UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO
Oddelek za matematiko in računalništvo

DIPLOMSKO DELO

Natalija Valek

Maribor, 2010

UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO
Oddelek za matematiko in računalništvo

Diplomsko delo

PRESEK TREH NAJDALJŠIH POTI V GRAFU

Mentor:
dr. Sandi Klavžar,
redni profesor

Kandidatka:
Natalija Valek

Maribor, 2010

ZAHVALA

Le redki so zvezdni trenutki v življenju,
ko dosežemo dolgo zastavljen cilj
in le malo bi pomenili,
če jih ne bi mogli deliti z ljudmi,
ki nam veliko pomenijo.

Najprej se zahvaljujem mentorju, dr. Sandiju Klavžarju, za strokovno vodenje, prilagodljivost in potrpežljivost.

Posebna hvala mojim staršem in bratu, ker so me ves čas spodbujali, verjeli vame in mi finančno pomagali. Iz srca hvala tudi družini Vrbek za vso pomoč.

Hvala tudi fantu Darku, ki me je ves čas podpiral in mi stal ob strani.

Iskreno hvala vsem, ki ste mi kakor koli pomagali in pripomogli k temu, da so bila moja študentska leta nepozabna, še posebej Urši, Nevenki in Karmen.

UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

IZJAVA

Podpisana Natalija Valek, rojena 24. maja 1986, študentka Fakultete za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru, študijskega programa enopredmetna nepedagoška matematika, izjavljam, da je diplomsko delo z naslovom

PRESEK TREH NAJDALJŠIH POTI V GRAFU

pri mentorju dr. Sandiju Klavžarju avtorsko delo. V diplomskem delu so uporabljeni viri in literatura korektno navedeni; teksti niso uporabljeni brez navedbe avtorjev.

Maribor, 28. maj 2010

Natalija Valek

Presek treh najdaljših poti v grafu

Program diplomskega dela

Diplomsko delo naj obravnava problem preseka najdaljših poti v grafih. Predstavljena naj bo domneva o nepraznosti preseka ter njeni protiprimeri. Problem naj bo specializiran na tri najdaljše poti in podan naj bo dokaz nepraznosti za zunanje ravninske grafe.

Osnovni viri:

1. M. Axenovich, When do three longest paths have a common vertex?, Discrete Math. Algor. Appl. 1 (2009) 115–120.

2. S. Klavžar, M. Petkovšek, Graphs with nonempty intersection of longest paths, Ars Combin. 29 (1990) 42–53.

dr. Sandi Klavžar

VALEK, N.: Presek treh najdaljših poti v grafu.
Diplomsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2010.

IZVLEČEK

Diplomsko delo obravnava problem preseka najdaljših poti v grafu. Poseben poudarek je na preseku treh najdaljših poti, kateremu je namenjeno četrto poglavje.

V prvem delu so zapisane osnovne definicije s področja teorije grafov, ki se uporabljajo v nadaljevanju. V naslednjem poglavju se najprej dokaže nepraznost preseka dveh najdaljših poti, nato pa se presek iz dveh najdaljših poti posploši na presek n najdaljših poti. Podanih je nekaj grafov s praznim presekom najdaljših poti. V zadnjem delu poglavja se dokaže nepraznost preseka za sledljiv, hiposledljiv in razcepljen graf. Sledi poglavje, v katerem se osredotočimo na presek najdaljših poti v posameznih blokih grafa. Dokaže se, da je presek najdaljših poti v grafu neprazen natanko tedaj, ko je neprazen presek v vseh blokih grafa. Zadnje poglavje je namenjeno preseku treh najdaljših poti. Podan je tudi dokaz o nepraznosti preseka treh najdaljših poti v zunanje ravninskih grafih.

Ključne besede: pot, najdaljša pot, presek najdaljših poti, blok, zunanje ravninski graf, Hamiltonovo povezan blok, skoraj Hamiltonovo povezan dvodelni blok.

Math. Subj. Class. (2010): 05C38

VALEK, N.: Intersection of three detour paths in graph
Graduation Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Scicences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2010.

ABSTRACT

The problem wheteher the intersection of longest paths in a graph is always nonempty is studied. A special emphasis is given on the intersection of three longest ways, this is treated in Section 4.

The first part contains basic definitions from the area of graph theory that are needed later. In the next chapter it is first proved that the intersection of two longest paths is always nonempty, and then the problem is generalized to the intersection of more longest paths. Examples of graphs with empty intersection of the set of all longest path are given. On the other hand, the nonemptiness of the intersection is proved for traceable, hypotraceable, and split graphs. In Chapter 3 the focus is on the intersection of longest paths in graphs that contain cut vertices. It is proved that the intersection is nonempty exactly when the intersection is nonempty in all blocks of the graph. The final chapter is devoted to intersections of three longest paths. The main results asserts that three longest paths always intersect provided that they induce an outer planar graphs.

Keywords: path, longest path, intersection of longest paths, block, outerplanar graphs, Hamilton-connected block, almost-Hamilton-connected bipartite block.

Math. Subj. Class. (2010): 05C38

Kazalo

Uvod

Teorija grafov je veja matematike, ki preučuje lastnosti grafov. Je obširno in splošno uporabno področje matematike, ki se v zadnjih desetletjih hitro razvija. Zaradi preprostosti osnovnih konceptov se uporablja za predstavitev problemov na različnih drugih področjih. Nekatera izmed teh področjih so: računalništvo, kemija (zgradba molekul), sociologija (sociološke povezave, družinska drevesa), biologija (razvojna drevesa), komunikacijski sistemi in inženirstvo. Kljub hitremu razvoju pa še vedno ostaja veliko problemov nerešenih. Eden izmed teh problemov je tudi problem preseka najdaljših poti v grafu, ki je predstavljen v tej diplomski nalogi.

Najprej je predstavljen presek n najdaljših poti. Podani so primeri grafov, za katere je dokazano, da imajo prazen presek. Posebej je dokazana nepraznost preseka dveh najdaljših poti in nepraznost preseka v sledljivem, hiposledljivem in razcepljenemu grafu. V nadaljevanju se diplomsko delo omeji na presek v blokih. Posebna pozornost je namenjena Hamiltonovo povezanim blokom in skoraj Hamiltonovo povezanim dvodelnim blokom. Zadnji del pa predstavi osrednji problem diplomskega dela, presek treh najdaljših poti. Najprej se vpeljeta dve strukturi, ki sta v nadaljevanju v pomoč za dokaz nepraznosti preseka treh najdaljših poti v grafih, ki zadoščajo določenim lastnostim. Na koncu se dokaže tudi nepraznost preseka treh najdaljših poti v zunanje ravninskem grafu.

Poglavje 1

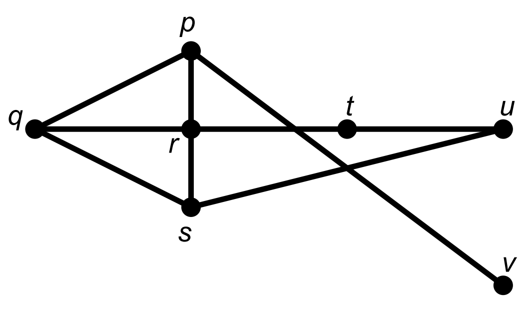
Osnovni pojmi

V prvem delu poglavju bomo definirali nekaj osnovnih pojmov iz teorije grafov, v drugem delu poglavja pa se bomo osredotočili na poti in najdaljše poti.

1.1 Osnovne definicije iz teorije grafov

Poglejmo si najprej nekaj osnovnih pojmov iz teorije grafov, ki bodo uporabljeni v nadaljevanju diplomske naloge.

Graf G je urejen par (V, E), kjer je V množica **vozlišč** grafa G in E množica **povezav** grafa G. Pri tem je E množica neurejenih parov vozlišč. Primer grafa vidimo na sliki 1.1. Povezave so iz množice $E = \{pq, pr, pv, qr, qs, rt, rs, su, tu\}$, vozlišča pa iz množice $V = \{p, q, r, s, t, u, v\}$.



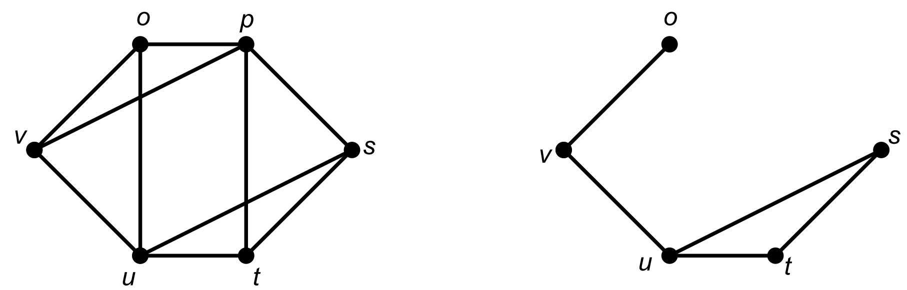
Slika 1.1: Primer grafa

Graf G je **povezan**, če ima eno samo povezano komponento oz. povedano drugače, graf G

je povezan, če vsak par njegovih vozlišč leži na neki poti. Če graf ni povezan, je **nepovezan**. Primer povezanega in nepovezanega grafa vidimo na sliki 1.2.

Slika 1.2: Primer povezanega (levo) in nepovezanega (desno) grafa

Graf $H = (V(H), E(H))$ je **podgraf** grafa $G = (V(G), E(G))$ (slika 1.3), če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.



Slika 1.3: Graf H (desno) je podgraf grafa G (levo)

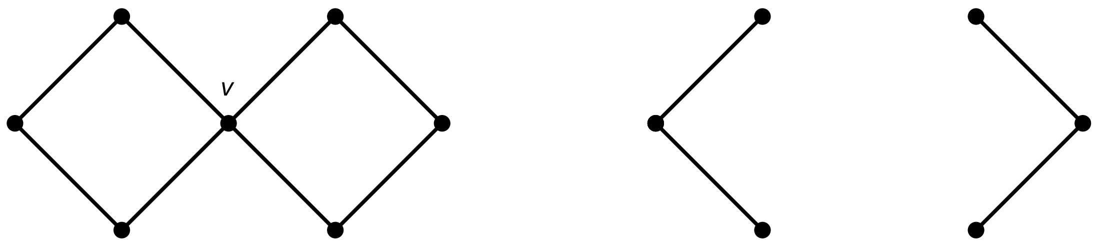
Naj bo G graf in v vozlišče na grafu G. $G - v$ je graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da odstranimo vozlišče v (in seveda tudi vse povezave, ki imajo v vozlišču v krajišče). Primer grafa $G - v$ prikazuje slika 1.4. Graf $G - v$ smo dobili iz grafa G tako, da smo odstranili vse povezave, ki so imele krajišče v vozlišču v.

Vozlišče v grafa G je **prerezno** ali **presečno vozlišče**, če ima graf $G - v$ več povezanih komponent kot graf G. Primer prereznega vozlišča vidimo na sliki 1.4, kjer je označeno z v.

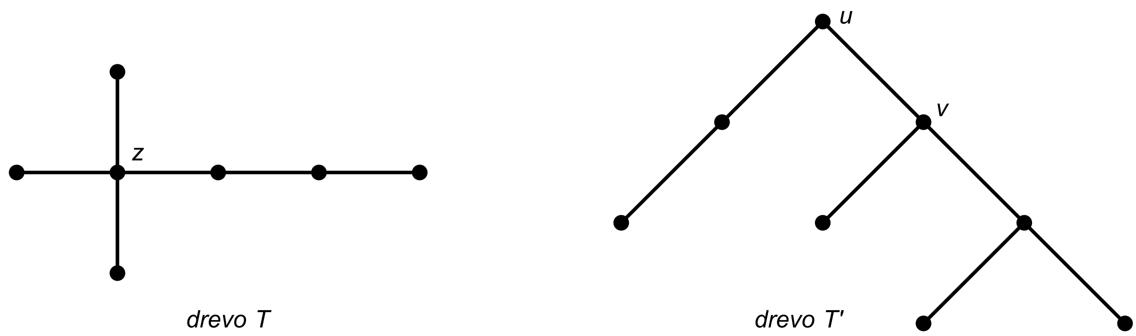
Stopnja vozlišča v je število povezav, ki vsebujejo vozlišče v.

Drevo je povezan graf brez cikla. Primer dveh dreves vidimo na sliki 1.5.

V drevesu odstranimo vozlišče, ki ima stopnjo 1 in povezavo, ki pripada temu vozlišču. Postopek ponavljamo, dokler ne ostane le eno vozlišče ali dve vozlišči. Če nam ostane eno vozlišče, tedaj to vozlišče imenujemo **center drevesa**, sicer pa **bicenter**.



Slika 1.4: Primer grafa G (levo) in grafa $G - v$ (desno)



Slika 1.5: Primer dveh dreves

Na sliki 1.5 ima drevo T center z, drevo T' pa bicenter uv.

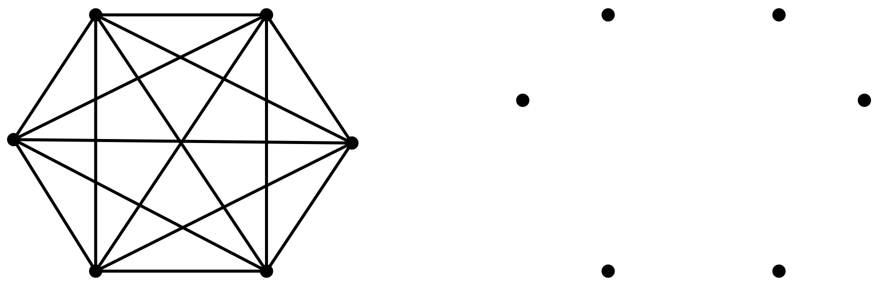
Definirajmo še polni in prazni graf:

Polni graf K_n je graf z n vozlišči, pri katerem je vsako vozlišče povezano s povezavo z vsemi drugimi vozlišči v grafu.

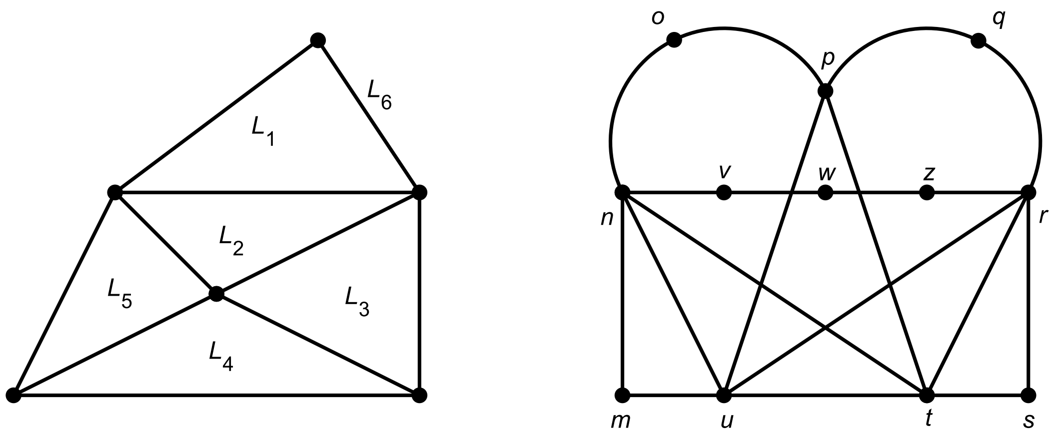
Prazni graf N_n je graf, ki vsebuje n, $n \geq 1$, vozlišč in 0 povezav. Polni graf K_1 je enak praznemu grafu N_1.

Na sliki 1.6 vidimo primer polnega in praznega grafa s 6 vozlišči.

Na koncu tega podpoglavja si poglejmo še definicijo ravninskega in zunanje ravninskega grafa:
Graf je **ravninski**, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se njegove povezave sekajo edino v vozliščih, če sploh se. Sicer je graf **neravninski** (slika 1.7).
Risba ravninskega grafa se imenuje **ravninska reprezentacija** ali **vložitev v ravnino**. **Lice** je maksimalen del ravnine, v katerem lahko dve poljubni vozlišči povežemo s krivuljo tako, da ne seka nobenega dela grafa. Lice z neomejenim območjem imenujemo **neomejeno lice**. Primer lica na sliki 1.7 je npr. L_1; lice L_6 pa je lice, ki vsebuje vsa ostala lica. Ena povezava lahko omejuje največ dve lici. Pri določanju, ali je graf ravninski ali neravninski, upoštevamo izrek 1.1.



