskanje množice parametrov, ki minimizirajo ali maksimirajo kriterijsko funkcijo. Vrednost kriterijske funkcije je pri danih parametrih merilo optimalnosti rešitve. Optimizacijske tehnike v osnovi ločimo po lastnosti kriterijske funkcije, katere delimo na konveksne in nekonveksne. Konveksne optimizacijske tehnike operirajo s konveksnimi kriterijskimi funkcijami in zajemajo konveksno množico parametrov. Za strogo konveksne funkcije velja, da je vsak lokalni optimum hkrati globalni optimum funkcije, pri čemer obstaja samo ena optimalna rešitev [17]. Za konveksne optimizacijske tehnike obstaja množica

zanesljivih in učinkovitih orodij, kot so; metoda najmanjših kvadratov, linearno programiranje, kvadratično programiranje in druge. Nekonveksne optimizacijske tehnike operirajo s kriterijskimi funkcijami, ki ne izpolnjujejo lastnosti konveksnosti. Takšne kriterijske funkcije lahko imajo več lokalnih ekstremov ali jih sploh nimajo. Reševanje nekonveksnih problemov je bistveno zahtevnejše in se pogosto rešujejo s preiskovalnimi algoritmi na osnovi metaheurističnih računskih tehnik. V metaheuristične računske tehnike uvrščamo evolucijske algoritme in optimizacijske tehnike z roji delcev. Mnogo optimizacijskih problemov v teoriji vodenja ni moč preoblikovati in reševati s konveksnimi optimizacijskimi tehnikami, zato je velikokrat potrebno uporabiti preiskovalne optimizacijske tehnike, katere omogočajo širši nabor kriterijev različnih lastnosti.

Optimizacije tehnike glede na lastnosti ter način operiranja s kriterijsko funkcijo razdelimo na,

- iskalne metode,
- gradientne metode,
- Newtonove metode.

Iskalne metode za ocenitev optimalnosti uporabljajo le vrednost kriterijske funkcije in so tako primeren za nelinearne, linearne, konveksne, nekonveksne, neodvedljive kriterijske funkcije. Gradientne in Newtonove metode za doseg optimalnosti rešitve uporabljajo odvode kriterijske funkcije, za katere mora veljati, da so zvezne in odvedljive funkcije. Metode so primerne za konveksne optimizacijske probleme. V splošnem velja, da gradientne in Newtonove metode hitreje konvergirajo od iskalnih metod, toda so neuporabne za nezvezne kriterijske funkcije ali kriterijske funkcije z robnimi pogoji.

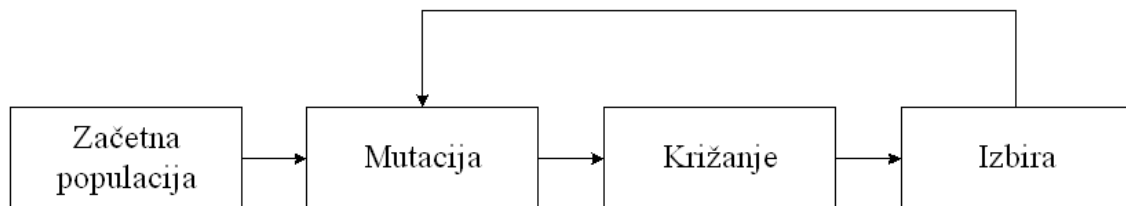
V disertaciji, se bomo osredotočili izključno na iskalno metodo na osnovi evolucijskega algoritma – Diferencialna evolucija. Kriterijska funkcija za doseg optimalne rešitve s polinomom $\Pi(\omega^2, d, \tilde{r}_z, \tilde{l}_w, W(s))$ je kvazi konveksna, saj je konveksna le na intervalu od $[-\infty, 0)$ in $(0, \infty]$. Kriterijska funkcija bo ob glavnem kriteriju vsebovala tudi množico robnih pogojev in pomožnih kriterijev. Večkriterijsko

optimiranje je smiselno uporabiti ob pogoju $\tilde{p} \geq 2$, drugače v primeru $\tilde{p} = 1$ večkriterijsko optimiranje nadomestimo s preprostim linearnim preiskovalnim algoritmom po principu bisekcije.

5.2 Diferencialna evolucija - DE

Diferencialna evolucija - *DE* je iskalni stohastični algoritem minimizacije kriterijske funkcije, avtorjev R. Storn-a in K. Price-a [86],[87]. Algoritem diferencialne evolucije spada med genetske algoritme - *GA*, saj vsebuje vse tri značilne operatorje *GA*, kot so; mutacija, križanje in selekcija. Algoritem *DE* velja za enega najhitrejših genetskih algoritmov in je v hitrosti konvergence skoraj primerljiv z nekaterimi gradientnimi in Newtonovimi metodami. Posebnost diferencialne evolucije je princip mutacije z uteženo diferenco naključnih osebkov populacije. Prav drugačen princip mutacije *DE* pripomore k izboljšanju hitrosti konvergence ter doseganju natančnejšega optimuma kriterijske funkcije [17],[71].

Osnovni potek evolucijskih algoritmov [17].



Slika 5-1 Potek evolucijskih algoritmov

5.2.1 Mutacija

Algoritem *DE* uporablja množico različnih operatorjev mutacije. Najpogosteje uporabljena operatorja mutacije sta,

$$m = X_{r_1,G} + F(X_{r_2,G} - X_{r_3,G}), \quad (5.1)$$

$$m = X_{i,G} + \lambda(X_{best,G} - X_{i,G}) + F(X_{r_2,G} - X_{r_3,G}). \quad (5.2)$$

Kjer so,

m – mutirani vektor,

G – trenutna generacija,

$X_{r_1,G}$ – prvi naključno izbrani vektor parametrov generacije G ,

$X_{r_2,G}$ – drugi naključno izbrani vektor parametrov generacije G ,

$X_{r_3,G}$ – tretji naključno izbrani vektor parametrov generacije G ,

$X_{i,G}$ – vektor populacije, kateri je v procesu mutacije iz generacije G ,

$X_{best,G}$ – najboljši vektor parametrov v generaciji G ,

F – utežnostni vektor difference dveh naključno izbranih $X_{r_2,G}$ in $X_{r_3,G}$,

λ – utežnostni vektor za določitev hitrost konvergence.

Operatorji mutacije pri *DE* se razlikujejo in so prosto nastavljivi v odvisnosti od zahtevnosti in lastnosti optimizacijskega problema. Glavna značilnost operatorja mutacije *DE*, je utežena razlika naključnih osebkov trenutne populacije.

5.2.2 Križanje

Operator križanja je enak, kot pri ostalih evolucijskih algoritmi in *GA*,

$$t_j = \begin{cases} m_j & \text{za } j = n, n+1, n+2, \dots, n+L \\ (X_{i,G})_j & \text{drugače} \end{cases}. \quad (5.3)$$

Kjer so,

t_j – vektor križanja,

m_j – mutirani vektor,

$(X_{i,G})_j$ – vektor iz populacije G ,

n, L – naključno število.

5.2.3 Selekcija

Selekcija algoritma *DE* se izvaja enako, kot pri ostalih *GA*, na osnovi vrednosti kriterijske funkcije. Kriterijsko funkcijo vrednotimo na osnovi trenutne populacije G in z operacijo selekcija tvorimo novo generacijo G_{+1} .

$$X_{i,G_{+1}} = \begin{cases} X_{i,G} & \text{če je } f(X_{i,G}) > f(t) \\ t & \text{drugače} \end{cases} . \quad (5.4)$$

Kjer so,

$X_{i,G_{+1}}$ – i -ti vektor parametrov nove generacije G_{+1} ,

$X_{i,G}$ – i -ti vektor parametrov generacije G ,

$f(t)$ – vrednost kriterijske funkcije mutiranega osebka t ,

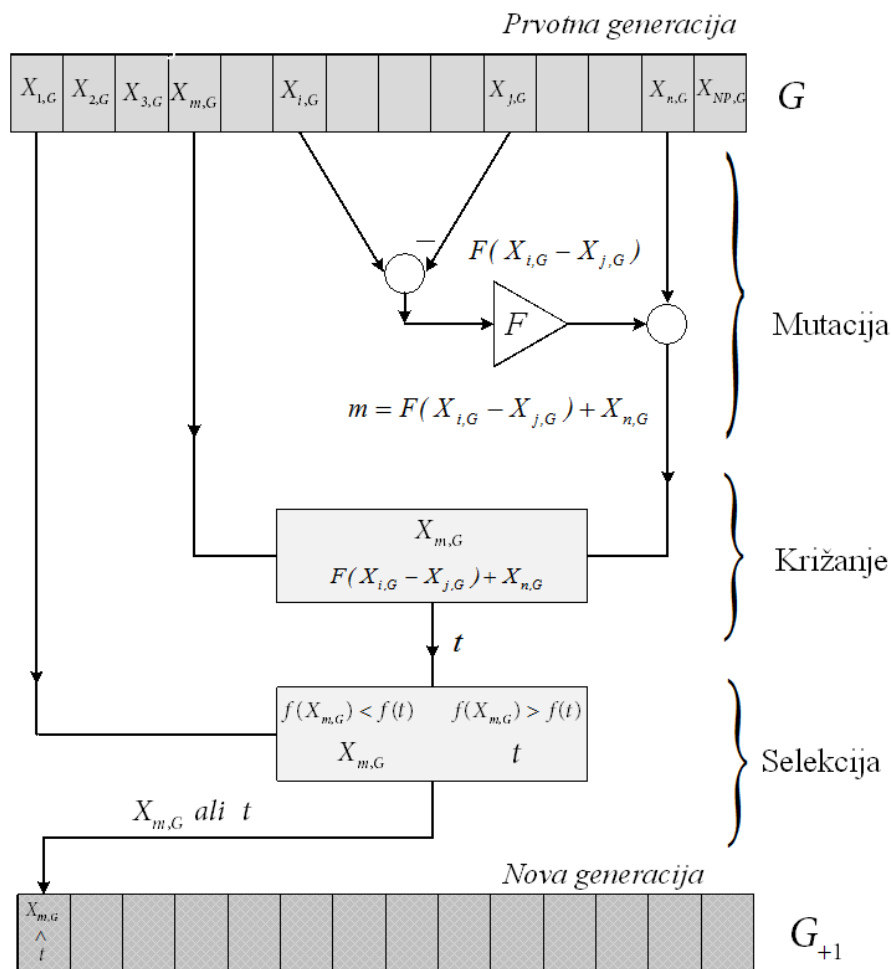
$f(X_{i,G})$ – vrednost kriterijske funkcije mutiranega osebka $X_{i,G}$,

t – testni vektor po procesu mutacije in križanja.

5.2.4 Algoritem diferencialne evolucije

Algoritem diferencialne evolucije operira nad populacijo osebkov $X_{i,G}$, ki tvorijo trenutno generacijo G , Slika 5-2. Število osebkov generacije NP je izbrano na začetku zagona algoritma in se tekom izvajanja algoritma *DE* ne spreminja. Z določitvijo števila osebkov NP vplivamo na hitrost izvajanja algoritma ter hkrati zagotovimo

primerno razpršenost vektorjev parametrov, kar zmanjša verjetnost ujetja v lokalni optimum. Začetna populacija osebkov G_0 je izbrana naključno, glede na interval za posamezen parameter vektorja parametrov X_{i,G_0} . Prvi korak izvajanja *DE* je naključna izbira dveh osebkov $X_{1,G}$ in $X_{2,G}$ populacije G , katerih se diferenca utežna s koeficientom F prišteje tretje naključno izbranemu osebk $X_{3,G}$; operator mutacije. Naslednji korak algoritma je križanje mutiranega vektorja s četrtim naključno izbranim osebk $X_{4,G}$ iz populacije G . Novo generiran osebek t se z vrednostjo kriterijske funkcije $f(t)$ primerja s petim naključno izbranim osebk $X_{5,G}$ ter njegovo vrednostjo kriterijske funkcije $f(X_{5,G})$. V novo generacijo osebkov napreduje osebek, ki daje optimalnejšo vrednost kriterijske funkcije $f(X)$. Algoritem se izvaja tako dolgo, dokler ne doseže optimuma kriterijske funkcije $f(X_{opt})$ in vektor parametrov X_{opt} je optimalna rešitev danega problema.



Slika 5-2 Potek algoritma diferencialna evolucija –DE

5.3 Kriterijska funkcija

Kriterijska funkcija je merilo optimalnosti danega problema in jo določimo na osnovi predhodnega poznavanja problematike ter zastavljenih ciljev optimizacije [65]. Struktura ter smotrna izbira kriterijske funkcije, vpliva na hitrost ter pravilnost rezultatov optimizacije. Za kriterijsko funkcijo optimizacije pogojev robustnosti (4.34), (4.35), (4.36) uporabimo spektralne polinome $\Pi(\omega^2)$ s prostimi parametri koeficientov regulatorja \tilde{r}_z, \tilde{l}_w . Optimalna rešitev danega problema je maksmizacija minimuma polinoma $\Pi(\omega^2)$ z danim intervalom prostih parametrov \tilde{r}_z, \tilde{l}_w . Nadalje bomo predstavili spektralne polinome za vsak pogoj posebej ter podali interval parametrov r_o, l_o , kot pomožni kriterij suboptimalnih rešitev pogojev (4.34), (4.35), (4.36).

