



Doktorska disertacija

# NUMERIČNO MODELIRANJE TOKA MIKROPOLARNIH TEKOČIN Z METODO ROBNIH ELEMENTOV

marec, 2009

Avtor: Matej ZADRAVEC

Mentor: red. prof. dr. Matjaž HRIBERŠEK

Somentor: red. prof. dr. Leopold ŠKERGET

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| Avtor:                          | Matej Zadavec   |
| Naslov:                         | Numerično modeliranje toka mikropolarnih tekočin z metodo robnih elementov  |
| Klasifikacija:                  | UDK: 519.87:532.543:519.64(043.3)   |
| Ključne besede:                 | mikropolarne tekočine, robno območna integralska metoda, metoda robnih elementov, hitrostno vrtilna formulacija, naravna konvekcija, tok v kanalu, mešana konvekcija. |
| Oblikovanje in prelom besedila: | Matej Zadavec z L <sup>A</sup> T <sub>E</sub> Xom   |
| Število izvodov:                | 10  |
| Razmnoževanje:                  | Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru   |



## FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija  
Tel.: 02 22 07 500  
Fax: 02 22 07 990  
e-mail: fs@uni-mb.si  
http://www.fs.uni-mb.si

Maribor, 27. 6. 2008

### TEMA ZA DOKTORSKO DISERTACIJO

Senat Fakultete za strojništvo je na svoji 11. redni seji dne 24. junija 2008 v skladu s statutom Univerze v Mariboru

sprejel

### temo za doktorsko disertacijo

z naslovom:

**"NUMERIČNO MODELIRANJE TOKA MIKROPOLARNIH  
TEKOČIN Z METODO ROBNIH ELEMENTOV",**

ki jo je prijavil

**Matej ZADRAVEC, univ. dipl. inž. str.**

Doktorandovo delo spremlja:

Mentor: **red. prof. dr. Matjaž HRIBERŠEK**

Somentor: **red. prof. dr. Leopold ŠKERGET**

Rok za oddajo doktorske disertacije v zadostnem številu vezanih izvodov je 4 leta.

Dekan:

izr. prof. dr. Niko SAMEC

Način odpreme:

- prof. dr. Hriberšek, po interni pošti
- prof. dr. Škerget, po interni pošti
- Matej Zadavec, priporočeno po pošti
- Univerza v Mariboru, priporočeno po pošti
- v arhiv







## FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija

Tel.: 02 22 07 500

Fax: 02 22 07 990

e-mail: fs@uni-mb.si

http://www.fs.uni-mb.si

Na osnovi 330. člena Statuta Univerze v Mariboru (Ur.l. RS, št. 90/2008) in sklepa 16. redne seje Senata Fakultete za strojništvo Univerze v Mariboru z dne 29. januar 2009

izdajam

### SKLEP O IMENOVANJU KOMISIJE ZA OCENO DOKTORSKE DISERTACIJE

z naslovom:

#### "NUMERIČNO MODELIRANJE TOKA MIKROPOLARNIH TEKOČIN Z METODO ROBNIH ELEMENTOV"

ki jo je predložil:

**Matej ZADRAVEC, univ. dipl. inž. str.**

v komisijo imenujem naslednje člane:

1. izr. prof. dr. Jure MARN, predsednik
2. red. prof. dr. Matjaž HRIBERŠEK, mentor - član
3. red. prof. dr. Leopold ŠKERGET, somentor - član
4. prof. dr. Luiz C. WROBEL, član  
Brunel University, School of Engineering and Design, UK

Vsak član komisije za oceno doktorske disertacije je dolžan v roku treh mesecev od imenovanja pregledati doktorsko disertacijo in skupaj z ostalimi člani komisije podati skupno pisno poročilo o oceni doktorske disertacije in ga s predlogom o sprejemu, zavrniti ali morebitnih popravkih poslati v zaprti kuverti s pripisom »Ocena doktorske disertacije `naslov doktorske disertacije` - ne odpiraj!« dekanu članice. Član komisije lahko poda tudi ločeno mnenje.

Če član komisije zavrne sodelovanje pri oceni doktorske disertacije, mora o tem v roku 5 delovnih dni od prejema tega sklepa pisno obvestiti dekana članice.

Pravni pouk: Zoper ta sklep je možna pritožba na senat članice univerze v roku 5 delovnih dni.

Datum: 2.2.2009

Kraj: Maribor



Dekan:

izr. prof. dr. Niko SAMEC

#### Način odpreme:

- prof. dr. Marn, po interni pošti
- prof. dr. Hriberšek, po interni pošti
- prof. dr. Škerget, po interni pošti
- prof. dr. Luiz C. Wrobel, priporočeno po pošti
- Matej Zadravec, po interni pošti
- v arhiv



## Izjava

Podpisani Matej Zadavec izjavljam, da:

- je predložena disertacija samostojno delo, ki je bilo opravljeno pod mentorstvom prof. dr. Matjaža Hriberška in somentorstvom prof. dr. Leopolda Škergeta;
- predložena disertacija v celoti ali v delih ni bila predložena za pridobitev kakršnekoli izobrazbe na drugi fakulteti ali univerzi;
- soglašam z javno dostopnostjo disertacije v Knjižnici tehniških fakultet Univerze v Mariboru.

Maribor, marec 2009

Podpis: \_\_\_\_\_





## Zahvala

*Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Matjažu Hriberšku in somentorju prof. dr. Leopoldu Škergetu za nesebično pomoč, vodenje, usmerjanje in potrpežljivost pri izdelavi doktorske disertacije.*

*Zahvala gre tudi vsem sodelavcem Inštituta za procesno, energetska in okoljsko inženirstvo na Fakulteti za strojništvo, Univerze v Mariboru za nudenje tehnične in strokovne pomoči ter časa za sproščene razprave o reševanju nastalih zapletov tekom raziskovalnega dela.*

*Iskrena zahvala staršem in vsem domačim za vso vzpodbudo, potrpežljivost, pomoč in razumevanje. Posebna zahvala gre Kseniji in Tajju za neomajno podporo, dajanju vsakdanjih spodbud in veselja do dela ter da sta to, kar sta.*

V Mariboru, marec 2009.



UDK: 519.87:532.543:519.64(043.3)  
Ključne besede: mikropolarne tekočine, robno območna integralska metoda, metoda robnih elementov, hitrostno vrtnična formulacija, naravna konvekcija, tok v kanalu, mešana konvekcija.

## Numerično modeliranje toka mikropolarnih tekočin z metodo robnih elementov

*Povzetek:* V delu je predstavljen nov pristop k numeričnemu modeliranju tokov mikropolarnih tekočin z metodo robnih elementov. Sama teorija mikropolarnih tekočin zajema določene reološko kompleksne tekočine, pri katerih je prisoten še mehanizem rotacije notranjih struktur toka tekočine, kar ni zajeto v klasičnem sistemu Navier-Stokesovih enačb. V nalogi je predstavljeno reševanje toka tekočine s pomočjo teorije mikropolarnih tekočin, izvedeno z vključitvijo dodatnih členov v prenosno enačbo gibalne količine in reševanjem dodatne prenosne enačbe za mikrorotacijo v okviru sistema enačb, zapisanih v hitrostno vrtnični formulaciji. Predstavljena je izpeljava vodilnih enačb, od začetnih zakonov ohranitve, zapisanih v obliki parcialno diferencialnih enačb, do integralske in na koncu diskretizirane oblike enačb za reševanje toka mikropolarnih tekočin z metodo robnih elementov. Sledi predstavitev numeričnega algoritma reševanja diskretiziranih enačb.

Izpeljani algoritem, temelječ na že obstoječem algoritmu reševanja tokov z uporabo klasičnih Navier-Stokesovih enačb, je preizkušen na primerih naravne konvekcije v kotanji, prisilne konvekcije toka tekočine v kanalu ter primeru mešane konvekcije v kotanji z izvorom toplote. Primerjava rezultatov, dobljenih s pomočjo novo razvitega numeričnega algoritma, z referenčnimi rezultati drugih avtorjev, kaže na uspešnost vključitve teorije mikropolarnih tekočin v numerični algoritem na osnovi metode robnih elementov za reševanje toka tekočine s pomočjo klasične teorije Navier-Stokesovih enačb.

Teoretične izpeljave in numerične simulacije podrobno obravnavajo izvor in pomen novih modelnih parametrov, ki jih vpeljemo v teoriji mikropolarnih tekočin. Rezultati izvedenih numeričnih simulacij kažejo na pomembno občutljivost tokovnega kot tudi temperaturnega polja na različne vplivne parametre mikropolarnih tekočin. Izpeljani numerični algoritem tako pomembno širi uporabnost metod računalniške dinamike tekočin na osnovi metode robnih elementov tudi na področje numerične simulacije toka mikropolarnih tekočin.

UDK 519.87:532.543:519.64(043.3)

Keywords: micropolar fluids, boundary domain integral method, boundary element method, velocity-vorticity formulation, natural convection, flow in a channel, mixed convection.

## Numerical modelling of micropolar fluid flow with boundary element method

*Abstract:* In this work the new approach for numerical modelling of a micropolar fluid flow based on a boundary element method is presented. Micropolar fluid flow theory is describing flow of a rheological very complex fluids with structures, which have own rotation. Such a physical behaviour of a fluid is not included in the classical system of Navier-Stokes equations. To simulate micropolar fluid flow with the existing boundary element method based code, additional terms have to be included in the vorticity transport equation together with additional transport equation for microrotation, closing the set of governing equation, written in velocity vorticity formulation. In this work the governing equations of micropolar fluid are derived in differential, integral and discretised form, resulting from the application of the boundary element method. In deriving the numerical algorithm, the domain terms are discretised by means of subdomain technique.

The derived numerical algorithm, which presents extension of existing numerical algorithm based on the classical Navier-Stokes equations, is verified through the examples of natural convection in a cavity, flow in a channel and mixed convection of micropolar fluid in a cavity. Computational results for micropolar fluids, obtained by the new numerical algorithm, show good agreement with results of other authors, confirming successful implementation of micropolar fluid flow theory into existing boundary element method based numerical algorithm for numerical modeling of flows with use of classical theory of Navier-Stokes equations.

Through the work the meaning and importance of new model parameters included in the micropolar fluid flow theory is discussed. The results of performed numerical simulations of the micropolar fluid flow show that one can expect significant sensitivity of flow and temperature fields on different micropolar fluid flow parameters. The derived numerical algorithm presents extension of the use of computational fluid dynamics methods based on boundary element method to the field of numerical simulations of micropolar fluids.

# Vsebina

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Seznam pogosteje uporabljenih oznak</b>  | <b>xv</b> |
| <b>1 Uvod</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Opredelitev doktorskega dela . . . . .  | 1         |
| 1.2 Pregled stanja obravnavane problematike . . . . .                               | 3         |
| 1.3 Struktura podiplomskega dela . . . . .  | 8         |
| <b>2 Mikropolarne tekočine</b>  | <b>11</b> |
| <b>3 Matematična formulacija toka mikropolarnih tekočin</b>                         | <b>19</b> |
| 3.1 Uvod . . . . .  | 19        |
| 3.2 Zakoni ohranitve . . . . .  | 20        |
| 3.2.1 Izotropna polarna tekočina . . . . .  | 20        |
| 3.2.2 Konstitutivne enačbe mikropolarnih tekočin . . . . .                          | 21        |
| 3.2.3 Zakoni ohranitve mikropolarnih tekočin . . . . .                              | 24        |
| 3.3 Zakoni ohranitve v hitrostno vrtničnem zapisu . . . . .                         | 25        |
| 3.3.1 Kinematika nestisljive tekočine . . . . .                                     | 25        |
| 3.3.2 Kinetika nestisljive tekočine . . . . .                                       | 26        |
| 3.3.3 Enačba tlaka . . . . .  | 27        |
| 3.4 Robni pogoji . . . . .  | 27        |
| 3.5 Koeficienti v prenosnih enačbah . . . . .                                       | 29        |
| <b>4 Numerična metoda</b>   | <b>33</b> |
| 4.1 Robno območna integralska oblika<br>enačbe toka mikropolarnih tekočin . . . . . | 33        |
| 4.1.1 Integralski zapis enačbe kinematike toka . . . . .                            | 33        |
| 4.1.2 Integralski zapis enačbe kinetike toka . . . . .                              | 35        |
| 4.1.3 Integralski zapis enačbe tlaka . . . . .                                      | 38        |
| 4.2 Diskretizacija integralskih enačb toka mikropolarnih tekočin . . . . .          | 39        |
| 4.2.1 Diskretna oblika enačbe kinematike toka . . . . .                             | 39        |
| 4.2.2 Diskretna oblika prenosne enačbe vrtničnosti . . . . .                        | 41        |
| 4.2.3 Diskretna oblika prenosne enačbe mikrorortacije . . . . .                     | 44        |
| 4.2.4 Diskretna oblika prenosne enačbe energije . . . . .                           | 46        |
| 4.2.5 Diskretna oblika enačbe tlaka . . . . .                                       | 48        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.3      | Algoritem reševanja . . . . .   | 49        |
| <b>5</b> | <b>Rezultati značilnih simulacij</b>  | <b>53</b> |
| 5.1      | Naravna konvekcija v kotanji . . . . .  | 53        |
| 5.1.1    | Robni pogoji . . . . .  | 53        |
| 5.1.2    | Rezultati simulacije . . . . .  | 56        |
| 5.2      | Tok v kanalu . . . . .  | 64        |
| 5.2.1    | Robni pogoji . . . . .  | 64        |
| 5.2.2    | Rezultati simulacije . . . . .  | 66        |
| 5.3      | Sklopljen primer naravne in prisilne konvekcije v toku preko kotanje . . . . .                | 71        |
| 5.3.1    | Robni pogoji . . . . .  | 71        |
| 5.3.2    | Rezultati simulacije . . . . .  | 73        |
| <b>6</b> | <b>Zaključki</b>  | <b>83</b> |
| 6.1      | Razprava . . . . .  | 83        |
| 6.2      | Sklep . . . . .   | 85        |
| 6.3      | Smernice za nadaljnje delo . . . . .  | 85        |
|          | <b>Seznam uporabljenih virov</b>  | <b>87</b> |
|          | <b>Priloge</b>  | <b>91</b> |
| A1       | Ohranitev vrtilne količine . . . . .  | 91        |
| A1.1     | Klasične oz. Navier-Stokesove tekočine . . . . .  | 91        |
| A1.2     | Polarne tekočine . . . . .  | 92        |
| A2       | Konstitutivne enačbe mikrotekočin . . . . .   | 94        |
| A3       | Gaussov in Greenova stavka . . . . .  | 95        |
| A3.1     | Gaussov divergenčni stavek . . . . .  | 95        |
| A3.2     | 1. Greenova identiteta . . . . .  | 95        |
| A3.3     | 2. Greenova identiteta . . . . .  | 95        |
| A4       | Interpolacijske funkcije . . . . .  | 96        |
|          | <b>Dodatki</b>  | <b>99</b> |
| B1       | Življenjepis . . . . .  | 99        |
| B2       | Bibliografija avtorja . . . . .   | 100       |
| B3       | Razširjeni povzetek v angleškem jeziku<br>Extended abstract in the English language . . . . . | 102       |

# Seznam pogosteje uporabljenih oznak

## Grške črke

|                               |   |
|-------------------------------|---|
| $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v$ | koeficienti viskoznosti                   |
| $\beta_T$                     | termični volumski razteznostni koeficient |
| $\delta_{ij}$                 | Kroneckerjev simbol                       |
| $\Gamma$                      | rob območja                               |
| $\xi$                         | izvirna točka                             |
| $\eta$                        | parameter vzgona                          |
| $\lambda$                     | parameter                                 |
| $\lambda_v$                   | koeficient viskoznosti drugega reda       |
| $\mu$                         | dinamična viskoznost                      |
| $\nu$                         | kinematična viskoznost                    |
| $\vec{\omega}, \omega_i$      | vrtničnost                                |
| $\Omega$                      | območje rešitve                           |
| $\Phi$                        | interpolacijski polinom za rob            |
| $\phi$                        | interpolacijski polinom za območje        |
| $\rho$                        | gostota                                   |

## Latinske črke

|                |                                      |
|----------------|--------------------------------------|
| $A, S$         | površina                             |
| $\vec{C}$      | tenzor vezanih napetosti             |
| $c_p$          | specifična toplota                   |
| $c(\xi)$       | prosti, geometrijski koeficient      |
| $\vec{E}$      | energija                             |
| $\vec{f}$      | izvori in ponori gibalne količine    |
| $\vec{g}, g_i$ | gravitacijski pospešek               |
| $j$            | mikrovztajnost                       |
| $k$            | toplotna prevodnost                  |
| $K$            | parameter mikropolarne tekočine      |
| $k_v$          | koeficient viskoznosti mikrorotacije |
| $\vec{l}$      | izvori in ponori mikrorotacije       |
| $m$            | število mrežnih točk celice          |
| $n$            | število mrežnih točk elementa        |
| $\vec{n}, n_j$ | enotska normala                      |
| $\vec{N}, N$   | mikrorotacija                        |
| $N_c$          | število notranjih točk               |
| $N_e$          | število robnih točk                  |
| $L, H, a, l$   | dolžinske skale                      |
| $p$            | tlak                                 |
| $q$            | gostota toplotnega tok               |
| $\vec{r}$      | krajevni vektor                      |
| $s_{ij}$       | tenzor deformacijskih hitrosti       |

|                |       |                                    |
|----------------|-------|------------------------------------|
| $\vec{t}, t_j$ | ..... | tangenta                           |
| $t$            | ..... | čas                                |
| $T$            | ..... | temperatura                        |
| $\vec{T}$      | ..... | tenzor napetosti                   |
| $u$            | ..... | potencial, skalarna funkcija       |
| $u^*$          | ..... | osnovna rešitev; Greenova funkcija |
| $\vec{v}, v_i$ | ..... | hitrost                            |
| $V$            | ..... | volumen                            |
| $x_i$          | ..... | kartezijeve koordinate $(x, y, z)$ |

*Posebni simboli*

|                |       |   |
|----------------|-------|---|
| $\vec{\nabla}$ | ..... | Hamiltonov operator nabra $\partial/\partial x_i$ |
| $\Delta$       | ..... | Laplaceov operator                                |

*Kriterialna števila*

|        |       |                            |
|--------|-------|----------------------------|
| $Gr$   | ..... | Grashofovo število         |
| $Nu$   | ..... | Nusseltovo število         |
| $Nu_L$ | ..... | lokalno Nusseltovo število |
| $Pr$   | ..... | Prandtlovo število         |
| $Re$   | ..... | Reynoldsovo število        |
| $Ra$   | ..... | Rayleighjevo število       |



# Poglavje 1

## Uvod

### 1.1 Opredelitev doktorskega dela

Večfazni večsestavinski tok je osnova večine tehnoloških operacij procesne tehnike. Tok suspenzije trdnih delcev in tekočine, bodisi kapljevine bodisi plina, je dvofazni večsestavinski tok, ki se pojavlja v procesih farmacevtske industrije, prehrambene industrije, naftne industrije, itn. in je osnova pri pnevmatskem transportu, natančnejši kontroli odpadnih onesnaženih snovi, zgorevanju razpršenega premoga, sušenju prehrabnih izdelkov, lebdečih slojih in raznih bioloških aplikacijah. Zaradi široke uporabe dvofaznih večsestavinskih tokov je tako potrebno dobro poznavanje prenosnih pojavov znotraj dvofaznih večsestavinskih tokov. V zadnjem času se pri obravnavanju prenosnih pojavov na vseh področjih industrije vedno bolj razširja uporaba računalniške dinamike tekočin (RDT). Medtem ko je RDT na področju enofaznih enosestavinskih tokov močno uveljavljena, pa se sedaj na podlagi poznavanja reševanja enofaznih tokov s pomočjo RDT zelo razvija tudi RDT večfaznih večsestavinskih tokov, ki je fizikalno kakor tudi numerično neprimerno zahtevnejša od modeliranja enofaznih enosestavinskih tokov. Problem pri modeliranju večfaznih večsestavinskih tokov je, da je večina novih modelov empiričnih oz. deloma empiričnih, za kar je potrebno izvesti eksperiment in tako določiti manjkajoče parametre, potrebne za numerični model.

V praksi velikokrat zasledimo suspenzije, ki so sestavljene iz nederformabilnih oziroma deformabilnih snovi (delcev) v izotropni tekočini. Ti suspendirani delci v tekočini vplivajo na povprečne fizikalne lastnosti večfaznega večsestavinskega toka oziroma suspenzije. Večfazni večsestavinski tokovi izražajo kompleksnejšo naravo toka in imajo kar nekaj lastnosti, ki jih naredi zahtevnejše napram enofaznim tokovom. Tokovno polje pri večfaznih večsestavinskih tokovih ni le odvisno od tega, ali je tok laminaren oziroma turbulenten. Potrebno je poznati lastnosti sestavin in topologijo medfaznih površin. Pomembna je tudi smer toka. Zaradi razlik med gostotami in smerjo toka različnih faz se vertikalna tokovna polja razlikujejo od horizontalnih tokovnih polj, prav tako horizontalna tokovna polja običajno niso simetrična.

Glede na količino delcev v tekočini so lahko suspenzije redke ali goste. Jasne meje

med prvimi in drugimi ni. Splošno lahko rečemo, da so redke suspenzije tiste, pri katerih na gibanje delcev pomembno vplivajo strižne in vzgonske sile. Pri redkih suspenzijah se povprečna viskoznost poveča s povečanjem deleža (koncentracije)  $\varphi$  nederformabilnih delcev, kar je ponazorjeno z Einsteinovo formulo:

$$\mu = \mu_o (1 + \varphi), \quad (1.1)$$

kjer sta  $\mu$  in  $\mu_o$  viskoznost tekočine z in brez delcev. V primeru gostih suspenzij na gibanje trdnih delcev pomembno vplivajo trki med samimi delci. Ugotovitev, ali je suspenzija redka ali gosta, vpliva na poznejši pristop k numeričnemu modeliranju le teh.

Tok suspenzij je pomemben primer toka zaradi njegove široke uporabe v procesni industriji in tudi v bioloških aplikacijah (pretok krvi po žilah). Pri transportu redkih suspenzij v horizontalno ležečih ceveh, kjer je volumski delež trdnih delcev v kapljeviti ali plinasti fazi majhen in so hitrosti kapljevite ali plinaste faze precej velike, so trdni delci suspendirani po celotnem prerezu in skoraj enakomerno porazdeljeni (homogen tok), zlasti pri majhnih trdnih delcih in trdnih delcih z majhno razliko gostote do tekoče faze. Pri manjših hitrostih kapljevite ali plinske faze se trdni delci odbijajo od dna cevi, v katerih se pretaka suspenzija. S povečevanjem količine trdnih delcev v tekočini in pri majhnih hitrostih se delci začnejo posedati na dnu cevi. Pri transportu gostejših suspenzij se delci zgoščujejo v spodnjem delu cevi. Zmanjševanje hitrosti tekočine privede do zgoščevanja delcev na dnu cevi. S tem se začne tvoriti gost tok delcev, ki se na steni zaustavijo in pride do kopičenja delcev, kar lahko povzroči zamašitve cevi. Zato je pri transportu suspenzij potrebna minimalna hitrost kapljevine ali plina, da se prepreči tako posedanje delcev. V primeru transporta suspenzij v vertikalnih ceveh je pomembno, da je hitrost toka kapljevine ali plina večja od hitrosti posedanja delcev.

Suspendirani delci oz suspendirane snovi so lahko v paličasti, elipsoidni, nepravilni (npr. kosmi blata) obliki. Suspendirane snovi so prav tako lahko fleksibilne, tekoče ali v obliki želeja z različnimi fizikalnimi lastnostmi od okoliške tekočine.

Mikropolarne tekočine spadajo v skupino mikrotekočin oziroma mikromorfni tekočin. Teorija mikrotekočin, ki jo je razvil Eringen [15], pokriva področje tekočin, pri katerih prihaja zaradi lokalnih struktur in gibanja delov tekočine na mikro nivoju do dodatnih makroskopskih efektov. Zaradi kompleksnega matematičnega zapisa mikrotekočin se le te v odvisnosti od določenih poenostavitev oz. predpostavk delijo na različne podvrste mikrotekočin, katerih fizikalno obnašanje je zaradi mikro gibanja delcev mogoče zapisati v uveljavljenih matematičnih formulacijah. Tako so mikropolarne tekočine podvrsta mikrotekočin, ki fizikalno predstavljajo tekočine kot suspenzijo togih, poljubno orientiranih ali krogelnih delcev v viskozni tekočini, pri čemer se deformacija delcev zanemari. V primeru mikropolarnih tekočin imajo ti nederformabilni delci tudi lastno rotacijo, kar opišemo z vektorjem mikrorotacije. To lokalno gibanje oziroma vrtenje delca vpliva na makroskopsko gibanje tekočine. S pomočjo teorije mikropolarnih tekočin je tako mogoče uspešno modelirati tok nekaterih nenevtonskih tekočin, kot so tekoči kristali, feromagnetne tekočine, koloidne tekočine, tekočine s polimernimi dodatki, živalska kri, dimni plini in suspenzije.

## 1.2 Pregled stanja obravnavane problematike

Teorijo mikropolarnih tekočin, ki v zadnjih letih zbuja pozornost mnogih raziskovalcev, je pred približno štiridesetimi leti razvil Eringen [16]. Sama teorija je bila razvita iz teorije enostavnih mikrotekočin [15] in mikroelastičnosti trdnih teles sestavljenih iz mikro elementov (vlaknasti material, celični materiali), ki sta jo razvila Eringen in Suhubi [20], ter opisana v delu, ki ga je objavil Eringen [18], kjer je podana razširitev klasične teorije, ki podaja deformacijo, gibanje in elektromagnetske učinke trdnih teles, kot kontinuumov, v časovni in prostorski mikroskopski skali. V tej teoriji je v fizikalnem smislu element snovi predstavljen kot skupek velikega števila deformabilnih delcev z določeno velikostjo in mikrostrukturo. Ti delci imajo neodvisno število spremenljivk za deformacijo in rotacijo, ko govorimo o mikromorfosti, in samo za rotacijo v primeru mikropolarnosti. V primeru klasične teorije Navier-Stokesovih enačb nastopijo spremenljivke tokovnega polja le zaradi translacije središča elementa snovi. Leta 1972 je Eringen razširil svojo teorijo mikrotekočin [15] še na področje prenosa toplote v mikropolarnih tekočinah [17], kjer so vključeni še prevod toplote in disipacija toplote v mikropolarnih tekočinah.

Matematični pristop reševanja problemov s pomočjo teorije mikropolarnih tekočin je v svojem delu opisal Lukaszewicz [30], ki je poudaril, da se kot mikropolarne tekočine klasificirajo tekočine z mikrostrukturami in nesimetričnim napetostnim tenzorjem, ki predstavljajo polarne tekočine. V fizikalnem smislu predstavlja Lukaszewicz [30] mikropolarne tekočine kot tekočine z naključno orientiranimi suspendiranimi delci v viskozni tekočini in so zelo pomembne za inženirje in znanstvenike, ki rešujejo hidrodinamske probleme v tekočinah. V tej knjigi Lukaszewicz predstavi principe in metode mikropolarnih tekočin za širši spekter bralcev iz področja znanosti in inženirstva mehanike tekočin. Delo je razdelil v tri dele, kjer so v prvem delu predstavljeni osnovni modeli mikropolarnih tekočin, v drugem delu je predstavljena matematična analiza toka mikropolarnih tekočin z nekaterimi primeri toka, medtem ko je v tretjem delu predstavljena obravnava mikropolarnih tekočin v porozni snovi in teoriji mazanja. Lukaszewicz je nekaj let pozneje v svojem delu [31] obravnaval tudi ravninski tok mikropolarnih tekočin, pri čemer je prikazal pravilnost rešitve enačb teorije mikropolarnih tekočin, obstoj globalnega atraktorja in približevanje rešitve k stacionarni rešitvi za tokove zelo viskoznih tekočin.

Tekom sedemdesetih let je bilo s pomočjo teorije mikrotekočin oziroma teorije mikropolarnih tekočin izvedenih kar nekaj raziskav na področju toka krvi. Analitično je tok krvi s pomočjo teorije mikropolarnih tekočin obravnaval Ariman [2], [3]. Ariman [2] je v svojem delu uporabil teorijo mikropolarnih tekočin z upoštevanjem raztegovanja delcev za analizo toka krvi v manjših arterijah (premer  $100\mu\text{m}$ ). Z uporabo teorije mikropolarnih tekočin je hotel zajeti fizikalni pojav toka krvi z deformabilnimi strukturami v krvi. Pri tem ni upošteval le rotacije celic krvi, ki je neodvisna od globalnega toka krvi, temveč tudi fleksibilnost teh celic, ki je opisana s krčenjem in raztezanjem teh delcev v plazmi. Na stenah je uporabil brezdrsen robni pogoj za hitrosti in predpostavil, da se na stenah celice raztezajo in da obstaja tudi tukaj neka majhna vrtničnost toka ter da je mikrorotacija na

stenah enaka nič. Robni pogoj mikrorotacije, ki ga je uporabil Ariman v svojem delu, se izkaže za napačnega, saj je v svojem delu s pomočjo eksperimenta Bugliarello [12] prikazal, da v primerih toka krvi v ceveh na stenah obstaja mikrorotacija celic in je njihova rotacija odvisna od hitrostnega polja krvi (npr. tlačnega gradienta in dimenzij cevi).

Uporabnost teorije mikropolarnih tekočin za namene modeliranja toka krvi sta zelo obširno v svojem delu predstavila Kang in Eringen [29]. Kri je bila definirana kot suspenzija z deformabilnimi delci. Tok krvi v kanalu je bil reševan z različnimi vrednostmi koeficienta viskoznosti, ki so sledile iz različnih koncentracij suspenzije, in različnimi robnimi pogoji za mikrorotacijo. Rezultati zajemajo prikaz tokovnega dogajanja z vplivom posplošene viskoznosti krvi glede na velikost cevi.

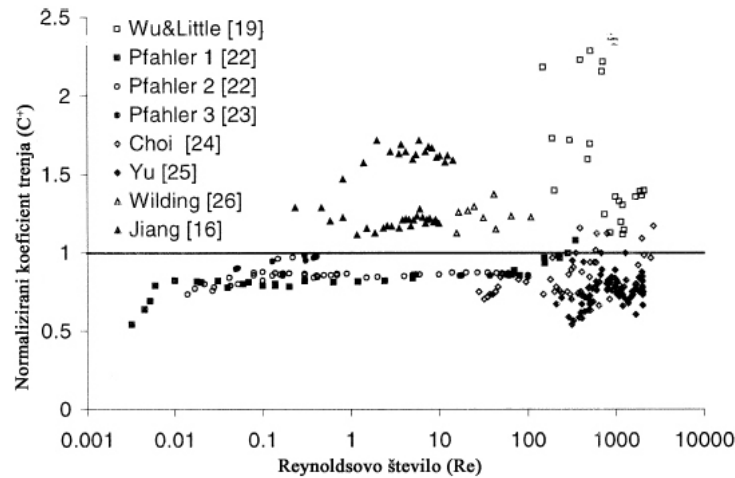
Sanyal [40] je s pomočjo numeričnega izračuna prav tako skušal izvesti analizo vpliva raznih parametrov v teoriji miropolarnih tekočin na tok krvi v cevi.

V svojem prispevku Anwar [9] zelo temeljito prikaže zgodovino razvoja modeliranja toka krvi, pri čemer sam izvede numerično simulacijo toka krvi kot mikropolarne tekočine s pomočjo teorije mikropolarnih tekočin za ravninski tok krvi, ki je nestisljiva in izpostavljena magnetnemu polju v porozni snovi, ki bi naj fizikalno predstavljal primer toka krvi v pljučih. Izvedel je simulacije za različne vrednosti vrtnične viskoznosti, medtem ko je bil poudarek v rezultatih predvsem na obravnavi toka v porozni snovi in ne sama obravnava in uporabnost teorije mikropolarnih tekočin. Numerično simulacijo je izvedel s pomočjo metode končnih elementov in metode končnih razlik, med katerima ni bilo opaznih razlik pri analizi rezultatov.

V vseh omenjenih prispevkih, ki opisujejo numerično simulacijo toka krvi s pomočjo teorije mikrotekočin oziroma teorije mikropolarnih tekočin, je težava določitve velikega števila koeficientov viskoznosti, ki jih je potrebno uporabiti v prej omenjenih teorijah.

V zadnjih letih je bil dosežen velik razvoj na področju mikro naprav. Za pravilno načrtovanje mikro naprav je potrebno dobro poznavanje obnašaja toka tekočine na mikro nivoju in poznavanje natančnih vrednosti transportnih parametrov. Prvo eksperimentalno analizo toka tekočine na mikroskali sta izvedla Wu in Little [49], [50] za plin v laminarnem in turbulentnem tokovnem režimu v Joule Thompsonovi kriogenski napravi. Merila sta Darcy-jev koeficient trenja v silikonskih in steklenih cevkah s premerom od 50 do 80  $\mu m$ , ter ugotovila, da so vrednosti Darcy-jevega koeficienta trenja večje od koeficienta trenja dobljenega s klasično teorijo za makro tokove.

V literaturi je tako možno najti precej nasprotujočih si rezultatov tlačnega padca oziroma koeficientov trenja in koeficientov prenosa toplote v mikro in mini kanalih, kar je prikazano na sliki 1.1, ki jo je objavil Papautsky [34]. Slika prikazuje normalizirani koeficient trenja  $C^*$  ( $C^* = (f \cdot Re)_{exp} / (f \cdot Re)_{theor}$ ) v odvisnosti od Reynoldsovega števila  $Re$ . Oznaki *exp* in *theor* pomenita vrednosti koeficienta trenja  $f$  dobljenega s pomočjo eksperimenta in s pomočjo klasične teorije za makro tokove. Iz slike je razvidno veliko odstopanje eksperimentalno dobljenih vrednosti različnih avtorjev, kar prikazuje veliko negotovost uporabe klasične teorije Navier-Stokesovih enačb v namene numeričnih simulacij toka tekočin na mikro nivoju.



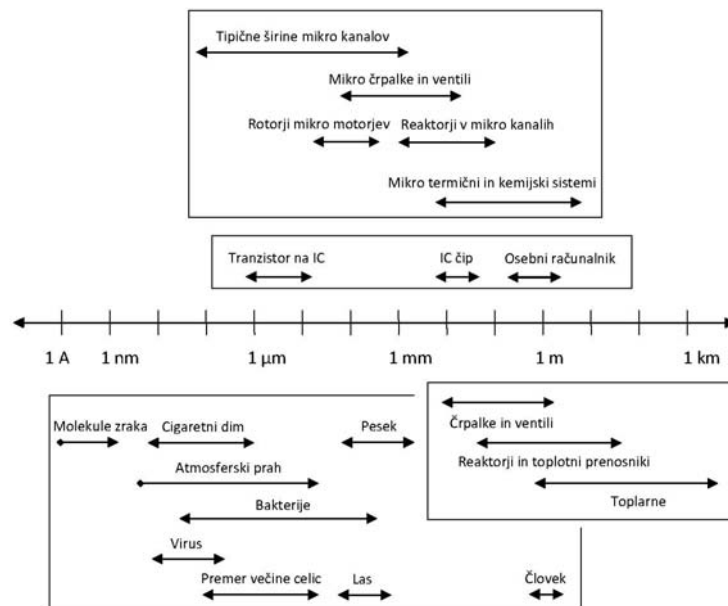
Slika 1.1: Normalizirani koeficient trenja ( $C^*$ ) kot funkcija Reynoldsovega števila (po Papautsky [34]).

V tem delu je Papautsky s sodelavci prav tako predstavil rezultate toka tekočine (vode) v mikrokanalih s pomočjo eksperimenta in numerične simulacije, ki temelji na teoriji mikropolarnih tekočin. Tlačne padce v mikro kanalu, dobljene s pomočjo numerične simulacije, ki je bila izvedena z metodo končnih razlik, je avtor primerjal z ekperimentalno dobljenimi rezultati za vodo. Rezultati kažejo boljše ujemanje numeričnih rezultatov z uporabo teorije mikropolarnih tekočin z eksperimentom, kot numerični rezultati, pridobljeni s pomočjo klasične Navier-Stokesove teorije.

S tokom mikropolarnih tekočin v mikrokanalih se je ukvarjal tudi Pietal s sodelavci. V prvem svojem delu na to temo je podal teoretične poglede na tok mikropolarnih tekočin v mikrokanalih [37]. Pietal [36] je nekaj let pozneje objavil v prispevku teoretično analizo vpliva geometrije in velikostne skale mikrokanalov na uporabnost teorije mikropolarnih tekočin v mikrokanalih na primeru Poiseuillovega toka.

Raziskovalci se v splošnem ne strinjajo o pravilnosti modeliranja tokov na mikro nivoju z uporabo Navier-Stokesovih enačb, kar je možno razbrati tudi iz prispevka Gad-el-Haka [14], kjer je podan pregled razvoja mehanike tekočin v mikronapravah in fizikalne osnove tokov na mikronivoju. Na sliki 1.2 je podana kot primer velikostna skala za različne objekte in snovi, ki nas obkrožajo v okolju in so pogostokrat tudi predmet različnih numeričnih simulacij. Iz navedenega je mogoče razbrati, da ne obstajajo matematične metode in modeli, ki bi v okviru numeričnih izračunov uspešno in učinkovito (hitrost izračuna) z dovolj veliko natančnostjo opisale fizikalne sisteme na različnih velikostnih skalah.

V mnogih aplikacijah in v naravi je vedno prisoten tudi prenos toplote. Prenos toplote je fizikalni fenomen, kjer se zaradi temperaturnih razlik med dvema ploskvama pojavi



Slika 1.2: Velikostna skala.

toplotni tok. Večini tekočin se ob vertikalni greti steni zmanjša gostota in s tem se začne tekočina gibati navzgor, kar povzroči gibanje okoliške hladnejše tekočine z večjo gostoto, ki nadomesti redkejšo tekočino. Hladnejša tekočina se ogreje in proces se ponavlja. Takšni izmenjavi tekočine rečemo konvekcijski vzgonski tok oz. naravna konvekcija. Glavna dejavnika, ki vplivata na naravno konvekcijo, sta vzgon in težnost, velik vpliv pa imajo snovske lastnosti tekočine.

Primer naravne konvekcije mikropolarnih tekočin v kotanji, ki bo obravnavan tudi v okviru tega dela, je objavil v svojem delu Hsu [25]. V tem delu je predstavljena parametrična analiza vpliva mikropolarnih tekočin na tokovno dogajanje in prenos toplote. Numerični rezultati so bili dobljeni s pomočjo kubične kolokacijske metode (ang. cubic spline collocation method). Rezultati izračuna kažejo na zmanjšanje prenosa toplote in manjše vrednosti Nusseltovega števila v primeru mikropolarnih tekočin v primerjavi z newtonsko tekočino. V drugem delu je Hsu [26] izvedel numerično simulacijo naravne konvekcije mikropolarnih tekočin na primeru pravokotne kotanje z enim in večimi izvori toplote ter z upoštevanjem različnih robnih pogojev za mikrorotacijo. Rezultati prenosa toplote so prikazani za različne snovske lastnosti mikropolarnih tekočin, različne kote nagiba pravokotne kotanje in različne vrednosti Rayleighovega števila. Rezultati kažejo na velik vpliv mikrorotacije na tokovno dogajanje in na prenos toplote v mikropolarni tekočini.

Aydin je s sodelavci objavil kar nekaj del iz tematike naravne konvekcije v kotanji za različne primere: hladna in topla stena sta v kotanji sosednji steni [7] za newtonsko tekočino,

pri čemer je celotna kotanja rotirana pod določenim kotom; topla stranica je ena od vertikalnih ploskev kvadratne kotanje in hladna stena je vertikalna ploskev na vrhu kotanje [6], prav tako za newtonsko tekočino, in primer za mikropolarno tekočino, ko sta topla in hladna stena obe vertikalni steni kotanje [5]. V vseh prispevkih je bila za reševanje enačb uporabljena metoda končnih razlik, s pomočjo katere je bil analiziran vpliv različnih vrednosti Rayleighovega in Prandlovega števila na prenos toplote v mikropolarnih tekočinah. V zadnjem prispevku [5], kjer je avtor numerično modeliral tok mikropolarne tekočine s pomočjo teorije mikropolarnih tekočin, so bili rezultati primerjani tudi z referenčnimi rezultati za naravno konvekcijo newtonske tekočine v pravokotni kotanji, ki jih je objavil Davis [13].

V naravi bomo zelo težko našli ločene primere, kjer bi bil tok mikropolarne tekočine le konvektivne oziroma difuzivne narave. Ponavadi se ukvarjamo s problemi, kjer nastopa problem mešane konvekcije, ki je sestavljena iz naravne konvekcije zaradi temperaturnih razlik in prisilne konvekcije. Tak primer je za mikropolarne tekočine v svojem delu predstavil Hsu [27]. Geometrijo problema, ki ga je preučeval, je povzel po delu Papanicolaoua [33], ki je opravil simulacijo za turbulentni tok newtonske tekočine. V prispevku je Hsu uporabil kotanjo z vstopom, na katerem je predpisal hitrost toka mikropolarne tekočine, kotanja je imela tudi izstop in lokalni izvor toplote. Rezultate izračuna za mikropolarno tekočino je primerjal z rezultati za newtonsko tekočino. Rezultati te raziskave kažejo, da je vpliv mikrostruktur na temperaturno in tokovno polje precej velik.

Inženirski problemi so v splošnem opisani z diferencialnimi enačbami, ki so zaradi svoje kompleksnosti rešljive le z aproksimativnimi metodami. V svetu se uporablja nekaj različnih aproksimativnih metod za simulacijo toka tekočin, med katerimi pa so najpogosteje uporabljene in uveljavljene metoda končnih razlik (MKR), metoda končnih elementov (MKE) ter metoda končnih volumnov (MKV). V zadnjih nekaj letih se kot alternativa ostalim metodam uveljavlja metoda robnih elementov (MRE) oziroma njene razširitve, kjer je ena izmed njih robno območna integralska metoda (ROIM). Kljub mnogim aproksimacijskim metodam za numerično reševanje problemov toka tekočin je metoda robnih elementov (MRE) relativno nova metoda za računanje tokov tekočin z nekaterimi zanimivimi prednostmi, ki sta jih v svojih delih objavila Škerget [44], [45] in Hriberšek [24].