Slika 1.6: Primer polnega grafa K_6 (levo) in primer praznega grafa N_6 (desno)



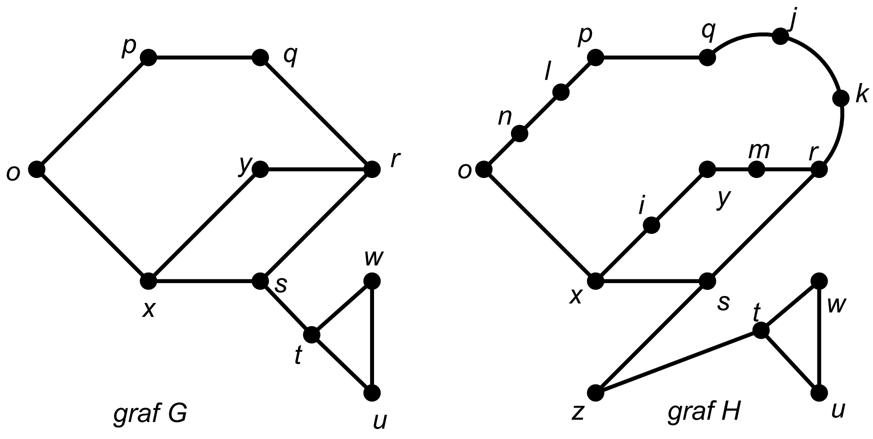
Slika 1.7: Primer ravninskega grafa z lici (levo) in neravninskega (desno) grafa

Graf H je **subdivizija** grafa G, če ga dobimo iz grafa G tako, da nekatere njegove povezave nadomestimo s potmi dolžine vsaj 2 (različne povezave lahko nadomestimo z različno dolgimi potmi). Na sliki 1.8 smo dobili subdivizijo grafa G tako, da smo nadomestili povezavo op s potjo o, n, l, p; qr s potjo q, j, k, r; povezavo yr s potjo y, m, r; povezavo xy s potjo x, i, y; in povezavo st s potjo s, z, t.

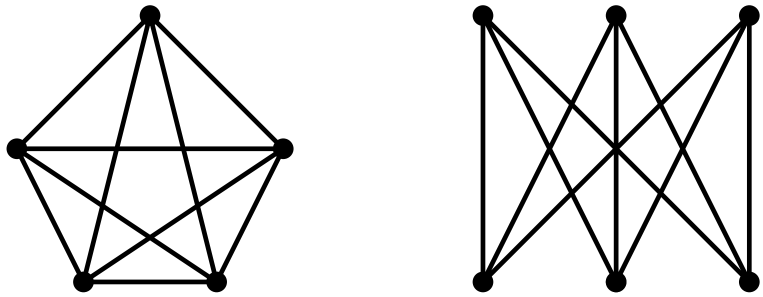
Izrek 1.1 *(Kuratowski) Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije $K_{3,3}$ ali K_5 (slika 1.9).*

Ker grafa K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska, ne bodo ravninski tudi grafi, ki jih dobimo tako, da zamenjamo povezave v grafu K_5 ali $K_{3,3}$ s potmi dolžine vsaj 2.

Graf na desni strani slike 1.7 je neravninski, ker vsebuje subdivizijo grafa K_5 (graf z vozlišči n, p, r, t, u).



Slika 1.8: Graf H (desno) je subdivizija grafa G (levo)



Slika 1.9: Graf K_5 (levo) in graf $K_{3,3}$ (desno)

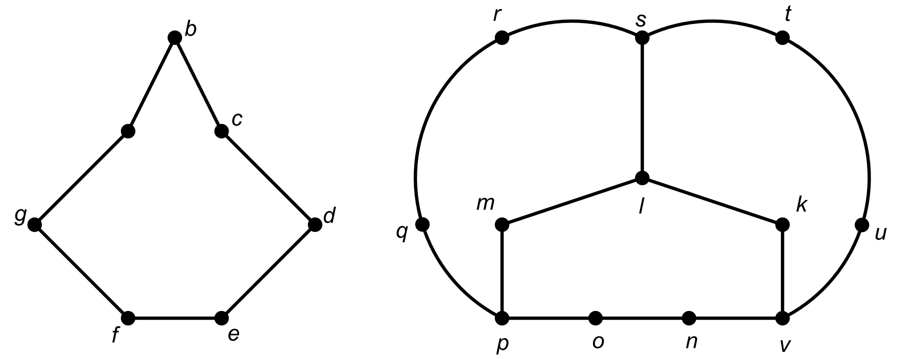
Zunanje ravninski grafi so podmnožica množice ravninskih grafov, za katere velja, da zanje obstaja taka ravninska vložitev, da vsa vozlišča ležijo v enem licu. Za določanje ali je graf zunanje ravninski, uporabimo izrek 1.2.

Izrek 1.2 *Graf je zunanje ravninski natanko takrat, ko ne vsebuje subdivizije K_4 ali $K_{2,3}$ (slika 1.11).*

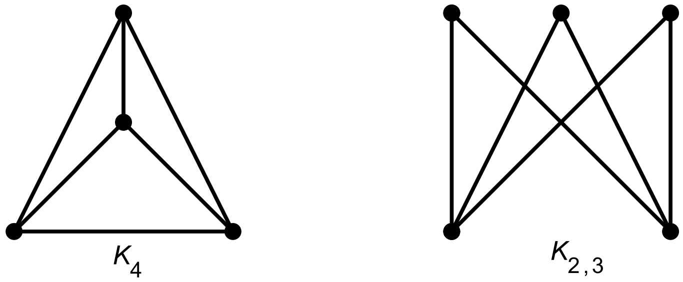
Ker grafa K_4 in $K_{2,3}$ nista zunanje ravninska, ne bodo zunanje ravninski tudi grafi, ki jih dobimo tako, da zamenjamo povezave v grafu K_4 ali $K_{2,3}$ s potmi dolžine vsaj 2.

Graf na desni strani slike 1.10 ni zunanje ravninski, saj vsebuje subdivizijo grafa K_4. Iz danega grafa dobimo graf K_4 tako, da skrčimo spodaj zapisane poti na poti dolžine 1:

- Pot p, o, n, v skrčimo na povezavo pv.



Slika 1.10: Primer ravninskega grafa (levo), ki je hkrati tudi zunanje ravninski in primer ravninskega grafa, ki ni zunanje ravninski (desno)



Slika 1.11: Graf K_4 (levo) in graf $K_{2,3}(desno)$

- Pot v, u, t, s skrčimo na povezavo vs.
- Pot p, q, r, s skrčimo na povezavo ps.
- Pot p, m, l skrčimo na povezavo pl.
- Pot v, k, l skrčimo na povezavo vl.

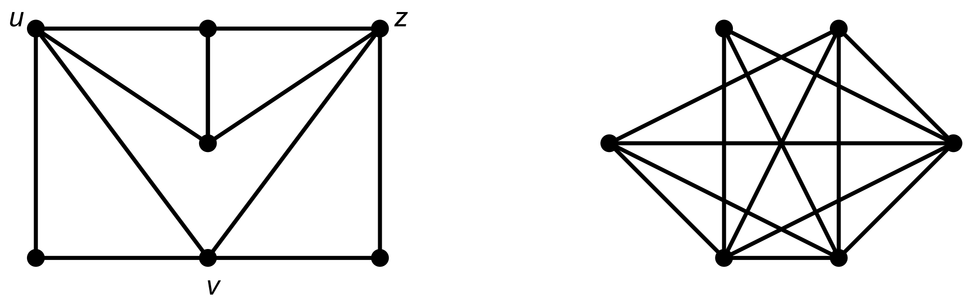
1.2 Poti in najdaljše poti

Sprehod po grafu $G = (V, E)$ je zaporedje vozlišč v_1, v_2, …, v_k tako, da je v_i, $v_{i+1} \in E$ za $1 \leq i \leq k-1$. **Pot** v grafu je sprehod s samimi različnimi vozlišči. **Dolžina poti** P je število vseh povezav na poti. Označimo jo z oznako $|P|$. **Cikel** je pot v grafu, na kateri je končno vozlišče enako začetnemu. Dolžina cikla je vedno večja ali enaka 3.
Primer sprehoda v grafu na sliki 1.1 je q, p, r, s, u, t, r, p, v; primer poti je p, q, s, u, t, r; primer cikla pa p, q, s, r, p. Poglejmo si še oznako za del poti med dvema vozliščema:

Če je pot P pot v graf G in sta x, y vozlišči na poti P, tedaj P_{xy} označuje del poti P med vozliščema x in y. Kot primer vzemimo že zgoraj omenjeno pot p, q, s, u, t, r iz grafa na sliki 1.1 in jo označimo z oznako P. Del poti med vozliščema q in t bi tako označili z oznako P_{qt}.

Najdaljša pot v grafu je pot, ki ima največjo dolžino. Primer najdaljše poti v grafu na sliki 1.1 je pot v, p, q, s, r, t, u, ki je dolžine 6. Množico vseh najdaljših poti v grafu G označimo z oznako $P(G)$. Presek najdaljših poti P_0, P_1, ..., P_n je presek vseh vozlišč na poteh P_0, P_1, ..., P_n. Za presek vseh najdaljših poti v grafu G bomo uporabljali oznako $\cap P(G)$.

Če pot P zajame vsa vozlišča grafa G (to pomeni $V(G) = V(P)$), potem je P **Hamiltonova pot** grafa G. Graf je **Hamiltonov**, če premore cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa. Primer Hamiltonovega grafa prikazuje slika 1.12. Graf G je **Hamiltonovo povezan**, če sta vsaki dve vozlišči iz grafa G povezani s Hamiltonovo potjo. Graf na sliki 1.12 (levo) ni Hamiltonovo povezan, ker vozlišči u in v nista povezani s Hamiltonovo potjo. Prav tako nista s Hamiltonovo potjo povezani vozlišči v in z.



Slika 1.12: Primer Hamiltonovega grafa (levo) in Hamiltonovo povezanega grafa (desno)

Hamiltonovi grafi za iskanje najdaljših poti niso zanimivi, saj imajo v preseku najdaljših poti vsa vozlišča.

Dvodelni graf G je **skoraj Hamiltonovo povezan**, če je vsak par vozlišč povezan s potjo, ki vsebuje vsa vozlišča iz ene biparticijske množice. Takšno pot imenujemo **skoraj Hamiltonova pot**.

Poglavje 2

Preseki najdaljših poti

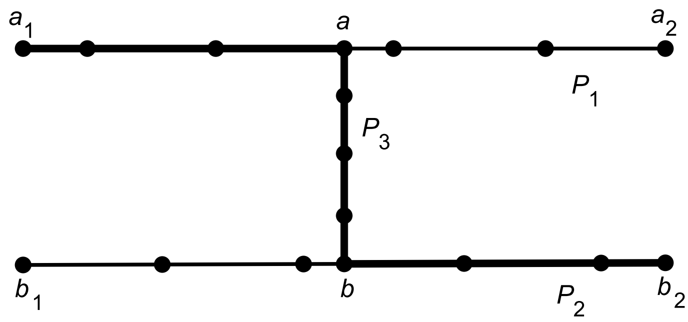
Najprej si bomo pogledali, kako je s presekom dveh najdaljših poti v grafu. Presek dveh najdaljših poti bomo posplošili na presek treh in nato še na več najdaljših poti. Videli bomo, da za presek več kot dveh najdaljših poti odgovor o praznosti oziroma nepraznosti preseka ni preprost. Nato bomo predstavili nekaj primerov grafov s praznim presekom. V zadnjem delu poglavja pa si bomo ogledali, kako je s presekom najdaljših poti v sledljivem, hiposledljivem in razcepljenem grafu.

2.1 Presek dveh najdaljših poti

Za presek dveh najdaljših poti v grafu velja, da je vedno neprazen.

Trditev 2.1 *Če je graf G povezan in sta poti P_1 in P_2 najdaljši poti v grafu G, tedaj je presek $V(P_1) \cap V(P_2)$ neprazen.*

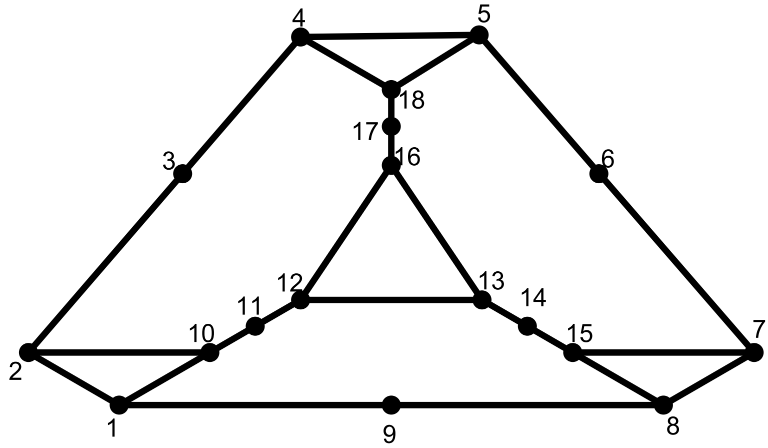
Dokaz. Naj bo graf G povezan graf in P_1 in P_2 najdaljši poti v grafu G, torej velja $|V(P_1)| = |V(P_2)|$. Denimo, da je presek $V(P_1)$ in $V(P_2)$ prazen. Poti P_1 in P_2 sta torej disjunktni. Imamo situacijo kot na sliki 2.1. Naj bo P_3 najkrajša pot, ki povezuje poti P_1 in P_2. Pot P_3 obstaja, saj je graf G povezan. Krajišči poti P_3 sta a in b. Brez škode za splošnost naj bosta dolžini poti med vozliščem a_1 in vozliščem a večja ali enaka kot $\lceil \frac{|V(P_1)|}{2} \rceil$ ter dolžina poti med vozliščem b in vozliščem b_2 večja ali enaka $\lceil \frac{|V(P_2)|}{2} \rceil$. Tedaj je dolžina poti med a_1 in b_2 (poudarjena pot na sliki 2.1) večja ali enaka kot $\lceil \frac{|V(P_1)|}{2} \rceil + |V(P_3)| + \lceil \frac{|V(P_2)|}{2} \rceil \geq |V(P_1)| + |V(P_3)|$. Kar pomeni, da je pot med vozliščema a_1 in b_2 daljša kot pot P_1. To pa je v protislovju z našo predpostavko, da sta pot P_1 in pot P_2 najdaljši poti. Zato je presek $V(P_1) \cap V(P_2)$ neprazen. $\square$



Slika 2.1: Skica za dokaz trditve 2.1

Zgled. Podan imamo graf na sliki 2.2, ki nima nobene Hamiltonove poti. Najprej poiščimo tri najdaljše poti v tem grafu in jih označimo z P_1, P_2, P_3:

- $P_1 = 9, 1, 2, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 8, 7, 6, 5, 4, 18, 17, 16$
- $P_2 = 3, 4, 5, 18, 17, 16, 13, 14, 15, 7, 8, 9, 1, 2, 10, 11, 12$
- $P_3 = 6, 7, 8, 15, 14, 13, 16, 17, 18, 5, 4, 3, 2, 1, 10, 11, 12$



Slika 2.2: Primer za zgled

Vzemimo presek $V(P_1) \cap V(P_2)$. Vidimo, da je res neprazen, saj $V(P_1) \cap V(P_2) = \{$ 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$\}$.

Poglejmo sedaj presek $V(P_1) \cap V(P_2) \cap V(P_3) = \{$ 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$\}$. Vidimo, da je tudi ta presek neprazen.

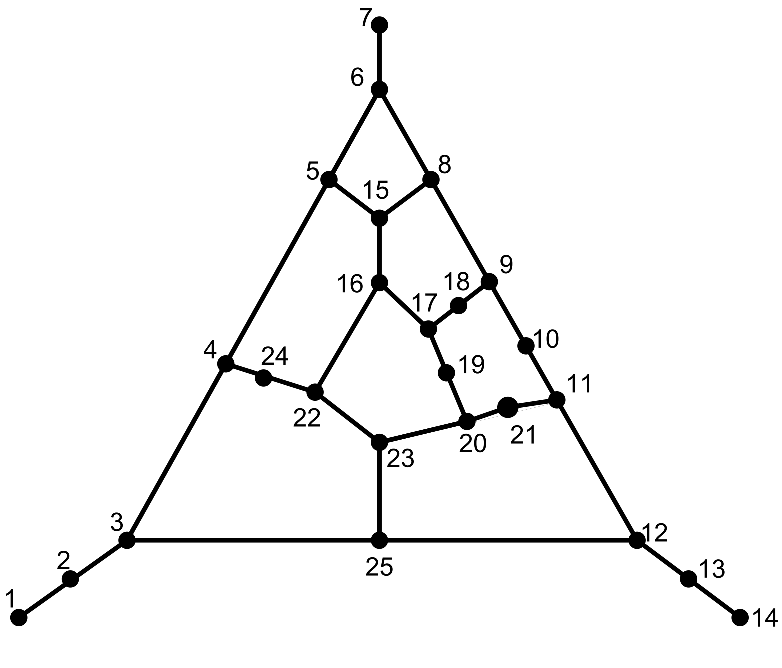
Pri tem se nam upravičeno postavi naslednje vprašanje:

Vprašanje 2.2 *Če je G povezan graf in so poti P_1, P_2 in P_3 najdaljše poti v grafu G, ali je potem presek $V(P_1) \cap V(P_2) \cap V(P_3)$ tudi neprazen?*

Med trditvijo 2.1 in vprašanjem 2.2 je razlika le v tem, da smo v trditvi imeli dve poti, tu pa imamo tri. Kljub temu problema ne znamo rešiti. Predstavljal nam bo osrednji problem diplomske naloge.