5.3.1 Spektralni polinom $\Pi_M(\omega^2, \tilde{p})$ za multiplikativni model odstopanj ter prostimi parametri \tilde{p}

Zaprto znančni sistem je robustno stabilen z multiplikativnim modelom odstopanj in utežjo $W_M(s)$, če je izpolnjen pogoj (4.31). Pogoj zapišemo po izrazu (4.36), kjer je utež $W_M(s) = W_3(s)$,

$$\left\| W_M \frac{BL(d, \tilde{p})}{C} \right\|_{\infty} < 1. \quad (5.5)$$

Utež $W_M(s)$ predstavimo, kot

$$\begin{aligned} W_M(s) &= W_{bm}(s)W_{am}^{-1}(s), \\ &= \left(w_{bm_s} s^g + \dots + w_{bm_0} \right) \left(w_{am_s} s^g + \dots + w_{am_0} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Kjer je pogoj robustnosti,

$$\left\| \frac{W_{bm}BL(d, \tilde{p})}{W_{am}C} \right\|_{\infty} < 1. \quad (5.7)$$

Določimo spektralni polinom $\Pi_M(\omega^2, \tilde{p})$ po izrazih (4.48), (4.49),

$$\begin{aligned} \Pi_M(s, \tilde{p}) = & C(s)C(-s)W_{am}(s)W_{am}(-s) \\ & - B(s)B(-s)L(s, \tilde{p})L(-s, \tilde{p})W_{bm}(s)W_{bm}(-s), \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\Pi_M(\omega^2, \tilde{p}) = CW_{am}(\omega^2) - BLW_{bm}(\omega^2, \tilde{p}). \quad (5.9)$$

Iz polinoma $\Pi_M(\omega^2, \tilde{p})$ lahko določimo interval parametra l_0 , za zagotovitev suboptimlanosti pogoja (5.7),

$$\begin{aligned} |b_0 l_0 w_{bm_0}| & \leq |c_0 w_{am_0}|, \\ |l_0| & \leq |c_0 w_{am_0}| |b_0 w_{bm_0}|^{-1}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Iz lastnosti Hurwitz-evih polinomov ter zagotovitve suboptimalnosti kriterija (5.7) je interval parametra l_0 ,

$$0 < l_0 \leq |c_0 w_{am_0}| |b_0 w_{bm_0}|^{-1}. \quad (5.11)$$

5.3.2 Spektralni polinom $\Pi_A(\omega^2, \tilde{p})$ za aditivnim model odstopanj ter prostimi parametri \tilde{p}

Aditivni model odstopanj in pogoj (4.35), kjer velja $W_A(s) = W_2(s)$,

$$\left\| W_A \frac{AL(d, \tilde{p})}{C} \right\|_{\infty} < 1. \quad (5.12)$$

Utež $W_A(s)$ zapišemo, kot

$$W_A(s) = W_{ba}(s)W_{aa}^{-1}(s), \quad (5.13)$$

$$= \left(w_{ba_g} s^g + \dots + w_{ba_0} \right) \left(w_{aa_g} s^g + \dots + w_{aa_0} \right)^{-1}.$$

Pogoj (5.12) z utežjo $W_A(s)$ (5.13),

$$\left\| \frac{W_{ba} AL(d, \tilde{p})}{W_{aa} C} \right\|_{\infty} < 1. \quad (5.14)$$

Spektralni polinom $\Pi_A(\omega^2, \tilde{p})$ po izrazih (4.48),(4.49),

$$\Pi_A(s, \tilde{p}) = C(s)C(-s)W_{aa}(s)W_{aa}(-s) \quad (5.15)$$

$$- A(s)A(-s)L(s, \tilde{p})L(-s, \tilde{p})W_{ba}(s)W_{ba}(-s),$$

$$\Pi_A(\omega^2, \tilde{p}) = CW_{aa}(\omega^2) - ALW_{ba}(\omega^2, \tilde{p}). \quad (5.16)$$

Interval suboptimalnosti pogoja (5.12) z upoštevanjem lastnosti Hurwitz-evih polinomov,

$$|b_0 l_0 w_{ba_0}| \leq |c_0 w_{aa_0}|, \quad (5.17)$$

$$|l_0| \leq |c_0 w_{aa_0}| |b_0 w_{ba_0}|^{-1},$$

$$0 < l_0 \leq |c_0 w_{aa_0}| |b_0 w_{ba_0}|^{-1}. \quad (5.18)$$

5.3.3 Spektralni polinom $\Pi_1(\omega^2, \tilde{p})$ za inverzni model odstopanj ter prostimi parametri \tilde{p}

Inverzni model odstopanj in pogoj (4.34), kjer velja $W_I(s) = W_1(s)$,

$$\left\| W_I \frac{AR(d, \tilde{p})}{C} \right\|_{\infty} < 1. \quad (5.19)$$

Utež $W_I(s)$,

$$\begin{aligned} W_I(s) &= W_{bi}(s)W_{ai}^{-1}(s), \\ &= \left(w_{bi_g} s^g + \dots + w_{bi_0} \right) \left(w_{ai_g} s^g + \dots + w_{ai_0} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Pogoj (5.12) in utež $W_I(s)$ (5.20),

$$\left\| \frac{W_{bi} AR(d, \tilde{p})}{W_{ai} C} \right\|_{\infty} < 1. \quad (5.21)$$

Spektralni polinom $\Pi_1(\omega^2, \tilde{p})$ po izrazih (4.48),(4.49),

$$\begin{aligned} \Pi_1(s, \tilde{p}) &= C(s)C(-s)W_{ai}(s)W_{ai}(-s) \\ &\quad - A(s)A(-s)R(s, \tilde{p})R(-s, \tilde{p})W_{bi}(s)W_{bi}(-s), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\Pi_1(\omega^2, \tilde{p}) = CW_{ai}(\omega^2) - ARW_{bi}(\omega^2, \tilde{p}). \quad (5.23)$$

Interval suboptimlanosti pogoja (5.21),

$$\begin{aligned} |a_0 r_0 w_{bi_0}| &\leq |c_0 w_{ai_0}|, \\ |r_0| &\leq |c_0 w_{ai_0}| |a_0 w_{bi_0}|^{-1}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

Z upoštevanjem lastnosti Hurwitz-evih polinomov določimo interval parametra

r_0 ,

$$0 < r_0 \leq |c_0 w_{am_0}| |a_0 w_{bm_0}|^{-1}. \quad (5.25)$$

Dodatni kriterije za močno stabilizirane zaprto zanke sisteme in koeficient r_0 , v primeru prostega parametra \tilde{l}_0 , velja pogoj $r_0 > 0$. Dodatni pogoj je moč izpeljati iz sistema linearnih enačb in polinomske enačbe (4.14), kjer je $a_0 r_0 + b_0 l_0 = c_0$.

$$r_0 = \frac{c_0 - b_0 l_0}{a_0} > 0 \quad (5.26)$$

V primeru, če sta koeficienta $a_0, b_0 > 0$, potem je dopustna vrednost \tilde{l}_0 za zagotovitev $r_0 > 0$,

$$\tilde{l}_0 < \frac{c_0}{b_0}. \quad (5.27)$$

V primeru, če sta koeficienta $a_0, b_0 < 0$ velja pogoj,

$$\tilde{l}_0 < -\frac{c_0}{|b_0|}. \quad (5.28)$$

V primeru, če je koeficienta $a_0 < 0$ in $b_0 > 0$ velja pogoj,

$$\tilde{l}_0 > \frac{c_0}{b_0}. \quad (5.29)$$

Če sta koeficienta $a_0 > 0$ in $b_0 < 0$ velja pogoj,

$$\tilde{l}_0 > -\frac{c_0}{|b_0|}. \quad (5.30)$$

V primeru, da izberemo prosti parameter \tilde{r}_0 , je za močno stabilizirane sisteme potrebno upoštevati le pogoj (5.25).

Podobno, kot za posamezne kriterije, lahko spektralne polinoma določimo za kriterij (4.37), kjer vpeljemo uteži $V_1(s)$, $V_2(s)$ in $V_3(s)$. Posamezni spektralni polinomi matrike T_{zw} so podobni (5.9), (5.16), (5.23), kjer enako, kot utež $W(s)$ vpeljemo utež $V(s)$. Uporabimo analogije $\Pi_A(\omega^2, \tilde{p}) \approx \Pi_{AT11}(\omega^2, \tilde{p})$, kjer spektralnemu polinomu $\Pi_A(\omega^2, \tilde{p})$ dodamo utež $W_A(s) = W_1(s)$ in $V_1(s)$, $\Pi_{AT21}(\omega^2, \tilde{p})$ z utežmi $W_2(s)$ in $V_1(s)$, $\Pi_{AT12}(\omega^2, \tilde{p})$ z utežmi $W_1(s)$ in $V_2(s)$. Enako velja za spektralne polinome $\Pi_{MT11}(\omega^2, \tilde{p})$ in $\Pi_{IT11}(\omega^2, \tilde{p})$ itd.. Matrika spektralnih polinomov $\Pi_{zw}(\omega^2, \tilde{p})$,

$$\Pi_{zw}(\omega^2, \tilde{p}) = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(\omega^2, \tilde{p}) & \Pi_{IT12}(\omega^2, \tilde{p}) & \Pi_{IT13}(\omega^2, \tilde{p}) & \Pi_{IT14}(\omega^2, \tilde{p}) \\ \Pi_{MT21}(\omega^2, \tilde{p}) & \Pi_{22}(\omega^2, \tilde{p}) & \Pi_{AT23}(\omega^2, \tilde{p}) & \Pi_{AT24}(\omega^2, \tilde{p}) \\ \Pi_{31}(\omega^2, \tilde{p}) & \Pi_{IT32}(\omega^2, \tilde{p}) & \Pi_{MT33}(\omega^2, \tilde{p}) & \Pi_{MT34}(\omega^2, \tilde{p}) \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Spektralni polinomi $\Pi_{11}(\omega^2, \tilde{p})$, $\Pi_{31}(\omega^2, \tilde{p})$, $\Pi_{22}(\omega^2, \tilde{p})$, se ne navezujejo na pogoje z modeli odstopanj, ampak jih je potrebno določiti posebej.

5.3.4 Določitev kriterijske funkcije

Kriterijsko funkcijo določimo na osnovi spektralnih polinomov $\Pi_M(\omega^2, \tilde{p})$, $\Pi_A(\omega^2, \tilde{p})$, $\Pi_I(\omega^2, \tilde{p})$ ter s pripadajočimi intervali parametrov r_0 in l_0 pogojev (5.11), (5.18), (5.28). Za izhodišče optimizacije lahko izberemo posamezni kriterij (5.7), (5.14), (5.21) ali kot izhodišče izberemo problem mešane občutljivosti, kjer je celotna kriterijska funkcija kompozitum posameznih kriterijev. Posamezne kriterijske funkcije zapišemo, kot

$$f_1 = \max \left(\min_{\omega^2} \left(\Pi_M(\omega^2, \tilde{p}) \right) \right), \quad \forall r_0 > 0 \wedge 0 < l_0 \leq \left| c_0 w_{am_0} \right| \left| b_0 w_{bm_0} \right|^{-1}, \quad (5.32)$$

$$f_2 = \max \left(\min_{\omega^2} \left(\Pi_A(\omega^2, \tilde{p}) \right) \right), \quad \forall r_0 > 0 \wedge 0 < l_0 \leq \left| c_0 w_{aa_0} \right| \left| b_0 w_{ba_0} \right|^{-1}, \quad (5.33)$$

$$f_3 = \max\left(\min_{\omega^2}(\Pi_I(\omega^2, \tilde{p}))\right), \quad 0 < r_0 \leq |c_0 w_{am_0}| |a_0 w_{bm_0}|^{-1}. \quad (5.34)$$

Kriterijska funkcija za problem mešane občutljivosti,

$$f = \frac{1}{3} \left(k_1 \max\left(\min_{\omega^2}(f_1)\right) + k_2 \max\left(\min_{\omega^2}(f_2)\right) + k_3 \max\left(\min_{\omega^2}(f_3)\right) \right), \quad (5.35)$$

$$0 < r_0 \leq |c_0 w_{am_0}| |a_0 w_{bm_0}|^{-1}.$$

Uteži k_1, k_2, k_3 , so določene glede na pomembnost posameznega kriterija in velja $k \in [0 \ 1]$.

Optimizacijska matrika spektralnih polinomov $\Pi_{zw}(\omega^2, \tilde{p})$ pogoja (3.48),

$$f_{zw} = \min \left(\max_{\text{vrstice}} \left(\left[\begin{array}{l} \max\left(\min(\Pi_{I1}(\omega^2, \tilde{p}))\right)^2 + \max\left(\min(\Pi_{IT12}(\omega^2, \tilde{p}))\right)^2 + \max\left(\min(\Pi_{IT13}(\omega^2, \tilde{p}))\right)^2 + \max\left(\min(\Pi_{IT14}(\omega^2, \tilde{p}))\right)^2 \\ \max\left(\min(\Pi_{MT21}(\omega^2, \tilde{p}))\right)^2 + \max\left(\min(\Pi_{22}(\omega^2, \tilde{p}))\right)^2 + \max\left(\min(\Pi_{AT23}(\omega^2, \tilde{p}))\right)^2 + \max\left(\min(\Pi_{AT24}(\omega^2, \tilde{p}))\right)^2 \\ \max\left(\min(\Pi_{31}(\omega^2, \tilde{p}))\right)^2 + \max\left(\min(\Pi_{IT32}(\omega^2, \tilde{p}))\right)^2 + \max\left(\min(\Pi_{MT33}(\omega^2, \tilde{p}))\right)^2 + \max\left(\min(\Pi_{MT34}(\omega^2, \tilde{p}))\right)^2 \end{array} \right] \right) \right). \quad (5.36)$$

5.4 Lipatov stabilnostni kriterij

Lipatov stabilnostni kriterij podaja dva teorema stabilnosti [10],[11], katera sta zadostna pogoja za test stabilnosti\nestabilnosti za poljubne odprto ali zaprto znančne sisteme. Lipatov kriterij določa lego ničel na osnovi koeficientov danega polinoma. Kriterij bomo uporabili za testiranje stabilnosti regulatorja $K(s)$ na osnovi koeficientov polinoma $R(s)$ v procesu optimizacije z *DE*. Kriterij bo uporabljen, kot robni pogoj ob pogoju (5.25), za zagotovitev močno stabiliziranih zaprto znančnih sistemov. Z uporabo kriterija ni potrebno preverjati stabilnosti regulatorja $K(s)$ z izračunom ničel polinoma $R(s)$ ali drugimi kompleksnejšimi metodami, kot so; Hurwitz-u ali Routh-u kriterij. Test uporabimo samo v primeru, če so vsi koeficienti polinoma $R(s)$ pozitivni in če je pogoj sinteze robustni regulator $K(s)$.

Polinom imenovalca $R(s)$,

$$R(s) = r_r s^j + r_{r-1} s^{j-1} + \dots + r_1 s + r_0.$$

Lipatov stabilnostni indeks λ_i ,

$$\lambda_i = \frac{r_{i-1} r_{i+2}}{r_i r_{i+1}}. \quad (5.37)$$

Teorem 17 Polinom $R(s)$ ima ničle v $\text{Res} < 0$, če za vse $i, 2 \leq i \leq j - 2$, velja pogoj $\lambda_i < 1$.