Metoda robnih elementov je bila v osnovi razvita za reševanje linearnih problemov, pri katerih so poznane osnovne rešitve oziroma Greenove funkcije v neskončnem območju [10], [11], [46]. Osnovna ideja in prednost metode je transformacija diferencialnih enačb v integralske za rob obravnavanega računskega območja, kar zmanjša dimenzijo problema za ena. Po razrešitvi roba se lahko vrednosti v območju izračunajo eksplicitno iz znanih robnih vrednosti. Nekatere izmed bistvenih prednosti MRE pred ostalimi aproksimacijskimi metodami so manjši obseg priprave podatkov, manjša sistemska matrika, natančen izračun odvodov po robu in območju, enostavnejše obravnavanje problemov v neskončnosti [54]. Metoda je uporabna tudi za reševanje nelinearnih problemov, kjer celotnega problema ni možno prenesti na rob. Nekatere prednosti metode se sicer izgubijo, pa vendar še vedno ostane natančnost rešitve, stabilnost metode pri obravnavanju prehodnih pojavov,

ločeno obravnavanje fizikalno različnih pojavov, problemi neskončnih območij. Metoda robnih elementov se izpelje z uporabo Greenovih identitet ali z metodo utežnih ostankov, ki je sicer tudi splošna tehnika aproksimativnega reševanja in omogoča razširitev analize iz enostavnih problemov (potencialni problemi, kot npr. neviskozni tok tekočine, prevajanje toplote) na splošne nelinearne probleme (difuzivno-konvektivni problemi npr. tok viskozne tekočine).

Difuzivno konvektivni problemi, katere bomo obravnavali v aplikacijah toka mikropolarne tekočine, so matematično opisani s teorijo mikropolarnih tekočin oziroma z razširjenimi Navier-Stokesovimi enačbami v obliki ohranitvenih zakonov mase, gibalne količine, mikrorotacije, energije in snovi. Reševanje sistema razširjenih Navier-Stokesovih enačb z ROIM je povezano z vpeljavo hitrostno-vrtinčne formulacije, kar posledično razdeli numerično shemo na kinematični in kinetični računski del. Ena izmed največjih prednosti ROIM pred ostalimi aproksimacijskimi metodami je učinkovito podajanje robnih pogojev na trdnih stenah pri reševanju enačbe vrtinčnosti. Robne vrtinčnosti se namreč izračunajo direktno iz kinematičnega dela izračuna in ne iz aproksimativnih formul. Ena izmed slabosti metode je visoka zahteva po spominu in dolg računski čas, kar se lahko izboljša z uporabo tehnike podobmočij, kot je to prikazano v [22].

Numerične simulacije toka mikropolarnih tekočin s pomočjo metode robnih elementov smo za primer naravne konvekcije mikropolarne tekočine v pravokotni kotanji z uporabo razširjenega algoritma hitrostno-vrtinčne formulacije razširjenih Navier-Stokesovih enačb za mikropolarne tekočine objavili Zadavec, Hriberšek in Škerget [51], [52], [53].

### 1.3 Struktura podiplomskega dela

Znotraj tega podpoglavja je podan krajši povzetek vsebine doktorskega dela po posameznih poglavjih.

V drugem poglavju, ki je naslovljeno z Mikropolarne tekočine, so predstavljene osnove mikropolarnih tekočin in njihovo fizikalno ozadje. Vsebina tega poglavja se ukvarja z nastankom in potrebami vpeljave teorije mikropolarnih tekočin za potrebe reševanja nekaterih reološko kompleksnih in za vsakdanje življenje zanimivih primerov. Prikaz razvoja teorije mikropolarnih tekočin bo predstavljen v piramidalni obliki, pri čemer so mikropolarne tekočine kakor tudi Navier-Stokesove tekočine le ena izmed podskupin veliko bolj kompleksnih mikromorfni tekočin. Sama klasifikacija znotraj tega poglavja in razmišljanje izvirata iz teorije mikropolarnih tekočin po Eringenu [15]. Gibanje mikropolarnih tekočin bo v tem poglavju prikazano s pomočjo skic, ki prikazujejo celovito gibanje mikrotekočine z vsemi poenostavitvami gibanja, da lahko opišemo neko tekočino s pomočjo teorije mikropolarnih tekočin.

Tretje poglavje, Matematična formulacija toka mikropolarnih tekočin, je razdeljeno na več podpoglavij, pri čemer pa je vodilo v tem poglavju zapis teorije mikropolarnih tekočin v matematični obliki s pomočjo parcialno diferencialnih enačb. Matematični zapis je podan z ohranitvenimi enačbami toka polarne tekočine, kar nato s pomočjo podanih kon-



stitutivnih enačb in enačb stanja pripelje do ohranitvenih zakonov za tok mikropolarne tekočine v obliki parcialno diferencialnih enačb. Podane ohranitvene enačbe mikropolarnih tekočin so nato izpeljane in zapisane s pomočjo hitrostno vrtnične formulacije, ki nam poda enačbe za kinematiko in kinetiko toka mikropolarne tekočine. V podpoglavjih tretjega poglavja so podani potrebni robni pogoji za reševanje izpeljanih enačb kinematike in kinetike toka. Na koncu tega poglavja pa so podani koeficienti mikropolarnih tekočin, ki nastopajo v enačbah za izračun spremenljivk toka mikropolarnih tekočin.

Nadaljevanje vsebine iz tretjega poglavja je predstavljeno v četrtem poglavju z naslovom Numerična metoda, in sicer v izpeljavi integralnih oblik enačb kinematike in kinetike toka mikropolarnih tekočin z uporabo robno območne integralske metode (ROIM) kot izpeljanke metode robnih elementov (MRE). Po izpeljavi integralnih oblik enačb je v podpoglavju četrtega poglavja podana še diskretizacija računskega območja in izpeljava diskretiziranih enačb kinematike in kinetike toka, katerih reševanje (numerični algoritem) je opisno in grafično prikazano v zadnjem podpoglavju četrtega poglavja.

V petem poglavju z naslovom Rezultati značilnih simulacij so podane in zbrane tri različne numerične simulacije toka mikropolarnih tekočin, s pomočjo katerih je prikazana pravilnost delovanja novorazvitega numeričnega algoritma modeliranja mikropolarnih tekočin s pomočjo metode robnih elementov. Prvi primer obravnava naravno konvekcijo kotanji, ki je značilni testni primer v praksi numeričnih izračunov in za katerega so bile na voljo že obstoječe simulacije za tok newtonskih tekočin ([13]). Znotraj tega primera je bilo izvedenih precej izračunov za analizo vpliva lastnosti mikropolarnih tekočin na obnašanje teh tekočin v primeru naravne konvekcije. Drugi primer predstavlja primer ravninskega toka v kanalu, kjer je bil predstavljen vpliv mikropolarnih tekočin na tok v kanalu, v primeru, ko imamo kot gonilno silo prisilno konvekcijo. Tretji primer, predstavljen znotraj petega poglavja je kombinacija prvih dveh primerov, in sicer kombinacija naravne in prisilne konvekcije na tako imenovanem primeru mešane konvekcije v kotanju. Tudi tukaj je predstavljena širša analiza vplivov parametrov mikropolarnih tekočin na samo tokovno in temperaurno polje znotraj kotanje.

Doktorsko delo se zaključuje s poglavjem šest, v katerem so podane najpomembnejše ugotovitve doktorskega dela z prikazanimi smernicami za nadaljnje delo.



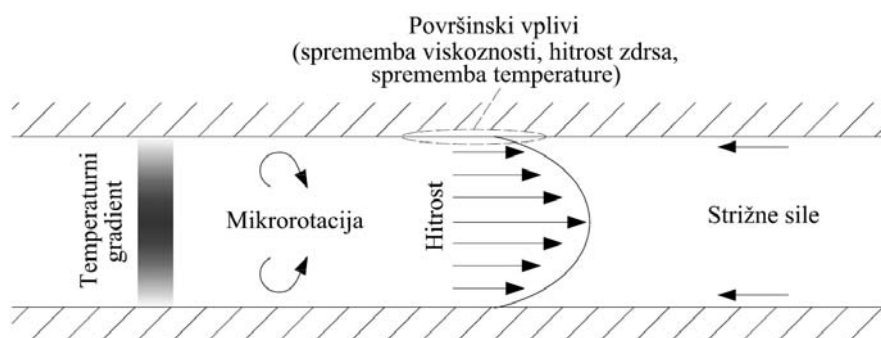
## Poglavje 2

### Mikropolarne tekočine

Obnašanje tekočin na mikronivoju (mikrotekočin) vpliva na obnašanje tekočin na makronivoju. V mikronapravah so vztrajnostne sile izredno majhne, medtem ko površinski efekti dominirajo pri obnašanju oziroma gibanju tekočine. Z zmanjševanjem velikosti naprav (mikronaprav) so vse pomembnejši trenje, mikrorotacija, viskozni efekti in površinske sile (2.1). V splošnem velja, da se lastnosti ( $p$ ), ki so funkcija kontaktne površine ( $A$ ), spreminjajo počasneje kot lastnosti, ki so odvisne od volumna ( $V$ ):

$$\frac{p_1(A)}{p_1(V)} \propto \frac{L^2}{L^3} \propto \frac{1}{L}, \quad (2.1)$$

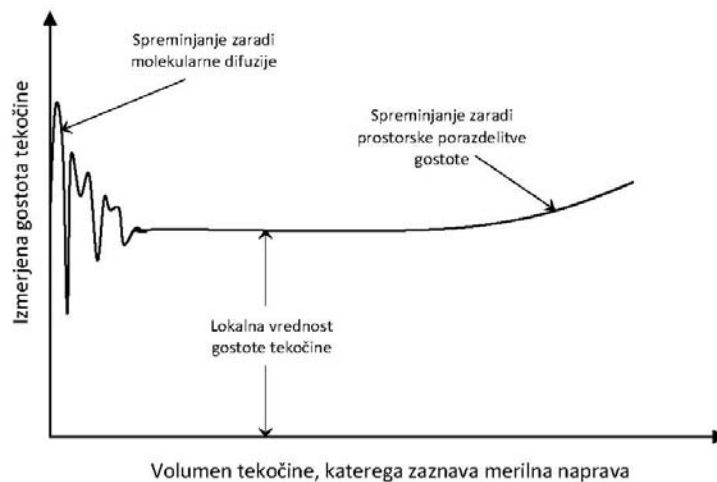
kjer je  $L$  karakteristična dolžina mikro naprave. V tem območju so torej dominantne površinske sile, kar se s pridom uporablja pri mikro črpalkah in mikro valjih.



Slika 2.1: Vplivi na tok tekočine v mikro kanalih.

V večini praktičnih primerov toka tekočine predpostavimo, da je tekočina zvezno telo oziroma kontinuum, kar pomeni, da je na primer gostota tekočine  $\rho$  v nekem „neskončno“ majhnem volumnu  $dV$  oziroma referenčnem prostorskem elementu tudi zvezno porazdeljena. Tak makroskopski oziroma fenomenološki pristop k reševanju vzdrži do predpostavke, da je ta neskončno majhen volumen  $dV$  oziroma  $\Delta V$  večji kot je volumen  $\Delta V^*$  ( $\Delta V > \Delta V^*$ ),

ki ga izračunamo kot  $l^3$ , pri čemer predstavlja  $l$  srednjo prosto pot delca oziroma molekule. Srednja prosta pot delca oziroma molekule v kinetični teoriji predstavlja povprečno razdaljo, ki jo delec prepotuje, preden trči z drugim gibajočim se delcem. Hipoteza kontinuuma je v osnovi predpostavka, katere rezultat je približna rešitev. Za določene pogoje so rešitve na osnovi hipoteze kontinuuma dovolj natančne, v mnogih primerih takšna predpostavka odpove. Hipoteza kontinuuma je lepo predstavljena v delu Batchelorja [8], kjer poudari, da v naravi nek majhen volumen  $dV$  ne more biti neskončno majhen, mora pa biti neobčutljiv za trenutne merilne naprave, kar je prikazano na sliki 2.2.



Slika 2.2: Vpliv velikosti volumna na izmerjeno gostoto (po [8]).

Teorija tekočin, ki predpostavi, da je tekočina na mikro nivoju tudi zvezna oziroma da obstaja mikro kontinuum, upošteva mikrostrukture, kjer velja, da je  $\Delta V < \Delta V^*$ . Volumen  $\Delta V^*$  v tem primeru lahko zajema razne mikrostrukture, kot so suspendirani delci in vrtinci, za katere ne velja, da so znotraj tega volumna zvezni. Da bi zajeli deformacijo mikrostrukture v primeru, ko je  $\Delta V < \Delta V^*$ , je potrebno upoštevati deformacijo snovi znotraj  $\Delta V$ . Predpostavimo, da je v makro snovskem elementu  $dM$  masa porazdeljena zvezno, s čimer je skupna masa makro elementa  $dM$  vsota vseh mas v  $dV$ , za katerega velja teorija kontinuuma.

Klasični hidrodinamični Navier-Stokesov model ima precej pomembno omejitev - v splošnem ni zmožen opisati oziroma zajeti tekočin z mikrostrukturami, tekočin, ki so zanimive in pomembne v raznih aplikacijah procesne tehnike. Na splošno so delci v teh kompleksnih tekočinah (na primer polimerne suspenzije, živalska kri, tekoči kristali) različnih oblik, se krčijo in raztezajo, spreminjajo obliko, pri čemer je prisotna še rotacija teh delcev, ki pa je neodvisna od rotacije in gibanja tekočine. Za natančen opis teh kompleksnih tekočin je potrebno uporabiti teorijo, ki bi zajela geometrijo, deformacijo in notranje gibanje struktur tekočine.

V okviru mehanike kontinuuma se je tekom prejšnjih let pojavilo več takih teorij, kot

so že omenjene teorija enostavnih mikrotekočin, enostavnih deformabilno orientiranih tekočin, mikromorfni tekočin, mikropolarnih tekočin in dipolnih tekočin. Opis lokalnih struktur delov tekočine temelji na mnogih klasičnih predpostavkah, kot so simetrija napatostnega tenzorja ali zanemaritev strižnih napetosti in upoštevanje le glavnih napetosti, ki jih je potrebno popraviti. Ker je večina teh predpostavk še vedno jedro vseh modelov kontinuuma, se v primeru opisa kompleksnih tekočin omenjene predpostavke prilagodi z dodatnimi ohranitvenimi zakoni in konstitutivnimi modeli. Nekatere od prej naštetih teorij so precej splošne, medtem ko se ostale ukvarjajo s precej specialnimi tipi strukture dela tekočine in njeno deformacijo. Iz navedenega sledi, da je uporabnost različnih teorij raznolika. Vsaka od posameznih teorij ima določene prednosti in določene slabosti. Rečemo lahko, da nobena od teorij ni tako univerzalna, da bi reševali tokove, katerih fizikalno obnašanje je precej raznoliko.

Prvi, ki se je lotil modeliranja tekočine z mikrostrukturami in obravnavo le teh tekočin kot kontinuuma, je bil Eringen, ki je leta 1964 [15] vključil tenzor rotacije  $N_{ij}$ , ki definira vrtilno količino mikro elementa relativno glede na masno središče makro elementa. S pomočjo tega tenzorja je definiral gibanje tekočine na nivoju mikro elementa. Za definiranje deformabilnih teles je poleg tega uvedel še moment mikrovztrajnosti  $i_{km}$ . S tem je bil klasični teoriji dinamike tekočin podan nov pristop, ki poleg osnovnih zakonov ohranitve mase, gibalne količine, energije in snovi upošteva tudi ohranitev momenta mikrovztrajnosti.

Eringen [15] je s pomočjo konstitutivnih enačb definiral tako imenovane enostavne mikrotekočine. Enostavne mikrotekočine so viskozne in so v najenostavnejši obliki opisane z 22 koeficienti viskoznosti. Izkaže se, da je nelinearna Stokesova tekočina poseben primer enostavnih mikrotekočin. Pojem mikrotekočine se uporablja za široko skupino tekočin z mikrostrukturami, katerih gibanje dodatno opišemo s tenzorjem mikrorotacije. Enostavnejša podvrsta mikrotekočin, v katerih so mikrostrukture še vedno prisotne, so mikropolarne tekočine, kjer se tenzor mikrorotacije poenostavi. Mikropolarne tekočine fizikalno predstavljajo tekočine kot suspenzijo togih, poljubno orientiranih ali krogelnih delcev v viskozni tekočini, pri čemer se deformacijo delcev zanemari. Takšno razmišljanje pripelje do posplošitve Navier-Stokesovega modela in odpre potencialno področje za aplikativno reševanje toka velikega števila kompleksnih tekočin.

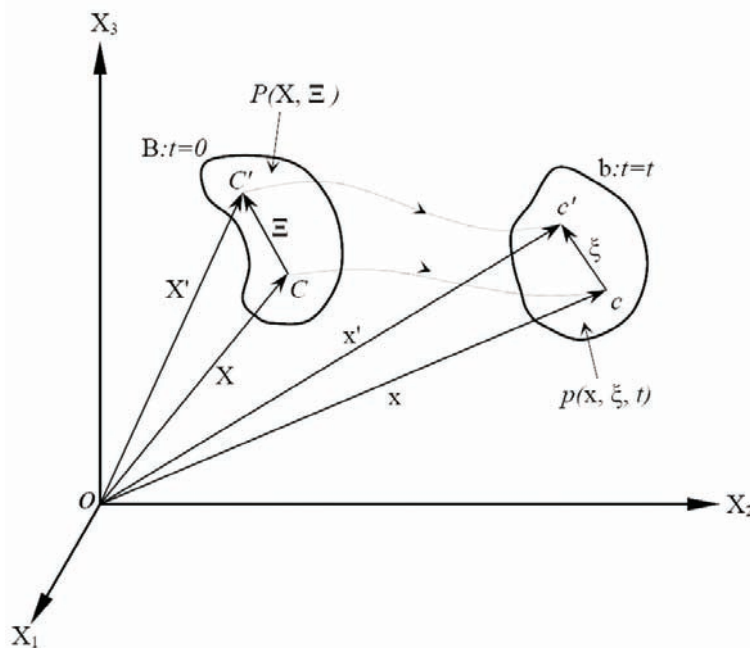
Mikropolarne tekočine spadajo v skupino polarnih tekočin z nesimetričnim napatostnim tenzorjem. Eringen [19] je podal umestitev mikropolarnih tekočin v tako imenovano skupino mikrotekočin, katerih osnovna so mikromorfne tekočine, kar je prikazano na sliki 2.3.

Eringen [18] je zapisal definicijo za mikrokontinuum mikromorfni tekočin, ki pravi, da velja med deformabilnimi točkovnimi delci zveznost lastnosti teh tekočin. Fizikalno gledano so točkovni delci (deli) tekočine, ki so zelo majhni (neskončno majhni). Točkovni delci morajo biti tako majhni, da ne smejo porušiti hipoteze kontinuuma te tekočine. Lastnost teh točkovnih delcev je še njihova deformabilnost, pri čemer se pojavi vprašanje resnične predstavitve deformacije točkovnega delca. Za lažje razumevanje nadomestimo



Slika 2.3: Delitev mikrotekočin (po [19]).

deformabilni delec z geometrijsko točko  $P$  in vektorjem v tej točki  $\Xi$ , ki definira orientiranost in deformacijo točkovnih delcev znotraj masnega delca  $P$ , kar je prikazano na sliki 2.4. Položaj delca  $P$  je definiran v referenčnem stanju 1 ( $t = 0$ ) z vektorjem  $X$  oziroma



Slika 2.4: Deformacija mikroelementa (po [18]).

njegovimi koordinatami  $X_K$ , pri čemer je  $K = 1, 2, 3$ . Kot je bilo že prej omenjeno, vektor

$\Xi$  predstavlja notranjo strukturo delca  $P$  s komponentami  $\Xi_\alpha$ , kjer je  $\alpha = 1, 2, 3, \dots, N$ . Oba vektorja  $X$  in  $\Xi_\alpha$  imata svoje lastno gibanje:

$$X \xrightarrow{t} x, \quad \Xi_\alpha \xrightarrow{X,t} \zeta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2.2)$$

Snov, opisano z enačbo (2.2) lahko definiramo kot mikrokontinuum stopnje  $N$ . V realnosti ne obstaja nobena teorija, ki bi opisovala tako imenovani mikrokontinuum stopnje  $N$ . Teorija mikropolarnih tekočin, ki bo uporabljena v tem delu oziroma teorija mikromorfni tekočin, iz katere izhaja teorija mikropolarnih tekočin, bo imela stopnjo  $\alpha = 1$ .

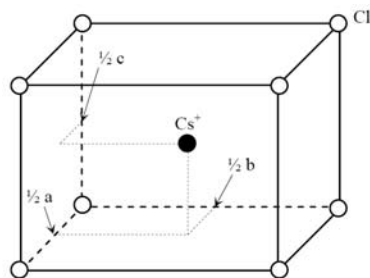
Iz fizikalnega in praktičnega pogleda je za predstavo lažje, če upoštevamo, da nam  $\Xi$  in  $\zeta$  podajata relativne položaje masnih točk (mikroelementov), ki so združene v delcu  $P$  (makroelement), kot snov delca, in v lastnem stanju kot deformirane ali nederformirane masne točke, kar je podano s sledečo enačbo:

$$x' = x(X, t) + \zeta(X, \Xi, t). \quad (2.3)$$

Enačbo (2.3) lahko zaradi predpostavke o kontinuumu mikromorfne tekočine zapišemo v spremenjeni obliki (razlaga za to dejanje bo podana v enem od naslednjih odstavkov):

$$x' = x(X, t) + \chi_K(X, t) \Xi_K. \quad (2.4)$$

Primer prej opisanega gibanja lahko prikažemo na primeru snovi cezijevega klorida ( $CsCl$ ) (slika 2.5), kjer je cezijev klorid predstavljen s točko  $P$  in z vektorjem deformacije  $\chi_K$ . V tem primeru predstavlja  $x(X, t)$  gibanje cezijevih ( $Cs^+$ ) ionov vključenih v centroid in  $\chi_K$  opiše notranje gibanje klorovih ( $Cl^-$ ) ionov, katerih položaj je podan z vektorjem  $\Xi$  glede na centroid celice cezija ( $Cs^+$ ).



Slika 2.5: Cezijev klorid ( $CsCl$ ).

Tak opis gibanja snovi (enačba (2.4)) je precej univerzalen in ga je po priporočilih raznih avtorjev možno učinkovito uporabiti pri opisu gibanja tekočih kristalov, celic krvi, suspenzij in še mnogih drugih kompleksnih tekočin. S pogledom na sliko 2.4 vidimo, da tvori skupek masnih delcev  $\{P\}$  fizikalno telo, ki ga označimo z  $B$ . Za masno točko velja, da je  $P(X, \Xi) \in B$ , ki je karakterizirana s centroidom delca  $C$  in vektorjem  $\Xi$  z izhodiščem v točki  $C$ . Položaj centroida oz. točke  $C$  je določen v kvadratnem koordinatnem sistemu

$X_K$  ( $K = 1, 2, 3$ ) s koordinatami  $X_1, X_2, X_3$  in vektor  $\Xi$  v  $\Xi_K$  s komponentami  $\Xi_1, \Xi_2$  in  $\Xi_3$ . Na tej sliki je prikazana deformacija masnega delca iz  $P(X, \Xi)$  v masni delec  $p(x, \zeta)$ , ki je definiran v nekem drugem koordinatnem sistemu za masni delec  $p$ , kar je podano v v spodnjih dveh enačbah:

$$X \rightarrow x = \hat{x}(X, t), \quad (2.5)$$

$$\Xi \rightarrow \zeta = \hat{\zeta}(X, \Xi, t). \quad (2.6)$$

Transformacija opisana z enačbo (2.5) predstavlja makrogibanje (gibanje) in z enačbo (2.6) je opisano mikrogibanje. Glede na makroskopsko skalo moramo poudariti, da smo v prejšnji razlagi upoštevali masne delce  $P$ , ki so izredno majhni (neskončno majhni) v primerjavi s telesom  $B$ . Zaradi tega dejstva je posledično dopustno uporabiti linearno aproksimacijo za vektor  $\Xi$  in podano enačbo za mikrogibanje (en.(2.6)) zapišemo kot:

$$\zeta = \chi_{kK}(X, t) \Xi_K. \quad (2.7)$$

Upoštevati je še potrebno, da vektor  $X$  predstavlja centroid masnega delca  $P$  (npr.  $\zeta(X, 0, t) = 0$ ).

Iz zgoraj navedene razlage zaključimo, da lahko snov obravnavamo kot mikromorfno in zvezno hkrati (kontinuum prve stopnje), če je njeno gibanje opisano z enačbama (2.5) in (2.7), ter da obstajajo zvezni krajevni ( $X_K$ ) in časovni ( $t$ ) parcialni odvodi:

$$X_K = \hat{X}_k(x, t), \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.8)$$

$$\Xi_K = \Psi_{Kk}(x, t) \zeta_k, \quad K = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

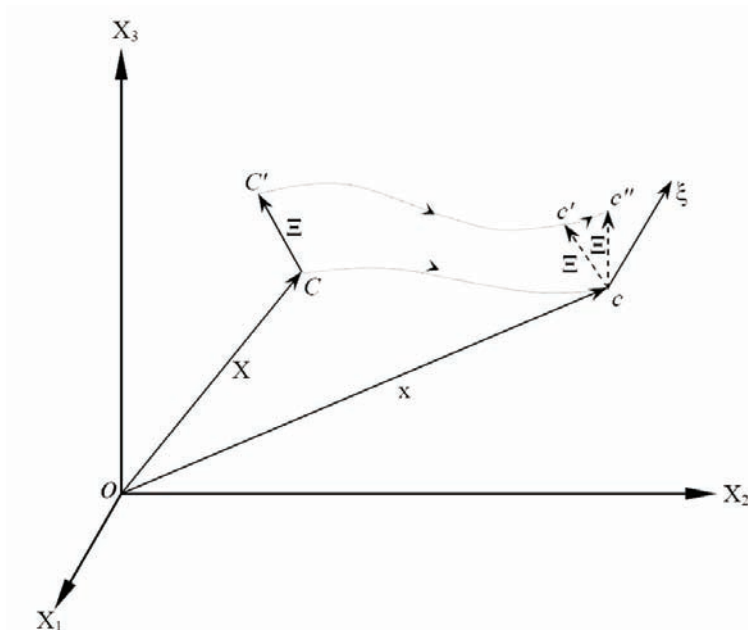
V zgornjih enačbah se nam pojavita dva zelo pomembna tenzorja, in sicer tenzor mikrodeformacije  $\chi_{kK}$  in inverzen tenzor mikrodeformacije  $\Psi_{Kk}$ .

Eringen je v svojih delih [15], [16], [18] in [19] zelo detajlno opisal gibanje mikromorfni tekočin, za katere velja teorija mikrokontinuuma in to gibanje opisal z matematičnimi formulacijami. Gibanje mikropolarnih tekočin opišemo v okviru mikromorfni tekočin, ob predpostavki, da vektor  $\chi$  zajema le tenzor rotacije brez deformacije, kar je prikazano na sliki 2.6 za mikrodeformacijo (gibanje) masnega delca  $P$  v mikromorfni tekočini in je sestavljeno iz:

- klasične makrodeformacije, ki prenese točko  $C$  s pomočjo translacije v koordinatni sistem točke  $c$ , makrorotacije točke  $C$  v točki  $c$  in makroraztezanja točke  $C$  v točki  $c$ ;
- mikrodeformacije, ki prenese direktor (brezdimenzijski enotni vektor, ki predstavlja smer oziroma orientiranost molekul v okolici neke točke) v točki  $C$  s pomočjo translacije od točke  $C$  do  $c$ ;



- mikrorotacije direktorjev v točki  $c$ ;
- mikroraztezanje direktorjev v točki  $c$ , ki lahko hkrati privede do dodatne mikrorotacije direktorjev.



Slika 2.6: Mikrodeformacija:  $C\vec{C}' = \Xi$  v normalnem stanju,  $c\vec{c}'$  premik  $\Xi$  v točko  $c$ ,  $c\vec{c}''$  mikrodeformacija  $\Xi$  v točki  $c$  in  $\zeta$  raztezanje  $\Xi$  v točki  $c$  v končni položaj (po [18]).

V nadaljevanju bo omenjenih nekaj osnovnih značilnosti, ki naredijo model mikropolarnih tekočin zanimiv in primeren v teoretičnih in aplikativnih študijah napram uporabi klasičnega Navier-Stokesovega modela. Privlačnost in primernost modela mikropolarnih tekočin je v učinkoviti in relativno enostavni implementaciji v klasični Navier-Stokesov model. V primeru modela mikropolarnih tekočin se h klasičnemu sistemu Navier-Stokesovih enačb doda le eno novo vektorsko polje in sicer v obliki prenosne enačbe za ohranitev vrtilne količine oziroma rotacije. V dodatni prenosni enačbi ohranitve rotacije nastopijo štiri novi koeficienti viskoznosti ( $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v, k_v$ ), in velja, da, ko je koeficient viskoznosti mikrorotacije ( $k_v$ ) enak nič, postane zakon ohranitve gibalne količine neodvisen od vpliva mikrustruktur v tekočini. Splošno je možno reči, da se v določeni meri z velikostjo koeficienta viskoznosti mikrorotacije meri odstopanje (mikropolarnost) mikropolarnih tekočin od tekočin, opisanih s klasičnim Navier-Stokesovim modelom. Zahvaljujoč enostavnosti modela mikropolarnih tekočin se v mnogih klasičnih aplikacijah (npr. tok v kanalu, tok med dvema vzporednima ploščama) in pod običajnimi geometrijskimi in dinamičnimi poenostavitvami (npr. simetrija, linearizacija enačb) ohranitvene enačbe toka mikropolarne tekočine poenostavijo v enačbe, ki so eksplicitno (oz. analitično) rešljive.

Rezultate toka tako poenostavljenih mikropolarnih tekočin, ki so odvisne od nekaj dodatnih parametrov zaradi različnih koeficientov viskoznosti, se lahko enostavno primerja z rešitvami toka tekočine, dobljenih s pomočjo klasičnih Navier-Stokesovih enačb.

Že v poglavju pregleda je bilo podano, da je s pomočjo eksperimentov bilo prikazano večje ujemanje rezultatov toka tekočin, ki jih lahko uvrstimo v skupino mikropolarnih tekočin, v različnih aplikacijah (npr. tok krvi) s pristopom uporabe teorije mikropolarnih tekočin kot v primeru uporabe klasične teorije, zlasti v primerih, ko se karakteristična dimenzija toka (npr. premer kanala) manjša. Taki zaključki se pokrivajo s pričakovanji, saj je vpliv notranjih struktur tekočine (delcev) večji, ko je manjša karakteristična dimenzija toka.

Enostavnost teorije oziroma modela mikropolarnih tekočin v prej navedenih odstavkih ne pomeni matematične trivialnosti tega modela, kajti že sam Navier-Stokesov model, ki je poseben primer modela mikropolarnih tekočin, ni trivialen. V tem kontekstu je enostavnost modela mišljena kot elegantno in lepo zapisana matematična formulacija teorije mikropolarnih tekočin.

## Poglavje 3

# Matematična formulacija toka mikropolarnih tekočin

### 3.1 Uvod

Mikropolarne tekočine spadajo v skupino tekočin z nesimetričnim tenzorjem napetosti, ki jih imenujemo polarne tekočine. Zakon ohranitve mase in Cauchyjev zakon ohranitve gibalne količine, v splošni obliki zapisa za zvezno tekočino, imata enako obliko v primeru polarnih tekočin in v primeru klasičnih Navier-Stokesovih tekočin. Razlike nastopijo pri predpostavkah oz. pri uporabi različnih oblik zakona ohranitve vrtilne količine in energije za klasične in polarne tekočine. S fenomeloškega vidika fizikalnega modela dobimo splošnejšo obliko zakona polarnih tekočin, ki upošteva dodatne spremenljivke, kot so vrtilni momenti teles, dodatne napetosti in notranji vrtilni moment.

Splošno je znano, da je zakon ohranitve vrtilne količine v primeru klasičnih tekočin posledica simetrije napetostnega tenzorja in Cauchyjevega zakona (priloga A1). V primeru polarnih tekočin je tenzor napetosti nesimetričen in zakon ohranitve vrtilne količine ni izpeljanka zakona ohranitve mase in gibalne količine. Taka definicija rezultira v dodatni prenosni enačbi ohranitve vrtilne količine rotacije delcev  $\vec{N}$  (mikrorotacije) znotraj sistema enačb, ki jih opisuje teorija mikropolarnih tekočin.

Enačbe za opis gibanja mikropolarne tekočine, ki jih bomo uporabljali v tem delu, so podane v naslednjem podpoglavju 3.2 v splošni obliki in obliki, ki bo implementirana v obstoječi numerični algoritem. Upoštevali bomo poenostavitve toka mikropolarnih tekočin, kot so izotropnost, nestisljivost, uporaba konstitutivnih enačb in enačb stanja, ter poenostavitev za primer laminarnega ravninskega toka mikropolarne tekočine.

## 3.2 Zakoni ohranitve

### 3.2.1 Izotropna polarna tekočina

V nekem fizikalnem sistemu je prva predpostavka ta, da masa izoliranega sistema ostaja konstantna, ne glede na procese, ki potekajo znotraj sistema, kar opišemo z zakonom ohranitve mase. Zakon ohranitve mase oziroma kontinuitetna enačba je parcialna diferencialna enačba, ki povezuje prvi odvod količine z značajem gostote po času z divergenco oziroma prvim odvodom količine z značajem toka po kraju. V primeru teorije mikropolarnih tekočin ostaja zakon ohranitve mase enak kot v primeru klasične Navier-Stokesove teorije in je v splošni obliki zapisan z enačbo (3.1). Poleg zakona ohranitve mase je drugi prav tako pomemben zakon, zakon ohranitve gibalne količine (en. (3.2)). Zakon ohranitve gibalne količine nam pove, da je skupni sunek zunanjih sil enak spremembi gibalne količine. Medtem ko zakon ohranitve gibalne količine velja za premo gibanje, pride v primeru polarnih tekočin do dodatnega zakona ohranitve v primerjavi s klasično teorijo, in sicer zakona ohranitve vrtilne količine. Zakon ohranitve vrtilne količine oziroma mikrorotacije nam pove, da je sprememba vrtilne količine telesa glede na izbrano osišče v časovni enoti enaka vsoti sunkov vseh zunanjih navorov. Zakon ohranitve mikrorotacije ima po Eringen [16] drugačno obliko za mikropolarne tekočine kot v primeru klasičnih oz. Navier-Stokesovih tekočin (primerjava je podana v prilogi A1 in je v splošni obliki podan z enačbo (3.3)). Zadnji zakon ohranitve, ki ga bomo uporabili pri modeliranju mikropolarne tekočine, je enak kot v primeru klasične teorije, je zakon ohranitve energije, ki izhaja iz prvega zakona termodinamike in določa, da je sprememba kinetične, potencialne in notranje energije sistema enaka vsoti dovedene ali oddane toplote in dovedenega ali oddanega dela ter je v splošni obliki podan z enačbo (3.4). Splošni zakoni ohranitve mase, gibalne količine, vrtilne količine in energije so za polarno tekočino podani v spodnjih enačbah:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{T} + \rho \vec{f}, \quad (3.2)$$

$$\rho \frac{D\vec{N}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{C} + \rho \vec{g} + \vec{T}_x, \quad (3.3)$$

$$c_p \rho \frac{DT}{Dt} = k \Delta T. \quad (3.4)$$

V zgornjih enačbah diferencialni operator  $D(\cdot)/Dt = \partial(\cdot)/\partial t + v_k \partial(\cdot)/\partial x_k$  predstavlja Stokesov snovski odvod in vektor  $T_{xi} = e_{ijk} T_{jk}$  predstavlja produkt permutacijskega tenzorja s tenzorjem napetosti. V enačbi zakona ohranitve energije (en. 3.4) predstavlja  $T$  temperaturo. V primeru klasične hidrodinamike (Navier-Stokesove enačbe)

so vezane napetosti  $\vec{C} = 0$  in vektor mikrorotacije  $\vec{N} = 0$ . S to predpostavko je z enačbami (3.1)-(3.4), ki veljajo za izotropno polarno tekočino, zajet klasični Navier-Stokesov model. Tenzor napetosti  $\vec{T}$  je v primeru klasičnega Navier-Stokesovega modela definiran z enačbo v spodnji obliki:

$$T_{ij} = (-p + \lambda v_{k,k}) \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (3.5)$$

Pri čemer je enačbo (3.5) zapisal G. Stokes glede na temeljne oziroma osnovne lastnosti tekočin, in sicer ([30]):

- napetostni tenzor  $\vec{T}$  je zvezna funkcija deformacijskega tenzorja  $\vec{D}$  in lokalnega termodinamičnega stanja, toda neodvisen od ostalih kinematičnih spremenljivk,
- tekočina je homogena, kar pomeni, da  $\vec{T}$  ni eksplicitno odvisen od kraja  $\vec{x}$ ,
- tekočina je izotropna, kar pomeni, da ne obstaja neka preferenčna smer,
- ko ni deformacije ( $\vec{D} = 0$ ), je napetost hidrostatična ( $\vec{T} = -p\vec{I}$ , kjer  $\vec{I}$  predstavlja enotno matriko).

Tekočine, ki izpolnjujejo zgoraj navedene postulate, se imenujejo Stokesove tekočine. V teh tekočinah je dokazano ([41],[4]), da se najbolj splošna oblika napetostnega tenzorja glasi:

$$\vec{T} = (-p + \alpha) \vec{I} + \beta \vec{D} + \gamma \vec{D}^2, \quad (3.6)$$

kjer so  $p, \alpha, \beta, \gamma$  funkcije odvisne od termodinamičnega stanja, medtem ko so  $\alpha, \beta, \gamma$  odvisne tudi od invariant deformacijskega tenzorja  $\vec{D}$ . V primeru ko se predpostavi linearno razmerje komponent tenzorja napetosti  $\vec{T}$  glede na komponente tenzorja deformacije  $\vec{D}$ , se napetostni tenzor poenostavi in velja:

$$\vec{T} = (-p + \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{I} + 2\mu \vec{D}, \quad (3.7)$$

kar sovпада z enačbo (3.5) in lahko rečemo, da so linearne Stokesove tekočine tako imenovane newtonske tekočine. Tekočine, ki niso newtonske, so nenewtonske tekočine.

### 3.2.2 Konstitutivne enačbe mikropolarnih tekočin

Za izpeljavo modela mikropolarnih tekočin oziroma zapisa ohranitvenih enačb toka mikropolarnih tekočin moramo zapisati tenzor napetosti  $\vec{T}$  in tenzor vezanih napetosti  $\vec{C}$  za mikropolarne tekočine, ki ju rabimo v enačbah (3.1-3.4), kar pomeni, da moramo definirati konstitutivne enačbe in enačbe stanja.

Mikropolarno tekočino definiramo po Lukaszewichu ([30]) kot polarno, izotropno tekočino z napetostnim tenzorjem  $\vec{T}$  in tenzorjem vezanih napetosti  $\vec{C}$ :

$$T_{ij} = (-p + \lambda v_{k,k}) \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) + \mu_r (v_{j,i} + v_{i,j}) - 2\mu_r \epsilon_{mij} N_m, \quad (3.8)$$

$$C_{ij} = c_0 N_{k,k} \delta_{ij} + c_d (N_{i,j} + N_{j,i}) + c_a (N_{j,i} + N_{i,j}). \quad (3.9)$$

Simetrični del napetostnega tenzorja  $\vec{T}$  v enačbi (3.8) je enak:

$$T_{ij}^s = (-p + \lambda v_{k,k}) \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (3.10)$$

ki je enak napetostnemu tenzorju klasične hidrodinamike, kjer sta  $\lambda$  in  $\mu$  običajna koeficienta viskoznosti (koeficient viskoznosti drugega reda in dinamična Newtonska viskoznost), pri čemer je  $\mu \geq 0$  in  $3\lambda + 3\mu \geq 0$  [41]. Konstanta  $\mu_r$  v enačbi (3.8), ki je vedno pozitivna, predstavlja dinamično viskoznost mikrorotacije. V enačbi (3.9) so konstante  $c_0, c_a, c_d$ , ki predstavljajo koeficiente vrtilne viskoznosti.

V svojem delu je Eringen [16] predstavil model mikropolarnih tekočin, kot specialno obliko veliko bolj obširnega modela mikrotekočin (priloga A2). Mikrotekočino lahko definiramo kot mikropolarno, ko velja za celotno gibanje, da je:

$$\lambda_{ijk} = -\lambda_{ikj}, \quad N_{ij} = -N_{ji}. \quad (3.11)$$

Mikropolarna tekočina zajema le mikrorotacijske efekte in lahko zajame vplive, ki delujejo na površini in v območju. Masne točke tekočine znotraj nekega majhnega volumna se lahko poleg togega gibanja tudi vrtijo okoli centroida tega majhnega volumna, kar opišemo v povprečnih vrednostih z rotacijskim tenzorjem  $\vec{N}$ . V primeru mikropolarnih tekočin ni prisotnega mikro raztezanje delcev ( $N_{ij}$  je simetričen glede na diagonalo). V nadaljevanju bo prikazano, da podvrsta mikrotekočin, kot so mikropolarne tekočine, ki izpolnjujejo pogoje podane z enačbo (3.11), obstajajo, in zapisali konstitutivne enačbe Eringenovih mikropolarnih tekočin, pri čemer se bomo sklicevali na podane konstitutivne enačbe za mikrotekočine (priloga A2).