2.2 Primeri grafov s praznim presekom najdaljših poti

S preseki najdaljših poti se je prvi ukvarjal Gallai [6] leta 1966. Njegovo vprašanje se je glasilo takole: Ali je v vsakem povezanem grafu vsaj eno vozlišče, ki leži na vsaki najdaljši poti? Negativen odgovor na to vprašanje je leta 1969 z grafom na sliki 2.3 utemeljil Walther [5]. Na najdaljši poti v tem grafu je 21 vozlišč. Nobeno vozlišče se ne nahaja na vsaj eni najdaljši poti.



Slika 2.3: Waltherjev primer

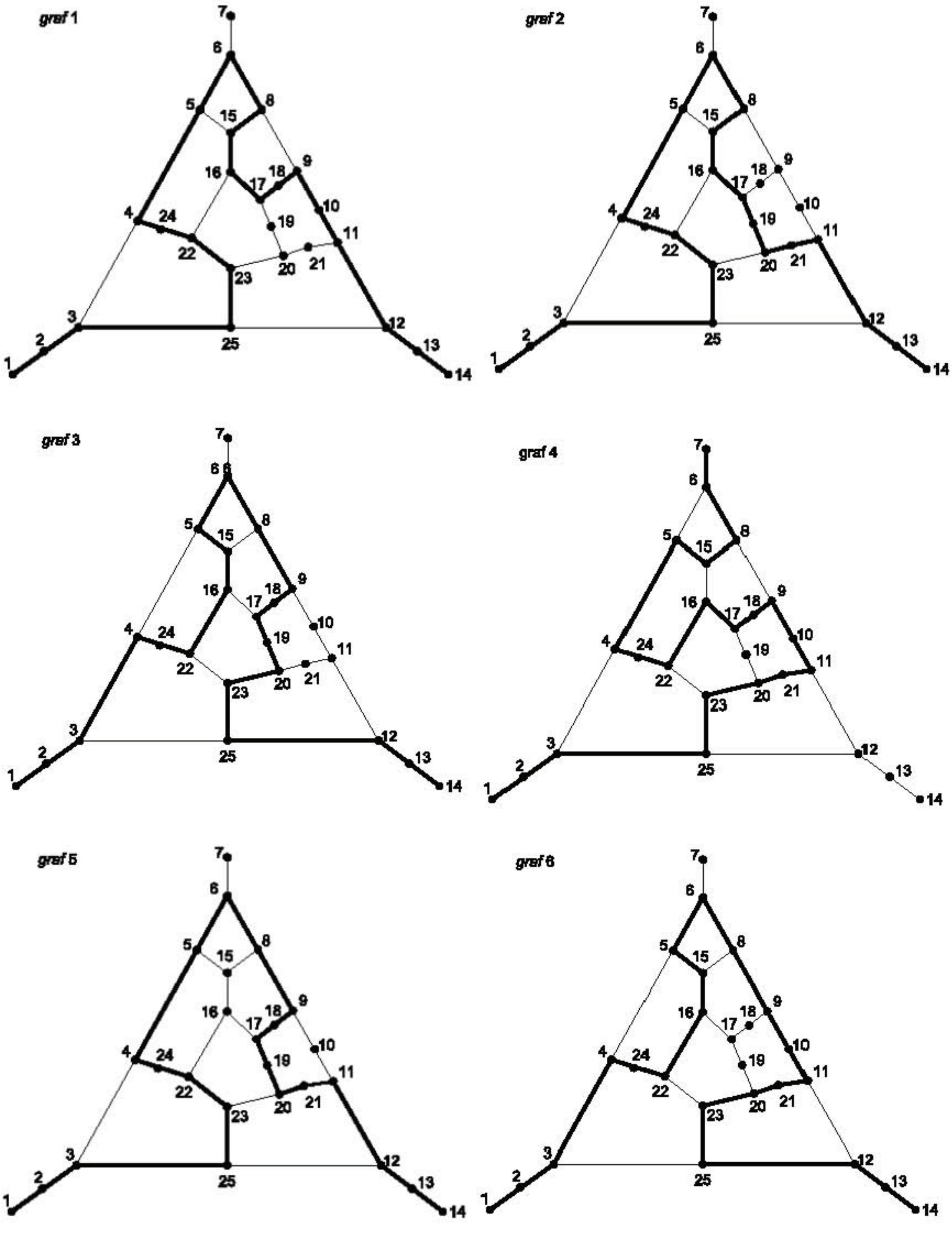
Pokažimo sedaj, da je presek najdaljših poti v grafu na sliki 2.3 res prazen. Vse tukaj napisane najdaljše poti prikazujejo tudi slike 2.4, 2.5 in 2.6. V vseh zapisanih primerih najdaljših poti v tem poglavju bodo, če ne bomo posebej poudarili, za podpičjem zapisana vozlišča, ki niso vsebovana na pripadajoči poti. S pomočjo krepko napisanih vozlišč pa bomo lažje videli, da je presek res prazen.

- 1, 2, 3, 25, 23, 22, 24, 4, 5, 6, 8, 15, 16, 17, 18, 9, 10, 11, 12, 13, 14; **7**, 19, **20** in **21**.
- 14, 13, 12, 11, 21, 20, 19, 17, 16, 15, 8, 6, 5, 4, 24, 22, 23, 25, 3, 2, 1; 7, **9**, **10** in 18.
- 14, 13, 12, 25, 23, 20, 19, 17, 18, 9, 8, 6, 5, 15, 16, 22, 24, 4, 3, 2, 1; 7, 10, **11** in 21.
- 1, 2, 3, 25, 23, 20, 21, 11, 10, 9, 18, 17, 16, 22, 24, 4, 5, 15, 8, 6, 7; **12**, **13**, **14** in 19.
- 1, 2, 3, 25, 23, 22, 24, 4, 5, 6, 8, 9, 18, 17, 19, 20, 21, 11, 12, 13, 14; 7, 10, **15** in **16**.
- 1, 2, 3, 4, 24, 22, 16, 15, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 21, 20, 23, 25, 12, 13, 14; 7, **17**, **18** in **19**.
- 14, 13, 12, 11, 21, 20, 19, 17, 18, 9, 8, 6, 5, 15, 16, 22, 24, 4, 3, 2, 1; 7, 10, **23** in **25**.
- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 15, 16, 17, 18, 9, 10, 11, 21, 20, 23, 25, 12, 13, 14; 7, 19, **22** in **24**.
- 7, 6, 8, 15, 5, 4, 24, 22, 16, 17, 18, 9, 10, 11, 21, 20, 23, 25, 12, 13, 14; 1, 2, **3** in 19.
- 14, 13, 12, 11, 21, 20, 19, 17, 18, 9, 8, 6, 5, 15, 16, 22, 23, 25, 3, 2, 1; **4**, 7, 10 in 24.
- 7, 6, 8, 15, 16, 17, 18, 9, 10, 11, 21, 20, 23, 22, 24, 4, 3, 25, 12, 13, 14; 1, 2, **5** in 19.
- 7, 6, 5, 15, 16, 17, 18, 9, 10, 11, 21, 20, 23, 22, 24, 4, 3, 25, 12, 13, 14; **1**, **2**, **8** in 19.
- 14, 13, 12, 11, 21, 20, 19, 17, 18, 9, 8, 15, 5, 4, 24, 22, 23, 25, 3, 2, 1; **6**, 7, 10 in 16.

V naslednjih letih sta se s tem problemom neodvisno ukvarjala Walther [5] in Zamfirescu [7] ter tako našla graf z 12 vozlišči, ki ima na vsaki najdaljši poti 10 vozlišč in nobeno vozlišče se ne nahaja na vsaj eni najdaljši poti. Prikazan je na sliki 2.7. To je do sedaj najmanjši poznan graf, kjer so preseki najdaljših poti prazna množica.

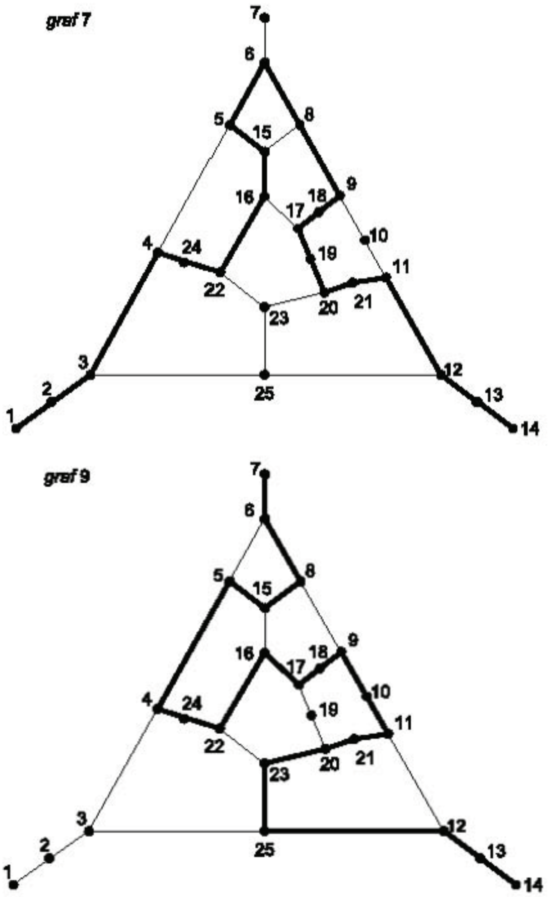
Poglejmo si sedaj nekaj najdaljših poti, s pomočjo katerih bomo videli, da je presek res prazen. Najdaljše poti so prikazane poudarjeno na sliki 2.8 in sliki 2.9.

- 10, 9, 8, 3, 2, 12, 11, 4, 5, 6; **1** in **7** (graf 1).
- 1, 2, 3, 8, 9, 11, 12, 7, 5, 6; **4** in 10 (graf 2).
- 1, 2, 3, 4, 5, 7, 12, 11, 9, 10; 6 in **8** (graf 3).
- 10, 9, 8, 7, 12, 11, 4, 3, 2, 1; **5** in 6 (graf 4).
- 6, 5, 4, 11, 12, 7, 8, 3, 2, 1; **9** in **10** (graf 5).



Slika 2.4: Najdaljše poti, 1. del

- 1, 2, 3, 4, 11, 9, 8, 7, 5, 6; 10 in **12** (graf 6).
- 1, 2, 12, 7, 5, 4, 3, 8, 9, 10; **6** in **11** (graf 7).



Slika 2.5: Najdaljše poti, 2. del

- 10, 9, 8, 7, 5, 4, 11, 12, 2, 1; **3** in 6 (graf 8).
- 6, 5, 4, 3, 8, 7, 12, 11, 9, 10; 1 in **2** (graf 9).

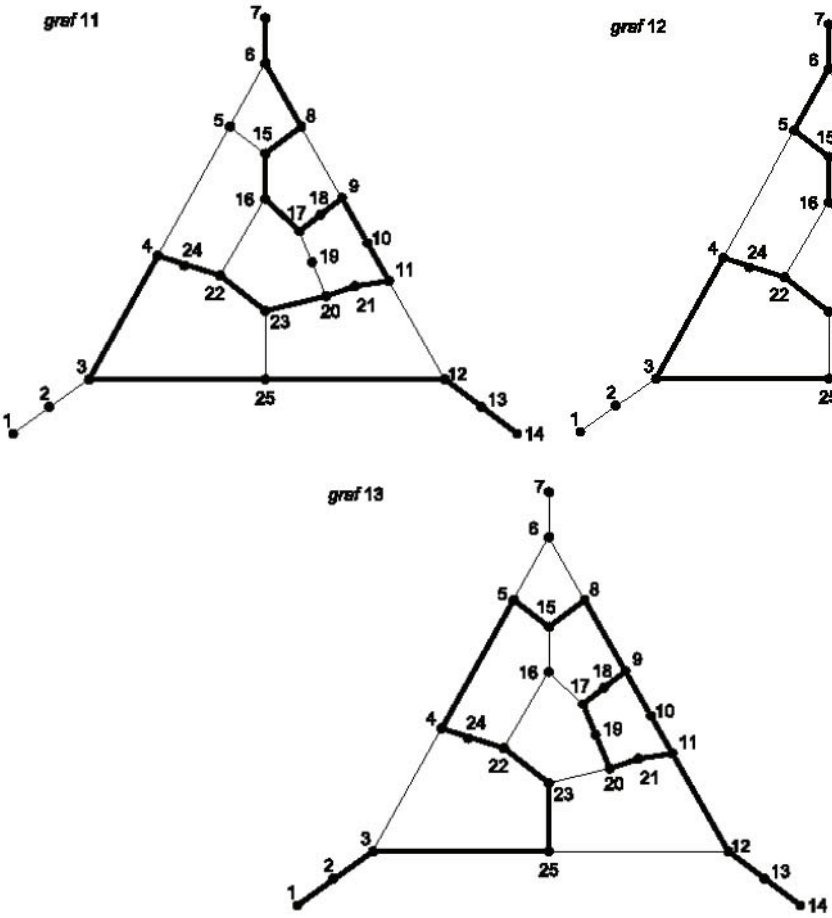
Posplošimo sedaj vprašanje 2.2 s treh najdaljših poti na n najdaljših poti.

Vprašanje 2.3 *Če je G povezan in so P_1, $P_2, \ldots$, P_n različne najdaljše poti, ali je tedaj presek $V(P_1) \cap V(P_2) \cap \ldots \cap V(P_n)$ neprazen?*

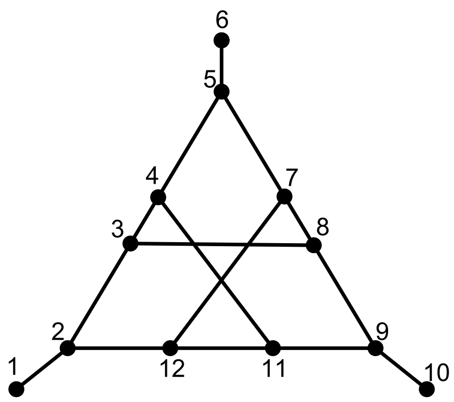
Tudi tukaj s pomočjo izpisanih in označenih najdaljših poti grafa na sliki 2.7 vidimo, da je za $n = 9$ odgovor na vprašanje 2.3 negativen.

Leta 1975 je Schmitz [4] predstavil graf na sliki 2.10, ki ima na najdaljši poti 13 vozlišč. V njem obstaja taka množica sedmih najdaljših poti, da je njihov presek prazen-torej da vsako vozlišče zgrešimo z vsaj eno potjo.

Sedem najdaljših poti, kjer je presek prazen:

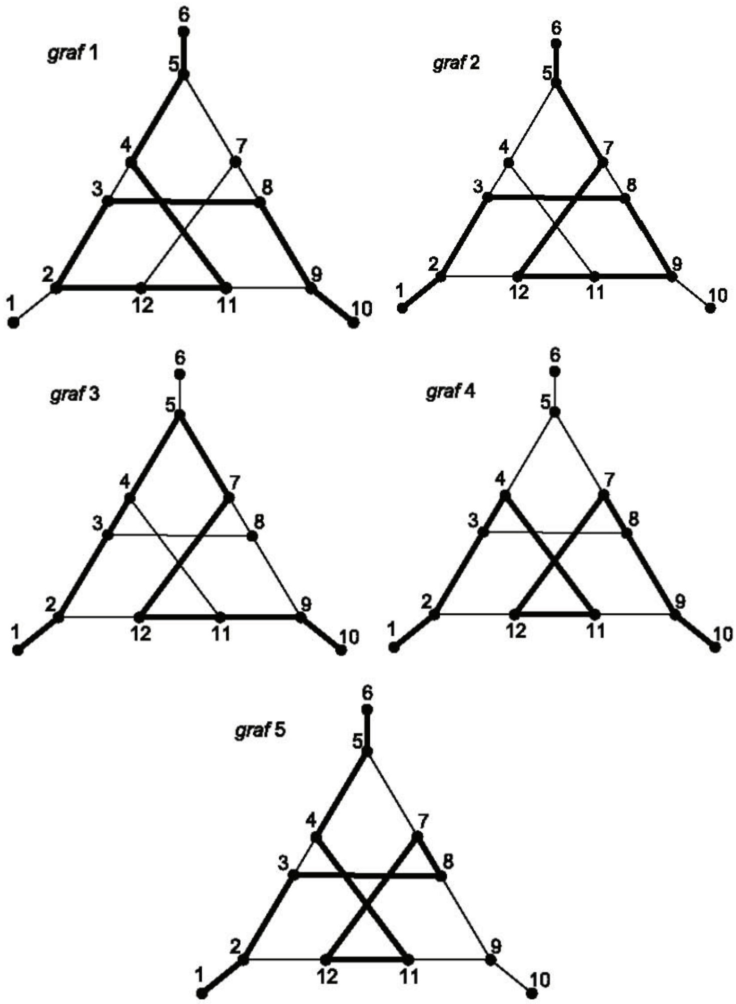


Slika 2.6: Najdaljše poti, 3. del



Slika 2.7: Waltherjev in Zamfirescejev primer

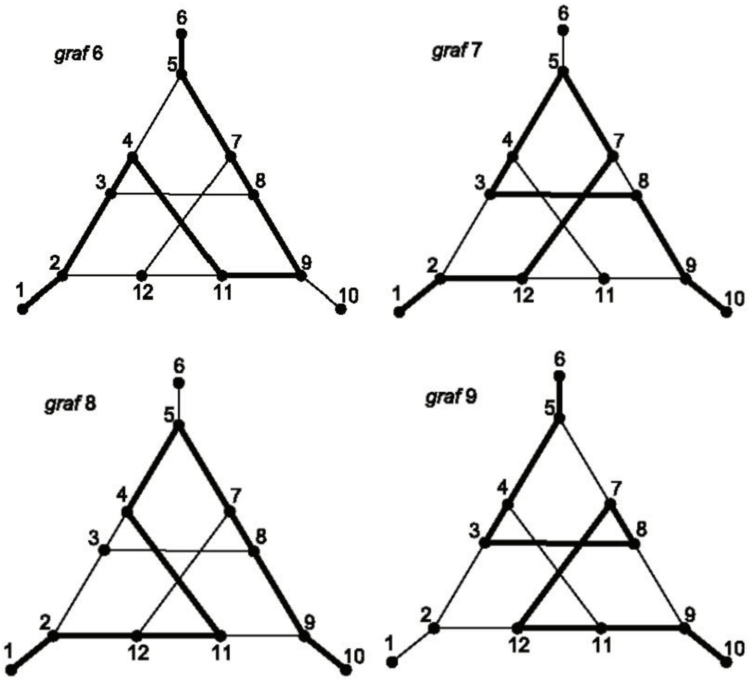
- 9, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 13, 14, 15, 16, 17; **1**, **2**, **3** in **4** (Graf 1).