Teorem 18 Polinom $R(s)$ ima ničle v $\text{Res} < 0$, če za vse $i, 2 \leq i \leq j - 2$, velja pogoj $\lambda_{i-1} \lambda_i < Q_{ni}$, kjer je Q_{ni} ,

$$Q_{ni} = \frac{\left(j-1 + \frac{(-1)^{j+i} - 1}{2} \right) \left(1 + \frac{(-1)^i - 1}{2} \right)}{\left(j-1 + \frac{(-1)^{j+i} + 3}{2} \right) \left(1 + \frac{(-1)^i + 3}{2} \right)}. \quad (5.38)$$

6 Avtomatiziran postopek načrtovanja robustnega regulatorja

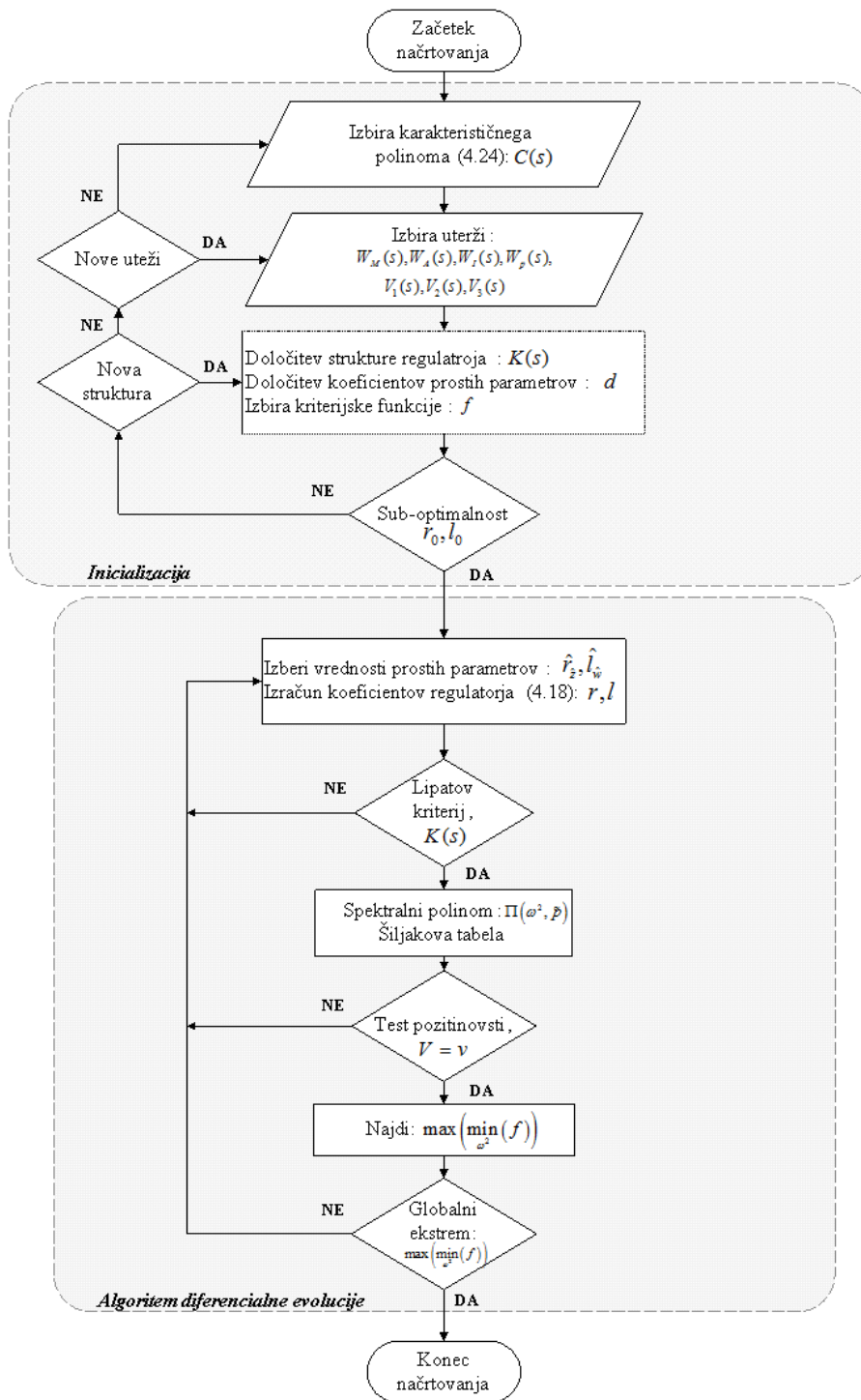
Predstavljeno metoda načrtovanja robustnega regulatorja z robustno tehniko pomikanja polov ter optimizacijo performančnih kriterijev ali kriterijev robustnosti, je računsko zahteven postopek. V ta namen uporabimo programski paket Matlab, v katerem izvedemo avtomatiziran postopek načrtovanja robustnega regulatorja. Sintetiziran regulator $K(s)$ je rezultat optimizacije z algoritmom DE , na osnovi določene lege zaprto zračnih polov $C(s)$, izbire prostih parametrov \tilde{p} , izbire uteži $W(s)$ in/ali $V(s)$ ter izbrane kriterijske funkcije.

Načrtovanje robustnega regulatorja $K(s)$ za nominalni model $P_0(s)$ poteka po naslednjih korakih,

1. Izbira karakterističnega polinoma $C(s)$.
2. Določitev vrednotenja robustnosti zaprto zračnega sistema ter izbira uteži $W(s)$ in/ali $V(s)$.
3. Določitev strukture regulatorja glede na izbran $C(s)$ in $P_0(s)$ ter postavitev prostih parametrov d v polinomu $R(s)$ in/ali $L(s)$.
4. Preveri se pogoje sub-optimalnosti rešitve ter določi dopustni interval koeficientov r_0, l_0 po pogojih (5.11), (5.18), (5.25).
5. Zagon optimizacijskega algoritma diferencialne evolucije,
 - a. Izbira vrednosti prostih parametrov \tilde{r}_z, \tilde{l}_w .
 - b. Izračun koeficientov regulatorja (4.18).
 - c. Preverjanje stabilnosti $K(s)$ z Lipatovim kriterijem (5.37), (5.38).
 - d. Preverjanje pozitivnosti spektralnih polinomov $\Pi(\omega^2, \tilde{p})$ - Šiljakov kriterij (4.52).

- e. Iskanje globalnega minimum kriterijske funkcije.
- 6. Konec optimizacije.

Diagram poteka celotnega optimizacijskega algoritma z *DE*.



Slika 6-1 Diagram poteka načrtovanja optimalnega regulatorja $K(s)$

Diagram poteka Slika 6-1 prikazuje avtomatiziran postopek načrtovanja robustnega regulatorja. Postopek načrtovanja je razdeljen na dva sklopa. Prvi sklop je inicializacija in predstavlja določitev vhodnih parametrov glede na postavljene zahteve vodenja. Drugi del predstavlja potek optimizacije z DE ter strukturo celotne kriterijske funkcije.

Odločitveni blok *sub-optimalnost* Slika 6-1 na koncu inicializacijskega bloka, predstavlja pogoj obstoja množice sub-optimlanih rešitev, glede na izbrane vhodne parametre optimizacije. Če pogoje (5.11), (5.18), (5.25) ni moč izpolniti, se je potrebno vrniti na začetek načrtovanja ter spremeniti strukturo regulatorja z drugim naborom prostih parametrov, izbrati nove uteži $W(s)$, $V(s)$ ali izbrati novi karakteristični polinom $C(s)$. Karakteristični polinom določimo s pomočjo Manabe forme (4.24). Začetek optimizacije se začne z izbiro vrednosti prostih parametrov \tilde{r}_z , \tilde{l}_w ter izračunom koeficientov regulatorja $K(s)$ po (4.18). Po izračunanih koeficientih $K(s)$ preverimo stabilnost polinoma $R(s)$ s pomočjo Lipatovega kriterija stabilnosti (5.37). Če je regulator $K(s)$ stabilen, določimo spektralni polinoma $\Pi(\omega^2, \tilde{p})$ ter izvedemo test pozitivnosti s Šiljakovim kriterijem (4.52). Stabilnost regulatorja preverimo samo v primeru če je izpolnjen pogoj P.I.P. in je podan načrtovalski kriterij za močno stabilizirani sistem. Po testu pozitivnosti določimo minimum spektralnega polinoma $\Pi(\omega^2, \tilde{p})$. Če je določen minimum polinoma $\Pi_1(\omega^2, \tilde{p})$ največji minimum vseh spektralnih polinomov $\Pi(\omega^2, \tilde{p})$ velja, da je regulator $K(s)$ optimalna rešitev problema, za dane kriterije z metriko norme $\|\cdot\|_\infty$.

7 Primer uporabe predlaganega postopka polinomske sinteze robustnega regulatorja

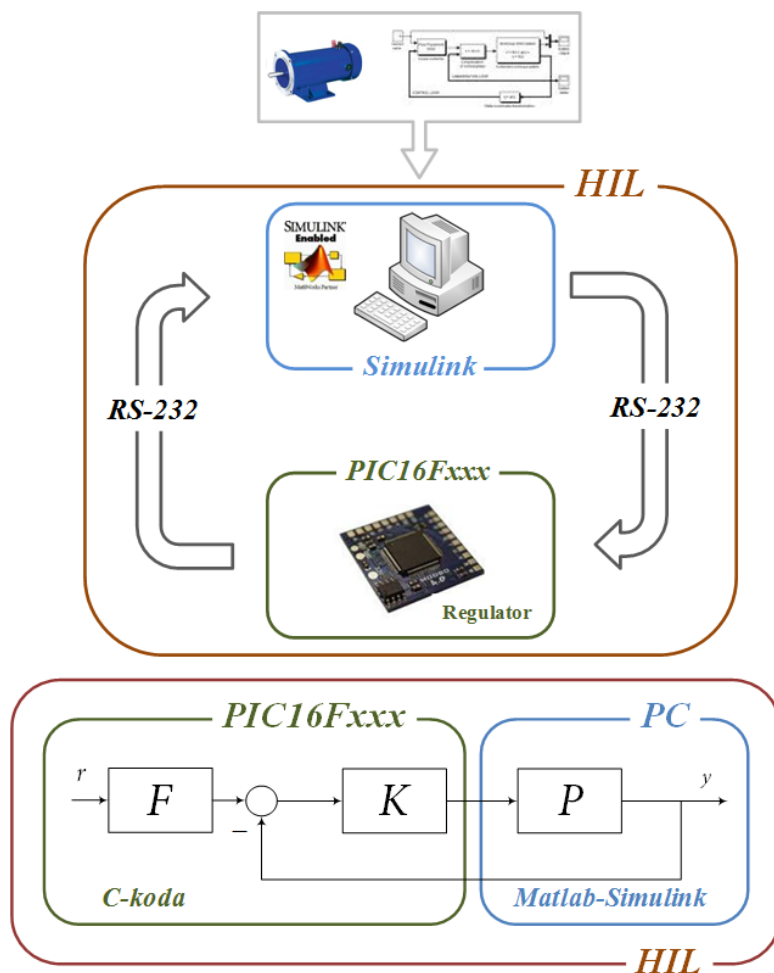
Za primer načrtovanja robustnega regulatorja izberemo servo sistem z električnim motornim pogonom. Elektromotor je pogost gradnik industrijskih naprav, avtonomnih sistemov in se vse bolj uveljavlja v avtomobilski industriji, kot pogon vozila, ki nadomešča tradicionalne motorje z notranjim izgorevanjem. Problem robustnega vodenja elektromotorja se pojavi na primer pri več segmentnem robotskem manipulatorju, kjer se parametri motorja lahko spreminjajo tudi do 100% od nominalne vrednosti. Geometrijska postavitev manipulatorja spreminja vztrajnostni moment in tako posledično vpliva na kvaliteto vodenja; prevelik prenehaj, oscilacije ali celo nestabilno delovanje zaprto znančnega sistema. Podoben problem se lahko pojavi tudi pri električnih vozilih, kjer se ob različnih obremenitvah vozila in zunanjih razmerah spreminjajo parametri objekta vodenja in s tem lastnosti zaprto znančnega sistema. Še posebej velik vpliv spremembe delovne točke je opazen pri sinhronih motorjih, kjer imamo nelinearno karakteristiko induktivnosti in medsebojen induktivnostjo navijta, kar se močno odraža v kvaliteti vodenja glede na izbrane zahteve. Za naveden primer bo izvedena sinteza robustnega regulatorja pozicije in hitrosti, po predstavljenem postopku polinomske sinteze v poglavju 4 in 5.

Za sistem želimo sintetizirati robustni servo regulator hitrosti in pozicije z BDC^{xvi} elektromotorjem. Sistem mora kompenzirati spremembo vztrajnosti bremena J na intervalu nominalne vrednosti $J_n < J < 10J_n$ ter s 30% negotovostjo parametrov motorja, ki so posledica obratovanja ter spremembe delovne točke sistema. Upoštevali bomo vpliv izhodne motnje, katero obravnavamo, kot vpliv spremembe bremena. Za izhodišče sinteze prevedemo problem v problem mešane občutljivosti. V postopek

^{xvi} BDC – ang. Brushed DC motor – enosmerni krtačni elektromotor

optimizacije vključimo dodatno utež $W_p(s)$ (4.38), s katero nadomestimo načrtovanje predfiltra $F(s)$ in tako zagotovimo preprostejšo strukturo regulatorja.

Izveden regulator je testiran z razvitim sistemom HIL^{xvii} [47], v sklopu z mikrokontrolerjem PIC 16Fxxx in programskim paketom Matlab-Simulink. Mikrokontroler komunicira s simulacijskim okoljem preko serijske komunikacije RS-232. Sintetiziran regulator je implementira na mikrokontrolerskem sistemu in teče v realnem času. Objekte vodenja $P_0(s)$, $P(s)$ simuliramo v Matlab-Simulinku in je sinhroniziran z mikrokontrolerskim sistemom, glede na izbran čas tipanja regulatorja. Simuliran objekt vodenja omogoča testiranje realnega algoritma vodenja na osnovi različnih scenarijev, vpliv motenj, šumov, deviacije objekta vodenja itd..



Slika 7-1 Sistem za testiranje algoritmov vodenja v realnem času

^{xvii} HIL – ang.. Hardware In the Loop – Sistem za testiranje realnih algoritmov vodenja z nadzorovanim simulacijskim okoljem

7.1 Sinteza robustnega regulatorja hitrosti

Nominalni model elektromotorja $P_{0hit}(s)$,

$$\frac{\omega(s)}{V_{nap}(s)} = P_{0hit}(s) = \frac{\frac{k_m}{LJ_n}}{s^2 + \left(\frac{R_L J_n + BL}{LJ_n}\right)s + \left(\frac{BR_L + k_m k_e}{LJ_n}\right)} = \frac{1}{2.7 \times 10^{-8} s^2 + 2.2 \times 10^{-4} s + 19.6 \times 10^{-3}},$$

$$\frac{\omega(s)}{V_{nap}(s)} = P_{0hitz}(s) = \frac{4431.6}{(s + 88.5)}. \quad (7.1)$$

Kjer so nominalni parametri motorja: upornost navitja R_L , induktivnost navitja L , indukcijska konstanta k_e , tokovna konstanta navora k_m , koeficient viskoznega trenja B in vztrajnost rotorja J_n . Linearni model motorja $P_{0hit}(s)$ sestavljata mehanska in električna komponenta. Za elektromehanske sisteme je značilna izrazita dominacija mehanske komponente in je velikokrat za sintezo regulatorja uporabljen reduciran model motorja. Po metodi redukcije s Hankle-vimi singularnimi vrednostmi na osnovi določitve dominantnega pola [60], zapišemo model znižanega reda $P_{0hitz}(s)$,

$$\frac{\omega(s)}{V_{nap}(s)} = P_{0hitz}(s) = \frac{4431.6}{(s + 88.5)}. \quad (7.2)$$

Odstopanje modela $P_{0hit}(s)$ in $P_{0hitz}(s)$, se pojavi pri višjih frekvencah v področju slabljenja, šele pod $-20dB$, kar dejansko nima velikega učinka na lastnosti karakteristike v področju ojačenja. Izberemo odstopanje vztrajnostnega momenta $J_n < J < 10J_n$ ter odstopanjem parametrov motorja v področju $\pm 30\%$ nominalnih vrednostih. Na osnovi podanih odstopanj določimo uteži $W_M(s)$ in $W_I(s)$, za multiplikativni in inverzni model odstopanj, poglavje 3 [60].