Kot posledico upoštevanja drugega pogoja za mikropolarno tekočino, podanega v enačbi (3.11), lahko za vrtilni gradient zapišemo sledečo enakost:

$$a_{ijk} = -a_{jik}. \quad (3.12)$$

Izračun  $\lambda_{ijk}$  in  $-\lambda_{ikj}$  iz enačbe (A2.6) in uporaba drugega pogoja podanega v enačbi (3.11) ter upoštevanjem enačbe (3.12), lahko povemo, da v primeru veljavnosti enačbe (3.11) za celotno gibanje morajo veljati sledeče enakosti:

$$\begin{aligned} \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_4 - \gamma_5 &= 0, \\ \gamma_7 - \gamma_8 &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\gamma_{10} - \gamma_{12} + \gamma_{11} - \gamma_{13} = 0, \quad (3.14)$$

tako, da je:

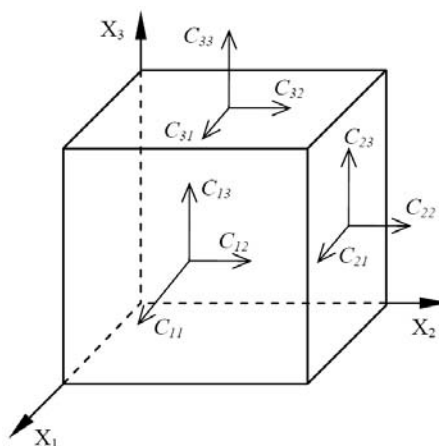
$$\begin{aligned} \lambda_{ijk} &= (\gamma_1 - \gamma_2) (a_{krr} \delta_{ij} - a_{jrr} \delta_{ik}) + (\gamma_{10} - \gamma_{11}) (a_{ijk} - a_{ikj}) \\ &+ (\gamma_{14} - \gamma_{15}) a_{jki}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Glede na pogoj simetrije tenzorja glede na diagonalo (en.(3.11)) je število neodvisnih spremenljivk za  $N_{ij}$  enako 3 in za  $\lambda_{ijk}$  je enako 9. Sedaj lahko vpeljemo dva nova sistema spremenljivk  $N_i$  in  $C_{ij}$  z:

$$N_r \equiv \frac{1}{2}e_{rij}N_{ij}, \quad N_{ij} = e_{rij}N_r, \quad (3.16)$$

$$C_{ir} \equiv -e_{rjk}\lambda_{ijk}, \quad \lambda_{ijk} = -2e_{jkr}C_{ir}, \quad (3.17)$$

pri čemer je  $e_{ijk}$  simbol permutacije oziroma antisimetrični tenzor, ki spremeni predznak v primeru, ko zamenjamo indekse. Aksialni vektor  $N_r$  bomo poimenovali vektor mikrorotacije in  $C_{ir}$  tenzor vezanih napetosti. Dogovor o predznaku za tenzor vezanih napetosti  $C_{ir}$  je enak kot pri napetostnem tenzorju, kar je prikazano na sliki 3.1.



Slika 3.1: Smeri pozitivnih vrednosti komponent tenzorja vezanih napetosti.

Tako je sedaj možno zapisati konstitutivno enačbo za tenzor napetosti  $\vec{T}$  mikropolarne tekočine izhajajoč iz konstitutivnih enačb za mikrotekočino [16], podanih v prilogi A2:

$$T_{ij} = (-p + \lambda_v v_{k,k}) \delta_{ij} + \mu_v (v_{i,j} + v_{j,i}) + k_v (v_{j,i} - \epsilon_{mij} N_m), \quad (3.18)$$

kjer je upoštevano, da je:

$$\mu + \mu_0 - \mu_1 \equiv \mu_v, \quad 2(\mu_1 - \mu_0) = k_v. \quad (3.19)$$

Če pomnožimo enačbo (3.15) z  $e_{rjk}$  in upoštevamo enačbi (3.16) in (3.17), lahko zapišemo še enačbo za tenzor vezanih napetosti  $\vec{C}$  v naslednji obliki:

$$C_{ij} = \alpha_v N_{k,k} \delta_{ij} + \beta_v N_{i,j} + \gamma_v N_{j,i}, \quad (3.20)$$

kjer je upoštevano, da je:

$$\begin{aligned} \alpha_v &\equiv 2(\gamma_{12} - \gamma_{10}), & \beta_v &\equiv 2(\gamma_2 - \gamma_1), \\ \gamma_v &\equiv 2(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_{10} - \gamma_{12} - \gamma_{14} + \gamma_{15}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Iz enačb je razvidno, da  $\lambda_v, \mu_v$  in  $k_v$  predstavljajo koeficiente viskoznosti v napetostnem tenzorju in  $\alpha_v, \beta_v$  in  $\gamma_v$  so novi koeficienti viskoznosti, v primerjavi s klasično teorijo Navier-Stokesovih enačb, in vplivajo na disipacijo vrtilne količine. Na splošno so koeficienti viskoznosti  $\lambda_v, \mu_v, k_v, \alpha_v, \beta_v$  in  $\gamma_v$  odvisni od gostote ( $\rho^{-1}$ ), temperature ( $T$ ) in tenzorja mikrovztajnosti ( $j$ ), pri čemer so mikropolarne tekočine stabilne, ko velja  $3\lambda_v + 2\mu_v + k_v \geq 0$ ,  $2\mu_v + k_v \geq 0$  in  $k_v \geq 0$ .

Iz primerjave konstitutivnih enačb, ki jih je podal Eringen (en.(3.18) in en.(3.20)) z konstitutivnimi enačbami za polarno tekočino (en.(3.8) in en.(3.9)), vidimo, da se v teh enačbah razlikujejo koeficienti viskoznosti (namreč  $\lambda_v = \lambda$ ,  $\mu_v = \mu - \mu_r$ ,  $k_v = 2\mu_r$ ,  $\alpha_v = c_0$ ,  $\beta_v = c_d - c_a$  in  $\gamma_v = c_d + c_a$ ). V nalogi bo v nadaljnje uporabljena Eringenova formulacija konstitutivnih enačb. Detaljna izpeljava konstitutivnih enačb za napetostni tenzor  $\vec{T}$  in tenzor vezanih napetosti  $\vec{C}$  v primeru mikropolarnih tekočin je podana v prispevkih Eringena ([16], [18] in [19]).

### 3.2.3 Zakoni ohranitve mikropolarnih tekočin

Če upoštevamo zgoraj zapisani konstitutivni enačbi za tenzor napetosti  $\vec{T}$  (en.3.18) in tenzor vezanih napetosti  $\vec{C}$  (en.3.20), ki ju je podal Eringen, v zakonih ohranitve za splošno polarno tekočino (en. (3.1)-(3.4)), dobimo enačbe zakona ohranitve mase (en.3.22), gibalne količine (en.3.23), vrtilne količine (en.3.24) in energije (en.3.25), ki je zapisana za temperaturo ( $T$ ), za mikropolarno tekočino, kar povzamemo po Eringenu [16]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.22)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + (\lambda_v + 2\mu_v + k_v) \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - (\mu_v + k_v) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} + k_v \vec{\nabla} \times \vec{N} + \rho \vec{f}, \quad (3.23)$$

$$\rho j \frac{D\vec{N}}{Dt} = (\alpha_v + \beta_v + \gamma_v) \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{N} - \gamma_v \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{N} + k_v \vec{\nabla} \times \vec{v} - 2k_v \vec{N} + \rho \vec{l}, \quad (3.24)$$

$$c_p \rho \frac{DT}{Dt} = k \Delta T. \quad (3.25)$$

Pomembno je poudariti, da v primeru, ko so  $k_v = \alpha_v = \beta_v = \gamma_v = 0$  in, ko ni prisotnih dodatnih izvorov in ponorov mikrorotacije  $\vec{l}$ , dobimo, da je mikrorotacija  $\vec{N}$  enaka nič in se enačba za ohranitev gibalne količine (en. 3.23) spremeni v klasično Navier-Stokesovo enačbo ohranitve gibalne količine. V primeru, ko je koeficient viskoznosti mikrorotacije enak nič ( $k_v = 0$ ), postaneta hitrostno polje ( $\vec{v}$ ) in polje mikrorotacije ( $\vec{N}$ ) nepovezani in je globalno gibanje tekočine nemoteno z mikro rotacijskim gibanjem tekočine.



V naslednjem koraku predpostavimo, da imamo nestisljiv tok mikropolarne tekočine, se pravi, da je gostota  $\rho$  konstantna veličina in da velja zakon ohranitve mase  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ . Prav tako so konstantne specifična toplota na enoto mase  $c_p$ , koeficient prevoda toplote  $k$  in lastnosti mikropolarnih tekočin kot koeficient viskoznosti drugega reda  $\lambda_v$ , dinamična viskoznost  $\mu_v$ , koeficient viskoznosti mikrorotacije  $k_v$ , koeficienti gradienta viskoznosti  $\alpha_v$ ,  $\beta_v$ ,  $\gamma_v$  in mikrovztrajnost  $j$ . Predpostavimo tudi, da nimamo dodatnih izvorov mikrorotacije  $\vec{l}$  in gibalne količine  $\vec{f}$ , razen za vzgon, kjer uporabimo za modeliranje le tega Boussinesqovo aproksimacijo. Z uporabo Boussinesqove aproksimacije se predpostavi spremenljivost gostote le pri volumskih silah, v vseh ostalih členih enačbe pa se predpostavi konstantna vrednost gostote. Za primer naravne konvekcije, kjer je prisotna le termična vzgonska sila, se spreminjanje gostote v odvisnosti od temperature opiše z linearno odvisnostjo:

$$\frac{\rho(T) - \rho_o}{\rho_o} = F = -\beta_T(T - T_o), \quad (3.26)$$

kjer je  $\rho_o$  referenčna gostota pri temperaturi  $T_o$ ,  $\beta_T$  pa je termični volumski razteznostni koeficient.

S predpostavkami, da je tok mikropolarne tekočine viskozen, nestisljiv in laminaren, lahko ohranitvene enačbe (en. 3.22-3.25) zapišemo kot:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (3.27)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + (\mu_v + k_v) \Delta \vec{v} + k_v \vec{\nabla} \times \vec{N} + \rho \vec{g} \beta_T (T - T_o), \quad (3.28)$$

$$\rho j \frac{D\vec{N}}{Dt} = \gamma_v \Delta \vec{N} + k_v \vec{\nabla} \times \vec{v} - 2k_v \vec{N}, \quad (3.29)$$

$$c_p \rho \frac{DT}{Dt} = k \Delta T, \quad (3.30)$$

V izpeljavi zgornjih enačb smo za tretji člen na desni strani enačbe (3.23) in drugi člen na desni strani enačbe (3.24) uporabili vektorski zapis  $(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F})$ , v katerem smo upoštevali še zakon ohranitve mase (3.27) viskozne in nestisljive mikropolarne tekočine.

## 3.3 Zakoni ohranitve v hitrostno vrtničnem zapisu

### 3.3.1 Kinematika nestisljive tekočine

Za uspešno implementacijo teorije mikropolarnih tekočin v hitrostno vrtnično formulacijo Navier-Stokesovih enačb in uporabo aproksimacijske metode robnih elementov, vpeljemo vektor vrtničnosti  $\vec{\omega}$  in razdelimo dinamiko toka na kinematiko in kinetiko toka tekočine.

Vektorsko polje vrtinčnosti  $\vec{\omega}$  je definirano kot rotor hitrostnega polja  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ , pri čemer je izpolnjena solenoidnost tega vektorja z definicijo  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$ . Z uporabo rotorja na vrtinčnem polju dobimo sledečo enačbo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}, \quad (3.31)$$

in upoštevanjem enačbe za ohranitev mase (3.27), ter predpostavko, da je tekočina nestisljiva, dobimo eliptično Poissonovo enačbo hitrostnega vektorja [44]:

$$\Delta \vec{v} + \vec{\nabla} \times \vec{\omega} = 0, \quad (3.32)$$

oziroma v tenzorskem zapisu:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + e_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} = 0. \quad (3.33)$$

Enačba (3.33) opisuje kinematiko toka tekočine, s pomočjo katere lahko pri znanem polju vrtinčnosti izračunamo polje hitrosti.

V primeru ravninskega toka in upoštevanjem vseh prej naštetih predpostavk za kinematiko in kinetiko toka tekočine se enačba za kinematiko toka tekočine poenostavi in se v tenzorski obliki za kartezijski koordinatni sistem zapiše kot:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + e_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = 0. \quad (3.34)$$

### 3.3.2 Kinetika nestisljive tekočine

#### Prenosna enačba vrtinčnosti

Izračun kinetike toka tekočine izvedemo s pomočjo uporabe rotorja v enačbi ohranitve gibalne količine (3.28), upoštevanjem predpostavk solenoidnosti polja vrtinčnosti  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$ , polja hitrosti  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  in polja mikrorotacije  $\vec{\nabla} \cdot \vec{N} = 0$  ter upoštevanjem zakona ohranitve mase (3.27):

$$\rho \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\mu_v + k_v) \Delta \vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - k_v \Delta \vec{N} + \rho \beta_T \vec{\nabla} \times (\vec{g}(T - T_o)). \quad (3.35)$$

Enačba (3.35) nam pove, da je sprememba vrtinčnosti odvisna od difuzije gibalne količine, raztegovanja in zvijanja vrtincev, difuzije mikrorotacije in vzgonskih sil.

V primeru ravninskega toka in upoštevanjem vseh prej naštetih predpostavk za kinematiko in kinetiko toka tekočine se enačba za kinetiko toka tekočine poenostavi in se v tenzorski obliki za kartezijski koordinatni sistem zapiše kot:

$$\rho \frac{D\omega}{Dt} = (\mu_v + k_v) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_j} - k_v \frac{\partial^2 N}{\partial x_j \partial x_j} + \rho \beta_T \frac{\partial g_i (T - T_o)}{\partial x_j}. \quad (3.36)$$

### Prenosna enačba mikrorotacije

Prenosna enačba za mikrorotacijo ostane enaka v primeru hitrostno-vrtinčne formulacije (en.3.29) kot prej, le da za drugi člen na desni strani enačbe namesto rotorja hitrostnega polja uporabimo vrtinčnost ter zapišemo enačbo za ohranitev mikrorotacije za ravninski tok v tenzorski obliki:

$$\rho j \frac{DN}{Dt} = \gamma_v \frac{\partial^2 N}{\partial x_j \partial x_j} + k_v \omega - 2k_v N. \quad (3.37)$$

V primeru, ko je koeficient viskoznosti mikrorotacije  $k_v = 0$  sta enačba za prenos vrtinčnosti (en.(3.36)) in enačba za prenos mikrorotacije (en. (3.37)) nepovezani, kar pomeni, da ni vpliva mikrorotacije na tok tekočine, pri čemer so prenosne enačbe v tem primeru enake klasičnim Navier-Stokesovim enačbam.

### Prenosna enačba energije

Prenosna enačba energije je enaka kot prej (en.(3.30)) in zapisana v tenzorski obliki za ravninski tok mikropolarne tekočine:

$$c_p \rho \frac{DT}{Dt} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.38)$$

### 3.3.3 Enačba tlaka

Z uporabo hitrostno-vrtinčne formulacije se pri izpeljavi ohranitvenih enačb toka tekočine iz sistema enačb izloči tlačni člen. Tlačno polje tako izračunamo iz enačbe, ki je izpeljana iz enačbe ohranitve gibalne količine (3.28):

$$\vec{\nabla} p = -\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - (\mu_v + k_v) \vec{\nabla} \times \vec{\omega} + k_v \vec{\nabla} \times \vec{N} + \rho \vec{g} \beta_T (T - T_o) = \vec{f}_{pm}. \quad (3.39)$$

Za izračun tlačnega polja iz enačbe (3.39), ki je odvisna od znanega hitrostnega polja, polja vrtinčnosti, mikrorotacije in temperature, uporabimo operator divergence v enačbi (3.39), s čimer dobimo eliptično Poissonovo enačbo, ki jo lahko numerično rešimo:

$$\Delta p - \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_{pm} = 0. \quad (3.40)$$

## 3.4 Robni pogoji

Pri reševanju ohranitvenih enačb je potrebno določiti ustrezne robne in začetne pogoje. Prav tako je reševanje zastavljenih ohranitvenih enačb odvisno od vrednosti ustreznih brezdimenzijskih parametrov kot so npr. Reynoldsovo število ( $Re$ ), Prandtlovo število ( $Pr$ ), Rayleighovo število ( $Ra$ ) in Grashoffovo število ( $Gr$ ). V večini primerov so robni pogoji podani v obliki Dirichletovega oziroma Neumannovega tipa ali z linearno kombinacijo obeh (Cauchyjev tip). Pravilna izbira robnih pogojev ima odločujoč vpliv na

numerično shemo, saj lahko z neprimerno izbiro letih pride do fizikalno napačne rešitve. Robne pogoje je potrebno predpisati po celotnem robu  $\Gamma$ , pri čemer bo  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , ki omejuje računsko območje  $\Omega$ , in sicer na delu roba  $\Gamma_1$  z Dirichletovimi in na delu roba  $\Gamma_2$  z Neumannovimi robnimi pogoji.

Robni in začetni pogoji za hitrost so:

$$v_i = \bar{v}_i \quad \text{na } \Gamma_1 \quad \text{za } t > t_0, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial n} \quad \text{na } \Gamma_2 \quad \text{za } t > t_0, \quad (3.42)$$

$$v_i = \bar{v}_{i0} \quad \text{v } \Omega \quad \text{za } t = t_0, \quad (3.43)$$

kjer se znak črta nad funkcijo tokovnega polja uporablja za predpisane oziroma podane vrednosti različnih funkcij tokovnega polja na robu oziroma v območju. vzdolž roba  $\Gamma_1$  so torej znane vrednosti hitrosti, pri čemer so v tem primeru neznane robne vrednosti normalni odvodi posameznih komponent hitrosti.

Robni in začetni pogoji za mikrorotacijo so:

$$N_i = \bar{N}_i \quad \text{na } \Gamma_1 \quad \text{za } t > t_0, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x_j} n_j = \bar{q}_{Nn} \quad \text{na } \Gamma_2 \quad \text{za } t > t_0, \quad (3.45)$$

$$N = \bar{N}_0 \quad \text{v } \Omega \quad \text{za } t = t_0, \quad (3.46)$$

kjer je  $\bar{q}_{Nn}$  znan normalni odvod mikrorotacije. Splošno enačbo za robni pogoj mikrorotacije na trdnih stenah (en.3.47) sta podala Rees in Bassom [39]:

$$N_{wall} = n_{wall} \frac{\partial v_t}{\partial n} \quad 0 \leq n_{wall} \leq 1, \quad (3.47)$$

kjer je  $v_t$  tangentna hitrost in  $n$  predstavlja normalo. Vrednost koeficienta  $n_{wall}$  nam določa obnašanje mikrostruktur mikropolarne tekočine ob trdnih stenah. V primeru, ko je  $n_{wall} = 1/2$ , imamo opravka z redkimi suspenzijami (nizka koncentracija delcev), kar sta predlagala Jenna in Mathur [28], ko je  $n_{wall} = 1$  modeliramo v bližini stene tok mikropolarne tekočine kot turbulenten (Peddieson [35]) in ko je  $n_{wall} = 0$  imamo tok goste suspenzije (visoka koncentracija delcev), kar sta v svojem delu predlagala Guram in Smith [21]. V izračunih, ki bodo predstavljeni znotraj tega dela, bo v nekaterih primerih uporabljen robni pogoj  $n_{wall} = 1/2$ , kar bo pomenilo, da je na steni mikrorotacija enaka vrtilni hitrosti. S tem je vpliv mikrostruktur v okolici stene majhen, kajti strukture se lahko približajo k steni le do razdalje njihovega premera. Tak robni pogoj je bil izbran

tudi zato, da je v okolici sten rotacija delcev odvisna le od strižnih napetosti v tekočini in tako je vektor mikrorotacije enak vrtilni hitrosti. V določenih primerih bo uporabljen robni pogoj  $n_{wall} = 0$ , kar bo pomenilo, da se delci v bližini stene ne morejo vrteti.

Robni in začetni pogoji za prenos toplote oziroma temperature so:

$$T = \bar{T} \quad \text{na} \quad \Gamma_1 \quad \text{za} \quad t > t_0, \quad (3.48)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j = \bar{q}_{Tn} \quad \text{na} \quad \Gamma_2 \quad \text{za} \quad t > t_0, \quad (3.49)$$

$$T = \bar{T}_0 \quad \text{v} \quad \Omega \quad \text{za} \quad t = t_0, \quad (3.50)$$

kjer je  $\bar{q}_{Tn}$  znan normalni odvod temperature na steni.

Robne vrednosti vrtničnosti se lahko določijo na več načinov. V primerih, ko je na robovih predpisan hitrostni vektor, rešitev kinematičnih integralskih enačb avtomatično daje nove robne vrednosti vrtničnosti. Za ravninsko gibanje se lahko zapiše naslednji izraz, ki povezuje robne vrednosti vrtničnosti z normalnimi in tangentskimi hitrostnimi pretoki:

$$\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial n} n_x - \frac{\partial v_x}{\partial t} n_y - \frac{\partial v_x}{\partial n} n_y - \frac{\partial v_x}{\partial t} n_x. \quad (3.51)$$

Edini fizikalno pravilni robni pogoj pridružen enačbi vrtničnosti (3.35) je definicija vrtničnosti zapisana za celoten rob območja rešitve:

$$e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \bar{\omega}_i \quad \text{na} \quad \Gamma. \quad (3.52)$$

Robne vrednosti vrtničnosti sledijo iz kinematičnega dela izračuna, zato so normalni odvodi vrtničnosti po robu edina neznanka v kinetičnem delu:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} n_j = \frac{\partial \omega_i}{\partial n} \quad \text{na} \quad \Gamma. \quad (3.53)$$

## 3.5 Koeficienti v prenosnih enačbah

V prenosnih enačbah za kinetiko vrtničnosti (en.(3.36)), kinetiko mikrorotacije (en.(3.37)) in kinetiko energije (en.(3.38)) se pojavljajo različni koeficienti. Določeni koeficienti, kot so gostota  $\rho$ , dinamična viskoznost  $\mu_v$ , specifična toplota na enoto mase  $c_p$  in termična volumska razteznost  $\beta_T$ , so prisotni tudi v klasičnih Navier-Stokesovih enačbah in so v našem primeru konstantne vrednosti. Dodatni koeficienti zaradi uporabe teorije mikropolarnih tekočin, kot so koeficient mikrovztrajnosti  $j$ , koeficient viskoznosti mikrorotacije  $k_v$  in koeficient gradienta viskoznosti  $\gamma_v$ , so prav tako konstantne vrednosti. Ti koeficienti viskoznosti so medsebojno odvisni. Jasno je, da  $N$  predstavlja skupno rotacijo neke

mikrostrukture tekočine oz. mikrorotacijo v tokovnem polju. V določenih primerih je možno, da so vplivi rotacije mikrostruktur zanemarljivi in se tok tekočine obnaša kot klasični tok viskozne tekočine. Če želimo, da bo mikrorotacija  $N$  možna rešitev, bo le ta mogoča, če upoštevamo, da je koeficient gradienta viskoznosti

$$\gamma_v = \left( \mu_v + \frac{k_v}{2} \right) j. \quad (3.54)$$

Enačba (3.54) nam podaja povezavo med koeficientom viskoznosti in mikrovztrajnostjo. Vse snovske lastnosti mikropolarne tekočine  $j$ ,  $\mu_v$ ,  $k_v$  in  $\gamma_v$  so pozitivne vrednosti. Povezava med viskoznostmi in mikrovztrajnostjo (en. (3.54)) je izpeljana v prispevkih Olmsteada in Majumdara [32] za primer Oseenovega toka in v prispevku Ahmadija [1] za tok viskozne mikropolarne tekočine.

Pri obravnavi mikropolarnih tekočin se pojavi še en nov parameter  $\lambda$ , ki predstavlja kombinacijo med koeficientom viskoznosti mikrorotacije  $k_v$  in koeficientom gradienta viskoznosti  $\gamma_v$ , ter vpliva na mikrorotacijo. Koeficient  $\lambda$  je enak nič v primeru, ko je enak nič koeficient viskoznosti mikrorotacije  $k_v$ . V primeru, ko koeficient  $\lambda$  narašča, se povečujejo tudi učinki mikrorotacije, še posebej v okolici sten. Koeficient  $\lambda$  je tako podan z izrazom, ki ga je predlagal Eringen [19]:

$$\lambda = \left[ \left( \left( \frac{k_v}{\gamma_v} \right) \frac{2\mu_v + k_v}{\mu_v + k_v} \right)^{\frac{1}{2}} \right] a, \quad (3.55)$$

kjer je  $z$   $a$  označena zunanja karakteristična dolžina reševanega problema (npr. v primeru toka v kanalu  $a$  predstavlja polmer kanala). Obratna vrednost člena v oglatem oklepaju, ki nastopa v enačbi (3.55), predstavlja notranjo karakteristično dolžino  $l$  mikropolarne tekočine, ki je odvisna od vrednosti koeficienta gradienta viskoznosti  $\gamma_v$  in vrednosti koeficienta viskoznosti mikrorotacije  $k_v$ :

$$l = \left( \left( \frac{\gamma_v}{k_v} \right) \frac{\mu_v + k_v}{2\mu_v + k_v} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.56)$$

Notranja karakteristična dolžina  $l$  v teoriji klasičnih Navier-Stokesovih enačb ni vključena. V primeru, ko se vrednost razmerja med notranjo karakteristično dolžino mikropolarne tekočine  $l$  napram zunanji karakteristični dolžini  $a$  (parameter  $\lambda^{-1}$ ) približuje vrednosti nič:

$$\frac{l}{a} = \lambda^{-1} \longrightarrow 0, \quad (3.57)$$

bodo rezultati s pomočjo klasičnih Navier-Stokesovih enačb bistveno odstopali od rezultatov, kot če bi uporabljali teorijo mikropolarnih tekočin. Iz navedenega lahko povzamemo, da bodo vplivi mikropolarnosti prevladujoči, ko se bo vrednost notranje karakteristične dolžine mikropolarne tekočine  $l$ , podane z enačbo (3.56), približevala vrednosti nič.

Zaradi predpostavke o mikroizotropnosti (Eringen [19]) je mikrovztrajnost sedaj konstantna vrednost imenovana koeficient mikrovztrajnosti  $j$  in je definiran kot kvadrat zunanje karakteristične dolžine  $j = a^2$ , kar sta v svojem delu predlagala Rees in Bassom [39].

V primeru suspenzij lahko rečemo, da so v primeru gostejših suspenzij vrednosti koeficientov dinamične viskoznosti  $\mu_v$  in viskoznosti mikrorotacije  $k_v$  višje in naraščajo z naraščanjem koncentracije suspendiranih delcev v tekočini. Tekom naloge se bo pojavil še takoimenovani parameter mikropolarnih tekočin  $K$ , ki nam bo podajal razmerje med koeficientom viskoznosti mikrorotacije  $k_v$  in dinamično viskoznostjo  $\mu_v$ :

$$K = \frac{k_v}{\mu_v} \quad (3.58)$$





# Poglavje 4

## Numerična metoda

### 4.1 Robno območna integralska oblika enačbe toka mikropolarnih tekočin

Prednosti robno območne integralske metode, izpeljane iz metode robnih elementov, sledijo iz uporabe utežnih funkcij v obliki Greenovih osnovnih rešitev. Različne ohranitvene modele lahko zapišemo s pravilno izbiro linearne diferencialnega operatorja  $L[u]$  v naslednji splošni obliki:

$$L[u] + b = 0, \quad (4.1)$$

kjer je operator  $L[u]$  eliptični oziroma parabolni,  $u[r_j, t]$ , je poljubna funkcija tokovnega polja in  $b[r_j, t]$  nehomogeni člen, ki zajame nelinearne člene prenosne enačbe in volumnske sile.

#### 4.1.1 Integralski zapis enačbe kinematike toka

Enačba kinematike toka (3.33) je nehomogena parcialna eliptična Poissonova enačba, ki jo je mogoče zapisati s pomočjo eliptičnega Laplaceovega diferencialnega operatorja:

$$L[\cdot] = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (4.2)$$

v obliki:

$$L[v_i] + b_i = \frac{\partial^2(v_i)}{\partial x_j \partial x_j} + b_i = 0. \quad (4.3)$$

Za enačbo kinematike (3.32) lahko na podlagi splošne integralske oblike za Poissonovo enačbo, ki je izpeljana v prispevkih Wrobla [47], Wu in Tompsona [48], Škergeta [43] in povzeta v doktorskem delu Ravnika [38], zapišemo:

$$c(\xi) \vec{v}(\xi) + \int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) u^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \times \vec{\omega} u^* d\Omega, \quad (4.4)$$

Območni integral na desni strani enačbe (4.4) vsebuje odvod vrtničnega polja, ki ga pretvorimo z uporabo Gaussovega divergenčnega teorema (v dodatku A2). Po transformaciji sledi enačba:

$$c(\xi) \vec{v}(\xi) + \int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) u^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} d\Gamma - \int_{\Gamma} (\vec{\omega} u^*) \times \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} (\vec{\omega} \times \vec{\nabla} u^*) d\Omega, \quad (4.5)$$

oziroma v tenzorskem zapisu:

$$c(\xi) v_i(\xi) + \int_{\Gamma} v_i \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial v_i}{\partial n} u^* d\Gamma - e_{ijk} \int_{\Gamma} \omega_j n_k u^* d\Gamma - e_{ijk} \int_{\Omega} \omega_j \frac{\partial u^*}{\partial x_k} d\Omega. \quad (4.6)$$

V enačbi predstavlja  $u^*$  osnovno rešitev Laplaceove enačbe ( $u^* = \frac{1}{4\pi r}$  za 3D in  $u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$  za 2D - izpeljava podana v [38]),  $\vec{n}$  je normala,  $c(\xi)$  je geometrijski faktor in  $\xi$  je izvorna točka. Geometrijski faktor  $c(\xi)$  je odvisen od lege izvorne točke:

- $c(\xi) = 0$              $\xi$  leži zunaj območja  $\Omega$ ,
- $c(\xi) = 1$              $\xi$  leži v območja  $\Omega$ ,
- $c(\xi) = \frac{1}{2}$              $\xi$  leži na gladkem robu  $\Gamma$ ,
- $c(\xi) = \frac{\psi}{2\pi}$              $\xi$  leži na negladkem robu  $\Gamma$ ,  $\psi$  je notranji kot roba  $\Gamma$  v točki  $\xi$ .

Pri izračunu kinematike toka je pomembno uporabiti enačbe za izračun hitrostnega in vrtničnega polja brez odvodov teh dveh spremenljivk. Za poenostavitev enačbe (4.5) bomo najprej zapisali izraz za odvod hitrosti po normalni:

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j, \quad (4.7)$$

in izraz za definicijo vrtničnosti:

$$\omega = e_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (4.8)$$

ter izraza za normalo in tangento.  $\vec{n}$  je normala na ploskev enotske dolžine, usmerjena pravokotno na ploskev v smeri ven iz območja, tangenta  $\vec{t}$  na ploskev je enotski vektor, ki je pravokoten na normalo:

$$\vec{n} = (n_x, n_y), \quad \vec{t} = (t_x, t_y) = (-n_y, n_x), \quad (4.9)$$

Enačbo (4.5) lahko zapišemo v sledeči obliki, pri čemer robna integrala na desni strani enačbe združimo:

$$c(\xi) \vec{v}(\xi) + \int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) u^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* \{ (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{n} \} d\Gamma + \int_{\Omega} (\vec{\omega} \times \vec{\nabla} u^*) d\Omega, \quad (4.10)$$

Z upoštevanjem predpostavke o solenoidalni tekočini lahko zapišemo spodnjo enakost, ki jo dobimo z upoštevanjem pravil o normali in tangenti (en.(4.9)) in upoštevanjem enačb za vrtinčnost (en.(4.8)) in enačbe za odvod hitrosti po normali (en.(4.7)) [38]:

$$\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{n} = \left(\vec{n} \times \vec{\nabla}\right) \times \vec{v}. \quad (4.11)$$

oziroma v tenzorskem zapisu:

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + e_{ij} \omega n_j = -e_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial t}. \quad (4.12)$$

S pomočjo izraza podanega z zgornjo enačbo (en.(4.11)), lahko zapišemo robni integral na desni strani enačbe (4.10) v sledeči obliki:

$$\int_{\Gamma} u^* \left(\vec{n} \times \vec{\nabla}\right) \times \vec{v} d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(\vec{n} \times \vec{\nabla}\right) \times (\vec{v} u^*) d\Gamma + \int_{\Gamma} \vec{v} \times \left(\vec{n} \times \vec{\nabla}\right) u^* d\Gamma, \quad (4.13)$$

Z uporabo Gaussovega divergenčnega stavka (dodatek A2) je prvi integral na desni strani enačbe (4.13) enak nič. Uporaba enačbe (4.13) v enačbi (4.5) nam da končno obliko enačbe kinematike toka oziroma dobimo tako imenovani Biot-Savartov zakon, v katerem ni odvodov hitrostnega in vrtinčnega polja:

$$c(\xi) \vec{v}(\xi) + \int_{\Gamma} \vec{v} \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\right) u^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \vec{v} \times \left(\vec{n} \times \vec{\nabla}\right) u^* d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\vec{\omega} \times \vec{\nabla} u^*\right) d\Omega. \quad (4.14)$$

Za ravninski tok tekočine se končna integralska oblika enačbe kinematike toka (4.14) v tenzorskem zapisu zapiše kot:

$$c(\xi) v_i(\xi) + \int_{\Gamma} v_i \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = e_{ij} \int_{\Gamma} v_j \frac{\partial u^*}{\partial n_t} d\Gamma - e_{ij} \int_{\Omega} \omega \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega. \quad (4.15)$$

### 4.1.2 Integralski zapis enačbe kinetike toka

Pri zapisu integralske oblike difuzijsko konvektivne enačbe za vrtinčnost, energijo in mikrorotacijo razdelimo nehomogeno hitrostno polje  $\vec{v}(r)$  na konstantni  $\vec{v}_o$  in spremenljivi del  $\tilde{v}(r)$ . Splošna oblika difuzijsko konvektivne enačbe s členom kemijske reakcije prvega reda se za splošno spremenljivko  $u$  zapiše kot:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u v_{oj}}{\partial x_j} = a_o \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} - \beta u - \frac{\partial \tilde{v}_j u}{\partial x_j} + \frac{I_o}{c_o}, \quad (4.16)$$

kjer sta  $a_o$  in  $c_o$  konstantni transportni snovski lastnosti tekočine,  $\beta$  je reakcijska konstanta in  $I_o$  je člen, ki zajema izvore. Diskretizacija akumulacijskega člena  $\partial u / \partial t$  se izvede z uporabo Eulerjeve sheme prvega reda  $\partial u / \partial t \approx (u_F - u_{F-1}) / \Delta t$ , kjer predstavlja podnapis  $F$  vrednost funkcije  $u$  v trenutnem časovnem koraku, podnapis  $F - 1$  vrednost funkcije  $u$

v predhodnem časovnem koraku, kjer je  $\Delta t$  časovni korak. Z uporabo enačbe (4.1) lahko enačbo (4.16) zapišemo v sledeči obliki:

$$L[u] + b = a_o \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} - \kappa u - v_{oj} \frac{\partial u}{\partial x_j} + b. \quad (4.17)$$

Parameter  $\kappa$  je definiran kot vsota časovnega inkrementa, ki vstopi v enačbo z uporabo diskretizacije akumulacijskega člena in  $\beta$ , ki zajame ostale reakcijske člene:

$$\kappa = \frac{1}{\Delta t} + \beta. \quad (4.18)$$

Ob predpostavki o poznavanju osnovne rešitve  $u^*(\xi, s)$ , ki zadostuje enačbi:

$$L^*[u^*] + \delta(\xi, s) = 0, \quad (4.19)$$

kjer predstavlja  $L^*[\cdot]$  pridruženi operator k  $L[\cdot]$ , lahko zapišemo s pomočjo enačbe (4.17) naslednjo enačbo:

$$a_o \frac{\partial^2 u^*(\xi, s)}{\partial x_j(s) \partial x_j(s)} - \kappa u^*(\xi, s) - v_{oj} \frac{\partial u^*(\xi, s)}{\partial x_j(s)} + \delta(\xi, s) = 0. \quad (4.20)$$

Enačba osnovne rešitve in enačba njenega odvoda za ravninski tok sta podani v naslednjih dveh enačbah [44]:

$$u^* = a_o \frac{1}{2\pi a_o} K_o(\zeta r) \exp\left(\frac{v_{oj} r_j}{2a_o}\right), \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_j} n_j = \frac{n_j}{2\pi r^2 a_o} \left[ \zeta r K_1(\zeta r) r_j - \frac{r^2}{2a_o} K_o(\zeta r) v_{oj} \right] \exp\left(\frac{v_{oj} r_j}{2a_o}\right), \quad (4.22)$$

kjer je parameter  $\zeta$  definiran kot:

$$\zeta^2 = \left(\frac{v_o}{2a_o}\right)^2 + \frac{\kappa}{a_o} = \left(\frac{v_o}{2a_o}\right)^2 + \frac{1}{a_o \Delta t} + \frac{\beta}{a_o}. \quad (4.23)$$

$K_o$  in  $K_1$  sta modificirani Besselovi funkciji drugega reda,  $r_j(\xi, s)$  je vektor od izvorne točke  $\xi$  do referenčne točke  $s$ , medtem ko  $r$  predstavlja dolžino tega vektorja  $r = |r_j|$  in  $v_o^2 = v_{oj} v_{oj}$ .

Z uporabo Greenovega teorema (dodatek A2) v enačbi (4.17) dosežemo sledečo robno območno integralsko enačbo kinetike toka:

$$c(\xi) u(\xi) + a_o \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = a_o \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uv_{on} u^* d\Gamma + \int_{\Omega} bu^* d\Omega. \quad (4.24)$$

Člen volumskih sil  $b$  vsebuje konvektivni člen zaradi spremenljivega dela hitrosti, izvorne člene in en člen iz diskretizacije akumulacijskega člena:

$$b = -\frac{\partial \tilde{v}_j u}{\partial x_j} + \frac{I_o}{c_o} + \frac{u_{F-1}}{\Delta t}. \quad (4.25)$$

Tabela 4.1: Koeficienti v integralski obliki enačbe kinetike toka.

|               | $u$      | $a_o$                      | $c_o$                | $\beta$               | $I_o$  |
|---------------|----------|----------------------------|----------------------|-----------------------|--|
| Vrtinčnost    | $\omega$ | $\frac{\mu_v + k_v}{\rho}$ | $\frac{\rho}{k_v}$   | 0                     | $-\frac{\partial^2 N}{\partial x_j \partial x_j} - \beta_T \frac{\partial g_i(T-T_o)}{\partial x_j}$ |
| Mikrorotacija | $N$      | $\frac{\gamma_v}{\rho j}$  | $\frac{\rho j}{k_v}$ | $\frac{2k_v}{\rho j}$ | $\omega$   |
| Energija      | $T$      | $\frac{k}{c_p \rho}$       | 0                    | 0                     | 0  |

Območni integral v enačbi (4.24), ki zajema volumske sile, razdelimo s pomočjo Gaussovega teorema na robne in volumske integrale, s čimer dobimo splošno robno območno integral-sko obliko enačbe kinetike toka za splošno spremenljivko  $u$ :

$$\begin{aligned}
 c(\xi) u(\xi) &+ a_o \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \\
 &= a_o \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uv_{on} u^* d\Gamma + \int_{\Omega} \tilde{v}_j u \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \\
 &+ \frac{1}{c_o} \int_{\Omega} I_o u^* d\Omega + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u_{F-1} u^* d\Omega.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Vrednosti koeficientov  $a_o$ ,  $c_o$ ,  $\beta$  in  $I_o$  za različne funkcije toka (vrtinčnost, mikrorotacija in temperatura) so različne in izvirajo iz enačb (3.36), (3.37) in (3.38) za laminarni ravninski tok mikropolarne tekočine ter so podani v tabeli 4.1.

### Integralski zapis prenosnih enačb kinetike toka

V nadaljevanju so podane končne robno območne integralske oblike enačb za prenos vrtinčnosti (en.(4.27)), prenos mikrorotacije (en.(4.28)) in prenos energije (en.(4.29)):

$$\begin{aligned}
 c(\xi) \omega(\xi) &+ \left( \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \right) \int_{\Gamma} \omega \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \\
 &= \left( \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \right) \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \omega v_{on} u^* d\Gamma + \int_{\Omega} \omega \tilde{v}_j \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \\
 &- \left( \frac{k_v}{\rho} \right) \int_{\Gamma} u^* \frac{\partial N}{\partial n} d\Gamma + \left( \frac{k_v}{\rho} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial u^*}{\partial x_j} \frac{\partial N}{\partial x_j} d\Omega \\
 &+ e_{ij} \int_{\Gamma} n_i g_j \beta_T (T - T_o) u^* d\Gamma - e_{ij} \int_{\Omega} g_j \beta_T (T - T_o) \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \\
 &+ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \omega_{F-1} u^* d\Omega,
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
c(\xi) N(\xi) &+ \left(\frac{\gamma_v}{\rho j}\right) \int_{\Gamma} N \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma & (4.28) \\
&= \left(\frac{\gamma_v}{\rho j}\right) \int_{\Gamma} \frac{\partial N}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} N v_{on} u^* d\Gamma + \int_{\Omega} N \tilde{v}_j \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \\
&+ \left(\frac{k_v}{\rho j}\right) \int_{\Omega} \omega u^* d\Omega + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} N_{F-1} u^* d\Omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(\xi) T(\xi) &+ \left(\frac{k}{c_p \rho}\right) \int_{\Gamma} T \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma & (4.29) \\
&= \left(\frac{k}{c_p \rho}\right) \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} T v_{on} u^* d\Gamma + \int_{\Omega} T \tilde{v}_j \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \\
&+ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} T_{F-1} u^* d\Omega.
\end{aligned}$$

### 4.1.3 Integralni zapis enačbe tlaka

Z uporabo hitrostno-vrtinčne formulacije se tlačni člen izloči iz sistema enačb. Tlačno polje tako računamo za vsak časovni korak po zaključeni nelinearni zanki. Enačba za izračun tlaka (3.40) je eliptična Poissonova enačba, kjer lahko s pomočjo linearnega eliptičnega Laplaceovega diferencialnega operatorja zapisanega za splošno spremenljivko:

$$L[\cdot] = \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (4.30)$$

zapišemo sledečo enačbo za tlak:

$$L[p] + b = \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_j} + b = 0. \quad (4.31)$$

Izpeljavo eliptične Poissonove enačbe v integralno obliko smo povzeli po Wroblu [1]:

$$c(\xi) p(\xi) + \int_{\Gamma} p \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} u^* d\Gamma + \int_{\Omega} b u^* d\Omega, \quad (4.32)$$

kjer je  $u^*$  eliptična Laplaceova osnovna rešitev. Tako je mogoče iz enačbe (3.40) in enačbe (4.31) zapisati, da je:

$$b = -\frac{\partial f_{pmi}}{\partial x_i}. \quad (4.33)$$

Z upoštevanjem enačbe (4.33) lahko zapišemo enačbo (4.32) v sledeči obliki:

$$c(\xi) p(\xi) + \int_{\Gamma} p \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial f_{pmi}}{\partial x_i} u^* d\Omega. \quad (4.34)$$

S pomočjo Gaussovega teorema se območni integral v enačbi (4.34) preoblikuje v:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_{pmi}}{\partial x_i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} f_{pmi} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Omega} f_{pmi} \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega. \quad (4.35)$$

Glede na to, da velja, da je gradient tlaka enak  $f_{pmi}$ , velja na robu pogoj  $\partial p / \partial n = f_{pmi} n_i$ , s čimer se robna integrala na desni strani enačbe (4.34) odštejeta. Končna integralna oblika tlačne enačbe je tako:

$$c(\xi) p(\xi) + \int_{\Gamma} p \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Omega} f_{pmi} \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega. \quad (4.36)$$

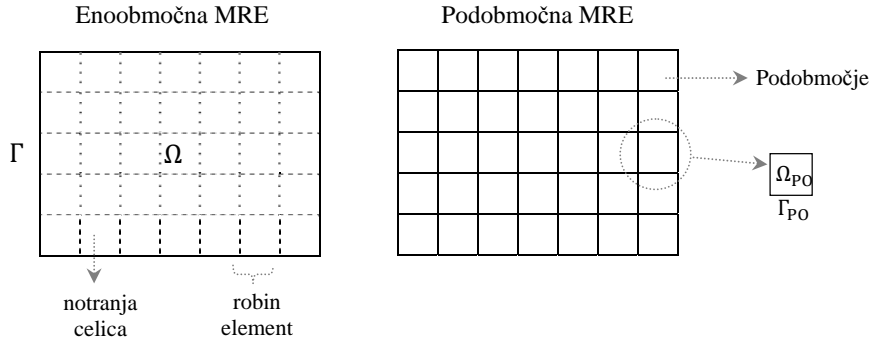
Enačbo (4.36) je možno rešiti le pod pogojem, da v enem od vozlišč izberemo referenčni tlak. Za podane Neumanove robne pogoje je tlačno polje  $p(r_j, t)$  do konstante nedoločeno z eliptično Poissonovo diferencialno enačbo (3.40) oziroma pripadajočo integralno obliko enačbe (4.36) in upoštevanjem znanega hitrostnega, vrtničnega in mikrorotacijskega polja v določenem času. Izpeljana integralna oblika enačbe (4.36) se najprej uporabi za izračun vrednosti tlaka na robu območja. Metoda robnih elementov omogoča ekspliciten izračun tlaka v območju, ki pa ga ne moremo uporabiti, saj se v primeru gostih mrež pojavi zelo velika matrika integralov, kajti velikost matrike integralov raste s kvadratom števila vseh vozlišč. Zaradi navedene omejitve se tlak v območju izračunava implicitno tako kot v primeru izračuna kinematike toka za območje z uporabo metode podobmočij.