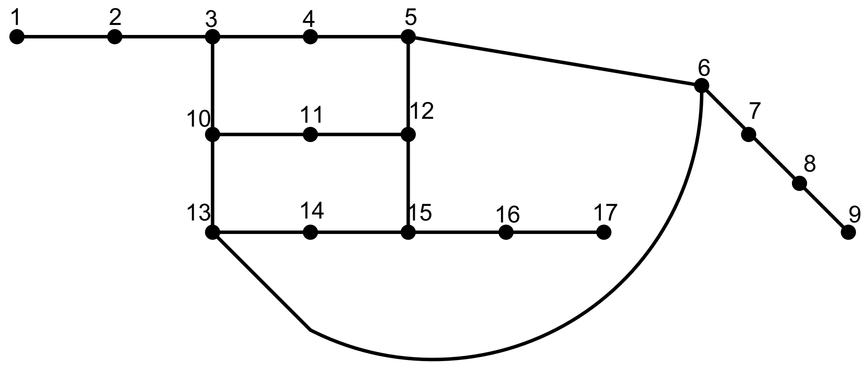
Slika 2.8: Najdaljše poti v Waltherjevem in Zamfirescejevem primeru, 1. del

- 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 10, 11, 12, 15, 16, 17; 1, 2, **13** in **14** (Graf 2).
- 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 10, 13, 14, 15, 16, 17; 1, 2, 11 in **12** (Graf 3).
- 9, 8, 7, 6, 13, 14, 15, 12, 11, 10, 3, 2, 1; 4, **5**, 16 in 17 (Graf 4).
- 9, 8, 7, 6, 13, 14, 15, 12, 5, 4, 3, 2, 1; **10**, **11**, 16 in 17 (Graf 5).
- 9, 8, 7, 6, 13, 10, 11, 12, 5, 4, 3, 2, 1; 14, **15**, **16** in **17** (Graf 6).
- 1, 2, 3, 4, 5, 12, 11, 10, 13, 14, 15, 16, 17; **6**, **7**, **8** in **9** (Graf 7).

Vse zapisane najdaljše poti za graf na sliki 2.10 so narisane poudarjeno na sliki 2.11. S tem je pokazal, da je tudi za $n = 7$ odgovor na vprašanje 2.3 negativen.



Slika 2.9: Najdaljše poti v Waltherjevem in Zamfirescejevem primeru, 2. del



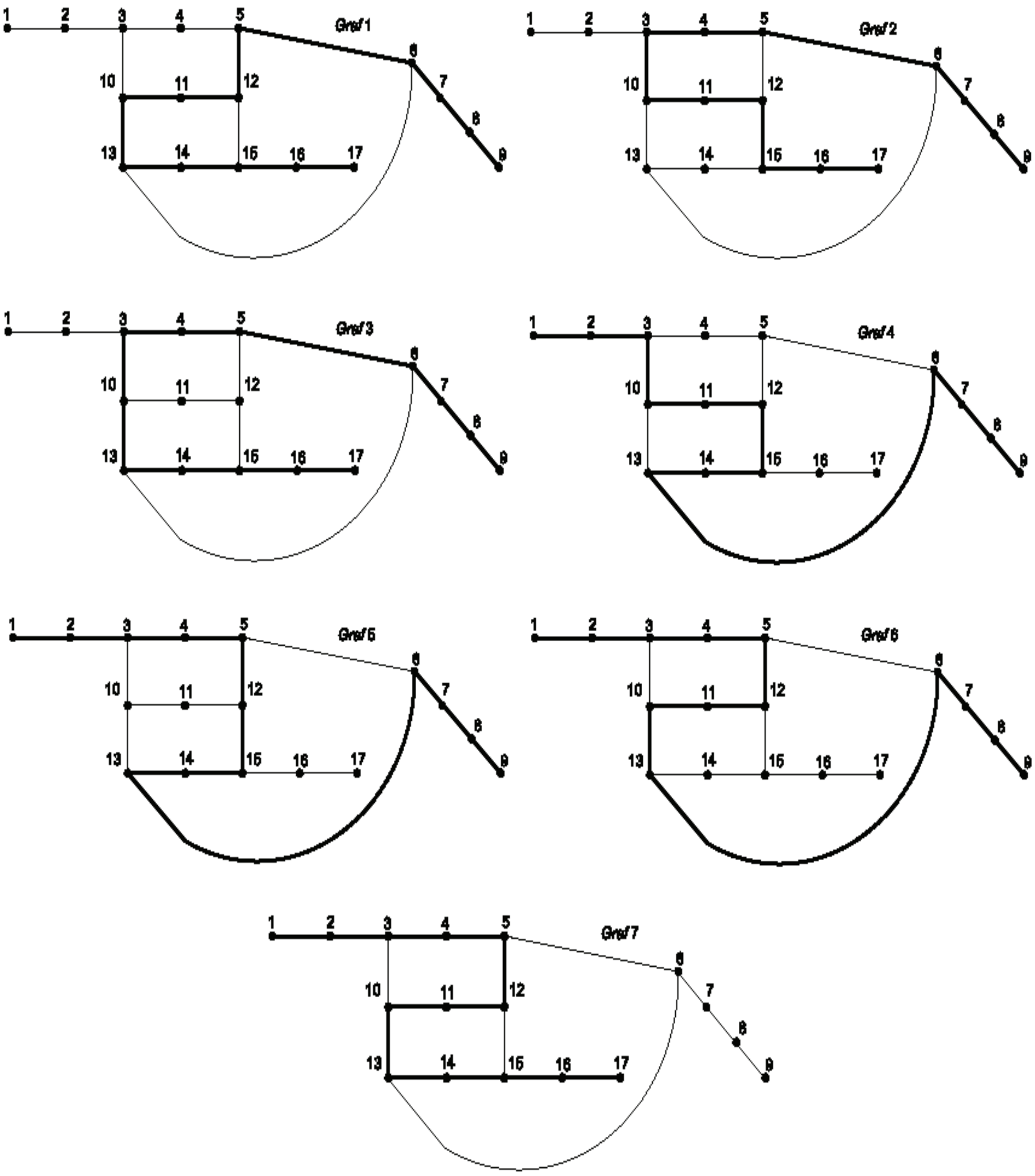
Slika 2.10: Schmitzov primer

2.3 Sledljiv, hiposledljiv in razcepljeni graf

Poglejmo sedaj, kako je s presekom najdaljših poti v sledljivem, hiposledljivem in razcepljenem grafu.

Graf je **sledljiv**, če vsebuje Hamiltonovo pot.

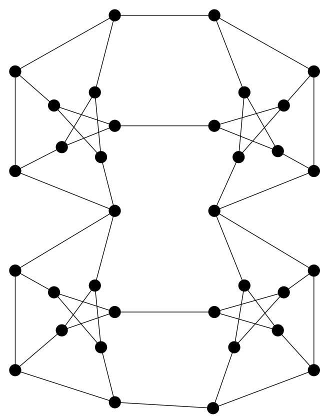
Lema 2.4 *Če je G sledljiv graf, tedaj je presek najdaljših poti neprazen.*



Slika 2.11: Schmitzov primer z označenimi najdaljšimi potmi

Dokaz. Ker je G sledljiv graf, obstaja Hamiltonova pot. Vsaka Hamiltonova pot v grafu poteka skozi vsa vozlišča v grafu in je zato najdaljša pot. Torej so v preseku najdaljših poti vsebovana vsa vozlišča iz grafa, $\cap P(G) = V(G)$. Presek najdaljših poti v sledljivem grafu je tako neprazen. $\square$

Graf G je **hiposledljiv**, če graf G ni sledljiv, graf $G - v$ pa je sledljiv za vsako vozlišče v iz množice $V(G)$. Primer hiposledljivega grafa prikazuje slika 2.12.



Slika 2.12: Primer hiposledljivega grafa, ki ga je konstruiral Thomassen

Lema 2.5 *Če je G hiposledljiv graf, tedaj je presek najdaljših poti prazen.*

Dokaz. Graf G ni sledljiv graf, graf $G - v$ pa je sledljiv za vsako vozlišče v iz množice $V(G)$. Torej za vsako vozlišče v velja, da ni vsebovano na vsaj eni najdaljši poti. Zato je presek prazen. $\square$

Poglejmo si sedaj nekaj definicij, ki nam bodo v pomoč pri definiranju razcepljenega grafa in v dokazu trditve 2.6.

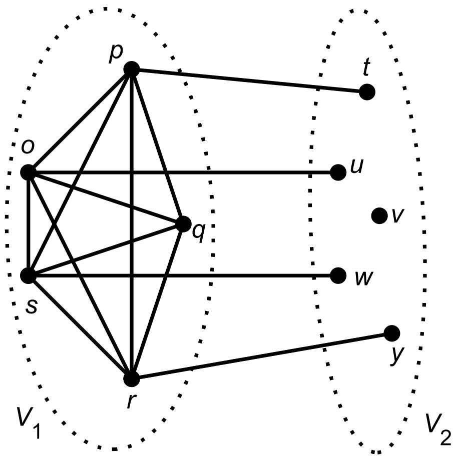
Neodvisna množica vozlišč je množica vozlišč v grafu, med katerimi ne obstajajo povezave. To pomeni, da za vsaki dve vozlišči iz te množice ne obstaja povezava med njima.

Maksimalna neodvisna množica je taka neodvisna množica, v katero ne moremo več dodati vozlišča, ki ne bi bil povezan z vsaj enim vozliščem, ki je že v neodvisni množici. Še drugače, maksimalna neodvisna množica grafa G je taka množica vozlišč, da ima vsaka povezava grafa najmanj eno krajišče v množici, ki ni S in vsako vozlišče, ki ni v S, ima najmanj enega soseda v S.

Klika v neusmerjenem grafu $G = (V, E)$ je taka podmnožica množice vozlišč $C \subseteq V$, da za vsaki dve vozlišči v C obstaja povezava, ki ju povezuje.

Graf G je **dvodelni graf**, če lahko njegova vozlišča razdelimo v dve disjunktni množici U in V tako, da vsaka povezava povezuje vozlišče iz množice U z vozliščem v množici V.

Razcepljeni graf je graf z vozlišči v množici $V = V_1 + V_2$, kjer so v množici V_2 vozlišča, ki so sosedna le z vozlišči v V_1, v V_1 pa so vozlišča, ki so vsa sosedna med seboj in sosedna z



Slika 2.13: Primer razcepljenega grafa

vozlišči iz V_2. Povedano drugače, razcepljeni graf je graf, katerega vozlišča lahko razdelimo v kliko in neodvisno množico.

Primer razcepljenega grafa je na sliki 2.13, kjer je $V_1 = \{o, p, q, r, s\}$ množica vozlišč grafa K_5, množica $V_2 = \{t, u, v, w, y\}$ pa množica vozlišč N_5. Množica V_2 je neodvisna množica, množica $V_2' = \{t, u, v, w, y, q\}$ pa maksimalna neodvisna množica za dani graf.

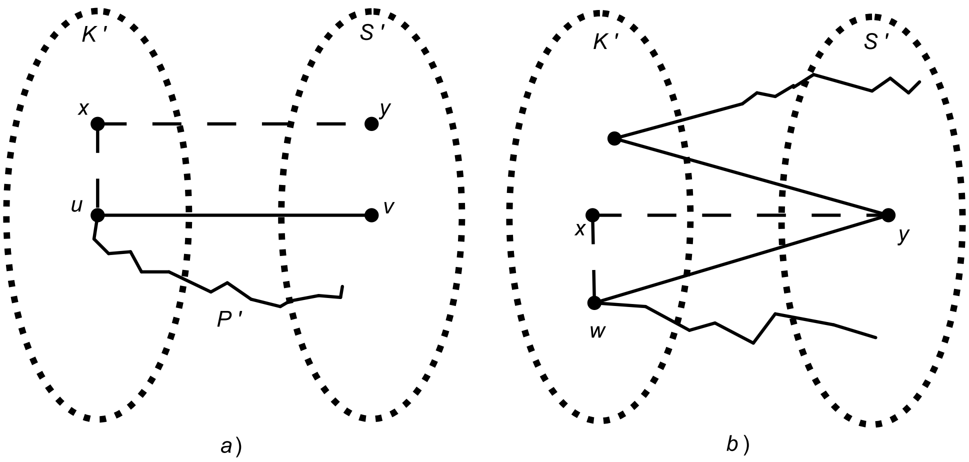
Poglejmo sedaj, kako je s presekom najdaljših poti v razcepljenem grafu:

Trditev 2.6 *Presek najdaljših poti v razcepljenem grafu je neprazen.*

Dokaz. Ker je G razcepljeni graf, lahko njegova vozlišča razdelimo v kliko K in neodvisno množico S tako, da velja $V(G) = K \cup S$. S tem naredimo particijo grafa G v množici K in S. Naj bo S' maksimalna neodvisna množica, ki vsebuje S in $K' = K - S'$. S tem spet dobimo particijo vozlišč grafa G v kliko K' in stabilno množico S'.

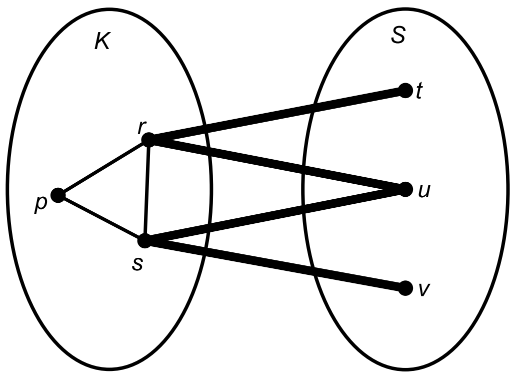
Če je $K' = \emptyset$, je $V(G) = K' \cup S' = \emptyset \cup S' = S'$. Torej so v grafu G vozlišča le iz neodvisne množice, ki pa niso povezana med seboj. Graf tako ni več razcepljeni graf, ker njegova vozlišča ne moremo razdeliti v neodvisno množico in kliko.