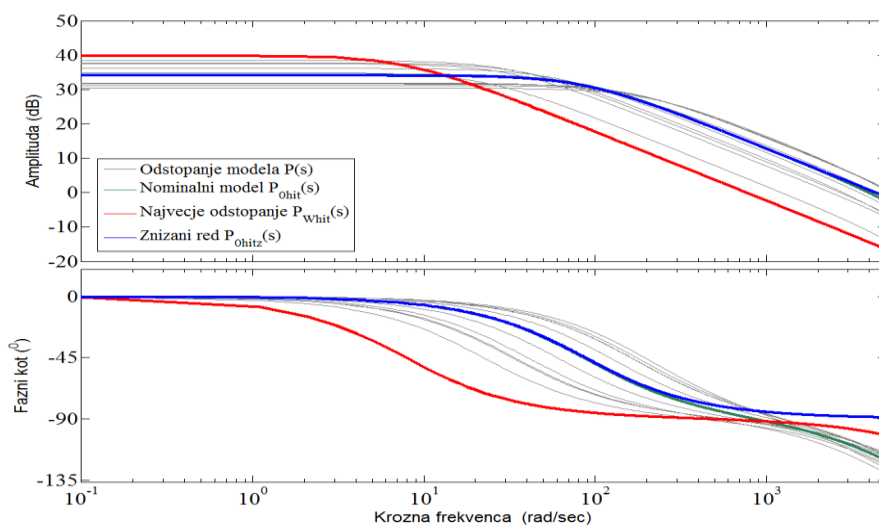
$$W_M(s) = \frac{s^4 + 1.2 \times 10^3 s^3 + 540 \times 10^3 s^2 + 1 \times 10^8 s + 8.1 \times 10^9}{0.2s^4 + 480s^3 + 432 \times 10^3 s^2 + 1.7 \times 10^8 s + 2.6 \times 10^{10}}, \quad (7.3)$$

$$W_I(s) = \frac{16.6s^2 + 97.2 \times 10^3 s + 83.8 \times 10^3}{s^2 + 4.4 \times 10^3 s + 168.1 \times 10^3}. \quad (7.4)$$

Nelinearno delovanje regulatorja hitrosti omejimo z utežjo $W_2(s)$, kjer izberemo utež tako, da ta ne preseže dovoljene napajalne napetosti motorja (24V),

$$W_2(s) = 24. \quad (7.5)$$

Prikaz frekvenčnega spektra odstopanj modela $P_{hit}(s)$, glede na spremenljive parametre R_L, L, B, J_n, k_m, k_e , (7.1).



Slika 7-2 Frekvenčna karakteristika motorja z odstopanjem parametrov

R_L, L, B, J_n, k_m, k_e za vodenje hitrosti

Kriteriji vodenja hitrostnega regulatorja $K_{hit}(s)$:

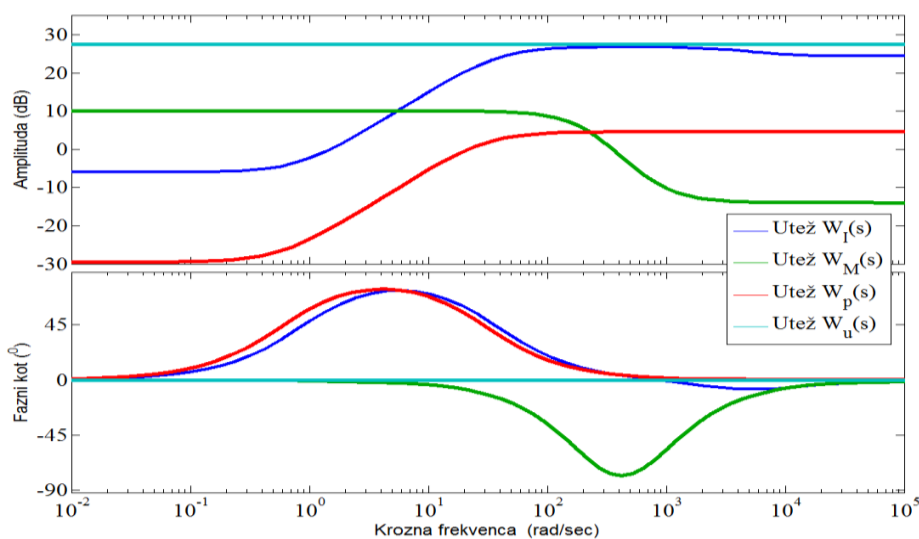
- Čas nastavitve: $t_n = 0.2s$,
- iznos prenihaja nominalnega modela: $M_p \leq 5\%$,
- iznos prenihaja najslabšega primera pri $J = 10J_n$: $M_p \leq 20\%$,
- stacionarni pogrešek: $e_s \leq 0.01\%$,
- odprava nizko frekvenčne izhodne motnje,

- robustna stabilnost za multiplikativni in inverzni model odstopanj (4.34), (4.36) – problem mešane občutljivosti,
- močno stabiliziran $P_{ohit}(s)$,
- območje reference $0 - 300rad/s$.

Utež $W_p(s)$ določim po priporočilih [60], glede na izbran stacionarni pogrešek e_s in iznos prenihaja M_p , za karakteristiko občutljivosti $S(s)$ (4.38),

$$W_p(s) = \frac{1.7s+1}{s+30}. \quad (7.6)$$

Frekvenčni spekter izbranih uteži $W_I(s)$, $W_M(s)$, $W_p(s)$, $W_u(s)$.



Slika 7-3 Uteži $W_I(s)$, $W_M(s)$, $W_p(s)$, $W_u(s)$

Glede na zahteve vodenja izberemo, strukturo regulatorja $K_{hit}(s)$ z dvema parametričnima rešitvama \tilde{r}_0 in \tilde{r}_1 . Parameter \tilde{r}_0 uporabimo za zagotovitev kriterija e_s , M_p in (4.38). S parametrom \tilde{r}_1 dodatno optimiramo kriterije robustne stabilnosti (4.34)-(4.36). Glede na objekt vodenja $P_{ohitz}(s)$ in upoštevanje pogoja (4.16), (4.19) določimo strukturo regulatorja $K_{hit}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$,

$$K_{hit}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1) = \frac{l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{r_2 s^2 + \tilde{r}_1 s + \tilde{r}_0}. \quad (7.7)$$

Glede na izbran t_n ter stopnjo $K_{hit}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$ po izrazu (4.24), (4.12) določimo zaprto zančni karakteristični polinom $C_{hit}(s)$,

$$C_{hit}(s) = s^3 + 62.5s^2 + 1953s + 2.4 \times 10^4 . \quad (7.8)$$

Po izrazu (5.25) določimo interval parametra za \tilde{r}_0 ,

$$0 \leq \tilde{r}_0 \leq 813.5 . \quad (7.9)$$

Glede na izbrano stacionarno odstopanje e_s , je dopustni interval \tilde{r}_0 ,

$$0 \leq \tilde{r}_0 \leq 2.7 . \quad (7.10)$$

Za kriterijsko funkcijo f izberemo problema mešane občutljivosti (5.35), kjer so izbrane uteži $k = [1,1,1]$.

Parametri diferencialne evolucije:

- Velikost populacije: 30,
- koeficient difference: $F = 0.7$,
- faktor križanja: $CR = 0.9$,
- strategija mutacije: $DE/rand/1/bin$,
- končna vrednost kriterijske funkcije $f = 0.33$ ali 40 ponovitev pri nespremenjeni vrednosti f .

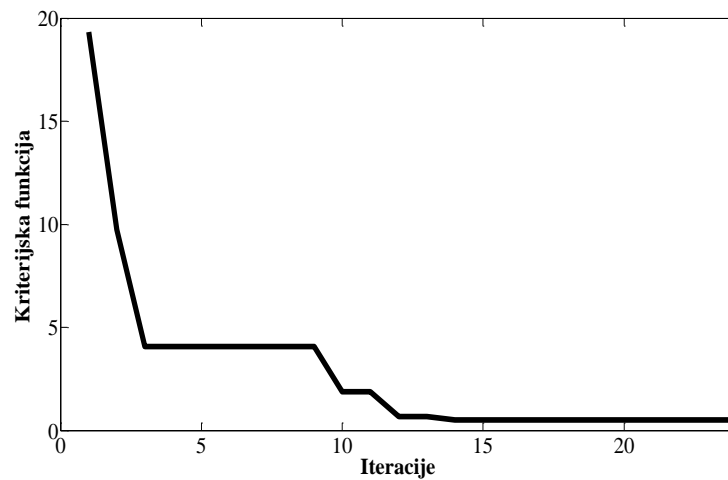
Rezultat optimizacije z diferencialno evolucijo in parametroma \tilde{r}_0 in \tilde{r}_1 ,

$$[\tilde{r}_0, \tilde{r}_1] = [7.7 \times 10^{-4}, 17.55] . \quad (7.11)$$

Regulator $K_{hit}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$,

$$K_{hit}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1) = \frac{0.018s^2 + 4.1s + 55.1}{s^2 + 17.55s + 7.7 \times 10^{-4}}. \quad (7.12)$$

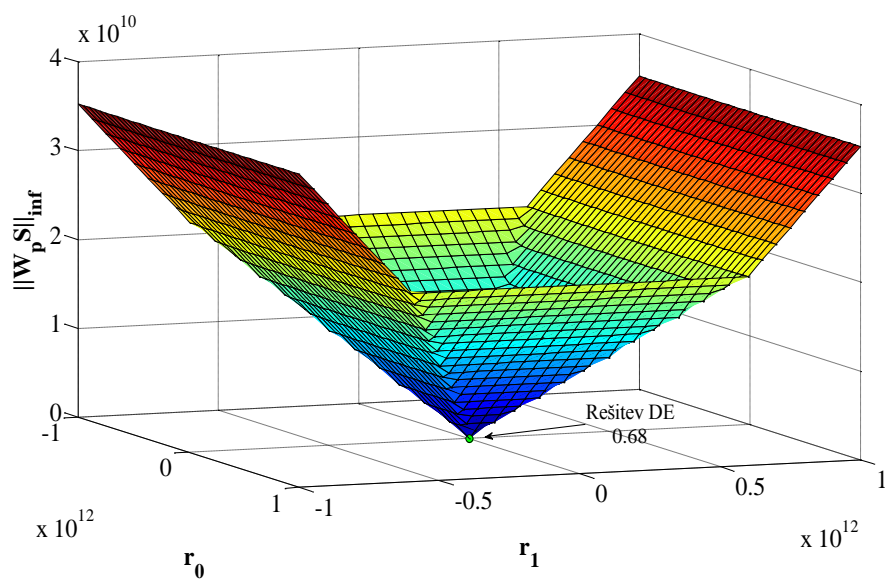
Potek kriterijske funkcije f , optimizacije z DE , kjer je končna vrednost kriterijske funkcije $f = 0.38$.



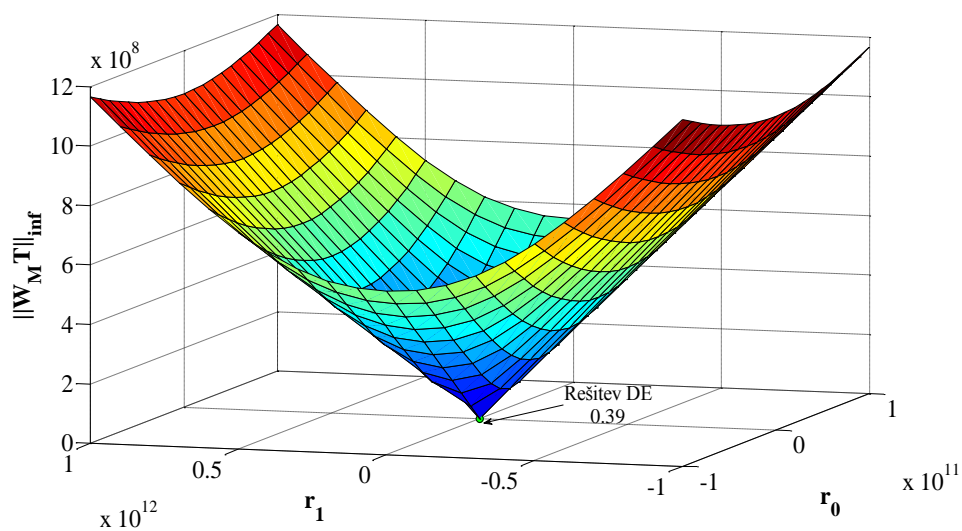
Slika 7-4 Potek kriterijske funkcije f , optimizacije regulatorja hitrosti $K_{hit}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$ z \tilde{r}_0 in \tilde{r}_1

Vrednost posameznih kriterijev (4.34)-(4.36), (4.38), po optimizaciji z DE
 $\|W_I S\|_\infty = 0.62$, $\|W_p S\|_\infty = 0.68$, $\|W_M T\|_\infty = 0.39$, $\|W_2 U\|_\infty = 0.12$.

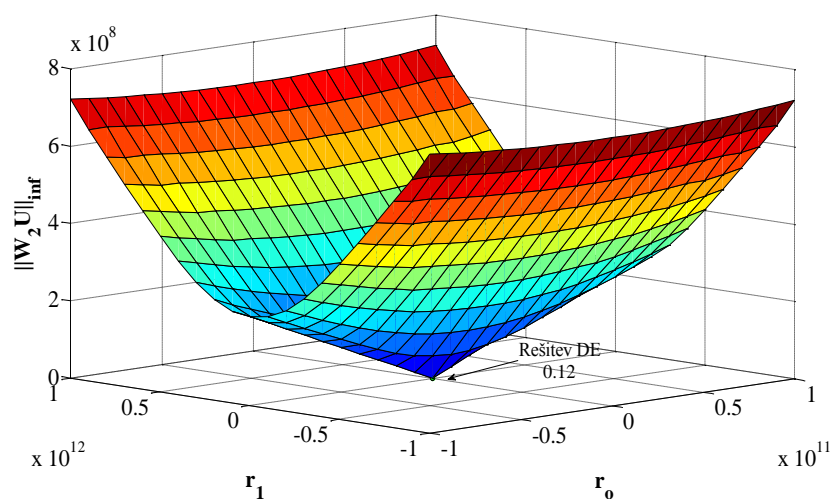
Grafični prikaz vrednosti norm $\|\cdot\|_\infty$, v odvisnosti od vrednosti prostih parametrov \tilde{r}_0 , \tilde{r}_1 , za posamezni kriterij $\|W_p S\|_\infty$, $\|W_M T\|_\infty$, $\|W_2 U\|_\infty$.