## 4.2 Diskretizacija integralnih enačb toka mikropolarnih tekočin

Analitično reševanje prej podanih integralnih enačb za izračun hitrosti, vrtničnosti, mikrorotacije, temperature in tlaka je zelo omejeno. Za uspešno reševanje problemov se uporabi pri reševanju teh enačb različne aproksimacijske metode. Potreba numeričnega reševanja oziroma določanja funkcij tokovnega polja je diskretizacija območja na  $C$  notranjih celic z  $E$  robnimi elementi in zapis integralnih enačb v diskretizirani obliki. Pri diskretizaciji zapišemo robne in območne integrale kot vsoto integralov po  $E$  robnih elementih in  $C$  notranjih celicah (slika 4.1). Z diskretizacijo območja je potrebno aproksimirati vrednosti vseh funkcij tokovnega polja na vsak robni element in notranjo celico z uporabo interpolacijskih polinomov  $\{\Phi\}$  in  $\{\phi\}$  (dodatek A4) glede na prostor in časovnim interpolacijskim polinomom  $\{\psi\}$ . V izpeljavah diskretnih oblik bo oznaka  $n$  predstavljala število vozlišč v vsakem od robnih elementov oziroma notranjih celic. Za časovni interpolacijski polinom se uporabi predpostavka  $\psi = 1$ , kar pomeni da je interpolacijska porazdelitev znotraj časovnega koraka funkcij tokovnega polja konstantna.

### 4.2.1 Diskretna oblika enačbe kinematike toka

V integralni enačbi kinematike toka (4.15) nastopajo robni kot tudi območni integrali. Iz tega razloga je potrebno diskretizirati tako rob območja kot tudi območje samo na robne elemente in notranje celice. Rob  $\Gamma$  razdelimo na  $E$  robnih elementov  $\Gamma_e$ , območje  $\Omega$  pa



Slika 4.1: Diskretizacija računskega območja

razdelimo na  $C$  notranjih celic  $\Omega_c$  in tako zapišemo enačbo (4.15) kot:

$$c(\xi) v_i(\xi) + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} v_i \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = e_{ij} \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} v_j \frac{\partial u^*}{\partial n_t} d\Gamma - e_{ij} \sum_{c=1}^C \int_{\Omega_c} \omega \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega. \quad (4.37)$$

Funkcije tokovnega polja so definirane znotraj vsakega robnega elementa oziroma notranje celice v vozliščih, tako da je potrebno za porazdelitev funkcij tokovnega polja po robnem elementu oziroma notranji celici uporabiti aproksimacijo teh funkcij z uporabo robnih in območnih interpolacijskih polinomov:

$$\begin{aligned} v_i &= \{\Phi\}^T \{v_i\}^n, \\ \omega &= \{\phi\}^T \{\omega\}^n, \end{aligned} \quad (4.38)$$

za ravninski tok je  $i = 1, 2$  in eksponent  $T$  predstavlja transponiranost. Z upoštevanjem enačbe (4.38) lahko zapišemo enačbo (4.37) kot:

$$\begin{aligned} c(\xi) v_i(\xi) + \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \right) \{v_i\}^n \\ = e_{ij} \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial n_t} d\Gamma \right) \{v_j\}^n - e_{ij} \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \right) \{\omega\}^n. \end{aligned} \quad (4.39)$$

V enačbi (4.41) je v vseh integralih integrand odvod osnovne rešitve pomnožen z interpolacijsko funkcijo in enotsko normalo. Vrednosti integralov so odvisne le od geometrije in izbranih interpolacijskih funkcij:

$$\begin{aligned} h_e^n &= \int_{\Gamma_e} \Phi^n \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \\ h_{et}^n &= \int_{\Gamma_e} \Phi^n \frac{\partial u^*}{\partial n_t} d\Gamma \\ d_{cj}^m &= \int_{\Omega_c} \phi^n \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega, \end{aligned} \quad (4.40)$$



in jih lahko izračunamo pred začetkom iterativnega postopka, s katerim rešujemo nelinearen sistem enačb. S podanimi označbami integralov (en.(4.40)) diskretno obliko enačbe (4.41) prepisemo v:

$$c(\xi) v_i(\xi) + \sum_{e=1}^E \{h\}^T \{v_i\}^n = e_{ij} \sum_{e=1}^E \{h_t\}^T \{v_j\}^n - e_{ij} \sum_{e=1}^C \{d_j\}^T \{\omega\}^n. \quad (4.41)$$

Enačba predstavlja diskretizirano obliko robno območne integralske enačbe kinematike ravninskega toka tekočine. Enačbo najprej uporabimo na robu za izračun robnih vrtničnosti. Zaradi obravnave hitrosti na robu je smiselno vpeljati normalno in tangentno hitrost:

$$v_n = n_x v_x + n_y v_y, \quad (4.42)$$

$$v_t = n_x v_y - n_y v_x. \quad (4.43)$$

Ko v enačbi (4.41) izračunamo vektorske produkte, zapišemo enačbo tudi v matrično vektorski obliki:

$$[c(\xi)] \{v_i(\xi)\} + [\hat{H}] \{v_i\} = e_{ij} [H_t] \{v_j\} - e_{ij} [D_j] \{\omega\}, \quad (4.44)$$

kjer je  $[c(\xi)]$  diagonalna matrika geometrijskih koeficientov odvisnih od položaja izvorne točke. Ko izvorno točko  $\xi$  postavimo v vsa robna vozlišča, dobimo  $E \cdot n_e$  hitrosti na robu in  $C \cdot n_c$  vrtničnosti na robu in v območju. Diagonalna matrika  $[c(\xi)]$  se doda matriki  $[\hat{H}]$ , tako da je  $h_{ij} = \hat{h}_{ij} + c_i \delta_{ij}$ , in se končna matrično vektorska oblika enačbe kinematike ravninskega toka mikropolarne tekočine zapiše kot:

$$[H] \{v_i\} = e_{ij} [H_t] \{v_j\} - e_{ij} [D_j] \{\omega\}, \quad (4.45)$$

oziroma v razširjeni obliki za  $x$  in  $y$  komponento v kartezijskem koordinatnem sistemu:

$$[H] \{v_x\} = [H_t] \{v_y\} - [D_y] \{\omega\}, \quad (4.46)$$

$$[H] \{v_y\} = -[H_t] \{v_x\} + [D_x] \{\omega\}. \quad (4.47)$$

### 4.2.2 Diskretna oblika prenosne enačbe vrtničnosti

Enako kot smo naredili pri izpeljavi diskretne oblike za kinematiko toka v prejšnjem poglavju, bomo tudi tukaj diskretizirali rob območja kot tudi območje samo in tako zapisali integralsko obliko enačbe kinematike vrtničnosti (en.(4.28)):

$$\begin{aligned}
c(\xi) \omega(\xi) &+ \left( \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \right) \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} \omega \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma & (4.48) \\
&= \left( \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \right) \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} \frac{\partial \omega}{\partial n} u^* d\Gamma - \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} \omega v_{on} u^* d\Gamma + \sum_{c=1}^C \int_{\Omega_c} \omega \tilde{v}_j \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \\
&- \left( \frac{k_v}{\rho} \right) \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} u^* \frac{\partial N}{\partial n} d\Gamma + \left( \frac{k_v}{\rho} \right) \sum_{c=1}^C \int_{\Omega_c} \frac{\partial u^*}{\partial x_j} \frac{\partial N}{\partial x_j} d\Omega \\
&+ e_{ij} \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} n_i g_j \beta_T (T - T_o) u^* d\Gamma - e_{ij} \sum_{c=1}^C \int_{\Omega_c} g_j \beta_T (T - T_o) \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \\
&+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{c=1}^C \int_{\Omega_c} \omega_{F-1} u^* d\Omega.,
\end{aligned}$$

Funkcije tokovnega polja, ki nastopajo znotraj vsakega robnega elementa oziroma notranje celice v vozliščih, opišemo s pomočjo aproksimacijskih funkcij, podanih z uporabo robnih in območnih interpolacijskih polinomov:

$$\begin{aligned}
\omega &= \{\Phi\}^T \{\omega\}^n, & (4.49) \\
\frac{\partial \omega}{\partial n} &= \{\Phi\}^T \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial n} \right\}^n, \\
\omega v_{on} &= \{\Phi\}^T \{\omega v_{on}\}^n, \\
\omega \tilde{v}_j &= \{\phi\}^T \{\omega \tilde{v}_j\}^n, \\
\frac{\partial N}{\partial n} &= \{\Phi\}^T \left\{ \frac{\partial N}{\partial n} \right\}^n, \\
\frac{\partial N}{\partial x_j} &= \{\phi\}^T \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\}^n, \\
n_i g_j \beta_T (T - T_o) &= \{\Phi\}^T \{n_i g_j \beta_T (T - T_o)\}^n, \\
g_j \beta_T (T - T_o) &= \{\phi\}^T \{g_j \beta_T (T - T_o)\}^n, \\
\omega_{F-1} &= \{\phi\}^T \{\omega_{F-1}\}^n.
\end{aligned}$$

S pomočjo zgornjih enačb lahko enačbo kinetike vrtinčnosti (en.(4.48)) zapišemo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned}
c(\xi) \omega(\xi) &+ \left( \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \right) \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \right) \{\omega\}^n \\
&= \left( \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \right) \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T u^* d\Gamma \right) \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial n} \right\}^n \\
&- \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T u^* d\Gamma \right) \{\omega v_{on}\}^n + \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \right) \{\omega \tilde{v}_j\}^n \\
&- \left( \frac{k_v}{\rho} \right) \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} u^* \{\Phi\}^T d\Gamma \right) \left\{ \frac{\partial N}{\partial n} \right\}^n + \left( \frac{k_v}{\rho} \right) \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \frac{\partial u^*}{\partial x_j} \{\phi\}^T d\Omega \right) \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\}^n \\
&+ e_{ij} \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T u^* d\Gamma \right) \{n_i g_j \beta_T (T - T_o)\}^n \\
&- e_{ij} \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \right) \{g_j \beta_T (T - T_o)\}^n \\
&+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T u^* d\Omega \right) \{\omega_{F-1}\}^n .,
\end{aligned} \tag{4.50}$$

V enačbi (4.50) lahko združimo člene, katerih integrand je enak in dobimo:

$$\begin{aligned}
c(\xi) \omega(\xi) &+ \left( \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \right) \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \right) \{\omega\}^n \\
&= \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T u^* d\Gamma \right) \left\{ \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega v_{on} - \frac{k_v}{\rho} \frac{\partial N}{\partial n} + e_{ij} n_i g_j \beta_T (T - T_o) \right\}^n \\
&+ \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \right) \left\{ \omega \tilde{v}_j + \frac{k_v}{\rho} \frac{\partial N}{\partial x_j} - e_{ij} g_j \beta_T (T - T_o) \right\}^n \\
&+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T u^* d\Omega \right) \{\omega_{F-1}\}^n .,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Integrale v zgornji enačbi (en.(4.51)), zapišemo v krajši obliki kot:

$$\begin{aligned}
h_e^n &= \int_{\Gamma_e} \Phi^n \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma, \\
g_e^n &= \int_{\Gamma_e} \Phi^n u^* d\Gamma, \\
d_{cj}^m &= \int_{\Omega_c} \phi^n \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega, \\
b_c^m &= \int_{\Omega_c} \phi^n u^* d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Zgoraj podane integrale  $h_e^n$ ,  $g_e^n$ ,  $d_{cj}^m$  in  $b_c^m$  izračunavamo pred začetkom vsake iteracije, kajti v osnovni rešitvi imamo tudi hitrost, ki pa ni konstantna in se tekom iterativnega postopka spreminja. Tako lahko sedaj zapišemo diskretno obliko enačbe kinetike vrtinčnosti:

$$\begin{aligned}
c(\xi) \omega(\xi) &+ \left( \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \right) \sum_{e=1}^E \{h\}^T \{\omega\}^n \\
&= \sum_{e=1}^E \{g\}^T \left\{ \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega v_{on} - \frac{k_v}{\rho} \frac{\partial N}{\partial n} + e_{ij} n_i g_j \beta_T (T - T_o) \right\}^n \\
&+ \sum_{c=1}^C \{d_j\}^T \left\{ \omega \tilde{v}_j + \frac{k_v}{\rho} \frac{\partial N}{\partial x_j} - e_{ij} g_j \beta_T (T - T_o) \right\}^n \\
&+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{c=1}^C \{b\}^T \{\omega_{F-1}\}^n.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Enačbo (4.53) zapišemo za vsa robna in notranja vozlišča računskega območja:

$$\begin{aligned}
[c(\xi)] \{\omega(\xi)\} &+ \left( \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \right) [\hat{H}] \{\omega\}^n \\
&= [G] \left\{ \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega v_{on} - \frac{k_v}{\rho} \frac{\partial N}{\partial n} + e_{ij} n_i g_j \beta_T (T - T_o) \right\}^n \\
&+ [D_j] \left\{ \omega \tilde{v}_j + \frac{k_v}{\rho} \frac{\partial N}{\partial x_j} - e_{ij} g_j \beta_T (T - T_o) \right\}^n + \frac{1}{\Delta t} [B] \{\omega_{F-1}\}^n.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Diagonalna matrika  $[c(\xi)]$  se doda matriki  $[\hat{H}]$ , tako, da je  $h_{ij} = \hat{h}_{ij} + c_i \delta_{ij}$ , in se končna matrično vektorska oblika enačbe vrtničnosti ravninskega toka mikropolarne tekočine zapiše kot:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \right) [H] \{\omega\}^n &= [G] \left\{ \frac{\mu_v + k_v}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega v_{on} - \frac{k_v}{\rho} \frac{\partial N}{\partial n} + e_{ij} n_i g_j \beta_T (T - T_o) \right\}^n \\
&+ [D_j] \left\{ \omega \tilde{v}_j + \frac{k_v}{\rho} \frac{\partial N}{\partial x_j} - e_{ij} g_j \beta_T (T - T_o) \right\}^n + \frac{1}{\Delta t} [B] \{\omega_{F-1}\}^n.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

S pomočjo pravkar izpeljane diskretne enačbe kinetike vrtničnosti (en.(4.55)) se izračunajo odvodi vrtničnosti po robu in notranje območne vrednosti vrtničnosti. Kot robni pogoj se v tej enačbi uporabijo robne vrednosti vrtničnosti in vrednosti hitrosti, ki smo jih izračunali v kinematičnem delu izračuna.

### 4.2.3 Diskretna oblika prenosne enačbe mikrorotacije

Transportna enačba mikrorotacije, podana v integralnem zapisu kot enačba kinetike mikrorotacije (en.(4.28)), se prav tako kot enačba kinetike vrtničnosti zapiše v diskretizirani

obliki, pri čemer se po diskretizaciji roba in območja enačba (4.28) zapiše kot:

$$\begin{aligned}
c(\xi) N(\xi) &+ \left(\frac{\gamma_v}{\rho j}\right) \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} N \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \\
&= \left(\frac{\gamma_v}{\rho j}\right) \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} \frac{\partial N}{\partial n} u^* d\Gamma - \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} N v_{on} u^* d\Gamma + \sum_{c=1}^C \int_{\Omega_c} N \tilde{v}_j \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \\
&+ \left(\frac{k_v}{\rho j}\right) \sum_{c=1}^C \int_{\Omega_c} \omega u^* d\Omega + \frac{1}{\Delta t} \sum_{c=1}^C \int_{\Omega_c} N_{F-1} u^* d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Enačbo (4.56) pretvorimo s pomočjo robnih in območnih interpolacijskih polinomov:

$$\begin{aligned}
N &= \{\Phi\}^T \{N\}^n, \\
\frac{\partial N}{\partial n} &= \{\Phi\}^T \left\{ \frac{\partial N}{\partial n} \right\}^n, \\
N v_{on} &= \{\Phi\}^T \{N v_{on}\}^n, \\
N \tilde{v}_j &= \{\phi\}^T \{N \tilde{v}_j\}^n, \\
\omega &= \{\phi\}^T \{\omega\}^n, \\
N_{F-1} &= \{\phi\}^T \{N_{F-1}\}^n,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

v sledečo obliko:

$$\begin{aligned}
c(\xi) N(\xi) &+ \left(\frac{\gamma_v}{\rho j}\right) \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \right) \{N\}^n \\
&= \left(\frac{\gamma_v}{\rho j}\right) \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T u^* d\Gamma \right) \left\{ \frac{\partial N}{\partial n} \right\}^n - \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T u^* d\Gamma \right) \{N v_{on}\}^n \\
&+ \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \right) \{N \tilde{v}_j\}^n + \left(\frac{k_v}{\rho j}\right) \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T u^* d\Omega \right) \{\omega\}^n \\
&+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T u^* d\Omega \right) \{N_{F-1}\}^n,
\end{aligned} \tag{4.58}$$

ki jo poenostavimo z združevanjem členov z enakimi integrandi:

$$\begin{aligned}
c(\xi) N(\xi) &+ \left(\frac{\gamma_v}{\rho j}\right) \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \right) \{N\}^n \\
&= \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T u^* d\Gamma \right) \left\{ \frac{\gamma_v}{\rho j} \frac{\partial N}{\partial n} - N v_{on} \right\}^n + \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \right) \{N \tilde{v}_j\}^n \\
&+ \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T u^* d\Omega \right) \left\{ \left(\frac{k_v}{\rho j}\right) \omega + \frac{1}{\Delta t} N_{F-1} \right\}^n.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Z vpeljavo integralov:

$$\begin{aligned}
h_e^n &= \int_{\Gamma_e} \Phi^n \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma, \\
g_e^n &= \int_{\Gamma_e} \Phi^n u^* d\Gamma, \\
d_{cj}^m &= \int_{\Omega_c} \phi^n \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega, \\
b_c^m &= \int_{\Omega_c} \phi^n u^* d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.60}$$

zapišemo diskretno obliko enačbe kinetike mikrorotacije:

$$\begin{aligned}
c(\xi) N(\xi) &+ \left( \frac{\gamma_v}{\rho j} \right) \sum_{e=1}^E \{h\}^T \{N\}^n \\
&= \sum_{e=1}^E \{g\}^T \left\{ \frac{\gamma_v}{\rho j} \frac{\partial N}{\partial n} - N v_{on} \right\}^n + \sum_{c=1}^C \{d_j\}^T \{N \tilde{v}_j\}^n \\
&+ \sum_{c=1}^C \{b\}^T \left\{ \left( \frac{k_v}{\rho j} \right) \omega + \frac{1}{\Delta t} N_{F-1} \right\}^n.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Enačbo (4.61) sedaj zapišemo za vsa robna in notanja vozlišča sistema ter tako kot v primeru izpeljave diskretne enačbe kinetike vrtinčnosti upoštevamo, da se diagonalna matrika  $[c(\xi)]$  doda matriki  $[\hat{H}]$ , tako da je  $h_{ij} = \hat{h}_{ij} + c_i \delta_{ij}$ , in se končna matrično vektorska oblika enačbe kinematike mikrorotacije ravninskega toka mikropolarne tekočine zapiše kot:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\gamma_v}{\rho j} \right) [H] \{N\}^n &= [G] \left\{ \frac{\gamma_v}{\rho j} \frac{\partial N}{\partial n} - N v_{on} \right\}^n + [D_j] \{N \tilde{v}_j\}^n \\
&+ [B] \left\{ \left( \frac{k_v}{\rho j} \right) \omega + \frac{1}{\Delta t} N_{F-1} \right\}^n.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

#### 4.2.4 Diskretna oblika prenosne enačbe energije

Prenosno enačbo ohranitve energije, zapisano v integralski obliki (en.(4.29)), za spremenljivko temperaturo, diskretiziramo podobno kot smo to naredili v primeru diskretizacije za enačbe kinetike vrtinčnosti in kinetike mikrorotacije:

$$\begin{aligned}
c(\xi) T(\xi) &+ \left( \frac{k}{c_p \rho} \right) \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} T \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \\
&= \left( \frac{k}{c_p \rho} \right) \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} \frac{\partial T}{\partial n} u^* d\Gamma - \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} T v_{on} u^* d\Gamma + \sum_{c=1}^C \int_{\Omega_c} T \tilde{v}_j \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \\
&+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{c=1}^C \int_{\Omega_c} T_{F-1} u^* d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

S pomočjo robnih in območnih interpolacijskih polinomov:

$$\begin{aligned}
T &= \{\Phi\}^T \{T\}^n, \\
\frac{\partial T}{\partial n} &= \{\Phi\}^T \left\{ \frac{\partial T}{\partial n} \right\}^n, \\
Tv_{on} &= \{\Phi\}^T \{Tv_{on}\}^n, \\
T\tilde{v}_j &= \{\phi\}^T \{T\tilde{v}_j\}^n, \\
T_{F-1} &= \{\phi\}^T \{T_{F-1}\}^n,
\end{aligned} \tag{4.64}$$

zapišemo enačbo (4.63) v sledeči obliki:

$$\begin{aligned}
c(\xi) T(\xi) &+ \left( \frac{k}{c_p \rho} \right) \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \right) \{T\}^n \\
&= \left( \frac{k}{c_p \rho} \right) \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T u^* d\Gamma \right) \left\{ \frac{\partial T}{\partial n} \right\}^n - \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T u^* d\Gamma \right) \{Tv_{on}\}^n \\
&+ \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \right) \{T\tilde{v}_j\}^n + \frac{1}{\Delta t} \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T u^* d\Omega \right) \{T_{F-1}\}^n.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Enačbo (4.65) sedaj preoblikujemo tako, da združimo člene z enakimi integrandi in dobimo sledeč zapis:

$$\begin{aligned}
c(\xi) T(\xi) &+ \left( \frac{k}{c_p \rho} \right) \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \right) \{T\}^n \\
&= \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T u^* d\Gamma \right) \left\{ \left( \frac{k}{c_p \rho} \right) \frac{\partial T}{\partial n} - Tv_{on} \right\}^n \\
&+ \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \right) \{T\tilde{v}_j\}^n + \frac{1}{\Delta t} \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega_c} \{\phi\}^T u^* d\Omega \right) \{T_{F-1}\}^n.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Integrale v enačbi (4.66) zapišemo v sledeči obliki:

$$\begin{aligned}
h_e^n &= \int_{\Gamma_e} \Phi^n \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma, \\
g_e^n &= \int_{\Gamma_e} \Phi^n u^* d\Gamma, \\
d_{cj}^m &= \int_{\Omega_c} \phi^n \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega, \\
b_c^m &= \int_{\Omega_c} \phi^n u^* d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Zapisane integrale  $h_e^n$ ,  $g_e^n$ ,  $d_{cj}^m$  in  $b_c^m$  uporabimo v enačbi (4.66) in zapišemo diskretno obliko enačbe kinetike temperature:

$$\begin{aligned}
c(\xi) T(\xi) &+ \left( \frac{k}{c_p \rho} \right) \sum_{e=1}^E \{h\}^T \{T\}^n = \sum_{e=1}^E \{g\}^T \left\{ \left( \frac{k}{c_p \rho} \right) \frac{\partial T}{\partial n} - Tv_{on} \right\}^n \\
&+ \sum_{c=1}^C \{d_j\}^T \{T\tilde{v}_j\}^n + \frac{1}{\Delta t} \sum_{c=1}^C \{b\}^T \{T_{F-1}\}^n.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Enako kot v prejšnjih primerih izpeljave za kinetiko vrtnčnosti in mikrorotacije sedaj enačbo (4.69) zapišemo za robna in notranja vozlišča računskega območja z združitvijo členov na levi strani enačbe:

$$\left(\frac{k}{c_p \rho}\right) [H] \{T\}^n = [G] \left\{ \left(\frac{k}{c_p \rho}\right) \frac{\partial T}{\partial n} - T v_{on} \right\}^n + [D_j] \{T \tilde{v}_j\}^n + \frac{1}{\Delta t} [B] \{T_{F-1}\}^n. \quad (4.69)$$

#### 4.2.5 Diskretna oblika enačbe tlaka

V tlačni enačbi (4.36) integralske oblike nastopajo robni in tudi območni integrali. Da zapišemo diskretizirano obliko te enačbe, moramo tudi tukaj diskretizirati območje reševanja na robne elemente in notranje celice na enak način, kot smo to naredili pri kinematiki in kinetiki toka. Diskretizirana oblika enačbe (4.36) je torej:

$$c(\xi) p(\xi) + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma} p \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \sum_{c=1}^C \int_{\Omega} f_{pmi} \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega. \quad (4.70)$$

Znotraj vsakega robnega elementa in notranje celice aproksimiramo funkcije polja z robnimi in območnimi interpolacijskimi polinomi:

$$\begin{aligned} p &= \{\Phi\}^T \{p\}^n, \\ f_{pmi} &= \{\phi\}^T \{f_{pmi}\}^n. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Z nastavkom (en.(4.71)) zapišemo enačbo (4.70) v sledeči obliki:

$$c(\xi) p(\xi) + \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma} \{\Phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \right) \{p\}^n = \sum_{c=1}^C \left( \int_{\Omega} \{\phi\}^T \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega \right) \{f_{pmi}\}^n. \quad (4.72)$$

Integrala v zgornji enačbi sta odvisna le od geometrije, ter ju poimenujemo kot:

$$h_e^n = \int_{\Gamma_e} \Phi^n \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (4.73)$$

$$d_{cj}^m = \int_{\Omega_c} \phi^n \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega, \quad (4.74)$$

ter s pomočjo teh označb za integrale zapišemo končno diskretizirano obliko enačbe za izračun tlaka:

$$c(\xi) p(\xi) + \sum_{e=1}^E \{h\}^T \{p\}^n = \sum_{c=1}^C \{d_j\}^T \{f_{pmi}\}^n. \quad (4.75)$$

Sedaj zapišemo kot pri vseh ostalih diskretiziranih oblikah prenosnih enačb še enačbo za robna in notranja vozlišča računskega območja z združitvijo členov leve strani enačbe:

$$[H] \{p\}^n = [D_j] \{f_{pmi}\}^n. \quad (4.76)$$

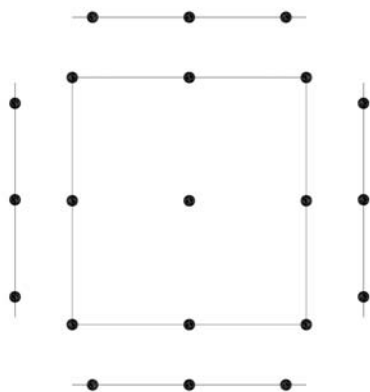


### 4.3 Algoritem reševanja

Izpeljane integralske enačbe vključujejo v primerjavi s klasičnimi Navier-Stokesovimi enačbami toka viskozne tekočine, zapisanimi v hitrostno-vrtinčni formulaciji (Škerget [44], Hriberšek [24]), nove člene, ki jih je možno vključiti v že obstoječo numerično shemo programskega paketa BEMFLOW. V tem numeričnem algoritmu rešujemo v računskem območju  $\Omega$ , ki je omejeno z robom  $\Gamma$  sistem enačb, s pomočjo katerega določimo funkcije tokovnega polja, kot so hitrost  $\vec{v}$ , vrtinčnost  $\vec{\omega}$ , temperatura  $T$ , mikrorotacija  $N$  in tlak  $p$ . Robni pogoji so lahko podani kot robni pogoji Dirichlet-ovega ali Neumann-ovega tipa za hitrost, temperaturo in mikrorotacijo, pri čemer je vrtinčnost na robovih neznan vrednost.

Sistem izpeljanih diskretiziranih prenosnih enačb kinematike (4.45), kinetike vrtinčnosti (4.55), kinetike mikrorotacije (4.62), kinetike temperature (4.69) in tlaka (4.76) se reši kot vezan sistem kinematike in kinetike z upoštevanjem ustreznih začetnih in robnih pogojev. Dobljen implicitni sistem enačb je hkrati zapisan za vsa robna in območna vozlišča, kar rezultira v zelo polni in nesimetrični sistemski matriki, ki vsebuje tako vplive difuzije kot konvekcije. Numerična shema je stabilna in natančna, vendar za reševanje potrebuje veliko računalniškega spomina in časa. Za izboljšanje ekonomičnosti in uporabnosti numeričnega algoritma se uporabi tehnika podobmočij [23], pri čemer se celotno območje izračuna razdeli na podobmočja, kar je prikazano na sliki 4.1, na katerih se uporabi izpeljan numerični postopek kot za celotno območje, kar bistveno skrajša računski čas. Končni sistem enačb se dobi z združevanjem sistemov za posamezno podobmočje ob upoštevanju ustreznih kompatibilitetnih in ravnotežnih pogojev na vmesnih robovih. Vpeljava podobmočij rezultira v manj polni sistemski matriki, ki je primernejša za iterativni postopek izračuna. V primerih, izvrednotenih v tem delu, je vsako podobmočje sestavljeno iz štirih nezveznih tro-točkovnih kvadratnih robnih elementov in ene zvezne devet-točkovne kvadratne območne celice [23], kot je to prikazano na sliki 4.2. Tehniko podobmočij je z numeričnega stališča možno uporabiti za katerokoli obliko integralskih enačb. Dokazano je bilo [22], da tehnika podobmočij bistveno vpliva na konvergenco pri reševanju enačbe kinematika toka v primeru uporabe hitrostno vrtinčne formulacije. Ta vpliv na poslabšanje konvergence iterativnega izračunavanja sistema enačb je posledica omejitve vpliva osnovne rešitve, ki je v primeru uporabe tehnike podobmočij omejeno le na obravnavano podobmočje. Zaradi teh ugotovitev se bo za računanje robnih vrednosti vrtinčnosti uporabila enoobmočna metoda.

Numerični algoritem reševanja sistema diskretnih prenosnih enačb toka bo vključeval reševanje toka po celotnem območju s pomočjo enoobmočne metode, ter v določenih delih algoritma tudi s pomočjo metode podobmočij. S pomočjo enoobmočne metode robnih elementov (slika 4.1) najprej v vsaki iteraciji nelinearne zanke izračunamo vrednosti vrtinčnosti na robu območja z reševanjem enačbe kinematike toka (4.15). Ponovni izračun kinematike toka s tehniko podobmočij (slika 4.1) z upoštevanjem prej izračunanih robnih vrtinčnosti nam da kot rezultat območne vrednosti hitrosti. Rezultat reševanja enačbe za

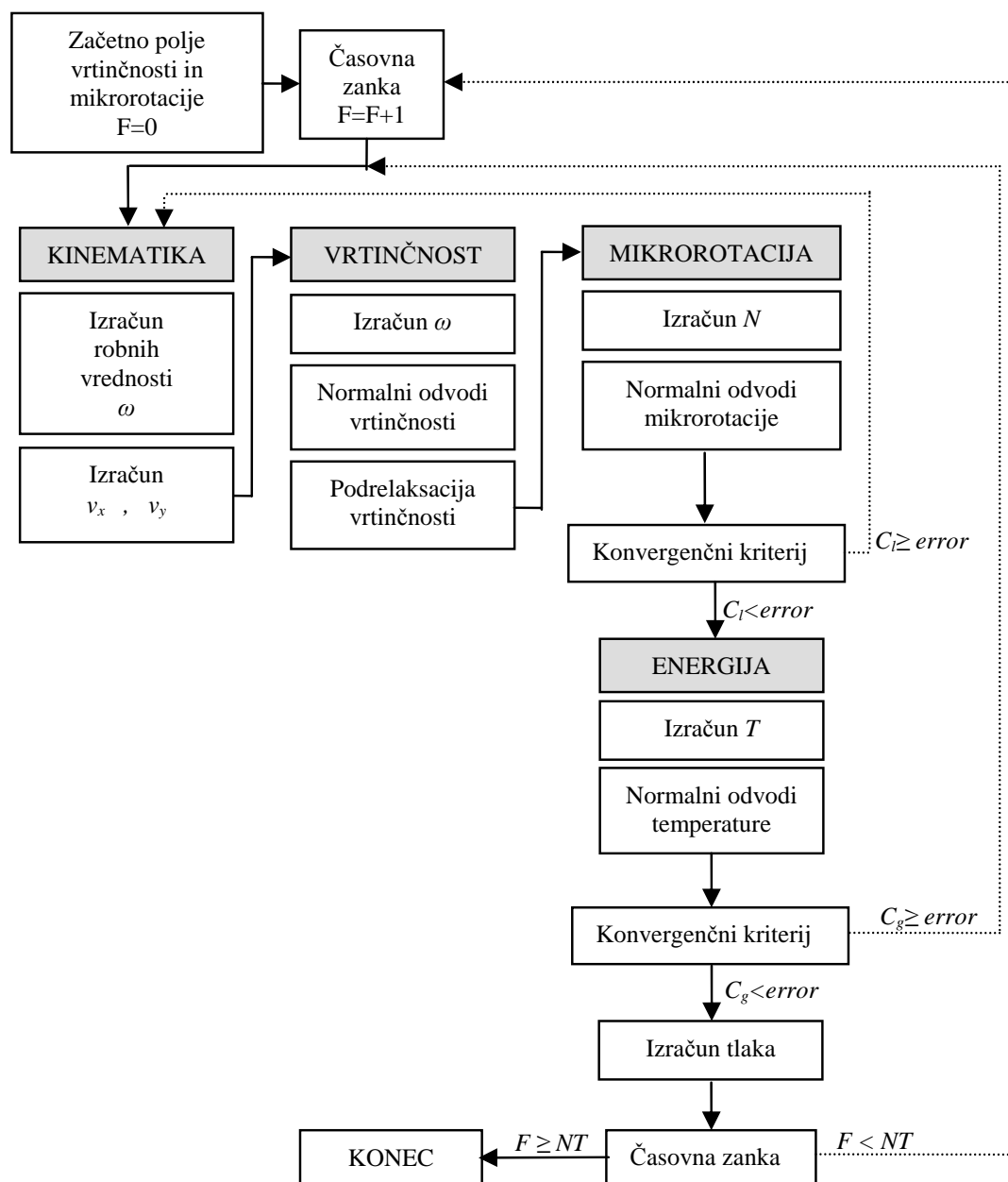


Slika 4.2: Skica podobmočja (štirje nezvezni tro-točkovni kvadratni robni elementi in ena zvezna devet-točkovna kvadratna območna celica).

prenos vrtnčnosti (4.27) z uporabo tehnike podobmočij so območne vrednosti vrtnčnosti. Prej izračunano hitrostno polje nam v nadaljnje služi za izračun novih vrednosti mikrorotacije na robu območja. Območne vrednosti mikrorotacije dobimo z izračunom enačbe prenosa mikrorotacije (4.28) in uporabo tehnike podobmočij. Z uporabo tehnike podobmočij in enačbe za prenos energije (4.29) izračunamo temperaturno polje. Po končanih izračunih za hitrost, vrtnčnost, mikrorotacijo in temperaturo izračunamo še tlak. Algoritem reševanja je predstavljen v obliki organigrama na sliki 4.3. Znotraj celotnega numeričnega algoritma preverjamo natančnost izračunanih vrednosti v obliki konvergenčnega kriterija, ki je podan z določeno napako iterativnega izračuna (v večini primerov  $C = 10^{-6}$ ). Izračun oziroma iteriranje notranje zanke se zaključi, ko je napaka rešitve iterativne zanke manjša od predpisane vrednosti, ki se izračuna po enačbi:

$$error = \frac{\sum_{j=1}^{N_c} (\omega_j^{i+1} - \omega_j^i)^2}{\sum_{j=1}^{N_c} (\omega_j^{i+1})^2}, \quad (4.77)$$

kjer predstavlja *error* napako,  $N_c$  število računskih točk, indeks  $i$  in  $i + 1$  pa predstavljata vrednost spremenljivke v prejšnji in trenutni iteraciji izračuna.



Slika 4.3: Numerični algoritem reševanja.



# Poglavje 5

## Rezultati značilnih simulacij

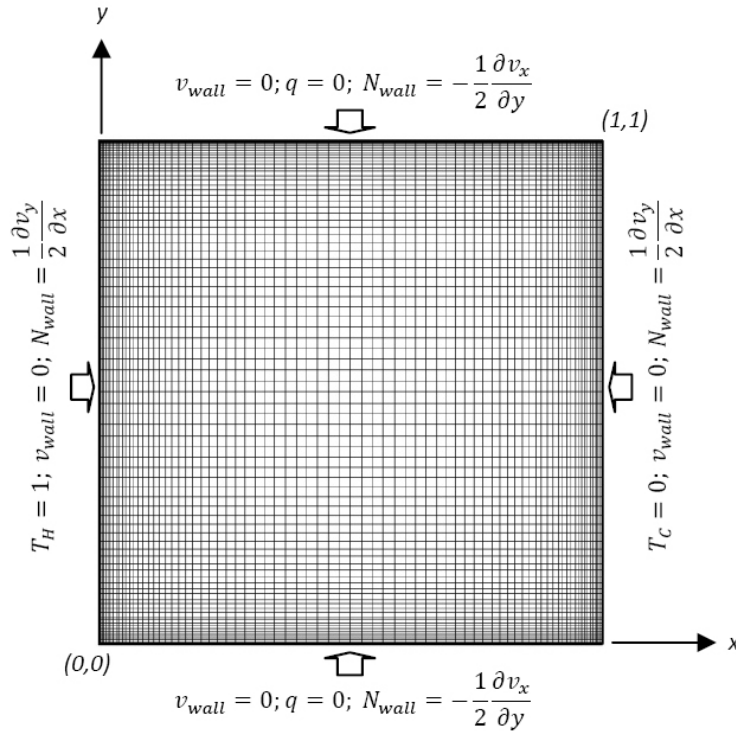
### 5.1 Naravna konvekcija v kotanji

Naravna konvekcija v pravokotni kotanji je testni primer v računalniški dinamiki tekočin. V mnogih aplikacijah in v naravi je vedno prisoten tudi prenos toplote. V tem primeru se bomo osredotočili na obravnavo numeričnega modeliranja prenosa toplote v mikropolarnih tekočinah. Primer prenosa toplote bo obravnavan na primeru naravne konvekcije, ki je fizikalni fenomen, kjer se zaradi nastopa temperaturnih razlik med dvema ploskvama pojavi vzgon. Večini tekočin se ob vertikalni greti steni zmanjša gostota in s tem se začne tekočina gibati navzgor, kar povzroči gibanje okoliške hladnejše tekočine z večjo gostoto, ki priteče na izpraznjeni prostor. Tam se hladnejša tekočina ogreje in proces se ponavlja. Izmenjavi tekočine rečemo konvekcijski tok. Glavna dejavnika, ki vplivata na naravno konvekcijo, sta vzgon in težnost, na katera imajo velik vpliv snovske lastnosti tekočine. Primer prenosa toplote pri naravni konvekciji v mikropolarni tekočini bo obravnavan na primeru pravokotne kotanje. Ta primer je bil izbran zaradi dostopnosti rezultatov za newtonsko tekočino in rezultatov za mikropolarno tekočino avtorjev, ki so omenjeni v poglavju pregleda literature.

#### 5.1.1 Robni pogoji

Za določitev primerne računske mreže so bili izvedeni izračuni z mrežami  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  in  $60 \times 60$  podobmočij. Mreža velikosti  $10 \times 10$  podobmočij ni bila primerna saj ni zagotavljala konvergence izračuna pri višjih vrednostih Rayleighovih števil. Za opis tanjšanja mejne plasti, ki se tvori na trdnih stenah zaradi temperaturnih razlik v kotanji, so bile mreže ob stenah zgoščene s faktorjem zgostitve 8. Na podlagi rezultatov izračunov vrednosti za povprečno Nusseltovo število  $Nu_{ave}$  za različne gostote mrež (tabela 5.1) smo se odločili za nadaljnje izračune uporabljati računsko mrežo s  $40 \times 40$  elementi (slika 5.1), ki zagotavlja dovolj natančne rezultate in so računski časi manjši kot pri gostejši mreži s  $60 \times 60$  elementi.