Poglejmo si sedaj situacijo, ko je $K' \neq \emptyset$. Naj bo P najdaljša pot v grafu G. Predpostavimo, da za nekatera vozlišča $x \in K'$, x ne leži na poti P. Obe krajišči poti P morata pripadati množici S', ker bi sicer bili poti xP ali Px daljši od poti P. Torej, kot vidimo na sliki 2.14.a), je $P = P'uv$, kjer je $u \in K'$ in $v \in S'$. Ker je množica S' maksimalna neodvisna množica, ima vozlišče $x \in K'$ soseda v S'. Označimo ga z y. Velja, da je $xy \in E(G)$. Imamo dve možnosti: vozlišče y leži na poti P ali vozlišče y ne leži na poti P. Najprej poglejmo primer, ko $y \notin V(P)$. Tedaj je pot $Q = P'uxy$ daljša kot pot $P = P'uv$, kar je protislovje s predpostavko, da je P najdaljša pot. Naj bo sedaj vozlišče $y \in P$ in naj bo vozlišče $w \in K'$ sosed vozlišča y na poti P. V tem primeru lahko podaljšamo pot P tako, da vstavimo vozlišče x med vozlišči w in y (slika 2.14.b)). Tudi v tem primeru nas predpostavka $x \notin V(P)$ pripelje do protislovja, zato velja $x \in V(P)$. Torej velja, da je za vsak $x \in K'$, x leži na poti P. Zato je $K' \subseteq \cap P(G)$. Za kliko K' smo že prej pokazali, da ni prazna, zato je tudi $\cap P(G)$ neprazen. $\square$

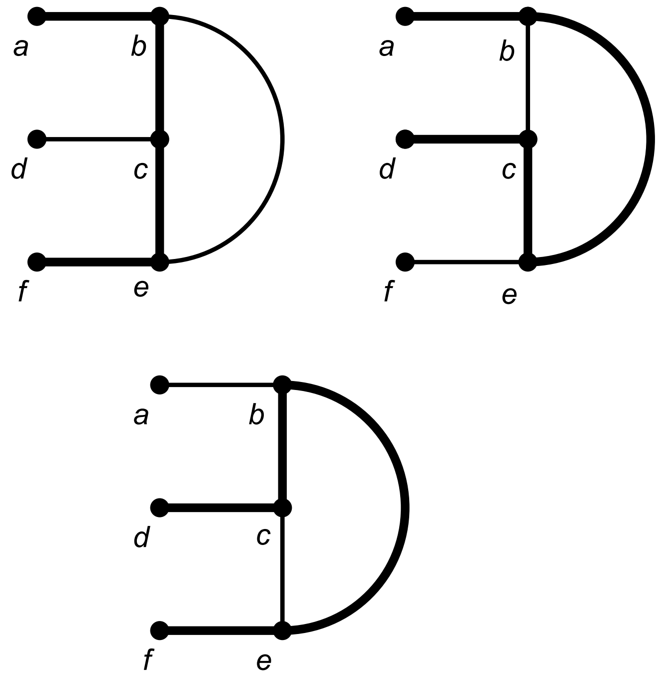


Slika 2.14: Primer za dokaz trditve 2.6

Kljub temu, da velja $K' \subseteq \cap P(G)$, pogoj $K \subseteq \cap P(G)$ ni potreben. To lahko vidimo tudi na sliki 2.15. V tem primeru imamo naslednje množice: kliko $K = \{r, s, p\}$, neodvisno množico $S = \{t, u, v\}$, maksimalno neodvisno množico $S' = \{t, u, v, p\}$ in kliko $K' = K - S' = \{r, s\}$. Vidimo, da je $K' \subseteq P(G)$, medtem ko množica K ni vsebovana v $P(G)$.



Slika 2.15: Razcepljeni graf in najdaljša pot



Slika 2.16: Razcepljeni graf in najdaljše poti

Zgled. V zgledu se osredotočimo na sliko 2.16, kjer so poudarjene vse najdaljše poti v danem razcepljenem grafu na 6 vozliščih. Kot nam pove že sama trditev 2.6, je tudi v našem primeru presek najdaljših poti neprazen, saj je $\cap P(G) = \{b, c, e\}$.

Poglavje 3

Preseki najdaljših poti v blokih

V tem poglavju se bomo osredotočili na bloke v grafu. Najprej bomo zapisali nekaj osnovnih definicij in oznak, nato pa bomo pogledali, katerim lastnostim mora zadoščati vsak blok v grafu, da je presek najdaljših poti v njem neprazen. Namen je pokazati, da je pogoj o nepraznosti presek najdaljših poti v vsakem bloku grafa G zadosten, da je tudi presek najdaljših poti v grafu G neprazen.

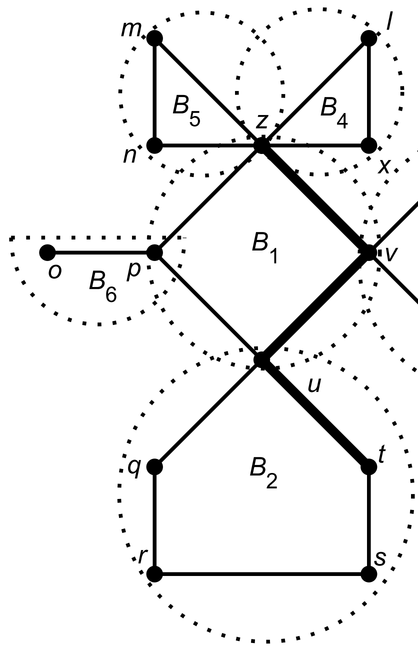
3.1 Bloki

Vpeljimo nekaj oznak in definicij za delo z bloki, ki jih bomo potrebovali v tem poglavju:
Blok grafa G je maksimalno povezan podgraf grafa G, ki ne vsebuje nobenega prereznega vozlišča. Na sliki 3.1 imamo bloke: B_1, B_2, ..., B_6, ki so obkroženi s pikčasto črto.

V grafu je vsaka povezava e v natanko enem bloku in $B(e)$ označuje ta blok. Na sliki 3.1 bi pri povezavi uv označili blok B_1 z oznako $B(uv)$.

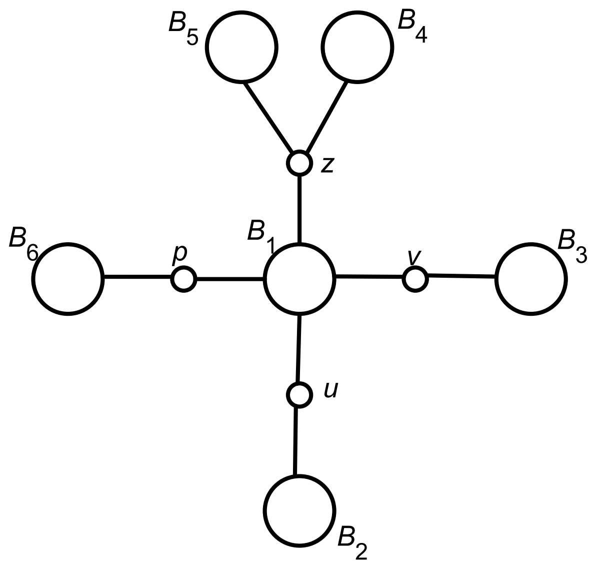
Naj bo P pot v grafu G, B blok v grafu G in v prerezno vozlišče v grafu G. Blok B imenujemo **bistven blok poti** P, če pot P uporablja vsaj eno povezavo bloka B in v imenujemo **bistveno prerezno vozlišče poti** P, če je v prerezno vozlišče dveh bistvenih blokov poti P. Kot primer si poglejmo graf na sliki 3.1. Osredotočimo se na blok B_1, blok B_2 in pot P=t, u, v, z, ki je narisana poudarjeno. V tem primeru sta oba bloka B_1 in B_2 bistvena za pot P, vozlišče u pa je bistveno prerezno vozlišče, saj je prerezno vozlišče blokov B_1 in B_2.

Bločno-prerezno-vozliščno drevo grafa G je graf, katerega vozlišča so bloki in prerezna vozlišča grafa G. Njegove povezave povezujejo vsak blok B s prereznimi vozlišči, ki so vsebovani v B. Označimo ga z oznako $T(G)$. Bločno-prerezno-vozliščno drevo grafa na



Slika 3.1: Primer bistvenega bloka in bistvenega prereznega vozlišča

sliki 3.1 predstavlja slika 3.2. Bloki so predstavljeni z velikimi krogi, prerezna vozlišča pa z majhnimi krogi.



Slika 3.2: Bločno-prerezno-vozliščno drevo za graf na sliki 3.1

Če je P pot v G in e_1, e_2, $\ldots$, e_k zaporedje povezav na poti P, tedaj naj $f(P)$ označuje edino pot, ki povezuje vozlišča, ki pripadajo blokoma $B(e_1)$ in $B(e_k)$ v $T(G)$. Spet poglejmo graf na sliki 3.1. Poudarjeno narisano pot označimo s P. Vidimo, da nam krajišči poti P določita bloka $B(tu)$ in $B(vz)$, zato je $f(P)$=B_2, u, B_1. To pot še lažje vidimo kar v grafu na sliki 3.2.

Vpeljimo še oznako za množico vseh najdaljših poti v bloku: Če je B blok grafa G, tedaj naj $P_B(G)$ označuje množico vseh najdaljših poti v grafu G, ki imajo vsaj eno povezavo v bloku B.

3.2 Lastnosti blokov v grafu

Lema 3.1 *Naj bo $e_1e_2\dots e_k$ zaporedje povezav na poti P v grafu G. Če je $B(e_i) = B(e_j)$ za $i < j$, tedaj je $B(e_i) = B(e_{i+1}) = \dots = B(e_j)$.*

Dokaz. Predpostavimo, da to ni res. V tem primeru obstaja pot v grafu G, ki povezuje dve vozlišči iz bloka $B(e_i)$, ne da bi uporabljala katerokoli povezavo iz $B(e_i)$. V vsakem bloku sta katerikoli dve vozlišči povezani s potjo v tem bloku, zato mora eno vozlišče pripadati ciklu, ki poteka skozi več kot en blok grafa G. To pa je v protislovju z dejstvom, da vsak cikel poteka skozi natanko en blok. □

Lema 3.2 *Naj bo P pot v grafu G. Tedaj vozlišče iz $T(G)$ leži na $f(P)$ natanko tedaj, ko pripada bistvenemu bloku ali prereznemu vozlišču poti P.*

Dokaz. : Naj bo $e_1e_2\dots e_k$ zaporedje povezav na poti P. V zaporedju

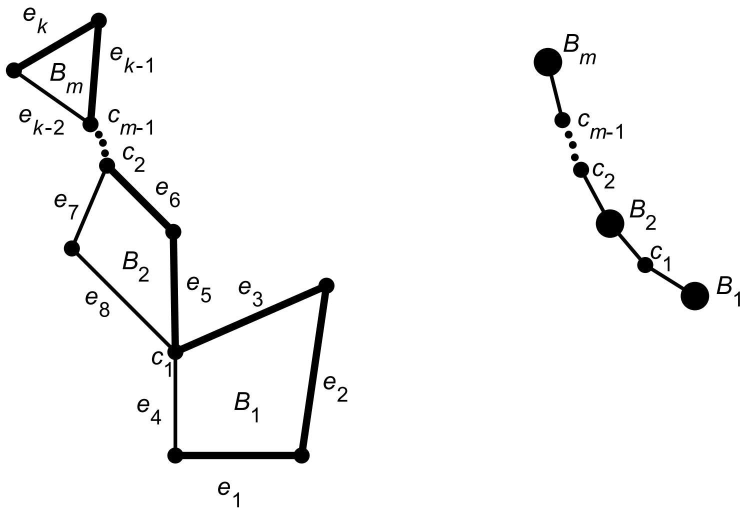
$$B(e_1)B(e_2)\dots B(e_k) \tag{3.1}$$

so vsi bloki, ki so bistveni bloki za pot P. Med njimi je lahko nekaj med seboj enakih, zato vsako grupo z zaporednimi identičnimi bloki v (3.1) zamenjamo s posameznimi bloki grupe tako, da velja omejitev $B_i \neq B_{i+1}$ za i =1, 2, ..., $m-1$ (Na sliki 3.3 (levo) bi to pomenilo, da smo bistvene bloke $B(e_1) = B(e_2) = B(e_3)$ zamenjali z B_1, bloke $B(e_5) = B(e_6)$ zamenjali z B_2, ..., bloke $B(e_{k-1}) = B(e_k)$ pa z B_m). Tako dobimo maksimalno podzaporedje

$$B_1B_2\dots B_m. \tag{3.2}$$

Po lemi 3.1 smo dobili zaporedje s samimi različnimi bloki. Z oznako c_i označimo skupno prerezno vozlišče bloka B_i in bloka B_{i+1} v (3.2) za i =1, 2, ..., $m-1$. Prerezna vozlišča c_1, c_2,

..., c_{m-1} so bistvena za pot P. Ker so bloki v zaporedju 3.2 različni, drugih takih prereznih vozlišč ni, ali pa obstaja cikel, ki ni vsebovan v nobenem posameznem bloku. Zaporedje vozlišč v $T(G)$, ki ustreza zaporedju $B_1c_1B_2c_2\ldots B_{m-1}c_{m-1}B_m$ (slika 3.3 (desno)), je pot, ki povezuje vozlišča, ki pripadajo $B(e_1)$ in $B(e_k)$ v $T(G)$. Ker je ta pot edina, sovpada z $f(P)$. Tako vidimo, da so vozlišča, ki ležijo na $f(P)$, vozlišča, ki pripadajo bistvenemu bloku poti P ali pa bistvenemu prereznemu vozlišču poti P. □



Slika 3.3: Primer grafa G s poudarjeno potjo P (levo) in grafa $T(G)$ (desno) za dokaz leme 3.2

Lema 3.3 *Če je pot P najdaljša med svojima krajiščema, tedaj je to tudi najdaljša pot med vsakima dvema bistvenima prereznima vozliščema.*

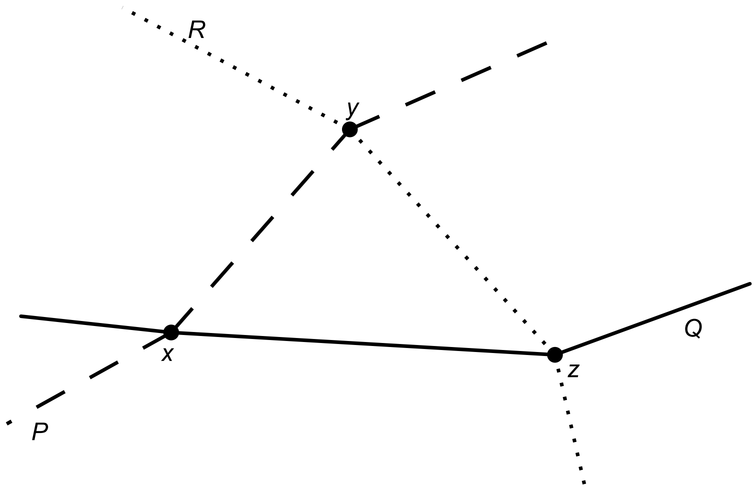
Dokaz. Naj bo P najdaljša pot, ki povezuje vozlišči x in y in naj bosta vozlišči u in v bistveni prerezni vozlišči za pot P. Predpostavimo, da obstaja pot Q, ki povezuje u in v tako, da velja $|Q| > |P_{uv}|$. Trdimo, da pot Q ne vsebuje niti enega vozlišča s poti P_{xu} in P_{vy} razen u in v. To bomo dokazali s protislovjem. Poglejmo obe možnosti. Najprej poglejmo primer, ko imata P_{vy} in Q skupno vozlišče. Naj bo vozlišče w prvo tako vozlišče na poti Q. Ker obe poti P_{uv} in Q povezujeta vozlišči u in v, je tudi pot med pripadajočimi bistvenimi bloki enaka. Zato velja $f(P_{uv}) = f(Q)$ v $T(G)$. Po lemi 3.2 je zato zaporedje bistvenih blokov za P_{uv} in Q enako. Skupaj z dejstvom, da je v bistveno prerezno vozlišče za pot P, sledi, da je $P_{vw}Q_{wv}$ cikel, ki vsebuje povezave iz najmanj dveh različnih bistvenih blokov, kar pa ni možno. Ostane nam še podoben primer, ko imata P_{xu} in Q skupno vozlišče. Naj bo vozlišče z prvo tako vozlišče na poti Q. Že od prej vemo, da je zaporedje bistvenih blokov za P_{uv} in Q enako. Skupaj z dejstvom, da je u bistveno prerezno vozlišče za pot P, spet sledi, da je $P_{uz}Q_{zu}$ cikel, ki vsebuje povezave iz najmanj dveh različnih bistvenih blokov, kar nas spet pripelje do nemogoče situacije. Torej pot Q ne vsebuje niti enega vozlišča s poti P_{xu} in P_{vy} razen u in v. Tako dobimo pot $P_{xu}QP_{vy}$, ki je daljša kot pot P, kar je protislovje z našo začetno predpostavko, da je P najdaljša pot med vozliščema x in y. □

3.3 Bloki z nepraznim presekom najdaljših poti

Izrek 3.4 *Presek najdaljših poti v grafu G je neprazen natanko tedaj, ko je neprazen presek najdaljših poti v vsakem bloku grafa G.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo $\cap P(G) \neq \emptyset$. Ker je $P_B(G) \subseteq P(G)$, sledi, da je tudi $\cap P_B(G) \neq \emptyset$.
($\Leftarrow$) Naj bo $\cap P_B(G) \neq \emptyset$. Za dokaz bomo ločili dve možnosti. Najprej bomo pogledali tisto, ko obstaja par poti, ki nima skupnega bistvenega bloka, nato pa še možnost, ko ima vsak par poti skupen bistven blok:

1. Predpostavimo, da obstaja par poti P in Q, ki nima skupnega bistvenega bloka. Po lemi 2.1 je $P \cap Q \neq \emptyset$. Ker je presek neprazen, vsebuje vsaj eno vozlišče. Če bi $P \cap Q$ vseboval več kot eno vozlišče, bi imeli poti P in Q skupno povezavo, ali pa bi obstajal cikel v G, ki bi vseboval pot P in Q. V tem primeru bi imeli poti P in Q skupen bistven blok, kar pa je v nasprotju z našo predpostavko. Torej je v preseku $P \cap Q$ samo eno vozlišče. Označimo ga z x. Trdimo, da je $x \in \cap P(G)$. Predpostavimo, da obstaja pot $R \in P(G)$, ki ne vsebuje vozlišča x. Po lemi 2.1 je tudi $P \cap R \neq \emptyset$ in $R \cap Q \neq \emptyset$. Naj bo vozlišče $y \in P \cap R$ tako, da pot P_{xy} ne vsebuje nobenega drugega vozlišča iz R. Ker R ne vsebuje vozlišča x, sledi, da je $x \neq y$. Prav tako naj bo vozlišče $z \in Q \cap R$ tako, da pot Q_{zx} ne vsebuje nobenega drugega vozlišča iz R. Ker pot R ne vsebuje vozlišča x, sledi, da je $x \neq z$. Ker P_{xy} ne vsebuje drugega vozlišča iz R razen $y \in P \cap R$ in Q_{zx} ne vsebuje nobenega drugega vozlišča iz R razen $z \in P \cap R$, sledi, da je tudi $y \neq z$. Naj bo W zaprt sprehod, ki ga dobimo z zlepljenjem poti P_{xy}, R_{yz} in Q_{xz} v zapisanem vrstnem redu. Pokazati želimo, da je W cikel. Naj bo u vozlišče na poti P_{xy}. Tedaj imamo dve možnosti: $u \in Q_{zx}$ ali $u \in R_{yz}$. Če je $u \in Q_{zx}$, je $u \in P \cap Q$. Ker je x edino vozlišče v preseku $P \cap Q$, sledi, da je $u = x$. Če je $u \in R_{yz}$, je $u \in P \cap R$. Ker ni nobeno notranje vozlišče s poti P_{xy} v R, sledi, da je $u = y$. Od tod sledi, da je $P_{xy} \cap Q_{zx} = \{x\}$ in $P_{xy} \cap R_{yz} = \{y\}$. Sledi tudi, da je $R_{yz} \cap Q_{zx} = \{z\}$. Iz teh treh enakosti sledi, da je W cikel. Dano situacijo prikazuje slika 3.4. Naj bo B blok iz G, ki vsebuje cikel W. Ker je $x \neq y$ in $x \neq z$, dolžine poti $|P_{xy}|$ in $|Q_{zx}|$ niso enake nič, zato so pozitivne. Sledi, da je B bistveni blok za poti Q in P, kar pa je v nasprotju z našo predpostavko. Torej mora pot R vsebovati vozlišče x. Ker je R poljubna pot, sledi, da je $x \in P(G)$ in zato $\cap P(G) \neq \emptyset$.



Slika 3.4: Prikaz poti P, Q in R, ki tvorijo cikel

2. Naj za vsak par poti P in Q obstaja blok B, ki je bistven za obe poti. Naj bo $T(G)$ bločno prerezno vozliščno drevo grafa G in naj bo $f(P)$ pot, ki pripada poti P v $T(G)$. Po lemi 3.2 $f(P)$ in $f(Q)$ vsebujeta vozlišča, ki pripadajo bloku B v $T(G)$. Zato se vsi pari $f(P)$, $P \in P(G)$, sekajo. Po Hellyjevi lastnosti obstaja vozlišče $v \in V(T(G))$, ki je vsebovano v $f(P)$ za vsak $P \in P(G)$. Vozlišče v torej sovpada z bločno prereznim vozliščem c v G ali pa pripada bloku B iz G(lema 3.2). Če sovpada z bločno prereznim vozliščem c, sledi po lemi 3.2, da c leži na vsaki poti $P \in P(G)$, kar pomeni, da je $\cap P(G) \neq \emptyset$. Če v pripada bloku B v grafu G, tedaj spet po lemi 3.2 sledi, da je $P(G) = P_B(G)$ in zato $\cap P(G) \neq \emptyset$. Torej vidimo, da je tudi v primeru, ko za vsak par poti obstaja blok, ki je bistven za obe poti, presek najdaljših poti neprazen. □

V nadaljevanju si bomo pogledali nekaj tipičnih blokov, za katere lahko uporabimo izrek 3.4.

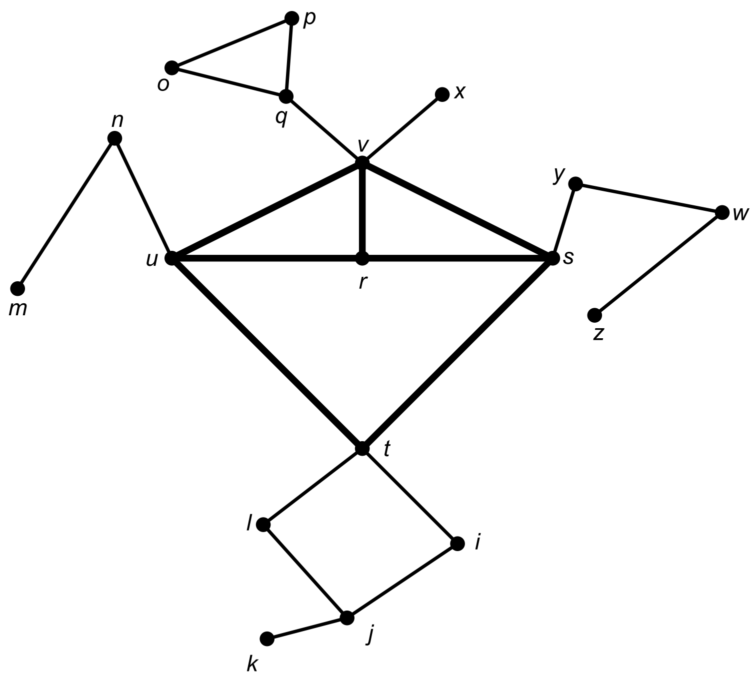
Trditev 3.5 *Naj bo B blok grafa G. Če je B Hamiltonovo povezan, tedaj je $\cap P_B(G) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Pot $P \in P_B(G)$, zato ima vsaj eno povezavo v bloku B in zato vsaj dve različni vozlišči v B. Ker je B Hamiltonovo povezan, vsebuje tudi Hamiltonovo pot med tema dvema vozliščema in ker je P najdaljša pot, po lemi 3.3 pot P poteka skozi vsa vozlišča bloka B. □

Zgled. Na sliki 3.5 je graf G, ki ima Hamiltonovo povezan blok (na sliki je narisan poudarjeno). Označimo ta blok z B. Poglejmo si najdaljše poti v G. Vozlišča iz bloka B so napisana krepko:

- k, j, i, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{v}$, q, p, o.
- k, j, i, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{v}$, q, o, p.
- k, j, l, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{v}$, q, p, o.
- k, j, l, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{v}$, q, o, p.
- k, j, i, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, q, p, o.
- k, j, i, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, q, o, p.
- k, j, l, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, q, p, o.
- k, j, l, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, q, o, p.
- z, w, y, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$, q, p, o.
- z, w, y, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$, q, o, p.

Vidimo, da vsaka najdaljša pot v grafu vsebuje vsa vozlišča iz bloka B. Presek najdaljših poti v grafu je tudi tukaj neprazen.



Slika 3.5: Primer grafa za zgled

Torej s pomočjo izreka 3.4 opazimo: če bodo v grafu vsi bloki Hamiltonovo povezani, tedaj bo presek najdaljših poti neprazen. S pomočjo naslednje trditve pa bomo videli, da enako velja tudi za skoraj Hamiltonovo povezane bloke.

Trditev 3.6 *Naj bo B dvodelni blok v grafu G. Če je B skoraj Hamiltonov povezan, tedaj je $\cap P_B(G) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Naj bo $P \in P_B(G)$ in $V(B) = V_1 \cup V_2$ biparticija bloka B. Pokažimo, da je

$$V_1 \subseteq V(P) \tag{3.3}$$

ali

$$V_2 \subseteq V(P). \tag{3.4}$$

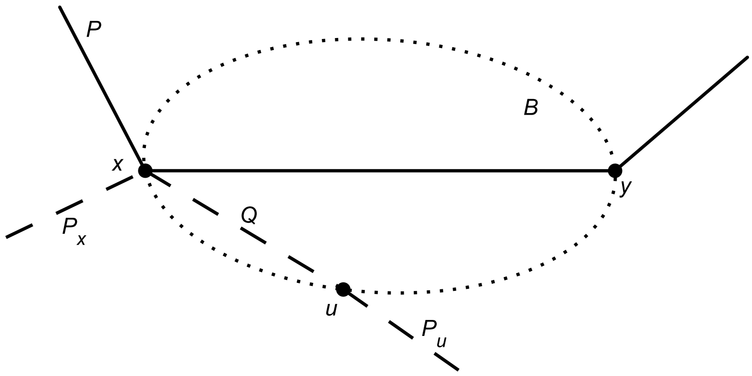
Recimo, da to ne velja. Naj bosta u in v vozlišči, v katerih pot P seka blok B in R skoraj Hamiltonova pot med u in v. Ker je R skoraj Hamiltonova pot, vsebuje vsa vozlišča iz V_1 in V_2, zato je $|R| > |P_{uv}|$, kar pa je v protislovju z lemo 3.3. Torej je $V_1 \subseteq V(P)$ ali $V_2 \subseteq V(P)$.

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $|V_1| \leq |V_2|$. Najprej si poglejmo primer, ko je $|V_1| < |V_2|$. Moči množice $V(P) \cap V_1$ in $V(P) \cap V_2$ se lahko razlikujeta za največ 1, saj sta V_1 in V_2 particijski množici. Po (3.3) in (3.4) sledi, da vsaka pot $P \in P_B(G)$ vsebuje vsa vozlišča iz V_1 in je zato $V_1 \subseteq P_B(G)$. Torej je $\cap P_B(G) \neq \emptyset$.

Naj bo sedaj $|V_1| = |V_2|$. Ločimo dva primera. Če vsaka pot $P \in P_B(G)$ seka blok B v različnih biparticijskih množicah, tedaj po 3.3 velja, da je $V(B) \subseteq P_B(G)$ in trditev je dokazana. V nasprotnem primeru naj bo $P \in P_B(G)$ pot, ki seka B v enaki biparticijski množici V_1. Trdimo, da je potem $V_1 \subseteq P_B(G)$. Recimo, da to ne velja. Tedaj obstaja pot $Q \in P_B(G)$, ki seka B v vozliščih $x, y \in V_2$. Naj bo $P = P_1P_2P_3$ in $Q = Q_1Q_2Q_3$, kjer sta Q_2 in P_2 dela poti Q in P znotraj bloka B. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $|P_1| \geq |P_3|$ in $|Q_1| \geq |Q_3|$. Naj bo R skoraj Hamiltonova pot v B, ki povezuje skupna vozlišča poti P_1 in P_2 s skupnimi vozlišči poti Q_1 in Q_2. Iz leme 3.3 sledi, da je $|R| = |P_2| + 1 = |Q_2| + 1$. Ker velja $|P_1| \geq |P_3|$, $|Q_1| \geq |Q_3|$ in $|P_1| + |P_3| = |Q_1| + |Q_3|$, je torej $|Q_1| \geq |P_3|$. Zato velja: $|P| = |P_1| + |P_2| + |P_3| < |P_1| + |R| + |P_3| \leq |P_1| + |R| + |Q_1|$. Tako je pot P_1RQ_1 daljša kot pot P, kar je protislovje s predpostavko, da je P najdaljša pot v bloku B, zato je $V_1 \subseteq P_B(G)$ in je $\cap P_B(G) \neq \emptyset$. □

Trditev 3.7 *Naj bo B blok grafa G z naslednjimi lastnostmi: Če je P pot v bloku B in u vozlišče iz bloka B, ki ni na poti P, tedaj obstaja pot Q v bloku B, ki povezuje eno krajišče poti P z vozliščem u tako, da velja $|Q| > |P|$. Če graf zadošča tej lastnosti, tedaj je $\cap P_B(G) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Za vsako vozlišče $v \in V(B)$ naj bo P_v najdaljša pot, ki se začne v vozlišču v in ne vsebuje nobenega drugega vozlišča iz bloka B. Med vsemi vozlišči iz $V(B)$ izberimo tako vozlišče u, da bo dolžina poti P_u, $|P_u|$, največja. Trdimo, da je $u \in \cap P_B(G)$. Dokažimo to s protislovjem. Predpostavimo, da je $P \in P_B(G)$ in $u \notin V(P)$. Naj bosta x in y vozlišči, v katerima pot P seka blok B. Po prvem delu v trditvi, obstaja pot Q v bloku B, ki povezuje eno krajišče poti P_{xy} z vozliščem u tako, da velja $|Q| > |P_{xy}|$. Tedaj je pot $P_x Q P_u$ daljša kot pot $P = P_x P_{xy} P_y$, ki je najdaljša pot v bloku B (slika 3.6). Protislovje. Torej je $P \in P_B(G)$ in $u \in V(P)$ in zato je presek najdaljših poti v bloku B res neprazen. □



Slika 3.6: Primer grafa za dokaz trditve 3.7

Povežimo sedaj trditve 3.5, 3.6, 3.7 in izrek 3.4:

Posledica 3.8 *Če je vsak blok v grafu G Hamiltonovo-povezan, skoraj Hamiltonovo povezan ali cikel, potem je presek najdaljših poti v grafu G neprazen.*

Dokaz. Z uporabo trditev 3.5, 3.6 in 3.7 smo pokazali, da imajo vsi bloki, ki so Hamiltonovo povezani, skoraj Hamiltonovo povezani in cikli neprazen presek najdaljših poti. Po izreku 3.4 je presek najdaljših poti v grafu neprazen natanko tedaj, ko je neprazen presek najdaljših poti v vseh blokih grafa. □

Posledica 3.9 *Če je G bločni graf, tedaj je presek najdaljših poti v grafu G neprazen.*

Dokaz. Graf je bločni graf natanko tedaj, ko so njegovi bloki polni. Tedaj je po posledici 3.8 presek najdaljših poti neprazen. □

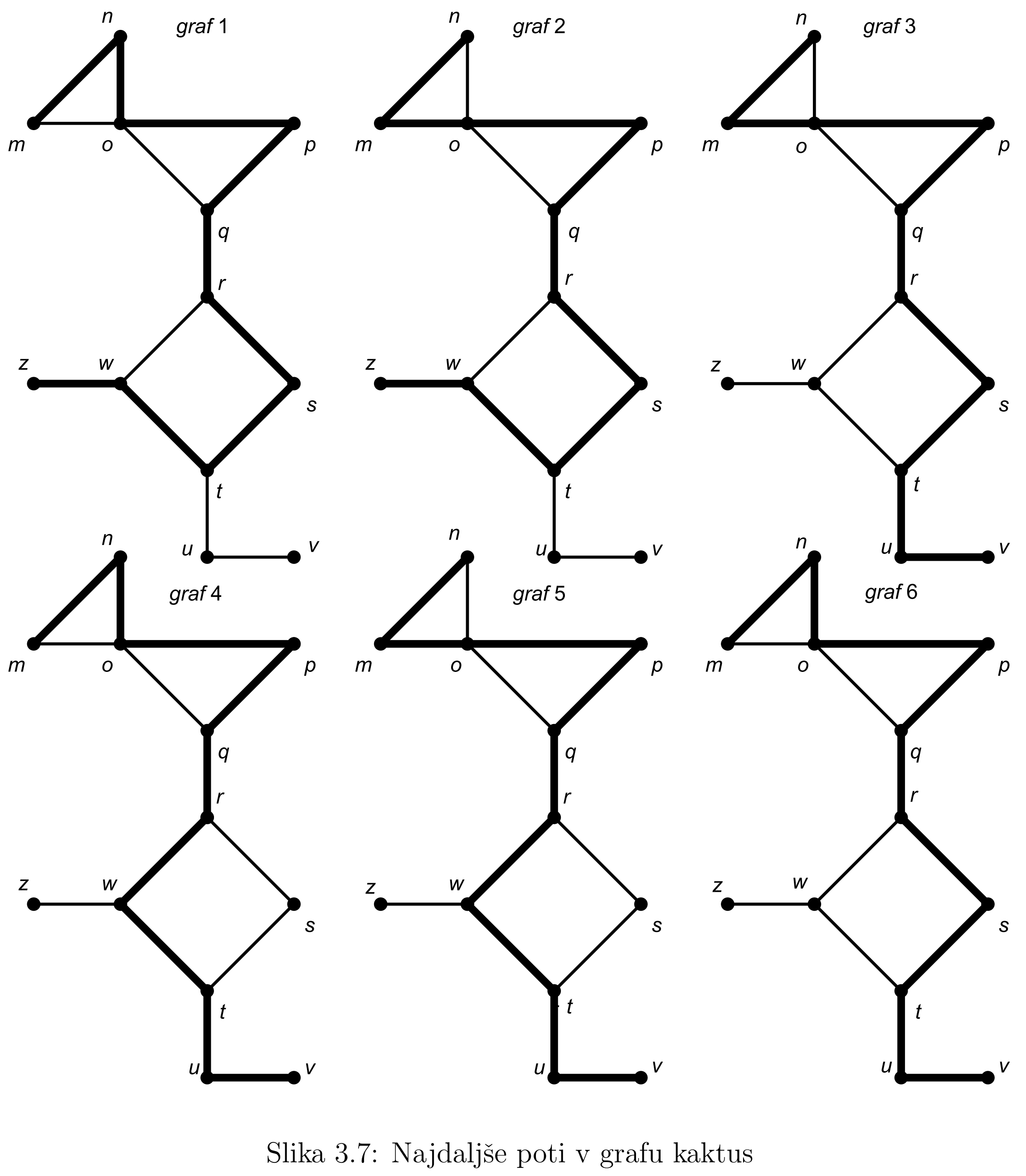
Posledica 3.10 *Če je graf kaktus, tedaj je presek najdaljših poti v grafu G neprazen.*

Dokaz. Graf je kaktus natanko tedaj, ko so njegovi bloki cikli ali K_2. Po posledici 3.8 je tako presek najdaljših poti neprazen. □

Zgled. Poglejmo si sedaj primer kaktusa. Na sliki 3.7 imamo poudarjeno označene vse njegove najdaljše poti. Te poti so naslednje:

- m, n, o, p, q, r, s, t, w, z; $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ (graf 1).
- n, m, o, p, q, r, s, t, w, z; u, v (graf 2).
- n, m, o, p, q, r, s, t, u, v; $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z}$ (graf 3).
- m, n, o, p, q, r, w, t, u, v; $\boldsymbol{s}$, z (graf 4).
- n, m, o, p, q, r, w, t, u, v; z, s (graf 5).
- m, n, o, p, q, r, s, t, u, v; w, z (graf 6).

V preseku torej niso vsebovana vozlišča u, v, z, w in s, vsebovana pa so naslednja vozlišča: m, n, o, p, q, r in t. Zato je presek vseh najdaljših poti neprazen.



Slika 3.7: Najdaljše poti v grafu kaktus

Poglavje 4

Presek treh najdaljših poti

V nadaljevanju se bomo osredotočili na presek treh najdaljših poti v grafu. Najprej bomo vpeljali dve strukturi in nato z njuno pomočjo dokazali, kako je s preseki treh najdaljših poti. Na koncu bomo dokazali tudi, da je presek treh najdaljših poti v zunanje ravninskem grafu neprazen.

4.1 Struktura Q_1 in struktura Q_2

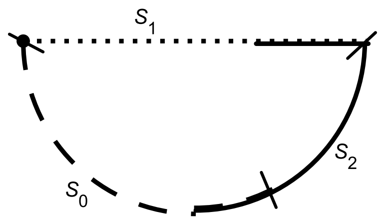
Definirajmo dve strukturi, ki nam bosta v nadaljevanju v pomoč pri dokazovanju. Če imajo poti P_0, P_1 in P_2 prazen presek, se strukturi ne moreta zgoditi v uniji $P_0 \cup P_1 \cup P_2$.

Definicija 4.1 ***Struktura*** *Q_1 je cikel, ki je unija notranje disjunktnih segmentov S_0, S_1, S_2 poti P_0, P_1 in P_2, tako da:*

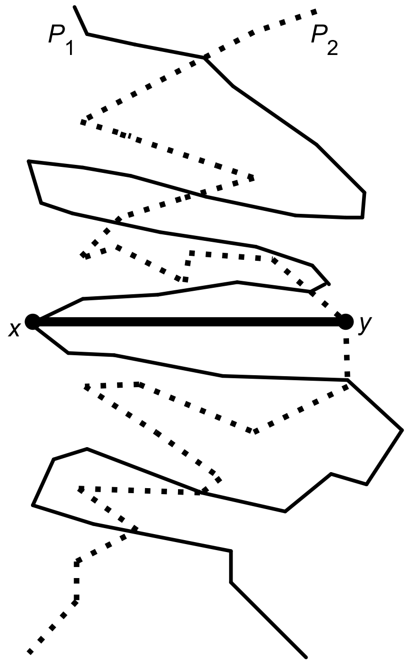
- *notranjost S_0 in notranjost S_2 ne vsebuje nobenega vozlišča s poti P_1 in*
- *notranjost S_1 in notranjost S_2 ne vsebuje nobenega vozlišča s poti P_0.*

Definicija 4.2 ***Struktura*** *Q_2 je definirana s segmentom P_0 poti P s krajiščema x in y, tako da:*

- *$x \in V(P_1)$ in $y \in V(P_2)$,*
- *notranja vozlišča poti P pripadajo samo P_0 in*
- *$P_1 - \{x\}$ je unija dveh poti P_1', P_1''; $P_2 - \{y\}$ je unija dveh poti P_2', P_2''; tako da $V(P_1' \cup P_2') \cap V(P_1'' \cup P_2'') = \emptyset$ ali $V(P_1' \cup P_2'') \cap V(P_1'' \cup P_2') = \emptyset$.*



Slika 4.1: Struktura Q_1



Slika 4.2: Struktura Q_2

Lema 4.3 *Naj bo G unija svojih najdaljših poti P_0, P_1 in P_2. Tedaj G ne vsebuje nobene od struktur Q_1 ali Q_2.*

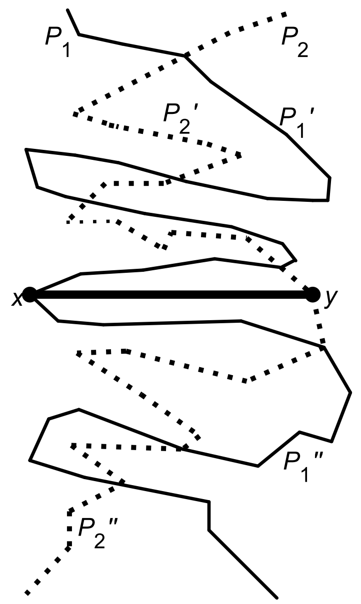
Dokaz. Lemo bomo dokazali s protislovjem. Naj bo graf G unija svojih najdaljših poti. Najprej predpostavimo, da G vsebuje strukturo Q_1. Označimo dolžino S_i z l_i, i=0, 1, 2. Na poti P_0 zamenjamo S_0 z $S_1 \cup S_2$ tako, da velja $l_0 \geq l_1 + l_2$ (P_0 je najdaljša pot). Podobno na poti P_1 zamenjamo S_1 z $S_0 \cup S_2$ tako, da velja $l_1 \geq l_0 + l_2$ (P_1 je najdaljša pot). Če preoblikujemo neenakosti, dobimo

$$l_2 \leq l_0 - l_1 \tag{4.1}$$

$$l_2 \leq l_1 - l_0 \tag{4.2}$$

in zato je $l_2 \leq 0$, kar je v protislovju z dejstvom, da je dolžina pozitivno število. Dokazali smo, da G nima strukture Q_1.

Predpostavimo sedaj, da ima G strukturo Q_2. Naj x razdeli P_1 na segmenta P_1' ($|P_1'| = l_1'$) in P_1'' ($|P_1''| = l_1''$), da velja $|P_1| = l_1' + l_1''$ in naj y razdeli P_2 na segmenta P_2' ($|P_2'| = l_2'$) in P_2'' ($|P_2''| = l_2''$), da velja $|P_2| = l_2' + l_2''$ (kot na sliki 4.3). Tako imamo dve poti: eno sestavljeno



Slika 4.3: Struktura Q_2 v lemi 4.4

s segmentov P_1', P_2' in poti P z dolžino $l_1' + l_2' + |P|$ in drugo sestavljeno s segmentov P_1'', P_2'' in P z dolžino $l_1'' + l_2'' + |P|$. Ker je pot P_1 najdaljša pot, velja $|P| + l_1' + l_2' \leq |P_1| = l_1' + l_1''$. Tudi za pot P_2 velja neenakost $|P| + l_1'' + l_2'' \leq |P_2| = l_2' + l_2''$. Če združimo neenakosti, dobimo $2 \cdot |P| + l_1' + l_2' + l_1'' + l_2'' \leq l_1' + l_1'' + l_2' + l_2''$ in od tod sledi $|P| \leq 0$. Ker je $|P|$ dolžina poti P, zanjo velja $|P| \geq 0$ in zato sledi $|P| = 0$. To pa je protislovje, saj je dolžina poti P večja od 0 (ima krajišči x in y, zato je dolžine vsaj 1). Torej G ne vsebuje strukture Q_2. $\square$

4.2 Tri najdaljše poti

Družina grafov F je **monotona**, če za vsak graf $G \in F$ in vsako povezavo $e \in E(G)$ velja, da je graf $G - e \in F$.

Lema 4.4 *Za monotono družino F naj bo $G \in F$ povezan graf z najmanjšo vsoto $|V(G)| + |E(G)|$, ki ima tri najdaljše poti s praznim presekom. Tedaj ima G natanko en netrivialni blok.*

Dokaz. Naj bo G povezan graf s tremi najdaljšimi potmi P_0, P_1, P_2, ki nimajo skupnega vozlišča. Predpostavimo najprej, da G nima netrivialnega bloka. Od tod sledi, da je G drevo. V drevesu vsaka najdaljša pot poteka skozi center ali bicenter in zato je presek P_0, P_1 in P_2 neprazen (na sliki 1.5 v drevesu T vse najdaljše poti grafa potekajo skozi center z, najdaljše poti drevesa T' pa skozi vozlišči u in v). To pa je v protislovju s pogojem, da je presek prazen.

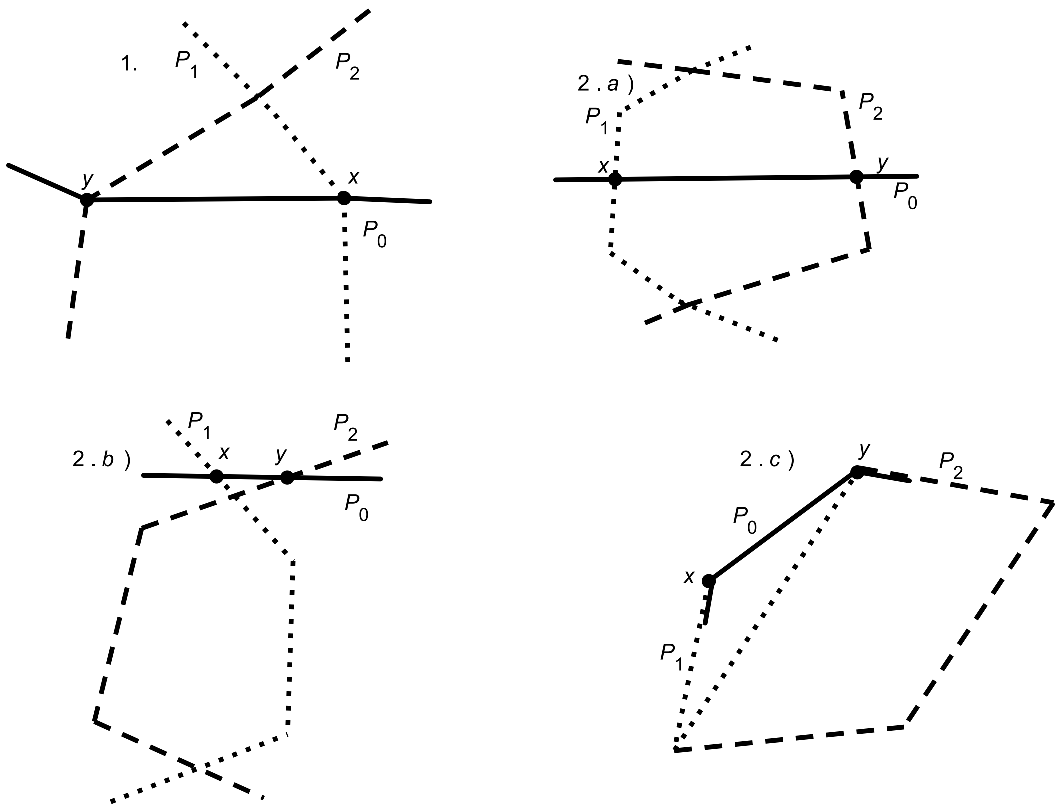
Predpostavimo sedaj, da ima G vsaj dva netrivialna bloka. Zaradi pogoja, da je vsota $|V(G)| + |E(G)|$ minimalna, je $G = P_0 \cup P_1 \cup P_2$. Sicer graf minimaliziramo-odstranjujemo povezave, ki niso iz $P_0 \cup P_1 \cup P_2$.

Poglejmo najprej situacijo, ko imamo dva netrivialna bloka, kjer vsak vsebuje vozlišča iz vseh treh najdaljših poti. Tedaj vsaka najdaljša pot poteka skozi prerezno vozlišče in zato je presek v tem primeru spet neprazen. Protislovje. Naj bo sedaj B netrivialni blok, ki vsebuje vozlišča iz samo dveh poti, recimo iz P_0 in P_1. Tedaj je P_2 vsebovan v komponenti X iz $G-B$, ki vsebuje tudi vozlišča iz P_0 in P_1. V posebnem primeru X vsebuje eno krajišče iz P_0 in eno krajišče iz P_1. Ker ima G dva bloka, vsebuje prerezno vozlišče $u \in V(B)$ tako, da ima $G - \{u\}$ disjunktna grafa z vozlišči v množicama X_1', X_2', kjer ima $X_1 = X_1' \cup \{u\}$ vozlišča le s poti P_0, P_1 in $X_2 = X_2' \cup \{u\}$ z vseh treh poti. Ker P_0 in P_1 ležita v X in B, potekata skozi prerezno vozlišče. Zato je eno krajišče iz P_j v X_1 in drugo v X_2 za $j = 0, 1$. Naj bo $|P_0[X_1]|$ število vozlišč poti P_0 v X_1 in $|P_1[X_1]|$ število vozlišč poti P_1 v X_1. Torej velja: $|P_0| = |P_0[X_1]| + |P_0[V \setminus X_1]|$ ali $|P_1| = |P_1[X_1]| + |P_1[V \setminus X_1]|$. Tedaj je $|P_0[X_1]| = |P_1[X_1]|$. Če to ne bi veljalo, bi veljalo $|P_0[X_1]| < |P_1[X_1]|$ ali $|P_0[X_1]| > |P_1[X_1]|$. Brez škode za splošnost poglejmo situacijo, ko je $|P_0[X_1]| > |P_1[X_1]|$. Tedaj mora veljati tudi $|P_1[V \setminus X_1]| > |P_0[V \setminus X_1]$, saj sta P_0 in P_1 najdaljši poti in zato velja $|P_0| = |P_1|$. Od tod sledi, da je pot $P_0[X_1] \cup P_1[V \setminus X_1]$ pot, ki je daljša od najdaljše poti v grafu, kar je protislovje. Torej je število vozlišč s poti P_0 in P_1 v bloku X_1 enako.

Iz množice vozlišč X_1 odstranimo vsa vozlišča, ki ne ležijo na poti P_0. Dobljen graf ima manj vozlišč kot graf G in tri najdaljše poti: P_0 (vozlišča s poti P_0 nismo odstranjevali), P_2 (P_2 ima vozlišča samo iz X_2, zato ostane po odstranjevanju nespremenjena) in $P_1' = P_1[V \setminus X_1] \cup P_0[X_1]$. Še več, P_0, P_2 in P_1' nimajo skupnega vozlišča. Ker je G iz monotone družine F, je dobljeni graf tudi iz F. Protislovje, saj smo graf minimalizirali in zato ni manjšega grafa v družini F. Dokazali smo, da ima G natanko en netrivialen blok. □

Lema 4.5 *Naj bo G povezan graf, ki je unija svojih najdaljših poti P_0, P_1, P_2. Če ima $P_1 \cup P_2$ največ en cikel, tedaj imajo poti P_0, P_1 in P_2 vsaj eno skupno vozlišče.*

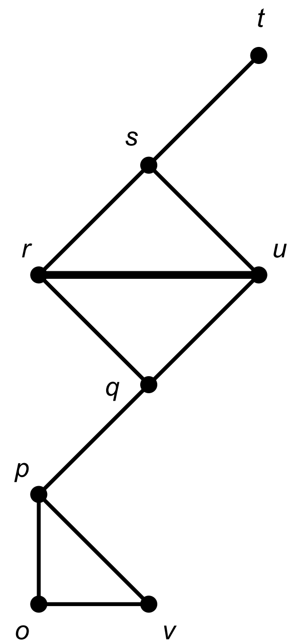
Dokaz. Naj bo G povezan graf, ki je unija svojih najdaljših poti P_0, P_1, P_2. Pot P_0 seka poti P_1 in P_2. Zato obstaja segment P_0 z enim krajiščem x iz P_1 in drugim krajiščem y iz P_2 tako, da vsa druga vozlišča na tem segmentu pripadajo le P_0. Poglejmo si najprej situacijo, ko $P_1 \cup P_2$ ne vsebuje cikla. Tedaj unija najdaljših poti vsebuje strukturo Q_2 (glej slika 4.4 primer 1.). Torej predpostavimo, da ima $P_1 \cup P_2$ en sam cikel C. Obravnavajmo vse možnosti lege vozlišč x in y glede na cikel C. Če je x, $y \in V(C)$ (glej slika 4.4 primer 2.a)) ali x, $y \notin V(C)$ (glej slika 4.4 primer 2.b)), imamo v uniji najdaljših poti spet strukturo Q_2. Če je $x \notin V(C)$ in $y \in V(C)$ (glej slika 4.4 primer 2.c)) ali $x \in V(C)$ in $y \notin V(C)$ pa v uniji nastopa struktura Q_1. Če bi bil presek teh treh najdaljših poti prazen, potem v njihovi uniji ne bi nastopala nobena izmed struktur Q_1 in Q_2. Torej je presek res neprazen. □



Slika 4.4: Skica vseh obravnavanih možnosti v lemi 4.5

Tetiva v grafu je povezava, ki ima krajišči na ciklu. Primer tetive prikazuje slika 4.5.

Izrek 4.6 *Naj bo graf G povezan graf in P_0, P_1 in P_2 najdaljše poti v grafu G. Če $P_0 \cup P_1 \cup P_2$ predstavlja zunanje ravninski graf, tedaj obstaja vozlišče v, ki je vsebovano v preseku $V(P_0) \cap V(P_1) \cap V(P_2)$.*



Slika 4.5: Primer grafa s tetivo

Dokaz. Naj bo G graf, ki je unija svojih najdaljših poti P_0, P_1 in P_2. Najdaljše poti tvorijo zunanje ravninski graf. Predpostavimo, da je presek najdaljših poti prazen in da je G minimalen graf s temi lastnostmi. Ker je G minimaliziran, je vsota $|V(G)| + |E(G)|$ minimalna in zato ima po lemi 4.4 natanko en netrivialen blok. Naj bo C cikel neomejenega lica. Osredotočimo se na tetive. Krajišči vsake tetive tvorita prerezno množico grafa G. Vsaka tetiva e razdeli graf G v dva nova zunanje ravninska grafa $G(e)'$ in $G(e)''$ tako, da velja $G(e)' \cap G(e)'' = e$ in $G(e)' \cup G(e)'' = G$. Za vsak $i \in \{0, 1, 2\}$ obstaja tetiva, ki pripada P_i. Sicer, brez izgube za splošnost, poglejmo situacijo, ko ne obstaja tetiva, ki pripada P_2. Tedaj bi imela unija $P_0 \cup P_1$ največ en cikel in bi po lemi 4.5 bil presek najdaljših poti neprazen. To pa je v protislovju z našo predpostavko, da je presek le-teh prazen. Lice, ki uporablja povezave z vseh treh poti, imenujemo **3-pobarvljivo lice**.

1. Imamo omejeno 3-pobarvljivo lice.

   To trditev bomo dokazali s protislovjem. Recimo, da nimamo 3-pobarvljivega lica. Zgoraj smo dokazali, da imamo omejeno lice, ki vsebuje povezave s poti P_i za vsak $i \in \{0, 1, 2\}$. Tedaj imamo dve lici, ki delita povezavo e tako, da ima, brez škode za splošnost, eno lice povezave z unije poti $P_0 \cup P_1$ in drugo lice povezave s poti $P_0 \cup P_2$ (situacija kot na sliki 4.6), kjer je črtkasto označena pot P_1, pikčasto pot P_2 in z navadno črto označena pot P_0). Vidimo, da se pot P_0 nahaja v obeh unijah, zato je $e \in E(P_0)$. Naj bosta x in y krajišči tetive e. Kot smo videli zgoraj, nam tetiva e

razdeli graf v dva zunanje ravninska grafa $G(e)'$ in $G(e)''$ in zato velja $P_1 \subseteq G(e)'$ in $P_2 \subseteq G(e)''$. Ker se P_1 in P_2 sekata, je eno izmed vozlišč x ali y v preseku $P_1 \cap P_2$. Hkrati velja tudi, da sta vozlišči x in y vsebovani na poti P_0 in zato od tod sledi, da je presek $P_0 \cap P_1 \cap P_2$ neprazen. Kar pa je protislovje z našo predpostavko. Torej imamo omejeno 3-pobarvljivo lice.

2. Za vsako tetivo e ima bodisi $G(e)'$ bodisi $G(e)''$ povezave z največ dveh najdaljših poti P_i, P_j, za $i \in \{0, 1, 2\}$.

   Naj bo $e \in P_0$ tetiva s krajiščema x, y kot v prejšnji točki dokaza. Predpostavimo, da imata $G(e)'$ in $G(e)''$ povezave z vseh treh poti P_0, P_1, P_2. Tedaj morata P_1 in P_2 potekati skozi $\{x, y\}$. Ker je presek najdaljših poti prazen, sledi, da je $x \in V(P_1)$ in $y \in V(P_2)$. Tedaj pa v unji nastopa struktura Q_2. Protislovje. Zato ima za vsako tetivo e bodisi $G(e)'$ bodisi $G(e)''$ povezave z največ dveh najdaljših poti P_i,P_j, za i, $j \in \{0, 1, 2\}$.

   Od tod sledi, da imamo natanko eno 3-pobarvljivo lice. Označimo ga z F. Naj ima F v svojem licu tetive e_0, e_1, ... , e_{k-1} za $k \geq 3$ v zapisanem zaporedju in naj $G(e)'$, i = 0,1, ... $k - 1$ ne vsebuje F (kot na sliki 4.7 (levo)). Ker $G(e_i)'$ ne vsebuje F, po prejšnji točki dokaza vsebuje le dve poti, P_{i_1}, P_{i_2} za i_1, $i_2 \in \{0, 1, 2\}$. Pravimo, da je e_i tipa $\{i_1, i_2\}$ To pomeni: če vsebuje $G(e)$ poti P_0 in P_1, tedaj je e tipa $\{0, 1\}$ (slika 4.7).

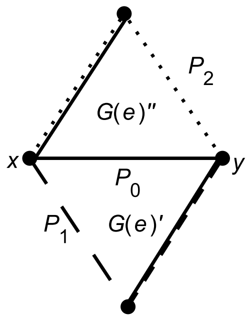
3. Za vsak $i_1, i_2 \in \{0, 1, 2\}$ obstaja e_i tipa $\{i_1, i_2\}$ za poljuben $i \in \{0, 1, 2, \ldots, k - 1\}$.

   Predpostavimo, da nimamo e_i tipa $\{0, 1\}$. Ker za vsako izmed treh poti obstaja tetiva, imamo e_j, e_l, j, $l \in \{0, 1, \ldots, k - 1\}$ tako, da je e_j tipa $\{1, 2\}$ in e_l tipa $\{0, 2\}$. Brez škode za splošnost naj bo $l = 1$, $j = 2$. Ker je e_1 tipa $\{0, 2\}$, je $G(e_1)' \subseteq P_0 \cup P_2$ in ker je e_2 tipa $\{1, 2\}$, je $G(e_2)' \subseteq P_1 \cup P_2$. Tedaj je povezava e' na poti $G(e_1)' - G(e_2)'$ takšna, da je $e' \in E(P_2) \setminus E(P_0 \cup P_1)$ in zato velja, da cikel C ni vsebovan v uniji $P_0 \cup P_1$. Od tod sledi, da $P_0 \cup P_1$ ni cikel in zato bi po lemi 4.5 vse tri poti imele skupno vozlišče. To pa je spet v protislovju z našo predpostavko.

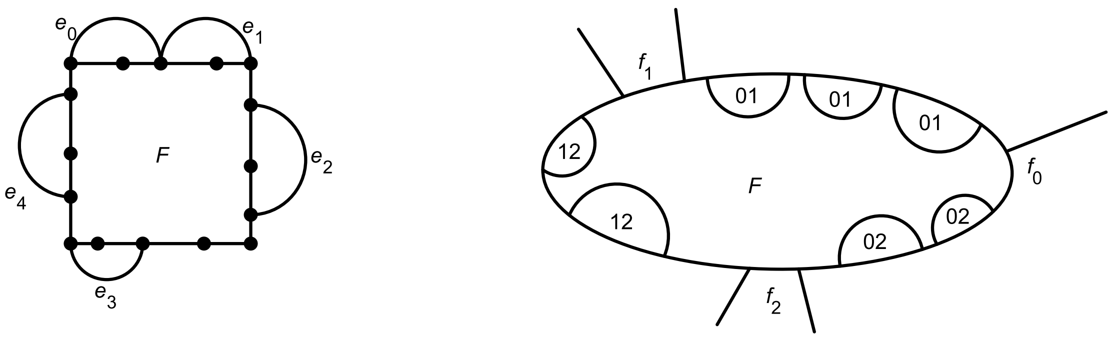
4. Tetive e_i istega tipa ležijo zaporedoma vzdolž cikla.

   Predpostavimo, da so e_{i_1}, e_{i_3} tipa $\{0, 1\}$, e_{i_2} tipa $\{0, 2\}$ in e_{i_4} tipa $\{1, 2\}$ za nekatere $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ zaporedoma na ciklu C. Naj bo vozlišče x krajišče tetive e_{i_1} in vozlišče y krajišče tetive e_{i_3}. Zato je $x, y \in V(P_0) \cup V(P_1)$. Še več, $\{x, y\}$ je prerezna množica grafa G in zato sta $G'(e_{i_2})$ ter $G'(e_{i_4})$ v različnih komponentah grafa $G - \{x, y\}$. Ker $G'(e_{i_2})$ in $G'(e_{i_4})$ vsebujeta povezave poti P_2 in hkrati ležita v različnih komponentah, sledi, da je pot P_2 nepovezana, kar pa je protislovje. Torej smo dokazali, da tetive istega tipa ležijo zaporedoma vzdolž cikla.

Naj bodo sedaj e_o, e_1, … ,e_s tipa $\{0,1\}$, e_{s+1}, …, e_t tipa $\{1,2\}$ in e_{t+1}, … ,e_k tipa $\{0,2\}$. Tedaj obstaja povezava $f_1 \in E(C)$, ki povezuje $G(e_s)'$ in $G(e_{s+1})'$, tako da je $f_1 \in E(P_1) \setminus E(P_0 \cup P_2)$. Podobno obstaja povezava tudi povezava $f_2 \in E(C) \cap E(P_2) \setminus E(P_0 \cup P_1)$ in tudi povezava $f_0 \in E(C) \cap E(P_0) \setminus E(P_2 \cup P_1)$ (slika 4.7). Povezava f_0 leži na poti P_0, ne leži pa na poteh P_1 in P_2. Najdaljši segment poti P_0 vsebuje f_0 in vse povezave, ki so na poti P_0, niso pa na poti P_1 ali poti P_2. Eno krajišče segmenta je v $V(P_1)$ in drugo v $V(P_2)$. Takšen segment definira strukturo Q_2, kar pa je znova protislovje. Torej res obstaja vozlišče, ki leži v preseku vseh treh poti. □

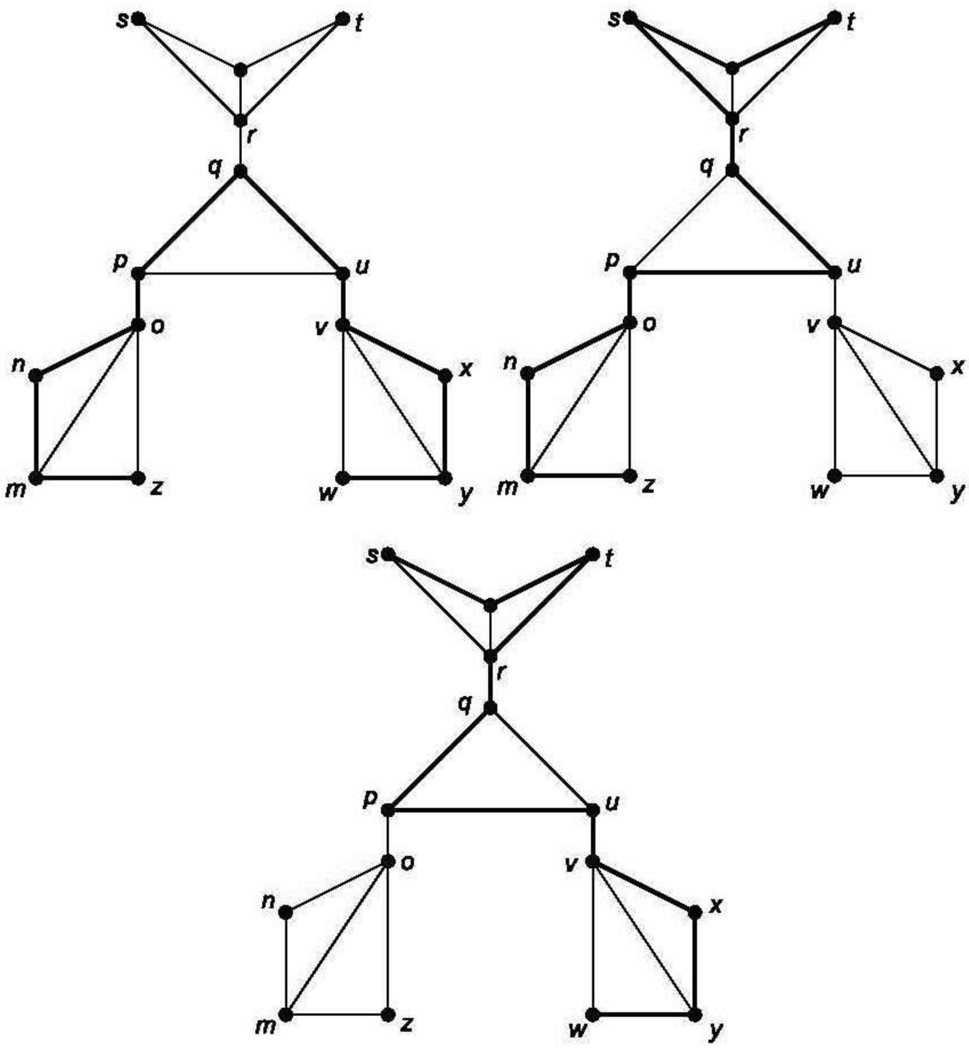


Slika 4.6: Primer dveh omejenih lic v izreku 4.6



Slika 4.7: 3-pobarvljivo lice F s tetivami (levo) in 3-pobarvljivo lice z označenimi tipi tetiv (desno)

Zgled. S pomočjo slike 4.8, kjer imamo označene poljubne tri najdaljše poti v grafu, ki ustreza lastnostim v izreku 4.6, vidimo, da res obstaja vozlišče, ki je vsebovano v vseh treh najdaljših poteh. V našem primeru imamo celo tri takšna vozlišča: p, u in q.



Slika 4.8: Primer treh najdaljših poti za graf v zgledu

Literatura

[1] M. Axenovich, When do three longest paths have a common vertex?, Discrete Math. Algor. Appl. 1 (2009) 115–120.

[2] S. Klavžar, M. Petkovšek, Graphs with nonempty intersection of longest paths, Ars Combin. 29 (1990) 42–53.

[3] R. J. Wilson, J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov, Ljubljana (1997).

[4] W. Schmitz, Über längste Wege und Kreise in Graphen, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 53 (1975) 97–103.

[5] H. Walther, Über die Nichtexistenz eines Knotenpunktes, durch den alle längsten Wege eines Graphen gehen, J. Combin. Theory 6 (1969) 1–6.

[6] T. Gallai, Problem 4, Colloquium on Graph Theory (Tihany, Hungary, 1966), (P. Erdös and G. Katona, eds.), Academic Press, New York, 1968, pp. 362.

[7] T. Zamfirescu, On longest paths and circuits in graphs, Math. Scand. 38 (1976) 211–239.

[8] J. Mestre, Design and Analysis of Computer Algorithms (online). (citirano 22. 04. 2010). Dostopno na naslovu: `http://www.cs.umd.edu/class/summer2006/cmsc451/project.html`.

[9] Cornell University (online). (citirano 15. 03. 2010). Dostopno na naslovu: `http://www.math.cornell.edu/ numb3rs/whieldon/num316.html`.

[10] Mathworld (online). (citirano 15. 03. 2010). Dostopno na naslovu: `http://mathworld.wolfram.com/Hamilton-ConnectedGraph.html`.

[11] Mathworld(online). (citirano 20. 03. 2010). Dostopno na naslovu: `http://mathworld.wolfram.com/HypotraceableGraph.html`.

[12] V. R. Kulli, The block-point tree of a graph (online). (citirano 20. 03. 2010). Dostopno na naslovu `http://www.new.dli.ernet.in/rawdataupload/upload/insa/INSA_2/20005a87_620.pdf`.

[13] Wikipedia (online). (citirano 15. 03. 2010). Dostopno na naslovu: `http://en.wikipedia.org/wiki/Glossary_of_graph_theory`.

[14] J. Lehel, Hitting All Longest Paths (online). (citirano 24. 04. 2010). Dostopno na naslovu: `http://www.math.uiuc.edu/~west/openp/pathtran.html`.

[15] J. M. Harris, J. L. Hirst, M. J. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, Second Edition, Springer, New York (2008).