Slika 7-5 Vrednost pogoja $\|W_p S\|_\infty$ v odvisnosti od \tilde{r}_0, \tilde{r}_1



Slika 7-6 Vrednost pogoja $\|W_M T\|_\infty$ v odvisnosti od \tilde{r}_0, \tilde{r}_1

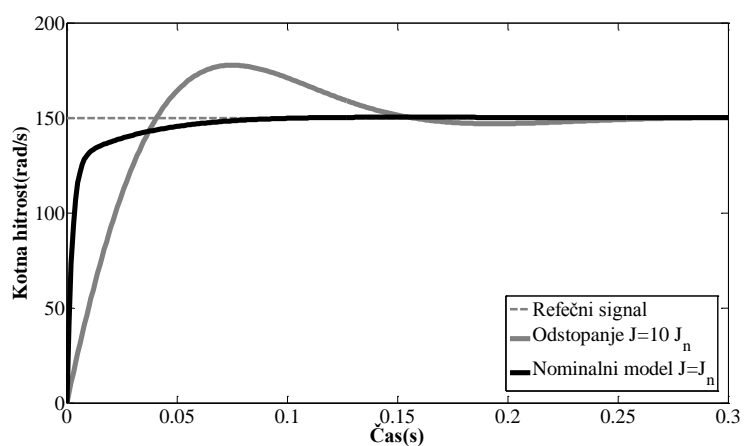


Slika 7-7 Vrednost pogoja $\|W_2U\|_\infty$ v odvisnosti od \tilde{r}_0, \tilde{r}_1

Za testiranje zaprto zančnega sistema z regulatorjem $K_{hit}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$ na sistemu HIL, uporabimo čas tipanja $T_s = 5ms$. Čas tipanja je določen glede na zaprto zančni karakteristični polinom $C_{hit}(s)$. Diskretni regulator $K_{hit}(z, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$,

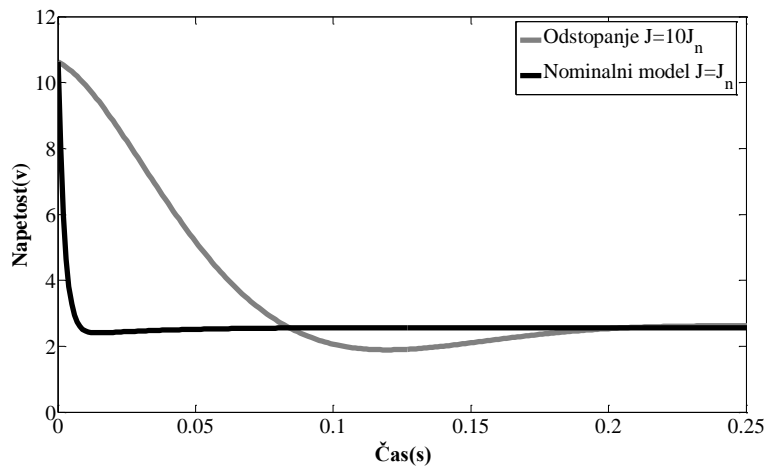
$$K_{hit}(z, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1) = \frac{0.018z^2 + 0.1616z + 0.07978}{z^2 + 1.991z + 0.9913} \quad (7.13)$$

Odziv zaprto zančnega sistema z nominalnim modelom $P_{ohit}(s)$ in modelom $P_{hit}(s)$ z odstopanjem vztrajnosti $J = 10J_n$, na stopnični referenčni signal $150rad/s$.



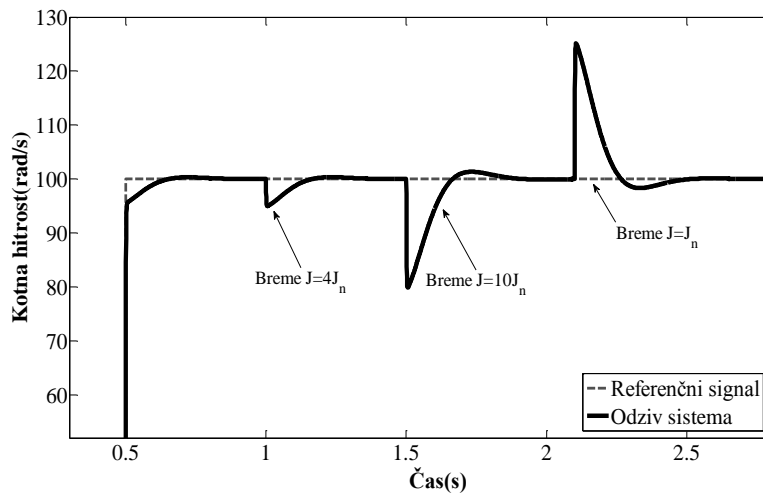
Slika 7-8 Odziv sistema na stopnični referenčni signal s $K_{hit}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$

Odziv izhoda regulatorja $K_{hit}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$ na vhodni referenčni signal.



Slika 7-9 Napetostni izhod regulatorja $K_{hit}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$

Odziv sistema na različna izhodne motnje, kjer se breme spreminja v območju med 0 in $10J_n$.



Slika 7-10 Odziv sistem na izhodne motnje

Sistem vodenj s sintetiziranim regulatorjem hitrosti $K_{hit}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$ zadosti vsem postavljenim kriterijem vodenja, tako za nominalni, kakor tudi za model z največjim odstopanjem Slika 7-8, Slika 7-10. Mala vrednost parametra \tilde{r}_0 zagotavlja minimizacijo statičnega pogreška v želenem področju $e_s \leq 0.01\%$ ter eliminacijo nizko frekvenčnih

izhodnih motenj. Prav tako z malo vrednostjo \tilde{r}_0 zagotovimo stabilnost regulatorja hitrosti ter dosežemo skoraj enak učinek, kot z integralnim delovanjem, kjer je $\tilde{r}_0 = 0$. V primeru vpeljave $\tilde{r}_0 = 0$, dobimo klasično strukturo $PID(s, 0, \tilde{r}_1)$ regulatorja. Zaradi nestabilnega delovanja odprto zanke strukture $PID(s, 0, \tilde{r}_1)$ in $P(s)$, je potrebno v algoritem vodenja vpeljati dodatne varnostne mehanizme, ki omejijo nestabilno delovanje odprto zanke sistema in omejijo integralski pobeg.

7.2 Sinteza robustnega regulatorja pozicije

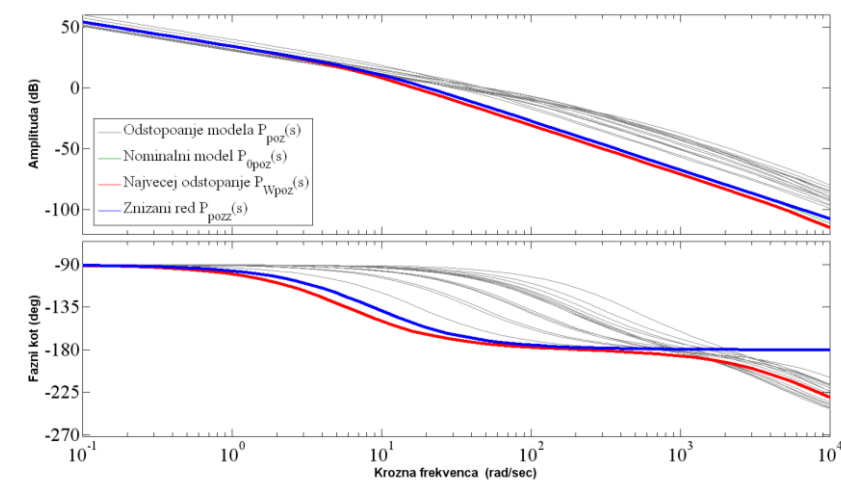
Pri sintezi regulatorja pozicije $K_{poz}(s)$ postopamo enako, kot pri sintezi regulatorja hitrosti, kjer izberemo nominalni model znižanega reda $P_{0poz}(s)$ nominalnega modela $P_{poz}(s)$,

$$\frac{\varphi(s)}{V_{nap}(s)} = P_{0poz}(s) = \frac{\frac{k_m}{LJ_n}}{s^3 + \left(\frac{R_L J_n + BL}{LJ_n}\right)s^2 + \left(\frac{BR_L + k_m k_e}{LJ_n}\right)s} = \frac{1}{2.7 \times 10^{-8} s^3 + 2.2 \times 10^{-4} s^2 + 19.6 \times 10^{-3} s},$$

$$P_{0poz}(s) = \frac{4431.6}{(s + 88.5)s}.$$
(7.14)

Za opis odstopanja modela $P_{0poz}(s)$ uporabimo enake uteži $W_M(s)$, $W_I(s)$, $W_p(s)$ in $W_2(s)$, kot pri sintezi regulatorja $K_{hit}(s)$. Uteži imajo enak pomen.

Frekvenčni spekter odstopanj modela $P_{poz}(s)$, glede na spremenljive parametre R_L, L, B, J_n, k_m, k_e (7.14).



Slika 7-11 Frekvenčna karakteristika motorja z odstopanjem parametrov

R_L, L, B, J_n, k_m, k_e za vodenje pozicije

Kriteriji vodenja regulatorja pozicije $K_{poz}(s)$:

- Čas nastavitve: $t_n = 0.6s$,
- iznos prenhaja nominalnega modela: $M_p \leq 1\%$,
- iznos prenhaja najslabšega primera pri $J = 10J_n$: $M_p \leq 5\%$,
- stacionarni pogrešek: $e_s \leq 0.01\%$,
- odprava nizko frekvenčne izhodne motnje,
- robustna stabilnost za multiplikativni in inverzni model odstopanj (4.34), (4.36) – problem mešane občutljivosti,
- močno stabiliziran $P_{0poz}(s)$,
- območje reference $0 - 6.28rad$, ena revolucija.

Strukturo regulatorja $K_{poz}(s)$ izberemo tako, da uporabimo dve parametrični rešitvi \tilde{r}_0 in \tilde{r}_1 v polinomu $R(s)$. Prosta parametra uporabimo za optimizacijo kriterijev (4.34)-(4.36) ter zagotovitev postavljenih kriterijev vodenja. Za vrednotenje robustnosti izberemo problem mešane občutljivosti enako, kot za regulator hitrosti. Določimo struktura regulatorja $K_{poz}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$, glede na model objekta vodenja (7.14) ter izbrana prosta parametra \tilde{r}_0 in \tilde{r}_1 (4.16),(4.19),

$$K_{poz}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1) = \frac{l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{r_3 s^3 + r_2 s^2 + \tilde{r}_1 s + \tilde{r}_0}. \quad (7.15)$$

Izbran karakteristični polinom $C_{poz}(s)$ (4.12), glede na kriterij t_n (4.24),

$$C_{poz}(s) = s^5 + 108.7s^4 + 5907s^3 + 1.6 \times 10^5 s^2 + 2.1 \times 10^6 s + 1.18 \times 10^7. \quad (7.16)$$

Glede na zahteve vodenja po izrazu (5.25) določimo dopustni interval parametra \tilde{r}_0 , kjer je upoštevamo kriterij,

$$0 < \tilde{r}_0 \leq \infty. \quad (7.17)$$

Parametri optimizacijskega algoritma *DE* so enaki, kot pri optimizaciji hitrostnega regulatorja $K_{hit}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$, kjer so uteži k kriterijske funkcije f (5.35) izbrane enako kot prej.

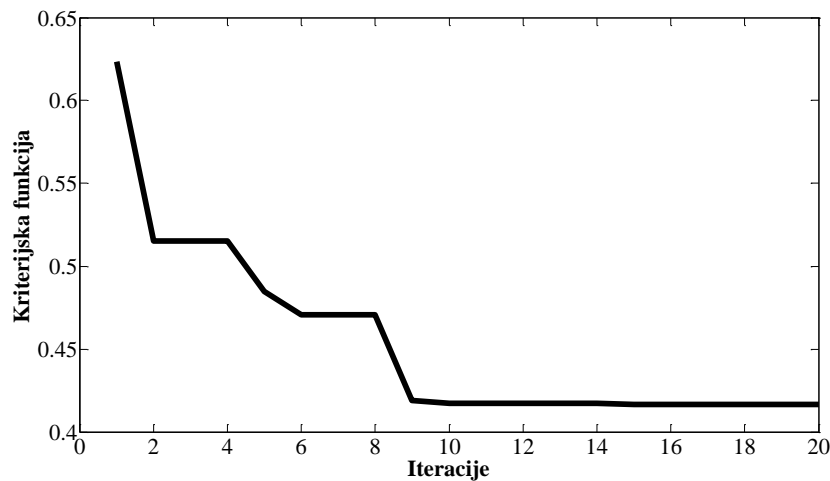
Rezultat optimizacije z *DE* in parametroma \tilde{r}_0 in \tilde{r}_1 ,

$$[\tilde{r}_0, \tilde{r}_1] = [5.4 \times 10^4, 2923]. \quad (7.18)$$

Regulator $K_{poz}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$,

$$K_{poz}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1) = \frac{4.7s^3 + 181.1s^2 + 3845s + 2.7 \times 10^4}{s^3 + 100s^2 + 2923s + 5.4 \times 10^4}. \quad (7.19)$$

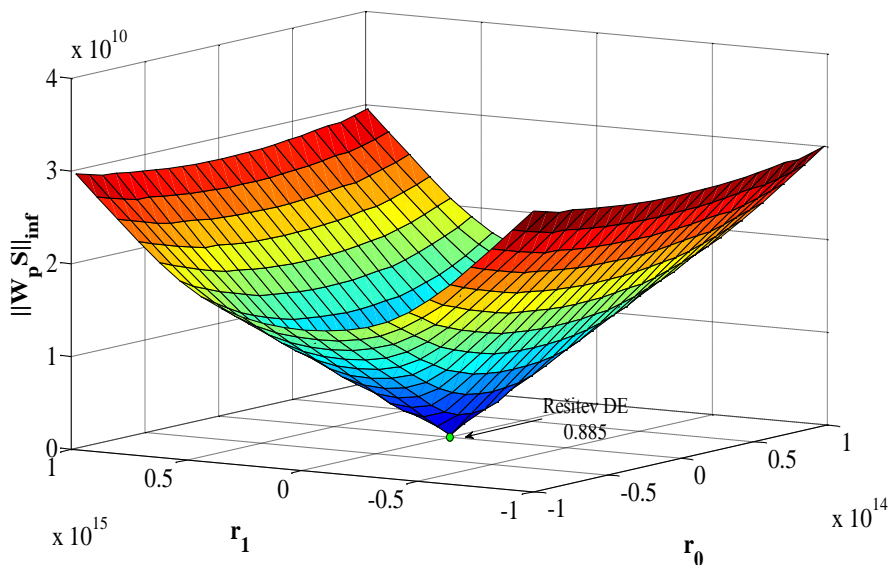
Potek kriterijske funkcije f optimizacije z *DE*, kjer je končna vrednost $f = 0.49$.