Računali smo ravninski primer naravne konvekcije v 2D kotanji. Na trdnih stenah je



Slika 5.1: Geometrija in robni pogoji primera naravne konvekcije v kotanji.

bil predpisan brez zdrsni robni pogoj. Leva stran kotanje je greta s temperaturo  $T_H$  in desna stran ima nižjo temperaturo  $T_C$ . Splošni robni pogoj za mikrorotacijo na stenah je podan z enačbo, ki sta jo podala Rees in Bassom [39]:

$$N_{wall} = n_{wall} \frac{\partial v_t}{\partial n} \quad 0 \leq n_{wall} \leq 1, \quad (5.1)$$

kjer se parameter  $n_{wall} = 1/2$  uporablja za redko suspenzijo,  $n_{wall} = 1$  za turbulentne tokove in  $n_{wall} = 0$  za gosto suspenzijo. V tem izračunu je bil izbran parameter  $n_{wall} = 1/2$ , s čimer je bila mikrorotacija na steni enaka vrtilni hitrosti. V simulaciji so začetne

Tabela 5.1: Primerjava vrednosti povprečnega Nusseltovega števila  $Nu_{ave}$  v odvisnosti od gostote računske mreže za Rayleighovo število  $Ra = 10^6$ .

| Ra     | 20x20 | 40x40 | 60x60 | Davies [13] |
|--------|-------|-------|-------|-------------|
| $10^6$ | 9,221 | 8,742 | 8,737 | 8,8         |

vrednosti ( $t = 0$ ) za hitrostno, temperaturno in polje mikrorotacije v območju izbrane z vrednostjo enako nič. Mikro vztrajnost je definirana kot kvadrat karakteristične dolžine  $j = L^2$ , kar sta v svojem delu predlagala Rees in Bassom [39]. Koeficient gradienta viskoznosti  $\gamma_v$  je podan za primere naravne konvekcije z enačbo, ki jo je podal Ahmadi [1]:

$$\gamma_v = \left( \mu + \frac{k_v}{2} \right) j. \quad (5.2)$$

Prenos toplote znotraj mikropolarne tekočine je možno opisati s pomočjo Rayleighovega števila. Pri nižjih vrednostih Rayleighovega števila prevladuje kot mehanizem prenosa toplote prevod toplote, medtem ko pri višjih vrednostih Rayleighovega števila za prenos toplote prevladuje mehanizem konvektivnega prenosa toplote. Rayleighovo število je definirano kot produkt Grashofovega števila (razmerje med vzgonskimi in viskozniimi silami) in Prandtlovega števila (razmerje med hidravlično in termično mejno plastjo oziroma povezava hitrostnega in temperaturnega polja):

$$Ra = Gr \cdot Pr, \quad (5.3)$$

$$Gr = \frac{g \cdot \beta_T \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2}, \quad (5.4)$$

$$Pr = \frac{\nu \cdot c_p \cdot \rho}{k}. \quad (5.5)$$

Izračuni so izvedeni za različne vrednosti Rayleighovega števila  $Ra = 10^3; 10^4; 10^5; 10^6$  in  $10^7$ . Izračuni za vsako od vrednosti Rayleighovega števila so bili prav tako izvedeni za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K = k_v/\mu_v = 0; 0,5$  in  $2$ , ki podaja razmerje med vrtnično in dinamično viskoznostjo (enačba (3.58)). Vrednost Prandtlovega števila je bila v vseh izračunih enaka, in sicer  $Pr = 0,71$ .

Pri konvektivnem prestopu toplote s trdne stene na tekočino in nasprotno se uporablja kriterij termične podobnosti v obliki Nusseltovega števila, ki podaja razmerje med konvektivnim prestopom in prevodom toplote:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot L}{k}. \quad (5.6)$$

Kot rezultat bodo prikazane vrednosti za lokalno in povprečno Nusseltovo število posebej, ki ju računamo, kot je to podano s spodnjima enačbama za lokalno in nato še za povprečno vrednost Nusseltovega števila:

$$Nu_l = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=[0,1]}, \quad (5.7)$$

$$Nu_{ave} = \int_0^1 \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=[0,1]} dy. \quad (5.8)$$

V primeru, ko je parameter mikropolarnih tekočin  $K = 0$ , se izračun izvede kot s klasičnimi Navier-Stokesovimi enačbami, pri čemer sta v tem primeru hitrostno polje in polje mikrorotacije nepovezani. V vseh primerih je bil nastavljen in dosežen konvergenčni kriterij za vrtničnost z napako iterativnega postopka manjšo od  $10^{-6}$ .

Tabela 5.2: Primerjava vrednosti povprečnega Nusseltovega števila  $Nu_{ave}$  v odvisnosti od Ra števila z drugimi avtorji (Davies [13] - newtonska tekočina, Aydin in Pop [5] - mikropolarna tekočina ( $K = 0$ )).

| Ra     | Numerični izračun | Davies [13] | Aydin in Pop [5] |
|--------|-------------------|-------------|------------------|
| $10^3$ | 1, 118            | 1, 118      | 1, 118           |
| $10^4$ | 2, 263            | 2, 243      | 2, 234           |
| $10^5$ | 4, 540            | 4, 519      | 4, 486           |
| $10^6$ | 8, 742            | 8, 800      | 8, 945           |
| $10^7$ | 17, 323           | –           | –                |

### 5.1.2 Rezultati simulacije

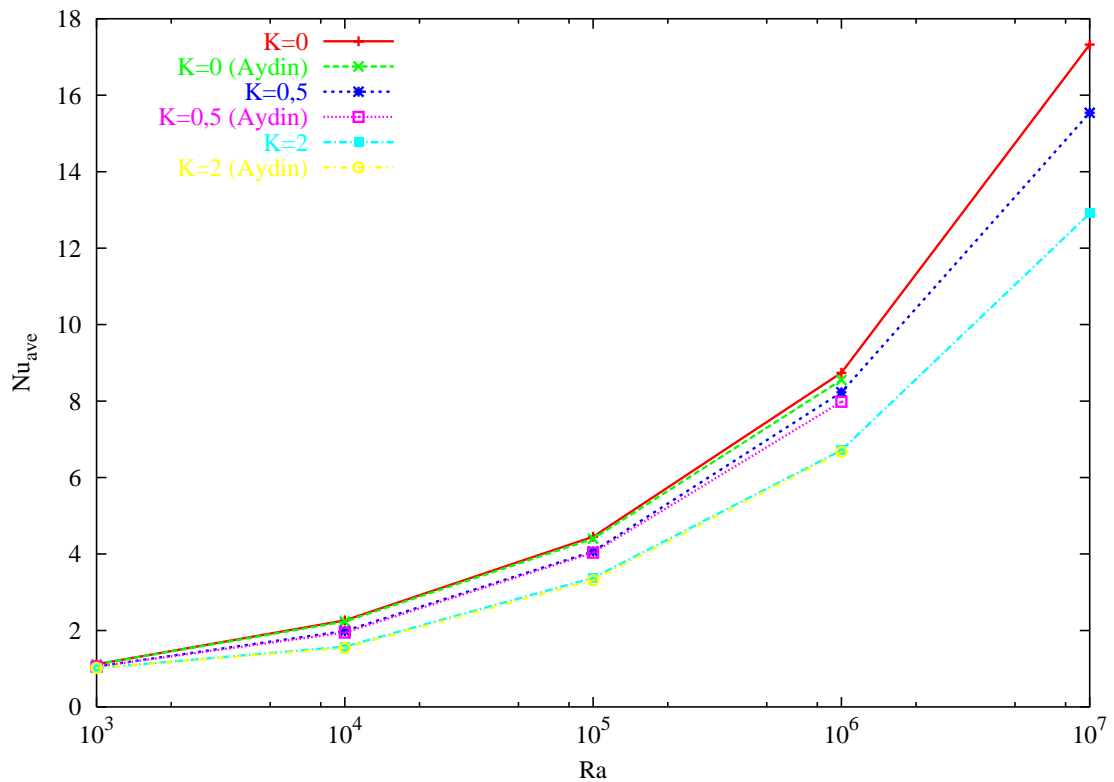
V tabeli 5.2 so podani rezultati za povprečne vrednosti Nusseltovega števila, izračunani z novo razvitim numeričnim algoritmom reševanja mikropolarnih tekočin na osnovi hitrostno vrtinčne formulacije za primer vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K = 0$ . Rezultati, podani v tabeli 5.2, so primerjani z rezultati Davisa [13] za primer naravne konvekcije newtonske tekočine in rezultati, ki sta jih podala Aydin in Pop [5]. Primerjava izračunanih rezultatov (tabela 5.2) s pomočjo modela mikropolarnih tekočin kaže na zelo dobro ujemanje z rezultati Davisa [13], podanih za newtonsko tekočino, in prav tako z rezultati Aydina in Popa [5], ki sta v svojih izračunih uporabila model mikropolarnih tekočin. Odstopanja v primeru nizkih vrednosti Rayleighovega števila ni mogoče zaznati, pri čemer pa se odstopanje s povečevanjem le tega povečuje in je najvišja vrednost odstopanja dobljenih rezultatov z rezultati Davisa [13] manj kot 0, 5% , medtem ko je odstopanje pri najvišji vrednosti Rayleighovega števila od podanih rezultatov za mikropolarno tekočino [5] 2%. Splošno je znano, da se s povečevanjem Rayleighovega števila povečuje tudi kompleksnost tokovnega polja, kar nam pomaga razumeti in sprejeti določena odstopanja pri višjih vrednostih Rayleighovega števila za rezultate podane v obliki integralskih veličin, kot je to vrednost povprečnega Nusseltovega števila.

Tabela 5.3 nam podaja, poleg že prej podanih številčnih vrednosti za povprečno Nusseltovo število pri  $K = 0$ , še vrednosti pri različnih vrednostih parametra mikropolarnih tekočin ( $K$ ). Izris teh vrednosti je podan na sliki 5.2, kjer so zraven izračunanih vrednosti povprečnega Nusseltovega števila  $Nu_{ave}$  (tabela 5.3) za različne snovske lastnosti mikropolarne tekočine podane še vrednosti izračuna, ki sta jih v svojem prispevku grafično v obliki diagrama podala Aydin in Pop [5]. Odstopanje med rezultati se pojavi zaradi uporabe različnih robnih pogojev za mikrorotacijo, kjer sta Aydin in Pop [5] predpostavila gosto suspenzijo ( $n = 0$ ). Iz diagrama na sliki 5.2 je razvidno, da se razlika med izračuni povečuje s povečevanjem vrednosti Rayleighovega števila, kajti v primeru



Tabela 5.3: Vrednosti povprečnega Nusseltovega števila  $Nu_{ave}$  v odvisnosti od Ra števila za različne vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$ .

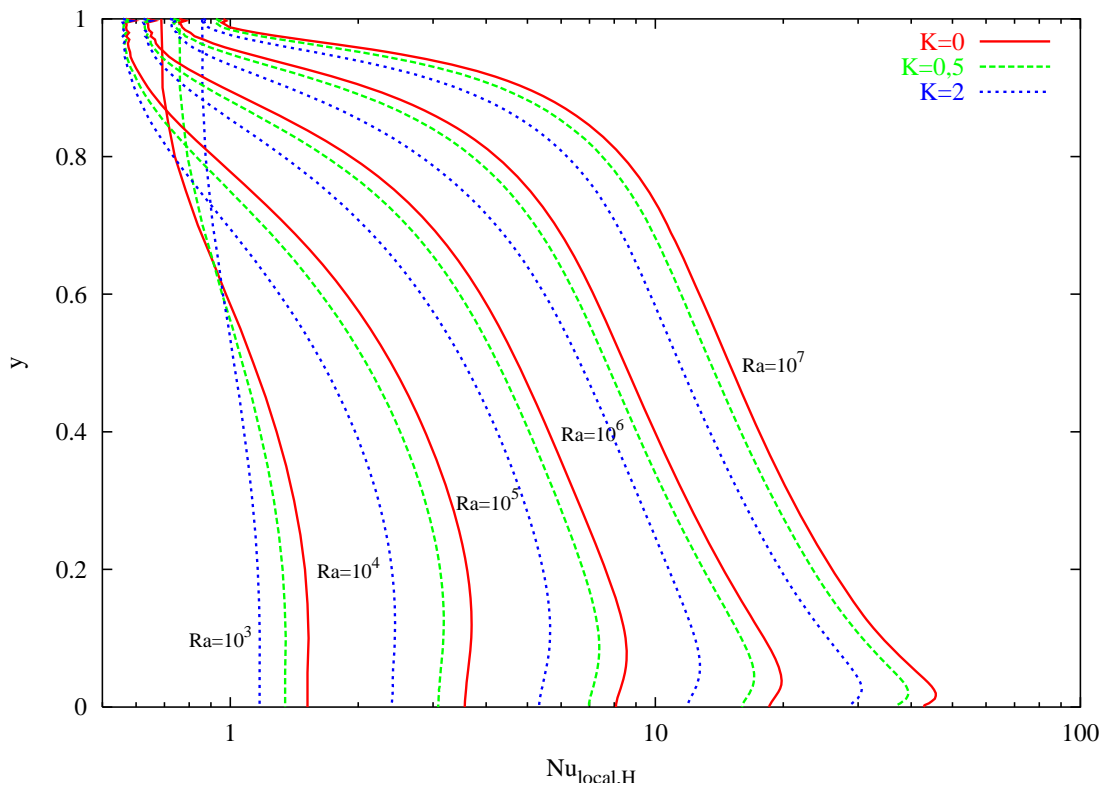
| Ra     | K=0,0  | K=0,5  | K=2,0  |
|--------|--------|--------|--------|
| $10^3$ | 1,118  | 1,059  | 1,017  |
| $10^4$ | 2,263  | 1,986  | 1,578  |
| $10^5$ | 4,450  | 4,067  | 3,377  |
| $10^6$ | 8,742  | 8,229  | 6,714  |
| $10^7$ | 17,323 | 15,539 | 12,907 |



Slika 5.2: Primerjava povprečnih vrednosti Nusseltovega števila za različne vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$  in različnih vrednosti Rayleighovega števila.

gostih suspenzij se delci v bližini stene ne morejo prosto vrteti, medtem ko se v redkih suspenzijah ob stenah delci, s podanim robnim pogojem za mikrorotacijo ( $n = 1/2$ ), lahko vrtijo. Enake ugotovitve je mogoče zaslediti v delu avtorja Hsu [26], s čimer se kvalitativno ujema tudi rezultati naših simulacij.

Slika 5.3 prikazuje vrednosti lokalnega Nusseltovega števila na vroči steni kotanje za različne parametre mikropolarne tekočine  $K$  pri različnih vrednostih Rayleighovega števila. Iz teh rezultatov je mogoče zaključiti, da se vrednost lokalnega Nusseltovega števila zmanjšuje s povečevanjem parametra mikropolarne tekočine  $K$ , pri čemer pa se s povečevanjem vrednosti Rayleighovega števila lokalno Nusseltovo število povečuje za vse primere vrednosti koeficienta mikropolarne tekočine  $K$ . Enako obnašanje mikropolarnih tekočin kot je prikazano na sliki 5.3 za lokalno Nusseltovo število, je bilo prikazano že na sliki 5.2 za povprečne vrednosti Nusseltovega števila. V primeru nižjih vrednosti Rayleighovega števila ( $Ra = 10^3$ ) se pojavi odstopanje poteka lokalnega Nusseltovega števila. Takšno odstopanje poteka lokalnega Nusseltovega števila pri nižjih vrednosti Rayleighovega se pojavi zaradi prevladujočega mehanizma prevoda toplote za prenos toplote.

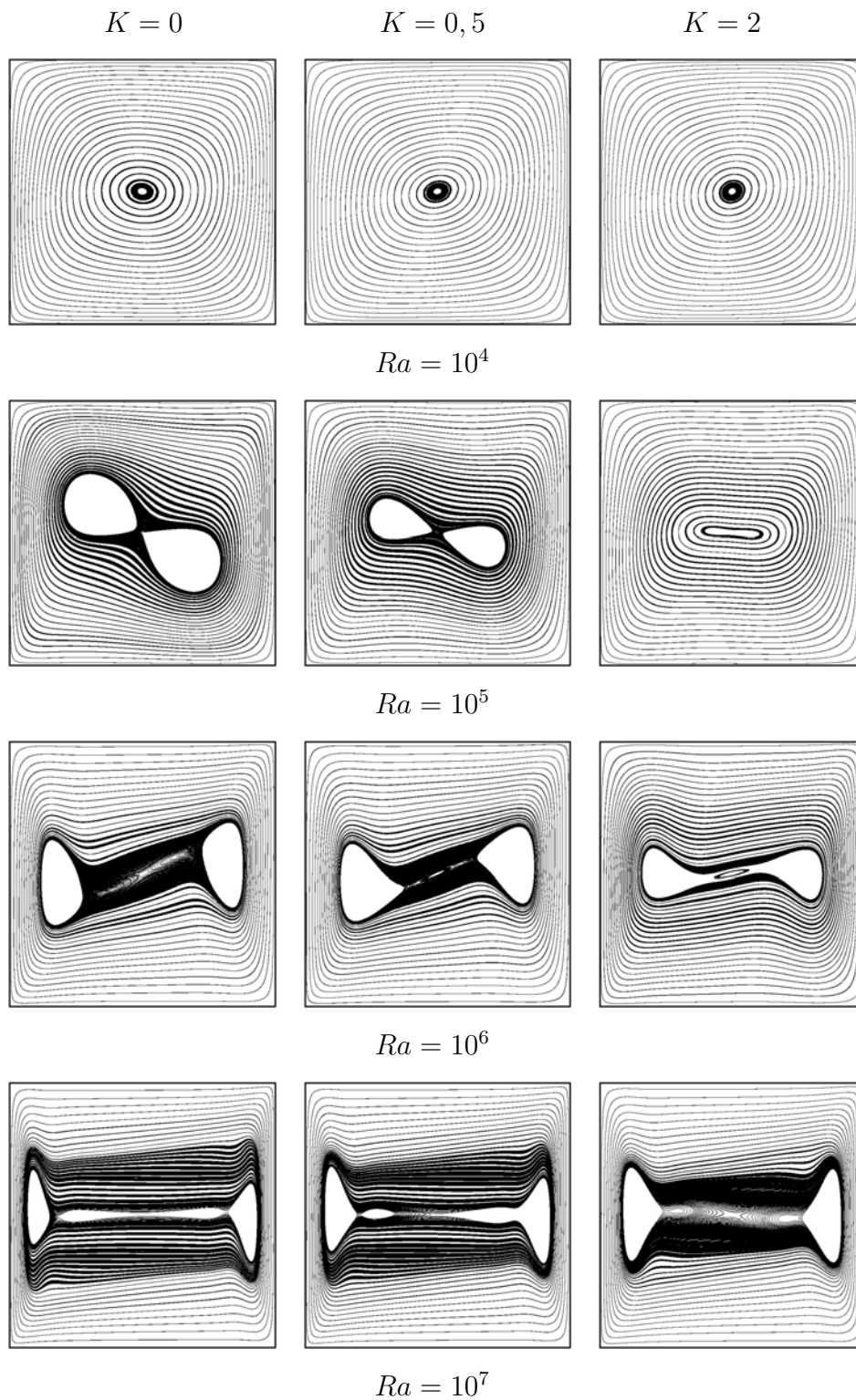


Slika 5.3: Primerjava lokalnih vrednosti Nusseltovega števila za različne vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$  in različnih vrednosti Rayleighovega števila.

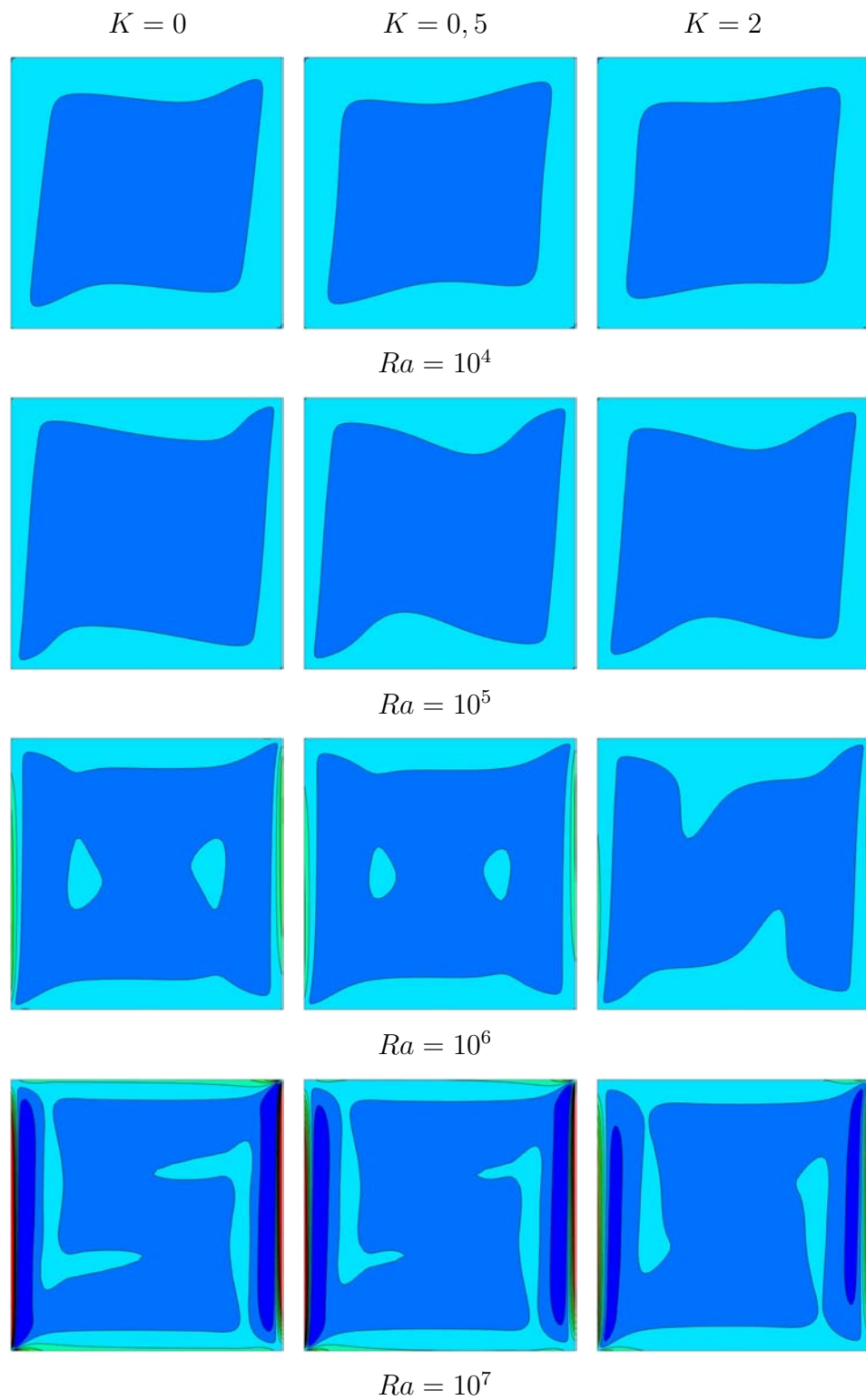
Rezultati spremenljivk tokovnega polja izračunov, katerih vrednosti lokalnega in povprečnega Nusseltovega števila so predstavljeni v tabeli 5.3 in na slikah 5.2, so podani v obliki tokovnic na sliki 5.4, za konture vrtinčnosti na sliki 5.5 in konture konstantnih temperatur (izotermne linije) na sliki 5.6. Iz slike 5.4, kjer so prikazane tokovnice v

kotanji za različne primere parametra mikropolarnih tekočin  $K$ , vidimo, da se z višanjem Rayleighovega števila intenzivira gibanje tekočine znotraj kotanje, kar privede od začetnega enega vrtinca v kotanji do nastanka dveh vrtincev pri višji Rayleighovih številih ( $Ra = 10^5$ ). Z povečevanjem le tega se ta dva novo nastala vrtinca odmikata od središča kotanje proti stenam območja ( $Ra = 10^7$ ). Rezultati povečevanja vrednosti parametra mikropolarnih tekočin ( $K$ ) nam na sliki 5.4 kažejo, da se tok, pri konstantni vrednosti Rayleighovega števila, v kotanji upočasnjuje. Do nastanka dveh vrtincev pride pri povečanih vrednostih parametra mikropolarnih tekočin ( $K = 2$ ) šele pri višjih vrednostih Rayleighovega števila ( $Ra = 10^6$ ), kot je bil ta pojav zabeležen za primer vrednosti parametra mikropolarnih tekočin enakega nič ( $K = 0$ ). Iz podanih rezultatov je možno zaključiti, da povečevanje parametra mikropolarnih tekočin  $K$  (razmerje med vrednostjo koeficienta viskoznosti mikrorotacije in dinamične viskoznosti  $K = \frac{k_v}{\mu_v}$ ) oziroma povečevanje vrednosti koeficienta viskoznosti mikrorotacije  $k_v$ , deluje zaviralno na tok suspenzije.

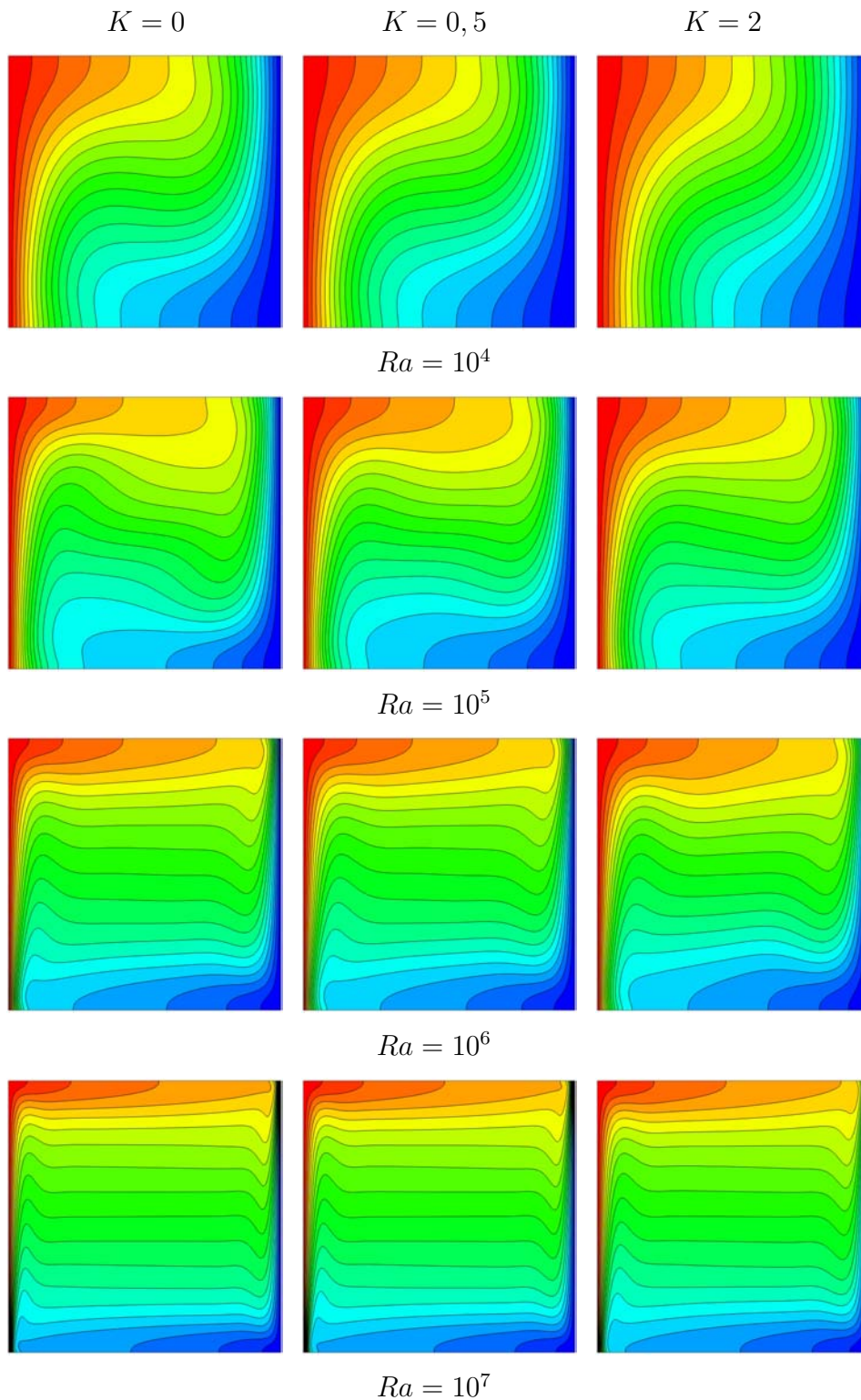
Podobne rezultate, kot smo jih zabeležili za rezultate tokovnic lahko razberemo tudi iz slike 5.5, kjer so predstavljene konture vrtinčnosti. Iz podanih rezultatov za konture temperature (slika 5.6) se prav tako vidi vpliv povečevanja parametra mikropolarnih tekočin ( $K$ ), v smislu upočasnjevanja prenosa toplote, saj prihaja pri konstantni vrednosti Rayleighovega števila do povečevanja debeline toplotne mejne plasti ob stenah računskega območja. Poteki konvergence v izračunih za različnih vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$  in različne vrednosti Rayleighovega števila so podani na sliki 5.7. Prikazani profili konvergenca kažejo na skoraj nepomembna odstopanja konvergence za različne vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$ , razen v primeru, ko je Rayleighovo število zelo veliko ( $Ra = 10^7$ ), kje pride do večjih nihanj samega poteka konvergence, prav tako pa pride do večjih odstopanj med primeri za različne vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$ . Pomembno je poudariti, da se v primeru najvišje vrednosti Rayleighovega števila že pojavlja vprašanje stacionarnosti rešitve, pri čemer pa je bil v primeru, ko je parameter mikropolarne tekočine  $K = 2$ , uporabljen ostrejši kriterij podrelaksacije zaradi same kompleksnosti izračuna, kar privede do bistveno višjega števila iteracij.



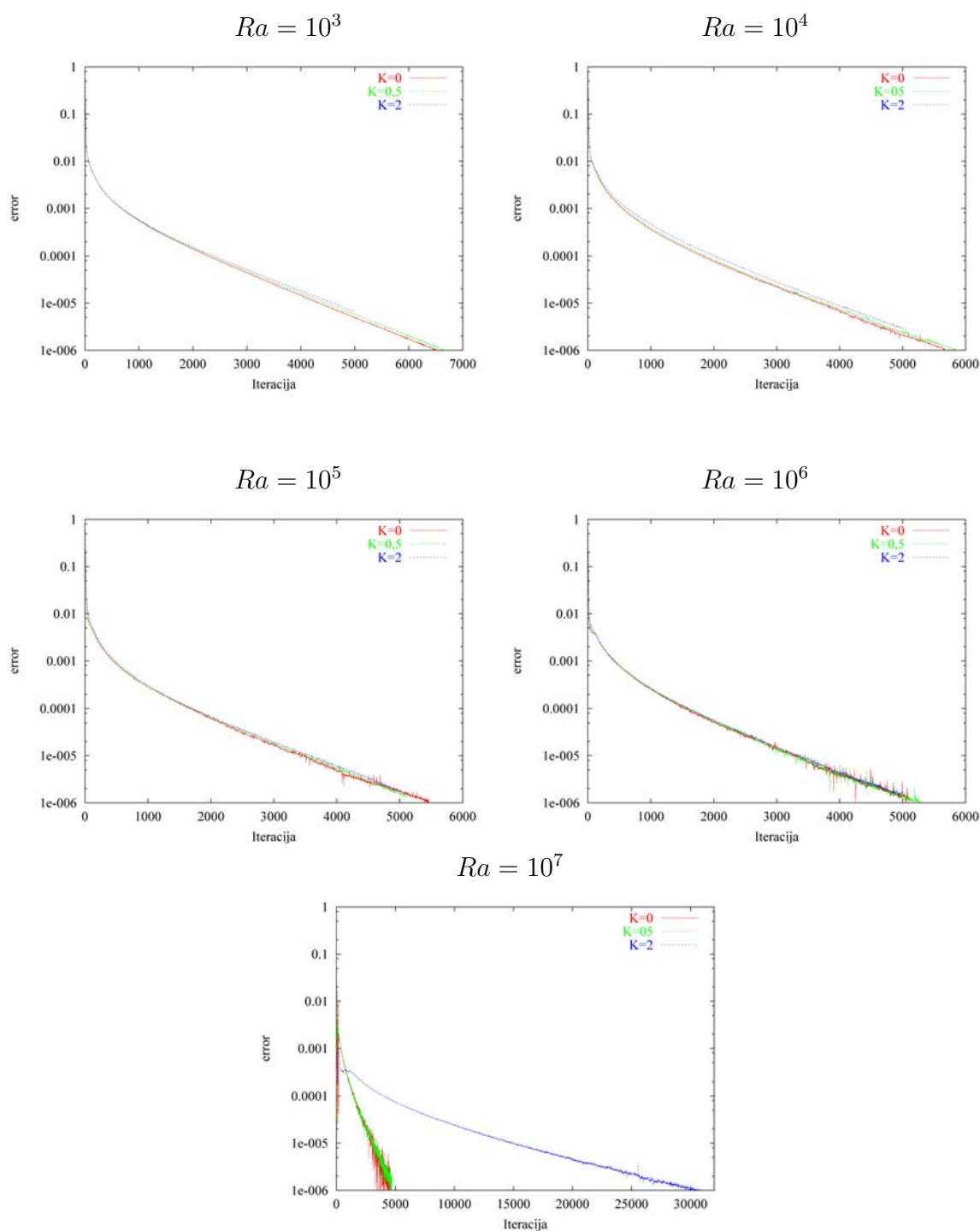
Slika 5.4: Tokovnice pri naravni konvekciji v kotanji za različne vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$  in Rayleighovega števila  $Ra$ .



Slika 5.5: Konture vrtnčnosti pri naravni konvekciji v kotanji za različne vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$  in Rayleighovega števila  $Ra$ .



Slika 5.6: Konture temperature pri naravni konvekciji v kotanji za različne vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$  in Rayleighovega števila  $Ra$ .



Slika 5.7: Napaka iterativnega izračuna (konvergenca) pri naravni konvekciji v kotanji za različne vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$  in vrednosti Rayleighovega števila  $Ra$ .

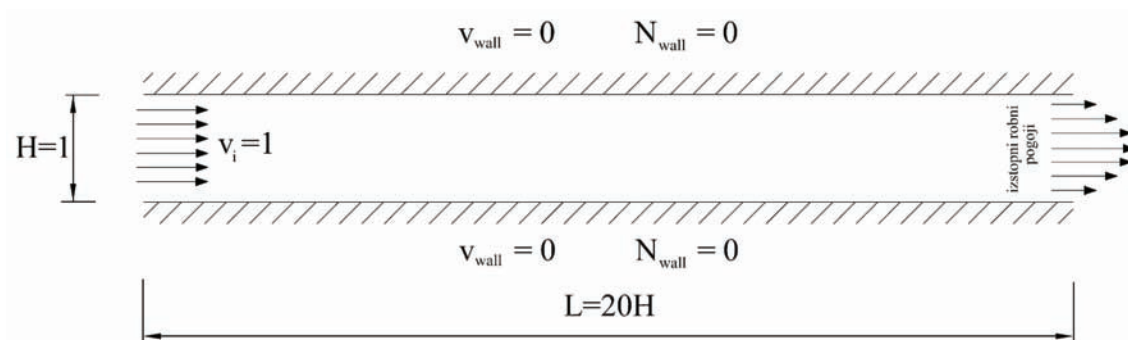
## 5.2 Tok v kanalu

Na primeru toka v kanalu bomo preizkusili novo razviti algoritem izračuna toka mikropolarne tekočine v primeru, ko imamo prisoten mehanizem prisilne konvekcije. Pri tem primeru je smiselno poudariti zanimivo področje uporabe teorije mikropolarne tekočine. Pri tokovih na mikro skalah se pojavijo dodatni vplivi, ki so izključeni v matematičnih modelih, razvitih na predpostavki zveznosti snovskih lastnosti tekočine na makro nivoju. Taki dodatni vplivi so mikrorotacijski vplivi zaradi rotacije molekul, kar postane pomembno v primeru npr. polimernih suspenzij oziroma tokov s primerljivo velikimi notranjimi strukturami v toku tekočine glede na karakteristično dolžino sistema. Te mikrorotacijske vplive je možno upoštevati s pomočjo uporabe mikrorotacije v gibalni enačbi, ki jo dopolnimo še s prenosno enačbo mikrorotacije. V tem primeru bo obravnavan laminarni ravninski tok nestisljive mikropolarne tekočine v kanalu. Izvedeni bodo izračuni za različne snovske lastnosti mikropolarne tekočine in njihov vpliv na tokovne karakteristike toka mikropolarne tekočine v kanalu.

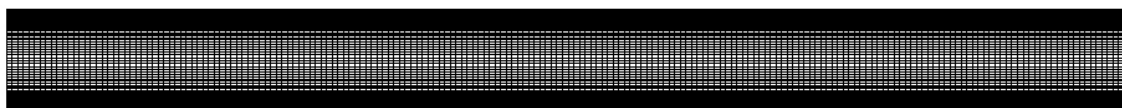
### 5.2.1 Robni pogoji

Geometrija kanala je podana na sliki 5.8 s pripadajočimi dimenzijami in robnimi pogoji. Razmerje dolžine kanala napram višini je bilo  $L = 20H$ . Na levi strani kanala je bil predpisan vstopni robni pogoj z uniformnim hitrostnim profilom ( $v_i = 1$ ). Na stenah kanala je bil upoštevan brezdrsen robni pogoj podan kot Dirichletov robni pogoj, kar pomeni, da je bila hitrost na spodnji in zgornji steni kanala enaka nič ( $v_{wall} = 0$ ). Na izstopu so podani izstopni robni pogoji za vse funkcije tokovnega polja, kar je podano z robnimi pogoji Neumanovega tipa. Za mikrorotacijo smo v teh izračunih upoštevali, da je na stenah enaka nič, kar smo dosegli z upoštevanjem parametra  $n_{wall} = 0$  v enačbi za robni pogoj mikrorotacije na trdnih stenah (en.(3.47)). S tem robnim pogojem za mikrorotacijo smo predpisali mikropolarno tekočino kot suspenzijo z visoko koncentracijo delcev. Kot začetni robni pogoj smo za vse funkcije tokovnega polja podali vrednosti nič. Pri izračunu smo predpostavili, da imamo v kanalu laminarni tok nestisljive mikropolarne tekočine. Za izračun toka mikropolarne tekočine v kanalu so bile v začetni fazi uporabljene različne gostote mrež računskega območja. Na računskih mrežah z uniformno porazdelitvijo računskih celic so se pojavile nepravilnosti v rezultatih, saj v bližini sten ni bilo zadostnega števila celic, kar bi omogočilo natančnejši izračun funkcij tokovnega polja zaradi velikega gradienta hitrosti, ki se pojavi v bližini stene. Tako so bile v nadaljevanju uporabljene vse mreže z zgostitvijo celic proti stenam kanala. V okviru naloge je bila potreba po modeliranju čim večjih dolžin kanalov za računanje tokov v mikro kanalih, pri katerih je za razvito tokovno polje v samem kanalu potrebno visoko razmerje dolžine kanala napram višini ( $L = 100H$ ) [34]. V primerih izračunov toka mikropolarne tekočine pa je prav tako pomembno večje število celic, razporejenih po višini kanala, saj nam le ta zagotavlja natančen opis že prej omenjenega vpliva stene na funkcije tokovnega polja. Glede na vse prej naštetje okoliščine in glede na računske čase numeričnih simulacij toka mikropolarne



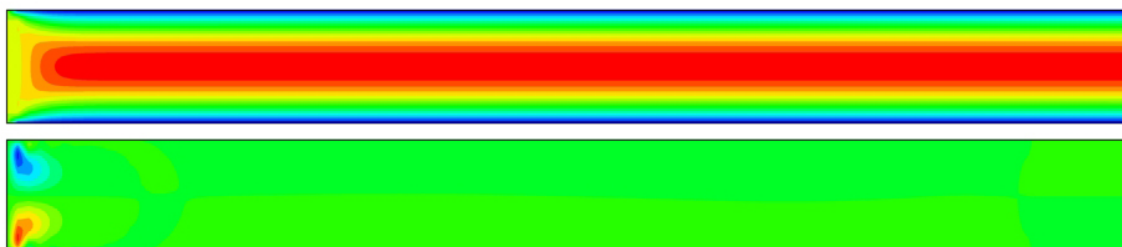


Slika 5.8: Geometrija kanala z uporabljenimi robnimi pogoji za primer toka mikropolarne tekočine.



Slika 5.9: Diskretizirano območje kanala.

tekočine je bila izbrana računsko mreža podana na sliki 5.9 z razmerjem stranic  $L = 20H$ , pri čemer je bilo po višini nameščenih 40 in po dolžini 100 podobmočij s faktorjem zgoščitve proti steni 8, kar nam je podalo računsko območje, ki ga sestavlja 4000 podobmočij oziroma 16281 vozlišč. S pomočjo tako izbrane računsko mreže je bila zagotovljena pravilnost rešitve v še sprejemljivih računskih časih za doseg maksimalne predpisane napake iterativne rešitve (konvergenčni kriterij)  $10^{-6}$ .



Slika 5.10: Hitrostno polje v kanalu (zgoraj - komponenta hitrosti v smeri toka  $v_x$ , spodaj - komponenta hitrosti pravokotna na smer toka  $v_y$ ).

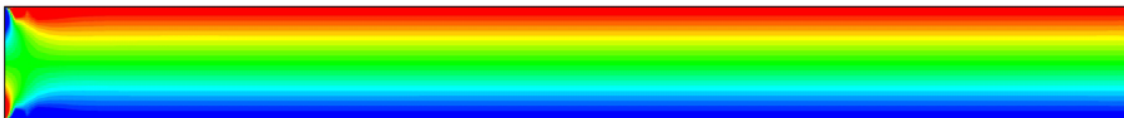
## 5.2.2 Rezultati simulacije

Tok tekočine v kanalu lahko opišemo s pomočjo brezdimenzijskega Reynoldsovega števila. V našem primeru je bila vrednost Reynoldsovega števila izbrana tako, da je bil režim toka tekočine laminaren ( $Re = 100$ ). Izračuni so bili izvedeni za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K$ . Parametra, ki smo ju spreminjali, sta bila parameter mikropolarne tekočine  $K = 0 - 10$ , ki podaja razmerje med koeficientom mikrorotacije in dinamično viskoznostjo (en.(3.58)), in parameter  $\lambda$ , podan z enačbo (3.55). Parameter  $\lambda$  vpliva na koeficient gradienta viskoznosti  $\gamma_v$ , ki je poleg koeficienta viskoznosti mikrorotacije  $k_v$  zelo pomemben faktor za polje mikrorotacije  $\vec{N}$ .



Slika 5.11: Tlačno polje v kanalu.

Na sliki 5.10 so podane izračunane konture hitrosti po kanalu za komponento hitrosti v smeri toka (slika 5.10 zgoraj) in komponento hitrosti pravokotno na smer toka (slika 5.10 spodaj). Iz teh rezultatov vidimo, da je porazdelitev hitrosti enaka kot v primeru newtonskih tekočin, pri čemer je pripadajoče tlačno polje podano na sliki 5.11. Pozneje bo podana še analiza spremembe tlačnih razmer glede na spremembo lastnosti mikropolarnih tekočin. Podobno kot za hitrost so na sliki 5.12 podane konture vrtničnosti, katere potek po višini kanala je enak kot v primeru newtonskih tekočin.



Slika 5.12: Polje vrtničnosti v kanalu.

V okviru zastavljenega primera smo tok mikropolarne tekočine v kanalu simulirali za več različnih vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$ . Izračuni so podani na sliki 5.13 za padeč tlaka glede na različne vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$  oziroma različne vrednosti koeficienta viskoznosti mikrorotacije  $k_v$ . S pomočjo primera, ko imamo parameter mikropolarne tekočine  $K = 0$ , se pravi da računamo tok tekočine v kanalu podobno kot s klasičnimi Navier-Stokesovimi enačbami, lahko izračunamo tlačni

Tabela 5.4: Primerjava vrednosti izračunanega tlačnega padca z analitično dobljeno vrednostjo tlačnega padca, za primer, ko je parameter mikropolarne tekočine  $K = 0$ .

|                      | Numerični izračun [ $Pa/m$ ] | Analitični izračun [ $Pa/m$ ] | Odstopanje [%] |
|----------------------|------------------------------|-------------------------------|----------------|
| $\frac{\Delta p}{L}$ | 1,2                          | 1,200625                      | 0,0625         |

padec  $\Delta p$  v kanalu analitično z nastavkom [42]:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{3 \cdot \mu_v \cdot L}{h^2} \bar{v}, \quad (5.9)$$

pri čemer je  $L$  dolžina kanala, na kateri smo izmerili in odčitali tlak,  $h = H/2$  polovica višine kanala in  $\bar{v}$  povprečna hitrost toka v kanalu in se za razvit hitrostni profil v primeru toka tekočine za primer parametra mikropolarne tekočine  $K = 0$  izračuna glede na maksimalno hitrost toka tekočine:

$$\bar{v} = \frac{2}{3} v_{max}. \quad (5.10)$$

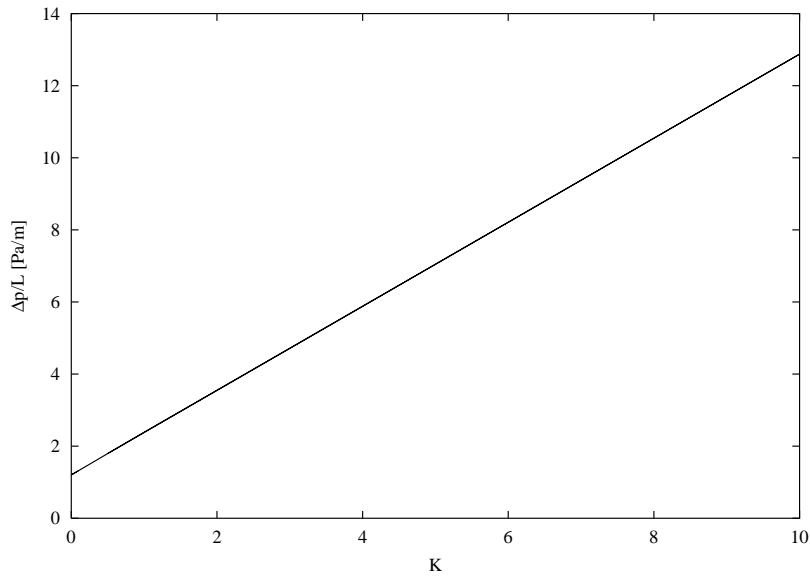
Če podamo tlačni padec na enoto dolžine kanala, se enačba 5.9 preoblikuje v:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{3 \cdot \mu_v}{h^2} \bar{v}. \quad (5.11)$$

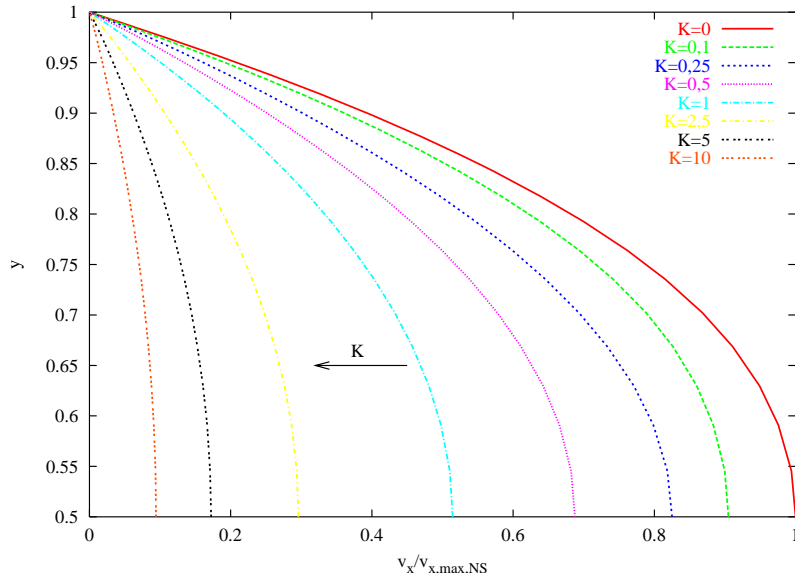
Rezultat take primerjave izračunanega tlačnega padca z analitično dobljeno vrednostjo tlačnega padca je podan v tabeli 5.4, kar nam kaže na izredno dobro ujemanje rezultatov, dobljenih s pomočjo novo razvitega algoritma. Na sliki 5.13 je prikazan tlačni padec v kanalu v odvisnosti od parametra mikropolarnih tekočin  $K$ . Razvidno je, da se pri neki podani vstopni hitrosti s povečevanjem vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K$  oziroma koeficienta viskoznosti mikrorotacije  $k_v$  povečuje tudi tlačni padec, kar nam pove, da mikrorotacija deluje zaviralno na sam tok tekočine.

Na sliki 5.14 so prikazani profili hitrosti normalizirani z maksimalno vrednostjo hitrosti, izračunane s pomočjo klasične Navier-Stokesove teorije. V primeru povečevanja parametra mikropolarnih tekočin  $K$  se maksimalna hitrost v kanalu v primerjavi s klasično newtonsko tekočino zmanjša oziroma profil na izstopu nima več oblike parabole, kot je to v primeru uporabe klasične teorije Navier-Stokesovih enačb. Predstavljeni profili hitrosti se kvalitativno ujemajo z rezultati, ki sta jih v svojih prispevkih objavila Eringen [16] in Papautsky [34].

Konture polja mikrorotacije so podane na sliki 5.15, iz katere vidimo, da je mikrorotacija na steni enaka nič, kar je bilo predpisano z robnim pogojem na steni. Z oddaljevanjem od stene se mikrorotacija povečuje, pri čemer se potem s približevanjem središču

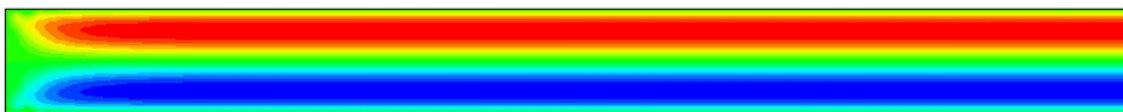


Slika 5.13: Tlačni padec v kanalu za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K$ .



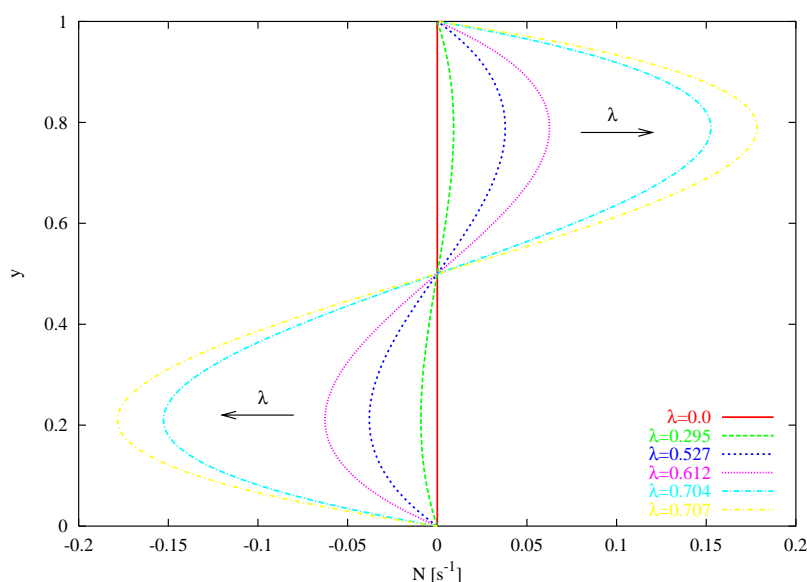
Slika 5.14: Hitrostni profili po višini kanala za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K$ .

kanala vrednost mikrorotacije spet zmanjšuje in se skoraj simetrično preslika v spodnji del kanala. Na sliki 5.16 je na izstopnem robu kanala podan potek mikrorotacije glede na

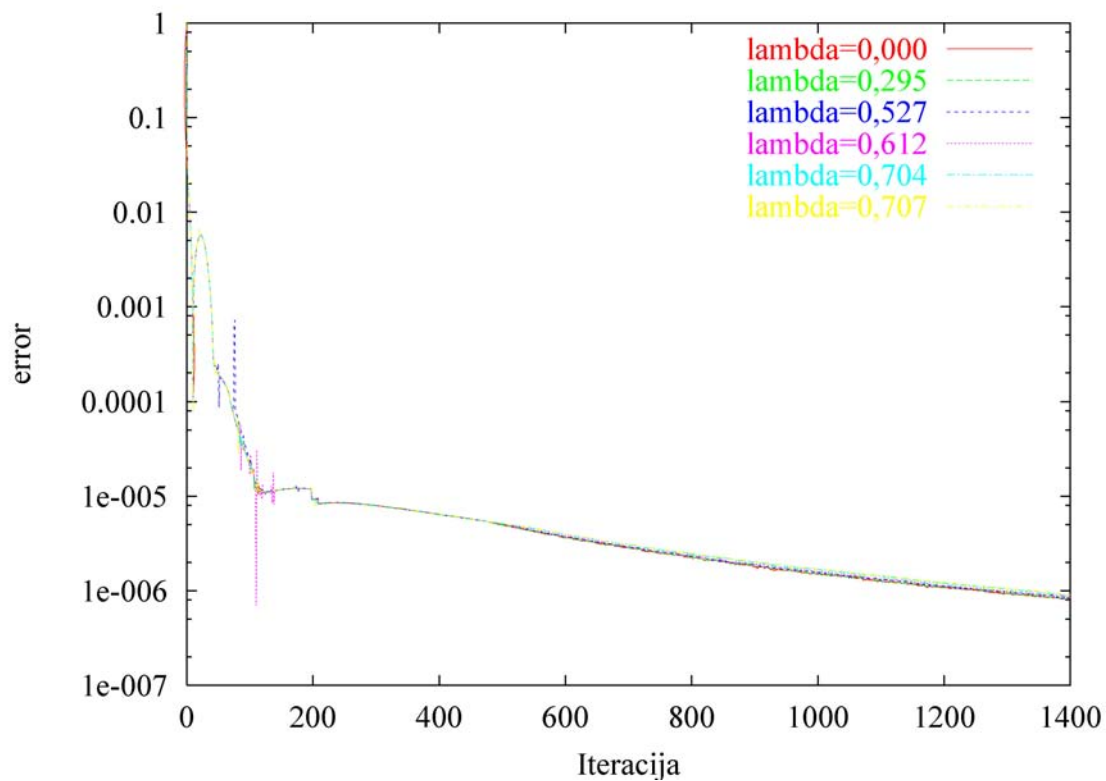


Slika 5.15: Polje mikrorotacije v kanalu.

višino kanala. Na tej sliki so prikazani rezultati izračunov za različne vrednosti parametra  $\lambda$ , ki vpliva na gradient viskoznosti mikrorotacije  $\gamma_v$ . Rezultati prikazujejo povečevanje mikrorotacije s povečevanjem parametra  $\lambda$ , pri čemer v primeru, ko je parameter  $\lambda = 0$ , mikrorotacija v kanalu ni prisotna, oziroma je enaka nič. Prikazani rezultati potrjujejo zapisane teoretične osnove, podane v poglavju 3, v katerem je podana razlaga in vpliv parametra  $\lambda$  na obnašanje mikropolarnih tekočin

Slika 5.16: Profili mikrorotacije po višini kanala za različne vrednosti parametra  $\lambda$ .

Poteki konvergence v izračunih toka v kanalu so podani za različne vrednosti parametra  $\lambda$  na sliki 5.17. Prikazani profili konvergenca kažejo na skoraj nepomembna odstopanja konvergenca za različne vrednosti parametra  $\lambda$ .



Slika 5.17: Napaka iterativnega izračuna (konvergenca) v primeru toka v kanalu za različne vrednosti parametra  $\lambda$ .

## 5.3 Sklopljen primer naravne in prisilne konvekcije v toku preko kotanje

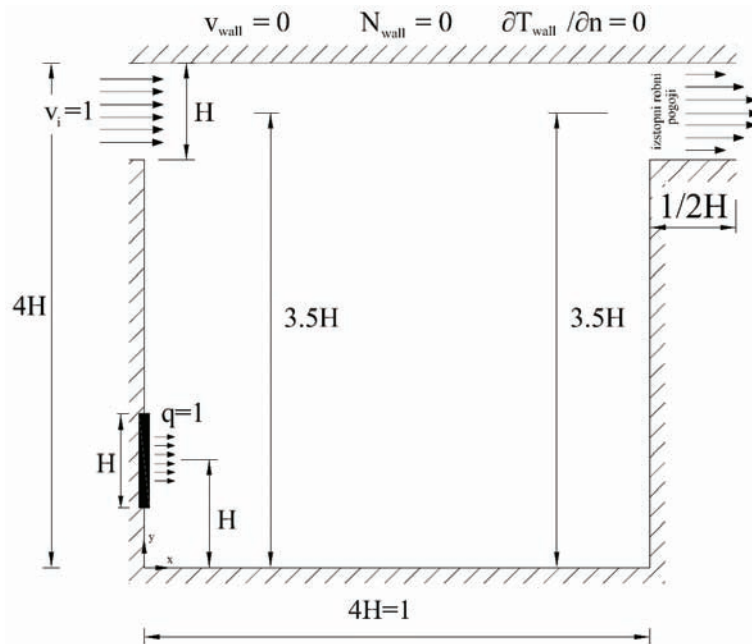
V tem primeru je predstavljen numerični izračun laminarnega toka mikropolarnih tekočin v primeru mešane konvekcije v kotanji z izvorom toplote na delu stene v kotanji. Tok mešane konvekcije bo zajemal prisilno konvekcijo, povzročeno zaradi gnanega toka mikropolarne tekočine pri sobni temperaturi na vstopu v kotanjo, in naravno konvekcijo, kot posledico vnosa toplotnega toka na steni kotanje.

Primer mešane konvekcije je zelo zanimiv, saj ga je mogoče zaslediti v mnogih praktičnih primerih, ki so povezani z mikro napravami, kot npr. hlajenje mikro elektronskih sistemov in naprav, ki jih je v zadnjem času na trgu in v praksi vedno več. Zaradi tega je smiselno uporabiti novo razviti numerični algoritem za reševanje toka mikropolarnih tekočin s pomočjo metode robnih elementov, pri čemer je zanimivo opazovati vpliv različnih snovskih lastnosti na tokovno dogajanje pri tako fizikalno kompleksnem primeru, kot je mešana konvekcija. Primer in geometrija, ki bo obravnavana, je bila izbrana na podlagi poznejše kvalitativne primerjave rezultatov z avtorji, ki so že izvedli nekaj izračunov mešane konvekcije za newtonske tekočine, in z rezultati za mikropolarno tekočino.

### 5.3.1 Robni pogoji

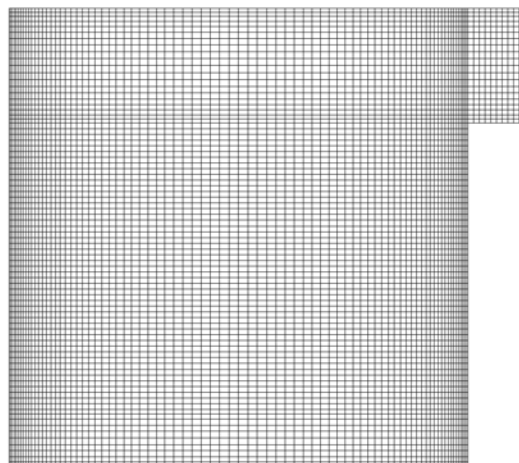
Obravnavali bomo pravokotno kotanjo z dolžino in višino  $4H$  (slika 5.18). Izvor toplote je podan na levi strani kotanje, na kateri je prav tako podan vstop tekočine v kotanjo, pri čemer je izstop iz kotanje predviden na desni strani. Vse podrobnosti geometrije so podane na sliki 5.18. Obravnavan model je ravninski model, pri čemer smo predpostavili dovolj veliko širino modela, da lahko obravnavamo primer kot dvodimenzionalen. Zaradi enostavnosti sta vstop in izstop kotanje enakih višin kot je višina stene, na kateri je predpisan toplotni tok. Vse ostale stene so obravnavane kot adiabatne. Na vstopu je predpisana uniformna hitrost toka. Predpostavka je, da imamo stacionarni laminaren in nestisljiv tok mikropolarne tekočine. Na vseh trdnih stenah (vertikalne in horizontalne stene) je podan brezdrnsni robni pogoj za hitrosti ( $v_x = 0$  in  $v_y = 0$ ), razen, kot že omenjeno na vstopu in izstopu je bila podana hitrost drugače. Na vstopu imamo podani uniformni tok mikropolarne tekočine ( $v_i = 1$ ). Za robni pogoj mikrorotacije smo upoštevali enačbo (3.47) ter uporabili  $n_{wall} = 0$ , kar nam predstavlja tok goste suspenzije (visoka koncentracija delcev). Na vstopu je predpostavljen robni pogoj za temperaturo  $T = 0$ , medtem ko je na vseh trdnih stenah predpostavljen adiabatni robni pogoj  $\partial T / \partial n = 0$ . Izvor toplote je predpisan z gostoto toplotnega toka  $\partial T / \partial x = 1$ . Na izstopu smo predpisali izstopne robne pogoje za funkcije tokovnega polja v obliki, da so odvodi funkcij tokovnega polja enaki nič. Za natančnejši izračun smo na izstopu uporabili kanal, ki ima dolžino  $1/2$  vstopne višine v kotanjo.

Izračun funkcij tokovnega polja smo izvedli s pomočjo diskretiziranega območja, kot je prikazano na sliki 5.19. Za vse simulacije je bila uporabljena računsko mreža s 1650



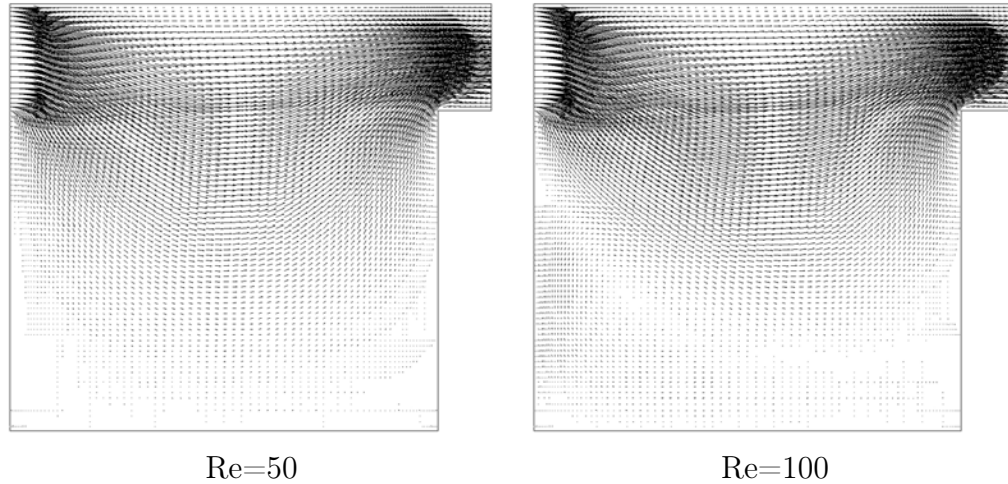
Slika 5.18: Geometrija in robni pogoji primera mešane konvekcije v kotanji.

podobmočji in 6771 računskimi vozlišči. V bližini sten smo uporabili zgoščevanje elementov k steni, kot je to razvidno iz slike 5.19. S pomočjo tako izbrane računske mreže je bila zagotovljena pravilnost rešitve v še sprejemljivih računskih časih za doseg maksimalne predpisane napake iterativne rešitve (konvergenčni kriterij)  $10^{-6}$ .



Slika 5.19: Računska mreža primera mešane konvekcije v kotanji.



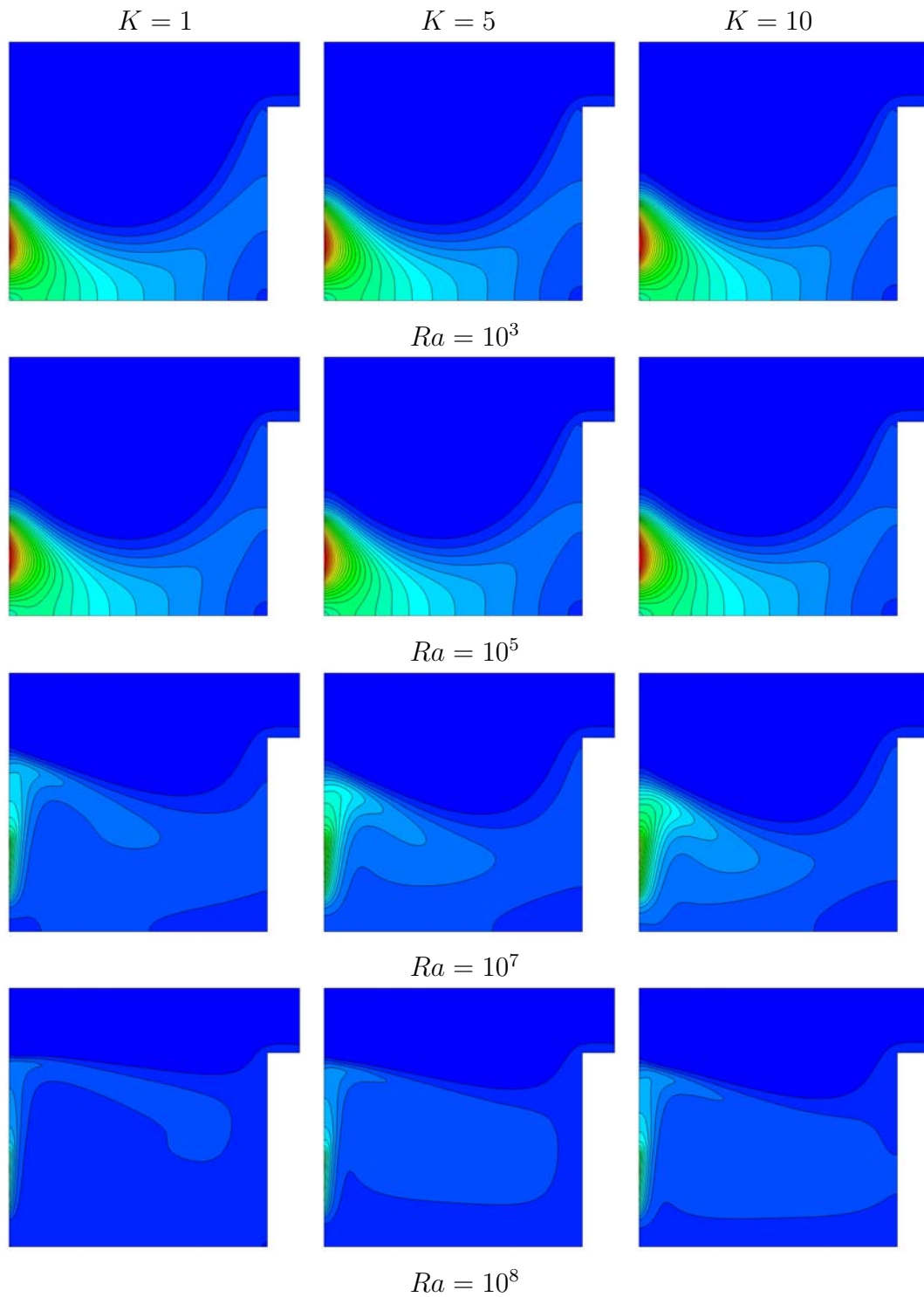


Slika 5.20: Vektorji hitrosti v primeru mešane konvekcije v kotanji za različni vrednosti Reynoldsovega števila ( $K = 0$ ,  $\eta = 1$  in  $\lambda = 1$ ).

### 5.3.2 Rezultati simulacije

Za preglednejše reševanje in urejanje numeričnih izračunov so bila uporabljena nekatera brezdimenzijska števila, ki opisujejo tokovno in temperaturno polje našega primera. Vsi izračuni so bili izvedeni za Prandtlovo število  $Pr = 10$ . Vodilna parametra v izračunih sta bila  $Re$  in  $Gr$  število, ki sta definirani že v prvem primeru za naravno konvekcijo in v drugem primeru za primer prisilne konvekcije toka v kanalu. Reynoldsovo število je bilo izračunano glede na vstopno višino v kotanjo  $Re = v_i H / \mu_v$  in je znašalo v našem primeru za večino izračunov  $Re = 100$ , kar pomeni, da je tok laminaren. Grashofovo in Prandtlovo število sta podani z enačbama (5.4) in (5.5). Produkt Grashofovega in Prandtlovega števila je podan z Rayleighovim številom (enačba (5.3)). Pomembnega pomena v rezultatih bodo parametri mikropolarnih tekočin, ki so bili spreminjani z namenom pridobiti informacije njihovega vpliva na tokovno in toplotno obnašanja mikropolarnih tekočin. Izračuni so bili izvedeni za parameter vzgona  $\eta = 0.01 - 1000$ , ki je definiran kot razmerje Grashofovega števila in kvadrata Reynoldsovega števila  $\eta = Gr / Re^2$ . S pomočjo parametra vzgona  $\eta$  lahko pri konstantnem  $Pr$  številu definiramo Rayleighovo število ( $Ra = 10^3 - 10^8$ ). Vrednosti parametra mikropolarnih tekočin so bile izbrane v območju  $K = 0, 1 - 10$ . Prav tako pa so bile simulacije izvedene za različne vrednosti parametra  $\lambda = 0, 5 - 10$ .

Rezultati tokovnega polja so prikazani na sliki 5.20 za dve različni vrednosti Reynoldsovega števila ( $Re = 50$  in  $100$ ). Iz te slike je razvidno, da v primeru višje vrednosti Reynoldsovega števila tok mikropolarne tekočine teče bolj naravnost (tok zaradi prisilne konvekcije) ter da se v bližini spodnjega roba kotanje poveča oziroma ustvari povratni tok tekočine. Povišanje vrednosti Reynoldsovega števila povzroči povečanje strižnih sil v toku tekočine in povečanje povratnega toka.



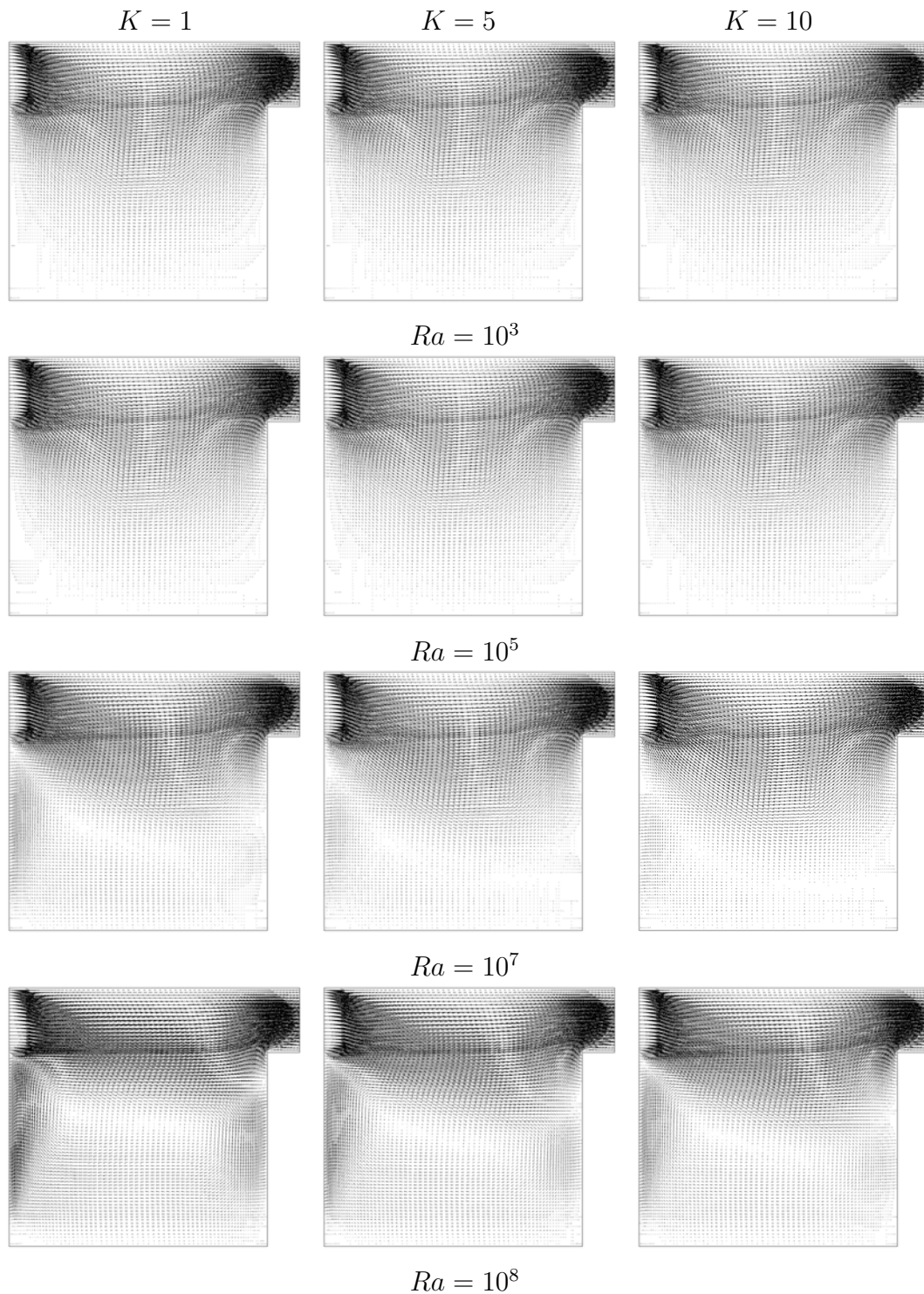
Slika 5.21: Izoterme v primeru mešane konvekcije v kotanji za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K$  in različne vrednosti Rayleighovih števil  $Ra$  ( $\lambda = 1$ ).

Vpliv Rayleighovega števila ( $Ra = 10^3, 10^5, 10^7$  in  $10^8$ ) za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin ( $K = 1, 5$  in  $10$ ) na temperaturno polje je prikazan na sliki 5.21 pri konstantni vrednosti Reynoldsovega števila  $Re = 100$ . Iz slike je razvidno, da z naraščanjem Rayleighovega števila narašča temperaturni gradient v okolici izvora toplote, pri čemer se povečuje gretje notranjosti kotanje.

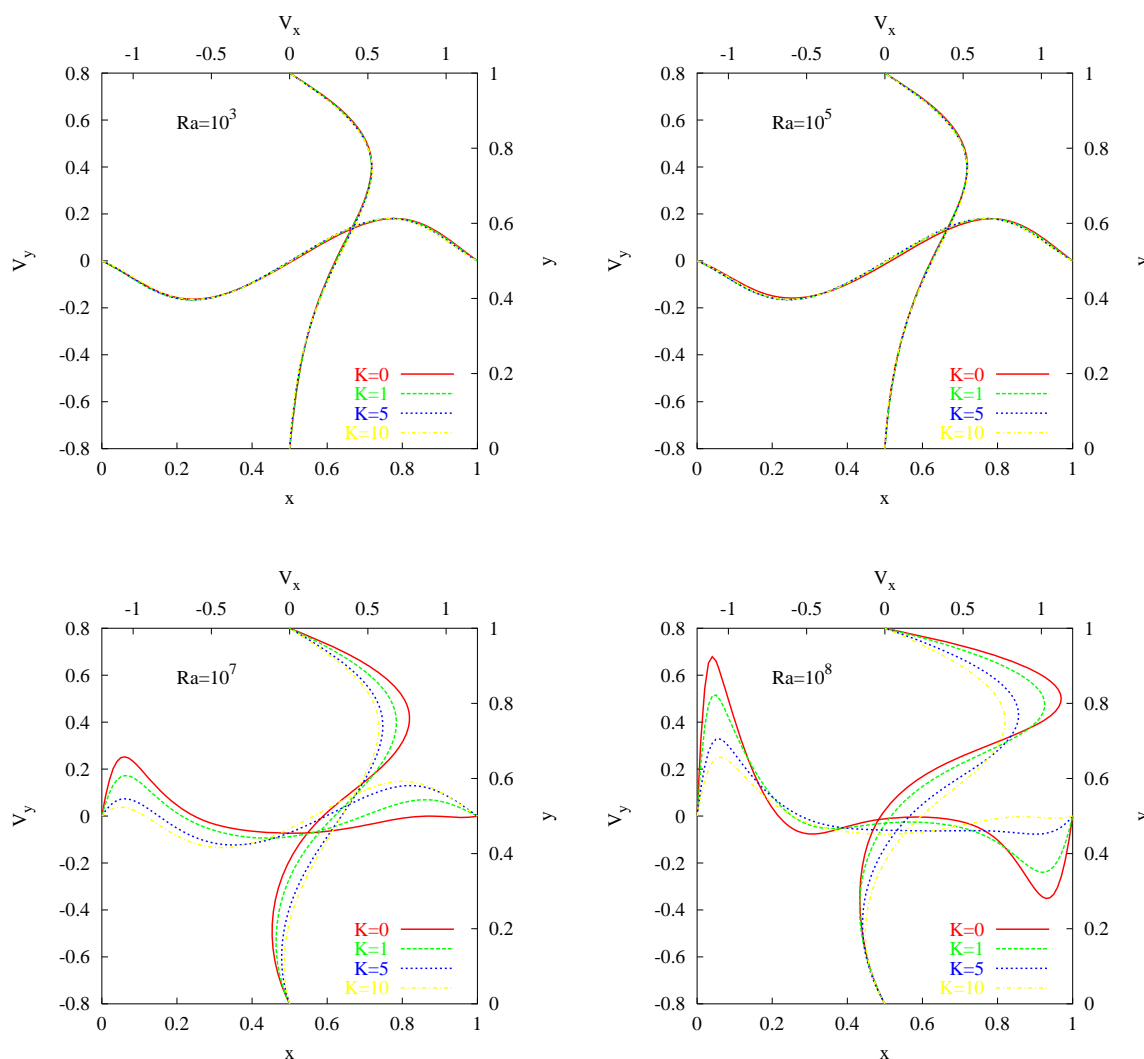
Primerjava tokovnega polja v kotanji (slika 5.22) s prikazanimi vektorji hitrosti v kotanji za različne vrednosti Rayleighovih števil ( $Ra = 10^3, 10^5, 10^7$  in  $10^8$ ) in parametra mikropolarnih tekočin ( $K = 1, 5$  in  $10$ ), za konstantno vrednost Reynoldsovega števila ( $Re = 100$ ), nam prikaže izrazito povečanje povratnega toka znotraj kotanje s povečevanjem vrednosti Rayleighovega števila. Če pogledamo na rezultate s strani mikropolarnosti tekočine, se le ta povečuje s povečevanjem parametra mikropolarnih tekočin  $K$ , kar nam pri konstantni vrednosti Rayleighovega števila povzroči umirjanje toka v kotanji. Podobno lastnost umirjanja toka mikropolarne tekočine s povečevanjem vrednosti parametra mikropolarnih tekočin ( $K$ ) je bil ugotovljen že v primeru naravne konvekcije v kotanji. Tako v primeru nižjih vrednosti Rayleighovih števil in višjih vrednostih parametra mikropolarne tekočine ni zaslediti povratnega toka v spodnjem delu kotanje. Tak pojav gibanja mikropolarne tekočine lahko pripišemo povečanju upora gibanju mikropolarne tekočine zaradi povišane mikrorotacije v kotanji (višja vrednost parametra mikropolarnih tekočin  $K$  oziroma višja vrednost koeficienta viskoznosti mikrorotacije  $k_v$ ), ki s tem upočasnjevanjem toka tekočine zviša mejo za nastanek povratnega toka v kotanji.

Na sliki 5.23 so prikazani profili hitrosti v kotanji za različne vrednosti  $Ra$  števila in parametre mikropolarnih tekočin  $K$ . Profil komponente hitrosti  $v_x$  je podan po vertikalni liniji v sredini kotanje ( $x = 2H$ ) in profil komponente hitrosti  $v_y$  po horizontalni liniji v sredini kotanje ( $y = 2H$ ). Rezultati hitrostnih profilov potrjujejo na sliki 5.22 podane rezultate. Razvidno je da se s povečevanjem vrednosti Rayleighovega števila, poveča povratni tok znotraj kotanje, medtem ko se s povečanjem parametra mikropolarnih tekočin  $K$  tok v kotanji upočasni.

Pripadajoče polje mikrorotacije za izračune, prikazane na slikah 5.21 in 5.22, je podano na sliki 5.24 za različne vrednosti Rayleighovih števil ( $Ra = 10^3, 10^5, 10^7$  in  $10^8$ ) in parametra mikropolarnih tekočin ( $K = 1, 5$  in  $10$ ), za konstantno vrednost Reynoldsovega števila ( $Re = 100$ ). Povečevanje parametra mikropolarnih tekočin  $K$  dosežemo s povečevanjem koeficienta viskoznosti mikropolarne tekočine  $k_v$ , ki nam, kot je razvidno iz rezultatov na sliki 5.24, izrazito povečuje mikrorotacijo mikropolarne tekočine v kotanji. Povečevanje mikrorotacije v kotanji s povečevanjem parametra mikropolarnih tekočin je prikazano tudi na diagramu na sliki 5.25 za konstantno vrednost parametra vzgona  $\eta = 1$  in parametra  $\lambda = 1$ . Povečevanje mikrorotacije prikazano na sliki 5.25 se nanaša na mikrorotacijo v okolici izvora toplote, kjer nastane velik vrtinec povratnega toka tekočine.

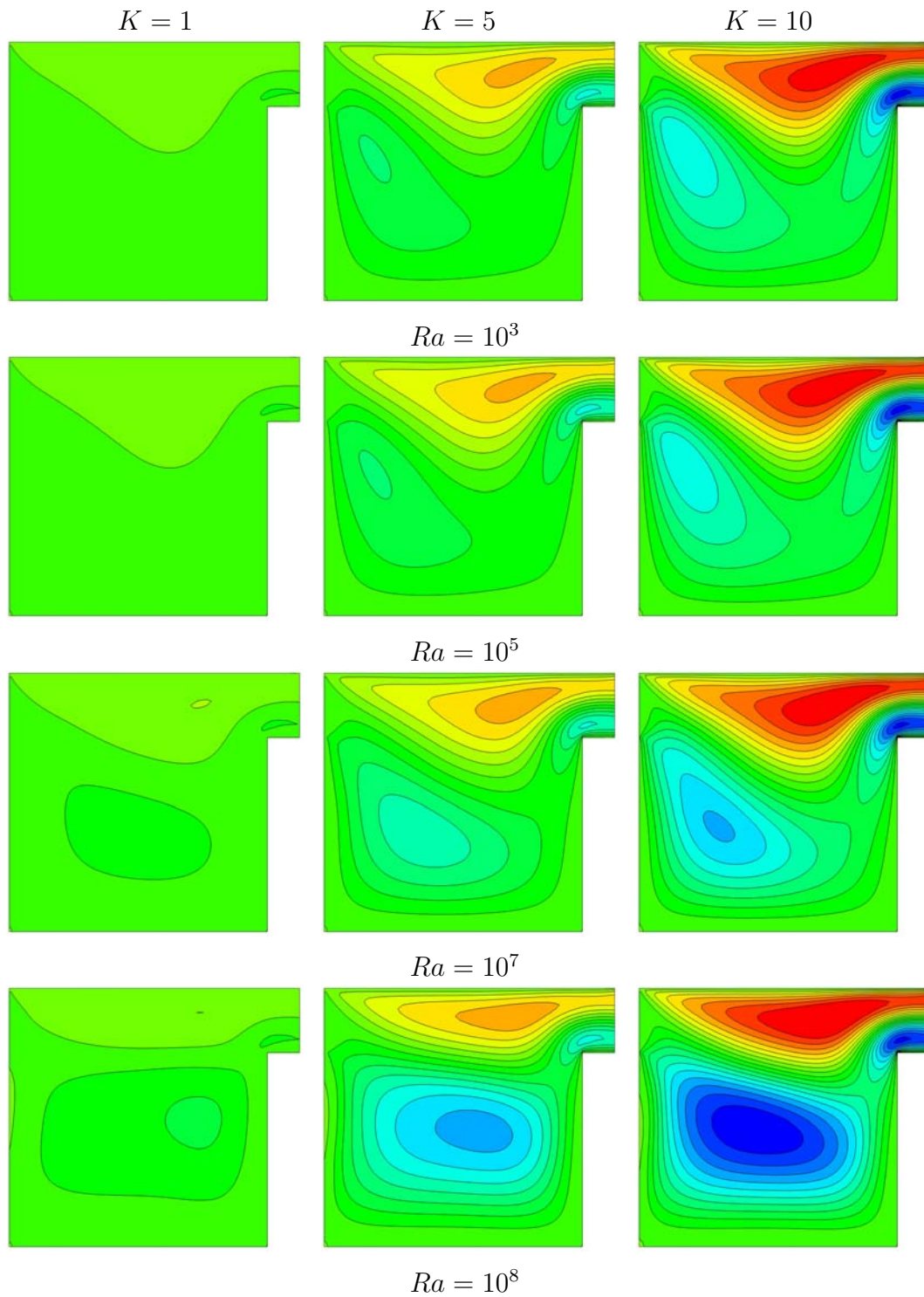


Slika 5.22: Vektorji hitrosti v primeru mešane konvekcije v kotanji za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K$  in različne vrednosti Rayleighovih števil  $Ra$  ( $\lambda = 1$ ).

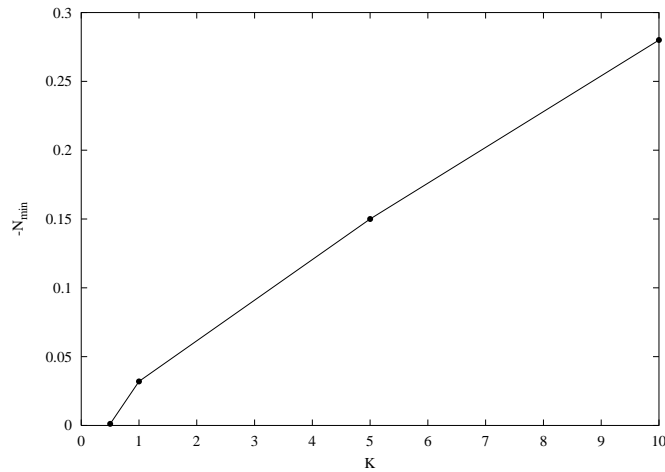


Slika 5.23: Primerjava hitrostnih profilov v kotanji za različne vrednosti  $Ra$  števila in parametre mikropolarnih tekočin  $K$ .

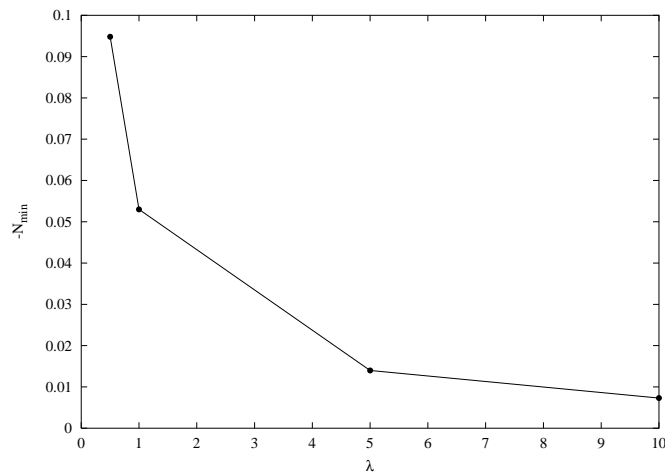
Zanimiv prispevek k analizi vpliva parametrov mikropolarnih tekočin na mikrorotacijo je analiza vpliva parametra  $\lambda$  v območju povratnega toka v okolici izvora toplote. Na sliki 5.26 so prikazane vrednosti za mikrorotacijo, ki pa se, kot je razvidno iz diagrama, s povečevanjem parametra  $\lambda$  zmanjšuje. V teoriji je bilo prikazano, da se s povečevanjem parametra  $\lambda$  povečuje razmerje med zunanjo in notranjo karakteristično dolžino mikropolarne tekočine (en.(3.55)-(3.57)), kar pripelje do manjših vrednosti mikrorotacije.



Slika 5.24: Mikrorotacija v primeru mešane konvekcije v kotanji za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K$  in različne vrednosti Rayleighovih števil  $Ra$  ( $\lambda = 1$ ).



Slika 5.25: Minimalne vrednosti mikrorotacije  $N_{min}$  za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K$  ( $\eta = 1$  in  $\lambda = 1$ ).

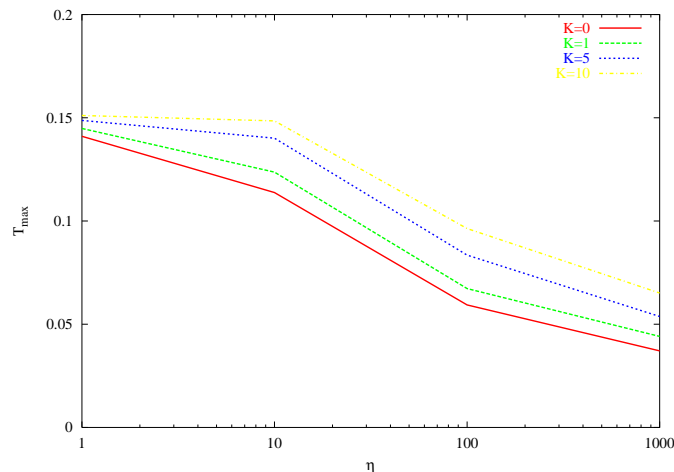


Slika 5.26: Minimalne vrednosti mikrorotacije  $N_{min}$  za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $\lambda$  ( $\eta = 1$  in  $K = 1$ ).

Na sliki 5.27 so prikazane maksimalne vrednosti temperature ( $T_{max}$ ) na izvoru toplote v odvisnosti od parametra vzgona  $\eta$  za različne primere mikropolarnih tekočin ( $K = 0, 1, 5$  in  $10$ ). Z naraščanjem parametra mikropolarnih tekočin  $K$ , kot je bilo to razvidno že iz prejšnjih rezultatov, se zmanjšuje intenziteta gibanja toka in s tem tudi intenziteta povratnega toka v okolici izvora toplote. S tem zmanjšanjem gibanja toka se zmanjša tudi količina prenesene toplote z izvora toplote na okoliško tekočino, kar privede do povečanih temperatur v primeru višjih vrednosti parametra mikropolarnih tekočin. Razumljivo in

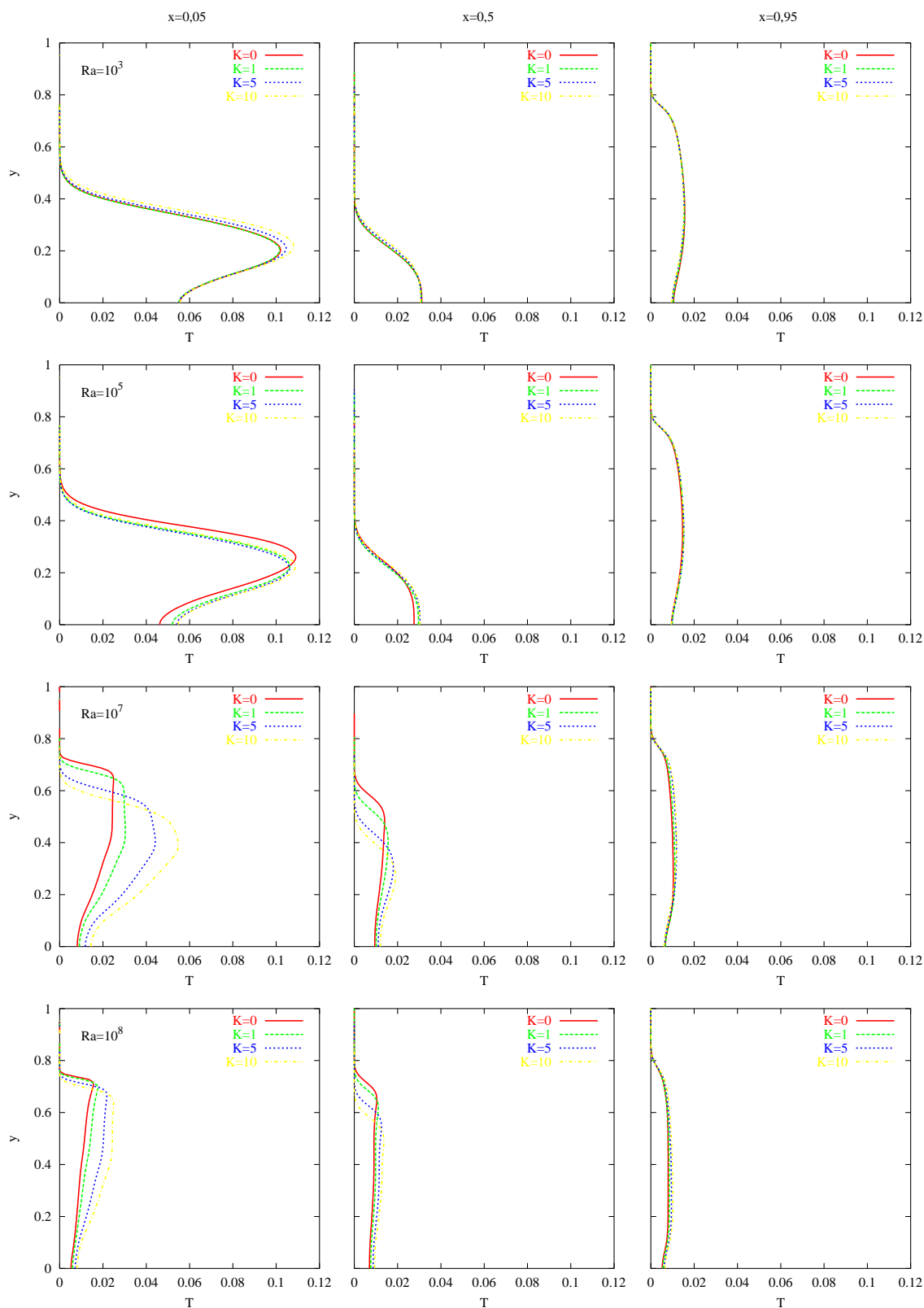
pričakovano je, da z naraščanjem parametra vzgona  $\eta$  narašča intenziteta gibanja tekočine v kotanji in se s tem poveča povratni tok v okolici izvora toplote, kar pospeši prenos toplote od izvora toplote na okoliški fluid in pripelje do manjših temperatur na površini izvora toplote. Ti rezultati kažejo na povišanje temperature izvora toplote, kar pomeni manjši prenos toplote od izvora v notranjost kotanje.

Potrditev rezultatov podanih na sliki 5.27 je prikazana na sliki 5.28, kjer so podani temperaturni profili v kotanji za različne vrednosti  $Ra$  števila in parametre mikropolarnih tekočin  $K$ . Temperaturni profili so za vsako od izbranih vrednosti  $Ra$  števila podani ločeno na treh različnih vertikalnih linijah. Rezultati leve kolone na sliki 5.28 predstavljajo rezultate v bližini leve stene kotanje ( $x = 0,05$ ), rezultati srednje kolone predstavljajo rezultate na vertikalni liniji po sredini kotanje ( $x = 0,5$ ) in rezultati desne kolone predstavljajo rezultate na vertikalni liniji blizu leve stene kotanje ( $x = 0,95$ ). Razvidno je tako kot iz slike 5.27, da se z naraščanjem parametra mikropolarnih tekočin  $K$  pri konstantni vrednosti  $Ra$  števila povečuje temperatura v mikropolarni tekočini. Z povečevanjem vrednosti  $Ra$  števila se na v okolici izvora toplote zmanjša temperatura tekočine, kar potrjuje rezultate podane na sliki 5.27, prav tako pa se zmanjšuje temperatura z oddaljevanjem od izvora toplote. Z povečevanjem vrednosti  $Ra$  števila pa se zaradi zmanjšanja temperature v ravnini izvora toplote, povečuje temperatura v zgornjem delu kotanje, saj ppovečevanje vrednosti  $Ra$  števila poveča povratni tok in s tem odnaša več tekočine z večjo temperaturo iz spodnjega dela kotanje v zgornji del kotanje. Vse navedene ugotovitve obnašanja mikropolarnih tekočin v primeru mešane konvekcije se kvalitativno ujemajo z rezultati predstavljenimi v delu Hsu-ja [26].



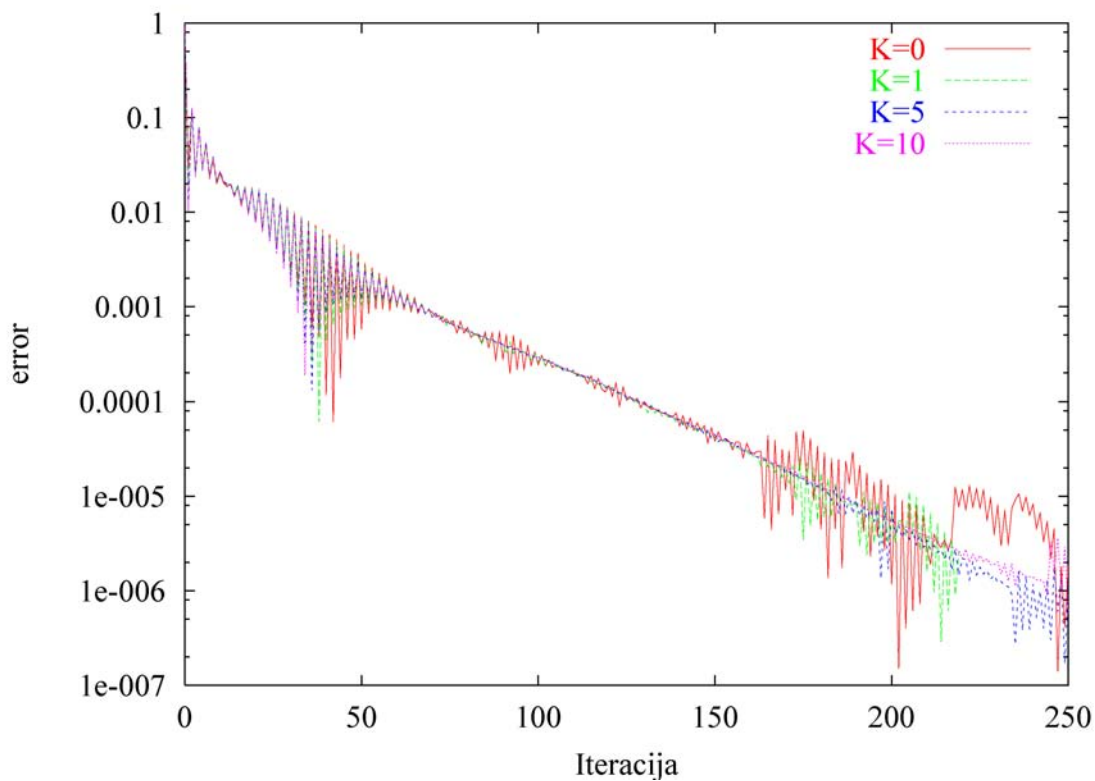
Slika 5.27: Maksimalna vrednosti temperature  $T_{max}$  na izvoru toplote za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K$  in parametra vzgona  $\eta$ .





Slika 5.28: Primerjava temperaturnih profilov v kotanji za različne vrednosti  $Ra$  števila in parametre mikropolarnih tekočin  $K$ .

Poteki konvergence primera z vrednostjo Rayleighovega števila ( $10^3$ ) za različne vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$  so podani na sliki 5.29. Profili konvergenca kažejo na nihanja konvergenca, toda večjih odstopanj za različne vrednosti parametra mikropolarne tekočine  $K$  ni možno razbrati. Nihanje poteka konvergenca bi lahko zmanjšali z uporabo ostrejšega kriterija podrelaksacije, pri čemer pa bi povečali število potrebnih iteracij, kar bi privedlo do daljšega računskega časa.



Slika 5.29: Napaka iterativnega izračuna (konvergenca) v primeru mešane konvekcije za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K$  in Rayleighovega števila  $Ra = 10^3$ .

# Poglavje 6

## Zaključki

### 6.1 Razprava

V doktorski disertaciji smo predstavili numerično modeliranje toka mikropolarnih tekočin z metodo robnih elementov. Sama teorija mikropolarnih tekočin je nadgradnja klasične Navier-Stokesove teorije in zajema tekočine, katerih obnašanje poleg translatorskega gibanja tekočine zajame še rotacijsko gibanje notranjih struktur toka tekočin. Nadgradnja se v primerjavi s klasično teorijo izraža v obliki dodatnih členov v enačbi ohranitve gibalne količine oziroma enačbi za vrtničnost tokovnega polja, kajti znotraj metode robnih elementov je bila uporabljena hitrostno-vrtinčna formulacija toka tekočine. Poleg teh dodatnih členov, ki vključujejo vektor mikrorotacije v enačbi za vrtničnost, je potrebno dodatno reševati še enačbo prenosa mikrorotacije.

V obstoječem algoritmu je bila modificirana enačba za prenos vrtničnosti ter enačba za ohranitev mikrorotacije in energije, opisana s pomočjo konvektivno-difuzivne enačbe s členom kemijske reakcije prvega reda. Ta tip enačbe nam je omogočil, da se za vse tri enačbe kinetike toka uporabi enaka osnova za izračun znotraj že obstoječega algoritma. Člen kemijske reakcije prvega reda nam poenostavi reševanje sistema enačb, saj se znotraj tega izognemo reševanju enega izmed členov v prenosni enačbi za mikrorotacijo, pri čemer se rešitev tega člena skriva v osnovni rešitvi, ki je vpeljana zaradi uporabe kolokacijske metode reševanja sistema ohranitvenih enačb. Poudariti je potrebno, da se zaradi izbrane osnovne rešitve, katera vključuje tekom izračuna spreminjajočo se hitrost, integrali znotraj iterativnega postopka izračunavajo vedno znova. Izračunavanje vrednosti vrtničnosti na robu z enačbo kinematike toka je bilo izvedeno s pomočjo eno območne metode, medtem ko je bilo za vse ostale vrednosti spremenljivk uporabljena podobmočna metoda, ki razdeli območje reševanja na ločena podobmočja, ki jih nato rešujemo kot eno območje. Uporabljen pristop k takšnemu reševanju se je izkazal za pravilnega, saj nam kljub znanim dejstvom, da je metoda robnih elementov sama po sebi precej stabilna in natančna, vendar za reševanje potrebuje precej računalniškega spomina in časa, še omogoča reševanje primerov z relativno velikim številom računskih točk. Reševanje dodatnih členov v obstoječih prenosnih enačbah in reševanje dodatne transportne enačbe

za mikrorotacijo ni povzročilo prevelikih odstopanj od že znanih dejstev, prednosti in slabosti, uporabe metode robnih elementov.

Vključitev teorije mikropolarnih tekočin v obstoječi numerični algoritem na osnovi metode robnih elementov je bil uspešen, kar smo dokazali z reševanjem nekaterih primerov značilnih simulacij toka tekočine. Izvedene so bile simulacije naravne konvekcije v kotanji, tok tekočine v kanalu in primer mešane konvekcije v kotanji.

V primeru naravne konvekcije v kotanji je bilo izvedenih več izračunov za različne vrednosti Rayleighovega števila, in njihov vpliv na sam tok tekočine je pokazal, da se s povečevanjem le tega gibanje tekočine znotraj kotanje povečuje. Nasprotujoč učinek oziroma upočasnjevanje gibanje toka se v primeru mikropolarnih tekočin doseže s povečevanjem parametra mikropolarnih tekočin  $K$ , ki podaja razmerje med koeficienti viskoznosti mikrorotacije in dinamično viskoznostjo, kar se izraža v povečevanju mikrorotacije, ki deluje na sam tok tekočine zaviralno. Vpliv povečevanja vrednosti parametra mikropolarnih tekočin  $K$  se odraža na zmanjševanju prenosa toplote, kar prikazuje zmanjševanje vrednosti povprečnega in lokalnega Nusseltovega števila. Tak vpliv mikrorotacije na temperaturno polje je izkazan v vseh primerih različnih vrednosti Rayleighovega števila.

V primeru toka v kanalu je bilo prikazano spreminjanje polja mikrorotacije po višini kanala. Parameter, ki bistveno povečuje in zmanjšuje stopnjo mikrorotacije v sistemu, je parameter  $\lambda$ , ki predstavlja kombinacijo med koeficientom viskoznosti mikrorotacije in dinamično viskoznostjo ter parametrom mikro vztajnosti. Povečevanje parametra  $\lambda$  nam povečuje mikrorotacijo. Drugi prav tako pomemben parameter mikropolarnih tekočin je parameter mikropolarnih tekočin  $K$ , kateri, kot je prikazano v rezultatih tega primera, zmanjšuje hitrost v kanalu oziroma spremeni obliko profila hitrosti. Tako v primeru višjih vrednosti parametra mikropolarnih tekočin hitrostni profil nima več oblike parabole. Rezultati tega primera kažejo na linearno povečevanje tlačnega padca s povečevanjem vrednosti koeficienta viskoznosti mikrorotacije.

Kot tretji primer je bila izvedena simulacija mešane konvekcije, ki združuje vse funkcije novo razvitega numeričnega algoritma, saj se znotraj tega primera upošteva tako naravna konvekcija, do katere pride zaradi temperaturnih razlik v kotanji in prisilna konvekcija, ki je podana z vstopnim hitrostnim profilom v kotanjo. Rešitev tega primera nam kaže, da se s povečevanjem Reynoldsovega oziroma Grashofovega števila poveča tudi gibanje toka tekočine znotraj kotanje. Povečano gibanje privede do povratnega toka v okolici izvora toplote. To povečanje gibanja toka znotraj kotanje pa privede do povečanega prenosa toplote znotraj kotanje, in sicer od izvora toplote proti notranjosti. S povečevanjem parametrov mikropolarne tekočine, kot sta parameter mikropolarne tekočine  $K$  in parameter  $\lambda$ , se tokovno polje v kotanji umirja in s tem se znižuje učinkovitost prenosa toplote z izvora toplote proti notranjosti kotanje, kar se odraža z naraščanjem temperature na mestu izvora toplote.

## 6.2 Sklep

Numerično modeliranje večfaznih večsestavinskih tokov je še vedno zelo privlačna tema mnogih raziskovalcev, kajti kljub mnogim že uveljavljenim teorijam, modelom in pristopom še vedno ni mogoče v relativno enostavni matematični formulaciji zajeti vsega fizikalnega dogajanja pri toku tako kompleksnih tekočin. Kljub hitremu razvoju računalniških zmogljivosti, ki bi omogočile reševanja velikih sistemov enačb, še vedno ostajajo določene neznanke snovskih lastnosti teh kompleksnih tekočin, ki pa jih je možno določiti predvsem s pomočjo eksperimenta.

V pričujoči disertaciji smo uspeli v okviru hitrostno vrtinčne formulacije razviti nov numerični algoritem, ki na relativno enostaven način, z dodatnimi členi v prenosni enačbi vrtinčnosti in dodatno transportno enačbo mikrorotacije, omogoča modeliranje določenih vrst kompleksnih tekočin. Z vključitvijo teorije mikropolarnih tekočin v hitrostno vrtinčno formulacijo smo skušali izkoristiti prednosti te formulacije s tem, da smo iz sistema enačb izključili tlak in tako ni bilo potrebe po dodatni korekciji tlaka znotraj numeričnega algoritma, pri čemer ta korak omogoči večjo preglednost in stabilnost numerične sheme. S pomočjo vpeljave vrtinčnosti v sam sistem enačb smo omogočili direktno izračunavanje odvodov hitrostnega polja, kar omogoči višje redne približke hitrostnega polja.

Izpeljani numerični algoritem je dobra osnova za nadaljne raziskave na področju numeričnega modeliranja kompleksnih tekočin, pri čemer je pomembno poznavanje dodatnih koeficientov, ki definirajo lastnost omenjenih tekočin in omogočijo v primerjavi z uporabo klasičnega numeričnega algoritma razvitega na osnovi Navier-Stokesovih enačb vključiti dodatne fizikalne pojave, ki jih drugače ne bi mogli opisati.

## 6.3 Smernice za nadaljnje delo

Izpeljani numerični algoritem je bil zgrajen na osnovi algoritma, ki omogoča modeliranje ravninskih oziroma dvorazsežnostnih tokov, pri čemer je v naravi večina primerov povezanih s prostorskim tokom. Glede na izkazano uspešno vključitev teorije mikropolarnih tekočin v numerično shemo za ravninski tok bi bilo smiselno sedaj to formulacijo razširiti in uporabiti pridobljene izkušnje za modeliranje prostorskih tokov mikropolarnih tekočin s pomočjo metode robnih elementov, kajti v skupini, ki se ukvarja z razvojem algoritmov za numerično modeliranje toka tekočin na osnovi metode robnih elementov, so se tekom zadnjih dveh let beležili napredki razvoja numeričnega algoritma za modeliranje prostorskih tokov s pomočjo klasične Navier-Stokesove teorije, predvsem pa se je izvedlo kar nekaj raziskav in izboljšav pričujočega numeričnega algoritma za prostorske tokove v okviru zmanjševanja potrebe po računskih zmogljivostih.

V začetku naloge je bila večkrat poudarjena uporabnost teorije mikropolarnih tekočin za modeliranje tokov različnih bioloških tekočin, kot je kri. Tudi na tem področju je sedaj velik napredek, predvsem na področju eksperimentalnih raziskav in določanja snovskih karakteristik teh kompleksnih bioloških tekočin, kar bi lahko v bližnji prihod-

nosti omogočilo določitev potrebnih koeficientov znotraj teorije mikropolarnih tekočin za uporabo novo razvitega algoritma pri numeričnem modeliranju toka krvi.

Podobno kot na področju bioloških sistemov, ki so tesno vezani s področjem mikro sistemov in naprav, se je s pomočjo razvoja novih merilnih tehnik sedaj lažje lotevati in iskati primerne rezultate meritev na podlagi katerih bi bila možna primerjava in validacija novorazvitega numeričnega algoritma modeliranja mikropolarnih tekočin s pomočjo metode robnih elementov na mikro skalah, kjer prevladujejo mehanizmi, ki jih s pomočjo klasične Navier-Stokesove teorije ni možno zajeti.

# Literatura

- [1] G. Ahmadi. Self-similar solution of incompressible micropolar boundary-layer flow over a semi-infinite plate. *Int. J. Engng. Sci.*, 14(7):639–646, 1976.
- [2] T. Ariman. On the analysis of blood flow. *Journal of Biomechanics*, 4(3):185–192, 1971.
- [3] T. Ariman, M.A. Turk in N.S. Sylvester. Steady and pulsatile flow of blood. *Journal of Applied Mechanics*, 41(1):1–7, 1974.
- [4] R. Aris. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Perentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- [5] O. Aydin in I. Pop. Natural convection in a differentially heated enclosure filled with a micropolar fluid. *International Journal of Thermal Sciences*, 46(10):963–969, 2007.
- [6] O. Aydin, A. Unal in T. Ayhan. Natural convection in rectangular enclosure heated from one side and cooled from the ceiling. *Numerical Journal of Heat and Mass Transfer*, 42:2345–2355, 1999.
- [7] O. Aydin, A. Unal in T. Ayhan. A numerical study on buoyancy-driven flow in an inclined square enclosure heated and cooled on adjacent walls. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 36:585–599, 1999.
- [8] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [9] O. Anwar Beg, R. Bhargava, S. Rawat, K. Halim in H.S. Takhar. Computational modeling of biomagnetic micropolar blood flow and heat transfer in a two-dimensional non-darcian porous medium. *Meccanica*, 43:391–410, 2008.
- [10] C. A. Brebbia. *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, London, 1978.
- [11] C. A. Brebbia in J. Dominguez. *Boundary Elements. An Introductory Course*. McGraw-Hill Book Company, 1992.
- [12] B. Bugliarello in J. Sevilla. Velocity distribution and other characteristics of steady and pulsatile blood flow in fine glass tubes. *Biorheology*, 17:85–107, 1970.
- [13] G. Davies. Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3(3):249–264, 1983.
- [14] M. Gad el Hak. The fluid mechanics of microdevices. *Journal of Fluids Engineering*, 121:5–33, 1999.

- 
- [15] A.C. Eringen. Simple microfluids. *Int. J. Engng. Sci.*, 2:205–217, 1964.
- [16] A.C. Eringen. Theory of micropolar fluids. *J Math Mech*, 16:1–18, 1966.
- [17] A.C. Eringen. Theory of thermomicrofluids. *J. Math. Anal. Appl.*, 38:480–496, 1972.
- [18] A.C. Eringen. *Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids*. Springer Verlag, New York, 1999.
- [19] A.C. Eringen. *Microcontinuum Field Theories: II. Fluent media*. Springer Verlag, New York, 2001.
- [20] A.C. Eringen in E.S. Suhubi. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids –i. *Int. J. Engng. Sci.*, 2:189–203, 1964.
- [21] G. S. Guram in C. Smith. Stagnation flows of micropolar fluids with strong and weak interactions. *Comput. Math. Appl.*, 6:213–233, 1980.
- [22] M. Hriberšek in L. Škerget. Iterative methods in solving Navier-Stokes equations by the boundary element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 39:115–139, 1996.
- [23] M. Hriberšek in L. Škerget. Fast boundary-domain integral algorithm for computation of incompressible fluid flow problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 31:891–907, 1999.
- [24] M. Hriberšek in L. Škerget. Boundary domain integral method for high reynolds viscous fluid flows in complex planar geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39-41):4196–4220, 2005.
- [25] T.H. Hsu in C.K. Chen. Natural convection of micropolar fluids in a rectangular enclosure. *Int. J. Engng. Sci.*, 34(4):407–415, 1996.
- [26] T.H. Hsu, P.T. Hsu in S.Y. Tsai. Natural convection of micropolar fluids in an enclosure with heat sources. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(17):4239–4249, 1997.
- [27] T.H. Hsu in S.G. Wang. Mixed convection of micropolar fluids in a cavity:. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43:1563–1572, 2000.
- [28] S.K. Jena in M.N. Mathur. Similarity solutions for laminar free convection flow of a hermomipolar fluid past a nonisothermal flat plate. *Int. J. Engnrg. Sci.*, 19:1431–1439, 1981.
- [29] C.K. Kang in A.C. Eringen. The effect of microstructure on the rheological properties of blood. *Bulletin of mathematical biology*, 38:135–159, 1976.
- [30] G. Lukaszewicz. *Micropolar Fluids: Theory and Application*. Birkhäuser, Boston, 1999.
- [31] G. Lukaszewicz. Long time behaviour of 2d micropolar fluid flows. *Mathematical and Computer Modelling*, 34:487–509, 2001.
- [32] W. E. Olmstead in S. R. Majumdar. Fundamental ossen solution for the 2-dimensional flow of a micropolar fluid theory. *Int. J. Engng.Sci.*, 21:423–430, 1983.
-



- [33] E. Papanicolau in Y. Jaluria. Computation of turbulent flow in mixed convection in a cavity with a localized heat source. *Journal of Heat Transfer*, 117:649–658, 1995.
- [34] I. Papautsky, J. Brazzle, T. Ameel in A.B. Frazier. Laminar fluid behaviour in microchannels using micropolar fluid theory. *Sensors and actuators*, 73(1-2):101–108, 1999.
- [35] J. Peddieson. An application of the micropolar fluid model to the calculation of turbulent shear flow. *Int. J. Engrg. Sci.*, 10:23–32, 1972.
- [36] A.K. Pietal. Microchannels flow modelling with the micropolar fluid theory. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, 52(3):209–214, 2004.
- [37] A.K. Pietal, Z. Walenta in Z. Peradzynski. What are the limits of applicability of the theory of micropolar fluids for description of real fluid flow through narrow channels? *Proc. Appl. Math. Mech.*, 1:308–309, 2002.
- [38] J. Ravnik. *Metoda robnih elementov za hitrostno vrtnično formulacijo simulacije velikih vrtincev*. Doktorska disertacija, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 2006.
- [39] D.A.S. Rees in A.P. Bassom. The blasius boundary-layer flow of a micropolar fluid. *Int. J. Engng. Sci.*, 34(1):113–124, 1996.
- [40] D.C. Sanyal in A.K. Maiti. On steady and pulsatile motion of blood. *Czechoslovaj Journal of Physics*, 48(3):347–354, 1998.
- [41] J. Serrin. *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics, Encyclopedia of Physics, Vol. VIII/1*. Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.
- [42] L. Škerget. *Mehanika tekočin*. Tehniška fakulteta v Mariboru in Fakulteta za strojništvo v Ljubljani, 1994.
- [43] L. Škerget, A. Alujevič, C. A. Brebia in G. Kuhn. *Topics in Boundary Element Research*, chapter Natural and forced convection simulation using the velocity-vorticity approach, pages 48–96. Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [44] L. Škerget, M. Hriberšek in G. Kuhn. Computational fluid dynamics by boundary-domain integral method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46:1291–1311, 1999.
- [45] L. Škerget, M. Hriberšek in Z. Žunič. Natural convection flows in complex cavities by bem. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 13(5-6):720–735, 2003.
- [46] J. Trevelyan. *Boundary Elements for Engineers, Theory and Applications*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1994.
- [47] L. C. Wrobel. *The Boundary Element Method*. John Willey & Sons, LTD, 2002.
- [48] J. C. Wu in J. F. Thompson. Numerical solutions of time-dependent incompressible navier-stokes equations using an integro-differential formulation. *Comp. Fluids*, 1:197–215, 1973.
- [49] P. Wu in W.A. Little. Measurement of friction factors for the flow of gases in very fine channels used for microminiature joule-thomson refrigerators. *Cryogenics*, 5:273–277, 1983.

- 
- [50] P. Wu in W.A. Little. Measurement of the heat transfer characteristics of gas flow in fine channel heat exchangers used for microminiature refrigerators. *Cryogenics*, 8:415–419, 1984.
- [51] M. Zadavec, M. Hriberšek in L. Škerget. Micropolar fluid flow modelling using the boundary element method. In *Computational methods in multiphase flow IV*, pages 325–332, 2007.
- [52] M. Zadavec, M. Hriberšek in L. Škerget. Modeliranje tokov s teorijo mikropolarnih tekočin. In *Kuhljevi dnevi 2007, Zbornik del*, pages 249–256, 2007.
- [53] M. Zadavec, M. Hriberšek in L. Škerget. Natural convection of micropolar fluid in an enclosure with boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33:485–492, 2009.
- [54] I. Žagar. *Robno-območna integralska metoda za dinamiko tekočin laminarnega in turbulentnega toka*. Doktorska disertacija, Univerza v Mariboru, Tehniška fakulteta, Oddelek za strojništvo, 1992.

# Priloge

## A1 Ohranitev vrtilne količine

V tem poglavju bo predstavljen zakon ohranitve vrtilne količine ločeno za klasične oz. Navier-Stokesove tekočine in mikropolarne tekočine.

### A1.1 Klasične oz. Navier-Stokesove tekočine

Če pogledamo obliko enačbe zakona ohranitve gibalne količine:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \vec{v} d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho \vec{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \vec{t}_n dS, \quad (\text{A1.1})$$

kjer je  $\vec{f}$  neka zunanja ali volumska sila,  $\vec{t}_n$  pa so notranje sile oziroma normalne napetosti, in povzamemo definicijo vrtilnega navora iz mehanike za togi delec, se lahko zapiše zakon ohranitve vrtilne količine v naslednji obliki:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho (\vec{x} \times \vec{v}) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho (\vec{x} \times \vec{f}) d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \vec{x} \times \vec{t}_n dS. \quad (\text{A1.2})$$

Tako obliko ohranitvenega zakona lahko zapišemo, če predpostavimo, da vsi vrtilni momenti izvirajo iz makroskopskih sil.

Za neko zvezno tekočino, ki izpolnjuje kontinuitetno enačbo (en.(3.22)) in enačbo dinamike toka:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} + \text{div} \vec{T}, \quad (\text{A1.3})$$

lahko rečemo, da je v primeru klasične hidrodinamike napetostni tenzor simetričen in da je zakon ohranitve vrtilne količine definiran z enačbo (A1.2). Zakon ohranitve vrtilne količine lahko v primeru klasične hidrodinamike izpeljemo iz zakona mase in zakona ohranitve gibalne količine in tako v tem primeru sam zakon ohranitve vrtilne količine ne prispeva nič k dodatnemu opisu tekočine, kar bo predstavljeno v naslednjem odstavku.

Če predpostavimo, da je napetostni tenzor simetričen in upoštevamo enačbo (A1.2) in kontinuitetno enačbo v integralski obliki  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \vec{f} d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{D}{Dt} \vec{f} d\Omega$ , dobimo iz enačbe

(A1.2) sledečo enačbo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho (\vec{x} \times \vec{v}) d\Omega &= \int_{\Omega(t)} \rho \frac{D}{Dt} (\vec{x} \times \vec{v}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega(t)} \rho \left( \vec{x} \times \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho (\vec{x} \times \vec{f}) d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \vec{x} \times \vec{t}_n dS. \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

Z upoštevanjem Greenove identitete (priloga A3) zapišemo:

$$\int_{\partial\Omega(t)} \vec{x} \times \vec{t}_n dS = \int_{\Omega(t)} \left( \vec{x} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{T}) + \vec{T}_x \right) d\Omega, \quad (\text{A1.5})$$

kjer je  $\vec{\nabla} \cdot \vec{T}$  zapis za  $\text{div}\vec{T}$  in vektor  $T_{xi} = e_{ijk}T_{jk}$  predstavlja produkt permutacijskega tenzorja s tenzorjem napetosti, tako da iz enačbe (A1.4) dobimo:

$$\int_{\partial\Omega(t)} \vec{x} \times \left( \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \rho \vec{f} - \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega(t)} \vec{T}_x d\Omega. \quad (\text{A1.6})$$

Leva stran enačbe (A1.6) zaradi zakona ohranitve gibalne količine (Cauchy-jeva enačba) odpade (enaka je nič), medtem ko desna stran odpade za neomejeni volumen, in je  $\vec{T}_x = 0$ . Komponente vektorja  $\vec{T}_x$  so  $T_{23} - T_{32}$ ,  $T_{31} - T_{13}$  in  $T_{12} - T_{21}$ , kar privede do tega, da je vektor  $\vec{T}$  simetričen  $T_{ij} = T_{ji}$ .

## A1.2 Polarne tekočine

V primeru polarnih tekočin moramo vpeljati vrtilni moment volumna na enoto mase glede na volumske sile  $\vec{f}$  in druge napetosti  $\vec{c}_n$ , glede na normalne napetosti  $\vec{t}_n$ . Vrtilna količina mora zajemati moment gibalne količine  $\rho \vec{x} \times \vec{v}$ , tako imenovano zunanjo vrtilno količino, in notranjo vrtilno količino  $\rho \vec{l}$ . Enačba zakona ohranitve skupne vrtilne količine je enaka:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho (\vec{l} + \vec{x} \times \vec{v}) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho (\vec{g} + \vec{x} \times \vec{f}) d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} (\vec{c}_n + \vec{x} \times \vec{t}_n) dS. \quad (\text{A1.7})$$

V enačbi (A1.7) lahko  $\vec{t}_n$  zapišemo kot produkt normale in tenzorja normalnih napetosti  $\vec{n} \cdot \vec{T}$ , prav tako pa lahko zapišemo tudi, da je  $\vec{c}_n$  enak  $\vec{n} \cdot \vec{C}$ , pri čemer je  $\vec{C}$  tenzor vezanih napetosti napetosti:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho (\vec{l} + \vec{x} \times \vec{v}) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \left( \rho \vec{g} + \rho \vec{x} \times \vec{f} + \nabla \cdot \vec{C} + \vec{x} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{T}) + \vec{T}_x \right) d\Omega. \quad (\text{A1.8})$$

Enačba (A1.8) predstavlja integralsko obliko enačbe skupne vrtilne količine, ki pa jo lahko preoblikujemo v parcialno diferencialno enačbo, ki ima sledečo obliko:

$$\rho \frac{D}{Dt} (\vec{l} + \vec{x} \times \vec{v}) = \rho \vec{g} + \rho \vec{x} \times \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{C} + \vec{x} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{T}) + \vec{T}_x. \quad (\text{A1.9})$$

Če zapišemo vektorski produkt Cauchyjeva enačba z  $\vec{x}$  dobimo sledečo enačbo:

$$\rho \left( \vec{x} \times \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) = \rho \frac{D}{Dt} (\vec{x} \times \vec{v}) = \rho \vec{x} \times \vec{f} + \vec{x} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{T}), \quad (\text{A1.10})$$

ki jo odštejemo od enačbe (A1.9) in dobimo končno enačbo:

$$\rho \frac{D\vec{l}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{C} + \vec{T}_x. \quad (\text{A1.11})$$

Iz enačb (A1.10) in (A1.9), ter spodnje relacije:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{x} \times \vec{T}) = \vec{x} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{T}) + \vec{T}_x, \quad (\text{A1.12})$$

zaključimo, da je

$$\rho \frac{D}{Dt} (\vec{x} \times \vec{v}) = \rho \vec{x} \times \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{x} \times \vec{T}) - \vec{T}_x, \quad (\text{A1.13})$$

in

$$\rho \frac{D}{Dt} (\vec{l} + \vec{x} \times \vec{v}) = \rho \vec{g} + \rho \vec{x} \times \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{x} \times \vec{T} + \vec{C}). \quad (\text{A1.14})$$

Enačba (A1.14) predstavlja zakon ohranitve skupne vrtilne količine v diferencialni obliki. Če gledamo enačbi (A1.11) in (A1.16), vidimo, da se niti notranji niti zunanji vrtilni moment ne ohranjata ter da obstaja izguba zunanjega vrtilnega momenta (en.(A1.16)), kar povzroča povečevanje oziroma vzbujanje notranjega vrtilnega momenta (en.(A1.11)).

Pravilni oziroma fizikalno opravičljiv zapis vrtilnega navora na enoto mase je zapis z vektorskimi komponentami  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), kjer je  $l_i = I_{ik}\omega_k$ . Za izotropne tekočine, katerih predpostavka velja tudi za polarne tekočine in za to predpostavko je:

$$I_{ik} = I\delta_{ik}, \quad (\text{A1.15})$$

kjer je  $I$  skalarna veličina in predstavlja koeficient mikrovztrajnosti. S predpostavko izotropnosti lahko sedaj zapišemo končno obliko enačbe ohranitve vrtilne količine (en.(A1.11)) za izotropno polarno tekočino:

$$\rho I \frac{D\vec{N}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{C} + \vec{T}_x. \quad (\text{A1.16})$$

## A2 Konstitutivne enačbe mikrotekočin

Konstitutivne enačbe mikrotekočin so v splošni obliki podane in izpeljane v delih Eringena [15] in [16]. Enačbe so podane kot enačbe za tenzor napetosti, povprečni tenzor mikro napetosti in moment napetosti prvega reda ( $T_{ij}$ ,  $C_{ij}$  in  $\lambda_{ijk}$ ), ki pa so odvisne od naslednjih objektivnih spremenljivk:

$$d_{ij} \equiv \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (\text{A2.1})$$

$$b_{ij} \equiv v_{j,i} + N_{ij}, \quad (\text{A2.2})$$

$$a_{ijk} \equiv N_{ij,k}, \quad (\text{A2.3})$$

in gostote  $\rho$ , ter mikrovztrajnosti  $i$ . V zgornjih enačbah (A2.1-A2.3) predstavlja  $\vec{d}$  deformacijski tenzor,  $\vec{b}$  mikrodeformacijski tenzor drugega reda in  $\vec{a}$  predstavlja vrtilni gradient. Obedve novi spremenljivki zaradi rotacije  $\vec{b}$  in  $\vec{a}$  se transformirata kot absolutna tenzorja v referenčni koordinatni sistem togega gibanja delca, s čimer sta tako obadva tenzorja nato uporabna kot samostojni konstitutivni spremenljivki.

V nadaljevanju so predstavljene enačbe linearne konstitutivne teorije izotropnih mikrotekočin ( $i_{km} = i\delta_{km}$ ), medtem ko so za nelinearne primere enačbe podane v [15]:

$$\vec{T} = [-p + \lambda \text{tr} \vec{d} + \lambda_0 \text{tr} (\vec{b} - \vec{d})] I + 2\mu \vec{d} + 2\mu_0 (\vec{b} - \vec{d}) + 2\mu_1 (\vec{b}^T - \vec{d}), \quad (\text{A2.4})$$

$$\vec{s} = [-p + \lambda \text{tr} \vec{d} + \eta_0 \text{tr} (\vec{b} - \vec{d})] I + 2\mu \vec{d} + \zeta_1 (\vec{b} - \vec{b}^T - 2\vec{d}), \quad (\text{A2.5})$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ijk} = & (\gamma_1 a_{krr} + \gamma_2 a_{rkr} + \gamma_3 a_{rrk}) \delta_{ij} + (\gamma_4 a_{jrr} + \gamma_5 a_{rjr} + \gamma_6 a_{rrj}) \delta_{ik} \\ & + (\gamma_7 a_{irr} + \gamma_8 a_{rir} + \gamma_9 a_{rri}) \delta_{jk} + \gamma_{10} a_{ijk} + \gamma_{11} a_{ikj} + \gamma_{12} a_{jik} + \gamma_{13} a_{kij} + \gamma_{14} a_{jki} + \gamma_{15} a_{kji}, \end{aligned} \quad (\text{A2.6})$$

kjer je  $I$  enotski tenzor, ter  $\lambda$ ,  $\lambda_0$ ,  $\mu$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_1$  in  $\gamma_1$  do  $\gamma_{15}$  so koeficienti viskoznosti. V enačbah je  $\text{tr}$  oznaka za sled kvadratne matrike, ki je enaka vsoti njenih diagonalnih vrednosti in eksponent  $T$  predstavlja transponiranost matrike:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{tr} b_{ij} \equiv b_{ii}, \quad b_{ij}^T \equiv b_{jk}. \quad (\text{A2.7})$$

Pri uporabi zgoraj podanih enačb za modeliranje mikrotekočin nastopa v enačbah precej spremenljivk in koeficientov, katere je potrebno definirati, pri čemer se lahko v nadalje uporabi poenostavljen model mikropolarnih tekočin, znotraj katerega določene spremenljivke in konstante odpadejo in tako postane sistem enačb lažje in enostavnejše rešljiv za različne inženirske sisteme.

## A3 Gaussov in Greenova stavka

Pri izpeljavi robno območnih integralskih enačb se posamezni integrali z upoštevanjem Greenovih identitet oziroma uporabo Gaussovega divergenčnega stavka ustrezno preoblikujejo, kar privede do končne uporabne oblike robno območnih enačb. V tem dodatku so tako podani Gaussov divergenčni stavek ter prva in druga Greenova identiteta, ki so tudi uporabljene pri izpeljavah v tem delu.

### A3.1 Gaussov divergenčni stavek

Gaussov divergenčni stavek za vektorsko polje  $\vec{F}$ , ki je definirano v območju  $\Omega$  z robom  $\Gamma$  pravi, da je skupen pretok vektorskega polja  $\vec{F}$  skozi zaprt rob  $\Gamma$  enak volumskemu integralu po območju  $\Omega$  divergence tega polja, kar se zapiše kot:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\Gamma. \quad (\text{A3.1})$$

Gaussov stavek se lahko zapiše tudi za poljubno skalarno polje  $u$  kot:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} u d\Omega = \int_{\Gamma} u \cdot \vec{n} d\Gamma. \quad (\text{A3.2})$$

Med številnimi izpeljankami Gaussovega divergenčnega stavka je pogosto uporabljena naslednja:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \times \vec{n} d\Gamma = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \times \vec{F} d\Omega. \quad (\text{A3.3})$$

### A3.2 1. Greenova identiteta

Naj bosta  $u$  in  $u^*$  skalarni polji definirani v območju  $\Omega$ , pri čemer naj bo vektorsko polje  $\vec{F}$  definirano kot  $\vec{F} = u\vec{\nabla}u^*$ . Z upoštevanjem Gaussovega stavka A3.1 sledi:

$$\int_{\Gamma} u\vec{\nabla}u^* d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla}u^*) d\Omega. \quad (\text{A3.4})$$

Če se izraz pod integralom na desni stran enačbe odvaža in zapiše kot vsota integralov sledi 1. Greenova identiteta:

$$\int_{\Gamma} u\vec{\nabla}u^* d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}u^* d\Omega + \int_{\Omega} u\nabla^2u^* d\Omega. \quad (\text{A3.5})$$

### A3.3 2. Greenova identiteta

Za izpeljavo 2. Greenove identitete se najprej v izpeljanem izrazu A3.5 zamenjata člena  $u$  in  $u^*$ :

$$\int_{\Gamma} u^*\vec{\nabla}u d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{\nabla}u^* \cdot \vec{\nabla}u d\Omega + \int_{\Omega} u^*\nabla^2u d\Omega. \quad (\text{A3.6})$$

Dobljen izraz se odšteje od izraza A3.5 od koder sledi 2. Greenova identiteta:

$$\int_{\Gamma} (u\vec{\nabla}u^* - u^*\vec{\nabla}u) d\Gamma = \int_{\Omega} (u \cdot \vec{\nabla}^2u^* - u^* \cdot \vec{\nabla}^2u) d\Omega. \quad (\text{A3.7})$$

## A4 Interpolacijske funkcije

Za reševanje izpeljanih integralskih enačb, ki so za potrebe reševanja pretvorjene v diskretno obliko, je potrebno računsko območje razdeliti na posamezne robne elemente  $\Gamma_e$  in notranje celice  $\Omega_c$ . Vrednost poljubne veličine  $f$  se računa v določenih točkah znotraj posameznega robnega elementa oziroma notranje celice  $f_i$ . Območne vrednosti spremenljivk  $f_i$  se izrazijo s pomočjo interpolacije in uporabe ustreznih interpolacijskih polinomov  $\Phi_i$ , pri čemer se vrednost v poljubni točki elementa oziroma celice zapiše kot:

$$f(\eta, \xi) = \sum \Phi_i(\eta, \xi) f_i, \quad (\text{A4.1})$$

kjer sta  $\eta$  in  $\xi$  koordinati lokalnega koordinatnega sistema v elementu oziroma celici in zavzemata vrednosti med  $[-1, 1]$ , kar je prikazano na sliki A4.1, kjer so s točkami označena mesta, kjer so podane znane vrednosti veličine  $f_i$ . Na sliki A4.1 so prikazani konstantni, linearni in parabolni robni elementi. Interpolacijski polinomi za vse tri tipe robnih



Slika A4.1: Konstantni, linearni in parabolni robni element.

elementov so zapisani v sledeči obliki:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 1; & (\text{A4.2}) \\ \Phi_1 &= \frac{1-\eta}{2}, \quad \Phi_2 = \frac{1+\eta}{2}; \\ \Phi_1 &= \frac{1}{2}\eta(\eta-1), \quad \Phi_2 = (\eta-1)(\eta+1), \quad \Phi_3 = \frac{1}{2}\eta(\eta+1). \end{aligned}$$

Interpolacijski polinomi za nezvezen tri točkovni kvadratni robni element podan na sliki A4.2 se zapišejo v sledeči obliki:

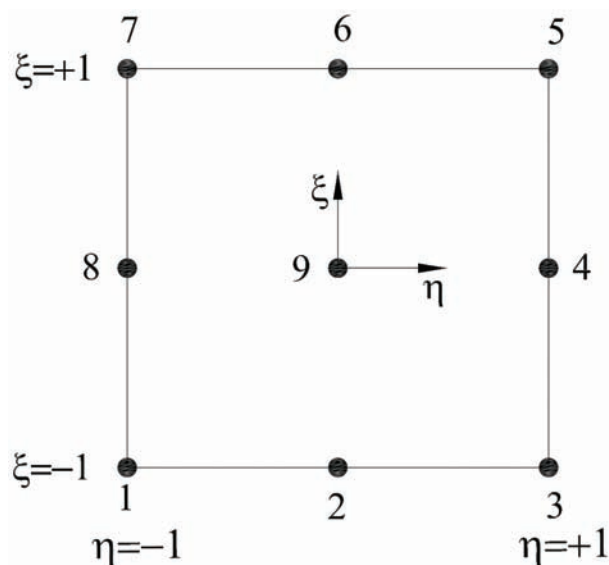
$$\Phi_1 = \frac{1}{9}(-6\eta + 8\eta^2), \quad \Phi_2 = \frac{1}{9}(9 - 16\eta^2), \quad \Phi_3 = \frac{1}{9}(6\eta + 8\eta^2). \quad (\text{A4.3})$$



Slika A4.2: Nezvezen tri točkovni kvadratni robni element.

Podobno kot smo zapisali interpolacijske polinome za robne elemente, moramo zapisati interpolacijske polinome za območne elemente  $\phi_i$ . Na sliki (A4.3) je prikazana skica za





Slika A4.3: Lagrangejeva notranja celica.

Lagrangejevo notranjo celico, kjer so podobno kot na sliki A4.1 s krogci označene točke, v katerih je podana vrednost veličine  $f_i$ . Interpolacijske funkcije, kot je prikazano na sliki (A4.3), zapišemo v sledeči obliki:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{4}\eta(\eta - 1)\xi(\xi - 1), \\
 \phi_2 &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)\xi(\xi - 1), \\
 \phi_3 &= \frac{1}{4}\eta(1 + \eta)\xi(\xi - 1), \\
 \phi_4 &= \frac{1}{2}\eta(1 + \eta)(1 - \xi^2), \\
 \phi_5 &= \frac{1}{4}\eta(1 + \eta)\xi(1 + \xi), \\
 \phi_6 &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)\xi(1 + \xi), \\
 \phi_7 &= \frac{1}{4}\eta(\eta - 1)\xi(1 + \xi), \\
 \phi_8 &= \frac{1}{2}\eta(\eta - 1)(1 - \xi^2), \\
 \phi_9 &= (1 - \eta^2)(1 - \xi^2).
 \end{aligned}
 \tag{A4.4}$$



# Dodatki

## B1 Življenjepis

|                 |                |   |
|-----------------|----------------|---|
| Ime in priimek: | Matej Zadavec  |   |
| Datum rojstva:  | 20. april 1979 | v Murski Soboti   |
| Šolanje:        | 1986 - 1994    | Osnovna šola Turnišče   |
|                 | 1994 - 1998    | Dvojezična srednja šola Lendava<br>program: Strojni tehnik  |
|                 | 1998 - 2004    | Univerza v Mariboru,<br>Fakulteta za Strojništvo,<br>smer: Energetsko in procesno strojništvo                   |
|                 | 2004 →         | Univerza v Mariboru,<br>Fakulteta za strojništvo<br>smer: Računalniško modeliranje<br>toplotno tokovnih pojavov |
| Zaposlitev:     | 2004 →         | Univerza v Mariboru,<br>Fakulteta za strojništvo  |

Matej Zadavec, rojen 20.04.1979 v Murski Soboti, sem obiskoval Osnovno šolo v Turnišču. Nadaljevanje izobraževanja je potekalo na Dvojezični srednji šoli v Lendavi, v programu Strojni tehnik. V tem času sem pridobil tudi Zoisovo štipendijo, ki sem jo obdržal vse do zaključka dodiplomskega študija na Univerzi v Mariboru, Fakulteti za strojništvo. Dodiplomski študij sem zaključil avgusta leta 2004 z zagovorom diplomske naloge z naslovom Numerična analiza tokovnih razmer v mešalni posodi, ki sem jo izdelal pod mentorstvom prof. dr. Matjaža Hriberška in somentorstvom prof. dr. Leopolda Škergeta. Takoj po končanem dodiplomskem študiju sem se zaposlil na Univerzi v Mariboru, Fakulteti za strojništvo kot mladi raziskovalec pri prof. dr. Matjažu Hriberšku. Tekom zaposlitve kot mladi raziskovalec sem opravil obveznosti na podiplomskem študiju in se leta 2006 po predstavitvi svojega dela na Katedri za energetsko, procesno in okoljsko inženirstvo vpisal na direktni doktorski študij.

## B2 Bibliografija avtorja

### ČLANKI IN DRUGI SESTAVNI DELI

#### 1.01 Izvirni znanstveni članek

1. ZADRAVEC, Matej, BAŠIČ, Sani, HRIBERŠEK, Matjaž. The influence of rotating domain size in a rotating frame of reference approach for simulation of rotating impeller in a mixing vessel. *Journal of engineering science and technology*, 2007, vol. 2, no. 2, str. 126-138. [COBISS.SI-ID 11988758]
2. ZADRAVEC, Matej, HRIBERŠEK, Matjaž, ŠKERGET, Leopold. Natural convection of micropolar fluid in an enclosure with Boundary Element Method. *Eng. anal. bound. elem.* [Print ed.], Apr. 2009, vol. 33, no. 4, str. 485-492. <http://dx.doi.org/10.1016/j.enganabound.2008.08.013>. [COBISS.SI – ID13040150]

#### 1.04 Strokovni članek

3. HRIBERŠEK, Matjaž, ZADRAVEC, Matej. Numerično modeliranje mešanja v posodi z Rushtonovim mešalom = Numerical modeling of mixing in a vessel with a Rushton impeller. *Stroj. vestn.*, 2005, letn. 51, št. 12, str. 798-809. [COBISS.SI-ID 8783131]

#### 1.08 Objavljeni znanstveni prispevek na konferenci

4. ZADRAVEC, Matej, HRIBERŠEK, Matjaž. Primerjava turbulentnih modelov pri numeričnem preračunu mešalne posode z Rushtonovim mešalom. V: KORELC, Jože (ur.), ZUPAN, Dejan (ur.). Kuhljevi dnevi 2005, Podčetrtek, 22.-23. september 2005. *Zbornik del.* Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko, 2005, str. 326-334. [COBISS.SI-ID 9912854]
5. ZADRAVEC, Matej, BAŠIČ, Sani, HRIBERŠEK, Matjaž. Evaluation of the effect of different size of rotating impeller region in CFD. V: MAGELLI, Franco (ur.), BALDI, Giancarlo (ur.), BRUCATO, Alberto (ur.). *Proceedings of the 12th European Conference on Mixing, Bologna, Italy, 27-30 June, 2006.* Milano, Italy: AIDIC Servizi S.r.l., cop. 2006,
6. ZADRAVEC, Matej, POŽARNIK, Matej, ŽUNIČ, Zoran, MARN, Jure, HRIBERŠEK, Matjaž. Numerično modeliranje dvofaznega dvosestavinskega toka plin-trdni delci. V: KORELC, Jože (ur.), ZUPAN, Dejan (ur.). Kuhljevi dnevi 2006, Lipica, 21.-22. september 2006. *Zbornik del.* Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko, 2006, str. 287-294. [COBISS.SI-ID 10701334]
7. ZADRAVEC, Matej, HRIBERŠEK, Matjaž, ŠKERGET, Leopold. Micropolar fluid flow modelling using the boundary element method. V: MAMMOLI, A.A. (ur.), BREBBIA, Carlos Alberto (ur.). Fourth International Conference on Computational Methods in Multiphase Flow, 12-14 June, 2007, Bologna, Italy. *Computational methods in multiphase flow IV*, (WIT Transactions on engineering sciences, Vol. 56). Southampton; Boston: Wit Press, cop. 2007, str. 325-332. [COBISS.SI-ID 11406358]
8. ZADRAVEC, Matej, HRIBERŠEK, Matjaž, ŠKERGET, Leopold. Modeliranje tokov s teorijo mikropolarnih tekočin. V: KORELC, Jože (ur.), ZUPAN, Dejan (ur.). Kuhljevi dnevi 2007, Snovik, 20.-21. september 2007. *Zbornik del.* Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko, 2007, str. 249-256. [COBISS.SI-ID 11714326]
9. ZADRAVEC, Matej, HRIBERŠEK, Matjaž, ŠKERGET, Leopold. Boundary element method for micropolar fluid flow in a channel. V: ŠKERGET, Leopold (ur.), BREBBIA, Carlos Alberto (ur.). *Boundary elements and other mesh reduction methods XXX*, (WIT transactions on modelling and simulation, v. 47). Southampton, UK; Boston: WIT press, cop. 2008, str. 33-42. [COBISS.SI-ID 12396310]

10. ZADRAVEC, Matej, HRIBERŠEK, Matjaž, ŠKERGET, Leopold. Vpliv lastnosti mikropolarnih tekočin na prenos toplote pri naravni konvekciji. V: BOLTEŽAR, Miha (ur.), SLAVIČ, Janko (ur.). Kuhljevi dnevi 2008, Cerklje na Gorenjskem, 25.-26. sept. 2008. *Zbornik del.* Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko, 2008, str. 229-236. [COBISS.SI-ID 12631574]

### 1.12 Objavljeni povzetek znanstvenega prispevka na konferenci

11. ZADRAVEC, Matej, HRIBERŠEK, Matjaž, ŠKERGET, Leopold. Boundary element method for micropolar fluid flow modeling in an enclosure. V: SCHREFLER, Bernhard (ur.), PEREGO, Umberto (ur.). *8th World Congress on Computational Mechanics WCCM8 [and] 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2008, Venice, Italy, 30 June-4 July 2008.* Barcelona: CIMNE - International Center for Numerical Methods in Engineering, cop. 2008, 2 str. [COBISS.SI-ID 12397846]

## MONOGRAFIJE IN DRUGA ZAKLJUČENA DELA

### 2.11 Diplomsko delo

12. ZADRAVEC, Matej. *Numerična analiza tokovnih razmer v mešalni posodi : diplomsko delo univerzitetnega študijskega programa*, (Fakulteta za strojništvo, Diplomski dela univerzitetnega študija). Maribor: [M. Zadavec], 2004. XIII, 72 f., ilustr. [COBISS.SI-ID 9259542]

### 2.13 Elaborat, predstudija, študija

13. HRIBERŠEK, Matjaž, BAŠIČ, Sani, ZADRAVEC, Matej. *Povečanje učinkovitosti pralnika iz-pustnega zraka v obratu Tanin Sevnica : projektna naloga.* Maribor: Fakulteta za strojništvo, 2007. 70 f., ilustr. [COBISS.SI-ID 11488022]

## B3 Razširjeni povzetek v angleškem jeziku

### Extended abstract in the English language

This Appendix is the extended English summary of the doctoral dissertation Numerical modelling of micropolar fluid flow with boundary element method, presented to the Faculty of Mechanical Engineering, University of Maribor by Matej Zadavec.

#### Chapter 1: Introduction

Flows in the nature are very complex and express different behaviour under different conditions. Therefore we are interested to use proper numerical models to describe physical behaviour of such fluid flows. The micropolar fluid flow theory enables accurate computation of flows in a scale, where questions arise on the accuracy of the Navier-Stokes equation.

In the doctoral dissertation, the micropolar fluid flow theory is incorporated into the framework of velocity-vorticity formulation of Navier-Stokes equations. Among different approximation methods for solving problems of fluid flow boundary element method is increasingly gaining attention. Here, we will focus on the development of boundary element method for velocity vorticity formulation of Navier-Stokes equations ([44], [45], [24]), and show how to incorporate the micropolar fluid theory into the BEM framework. Governing equations are derived in differential, integral as well as discretised form, resulting from the application of boundary element method.

In section 1.2 literature review is presented an extended on the field dealing with the micropolar fluid flows.

#### Chapter 2: Micropolar fluids

The second chapter begins on page 11 and is presents the historic development of a micropolar fluid flow theory and its applicability. In the recent years this theory is gaining interest of many researchers. One of the reasons is progress in a micromachining technology and questioning of scientists whether flows on microscale differ from flows on macroscale, described by the Navier-Stokes equations. Various effects acting on the fluid flows in micro channels are presented in the figure 2.1. One of the possible answers is the micropolar fluid theory.

Micropolar fluids are a subclass of microfluids (figure 2.3), introduced by Eringen [16]. A simple microfluid is by Eringen's definition a fluid medium whose properties and behaviour are influenced by the local motions of the material particles contained in each of its volume elements. On figures 2.4 and 2.6 deformation and micro deformation of microelement are presented. A microfluid is isotropic viscous fluid which possesses local inertia. Because of a complex formulation for a general microfluid this class of fluids is divided into subclasses, which allow a simplified description of the effects arising from particle micro motions.

Physically, micropolar fluids can be described as fluids consisting of rigid, randomly oriented particles suspended in a viscous medium, where the deformation of the particles is ignored ([16], [19]), but the local rotation, which affects the macroscopic fluid flow, is not.

### Chapter 3: Mathematical formulation of micropolar fluids flow

The attractiveness and power of the micropolar fluid flow theory come from the fact that it is both a significant and simple generalization of the classical Navier-Stokes theory. In the theory only one additional transport equation and one additional term in existing momentum equation are added. This additional equation represents the conservation of the angular momentum.

In subsection 3.2 the system of conservation laws for isotropic polar fluids is presented with conservation laws of mass, momentum, angular momentum and energy, respectively (eq. (3.1)-(3.4)). To obtain the model of micropolar fluids we specify the stress tensor  $\vec{T}$  and the couple stress tensor  $\vec{C}$ , that is to define the constitutive equations (subsection 3.2.2). We define a micropolar fluid as a polar isotropic fluid with stress tensor  $\vec{T}$  and the couple stress tensor  $\vec{C}$  in equation (3.18) and equation (3.20), respectively. In this subsection all the new model parameters, i.e. viscosities and coefficients, are explained in detail and also the analogy and comparison to classical Navier-Stokes constitutive equation is commented.

In the subsection 3.2.3 the final form of conservation equation for viscous, incompressible and laminar micropolar fluid flow (eq.(3.27)-(3.30)) is presented respectively for mass, momentum, microrotation and temperature conservation. While several new viscosities are introduced, if one of them, namely the microrotation viscosity  $k_v$ , becomes zero, the conservation law of the momentum becomes independent of the influence of the fluid microstructure. Thus, the magnitude of the microrotation viscosity coefficient allows us to measure in a certain sense, the deviation of flows of micropolar fluids from that of the classical Navier-Stokes model.

Incorporation of micropolar fluid flow theory in the framework of velocity vorticity formulation is presented in section 3.3. To incorporate micropolar fluid flow theory into the framework of velocity-vorticity formulation of Navier-Stokes equations and to apply the boundary element approximation method, we must first split the dynamics of the flow into its kinematic and kinetic part. This is done by the use of derived vector vorticity field function  $\vec{\omega}$ , obtained as a curl of the compatibility velocity field  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ , which is solenoidal vector function by the definition  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$ . By applying the curl operator to vorticity and using the mass conservation equation for the incompressible fluid we get elliptic Poisson equation for the velocity vector, which has the same form as in existing numerical algorithm [44], given for planar 2D flows by equation (3.34). Subsection 3.3.2 presents conservation equations for kinetic part of the flow. To compute the kinetic part of the flow we apply the curl operator to the momentum conservation equation (3.28) and considering that vorticity, velocity and microrotation flow field are solenoidal and due

to the vorticity and microrotation definition and mass conservation equation, it follows that the vorticity, microrotation and temperature kinetic equations for two dimensional planar flows can be represented with equations (3.36)-(3.38), respectively. With use of the velocity-vorticity formulation the pressure term is eliminated from momentum conservation equation. In order to compute pressure distribution, we derive in the subsection 4.1.3, the equation for pressure, which is obtained from equation (3.28). The final form of pressure equation, which has a form of elliptic Poisson equation is given by equation (3.40).

To close the presented set of partial differential equations the corresponding boundary conditions are given in section 3.4 for velocity (eq.(3.41)-(3.43)), microrotation (eq.(3.44)-(3.46)) and temperature (eq.(3.48)-(3.50)). We included a general type of the boundary condition for the microrotation on the no slip walls for the two dimensional planar problem as proposed by Rees and Bassom [39], which is given with equation (3.47), where parameter  $n_{wall}$  is indicating type of the micropolar fluid flow. For modelling of weakly concentrated suspensions flows Jenna and Mathur [28] proposed  $n_{wall} = 1/2$ , Peddieson [35] proposed  $n_{wall} = 1$  which indicates turbulent shear flows. With  $n_{wall} = 0$  we classify micropolar fluid flow as strong concentrated suspension flow, as proposed by Guram and Smith [21].

Through the dissertation work additional parameters which define micropolar fluid flow were introduced and they are described in the section 3.5. Additional coefficients which appear in comparison to the classical Navier-Stokes model coefficients are microinertia  $j$ , microrotation viscosity coefficient  $k_v$  and spin gradient viscosity coefficient  $\gamma_v$ , which are assumed constant values. Because of the micro isotropy (Eringen [19]), microinertia was defined as a square of external characteristic length  $j = a^2$ , as stated by the Rees and Bassom [39]. It is clear that  $N$  is representing the microrotation of the microstructure of fluid media in the flow field. It is possible that in some cases the microstructure effects become negligible and the flow behaves like a regular viscous fluid. Therefore, if we demand the  $N$  be a possible solution, then this is only possible if the spin gradient viscosity coefficient  $\gamma_v$  satisfies the equation 3.54, which gives the relationship between the coefficients of dynamic viscosity, microrotation viscosity coefficient and microinertia. In computed examples we used additional parameter  $\lambda$ , which presents relation between microrotation viscosity coefficient  $k_v$  and spin gradient viscosity coefficient  $\gamma_v$  (eq.(3.55)). An important observation is that micropolar fluid mechanics introduces an internal characteristic length, defined by equation (3.56), presenting the reciprocal value of term presented in square brackets of equation (3.55). This internal characteristic length is not present in the classical Navier-Stokes fluid mechanics. When the ratio of the internal characteristic length to the external characteristic length vanishes (eq.(3.57)), the results of the classical Navier-Stokes fluid mechanics will differ significantly. Another parameter, used in examples given in chapter 5 is micropolar material parameter, which represents the ratio between microrotation viscosity coefficient  $k_v$  and dynamic viscosity coefficient  $\mu_v$  (eq.(3.58)).



## Chapter 4: Numerical method

Chapter 4 is divided into three sections in which the derived partial differential equations of micropolar fluid flow incorporated into velocity vorticity formulation are written in integral (section 4.1) and discretised form (section 4.2), and at end the final numerical algorithm is presented (section 4.3).

The advantage of the Boundary Domain Integral Method, originating from Boundary Element Method, lies in the application of Green's fundamental solutions as particular weighting functions. Different conservation models can be written with an appropriate selection of a linear differential operator  $L[u]$  given by equation (4.1), where the operator  $L[u]$  can be either elliptic or parabolic,  $u[r_j, t]$  is an arbitrary field function, and the nonhomogenous term  $b[r_j, t]$  is applied for non-linear transport effects or pseudo body forces.

The integral representation of flow kinematics is derived in subsection 4.1.1 from the elliptic Poisson partial differential equation, resulting in equation (4.15), where  $u^*$  is presenting elliptic fundamental solution of Laplace equation ( $u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$  for 2D flows),  $c(\xi)$  is geometry coefficient dependent on the position of the source point  $\xi$ .

In subsection 4.1.2 the kinetic part of the flow is presented in the integral form of conservation equation for vorticity, microrotation and temperature. Integral representation based on diffusion-convection fundamental solution for flow vorticity, microrotation and temperature are derived. The nonhomogenous velocity field must be decomposed into the constant and a variable or perturbed part. A general form of the diffusion-convective equation with first order chemical reaction term is given by equation 4.16, where  $a_o$  and  $c_o$  are constant transport material properties,  $\beta$  is the reaction rate constant, while  $I_o$  stands for known source term. For accumulation term the first order Euler scheme is used  $\partial u / \partial t \approx (u_F - u_{F-1}) / \Delta t$ , where the subscript  $F$  is indicating variable  $u$  in current time step and subscript  $F - 1$  in previous time step and  $\Delta t$  is the time step. In equation 4.17 parameter  $\kappa$  appears, defined as a sum of time increment parameter from accumulation term discretisation and  $\beta$  which accounts for other reaction terms (eq.(4.18)). With fundamental solution (eq.(4.21) for 2D flows), which includes the parameter  $\varsigma$ , defined by equation (4.23) and the use of Green theorems, given (appendix A3), the final boundary domain integral equation is presented by equation (4.24). Accounting for the pseudo source term  $b$  (eq.(4.25)) in equation (4.24) and applying the Gauss theorem to the domain integral of this pseudo body source term, which includes the convection for the perturbed velocity field only, source term and initial conditions from accumulation term discretisation, we get the final general form of boundary domain integral equation for flow kinetics, presented by equation (4.26). Coefficients  $a_o$ ,  $c_o$ ,  $\beta$  and  $I_o$  included in this final form of integral equations, present different constants for each kinetic variable, and are summarized in the table 4.1. After that the conservation equation of vorticity, microrotation and temperature are given in integral form for laminar planar flow of viscous incompressible micropolar fluid with equations (4.27), (4.28) and (4.29), respectively. The subsection 4.1.3 presents, with analogy to the derivation of kinematic equation integral

form, the integral form for pressure equation, resulting in equation (4.36).

Discretisation in integral forms of equation for velocity (eq.(4.15)), vorticity (eq.(4.27)), microrotation (eq.(4.28)), temperature (eq.(4.29)) and pressure (eq.(4.36)) is presented in section 4.2. For the discretisation the boundary must be decomposed into the boundary elements and domain must be decomposed into domain cells as presented in figure 4.1. The subdomain technique is used for flow kinetics, with one subdomain consulting of four boundary elements and one internal cell. The velocity, vorticity, microrotation, temperature and pressure field functions and their derivatives are approximated by the use of interpolation functions given in appendix A4. The final discretised equation for flow kinematic is given with equation (4.45), vorticity with equation (4.55), microrotation with equation (4.62), temperature with equation (4.69) and pressure with equation (4.76).

The final section in this chapter, section 4.3, describes the new numerical computational algorithm. The derived integral equations contain several new terms, compared with the basic approach for viscous fluid flows, which have been included into the existing numerical scheme. We solve the set of equation for the field functions (velocity, vorticity, microrotation and temperature). The boundary conditions can be of Dirichlet or Neumann type for velocity, microrotation and temperature fields, but the boundary vorticity values are unknowns. In each iteration of the nonlinear loop we first calculate boundary vorticity values by solving the kinematics equation using single-domain BEM approach. The flow kinematics equation is solved again by the sub-domain BEM for domain velocities taking into account the newly calculated boundary vorticity values. The domain vorticity values are obtained by solving the vorticity transport equation using sub-domain BEM. The domain microrotation values are obtained by solving the microrotation transport equation using sub-domain BEM. Finally the velocity field is used to calculate domain temperature values by solving the energy equation by sub-domain BEM and calculating new microrotation boundary conditions. The extended BEM algorithm is presented with a flowchart scheme in figure 4.3.

## Chapter 5: Results of simulations

The development of numerical algorithms requires several numerical simulations of micropolar fluid flows to test the numerical scheme. Therefore, the chapter 5 presents three computed numerical test cases.

The first numerical example (section 5.1) is the case of natural convection in a square cavity, which is one of the benchmark test cases in CFD. We've chosen the case due to available comparison with results of pure Newtonian fluids and results of several other researchers, which adopted the micropolar fluid theory in their physical models. We performed mesh sensitivity tests with  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  and  $60 \times 60$  sub-domains. Only the mesh  $10 \times 10$ , was not able to produce converged results at higher Rayleigh number values, therefore it was not included in comparison of calculated Nusselt number values, presented in table 5.1. The meshes were refined in the vicinity of solid walls (refinement factor was 8) in order to capture the thinning of the boundary layer with increasing tem-

perature differences across the cavity. Since the  $40 \times 40$  sub-domains mesh gave very accurate results, it was chosen for the rest of computed test cases. At the solid walls the no slip boundary conditions was imposed, i.e. the fluid had zero velocity relative to the boundary (fig. 5.1). The left wall of the cavity was set as hot with  $T_H$  and the right as cold with  $T_C$ . Parameter  $n_{wall}$ , which defines the microrotation boundary conditions on the walls, was chosen as  $n_{wall} = 1/2$  and therefore microrotation was equal to the angular velocity at the rigid boundaries. The effect of the microstructure is negligible in the neighborhood of the wall since the suspended particles cannot get closer to the wall than their radius is. In the neighborhood of the wall, rotation of the particles depends only on the fluid shear, so the microrotation vector must be equal to the angular velocity. The initial velocity, microrotation and temperature fields were set to zero. Microinertia was defined as a square of the length scale  $j = L^2$ , as stated by the Rees and Bassom [39]. Spin gradient viscosity coefficient  $\gamma_v$  was taken in the form proposed by the Ahmadi [1], given by equation (5.2). Calculations were performed for dimensionless Prandtl number  $Pr = 0,71$ . The heat transfer within the fluid can be characterized by the Rayleigh number value ( $Ra$ ). Calculations were performed for a set of different values of Rayleigh numbers  $Ra = 10^3; 10^4; 10^5; 10^6$  and  $10^7$ . Calculations for each Rayleigh number value were performed for different values of micropolar material parameter  $K = k_v/\mu_v = 0; 0,5$  and  $2$ , representing the ratio between microrotation viscosity coefficient and dynamic viscosity coefficient. The actual heat transfer is presented by the Nusselt number value  $Nu$ . In the case of  $K = 0$ , the problem is the same as in the case of classical Navier-Stokes equations. In that case the vorticity and microrotation field are uncoupled. In the table 5.2 the comparison of averaged Nusselt number results ( $K = 0$ ) with benchmark solution (Davies [13]) for natural convection in a square cavity for Newtonian fluid and with results of Aydin and Pop [5] is given. In figure 5.2 comparison between calculated values of the averaged Nusselt number and results of Aydin and Pop [5] is given. It must be emphasized that Aydin and Pop [5] used the strong concentrated suspensions boundary condition case ( $n_{wall} = 0$ ) as the microrotation boundary conditions. From the graph in figure 5.2 it is obvious that differences are larger as the Rayleigh number increases, because in the case of strong concentrated suspensions boundary condition particles near the surface cannot rotate freely, whereas in the weak concentrated suspensions boundary condition case the microrotation is augmented, therefore the flow is additionally enhanced. The same behavior was reported in the paper of Hsu [26]. The qualitative comparison of average Nusselt number values in dependence of the Rayleigh number values with result published in work of Hsu [26] shows good agreement. Figure 5.3 presents the local Nusselt number on a hot wall for different material parameters  $K$  and different Rayleigh number values. It can be concluded that the local Nusselt number decreases as material parameter values increase, and consequently the value of average Nusselt number decreases as well. In the case of the lowest Rayleigh number value computed different behaviour occur, where with increasing the  $K$  value the conduction becomes predominant transport mechanism in the enclosure. Figures 5.4, 5.5 and 5.6 present streamlines, vorticity contours and isotherms in a square

cavity for different values of material parameter and Rayleigh number. From the figures it is also evident that increasing the Ra number value leads to thinner thermal boundary layers near the heated and cooled walls, enhancing momentum and heat transfers in the cavity. In the same figures we can see that increasing of the microrotation viscosity coefficient values  $k_v$  leads to thickening of the thermal boundary layers near the heated and cooled walls and decreases momentum and heat transfer in the cavity. The convergence behavior of calculations carried out for different Rayleigh and different material parameters of micropolar fluids is presented on figure 5.7.

The second numerical example calculated within this work is flow in the channel, presented in section 5.2, where the geometry and used mesh is presented in figures 5.8 and 5.9, respectively. The computational mesh is composed of 100 sub-domains in the  $x$  direction and 40 sub-domains in the  $y$  direction, so the whole computational domain is composed of 40000 sub-domains. The mesh was refined in the vicinity of solid walls with refinement factor 8. On the inlet the uniform velocity is prescribed ( $v_i = 1$ ) normal to the inlet boundary. On the walls the no slip boundary condition is used for velocity ( $v_{wall} = 0$ ) and the microrotation on the walls is set as  $N = 0$ , which is the case of strong concentrated suspension flow, given bi parameter  $n_{wall} = 0$ . In this case we simulated flow of a laminar fluid flow of incompressible micropolar fluid in two dimensions. So the Reynolds number in all the calculation was set as  $Re = 100$ . Inside the performed calculation the material parameter of micropolar fluid is varied  $K = 0 - 10$  and also the parameter  $\lambda$  given by equation (3.55). The both parameters  $K$  and  $\lambda$  influence strongly velocity and the microrotation field. The case  $K = 0$  is achieved by setting microrotation viscosity coefficient to be zero. This case presents calculation of the micropolar fluid flow in which the microrotation does not affect the flow (as in the case of classical Navier-Stokes equation). Results of velocity, pressure, vorticity and microrotation presented on figures 5.10, 5.11, 5.12 and 5.15, respectively, show the developing flow along the channel length. To validate calculated data we took results for pressure difference in the case  $K = 0$  and compared them with analytically obtained results by equation (5.11). The comparison of pressure difference, presented in table 5.4 shows good agreement with our calculation. More interesting results arise if we increase the value of material parameter in our calculation. As it is seen from the figure 5.13 the pressure is increasing with increasing microrotation viscosity coefficient. In this case the velocity profile in cross section of the half of channel height at the outlet of the channel is flattened and doesn't anymore match the profile of parabola, what is the case in the developed flow, calculated with classical Navier-Stokes equations. The velocity profiles agree well with presented results of Eringen [16] and also with results of Papautsky [34]. Another varying parameter was  $\lambda$ , presenting combination of microrotation viscosity coefficient  $k_v$  and spin gradient viscosity coefficient  $\gamma_v$ , which is controlling the microrotation. Results of microrotation profiles, on the outlet of the channel, presented on figure 5.16, show that increasing the value of coefficient  $\lambda$  is causing the increase in microrotation. Results of microrotation profiles in figure 5.16 are consistent with results of Eringen [16] and Papautsky [34]. On the last figure 5.17 in this

section, the convergence error plot is presented for calculation with different parameters  $\lambda$ . From this figure we can see that no additional numerical instabilities appear due to incorporation of micropolar fluid flow theory.

Section 5.3 presents the last numerical example of mixed convection in the square cavity with localized heat source. This case is interesting because of the presence of the externally induced stream and the free flow induced by the heat source. Figure 5.18 is presenting geometry of the selected problem with used boundary conditions. The calculation performed used the mesh consisting of 1650 sub-domains and 6771 nodes, presented on figure 5.19. The inflow was assumed to be uniform ( $v_i = 1$ ). All the walls except the part of the left side of the cavity, where the heat source is prescribed as  $\partial T/\partial x = 1$ , are assumed to be adiabatic  $\partial T/\partial n = 0$ . At the inlet the temperature is set as  $T = 0$ . All the walls are assumed to have no-slip boundary condition for the velocity. In this case we modeled strong concentrated suspension flow as a micropolar fluid. We set parameter  $n_{wall} = 0$ , as microrotation boundary condition (eq.(3.47)), which means that microrotation on the walls is zero ( $N = 0$ ). The depth of the cavity is presumed to be long enough so that the flow is two dimensional. For simplicity the inflow and the outflow openings on the opposite vertical wall are set equal to the height of the heat source. The Reynolds number was set as  $Re = 100$  except in the case presented of figure 5.20, where the comparison of flow with two different Reynolds number is presented. Prandtl number was  $Pr = 10$ , but the Rayleigh number varied ( $Ra = 10^3 - 10^8$ ) with varying of buoyancy parameter  $\eta = 0.01 - 1000$ , presenting ratio between Gashoff and of the Reynolds number squared. All the calculations were performed for different parameters of micropolar fluid using material parameter in the range  $K = 0, 1 - 10$ , and parameter  $\lambda = 0, 5 - 10$ . Results of calculations show that increasing the Rayleigh number results in more recirculation near the localized heat source (figure 5.22) and therefore higher temperature gradients, leading to higher heating efficiency of the central region in the cavity. The effect of the increase in material parameter  $K$  on the microrotation field is shown in figure 5.24, which also shows the increase of microrotation due to increase of Rayleigh number. The same effect of the material parameter of micropolar fluid  $K$  on the microrotation is also presented in figure 5.25. Higher values of microrotation, by constant Rayleigh number, lead to weaker recirculation flow in the cavity. Distribution of microrotation for different values of parameter  $\lambda$  in the cavity show that microrotation is higher for smaller values of parameter  $\lambda$  (figure 5.26). It is also found that the microrotation at the recirculation zone decreases as the spin gradient viscosity coefficient  $\gamma_v$  (eq.(3.55)), which is included in parameter  $\lambda$ , decreases. In figure 5.27 the dependence of the maximum surface temperature on the material parameter  $K$  and buoyancy parameter  $\eta$  shows that increase of  $K$  leads to lower maximum temperatures. With increasing the buoyancy parameter  $\eta$  the heat transfer is increased and which leads to the lower maximum temperatures. An example of convergence is shown in figure 5.29 for the case of Rayleigh number  $10^3$  and different material parameters of micropolar fluids  $K$ .

## Chapter 6: Conclusions

The velocity vorticity formulation of micropolar fluid theory based on boundary element method presented in this dissertation shows good potential for solving micropolar fluid flow problems. In this work the derivation of differential, integral as well discretised forms of equations in the framework of velocity-vorticity formulation for numerical simulation of fluid flow with micropolar fluid theory is presented. The derivation showed that the derived equations include several additional terms, compared with the classical set of Navier-Stokes equations. The physical model was incorporated into the boundary element method based numerical code. The derived numerical algorithm was used to analyze the effect of different parameters of micropolar fluid flow on heat transfer in the case of natural convection in square partially heated enclosure, on the flow in a channel and on flow and temperature field in the case of mixed convection. The results of the micropolar fluid flow show that one can expect significant reduction in heat transfer and change of the flow field compared to computations with classical Navier-Stokes equations. Computational results were also compared with results of other authors and comparison shows good agreement.

In the future work the derived numerical model could be used to model complex flows such as blood or suspension flows. The problem exists in the determination of additional viscosity parameters which arise in the micropolar fluid theory. The development of new technologies, in the field of experimental research in micromachining is expected, to give researcher from the field of numeric simulations more benchmark data to validate their models, which is currently one of the main problems in application of micropolar fluid theories.

## Appendices

Appendices include in depth information on some aspects of the dissertation as well as lengthier mathematical derivations. They include: A1 conservation of angular momentum, A2 constitutive equation of microfluids, A3 Gauss and Green's theorems and A4 interpolation functions.

A list of books, papers and other monographs, which were used to prepare this dissertation, is given on page 87.