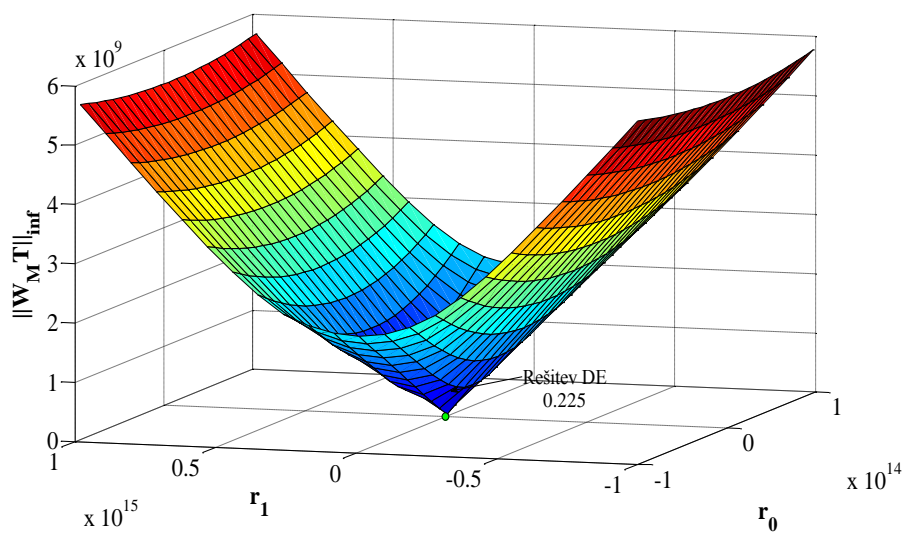
Slika 7-12 Potek kriterijske funkcije f , optimizacije regulatorja pozicije $K_{poz}(s, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$ z \tilde{r}_0 in \tilde{r}_1

Vrednost posameznih kriterijev (4.34)-(4.36), (4.38), po optimizaciji z *DE* $\|W_I S\|_\infty = 0.82$, $\|W_p S\|_\infty = 0.89$, $\|W_M T\|_\infty = 0.23$, $\|W_2 U\|_\infty = 0.35$.

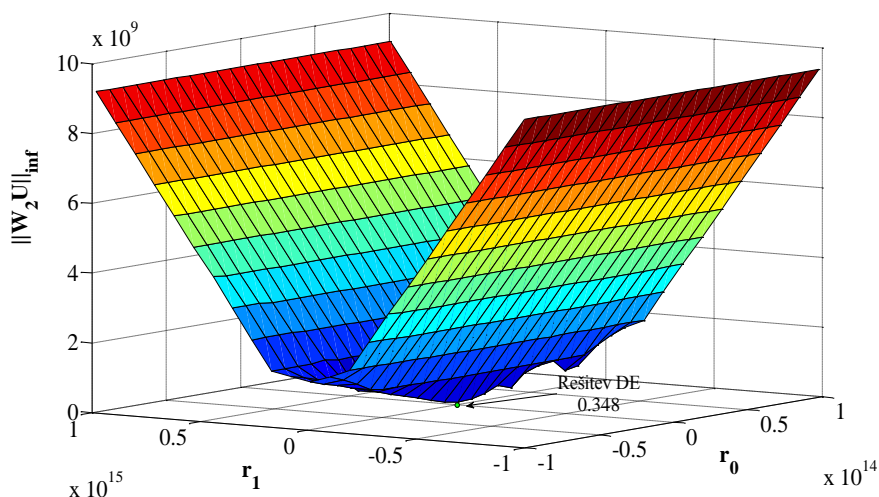
Grafični prikaz vrednosti norm $\|\cdot\|_\infty$, v odvisnosti od vrednosti prostih parametrov \tilde{r}_0, \tilde{r}_1 , za posamezni kriterij $\|W_p S\|_\infty, \|W_M T\|_\infty, \|W_2 U\|_\infty$.



Slika 7-13 Vrednost pogoja $\|W_p S\|_\infty$ v odvisnosti od \tilde{r}_0, \tilde{r}_1



Slika 7-14 Vrednost pogoja $\|W_M T\|_\infty$ v odvisnosti od \tilde{r}_0, \tilde{r}_1

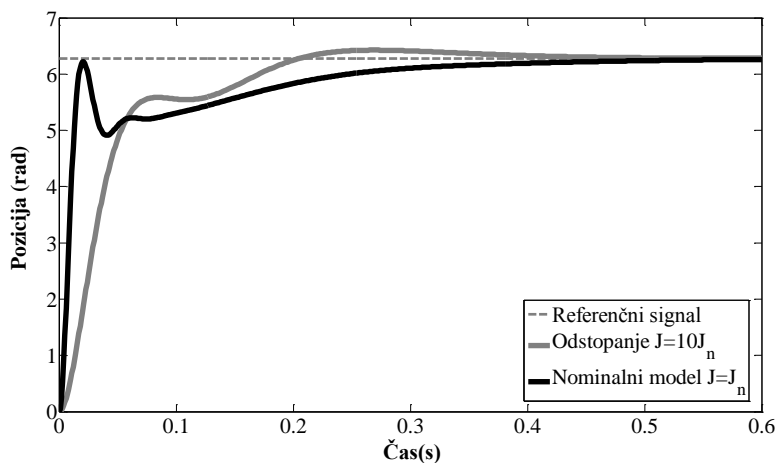


Slika 7-15 Vrednost pogoja $\|W_2U\|_\infty$ v odvisnosti od \tilde{r}_0, \tilde{r}_1

Za testiranje zaprto zanke sistema z regulatorjem $K_{poz}(s)$ na sistemu HIL, uporabimo enak čas tipanja, kot za regulacijo hitrosti $T_s = 5ms$. Diskretni regulator $K_{poz}(z, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$,

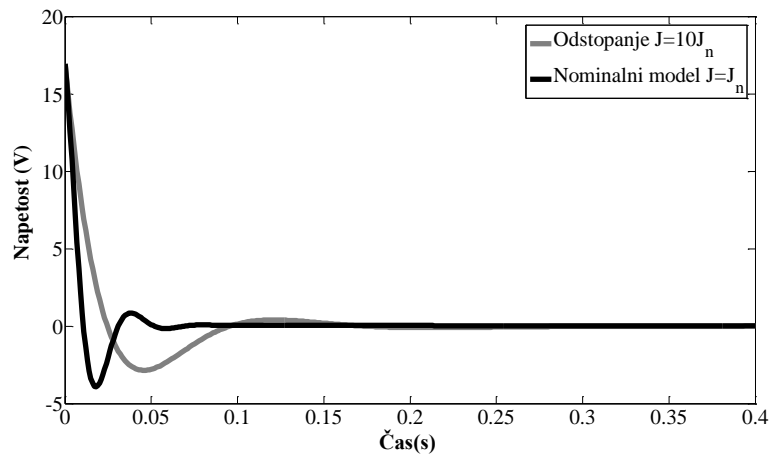
$$K_{poz}(z, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1) = \frac{4.7z^3 - 13.2z^2 + 12.39z - 3.889}{z^3 - 2.547z^2 + 2.158z - 0.6065}. \quad (7.20)$$

Odziv zaprto zanke sistema z nominalnim modelom $P_{0poz}(s)$ in modelom $P_{poz}(s)$ z odstopanjem vztrajnosti $J = 10J_n$, na stopnični referenčni signal 6.28 rad .



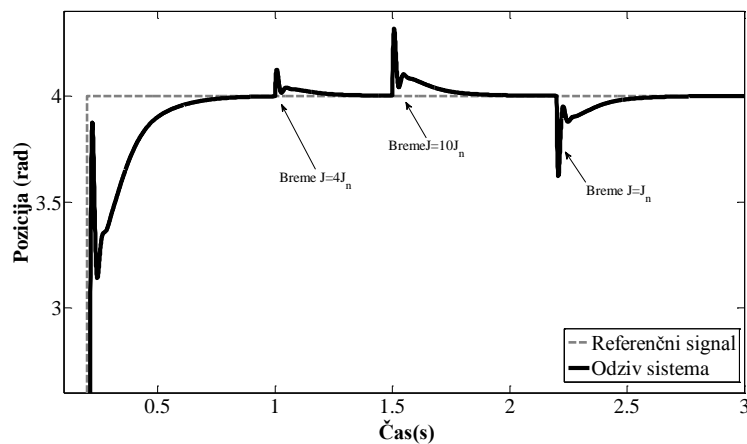
Slika 7-16 Odziv sistema na stopnični referenčni signal z $K_{poz}(z, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$

Odziv izhoda regulatorja $K_{poz}(z, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$ na vhodni referenčni signal.



Slika 7-17 Napetostni izhod regulatorja $K_{poz}(z, \tilde{r}_0, \tilde{r}_1)$

Odziv sistema na različna izhodne motnje, kjer se breme spreminja v območju med 0 in $10J_n$.



Slika 7-18 Odziv sistema na izhodne motnje

Sintetiziran regulator izpolnjuje postavljene kriterije vodenja ter kriterije robustnosti tako za nominalni model, kakor tudi za model z odstopanjem $J = 10J_n$, Slika 7-16 – 7-18.

7.3 Primerjava predlagane robustne polinomske sinteze s standardnim \mathcal{H}_∞ postopkom rešitve problema mešane občutljivosti

Robustno polinomsko sintezo predstavljeno v doktorski disertaciji, primerjamo s standardnim postopkom \mathcal{H}_∞ sinteze za problem mešane občutljivosti [45],[60]. Za standardno sintezo \mathcal{H}_∞ regulatorja hitrosti in pozicije uporabimo enake uteži $W_M(s)$, $W_p(s)$ in $W_2(s)$, kot smo jih uporabili pri predlagani polinomske sintezi. Za sintezo robustnega regulatorja hitrosti po \mathcal{H}_∞ , uporabimo nominalni model $P_{0hit_z}(s)$ (7.1) in pozicijo $P_{0pozz}(s)$ (7.14).

Sintetiziran robustni regulator hitrosti $K_{hit_mix}(s)$ po standardni metodi \mathcal{H}_∞ ,

$$K_{hit_mix}(s) = \frac{5.8s^5 + 7.4 \times 10^3 s + 3.7 \times 10^3 s^3 + 8.5 \times 10^8 s^2 + 9.9 \times 10^{10} s + 4.1 \times 10^{12}}{s^6 + 1.5 \times 10^3 s^5 + 10^6 s^4 + 3.2 \times 10^8 s^3 + 5.8 \times 10^{10} s^2 + 4.9 \times 10^{12} s + 2.8 \times 10^{12}}. \quad (7.21)$$

Robustni regulator pozicije $K_{poz_mix}(s)$ po standardni metodi \mathcal{H}_∞ ,

$$K_{poz_mix}(s) = \frac{349.4s^7 + 3.3 \times 10^6 s^6 + 3.9 \times 10^9 s^5 + 1.9 \times 10^{12} s^4 + 4.3 \times 10^{14} s^3 + 4.9 \times 10^{16} s^2 + 2.1 \times 10^{18} s + 1.1 \times 10^{15}}{s^8 + 1.1 \times 10^4 s^7 + 3.3 \times 10^7 s^6 + 3.1 \times 10^{10} s^5 + 1.4 \times 10^{13} s^4 + 3 \times 10^{15} s^3 + 3.4 \times 10^{17} s^2 + 1.4 \times 10^{19} s + 8.6 \times 10^{18}}. \quad (7.22)$$

Visoka stopanja sintetiziranih regulatorjev $K_{hit_mix}(s)$ in $K_{poz_mix}(s)$, je pogosto ovira pri implementaciji sistema vodenja. Po priporočilih načrtovanja robustnih sistemov, je v primeru previsoke stopnje regulatorja, priporočljivo izvesti redukcijo regulatorja. Redukcija se izvede tako, da ta čim manj vpliva na spremembo lastnosti

zaprto zančnega sistema. Za redukcijo stopnje regulatorja $K_{hit_mix}(s)$ in $K_{poz_mix}(s)$ uporabimo Hankle-ovo dekompozicijo s singularnimi vrednostmi [59]. Redukcijo izvajamo tako, da v vsaki ponovitvi znižamo stopnjo regulatorja za ena ter posebej preverimo kriterije robustnosti (4.34)-(4.36), (4.38). Postopek ponavljamo tako dolgo, dokler znižana stopnja regulatorja, bistveno ne spremeni lastnosti zaprto zančnega sistema ter kriterijev robustnosti.

Znižana stopnja regulatorja hitrosti $K_{hit_mix}(s)/K_{hit_mixz}(s)$,

$$K_{hit_mixz}(s) = \frac{0.3 \times 10^{-3} s^3 + 5.3 s^2 + 1.4 \times 10^3 s + 8.7 \times 10^4}{s^3 + 450.8 s^2 + 1 \times 10^5 s + 6.8 \times 10^4}. \quad (7.23)$$

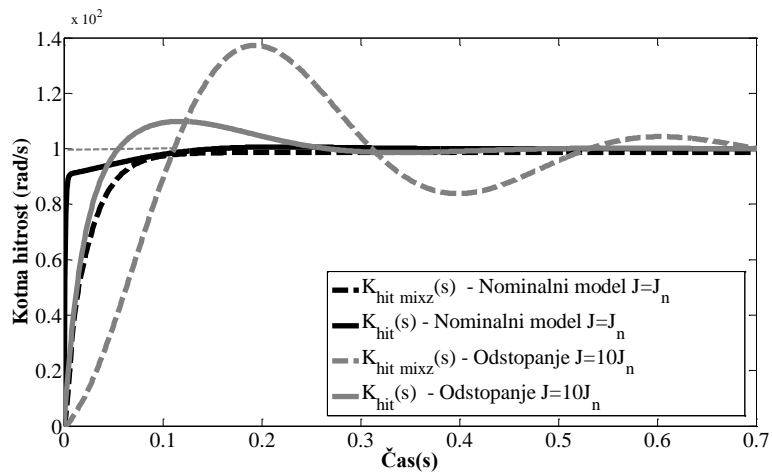
Vrednost kriterijev robustnosti z regulatorjem $K_{hit_mixz}(s)$, $\|W_p S\|_\infty = 0.71$, $\|W_M T\|_\infty = 3.67$, $\|W_2 U\|_\infty = 0.09$.

Znižana stopnja regulatorja pozicije $K_{poz_mix}(s)/K_{poz_mixz}(s)$,

$$K_{poz_mixz}(s) = \frac{349.4 s^2 + 3.1 \times 10^4 s + 15.63}{s^3 + 2.3 \times 10^3 s^2 + 2.2 \times 10^5 s + 1.3 \times 10^5}. \quad (7.24)$$

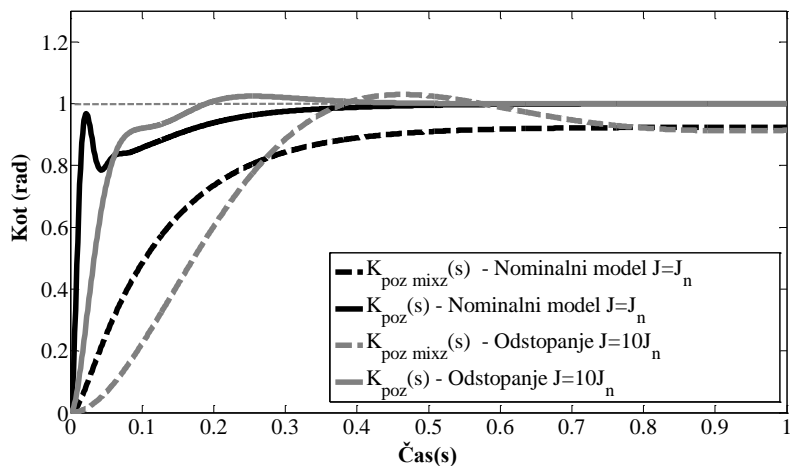
Vrednost kriterijev robustnosti z regulatorjem $K_{poz_mixz}(s)$, $\|W_p S\|_\infty = 2.28$, $\|W_M T\|_\infty = 2.97$, $\|W_2 U\|_\infty = 0.006$.

Primerjava vodenja zaprto zančnega sistema z regulatorjem hitrosti $K_{hit}(s)$ in $K_{hit_mixz}(s)$ pri stopničnem referenčnem signalu 100 rad/s , za nominalni model $P_{ohitz}(s)$ in modelom $P_{hitz}(s)$ z odstopanjem parametra $J = 10J_n$.



Slika 7-19 Primerjava vodenja hitrosti z regulatorjem $K_{hit}(s)$ in $K_{hit_mixz}(s)$

Primerjava vodenja zaprto zadržnega sistema z regulatorjem pozicije $K_{poz}(s)$ in $K_{poz_mixz}(s)$ pri stopničnem referenčnem signalu 1 rad, za nominalni model $P_{ohitz}(s)$ in modelom $P_{hitz}(s)$ z odstopanjem parametra $J = 10J_n$.



Slika 7-20 Primerjava vodenja pozicije z regulatorjem $K_{poz}(s)$ in $K_{poz_mixz}(s)$

Iz slik 7-19 in 7-20 je razvidno, da s klasično sintezo \mathcal{H}_∞ pri izbranih utežeh $W_M(s)$, $W_p(s)$ in $W_2(s)$ ne izpolnimo vseh kriterijev vodenja. Pri vodenju hitrosti ne izpolnimo pogoja robustnosti za modele z multiplikativnim odstopanjem, kar se kaže s prevelikim prenehajem ter predolгим postavitvenim časom, Slika 7-19. Podobno lahko

strnemo pri vodenju pozicije Slika 7-20, kjer sistem ne izpolnjuje performančnega učinka W_p , kar se kaže v predolgem času postavitve in stacionarnem odstopanju. Prav tako zaprto zančni sistem ne izpolnjuje kriterija robustnosti z utežjo $W_M(s)$, kar je razvidno pri odstopanju $J = 10J_n$. Za uspešnejše načrtovanje zaprto zančnega sistema, za dane kriterije vodenja po klasični metodi \mathcal{H}_∞ , bi bilo potrebno spremeniti uteži kriterijev robustnosti $W_M(s)$, $W_p(s)$ in $W_2(s)$.

8 Zaključek

Postopek načrtovanja robustnega regulatorja s tehniko pomikanja polov in optimizacijo performančnih kriterijev z algoritmom diferencialne evolucije, potrjuje tezo predstavljene doktorske disertacije. Postopek načrtovanja je mogoče izvesti popolnoma avtomatizirano in je uporaben za sisteme, kjer robustnost vrednotimo z modeli odstopanj.

Metoda nudi sistematično in transparentno načrtovanje robustnih regulatorjev, pri čemer lahko upoštevamo princip ločljivosti. Princip ločljivosti omogoča, da pri optimizaciji kriterijev robustnosti ali performančnih uteži povratno ne vplivamo na strukturo regulatorja. Princip ločljivosti prav tako omogoča uvedbo parametričnih rešitev v sistem linearnih enačb, kjer vrednosti prostih parametrov vplivajo na iznos norme, ne pa na lego zaprto zanjnih polov določenih s $C(s)$. Uvedba parametričnih rešitev omogoča parametrizacijo regulatorja z znanimi strukturami kot so; integralno delovanje, lastnosti prehitevalno-zakasnilnih ali zakasnilno-prehitevalnih kompenzatorjev, Notch karakteristike itd.. Prav z Notch karakteristiko v regulatorju lahko selektivno oblikujemo frekvenčne lastnosti zaprto zanjnega sistema z namenom kompenzacije motenj v določenem frekvenčnem pasu ali sledenje referenčnega signala, z znanim frekvenčnim spektrom. Načrtovanje robustnega regulatorja po principu sestavljanja strukture iz znanih komponent, je način načrtovanja metode *QFT*. Načrtovanje po *QFT* je grafično orientirano in poteka izključno v frekvenčnem prostoru, kar zahteva veliko iteracij ter izkušenj načrtovalca v procesu načrtovanja. Prav grafično načrtovanje ter netransparentna zaprto zanjna dinamika je ena izmed poglobitnih slabosti *QFT* metode.

Predstavljena robustna tehnika pomikanja polov s parametričnimi rešitvami je kompromis med izbrano dinamiko ter robustnostjo zaprto zanjnega sistema, kjer je v postopku optimizacije možno izbrati prioriteto posameznega kriterija glede na zahteve načrtovalca. Ena izmed poglobitnih prednosti predstavljene sinteze napram \mathcal{H}_∞ , \mathcal{H}_2 je fiksna postavitev zaprto zanjnih polov sistema, znižan red regulatorja in izločitev

direktnega vpliva uteži na strukturo in red regulatorja. Predvsem slednje je vidno v podpoglavju 7.3 v primerjavi obeh metod. Predstavljena metoda vključuje nekatere uporabne prvine *QFT* metode glede vključevanja znanih struktur, kakor tudi orodja metode \mathcal{H}_∞ , \mathcal{H}_2 s kriteriji robustnosti ter metriko norme $\|\cdot\|_\infty$.

Metodo načrtovanja s prostimi parametri je možno razdeliti na več ločenih segmentov. Prvi del zajema reševanje polinomske enačbe z vpeljavo parametričnih rešitev. Določeni so kriteriji izbire prostih parametrov za izvedljivost regulatorja in rešljivost polinomske enačbe. Drugi bistven segment metode je vključevanje parametričnih rešitev v kriterije robustnosti ter njihov vpliv na vrednost norme $\|\cdot\|_\infty$, kjer nimamo povratnega vpliva na lego zaprto začnih polov. Tretji segment je numerična optimizacija s postavljenimi kriterijsko funkcijo na osnovi spektralnega polinoma za posamezni kriterij robustnosti. Na osnovi testiranja pozitivnosti spektralnega polinoma, je možno preveriti suboptimalnost rešitve zastavljenega problema optimizacije. Optimizacija kriterijev je izvedena z algoritmom Diferencialna evolucija, ki se je izkazala, kot zelo uporabno orodje za nekonveksne optimizacijske probleme z robnimi pogoji.

Navedli bomo nekaj smernic za nadaljnje raziskave ter nadaljnji razvoj robustne metode. Metodo je smiselno razširiti na optimizacijo kriterijev robustnosti podanih z metriko norme $\|\cdot\|_2$ ali kombinacije $\|\cdot\|_\infty/\|\cdot\|_2$, kjer ob metriki $\|\cdot\|_\infty$ izvajamo še optimizacijo norme $\|\cdot\|_2$, kar je ekvivalent energije sistema. Poenostavitev metode na osnovi preiskovanja prvega stolpca Šiljakove tabele ter raziskati direktni vpliv zaprto začnega polinoma na vrednost norme $\|\cdot\|_\infty$, predvsem za sisteme višjega reda. Uporaba spektralnih polinomov za ocenitev robustnosti za sisteme s parametričnimi odstopanji. Razširitev obstoječe metode na več vhodne-več izhodne sisteme.

Reference

- [1] A. Casavola , E. Mosca, H_∞ and H_2 simple controllers for robotic applications, *Internatioanl Journal Control* (1992); Vol. 55, No. 2, 329-341
- [2] A. Chowdhury, A. Sarjaš, P. Cafuta, R. Svečko, Robust controller synthesis with consideration of performance criteria, *Optimal control applications and methods*, n/a. doi: 10.1002/oca.970.
- [3] A. Chowdhury, P. Cafuta, *Regulacija robustnih procesov*, Poročilo inštituta za avtomatiko, št.01/96, FERI (1996), Maribor
- [4] A. Chowdhury, *Robustna sinteza regulacijskih sistemov z upoštevanjem performančnih kriterijev*, Doktorska disertacija, FERI , (2001), Maribor
- [5] A. Chowdhury, *Teorija robustne sinteze*, Magistrska naloga, FERI, (1997) Maribor
- [6] A. D. S. Lordelo, E.A. Juzzo, P.A.V. Ferreira, On the design of robust controllers using the interval Diophantine equation, *Computer Aided Control Systems Design*, (2004) 173-178
- [7] A. Howard, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra 9 edition*, Wiley, (2000) New Jersey
- [8] A. Karimi, H. Khatibi,R. Longchamp, Robust Control of Polytopic Systems by Convex Optimization, *Automatica*, Vol 43, No. 8, (2007) 1395-1402
- [9] A. L. Tits and Y. Yang, Globally convergent algorithms for robust pole placement by state feedback, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 41, No. 10, (1996) 1432–1452
- [10] A. V. Lipatov, N. I. Sokolov, Some Sufficient conditions for stability and instability of continuous linear stationary system, *Automatic Remote Control*, Vol. 39, (1978) 1285-1291
- [11] A. V. Lipatov, Some necessary and sufficient conditions that polynomials be of Hurwitz type, *Differents, Urayn*, 12, (1976) 2269-2270
- [12] B. D. O. Anderson, E.I Jury ,Generalized Bezoutian and Sylvester Matrices in Multivariable Linear Control, *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 21, No. 4, (1976) 551-556.
- [13] B. D. O. Anderson, The small-gain theorem, the passivity theorem and their equivalence, *J. Franklin Inst.*, Vol. 293, No. 2, (1972) 105–115
- [14] B. Francis, *A Course in H1 Control Theory*, Lecture Notes in Control and Information Science, vol. 88, Springer-Verlag (1987), Berlin
- [15] C. C. Hsu, S.C. Chang, C.Y. Yu, Tolerance design of robust controllers for uncertain interval systems based on evolutionary algorithms, *IET Control Theory and Applications*, Vol. 1, No. 1, (2007) 244-252

- [16] C. Chung-Fu, J. Pyng, Optimal feeder reconfiguration for loss reduction by robust searching hybrid differential evolution, *Cybernetics and Systems*, Vol. 38, No. 4, (2007) 429-450
- [17] D. Corne, M. Dorigo, F. Glover, *New Ideas in Optimization*, Norwich (1999), UK
- [18] D. D. Šiljak, Algebraic criteria for positive realness, *Journal of the Franklin Institute*, 291, (1971) 185-189
- [19] D. D. Šiljak, D. M. Stipanović, Robust D-stability via positivity, *Automatica*, Vol. 35, No. 8, (1999) 1477-1484
- [20] D. D. Šiljak, Parameter space methods for robust control design: a guided tour, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 7, (1989) 674 – 688
- [21] D. D. Šiljak, Polytopes of nonnegative polynomials, *In Proceeding of the ACC*, (1989) 193-199
- [22] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley publishing company, (1984) Massachusetts
- [23] D. Henrion, M. Šebek, V. Kučera, Positive Polynomials and Robust Stabilization with Fixed-Order Controllers, *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 48, No. 7, (2003) 1178-1186
- [24] D. U. Campos-Delgado and K. Zhou, H_∞ strong stabilization, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 46, No. 12, (2001) 1968–1972
- [25] D. U. Campos-Delgado, K. Zhou, A parametric optimization approach to H_∞ and H_2 strong stabilization, *Automatica*, Vol. 39, No. 7, (2003) 1205–1211
- [26] E.J. Davison, On pole assignment in linear systems with incomplete state feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15 (1970), 348-351
- [27] E.J. Davison, R Chatterjee, A note on pole assignment in linear systems with incomplete state feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16 (1971), 98-99
- [28] G. Gu, J. Chen, E. B. Lee, Parametric H_∞ Loopshaping and Weighted Mixed Sensitivity Minimization, *IEEE Automatic control*, Vol. 44, No. 4, (1999) 846-852
- [29] G. Meinsma and H. Zwart, On H_1 control for dead-time systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, (2000) 272-285
- [30] G. Zames, Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 26, No. 2, (1981) 301- 320
- [31] H. Zhangjun, A robust archived differential evolution algorithm for global optimization problems, *Journal of Computers*, Vol. 4, No. 2, (2009) 160-167
- [32] H. Kimura, Pole assignment by gain output feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20 (1975), 509-516
- [33] H. Kwakernaak, Asymptotic root loci of optimal linear regulators. *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 21, No. 3, (1976) 378-382

- [34] H. Kwakernaak, The polynomial approach to H_∞ – optimal control, *Polynomial Methods in Optimal Control and Filtering, IEE Colloquium*, (1991) 1-4.
- [35] H. Khatibi, A. Karimi, Fixed-Order H_∞ Controller Design via Convex Optimization Using An Alternative to Youla Parametrization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 55, No. 9, (2010) 2119-2123
- [36] H. Khatibi, A. Karimi, R. Longchamp, Fixed-Order Controller Design for Systems with Polytopic Uncertainty Using LMIs, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 53, No. 1, (2008) 428-434.
- [37] I. D. Landau, A. Karimi, Robust digital control using pole placement with sensitivity function shaping method, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 8, No. 2, (1998) 191–210
- [38] I. Horowitz, Quantitative feedback theory, *Control Theory and Applications IEE proceedings*, Vol. 129, (1982) 215-226
- [39] J. Andersson, *A survey of multiobjective optimization in engineering design*, Department of Mechanical Engineering, Linköping University (2001)
- [40] J. C. Doyle, A Review of for Case Studies in Robust Control, *Preprints of 10th World Congress on Automatic Control*, Munich, (1987) 395-402
- [41] J. C. Doyle, Analysis of control Systems with Structured uncertainty, *IEEE Proc.*, (1982) 242-250
- [42] J. C. Doyle, B. A. Francis, A. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Co., (1990) New York
- [43] J. C. Doyle, Guaranteed Margins for LQG Regulators, *IEEE Trans. Automatic Control* , Vol. AC-23, No. 4, (1978) 756- 758
- [44] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, B. A. Francis, State-space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, *IEEE Trans. Automatic Control* , Vol. 34, No. 8, (1989) 831- 847
- [45] J. C. Doyle, K. Zhou, K. Glover, B. Bodenheimer, Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives II: Optimal Control, *IEEE Trans. Automatic Control* , Vol. 39, No. 8, (1994)1575- 1587
- [46] J. Chen , L. Qiu, O. Toker, Limitations on Maximal Tracking Accuracy, *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol. 45, No. 2, (2000) 326-331
- [47] J. Du, Y. Wang, C. Yang, H. Wang, Hardware-in-the-loop simulation approach to testing controller of sequential turbocharging system, *Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics*, 2007
- [48] J. J. Grefenstette, Optimization of control parameters for genetic algorithms, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 16, (1986) 122–128
- [49] J. K. Shiau, C. E. Tseng, A discrete H_∞ low-order controller design using coprime factors, *Tamkang Journal of Science and Engineering*, Vol. 7, No. 4, (2004) 251–258
- [50] J. Kautsky, N. K. Nichols, P. Van Dooren, Robust pole assignment in linear state feedback, *Int. J. Control*, Vol. 41, 1985 1129–1155

- [51] J. Langer, I. D. Landau, Combined pole placement and sensitivity function shaping method using convex optimization criteria, *Automatica*, Vol. 35, (1999) 1111–1120
- [52] J. Lihua, C. K. Young, Fixed, low-order controller design with time response specifications using non-convex optimization, *ISA Transactions*, 47, (2008) 429-438
- [53] J. M. Maciejowski, *Multivariable feedback design*, Addison - Wesley Publishing Company (1989), Wokingham
- [54] J. S. Karmarkar, On Šiljak's absolute stability test, *Proceedings Letters*, Vol. 58, (1970)
- [55] K. Gu, H_∞ Control of Systems Under Norm Bounded Uncertainties in all System Matrices, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 6, (1994) 1320-1322
- [56] K. Juš, K. Rihard, Analiza robustnosti multivariabilnih sistemov v frekvenčnem prostoru, *Elektroteh. vestn.*, Vol. 59, No. 5, (1992) 247-260
- [57] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs , (1970) New Jersey
- [58] K. R. Cavin and S. P. Bhattacharyya, Robust and well-conditioned eigenstructure assignment via Sylvester's equation, *American Control Conference*, (1982) 1053–1057
- [59] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, (1997) New Jersey
- [60] K. Zhou, J. Doyle, *Essentials of robust control*, Prentice-Hall, (1998) New Jersey
- [61] L. H. Keel, S. P. Bhattacharyya, Robust stability and performance with fixed-order controller, *Automatica*, Vol. 35, No. 10, (1999) 1717–1724
- [62] L. H. Keel, S. P. Bhattacharyya, State space design of low-order stabilizers, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 35, (1990) 82–86
- [63] L. H. Keel, S.P Bhattacharyya, Robust Control Design via Linear Programming, *TENCON '98 IEEE Region 10 International Conference on Global Connectivity in Enregy, Computer, Communication and Conreol*, Vol. 1, (1998) 208-213
- [64] L. Ljung, *System Identification Theory for the user-second edition*, Prentice-Hall, (1999) New Jersey
- [65] M. A. Potter, A. Kenneth, D. Jong, *A Cooperative Coevolutionary Approach o Function Optimization*, Springer-Verlag, (1994) Jerusalem
- [66] M. C. Smith, On stabilization and the existence of coprime factorizations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, (1989) 1005-1007
- [67] M. Chilali, P. Gahinet, H_∞ Design with Pole Placement Constrains: An LMI Approach, *IEEE Automatic Control*, Vol. 41, No. 3, (1996) 358-367
- [68] M. Chilali, P. Gahinet, P. Apkarian, Robust Pole Placement in LMI Regions, *IEEE Automatic control*, Vol. 44, No. 12, (1999) 2257-2269

- [69] M. E. H. Pedersen, A. J. Chipperfield, Simplifying particle swarm optimization, *Applied Soft Computing* 10, (2010) 618–628.
- [70] M. G. Safonov, M. Athans, Gain and phase margins for multiloop LQG regulators, *IEEE Trans. Automat. Control*, 10.1109/CDC.1976.267760, (1977) 361- 368
- [71] M. Pec, *Optimizacija izbire utežnostnih funkcij robustne sinteze*, Doktorska disertacija, Feri, (2003) Maribor
- [72] M. T. Söylemez, Robust pole assignment using symbolic algebra, Msc. thesis, UMIST, 1994 Manchester
- [73] M. T. Soylemez, N. Munro, Pole assignment and symbolic algebra: a new way of thinking, *Control 98. UKACC International Conference on (Conf. Publ. No. 455)*, Vol. 2, (1998) 1306-1310
- [74] M. T. Soylemez, N. Munro, Robust pole assignment in uncertain systems, *IEE Proc. – Control Application*, Vol. 144, No. 3, (1997) 217- 224
- [75] M. Zeren, H. Özbay, On the synthesis of stable controllers, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 44, No. 2, (1999) 431–435
- [76] N. I. Sokolov, A. V. Lipatov, On necessary conditions for stability of linear systems, *Tr. Mosk. Aviats. Inst.*, 240, (1972) 26-30
- [77] N. K. Bose, E. I. Jury, E. Zeheb, On Robust Hurwitz and Schur Polynomials, *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 33, No. 12, (1988) 1166-1168
- [78] N. Munro, A. Vardulakis, Pole-shifting using output feedback, *International Journal of Control*, 20 (1974), 1267-1273
- [79] O. Bosgra, H. Kwakernaak, *H_∞ Design Methods for Control Systems*, Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control (1997), Netherlands
- [80] O. V. Iftime, H.J. Zwart, *The standard H1-suboptimal control problem for LTI in_nite-dimensional systems*, Technical report, 1532, (2000) University of Twente
- [81] P. Gahinet, P. Apkarian, A linear matrix inequality approach to H_∞ control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, No. 4, (2007) 421-448
- [82] P. Lundstrom, S. Skogestad, Z-Q. Wang, Uncertainty weight selection for H-infinity and mu control methods, *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 2, (1991) 1537-1542
- [83] P. M. Young, M. P. Newlin, J. C. Doyle, Computing bounds for the mixed problem, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 5, (1995) 573-590
- [84] P. M. Young, M. P. Newlin, J.C. Doyle, Robust Control Theory, *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, (1995) 143-173
- [85] R. C. Dorf, R. H. Bishop, *Modern control systems*, Addison – Wesley publishing company, (1995) Massachusetts Menol Park
- [86] R. Storn, K. Price, Differential evolution - A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, *Journal of global optimization*, Vol. 11, No. 4, (1997) 341-359

- [87] R. Storn, K. Price, *Differential evolution – A Simple and efficient scheme for global optimization over continuous spaces*, Technical Report TR95-012, ICSI (1995)
- [88] R. W. Beaven, M. T. Wright, D.R. Seaward, Weighting Function Selection in The H_∞ Design Process, *Control Eng. Practice*, Vol. 4, No. 5, (1996) 625-633
- [89] Rajko Svec̃ko, *Diskretni regulacijski sistemi*, (2003) Maribor
- [90] S. Gümüşsoy, H. Özbay, Remarks on Strong stabilization and Stable H_∞ Controller Design, *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 50, No. 12, (2005) 2083-2087
- [91] S. Manabe, Coefficient diagram method, *IFAC Automatic Control in Aerospace*, Seoul, (1998) Korea
- [92] S. Manabe, Y. C. Kim, Recent development of Coefficient Diagram Method, *ASSC'2000 3rd Asian Control Conference*, (2000) Shanghai
- [93] S. Wang and J. H. Chow, Low-order controller design for SISO systems using coprime factors and LMI, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 6, (2000) 1166–1169
- [94] S. Y. Kung, D.W. Lin, Optimal Hankel-norm model reductions: multivariable systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 26, (1981) 832-852
- [95] T. Iwasaki, R. E. Skelton, All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas, *Automatica*, Vol. 30, No. 8, (1994) 1307–1317
- [96] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice-Hall, (2000) Englewood Cliffs
- [97] T. Robič, B. Filipič, *Večkriterijsko optimiranje z genetskim algoritmom in diferencialno evolucijo*, (2005) Ljubljana
- [98] V. Besson, T. A. Shenton, Interactive Parameter Space Design for Robust Performance of MISO Control Systems, *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 45, No. 10, (2000) 1917-1924
- [99] V. Gourishanker, K. Ramer, Pole assignment with minimum eigenvalue sensitivity to plant parameter variations, *Int. J. Control*, Vol. 23, (1976) 493–504
- [100] V. Kučera, *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach*, Chichester, (1979) Wiley
- [101] V. Kučera, The pole placement equation – a survey, *Kybernetika*, Vol. 30, No 6., (1994) 578-584
- [102] V. L. Kharitonov, Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations, *Differentsial'nye Uravneniya*, 14, (1978) 1483-1485
- [103] V. Price, M. Storn, A. Lampinen, *Differential Evolution - A Practical Approach to Global Optimization*, Springer, (2005) New York
- [104] W.M. Wonham, On pole assignment in multi-input controllable linear systems, *IEEE Transactions in Automatic Control*, 12 (1967), 660-665

- [105] Y. Fuwen, G. Mahbub, D. Henrion, Fixed-Order Robust Controller Design With Regional Pole Assignment, *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 52, No. 10, (2007) 1959-1963
- [106] Y. S. Chou, T. Z. Wu, J. L. Leu, On strong stabilization and H_∞ strong-stabilization problems, *Proc. Conf. Decision and Control*, (2003) 5155–5160.
- [107] Z. Gao, A. T. P. So, A general doubly coprime factorization for descriptor systems, *Systems and Control Letters*, Vol. 49, No. 3, (2003) 213-224
- [108] Z. Gao, X. Wang, Performance sensitivity analysis for linera systems with five types of structured uncertainty, *System Analysis Modelling Simulation*, Vol. 42, No. 10, (2002) 1537-1547
- [109] Z. Gao, X. Wang, Performance sensitivity analysis for linera systems with five types of structured uncertainty, *System Analysis Modelling Simulation*, Vol. 42, No. 10, (2002) 1537-1547

Življenjepis:

Ime in priimek:	Andrej Sarjaš	
Rojen:	7. Maj 1980	Murska Sobota
Šolanje:	1987-1995	Osnovna šola Gornja Radgona
	1995-1999	Srednja elektro-računalniška šola, Maribor
	1999-2004	Dodiplomski študij elektrotehnike - avtomatike na Fakulteti za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Univerza v Mariboru
	2005-2011	Vpisan na podiplomski študij elektrotehnike, Fakultete za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Univerza v Mariboru
Zaposlitev:	2005-	Zaposlen, kot raziskovalec-asistent na Fakulteti za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Univerza v Mariboru



Univerza v Mariboru

Fakulteta za elektrotehniko,
računalništvo in informatiko

IZJAVA DOKTORSKEGA KANDIDATA

Podpisani-a _____ Andrej Sarjaš _____,
vpisna številka _____ 95029356 _____

izjavljam,

da je doktorska disertacija z naslovom,

Robustna polinomska sinteza regulatorja z optimizacijo norme \mathcal{H}_∞

- rezultat lastnega raziskovalnega dela,
- da predložena disertacija v celoti ali v delih ni bila predložena za pridobitev kakršnekoli izobrazbe po študijskem programu druge fakultete ali univerze,
- da so rezultati korektno navedeni in
- da nisem kršil-a avtorskih pravic in intelektualne lastnine drugih.

Podpis doktorskega-e kandidata-ke:



Univerza v Mariboru

Fakulteta za elektrotehniko,
računalništvo in informatiko

IZJAVA KANDIDATOVEGA MENTORJA O USTREZNOSTI DOKTORSKE DISERTACIJE

Podpisani-a izred.prof.dr. Rajko Svečko, mentor-ica doktorskemu-i kandidatu-ki, izjavljam, da je doktorska disertacija z naslovom,

Robustna polinomska sinteza regulatorja z optimizacijo norme H_{∞} ,

ki jo je izdelal-a doktorski-a kandidat-ka Andrej Sarjaš,
v skladu z odobreno temo, Pravilnikom o pripravi in zagovoru doktorske disertacije ter mojimi navodili in predstavlja izviren prispevek k razvoju znanstvene discipline.

Datum in kraj:

8.7.2011, Maribor

Podpis mentorja-ice:



Univerza v Mariboru

Fakulteta za elektrotehniko,
računalništvo in informatiko

IZJAVA O OBJAVI ELEKTRONSKE VERZIJE DOKTORSKE DISERTACIJE IN OSEBNIH PODATKOV, VEZANIH NA ZAKLJUČEK ŠTUDIJA

Ime in priimek doktoranda-ke: Andrej Sarjaš

Vpisna številka: 95029356

Študijski program: Elektrotehnika

Naslov doktorskega dela:

Robustna polinomska sinteza regulatorja s optimizacijo norme \mathcal{H}_∞

Mentor-ica: izred.prof. dr. Rajko Svečko

Somentor-ica: _____/_____

Podpisani soglašam z objavo doktorske disertacije v Digitalni knjižnici Univerze v Mariboru.

Tiskana verzija doktorske disertacije je istovetna elektronski verziji, ki sem jo oddal-a v Digitalno knjižnico Univerze v Mariboru.

Podpisani-a hkrati izjavljam, da dovoljujem objavo osebnih podatkov, vezanih na zaključek študija (ime, priimek, leto in kraj rojstva, datum diplomiranja, naslov diplomskega dela) na spletnih straneh in v publikacijah Univerze v Mariboru.

Datum in kraj:

8.7.2011, Maribor

Podpis doktoranda-ke:

