UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Escuela Politécnica Superior.
Departamento de Matemática Aplicada.
Programa de Doctorado en Ingeniería Mecánica y Eficiencia Energética.

TESIS DOCTORAL

Conexiones de Galois y Técnicas de Tratamiento de la Información.

Dª. Francisca García Pardo.

Directora: Dra. Dª. Inmaculada de las Peñas Cabrera.

Málaga, 2016.

Publicaciones y
Divulgación Científica

UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

AUTOR: Francisca García Pardo

http://orcid.org/0000-0001-8974-6850

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga

Dra. Inmaculada de las Peñas Cabrera, Profesora Contratada Doctora de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga

HACE CONSTAR:

Que Dª Francisca García Pardo, Licenciada en Matemáticas, ha realizado en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga, bajo mi dirección, el trabajo de investigación correspondiente a su Tesis Doctoral titulada:

Conexiones de Galois y Técnicas de Tratamiento de la Información

Revisado el presente trabajo, estimo que puede ser presentado al Tribunal que ha de juzgarlo. Asimismo, informo que las publicaciones científicas que avalan esta tesis no han sido utilizadas como aval para tesis anteriores.

Y para que conste a efectos de lo establecido en el Real Decreto 99/2011, autorizo la presentación de este trabajo en la Universidad de Málaga.

Málaga, a 15 de marzo de 2016

Dra. Inmaculada de las Peñas Cabrera

Dra. Inmaculada Pérez de Guzmán Molina, Catedrática de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga

HACE CONSTAR:

Que Dª Francisca García Pardo, Licenciada en Matemáticas, ha realizado en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga, bajo mi tutela, el trabajo de investigación correspondiente a su Tesis Doctoral titulada:

Conexiones de Galois y Técnicas de Tratamiento de la Información

Revisado el presente trabajo, estimo que puede ser presentado al Tribunal que ha de juzgarlo. Asimismo, informo que las publicaciones científicas que avalan esta tesis no han sido utilizadas como aval para tesis anteriores.

Y para que conste a efectos de lo establecido en el Real Decreto 99/2011, autorizo la presentación de este trabajo en la Universidad de Málaga.

Málaga, a 15 de marzo de 2016

Dra. Inmaculada Pérez de Guzmán Molina

Para mi hija María y mis padres Frasquito y María,
por su grandioso ejemplo de solidaridad.

...nunca pierdas la ilusión, ...
Tú no dejes de jugar, nunca pares de soñar,
que una noche la tristeza se irá sin avisar
y al fin sabrás lo bello que es vivir ...

B.S.O. ”La vida es bella”, 1997. Dir. R. Benigni.

Agradecimientos

Quisiera dedicar este espacio a expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han hecho posible esta tesis.

En primer lugar, a mi directora, Inmaculada de las Peñas, por su ayuda, dedicación y buen hacer durante estos años. A ella debo la oportunidad de haber trabajado con Pablo Cordero y Manuel Ojeda, a quienes agradezco su profesionalidad, generosidad y disponibilidad. Igualmente, quiero expresar mi gratitud a mi tutora en el programa de doctorado Inmaculada Pérez de Guzmán.

Este trabajo lo he realizado compaginando docencia en los departamentos de Matemática Aplicada y Didáctica de la Matemática, de las CCSS y de las CCEE en la Universidad de Málaga. En ellos he tenido la fortuna de conocer y trabajar con personas que me han apoyado y ayudado. No los voy a mencionar individualmente, son muchos. Ellos y yo sabemos quienes son, así que mi reconocimiento a todos y cada uno por vuestra amistad e infinita paciencia.

Gracias a mis padres, a mis hermanos, Juan y Chej, y a mi querida familia, Juanjo y mi preciosa María, porque han estado siempre "ahí". Espero poder compensaros el tiempo robado. También tengo que dar las gracias a mis amigos y amigas, por haberse adaptado a mi nueva vida.

Para finalizar, mencionar que esta investigación se ha realizado en el seno del Grupo de Investigación de Matemática Aplicada en Computación (GIMAC) y ha sido financiado parcialmente por el proyecto del Ministerio de Ciencia e Innovación TIN12-39353-C04-01.

Índice general

Summary

Galois connections are ubiquitous; together with adjunctions, their close relatives, occur in a number of research areas, ranging from the most theoretical to the most applied. In a rather poetic tone, the preface of [19] reads, *Galois connections provide the structure-preserving passage between two worlds of our imagination*; and we should add that these two worlds can be so different that the slightest relationship could be seldom ever imagined.

The term *Galois connection* was coined by Øystein Ore [46] (originally, spelled *connexion*) as a general type of correspondence between structures, obviously named after the Galois theory of equations which is an example linking subgroups of automorphisms and subfields. Ore generalized to complete lattices the notion of *polarity*, introduced by Birkhoff [10] several years before, as a fundamental construction which leads from any binary relation to inverse dual isomorphisms. Later, when Kan introduced the *adjoint functors* [36] in a categorical setting, his construction was noticed to greatly resemble that of the Galois connection; actually, in some sense, both notions are interdefinable: an adjunction between A and B is a Galois connection in which the order relation on B is reversed (this leads to the use of the term *isotone Galois connection* to refer to an adjunction between ordered structures).

The importance of Galois connections/adjunctions quickly increased to an extent that, for instance, the interest of category theorists moved from

universal mapping properties and natural transformations to adjointness.

In recent years there has been a notable increase in the number of publications concerning Galois connections, both isotone and antitone. On the one hand, one can find lots of papers on theoretical developments or theoretical applications [14, 19, 38]. See [43] for a first survey on applications, although more specific references on certain topics can be found, for instance, to programming [45] or logic [35]. Likewise, one can find published works concerning Galois connection from a categorical point of view as [15, 29].

Last but not least, it is worth noting that many of these works use Galois connections for dealing with Formal Concept Analysis (FCA), either theoretically or applicatively, since the derivation operators used to define the concepts form a (antitone) Galois connection. In [20], one can find a general view of this relation. Bělohlávek and Konečný [8] stress on the "duality" between isotone and antitone Galois connections in showing a case of reducibility of the concept lattices generated by using each type of connection, in such a way that the "duality" just works one way; Valverde and Peláez have studied the extension of conceptualization modes in [51], and provided a general approach to the discipline; Díaz and Medina [21] use Galois connections as building blocks for solving the multi-adjoint relation equations.

In the fuzzy case, several papers on fuzzy Galois connections or fuzzy adjunctions have been written since its introduction by Bělohlávek in [3]; consider for instance [9, 28, 39, 52] for some recent generalizations. Some authors have introduced alternative approaches guided by the intended applications: for instance, Shi et al [50] introduced a definition of fuzzy adjunction for its use in fuzzy mathematical morphology. Our approach in this thesis is more in consonance with Bělohlávek's logic approach, but in terms of the generalization provided by Yao and Li [52] within the framework of fuzzy posets and fuzzy closure operators.

The ability to build or define a Galois connection between two ordered structures is a matter of major importance, and not only for FCA. For instance, [16] establishes a Galois connection between valued constraint languages and sets of weighted polymorphisms in order to develop an algebraic theory of complexity for valued constraint languages.

A number of results can be found in the literature concerning sufficient or necessary conditions for a Galois connection between ordered structures to exist. The main results of this thesis are related to the existence and construction of the adjoint pair to a given mapping f, but *in a more general framework*.

Our initial setting is to consider a mapping $f\colon A \to B$ from a partially ordered (resp. preordered) set A into an unstructured set B, and then, characterizing those situations in which the set B can be partially ordered (resp. preordered) and an isotone mapping $g\colon B \to A$ can be built such that the pair (f, g) is an adjunction. On the other hand, there exists a tight relation between adjunctions and closure systems, in that every adjunction (f, g) leads to a closure operator $g \circ f$ and every closure operator leads to a closure system. Conversely, from any closure operator, an adjunction can be defined. Therefore, after obtaining the necessary and sufficient conditions to define a preorder on B, it makes sense to express those conditions in terms of the corresponding closure system in a (pre-)ordered setting.

We finish this thesis with the extension to a fuzzy framework the different characterizations and results obtained in the crisp case. Specifically, we work with fuzzy adjunctions on crisp sets with fuzzy ordered relations (fuzzy partial ordering) and with fuzzy preordered relations (fuzzy preordering).

When examining the literature, one can notice a lack of uniformity in the use of the term Galois connection, mainly due to its close relation to adjunctions and that, furthermore, there are two versions of each one. In the Chapter 2, after recalling the different interpretations usually assigned to the term Galois connection, we study the different characterizations and properties of the notion of adjunction between preordered sets and the relation among then. Moreover, we show that all four types essentially coincide. Hence all the results of this thesis are stated in terms of adjunction, though all of them can be straightforwardly used for any of the four notions.

Section 2.3.1 focuses on the case in which the domain A of a mapping $f\colon A \to B$ is a partially ordered set and in Section 2.3.2 we tackle the study done in the previous section but in the preordered case, and it is worth to be remarked that the absence of antisymmetry makes the proof of the results much more involved. We also introduce several considerations about the uniqueness of the right adjoint providing a number of toy examples.

Once we have addressed the problem of defining an adjoint pair, we observe that the composition of the two components of an adjunction leads to a $\approx$-closure operator which is compatible as well with the kernel relation associated to the left adjoint. Furthermore, the existence of a $\approx_A$-compatible closure system turns out to be a sufficient condition. This result shows the convenience of considering $\approx$-closure systems in the study of adjunctions in more general carriers.

In [3,5], Bělohlávek generalized the notion of Galois connection to the framework of fuzzy logic. For a complete residuated lattice L and two universes U, V, instead of the traditional powersets 2^U and 2^V, Bělohlávek considered the L-powersets L^U and L^V and defined a *fuzzy Galois connection* (or an L- Galois connection) between U and V.

There are other recent extensions such as the alternative definition of fuzzy Galois connection given by Yao in [52]. This new vision of fuzzy adjunctions (Galois connections) generalizes Bělohlávek´s definition. We will adopt Yao´s approach to the notion of fuzzy adjunction.

In this way, Chapter 3 studies the different characterizations and properties of fuzzy adjunctions between sets with a fuzzy (pre)ordering relation.

Moreover, we also analyze, given $f : \langle A, \rho_A\rangle \to B$ where $\langle A, \rho_A\rangle$ is a set with a fuzzy (pre)order, the necessary and sufficient conditions to define ρ_B, a fuzzy preorder in B, and a right adjoint $g\colon \langle B, \rho_B\rangle \to \langle A, \rho_A\rangle$ for the mapping f.

The results on sets with fuzzy preordering relation have more applicability since antisymmetry, in practice, is sometimes a too strong requirement; the study of this problem is particularly challenging since other previous results are stated in terms of the existence of maximum elements which are unique precisely because of antisymmetry, which is no longer available in a preordered setting

Finally, we introduce the notion of closure system and closure operator on crisp sets with fuzzy ordering relations (resp. fuzzy preordering relations), together with a number of results which allow to simplify the presentation of the construction of the right adjoint.

Detailed description of the content of the thesis

Now, we will show the main definitions and results of this work. We will preserve the organization of the full manuscript. In this summary, we do not include all the preliminaries that can be found in detail in the thesis.

Galois connections between preordered sets

We formulate the results in the most general framework of preordered sets, which are sets endowed with a reflexive and transitive binary relation. We study the different definitions of Galois connection between preordered set, their characterization and the relation among them.

Definition 2.1: Let $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A\rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B\rangle$ be preordered sets and consider two mappings $f : A \to B$ and $g : B \to A$. The pair (f, g) is called a[1]

- *Right Galois connection between $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$*, denoted by $(f, g) : \mathbb{A} \mathrel{\leftharpoonup\mkern-14mu\rightharpoonup} \mathbb{B}$, if the following condition holds

$$a \lesssim_A g(b) \text{ if and only if } b \lesssim_B f(a) \quad \text{for all } a \in A \text{ and } b \in B.$$

- *Left Galois connection between $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$*, denoted by $(f, g) : \mathbb{A} \mathrel{\leftharpoondown\mkern-14mu\rightharpoondown} \mathbb{B}$, if the following condition holds

$$g(b) \lesssim_A a \text{ if and only if } f(a) \lesssim_B b \quad \text{for all } a \in A \text{ and } b \in B.$$

- *Adjunction between $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$*, denoted by $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$, if the following condition holds

$$a \lesssim_A g(b) \text{ if and only if } f(a) \lesssim_B b \quad \text{for all } a \in A \text{ and } b \in B.$$

- *Co-adjunction between $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$*, denoted by $(f, g) : \mathbb{A} \rightleftharpoons \mathbb{B}$, if the following condition holds

$$g(b) \lesssim_A a \text{ if and only if } b \lesssim_B f(a) \quad \text{for all } a \in A \text{ and } b \in B.$$

All of the previous notions can be seen in the literature, in fact, one can even find the same term applied to different notions of connection/adjunction. Although it is true that the four definitions are strongly related, they do not have exactly the same properties; hence, it makes sense to specifically describe what is the relation between the four notions stated above, together with their corresponding characterizations.

The following theorem states the existence of pairwise biunivocal correspondences between all the notions above. The transition between the two

[1]The arrow notation for the different versions is taken from [51].

types of adjunctions (connections) relies on using the opposite ordering in *both* preordered sets, whereas the transition between adjunctions to connections and vice versa relies on using the opposite ordering in *just one* of the preordered sets.

Theorem 2.1: Let $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ be preordered sets and consider two mappings $f : A \to B$ and $g : B \to A$. Then, the following conditions are equivalent

1. $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$
2. $(f, g) : \mathbb{A}^{op} \rightleftharpoons \mathbb{B}^{op}$
3. $(f, g) : \mathbb{A} \leftharpoonup\!\!\!\rightharpoonup \mathbb{B}^{op}$
4. $(f, g) : \mathbb{A}^{op} \leftharpoondown\!\!\!\rightharpoondown \mathbb{B}$

Observe that, as a direct consequence of this theorem, any property about adjunctions can be extended by duality to the other kind of connections.

Any preordered set $\langle A, \lesssim_A \rangle$ induces the *symmetric kernel* relation in A defined as $a_1 \approx_A a_2$ if and only if $a_1 \lesssim_A a_2$ and $a_2 \lesssim_A a_1$ for $a_1, a_2 \in A$.

The notions of maximum and minimum in a poset can be extended to preordered sets as follows: an element $a \in A$ is a *p-maximum* (*p-minimum* resp.) for a set $X \subseteq A$ if $a \in X$ and $x \lesssim_A a$ ($a \lesssim_A x$, resp.) for all $x \in X$. The set of p-maximum (p-minimum) elements of X will be denoted as p-$\max X$ (p-$\min X$, resp.). Observe that, in a preordered set, different elements can be p-maximum for a set X, but, in this case, $a_1, a_2 \in$ p-$\max X$ implies $a_1 \approx a_2$.

Given a preordered set $\langle A, \lesssim_A \rangle$ and $a \in A$, the *downward closure* $a^{\downarrow}$ of a is defined as $a^{\downarrow} = \{x \in A \mid x \lesssim_A a\}$ and the *upward closure* $a^{\uparrow}$ of a is defined as $a^{\uparrow} = \{x \in A \mid a \lesssim_A x\}$.

Taking into account the definitions, we introduce the characterizations of the notion of adjunction between preordered sets.

Theorem 2.2: Let $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle, \mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ be two preordered sets and consider two mappings $f : A \to B$ and $g : B \to A$. The following conditions are equivalent:

i) $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$.

ii) f and g are isotone maps, $g \circ f$ is inflationary and $f \circ g$ is deflationary.

iii) $f(a)^{\uparrow} = g^{-1}(a^{\uparrow})$ for all $a \in A$.

iv) $g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\downarrow})$ for all $b \in B$.

v) f is isotone and $g(b) \in \text{p-}\max f^{-1}(b^{\downarrow})$ for all $b \in B$.

vi) g is isotone and $f(a) \in \text{p-}\min g^{-1}(a^{\uparrow})$ for all $a \in A$.

A number of characterizations for the different Galois connections and adjunctions are summarized in Table 1.

Section 2.1 ends with several theorems which provide properties about Galois connections, adjunction and co-adjunction between preordered sets.

Theorem 2.3: Let $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ be preordered sets and consider two mappings $f : A \to B$ and $g : B \to A$. If $(f, g)\colon \mathbb{A} \leftrightarrows \mathbb{B}$, where $\leftrightarrows \in \{\leftharpoonup, \rightharpoondown, \leftrightharpoons, \rightleftharpoons\}$, then, $(f \circ g \circ f)(a) \approx_B f(a)$, for all $a \in A$, and $(g \circ f \circ g)(b) \approx_A g(b)$ for all $b \in B$. Moreover,

1. If (f, g) is both an adjunction and a co-adjunction (left and right Galois connection resp.) then $(g \circ f)(a) \approx_A a$ for all $a \in A$ and $(f \circ g)(b) \approx_B b$ for all $b \in B$.

2. If (f, g) is both a (left or right) Galois connection and a (co-) adjunction then $f(a_1) \approx_B f(a_2)$ for all $a_1, a_2 \in A$ with $a_1 \lesssim_A a_2$, and $g(b_1) \approx_B g(b_2)$ for all $b_1, b_2 \in B$ with $b_1 \lesssim_B b_2$.

Table 1: Galois connections and adjunctions: equivalent characterizations

Galois Connections	
Right Galois Connections between $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ $(f,g)\colon \mathbb{A} \leftharpoonup\!\!\rightharpoonup \mathbb{B}$	Left Galois Connections between $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ $(f,g)\colon \mathbb{A} \leftharpoondown\!\!\rightharpoondown \mathbb{B}$
$b \leq f(a) \Leftrightarrow a \leq g(b)$ for all $a \in A$ and $b \in B$	$f(a) \leq b \Leftrightarrow g(b) \leq a$ for all $a \in A$ and $b \in B$
f and g are antitone and $g \circ f$ and $f \circ g$ are inflationary	f and g are antitone and $g \circ f$ and $f \circ g$ are deflationary
$f(a)^{\downarrow} = g^{-1}(a^{\uparrow})$ for all $a \in A$	$f(a)^{\uparrow} = g^{-1}(a^{\downarrow})$ for all $a \in A$
$g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\uparrow})$ for all $b \in B$	$g(b)^{\uparrow} = f^{-1}(b^{\downarrow})$ for all $b \in B$
f is antitone and $g(b) \in \text{p-max}\, f^{-1}(b^{\uparrow})$ for all $b \in B$	f is antitone and $g(b) \in \text{p-min}\, f^{-1}(b^{\downarrow})$ for all $b \in B$
g is antitone and $f(a) \in \text{p-max}\, g^{-1}(a^{\uparrow})$ for all $a \in A$	g is antitone and $f(a) \in \text{p-min}\, g^{-1}(a^{\downarrow})$ for all $a \in A$
Adjunctions	
Adjunction between $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ $(f,g)\colon \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$	Co-adjunction between $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ $(f,g)\colon \mathbb{A} \rightleftharpoons \mathbb{B}$
$f(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq g(b)$ for all $a \in A$ and $b \in B$	$b \leq f(a) \Leftrightarrow g(b) \leq a$ for all $a \in A$ and $b \in B$
f and g are isotone, $g \circ f$ is inflationary and $f \circ g$ is deflationary	f and g are isotone, $g \circ f$ is deflationary and $f \circ g$ is inflationary
$f(a) \uparrow = g^{-1}(a^{\uparrow})$ for all $a \in A$	$f(a)^{\downarrow} = g^{-1}(a^{\downarrow})$ for all $a \in A$
$g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\downarrow})$ for all $b \in B$	$g(b)^{\uparrow} = f^{-1}(b^{\uparrow})$ for all $b \in B$
f is isotone and $g(b) \in \mathrm{maxf}^{-1}(\mathrm{b}^{\downarrow})$ for all $b \in B$	f is isotone and $g(b) \in \min f^{-1}(b^{\uparrow})$ for all $b \in B$
g isotone and $f(a) \in \min g^{-1}(a^{\uparrow})$ for all $a \in A$	g is isotone and $f(a) \in \mathrm{maxg}^{-1}(\mathrm{a}^{\downarrow})$ for all $a \in A$

For any preordered set $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$, the quotient set over the symmetric kernel relation $\approx_A$ is denoted as $\overline{A}$. The relation defined as "$[a_1]_\approx \lesssim_{\overline{A}} [a_2]_\approx$ if and only if $a_1 \lesssim_A a_2$" is a partial order. The quotient posets $\langle \overline{A}, \lesssim_{\overline{A}} \rangle$ is denoted as $\overline{\mathbb{A}}$. Theorem 2.2 allows to translate adjunctions to the quotient posets as follows.

Given $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ two preordered sets and $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ an isotone (resp. antitone) mapping, we define a mapping $\overline{f}\colon \overline{\mathbb{A}} \to \overline{\mathbb{B}}$ where $\overline{f}([a]_\approx) = [f(a)]_\approx$.

Theorem 2.4: Let $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ be two preordered sets and consider $\leftrightharpoons \in \{\leftharpoonup\!\rightharpoonup, \leftharpoondown\!\rightharpoondown, \leftrightharpoons, \rightleftharpoons\}$. If $(f,g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$ then $(\overline{f}, \overline{g})\colon \overline{\mathbb{A}} \leftrightharpoons \overline{\mathbb{B}}$.

Corollary 2.1: Let $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ be two preordered sets and consider two mappings $f : A \to B$ and $g : B \to A$.

1. (f,g) is both an adjunction and a co-adjunction (a left Galois connection and a right Galois connection, resp.) if and only if f and g are isotone (resp. antitone) mappings and $\overline{f}$ and $\overline{g}$ are inverse mappings (i.e. $(\overline{f})^{-1} = \overline{g}$).

2. Both relations $\lesssim_A$ and $\lesssim_B$ are equivalence relations and (f,g) is an adjunction (resp. co-adjunction, right Galois connection, left Galois connection) if and only if (f,g) is adjunction, co-adjunction, right Galois connection and left Galois connection.

Construction of adjunctions between posets

Given $f\colon A \to B$ we first focus on the case in which the domain A is a partially ordered set and, once introduced the preliminary technical results, we provide the necessary and sufficient conditions for the existence of an ordering relation on B and a mapping $g\colon B \to A$ such that (f,g) constitutes an adjunction.

In general, given a poset $\langle A, \leq_A \rangle$ together with an equivalence relation $\sim$ on A, it is common to denote the quotient set of A wrt $\sim$ as $A_\sim = A/\sim$ and the natural projection $\pi \colon A \to A_\sim$. The equivalence class of an element $a \in A$ is denoted by $[a]_\sim$ and, then, $\pi(a) = [a]_\sim$.

With the aim of finding conditions for building a right adjoint to a mapping f from a poset $\langle A, \leq_A \rangle$ to an unstructured set B, we naturally consider the canonical decomposition of $f \colon A \to B$ through $A_{\equiv_f}$, the quotient set of A wrt the *kernel relation* $\equiv_f$ defined as $a \equiv_f b$ if and only if $f(a) = f(b)$ (see Figure 1). We denote the inclusion mapping by $i : f(A) \to B$ where $i(b) = b$ and $\varphi \colon A_{\equiv_f} \to f(A)$ is the unique bijective mapping which makes the following diagram commutative, i.e., $\varphi([a]_{\equiv_f}) = f(a)$

$$\begin{tikzcd}
\langle A, \leq_A \rangle \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, two heads, "\pi"'] & B \\
A_{\equiv_f} \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & f(A) \arrow[u, dashed, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

Figure 1: Canonical decomposition of $f \colon \langle A, \leq_A \rangle \to B$ through $A_{\equiv_f}$.

The following lemma provides sufficient conditions for the natural projection being the left component of an adjunction.

Lemma 2.2: Let $\langle A, \leq_A \rangle$ be a poset and $\sim$ an equivalence relation on A. Assume that the following conditions hold

1. there exists $\max([\mathrm{a}]_\sim)$, for all $a \in A$.

2. if $a_1 \leq_A a_2$ then $\max([\mathrm{a}_1]_\sim) \leq_\mathrm{A} \max([\mathrm{a}_2]_\sim)$, for all $a_1, a_2 \in A$.

Then, the relation $\leq_{A_\sim}$ defined by $[a_1]_\sim \leq_{A_\sim} [a_2]_\sim$ if and only if $a_1 \leq_A \max([\mathrm{a}_2]_\sim)$ is an ordering in $A_\sim$ and, moreover, the pair $(\pi, \max)$ is an adjunction between $\langle A, \leq_A \rangle$ and $\langle A_\sim, \leq_{A_\sim} \rangle$.

The following result states that the conditions given in the previous Lemma are also necessary and that the ordering relation and the right adjoint are uniquely defined.

Lemma 2.3: Let $\langle A, \leq_A \rangle$ be a poset and $\sim$ an equivalence relation on A. Let $A_\sim = A/\!\sim$ be the quotient set of A wrt $\sim$ and $\pi\colon A \to A_\sim$ the natural projection. If there exists an ordering relation $\leq_{A_\sim}$ in $A_\sim$ and a mapping $g\colon A_\sim \to A$ such that $(\pi, g)\colon \langle A, \leq_A \rangle \leftrightharpoons \langle A_\sim, \leq_{A_\sim} \rangle$ then,

1. $g([a]_\sim) = \max\left([\mathrm{a}]_\sim\right)$ for all $a \in A$.
2. $[a_1]_\sim \leq_{A_\sim} [a_2]_\sim$ if and only if $a_1 \leq_A \max\left([\mathrm{a}_2]_\sim\right)$ for all $a_1, a_2 \in A$.
3. if $a_1 \leq_A a_2$ then $\max\left([\mathrm{a}_1]_\sim\right) \leq_{\mathrm{A}} \max\left([\mathrm{a}_2]_\sim\right)$ for all $a_1, a_2 \in A$.

We continue with the analysis of the canonical decomposition which, naturally, leads to the following result.

Lemma 2.4: Consider a poset $\langle A, \leq_A \rangle$ and a bijective mapping $\varphi\colon A \to B$, then there exists a unique ordering relation in B, which is defined as $b_1 \leq_B b_2$ if and only if $\varphi^{-1}(b_1) \leq_A \varphi^{-1}(b_2)$, such that $(\varphi, \varphi^{-1})\colon \langle A, \leq_A \rangle \leftrightharpoons \langle B, \leq_B \rangle$.

As a consequence of the previous results, we have established the necessary and sufficient conditions to ensure the existence and uniqueness of a right adjoint for any *surjective* mapping f from a poset A to an unstructured set B.

Theorem 2.5: Given a poset $\langle A, \leq_A \rangle$ and a surjective mapping $f\colon A \to B$, let $\equiv_f$ be the kernel relation. Then, there exists an ordering $\leq_B$ in B and a mapping $g\colon B \to A$ such that $(f, g)\colon \langle A, \leq_A \rangle \leftrightharpoons \langle B, \leq_B \rangle$ if and only if

1. there exists $\max\left([a]_{\equiv_f}\right)$ for all $a \in A$.
2. $a_1 \leq_A a_2$ implies $\max\left([a_1]_{\equiv_f}\right) \leq_A \max\left([a_2]_{\equiv_f}\right)$, for all $a_1, a_2 \in A$.

A summary of the construction of an adjunction, with f a surjective mapping, is represented in the Figure 2.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, two heads, shift left, "\pi"] & B \arrow[l, dashed, bend right, "g=\max\circ\varphi^{-1}"'] \arrow[dl, dashed, shift left, "\varphi^{-1}"] \\
A_{\equiv_f} \arrow[u, dashed, shift left, "\max"] \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

Figure 2: (f, g) is an adjunction where f is surjective and $g = \max \circ\ \varphi^{-1}$.

Now, we tackle the same problem in the case of f being not necessarily surjective. Now, there are several possible orderings on B which allows us to define the right adjoint. The crux of the construction is related to the definition of an order-embedding of the image into the codomain set.

More generally, the idea is to extend an ordering defined just on a subset of a set to the whole set.

Given a subset $X \subseteq B$, and a fixed element $m \in X$, any preordering $\leq_X$ in X can be extended to a preordering $\leq_m$ on B, defined as the reflexive and transitive closure of the relation $\leq_X \cup \{(m, y) \mid y \notin X\}$. Note that the relation above can be described, for all $x, y \in B$, as $x \leq_m y$ if and only if some of the following conditions holds:

(a) $x, y \in X$ and $x \leq_X y$

(b) $x \in X, y \notin X$ and $x \leq_X m$

(c) $x, y \notin X$ and $x = y$

If the relation $\leq_X$ in X is an ordering then any extension $\leq_m$ on B is antisymmetric as well.

Lemma 2.5: Given a subset $X \subseteq B$, and a fixed element $m \in X$, then $\leq_X$ is an ordering on X if and only if $\leq_m$ is an ordering on B.

Lemma 2.6: Let X be a subset of B, consider a fixed element $m \in X$, and an ordering relation $\leq_X$ in X. Define the mapping $j_m \colon \langle B, \leq_m \rangle \to \langle X, \leq_X \rangle$ as

$$j_m(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in X \\ m & \text{if } x \notin X \end{cases}$$

Then, (i, j_m) constitutes an adjunction between $\langle X, \leq_X \rangle$ and $\langle B, \leq_m \rangle$, where i denotes the inclusion $X \hookrightarrow B$.

From the last results, we obtain one of the main theorem of Section 2.3.1 which shows the necessary and sufficient conditions to define a suitable ordering relation on B and a mapping $g \colon B \to A$ such that (f, g) forms an adjunction between ordered sets.

Theorem 2.6: Given a poset $\langle A, \leq_A \rangle$ and a mapping $f \colon A \to B$, let $\equiv_f$ be the kernel relation. Then, there exists an ordering $\leq_B$ in B and a mapping $g \colon B \to A$ such that $(f, g) \colon \langle A, \leq_A \rangle \leftrightharpoons \langle B, \leq_B \rangle$ if and only if

1. there exists $\max\left([a]_{\equiv_f}\right)$ for all $a \in A$.

2. $a_1 \leq_A a_2$ implies $\max\left([a_1]_{\equiv_f}\right) \leq_A \max\left([a_2]_{\equiv_f}\right)$, for all $a_1, a_2 \in A$.

Pictorially, the mapping g above is the composition $\max \circ \varphi^{-1} \circ j_m$ (see Figure 3). By Theorem 2.5, there exists an ordering $\leq_{f(A)}$ on $f(A)$ and, considering an arbitrary element $m \in f(A)$, the ordering $\leq_{f(A)}$ induces an ordering $\leq_m$ on B, as stated in Lemma 2.5.

Construction of adjunctions between preordered sets

We also extend the analogous construction to the framework of preordered sets. The idea underlying the construction is similar to that above, but the absence of antisymmetry makes the low level computations much more involved than in the partially ordered case.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, two heads, shift left, "\pi"] & B \arrow[l, dashed, bend right, "g=\max\circ\varphi^{-1}\circ j_m"'] \arrow[d, dashed, shift left, "j_m"] \\
A_{\equiv_f} \arrow[u, dashed, shift left, "\max"] \arrow[r, shift left, "\varphi"] & f(A) \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[l, dashed, shift left, "\varphi^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Figure 3: (f, g) is an adjunction where $g = \max \circ\ \varphi^{-1} \circ j_m$.

In order to study the existence of adjoints in this framework, we need to use the previously defined relation $\approx_A$ and we will keep using the kernel relation $\equiv_f$. The two relations above are used together in the definition of the *p-kernel* relation defined below:

Definition 2.2: Let $\langle A, \lesssim_A\rangle$ be a preordered set and consider a mapping $f\colon A \to B$. The *p-kernel* relation $\cong_A$ on A is the equivalence relation obtained as the transitive closure of the union of the symmetric kernel relation $\approx_A$ and kernel relation $\equiv_f$.

The following definition recalls the Hoare preordering between subsets of a preordered set and introduces the notion of cyclic subset.

Definition 2.3: Let $\langle A, \lesssim_A\rangle$ be a preordered set, and consider $X, Y \subseteq A$.

- $X \sqsubseteq_H Y$ if and only if, for all $x \in X$, there exists $y \in Y$ such that $x \lesssim_A y$. This is called *Hoare relation*.
- X is said to be *cyclic* if $x \approx_A y$ for all $x, y \in X$.

An alternative characterization for the Hoare preorder is provided for the case of cyclic subsets.

Lemma 2.7: Let $\langle A, \lesssim_A\rangle$ be a preordered set and $X, Y \subseteq A$ non-empty subsets, where Y is cyclic. Then, the following statements are equivalent:

1. $X \sqsubseteq_H Y$.
2. There exist $x \in X$ and $y \in Y$ such that $x \lesssim_A y$.
3. $x \lesssim_A y$, for all $x \in X$ and $y \in Y$.

Let $\langle A, \lesssim_A \rangle$ be a preordered set and let X be a subset of A. The set of upper bounds of X is defined as follows

$$\mathrm{UB}(X) = \{b \in A \mid x \lesssim_A b \text{ for all } x \in X\}$$

For the construction, given a mapping $f\colon \langle A, \lesssim_A \rangle \to B$ from a preordered set $\langle A, \lesssim_A \rangle$ to an unstructured set B, our first goal is to find sufficient conditions to define a suitable preordering on B such that a right adjoint exists, in the style of Lemma 2.2. Notice that there is much more than a mere adaptation of the result for posets.

Lemma 2.8: Let $\langle A, \lesssim_A \rangle$ be a preordered set and consider a surjective mapping $f\colon \langle A, \lesssim_A \rangle \to B$. Consider $S \subseteq A$ such that the following conditions hold:

- $S \subseteq \bigcup_{a \in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$
- $\text{p-min}(\mathrm{UB}([a]_{\cong_A}) \cap S) \neq \varnothing$, for all $a \in A$.
- If $a_1 \lesssim_A a_2$, then $\text{p-min}(\mathrm{UB}([a_1]_{\cong_A}) \cap S) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\mathrm{UB}([a_2]_{\cong_A}) \cap S)$.

Then, there exists a preorder $\lesssim_B$ in B and a map g such that $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$.

If the initial mapping f is not surjective, we have established the conditions to construct a right adjoint g' for the restriction of f to its image set and then, as the following Lemma shows, an adequate extension of g' to B provides a right adjoint for the initial f.

Lemma 2.9: Consider a preordered set $\langle A, \lesssim_A \rangle$, a set B and a mapping $f\colon A \to B$. Then, there exist a preorder $\lesssim_B$ on B and an adjunction $(f, g)\colon \langle A, \lesssim_A \rangle \leftrightharpoons \langle B, \lesssim_B \rangle$ if and only if there exist a preorder $\lesssim_{f(A)}$ on $f(A)$ and an adjunction $(f, g')\colon \langle A, \lesssim_A \rangle \leftrightharpoons \langle f(A), \lesssim_{f(A)} \rangle$.

It can be shown that the pair $(f, g)\colon \langle A, \lesssim_A \rangle \leftrightharpoons \langle B, \lesssim_B \rangle$ is an adjunction, where g is the extension of g' defined by

$$g(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{if } x \in f(A) \\ g'(m) & \text{if } x \notin f(A) \end{cases}$$

where $m \in f(A)$.

The main result in this section is the corresponding version of Theorem 2.6, which is a twofold extension of the statement of Lemma 2.8 in that, firstly, the mapping f need not be surjective and, secondly, it gives the necessary and sufficient conditions for the existence of an adjunction between preordered sets.

Theorem 2.7: Given any preordered set $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ and a mapping $f\colon \mathbb{A} \to B$, there exists a preorder $\mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ and $g\colon B \to A$ such that $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$ if and only if there exists a subset S of A such that the following conditions hold:

1. $S \subseteq \bigcup_{a \in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$
2. $\text{p-min}(\text{UB}([a]_{\cong_A}) \cap S) \neq \varnothing$, for all $a \in A$.
3. If $a_1 \lesssim_A a_2$, then $\text{p-min}(\text{UB}([a_1]_{\cong_A}) \cap S) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}([a_2]_{\cong_A}) \cap S)$.

We finish with several considerations on the uniqueness of right adjoints and the induced ordered structure in the codomains. It is well-known that given two posets $\mathbb{A} = \langle A, \leq_A \rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B, \leq_B \rangle$ and a mapping $f\colon A \to B$, if there exists $g\colon B \to A$ such that the pair (f, g) is an adjunction, then it is unique.

This uniqueness property has been extended, in the case of surjective mappings, not only to the right adjoint, but also to the ordering relation in the codomain: namely, there exists just one partial ordering on the codomain B such that a right adjoint exists.

Contrariwise to the partially ordered case, given two preordered sets $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A\rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B\rangle$ and a mapping $f\colon A \to B$, the unicity of the mapping $g\colon B \to A$ satisfying $(f, g)\colon \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$, when it exists, cannot be guaranteed. But if g_1 and g_2 are right adjoints, then $g_1(b) \approx_A g_2(b)$ for all $b \in B$, and one usually says that the right adjoint is *essentially unique*. However, and this is the interesting part, the unicity of the ordering cannot be extended in general in the preordered case when the codomain is unstructured.

Adjunctions and closure systems on preordered sets

In this section, we state the necessary and sufficient conditions obtained in the previous section in terms of closure operators and closure systems. Closure operators and closure systems are different approaches to the same phenomenon. We focus now on the development of the well-known link between these two notions on a partially ordered set, but in the more general framework of preordered sets.

To begin with, both notions have to be adapted to the lack of antisymmetry. This involves the use of the symmetric kernel relation $\approx$ introduced in the previous sections.

Definition 2.6: Let $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A\rangle$ be a preordered set.

1. A mapping $c\colon A \to A$ is said to be a $\approx_A$-closure operator if c is inflationary, isotone and $\approx_A$-idempotent, i.e. $(c \circ c)(a) \approx_A c(a)$, for all $a \in A$.

2. A subset $S \subseteq A$ is a $\approx_A$-closure system if the set $\text{p-}\min(a^{\uparrow} \cap S)$ is non-empty for all $a \in A$.

The notion of $\approx_A$-closed set can be found in [24], whereas the previous version of $\approx_A$-closure system is, to the best of our knowledge, a novel notion.

It is convenient to introduce the notion of compatibility with an equivalence relation.

Definition 2.8: Let $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ be a preordered set and consider an equivalence relation $\sim$ on A.

1. A $\approx_A$-closure operator $c\colon A \to A$ is said to be *compatible with respect to* $\sim$ if $a \sim b$ implies $c(a) \approx_A c(b)$ for all $a, b \in A$.
2. Similarly, a $\approx_A$-closure system S is said to be *compatible with respect to* $\sim$ if $a \lesssim_A s$ implies $[a]_\sim \subseteq s^{\downarrow}$, for all $a \in A, s \in S$.

The notion of compatibility in the previous definition is preserved when moving between operators and systems. This is formally stated in the following result:

Lemma 2.10: Let $c\colon A \to A$ be a $\approx_A$-closure operator compatible wrt an equivalence relation $\sim$ on A, then the $\approx_A$-closure system $S_c = \{x \in A \mid c(a) = a\}$ is compatible wrt $\sim$.

Conversely, let S be a $\approx_A$-closure system compatible wrt $\sim$, then any $\approx_A$-closure operator c associated to S is compatible wrt $\sim$ as well.

Lemma 2.11: Let $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ be a preordered set and consider a mapping $f\colon \mathbb{A} \to B$. A $\approx_A$-closure system is compatible wrt $\equiv_f$ if and only if it is compatible wrt $\cong_A$.

We state that the composition of the two components of the adjunction leads to a $\approx_A$-closure operator which, moreover, is compatible wrt the kernel relation associated to f. As a result, the existence of a $\approx_A$-compatible system turns out to be a necessary condition. The following main result states that this condition is also sufficient.

Theorem 2.9: Let $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ be a preordered set and consider a mapping $f\colon \mathbb{A} \to B$. Then, there exists a preorder in B and a mapping $g\colon B \to A$ such that (f, g) forms an adjunction if and only if there exists a $\approx_A$-closure system S compatible wrt $\equiv_f$.

Adjunctions between fuzzy preordered sets

We devote this Section to establish the definitions and characterizations of fuzzy Galois connections and fuzzy adjunctions between sets with a fuzzy preorder. Moreover, we study the relations between them, their characterizations and properties. We will work with complete residuated lattices, $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot, \otimes, \to)$, as underlying structure for considering fuzziness.

Definition 3.1:

- An $\mathbb{L}$-*fuzzy preordered set* is a pair $\langle A, \rho_A \rangle$ in which ρ_A is a reflexive and transitive $\mathbb{L}$-fuzzy relation, i.e. $\rho_A(a, a) = \top$ and $\rho_A(a, b) \otimes \rho_A(b, c) \leq \rho_A(a, c)$ for all $a, b, c \in A$.
- An $\mathbb{L}$-*fuzzy ordered set* is a pair $\langle A, \rho_A \rangle$ in which ρ_A is a reflexive, transitive and antisymmetric $\mathbb{L}$-fuzzy relation, i.e. $\rho_A(a, b) = \rho_A(b, a) = \top$ implies $a = b$ for all $a, b \in A$.

From now on, we will omit the prefix $\mathbb{L}$.

Definition 3.3: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$, $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B \rangle$ be fuzzy preordered sets and consider two mappings $f : A \to B$ and $g : B \to A$. The pair (f, g) is said to be a

- *Right fuzzy Galois connection between* $\mathbb{A}$ *and* $\mathbb{B}$ and denoted by $(f, g) : \mathbb{A} \leftharpoonup\!\rightharpoonup \mathbb{B}$, if

$$\rho_A(a, g(b)) = \rho_B(b, f(a)) \quad \text{for all } a \in A \text{ and } b \in B.$$

- *Left fuzzy Galois connection between* $\mathbb{A}$ *and* $\mathbb{B}$ and denoted by $(f, g) : \mathbb{A} \leftharpoondown\!\rightharpoondown \mathbb{B}$, if

$$\rho_A(g(b), a) = \rho_B(f(a), b) \quad \text{for all } a \in A \text{ and } b \in B.$$

- *Fuzzy adjunction between* $\mathbb{A}$ *and* $\mathbb{B}$ and denoted by $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$, if

$$\rho_A(a, g(b)) = \rho_B(f(a), b) \quad \text{for all } a \in A \text{ and } b \in B.$$

- *Fuzzy co-adjunction between* $\mathbb{A}$ *and* $\mathbb{B}$ and denoted by $(f, g) : \mathbb{A} \rightleftharpoons \mathbb{B}$, if

$$\rho_A(g(b), a) = \rho_B(b, f(a)) \quad \text{for all } a \in A \text{ and } b \in B.$$

Given a fuzzy poset $\langle A, \rho_A \rangle$, for every element $a \in A$, the extension to the fuzzy setting of the notions of upward closure and downward closure of the element a are defined by $a^{\uparrow}, a^{\downarrow} : A \to L$ where $a^{\uparrow}(u) = \rho_A(a, u)$ and $a^{\downarrow}(u) = \rho_A(u, a)$ for all $u \in A$. An element $a \in A$ is a *maximum* for a fuzzy set X if $X(a) = \top$ and $X \subseteq a^{\downarrow}$. The definition of *minimum* is similar.

On fuzzy preordered sets, due to the absence of antisymmetry, there exists a crisp set of maxima (resp. minima) for X, not necessarily a singleton, which we will denote *p-max(X)* (resp., *p-min(X)*).

From now on, we will use the following notation: for a mapping $f : A \to B$ and a fuzzy subset Y of B, the fuzzy set $f^{-1}(Y)$ is defined as $f^{-1}(Y)(a) = Y(f(a))$, for all $a \in A$.

Theorem 3.1: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B \rangle$ be fuzzy preordered sets and consider two mappings $f : A \to B$ and $g : B \to A$. The following conditions are equivalent:

1. $(f, g) \colon \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$.

2. f and g are isotone, $g \circ f$ is inflationary and $f \circ g$ is deflationary.

3. $f(a)^{\uparrow} = g^{-1}(a^{\uparrow})$ for all $a \in A$.

4. $g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\downarrow})$ for all $b \in B$.

5. f is isotone and $g(b) \in \text{p-}\max f^{-1}(b^{\downarrow})$ for all $b \in B$.

6. g is isotone and $f(a) \in \text{p-}\min g^{-1}(a^{\uparrow})$ for all $a \in A$.

From the last definitions and theorem, we obtain characterizations for the cases of fuzzy Galois connections, fuzzy adjunction and fuzzy co-adjunction as summarized in Table 2.

Any fuzzy preordered set $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ defines a (crisp) preordered set $\mathbb{A}_c = \langle A, \lesssim_A \rangle$ where $a \lesssim_A b$ iff $\rho_A(a, b) = \top$.

Lemma 3.1: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B \rangle$ be fuzzy preordered sets and consider two mappings $f \colon A \to B$ and $g \colon B \to A$. For $\leftrightarrows \in \{\hookleftarrow, \hookrightarrow, \leftrightharpoons, \rightleftharpoons\}$, if $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightarrows \mathbb{B}$ then $(f, g) \colon \mathbb{A}_c \leftrightarrows \mathbb{B}_c$

From a fuzzy preordered set $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$, by defining $\approx$ as the crisp equivalence relation $a \approx b$ if and only if $\rho_A(a, b) = \rho_A(b, a) = \top$, the quotient set $A/_{\approx}$ is a fuzzy poset with respect to the fuzzy binary relation $\rho_{A_{\approx}}$ defined by $\rho_{A_{\approx}}([a], [b]) = \rho_A(a, b)$. Moreover, any mapping f between fuzzy preordered sets defines a mapping $f_{\approx}$ over those quotient posets in the same way as in Theorem 2.4.

Theorem 3.2: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B \rangle$ be fuzzy preordered sets and consider two mappings $f \colon A \to B$ and $g \colon B \to A$. Then, for $\leftrightarrows \in \{\hookleftarrow, \hookrightarrow, \leftrightharpoons, \rightleftharpoons\}$, $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightarrows \mathbb{B}$ if and only if $(f_{\approx}, g_{\approx}) \colon \mathbb{A}/_{\approx} \leftrightarrows \mathbb{B}/_{\approx}$.

Theorem 3.3: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B \rangle$ be fuzzy preordered sets and $\leftrightarrows \in \{\hookleftarrow, \hookrightarrow, \leftrightharpoons, \rightleftharpoons\}$. If $(f, g) \colon \mathbb{A} \leftrightarrows \mathbb{B}$ then, for all $a \in A, b \in B$, the

Table 2: Summary of definitions and equivalent characterizations

Fuzzy Galois connections	
Right fuzzy Galois connection between $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ $(f, g)\colon \mathbb{A} = \langle A, \rho_A\rangle \rightharpoondown \mathbb{B} = \langle B, \rho_B\rangle$	Left fuzzy Galois connection between $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ $(f, g)\colon \mathbb{A} = \langle A, \rho_A\rangle \leftharpoondown \mathbb{B} = \langle B, \rho_B\rangle$
$\rho_B(b, f(a)) = \rho_A(a, g(b))$ for all $a \in A$ and $b \in B$	$\rho_B(f(a), b) = \rho_A(g(b), a)$ for all $a \in A$ and $b \in B$
f and g are antitone maps and $g \circ f$ and $f \circ g$ are inflationary maps	f and g are antitone maps and $g \circ f$ y $f \circ g$ are deflationary maps
$f(a)^{\downarrow} = g^{-1}(a^{\uparrow})$ for all $a \in A$	$f(a)^{\uparrow} = g^{-1}(a^{\downarrow})$ for all $a \in A$
$g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\uparrow})$ for all $b \in B$	$g(b)^{\uparrow} = f^{-1}(b^{\downarrow})$ for all $b \in B$
f is an antitone map and $g(b) \in \text{p-max}\, f^{-1}(b^{\uparrow})$ for all $b \in B$	f is an antitone map and $g(b) \in \text{p-min}\, f^{-1}(b^{\downarrow})$ for all $b \in B$
g is an antitone map and $f(a) \in \text{p-max}\, g^{-1}(a^{\uparrow})$ for all $a \in A$	g is an antitone map and $f(a) \in \text{p-min}\, g^{-1}(a^{\downarrow})$ for all $a \in A$
Fuzzy adjunction and fuzzy co-adjunction	
Fuzzy adjunction between $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ $(f, g)\colon \mathbb{A} = \langle A, \rho_A\rangle \leftrightarrows \mathbb{B} = \langle B, \rho_B\rangle$	Fuzzy co-adjunction between $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ $(f, g)\colon \mathbb{A} = \langle A, \rho_A\rangle \rightleftarrows \mathbb{B} = \langle B, \rho_B\rangle$
$\rho_B(f(a), b) = \rho_A(a, g(b))$ for all $a \in A$ and $b \in B$	$\rho_B(b, f(a)) = \rho_A(g(b), a)$ for all $a \in A$ and $b \in B$
f and g are isotone maps, $g \circ f$ is inflationary and $f \circ g$ is deflationary	f and g are isotone maps, $g \circ f$ is deflationary and $f \circ g$ is inflationary
$f(a)\uparrow = g^{-1}(a^{\uparrow})$ for all $a \in A$	$f(a)^{\downarrow} = g^{-1}(a^{\downarrow})$ for all $a \in A$
$g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\downarrow})$ for all $b \in B$	$g(b)^{\uparrow} = f^{-1}(b^{\uparrow})$ for all $b \in B$
f is an isotone map and $g(b) \in \text{p-max}\, f^{-1}(b^{\downarrow})$ for all $b \in B$	f is an isotone map and $g(b) \in \text{p-min}\, f^{-1}(b^{\uparrow})$ for all $b \in B$
g is an isotone map and $f(a) \in \text{p-min}\, g^{-1}(a^{\uparrow})$ for all $a \in A$	g is an isotone map and $f(a) \in \text{p-max}\, g^{-1}(a^{\downarrow})$ for all $a \in A$

following relations hold $(f \circ g \circ f)(a) \approx f(a)$ and $(g \circ f \circ g)(b) \approx g(b)$. Moreover,

- If (f, g) is both left and right Galois connection (resp., adjunction and co-adjunction) then $(g \circ f)(a) \approx a$ and $(f \circ g)(b) \approx b$ for all $a \in A$ and $b \in B$.

- If (f, g) is both a (left or right) Galois connection and a (co-)adjunction then, for all $a_1, a_2 \in A$, $\rho_A(a_1, a_2) = \top$ implies $f(a_1) \approx f(a_2)$ and, for all $b_1, b_2 \in B$, $\rho_B(b_1, b_2) = \top$ implies $g(b_1) \approx g(b_2)$.

Building fuzzy adjunctions on fuzzy posets

Now, we present the main results which lead us to the construction of fuzzy adjunctions between fuzzy posets and fuzzy adjunctions between preordered sets.

Given a mapping f from a fuzzy poset $\langle A, \rho_A \rangle$ to any set B, we will introduce conditions which allow to define a fuzzy ordering on B and a mapping from B to A such that the pair (f, g) forms a fuzzy adjunction.

The problem stated above is addressed from the canonical decomposition of $f\colon \langle A, \rho_A \rangle \to B$ through $A_{\equiv_f}$, the quotient set of A wrt the *kernel relation* $\equiv_f$.

In the following results, we provide the conditions that ensure the definition of a right adjoint for the three mappings, namely $\pi\colon A \to A_{\equiv_f}$ where $\pi(a) = [a]_{\equiv_f}$; the bijective mapping $\varphi\colon A_{\equiv_f} \to f(A)$ defined by $\varphi([a]_{\equiv_f}) = f(a)$ and the inclusion $i\colon f(A) \to B$ that satisfies $f = i \circ \varphi \circ \pi$.

Lemma 3.4: Let $\langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy poset and let $\sim$ be an equivalence relation on A ($\sim \subseteq A \times A$). Suppose that the following conditions hold

1. there exists $\max[\mathrm{a}]_\sim$, for all $a \in A$.

2. $\rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_A(\max[\mathrm{a_1}]_\sim, \max[\mathrm{a_2}]_\sim)$, for all $a_1, a_2 \in A$.

Then, $\rho_{A_\sim} : A_\sim \times A_\sim \to L$ defined by $\rho_{A_\sim}([a_1]_\sim, [a_2]_\sim) = \rho_A(a_1, \max[\mathrm{a}_2]_\sim)$ is a fuzzy ordering on $A_\sim$.

Moreover, the pair $(\pi, \max)$ is a fuzzy adjunction between A and $A_\sim$.

Now, given a bijective mapping $\varphi\colon \langle A, \rho_A\rangle \to B$, we show that φ induces a fuzzy ordering, $\rho_B : B \times B \to \mathbb{L}$ defined as $\rho_B(b, b') = \rho_A(\varphi^{-1}(b), \varphi^{-1}(b'))$ such that φ and φ^{-1} are isotone maps and $(\varphi, \varphi^{-1})\colon A_{\equiv_f} \leftrightharpoons f(A)$ (see Figure 4).

$$
\begin{tikzcd}
\langle A, \rho_A\rangle \arrow[rr, "f"] \arrow[d, two heads, shift left, "\pi"] & & B \\
\langle A_{\equiv_f}, \rho_{A_{\equiv_f}}\rangle \arrow[u, dashed, shift left, "\max"] \arrow[r, shift left, "\varphi"] & \langle f(A), \rho_{f(A)}\rangle \arrow[l, dashed, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[ur, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figure 4: $(\pi, \max)\colon \mathrm{A} \leftrightharpoons \mathrm{A}_{\equiv_\mathrm{f}}$ and $(\varphi, \varphi^{-1})\colon A_{\equiv_f} \leftrightharpoons f(A)$.

Finally, in order to extend the fuzzy ordering on $f(A)$ to the whole set B, we consider the case of a subset $X \subseteq U$ and a fuzzy order ρ_X on X that can be extended to a fuzzy ordering on U as follows; fix an element $m \in X$ and define $\rho_m\colon U \times U \to L$ as

$$
\rho_m(x, y) = \begin{cases} \rho_X(x, y) & \text{if } x, y \in X \\ \rho_X(x, m) & \text{if } x \in X, y \notin X \\ \bot & \text{if } x \notin X, x \neq y \\ \top & \text{if } x \notin X, x = y \end{cases}
$$

Then, ρ_m is a fuzzy ordering on U. Moreover, the mapping $j_m\colon \langle X, \rho_X\rangle \to \langle U, \rho_m\rangle$ defined as follows

$$
j_m(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \\ m & \text{si } x \notin X \end{cases}
$$

satisfies that $(i, j_m)\colon \langle X, \rho_X\rangle \leftrightharpoons \langle U, \rho_m\rangle$.

Theorem 3.4: Let $\langle A, \rho_A\rangle$ be a fuzzy poset and consider a mapping $f\colon A \longrightarrow B$. Let $A_{\equiv_f}$ be the quotient set on the kernel relation. Then, there exists a fuzzy ordering ρ_B on B and a mapping $g\colon B \longrightarrow A$ such that (f, g) : $\langle A, \rho_A\rangle \leftrightharpoons \langle B, \rho_B\rangle$ if and only if

1. there exists $\max[a]_{\equiv_f}$ for all $a \in A$.

2. for all $a_1, a_2 \in A$, the following inequality holds:

$$\rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_A(\max[a_1]_{\equiv_f}, \max[a_2]_{\equiv_f})$$

In Figure 5, we represent the composition of the three adjunctions which provides a right adjoint of the mapping f.

$$\begin{tikzcd}
\langle A, \rho_A\rangle \arrow[rr, "f"'] \arrow[d, shift left, "\pi"] & & \langle B, \rho_B\rangle \arrow[ll, dashed, bend right, "g=\max\circ\varphi^{-1}\circ j_m"'] \arrow[d, dashed, shift left, "j_m"] \\
\langle A_{\equiv_f}, \rho_{A_{\equiv_f}}\rangle \arrow[u, dashed, shift left, "\max"] \arrow[rr, shift left, "\varphi"] & & \langle f(A), \rho_{f(A)}\rangle \arrow[ll, dashed, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[u, shift left, "i"]
\end{tikzcd}$$

Figure 5: (f, g) : $\langle A, \rho_A\rangle \leftrightharpoons \langle B, \rho_B\rangle$ such that $g = \max \circ \varphi^{-1} \circ j_m$.

Building fuzzy adjunctions on fuzzy preordered sets

The construction follows the same scheme of that given in Theorem 3.4 as much as possible. But, we need to define a suitable fuzzy version of the p-kernel relation.

Definition 3.4: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A\rangle$ be a fuzzy preordered set and consider a mapping $f\colon A \to B$. The *fuzzy p-kernel* relation $\cong_A$ is the transitive closure of the fuzzy union of the relations symmetric kernel $\approx_A$ and kernel $\equiv_f$.

In order to actually build the fuzzy preordering on the codomain B, we make use of a suitable fuzzy preordering between crisp subsets. The idea is to extend the notion of Hoare preorder to a fuzzy setting.

Definition 3.5: Let $\langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy preordered set, and consider C, D crisp subsets of A. The fuzzy relation $\sqsubseteq_H$ is defined as

$$(C \sqsubseteq_H D) = \bigwedge_{c \in C} \bigvee_{d \in D} \rho_A(c, d)$$

Proposition 3.2: The relation $\sqsubseteq_H$ is a fuzzy preordering in the powerset of A.

It is remarkable that $\sqsubseteq_H$ will be used just on (crisp) subsets $X \subseteq A$ with a particular property; namely, for all $x_1, x_2 \in X$ we have $\rho_A(x_1, x_2) = \top$. A subset is said to be *cyclic* if it satisfies the previous property.

The following lemma states that, for the specific case of this kind of sets, the fuzzy relation $\sqsubseteq_H$ can be very easily computed.

Lemma 3.9: Consider a fuzzy preordered set $\langle A, \rho_A \rangle$, and let X, Y be two crisp cyclic subsets of A. Then, $X \sqsubseteq_H Y = \rho_A(x, y)$ for any $x \in X$ and $y \in Y$.

Notation: Let $\langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy preordered set and let $X \colon A \to L$ be a fuzzy subset of A. The set of upper bounds of X is defined as follows

$$\mathrm{UB}(X) = \{b \in A \mid X(u) \leq \rho_A(u, b) \text{ for all } u \in A\}$$

The result below actually allows to build a fuzzy preordering relation on B by applying it to the particular case of the sets of p-minima of a fuzzy subset, which turn out to be cyclic (this is just a straightforward consequence of the definition).

Lemma 3.10: Consider a fuzzy preordered set $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ together with a mapping $f \colon A \to B$ and a subset $S \subseteq A$ satisfying the following conditions:

1. $S \subseteq \bigcup_{a\in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$
2. $\text{p-min}(\text{UB}[a]_{\cong_A} \cap S) \neq \varnothing$, for all $a \in A$.
3. $\rho_A(a_1, a_2) \leq \Big(\text{p-min}(\text{UB}[a_1]_{\cong_A} \cap S) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}[a_2]_{\cong_A} \cap S)\Big)$, for all $a_1, a_2 \in A$.

Then, for any $a_0 \in A$, the fuzzy relation $\rho_B^{a_0} \colon B \times B \to L$ defined as follows

$$\rho_B^{a_0}(b_1, b_2) = \Big(\text{p-min}(\text{UB}[a_1]_{\cong_A} \cap S) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}[a_2]_{\cong_A} \cap S)\Big)$$

where $a_i \in f^{-1}(b_i)$ if $f^{-1}(b_i) \neq \varnothing$ and $a_i = a_0$ otherwise, for each $i \in \{1, 2\}$, is a fuzzy preordering on B.

Furthermore, under the same hypotheses, it is possible to define a number of suitable right adjoints $g \colon B \to A$ for f and all of them can be specified as follows:

(C1) If $b \in f(A)$, then $g(b) \in \text{p-min}(\text{UB}[x_b]_{\cong_A} \cap S)$ for some $x_b \in f^{-1}(b)$.

(C2) If $b \notin f(A)$, then $g(b) \in \text{p-min}(\text{UB}[a_0]_{\cong_A} \cap S)$.

We conclude this section stating the theorem which summarizes the necessary and sufficient conditions for the existence of a right adjoint for a mapping between a fuzzy preordering and an unstructured set.

Theorem 3.6: Given a fuzzy preordered set $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ together with a mapping $f \colon A \to B$, there exists a fuzzy preordering ρ_B on B and a mapping $g \colon B \to A$ such that $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$ if and only if there exists $S \subseteq A$ such that, for all $a, a_1, a_2, \in A$:

1. $S \subseteq \bigcup_{a\in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$
2. $\text{p-min}(\text{UB}[a]_{\cong_A} \cap S) \neq \varnothing$
3. $\rho_A(a_1, a_2) \leq \Big(\text{p-min}(\text{UB}[a_1]_{\cong_A} \cap S) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}[a_2]_{\cong_A} \cap S)\Big)$.

Closure systems on fuzzy preordered sets

The theory of closure systems on preordered sets is used in order to provide a more meaningful framework for the extension to the fuzzy case of previous results.

The notion of closure system on a fuzzy preordered set which we use is a natural extension of the classical closure system on a crisp partial ordered set. In fact, the definition is formulated in the same terms, though we use an alternative characterization that is easier to handle.

Definition 3.8: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy preordered set and let $S \subseteq A$ be a crisp subset of A. Then S is said to be a *closure system* if the set p-$\min(a^{\uparrow} \cap S)$ is non-empty, for all $a \in A$.

Other definitions of closure system in a fuzzy setting can be found in the literature. It is remarkable the one given by Belohlavek in [4], where the notions of L_K-closure operator and L_K-closure system on L-ordered sets were introduced, where K is a filter of the residuated lattice L. In that definition, a fuzzy closure system is a fuzzy set, so it is a different approach from ours.

There exists another definition similar in spirit to the one we propose, which was introduced in the framework of the so-called L-ordered sets. In the following result we state an alternative characterization of the notion of closure system based on ideas from [34].

Proposition 3.3: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy preordered set. A non-empty subset $S \subseteq A$ is a closure system if and only if for any $a \in A$, there exists $m_a \in S$ such that

1. $\rho_A(a, m_a) = \top$ and
2. $\rho_A(s_1, m_a) \otimes \rho_A(a, s_2) \leq \rho_A(s_1, s_2)$ for any $s_1, s_2 \in S$.

The previous result can be further improved by providing a new characterization which involves just one condition.

Theorem 3.7: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy preordered set. A subset S of A is a closure system if and only if for all $a \in A$ there exists $m_a \in S$ satisfying $\rho_A(a, u) = \rho_A(m_a, u)$ for all $u \in S$.

As an easy consequence of this theorem, we obtain a constructive version of the sets p-$\min(a^{\uparrow} \cap S)$ when S is a closure system.

Corollary 3.2: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy preordered set. If $S \subseteq A$ is a closure system then p-$\min(a^{\uparrow} \cap S) = \{s \in S \mid \rho_A(a, u) = \rho_A(s, u)$ for all $u \in S\}$, for $a \in A$.

It is well-known that closure systems and closure operators in the classical setting are different approaches to the same phenomenon. We focus now on the development of the link between these two notions on fuzzy preordered sets. In order to address this problem, we proceed by proving a number of preliminary results which will pave the way for the characterization.

Definition 3.9: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy preordered set. A mapping $c\colon A \to A$ is said to be a *closure operator* if it is isotone, inflationary and satisfies $\rho_A(c(c(a)), c(a)) = \top$ for all $a \in A$.

The following lemma states that the notions of closure system and closure operator keep being interdefinible in the framework of fuzzy preordered sets.

Lemma 3.12: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy preordered set.

i) If $S \subseteq A$ is a closure system, then any mapping $c\colon A \to A$ such that $c(a) \in$ p-$\min(a^{\uparrow} \cap S)$ is a closure operator.

ii) If $c\colon A \to A$ is a closure operator, then $S = \{a \in A : \rho_A(c(a), a) = \top\}$ is a closure system.

In the following, the constructions given in the different items of the previous lemma will be called, respectively, *the closure operator associated to* S (denoted c_S) and *the closure system associated to* c (denoted S_c).

It is well-known that, in (crisp) posets, there exists a one-to-one correspondence between closure operators and closure systems (for every closure operator $c = c_{S_c}$ and for any closure system $S = S_{c_S}$). The relationship between both notions is weaker when the underlying structure is a fuzzy preordered set.

Proposition 3.4: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy preordered set.

1. If $c\colon A \to A$ is a closure operator, then

$$\rho_A(c(a), c_{S_c}(a)) = \rho_A(c_{S_c}(a), c(a)) = \top$$

for all $a \in A$.

2. If S is a closure system then $S \subseteq S_{c_S}$ and for all $s_1 \in S_{c_S}$ there exists $s_2 \in S$ such that $\rho_A(s_1, s_2) = \rho_A(s_2, s_1) = \top$.

Now, we define the notion of a closure system compatible wrt an arbitrary fuzzy equivalence relation (a reflexive, symmetric and transitive fuzzy relation) and with the particular case of the so-called *kernel relation*.

Definition 3.10: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy preordered set and let $\sim$ be a fuzzy equivalence relation on A.

i) A closure operator $c\colon A \to A$ is said to be *compatible* wrt the relation $\sim$ if $(a_1 \sim a_2) \leq \rho_A(c(a_1), c(a_2))$, for all $a_1, a_2 \in A$.

ii) A closure system $S \subseteq A$ is said to be *compatible* wrt $\sim$ if any closure operator associated to S is compatible wrt $\sim$.

Lemma 3.13: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy preordered set and consider a fuzzy equivalence relation $\sim$ on A. Then, a closure system S is compatible with $\sim$ if and only if

$$\rho_A(a,s) \leq \bigwedge_{u \in A} ((a \sim u) \to \rho_A(u,s))$$

for all $s \in S$ and $a \in A$.

Corollary 3.3: Let $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ be a fuzzy preordered set, consider a crisp mapping $f\colon A \to B$, and let $\equiv_f$ be the kernel relation associated to f. A closure system $S \subseteq A$ is compatible with the kernel relation if and only if $\rho_A(a,s) = \rho_A(u,s)$ for all $s \in S$ and $a, u \in A$ such that $f(a) = f(u)$.

As one would expect, the mere existence of the adjunction induces a closure system in A which, moreover, is compatible with the kernel relation associated to the mapping $\equiv_f$. This condition is also sufficient as the following theorem shows.

Theorem 3.8: Consider a fuzzy preordered set $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ and a mapping $f\colon A \to B$. There exists a fuzzy preordering ρ_B on B and a mapping $g\colon B \to A$ such that (f, g) forms a fuzzy adjunction if and only if there exists $S \subseteq A$ a closure system compatible with the kernel relation $\equiv_f$.

Conclusions and future work

In this thesis, we have provided necessary and sufficient conditions to define suitable (pre)orderings on an unstructured codomain to generate adjunctions, both in crisp case and in a fuzzy setting.

Specifically, given a mapping $f\colon A \to B$ from a (pre)ordered set A into an unstructured set B, we have obtained necessary and sufficient conditions which allow us to define a suitable (pre)ordering relation on B such that there exists a mapping $g\colon B \to A$ such that (f, g) forms an adjunction between (pre)ordered sets.

Whereas the study of the partially ordered case follows more or less the intuition of what should be expected (Theorem 2.6), the description of the conditions on the preordered case is much more involved (Theorem 2.7); only later, when we have considered the use of the $\approx$-closure systems, together with the convenient definition of compatibility wrt the kernel relation $\equiv_f$, in order to rewrite the result in much more concise terms (Theorem 2.9).

In the fuzzy case, we have introduced a characterization of the existence of fuzzy adjunctions in the framework of fuzzy partially ordered sets and fuzzy preordered sets. That is, we have assumed the existence of a mapping $f\colon A \to B$ from a fuzzy poset $\langle A, \rho_A\rangle$ to a set B (not necessarily ordered or fuzzily ordered) and we have characterized when it is possible to define a fuzzy (pre)ordering on B and a mapping $g\colon B \to A$ such that (f, g) forms an adjunction (Theorem 3.4). It is remarkable the fact that the right adjoint is not unique. In fact, there is a number of degrees of freedom in order to define it: just consider the parameterized construction of g that we have given in terms of an element $a_0 \in A$ (in the case of a non-surjective f). Note, however, that our results do not imply that *every* right adjoint should be like that; we simply chose a convenient construction to extent the induced fuzzy ordering on the image of f to the whole set B.

Finally, we have analyzed the different definitions of closure operator and closure system on a fuzzy preordered set, in order to formulate the results concerning the existence of fuzzy preordering relations and adjunctions, in terms of closure systems on fuzzy preordered set (Theorem 3.8).

It is important to underscore that all the results have been stated in terms of adjunctions (isotone Galois connections) but all of them can be straightforwardly modified for using with right Galois connection, left

Galois connection and co-adjunction (in crisp and fuzzy case).

On all these issues we have several proposals to be developed as future work:

- An *L-ordered* set is a triplet $\mathbb{A} = (A, \approx_A, \rho_A)$ where $\approx_A$ is a fuzzy equivalence relation and ρ_A is an L-ordering on A [34]. One interesting line of future work will be the extension of the results in this work to triplet $\mathbb{A} = (A, \approx_A, \rho_A)$ where ρ_A is a fuzzy preorder, i.e. ρ_A is a $\approx_A$-reflexive, $\otimes$-transitive and $\otimes$-$\approx_A$-antisymmetric fuzzy binary relation which is a more general structure.

- When focusing on fuzzy extensions of order relations one can find some interesting developments on the study of both fuzzy partial orders and fuzzy preorders, see [11, 13] for instance. In these works, it is noticed that the versions of antisymmetry and reflexivity commonly used are too strong and, as a consequence, the resulting fuzzy partial orders are very close to the classical case. Accordingly, one interesting line of future work will be the adaptation of our results to these alternative weaker definitions.

- Another source of future work could be the definition of alternative interpretations of the notion of adjunction between multivalued functions (i.e., relations) both in crisp and fuzzy frameworks, with the aim of building a right adjoint for a given multivalued function.

- Concerning potential practical applications of the present work, we will explore the area of *Supervised Learning* and *Classification*, following the ideas developed by Marsala [41, 42]. From previous works by Bělohlávek - De Baets [7] and Kuznetsov [40] who have used FCA techniques to define decision trees, (specifically they used adjunctions to present a method for the construction of such trees) our aim is to propose new discrimination measures, which are prime for the classification of data sets, by building isotone functions (ultimately, adjunctions).

Publications

1. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero and M. Ojeda-Aciego. On Galois connections and Soft Computing. IWANN 2013. *Lecture Notes in Computer Science* 7903: pp. 224 – 235 (2013). CORE B.

2. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero, M. Ojeda-Aciego and F.J. Rodríguez. Generating isotone Galois connections on an unstructured codomain. IPMU 2014. *Communications in Computer and Information Science* 443: pp. 91 – 99 (2014). CORE C.

3. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero, M. Ojeda-Aciego and F.J. Rodríguez. On the existence of isotone Galois connections between preorders. ICFCA 2014. *Lecture Notes in Computer Science* 478: pp. 67 – 79 (2014). CORE C.

4. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero, M. Ojeda-Aciego and F.J. Rodríguez. On the definition of suitable orderings to generate adjunctions over an unstructured codomain. *Information Sciences*, 286 : pp. 173 – 187 (2014). Journal with JCR. Cuartil: Q_1.

5. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero and M. Ojeda-Aciego. On the construction of fuzzy Galois connections. ESTYLF 2014. *Proc. of XVII Spanish Conference on Fuzzy Logic and Technology*, pp. 99 – 102 (2014).

6. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero and M. Ojeda-Aciego. On adjunctions between fuzzy preordered sets: necessary conditions. JRS 2014. *Lecture Notes in Artificial Intelligence* 8536: pp. 211 – 221 (2014).

7. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero and M. Ojeda-Aciego. On closure systems and adjunctions between fuzzy preordered sets. ICFCA 2015. *Lecture Notes in Artificial Intelligence* 9113: pp. 114 – 127 (2015). CORE C.

8. I.P. Cabrera, P. Cordero, F. García-Pardo, and M. Ojeda-Aciego. Constructing right adjoints between fuzzy preordered sets. CAEPIA 2015. *Actas de la XVI Conferencia de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial*, pp. 439 – 447 (2015).

9. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero and M. Ojeda-Aciego. On fuzzy preordered sets and monotone Galois connections. IEEE SSCI 2015. *IEEE Symposium Series on Computational Intelligence* 144: pp. 990 – 994 (2015).

Introducción

En el ámbito de las estructuras ordenadas, Ø. Ore introdujo en 1944 el concepto de *conexión de Galois* [46] como un par de funciones antítonas entre dos conjuntos parcialmente ordenados, generalizando así la teoría de polaridades entre retículos completos, previamente utilizadas por Birkhoff en 1940 [10]. Este concepto supone una generalización de la correspondencia subgrupo-subcuerpo que se describe en el clásico Teorema Fundamental de la Teoría de Galois, de ahí el origen del término.

Años más tarde, J. Schmidt [48] mantuvo la terminología de conexión de Galois, pero cambió las funciones antítonas por funciones isótonas, lo cual favoreció la aplicabilidad de este concepto a Computación.

El término *adjunción* fue introducido en 1958 por D. M. Kan [36]. Originalmente fueron definidas en un contexto categórico y tal vez debido a esto, pueden encontrarse gran cantidad de ejemplos de adjunciones en varias áreas de investigación, que van desde las más teóricas a las más aplicadas.

Cuando se interpreta una adjunción en la categoría de conjuntos ordenados, se observa que es una noción bastante similar a la de conexión de Galois y, en cierta medida, una permite definir la otra: una adjunción entre dos conjuntos ordenados A y B es una conexión de Galois en la cual la relación de orden sobre B se invierte. Esto lleva a la utilización del término *conexión de Galois isótona* para referirse a una adjunción entre conjuntos ordenados.

La comparación de distintos entes matemáticos es uno de los objetivos de investigación más recurrentes en el ámbito de las matemáticas. En este sentido las adjunciones (conexiones de Galois isótonas) juegan un papel importante en numerosas aplicaciones, debido a su capacidad para poder vincular mundos aparentemente muy dispares; por esto Denecke, Erné, y Wismath señalan en su monografía [19] la siguiente metáfora: *Galois connections provide the structure-preserving passage between two worlds of our imagination*.

En los últimos años se ha producido un notable incremento en el número de publicaciones relativas a conexiones de Galois, tanto isótonas como antítonas. Se pueden encontrar numerosos trabajos sobre desarrollos teóricos o aplicados como por ejemplo [14, 19, 38]. En [43] se puede ver una primera visión sobre aplicaciones. Otras referencias más específicas sobre el tema pueden encontrarse, por ejemplo, en programación [45] o lógica [35]. Así como los realizados por Castellini et al. en [15] y García et al. en [29] en contextos categóricos.

Cabe señalar que muchos de estos trabajos utilizan conexiones de Galois en el marco del Análisis de Conceptos Formales (FCA), tanto desde un punto de vista teórico como aplicado. Esto se debe a que el pilar básico sobre el que se construye esta rama de las ciencias de la información son los operadores de derivación que forman una conexión de Galois antítona. FCA modeliza las estructuras básicas del pensamiento a partir de estos operadores en el marco de la teoría de retículos. En [20] puede verse una visión general de esta relación. Bělohlávek y Konečný [8] hacen hincapié sobre la dualidad entre conexiones de Galois isótonas y antítonas y muestran la deducibilidad entre los retículos de conceptos generados mediante el uso de cada tipo de conexión, de forma que la "dualidad"funciona sólo en un sentido; Valverde y Peláez han estudiado la extensión de los distintos modos de conceptualización [51] y han proporcionado una visión general de la disciplina; Díaz y

Medina [21] utilizan conexiones de Galois como herramientas para resolver ecuaciones.

También hay diversos trabajos que sugieren el uso de la teoría de conjuntos ordenados en el campo de la *Química*, incluso se pueden encontrar algunos dedicados exclusivamente al uso de órdenes parciales en esta disciplina. Específicamente, [1] aplica Análisis de Conceptos Formales a la clasificación de objetos antiguos (concretamente, antiguos utensilios de bronce egipcio).

Más recientemente, A. Kerber [37] aboga por el uso de la teoría de Análisis de Conceptos Formales como herramienta para toma de decisiones en el ámbito de las *Ciencias Medioambientales*.

El interés en las conexiones de Galois no se observa solamente en la comunidad FCA. Construir o definir una conexión de Galois o una adjunción es potencialmente útil en cualquier área de estudio en la que la teoría de órdenes parciales o preórdenes se puedan aplicar. El conocimiento de la existencia de un (pre)orden adecuado, permite la utilización de las propiedades de las conexiones de Galois en el seno de numerosas teorías.

Otro campo de aplicación interesante es la *Lingüística*: en [44], el estudio de la inferencia gramatical en sistemas Lambek (simples y mixtos) se hace en términos de conexiones de Galois.

Un tercer campo de aplicación es la *Bioinformática*: en [47] se utilizan las propiedades de las conexiones de Galois para identificar grupos de genes a partir de conjuntos de datos de microarrays; en [26] se aplican sistemas para desarrollar una aplicación que permite extraer información biológica de datos del genoma en bruto; en [25] se aplica el marco de la interpretación abstracta (en gran medida basado en la noción de conexión de Galois) a la formalización de nuevas abstracciones de uso común en la *Biología*.

Se pueden encontrar en la bibliografía resultados relacionados con condiciones suficientes o necesarias para la existencia de una conexión de Galois entre estructuras ordenadas. De hecho, el teorema de Freyd caracteriza cuándo un funtor (operador) posee adjunto. Pero en ninguno de estos trabajos se aborda el problema de la construcción de conexiones de Galois con codominios en los que, a priori, se desconoce si poseen una estructura ordenada.

El objetivo principal de este trabajo es partir de una aplicación $f\colon A \to B$ desde un conjunto A dotado con una determinada estructura hasta un conjunto B no necesariamente dotado de estructura, para estudiar y caracterizar las situaciones en las cuales se pueda definir una estructura en B similar a la de A, de forma que además se pueda construir una aplicación $g\colon B \to A$ tal que el par (f, g) sea una adjunción (conexión de Galois isótona).

De este modo, dependiendo de la estructura definida sobre el conjunto A se presentarán diferentes resultados para definir la estructura sobre el conjunto B y la aplicación $g\colon B \to A$. En concreto, se estudia el problema en el caso en el que el dominio A está dotado de una estructura de orden parcial y también el caso en el que A es un conjunto preordenado. Ambas situaciones se abordan tanto en el caso clásico como en el caso difuso.

En 1965, Lotfi Zadeh introduce la Teoría de Conjuntos Difusos [53]. En este trabajo se aborda definitivamente el problema del modelado matemático de la ambigüedad, con la definición de *conjunto difuso* X en un universo U como una aplicación $X : U \to [0,1]$ que asocia a cada elemento $u \in U$ un valor del intervalo real $[0,1]$ y donde $X(u)$ representa el grado de pertenencia de u al conjunto difuso X.

Actualmente, en lugar de trabajar con el intervalo real $[0,1]$, muchos autores utilizan la estructura de *retículo residuado* $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot, \otimes, \to)$, introducido en 1930 por Dilworth [23], que es más general, y que fue utilizada por Goguen [32], en 1967, para definir los *L-conjuntos*, que generalizan la definición de conjunto difuso.

El término *conexión de Galois difusa* fue introducido por R. Bělohlávek en [3] como un par de aplicaciones definidas entre los conjuntos de conjuntos difusos definidos sobre dos universos. Desde entonces, en el ámbito de la lógica difusa, se pueden encontrar numerosos artículos en los cuales se estudian las conexiones de Galois difusas desde un punto de vista algebraico y abstracto. Ejemplo de ello son los trabajos realizados por el propio Bělohlávek en [5], Georgescu y Popescu [30] y Frascella en [28]. Entre las aplicaciones con conexiones de Galois difusas se pueden destacar los trabajos de Denecke, Erné y Wismath [19], Kuznetsov [40] o Mu [45].

Otros autores han introducido enfoques alternativos derivados de las aplicaciones: por ejemplo, Shi et al. [50] introducen una definición de adjunción difusa para su uso en la morfología matemática difusa.

Existen otras extensiones más recientes como son, por ejemplo, las que se pueden encontrar en [9,39,52]. Destacamos la realizada por Yao y Lu en [52] en 2009, donde se define una conexión de Galois difusa como un par de aplicaciones definidas entre conjuntos clásicos dotados de relaciones difusas. Esta nueva visión generaliza la definición original dada por Bělohlávek en 1999 y es la que adoptamos en el presente trabajo.

En este sentido, nuestro problema de estudio en ambiente difuso se describe de la siguiente forma: se considera una aplicación $f : \langle A, \rho_A\rangle \to B$ donde A es un conjunto clásico, ρ_A un orden difuso en A y B un conjunto clásico no necesariamente dotado de estructura, y se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que exista una relación de orden difusa en B y una aplicación g de forma que (f, g) sea una adjunción difusa.

También, se plantea el problema anterior sobre estructuras más generales que los conjuntos con órdenes difusos. Sin embargo, a la hora de considerar estructuras más generales, existen diversos enfoques. Algunos autores [27] sugieren trabajar con relaciones no reflexivas, mientras que otros sostienen que las propiedades reflexiva y antisimétrica son propiedades contradictorias [11]. Nuestra elección en este caso ha sido trabajar con ausencia de antisimetría y, por tanto, se considerarán conjuntos clásicos dotados de relaciones difusas reflexivas y transitivas.

Por otro lado, con el objeto de estudiar la existencia del adjunto por la derecha de una aplicación f definida sobre alguna de las estructuras anteriormente comentadas, tanto en ambiente clásico como difuso, nos apoyaremos en la relación existente entre los operadores de cierre y las adjunciones. Esta relación se puede definir en términos de categorías [22], pero es mucho más conocida en el marco de la teoría de dominios y semántica denotacional [31]. Asimismo, los operadores de cierre y los sistemas de cierre de un conjunto parcialmente ordenado están en correspondencia biunívoca, de manera que se pueden proporcionar condiciones necesarias y suficientes (tanto en el caso clásico como en el caso difuso) para dotar al conjunto B de estructura y poder definir una aplicación $g\colon B \to A$ tal que (f, g) sea una adjunción, en términos de la existencia de un sistema de cierre en A con propiedades adecuadas.

Organización y resultados aportados

Al comenzar a revisar la literatura sobre el tema, nos encontramos con una escasa uniformidad en la denominación y definición del término adjunción (resp. conexión de Galois). De hecho, se pueden encontrar diferentes trabajos que utilizan el mismo término para referirse a nociones distintas. A pesar de ser cierto que las cuatro definiciones existentes están muy relacionadas, se debe destacar que no tienen exactamente las mismas propiedades y que en trabajos anteriores la estructura más habitual sobre la que se utilizan estas definiciones es la de un conjunto parcialmente ordenado.

Tras el primer capítulo, dedicado a la introducción de definiciones preliminares y resultados conocidos de la literatura previa, la Sección 2.1 de esta tesis se dedica a estudiar las diferentes denominaciones de una conexión de Galois, las relaciones que existen entre ellas y sus correspondientes caracterizaciones, todo ello utilizando como novedad los conjuntos preordenados, en lugar de ordenados. La ausencia de antisimetría permite extender las distintas definiciones y caracterizaciones de adjunción (respectivamente conexión de Galois) entre conjuntos con estructuras más generales.

En la Sección 2.3.1, se considera una aplicación $f\colon \langle A, \leq_A\rangle \to B$ donde $\langle A, \leq_A\rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado y se realiza la descomposición canónica de la función f a través del conjunto cociente de A con respecto a la *relación núcleo*. Partiendo del problema inicial de deducir las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un orden parcial en B y para la definición de un adjunto por la derecha de f, con esta descomposición canónica se pretende dividir la cuestión en tres problemas más simples, a saber, la construcción de un orden en el codominio y un adjunto por la derecha para cada una de las aplicaciones que forman parte de la citada descomposición. Esto resuelve la cuestión planteada para el caso de funciones que son sobreyectivas. Para el caso general, es necesario analizar previamente cómo extender una relación de preorden definida sobre un subconjunto de un conjunto dado a dicho conjunto así como la definición de un adjunto por la derecha para la inclusión natural del subconjunto dentro del conjunto.

En la Sección 2.3.2 se aborda el mismo problema descrito en la sección anterior pero esta vez en el caso de conjuntos preordenados. Aquí, la ausencia de la propiedad antisimétrica hace necesario utilizar la que se ha denominado relación *p-núcleo*, que es el cierre transitivo de la unión de la relación núcleo y la relación de equivalencia *núcleo simétrico*. Asimismo, el hecho de que no se tenga unicidad para el máximo o el mínimo de un subconjunto, hace necesario trabajar con relaciones definidas en el conjunto de partes de un conjunto (concretamente, con el preorden de Hoare). Todo ello hace aumentar la dificultad en la búsqueda de las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una relación de preorden en el codominio y la existencia de un adjunto por la derecha, así como las demostraciones de los distintos resultados. A continuación, la Sección 2.3.3 analiza la unicidad del adjunto por la derecha y del orden parcial (preorden) definido sobre el codominio.

En la última sección del Capítulo 2 se introducen los denominados operadores y sistemas de $\approx$-*cierre* en conjuntos preordenados y se analiza la relación existente entre ambos (que deja de ser biunívoca, como sucede en el caso de órdenes parciales). Asimismo, se trabaja con la noción de *compatibilidad* respecto a una relación de equivalencia y se caracteriza la construcción de adjunciones entre conjuntos preordenados en términos de estos sistemas de $\approx$-cierre.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de problemas similares a los desarrollados en el Capítulo 2, pero en ambiente difuso. Se aportan las definiciones de las nociones de adjunción difusa, co-adjunción difusa y conexiones de Galois difusas por la derecha y por la izquierda entre conjuntos con preórdenes difusos. Además se presentan las distintas caracterizaciones de los conceptos anteriormente señalados, así como las relaciones entre ellos.

En la Sección 3.2.1 se estudia la construcción de adjunciones entre conjuntos con órdenes difusos, utilizando de nuevo la relación núcleo, en su versión difusa, y la descomposición canónica de la función de partida respecto a ella. El teorema principal de esta sección recoge una caracterización para la definición de una relación difusa de orden sobre el codominio B y un adjunto por la derecha para $f\colon \langle A, \rho_A \rangle \to B$ donde $\langle A, \rho_A \rangle$ es un conjunto con un orden difuso.

Para abordar el estudio del problema anterior entre conjuntos con preórdenes difusos, se hace necesario trabajar con la relación difusa denominada p-*núcleo* que es la relación de equivalencia difusa obtenida al realizar el cierre transitivo de la unión difusa de las relaciones núcleo simétrico y núcleo, definidas a partir del preorden en el dominio A y la aplicación $f\colon \langle A, \rho_A \rangle \to B$, siendo $\langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto clásico en el que se tiene definida una relación difusa que es reflexiva y transitiva. También es preciso definir un preorden difuso en el conjunto de partes de un conjunto para describir las condiciones bajo las que es posible la construcción de una adjunción.

Para finalizar, se propone la definición de sistema de cierre en un conjunto con un preorden difuso, como un subconjunto (crisp) para el cual se verifica que su intersección con la clausura superior difusa de todo elemento tiene algún elemento mínimo y se proponen además algunas caracterizaciones más manejables, que son similares a las aparecidas en la literatura previa. También se trabaja con los operadores de cierre definidos en un conjunto con un preorden difuso y se analiza la relación con los sistemas de cierre.

La construcción de un adjunto por la derecha y un preorden difuso sobre el codominio B de una aplicación $f : \langle A, \rho_A \rangle \to B$, donde ρ_A es un preorden difuso sobre A, también se caracteriza por la existencia de un sistema de cierre *compatible* con la relación núcleo.

Trabajo futuro

La investigación desarrollada para la realización de esta tesis doctoral ha dado como fruto otras posibles líneas abiertas, que permitirán continuar en la dirección de este trabajo. Las propuestas de futuro más inmediatas son:

- En el ámbito de la lógica difusa existe una corriente que sugiere eliminar la igualdad entre elementos por una relación de equivalencia difusa que represente el grado de "similitud" entre elementos. Se trata de los llamados *conjuntos L-ordenados*, que son ternas $\langle A, \approx_A, \rho_A \rangle$ donde $\approx_A$ es una relación de equivalencia en A y ρ_A es un L-orden (ver definición en [34]). La línea de trabajo que se propone consiste en extender los resultados de esta tesis a adjunciones definidas entre conjuntos de esta clase.

- Al estudiar las extensiones difusas de las relaciones de orden, se ha detectado la existencia de diferentes versiones de antisimetría y reflexividad, ver por ejemplo los trabajos realizados por Bodenhofer, De Baets y Fodor [12, 13]. En ellos se observa que las versiones difusas de la propiedad antisimétrica y la propiedad reflexiva usadas habitualmente, suponen condiciones demasiado fuertes y, como consecuencia, los órdenes parciales difusos resultantes están muy cerca de los órdenes parciales en ambiente clásico. Por lo tanto, una interesante línea de trabajo futuro será el estudio de estas estructuras para investigar la posible extensión de los resultados presentados en esta tesis.

- Otra propuesta de trabajo es el estudio de la extensión de la noción de adjunción al marco de trabajo donde se utilicen las *funciones difusas*, así como la aportación de una definición alternativa de la noción de adjunción con funciones multivaluadas, tanto en ambiente clásico como en difuso.

- A raíz de la estancia realizada en el Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6) de la Universidad Pierre et Marie Curie-París, ha surgido una línea de trabajo en Machine Learning, en concreto en el campo del Aprendizaje Supervisado y la Clasificación (ver trabajos realizados por Marsala [41, 42]). Basándonos en trabajos anteriores como son los realizados por Bělohlávek y De Baets [7] y Kuznetsov [40] y una vez establecida la sinergia entre Análisis de Conceptos Formales (FCA), conexiones de Galois y árboles de decisión, se pretende proponer aplicaciones para clasificación, mediante el uso de árboles de decisión. La importancia del desarrollo de esta aplicación radica en la posibilidad de construir funciones monótonas, en definitiva, adjunciones, que permitan utilizar estas técnicas para la construcción de nuevas medidas de discriminación, fundamentales para la clasificación de los conjuntos de datos.

Publicaciones

1. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero and M. Ojeda-Aciego. On Galois connections and Soft Computing. IWANN 2013. *Lecture Notes in Computer Science* 7903: pp. $224-235$ (2013). CORE B.

2. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero, M. Ojeda-Aciego and F.J. Rodríguez. Generating isotone Galois connections on an unstructured codomain. IPMU 2014. *Communications in Computer and Information Science* 443: pp. $91-99$ (2014). CORE C.

3. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero, M. Ojeda-Aciego and F.J. Rodríguez. On the existence of isotone Galois connections between preorders. ICFCA 2014. *Lecture Notes in Computer Science* 478: pp. $67-79$ (2014). CORE C.

4. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero, M. Ojeda-Aciego and F.J. Rodríguez. On the definition of suitable orderings to generate adjunctions over an unstructured codomain. *Information Sciences*, 286 : pp. $173-187$ (2014). Journal with JCR. Cuartil: Q_1.

5. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero and M. Ojeda-Aciego. On the construction of fuzzy Galois connections. ESTYLF 2014. *Proc. of XVII Spanish Conference on Fuzzy Logic and Technology.*, pp. $99-102$ (2014).

6. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero and M. Ojeda-Aciego. On adjunctions between fuzzy preordered sets: necessary conditions. JRS 2014. *Lecture Notes in Artificial Intelligence* 8536: pp. $211-221$ (2014).

7. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero and M. Ojeda-Aciego. On closure systems and adjunctions between fuzzy preordered sets. ICFCA 2015. *Lecture Notes in Artificial Intelligence* 9113: pp. $114-127$ (2015). CORE C.

8. I.P. Cabrera, P. Cordero, F. García-Pardo, and M. Ojeda-Aciego. Constructing right adjoints between fuzzy preordered sets. *Actas de la XVI Conferencia de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial*, CAEPIA 2015, pp. 439-447.

9. F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero and M. Ojeda-Aciego. On fuzzy preordered sets and monotone Galois connections. IEEE SSCI 2015. *IEEE Symposium Series on Computational Intelligence* 144: pp. $990 - 994$ (2015).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan las definiciones, notaciones y resultados necesarios para hacer esta memoria lo más autocontenida posible. Para ello se utilizan como referencias generales [6], [10] y [17].

El capítulo comienza con las definiciones de las estructuras algebraicas básicas sobre las que se apoya este trabajo, para continuar con la introducción y caracterizaciones de la noción de adjunción (conexión de Galois isótona) entre conjuntos parcialmente ordenados. En la siguiente sección, se recuerda la relación que existe entre operadores de cierre, sistemas de cierre y adjunciones. A continuación se introducen los conceptos necesarios en ambiente difuso para poder definir y caracterizar las adjunciones difusas (conexiones de Galois isótonas difusas) entre conjuntos con órdenes difusos.

1.1. Retículos y retículos residuados

El objetivo de esta sección es introducir la estructura de retículo residuado junto con sus operaciones básicas. Para ello, se empezará recordando las definiciones de conjuntos parcialmente ordenados, retículos y retículos completos, estructuras algebraicas básicas para el desarrollo de los siguientes apartados.

1.1.1. Retículos y retículos completos

Definición 1.1 Una *relación binaria* en un conjunto no vacío A es un subconjunto $R \subseteq A \times A$. Si $(a, b) \in R$, se denotará por aRb.

Se dice que una relación binaria R es

- *Reflexiva* si aRa para todo $a \in A$.
- *Transitiva* si aRb y bRc implica aRc para todo $a, b, c \in A$.
- *Simétrica* si aRb implica bRa para todo $a, b \in A$.
- *Antisimétrica* si aRb y bRa implica $a = b$ para todo $a, b \in A$.

Sea R una relación binaria en un conjunto no vacío A. Se denomina *cierre reflexivo* de R a la relación binaria reflexiva más pequeña que contiene a R. Obsérvese que el cierre reflexivo de cualquier relación R siempre existe pues coincide con $R \cup I$, donde I denota la relación identidad en A, esto es, $I = \{(a, a) \in A \times A : a \in A\}$.

Análogamente, se denomina *cierre transitivo* de R a la relación binaria transitiva más pequeña que contiene a R. Se denotará por R^{tr}. La relación $A \times A$ es transitiva y la intersección de relaciones transitivas es también transitiva, por tanto, R^{tr} es la intersección de todas las relaciones transitivas que contienen a R.

Es bien conocido que el cierre transitivo de una relación binaria R admite la siguiente caracterización, para dos elementos $a_1, a_2 \in A$ se verifica $a_1 R^{tr} a_2$ si y sólo si existe una cadena finita $\{x_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}} \subseteq A$ tal que $x_1 = a_1$, $x_n = a_2$ y $x_i R x_{i+1}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Introducida la noción de relación binaria y sus propiedades, se está en disposición de presentar la definición de conjunto preordenado y parcialmente ordenado.

Definición 1.2

- Se dice que una relación binaria es un *preorden* si es reflexiva y transitiva. Un *conjunto preordenado* es un par $\langle A, \lesssim_A \rangle$ en el que $\lesssim_A$ es un preorden.

- Se dice que una relación binaria es un *orden parcial* si es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Un *conjunto parcialmente ordenado* es un par $\langle A, \leq_A \rangle$ en el que $\leq_A$ es un orden parcial.

Ejemplo 1.1 $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, donde $\leq$ es la relación "ser menor que", es un conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo 1.2 Dado un conjunto A, entonces $\langle 2^A, \subseteq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado, donde $\subseteq$ es la relación "estar contenido" definida sobre el conjunto de partes de A, es decir, dados $X, Y \in 2^A$ se dice que $X \subseteq Y$ si y solo si para todo $x \in X$ se satisface que $x \in Y$.

Ejemplo 1.3 Para un subconjunto X de números reales, se define la relación de *divisibilidad* del siguiente modo:

$$a \mid b \iff \text{existe } x \in X \text{ tal que } b = a \cdot x$$

La relación de divisibilidad definida sobre cualquier subconjunto X de números reales es obviamente reflexiva y transitiva.

Sin embargo, la propiedad antisimétrica no siempre se satisface: si se supone que existen $a, b \in X$ tales que $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $b = x_1 \cdot a$ y $a = x_2 \cdot b$, lo cual implica $x_2 \cdot x_1 = 1$.

Si $X = \mathbb{N}$ entonces forzosamente $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$, por tanto, $a = b$, es decir, $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado; si $X = \mathbb{Z}$, entonces podría ocurrir $x_1 = -1$ y $x_2 = -1$, con lo cual no se verifica la propiedad antisimétrica porque cualquier número entero no nulo z y su opuesto $-z$ cumplen $z \mid -z$ y $-z \mid z$. Más aún, obsérvese que la relación de divisibilidad considerada en $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ resulta ser la relación trivial, pues se cumple $x \mid y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y, por tanto, no es tampoco antisimétrica.

Dada una relación binaria R sobre un conjunto A no vacío, la *relación de cubrimiento de* R, que se denotará por R_c, se define del siguiente modo:

$$aR_cb \Leftrightarrow aRb, a \neq b \text{ y si existe } c \in A \text{ con } aRc \text{ y } cRb \text{ entonces } c = a \text{ o } c = b.$$

En tal caso, se dirá que b *cubre a* a.

Si R es una relación de orden y el conjunto A es finito, entonces la relación de cubrimiento de R determina a la propia relación R, en el siguiente sentido:

Lema 1.1 *Si A es un conjunto finito y R es un orden parcial definido en A, entonces, el cierre reflexivo y transitivo de la relación de cubrimiento R_c es la propia R.*

DEMOSTRACIÓN: Se va a demostrar que dados dos elementos $a, b \in A$ tales que aRb, entonces o bien $a = b$ o existe una cadena finita de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que $x_1 = a, x_n = b$ y se verifica $aR_c\, x_2 R_c\, x_3 \ldots R_c\, x_n = b$. Supongamos que a y b son elementos distintos. De entre todas las cadenas (subconjuntos totalmente ordenados) tales que a es el elemento más pequeño y b es el elemento más grande, se escoge aquella que tenga cardinal máximo (la cual existe, porque debido a la antisimetría, no existen elementos distintos $x, y \in A$ tales que $xR\,y$ e $yR\,x$) y le llamamos $H = \{a = x_1, x_2, \ldots x_n = b\}$, donde $x_i R\, x_{i+1}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Si suponemos que existe algún $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ y $z \in A$ tal que $x_i R\, z$ y $zR\, x_{i+1}$, entonces el conjunto $H \cup \{z\}$ sería una cadena con más elementos que H y donde a es el mayor elemento y b el más pequeño. Se llega, por tanto, a una contradicción. De manera que se verifica $x_i R_c\, x_{i+1}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n-1$. $\square$

Para representar conjuntos ordenados se usará la representación conocida como *diagrama de Hasse* que se basa en la relación de cubrimiento:

Dos elementos a y b están conectados por una línea si aR_cb. En tal caso, el elemento a se escribe por debajo de b.

Ejemplo 1.4 Sea A el conjunto de los números naturales menores o iguales que 6, es decir, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La relación de divisibilidad en A sería :

$$\{(x, x) : x \in A\} \cup \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)\}$$

La relación de cubrimiento se representaría del siguiente modo:

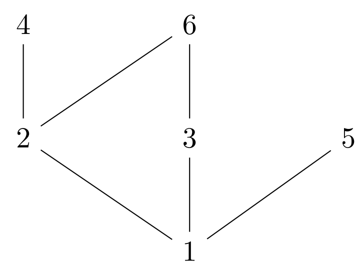


Figura 1.1: Diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado $\langle A, |\, \rangle$.

Ejemplo 1.5 Sea $B = \{1, 2, 3, 6\}$ el conjunto de los números naturales divisores de 6 y la relación $|$. Entonces el conjunto parcialmente ordenado $\langle B, |\, \rangle$ se representa a través del diagrama de Hasse de la Figura 1.2.

Ejemplo 1.6 Para un conjunto arbitrario de tres elementos $S = \{a, b, c\}$, el conjunto 2^S, ordenado con la relación de inclusión, se representa a través del diagrama de Hasse que puede verse en la Figura 1.3.

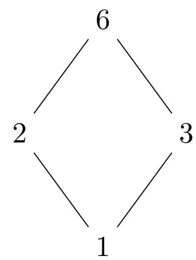


Figura 1.2: Representación del conjunto parcialmente ordenado $\langle B, |\, \rangle$.

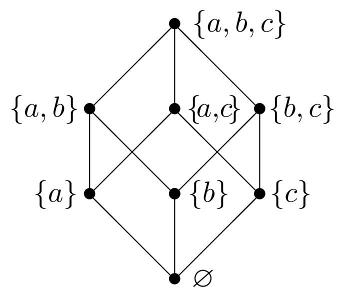


Figura 1.3: Diagrama de Hasse $\langle 2^S, \subseteq \rangle$ con $S = \{a, b, c\}$

Los conjuntos preordenados no se pueden representar con un diagrama de Hasse clásico pues la relación de cubrimiento no determina la relación. Por ejemplo, en un conjunto arbitrario de tres elementos $A = \{a, b, c\}$, la relación $\lesssim = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (b, c)\}$ es un preorden y la relación de cubrimiento sería $\lesssim_c = \{(a, b), (b, a)\}$.

Entonces, para representar gráficamente conjuntos preordenados usaremos el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $A/_{\approx}$, donde la relación $\approx$ es la denominada relación *núcleo simétrico*, esto es, $a \approx b$ si y solamente si aRb y bRa. Sin embargo, en lugar de utilizar la notación habitual de las clases de equivalencia, se utilizarán los elementos del conjunto A que están relacionados con la relación núcleo simétrico, como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.7 Se considera el conjunto de los números enteros divisores de 6, es decir $D = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$. La relación de divisibilidad $|$ es un preorden en $\mathbb{Z}$, en particular $\langle D, |\, \rangle$ es un conjunto finito preordenado que se puede representar a través del diagrama de la Figura 1.4.

$$\begin{tikzcd}
 & 6 \approx -6 & \\
2 \approx -2 \arrow[ur, no head] & & 3 \approx -3 \arrow[ul, no head] \\
 & 1 \approx -1 \arrow[ul, no head] \arrow[ur, no head] &
\end{tikzcd}$$

Figura 1.4: Representación del conjunto preordenado $\langle D, |\, \rangle$.

Definición 1.3 Sea $\langle A, \leq_A \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y z un elemento arbitrario de A.

- La *clausura inferior* $z^{\downarrow}$ de z se define como $z^{\downarrow} = \{a \in A \mid a \leq_A z\}$.
- La *clausura superior* $z^{\uparrow}$ de z se define como $z^{\uparrow} = \{a \in A \mid z \leq_A a\}$.

Definición 1.4 Sea $\langle A, \leq_A \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $X \subseteq A$. Se define el *conjunto de cotas superiores (upper bounds) de* X como sigue

$$\mathrm{UB}(X) = \{a \in A \mid x \leq a \text{ para todo } x \in X\} = \bigcap_{x \in X} x^{\uparrow}$$

Análogamente, se define el *conjunto de cotas inferiores (lower bounds) de* X como

$$\mathrm{LB}(X) = \{a \in A \mid a \leq x \text{ para todo } x \in X\} = \bigcap_{x \in X} x^{\downarrow}$$

Definición 1.5 Sea $\langle A, \leq_A \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $X \subseteq A$.

- Un elemento M se dice que es el *máximo* de X, denotado por $\max X$, si $M \in X$ y $X \subseteq M^{\downarrow}$.
- Un elemento m se dice que es el *mínimo* de X, denotado por $\min X$, si $m \in X$ y $X \subseteq m^{\uparrow}$.

Se define el *supremo de* X como

$$\sup X = \bigvee X = \min(\mathrm{UB}(X))$$

y el *ínfimo* de X como

$$\inf X = \bigwedge X = \max(\mathrm{LB}(X)).$$

Debido a la propiedad antisimétrica de los órdenes, tanto el supremo como el ínfimo de un conjunto, si existen, son únicos.

Definición 1.6 Un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, \leq_A \rangle$, se dice que es un *retículo* si existe el supremo y el ínfimo del conjunto $\{x, y\}$, para cualesquiera $x, y \in A$. En tal caso, el supremo de $\{x, y\}$ se denota por $x \vee y$ y el ínfimo por $x \wedge y$.

Ejemplo 1.8

1. Si $\langle A, \leq_A \rangle$ es un conjunto *totalmente* ordenado (esto es, para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ se verifica $a_1 \leq_A a_2$ ó $a_2 \leq_A a_1$) entonces A es un retículo.

2. Para cualquier conjunto A, el conjunto 2^A de todos los subconjuntos de A, es un retículo respecto a la inclusión de conjuntos. En este caso, supremo e ínfimo vienen dados por la unión y la intersección respectivamente; es decir, $X \vee Y = X \cup Y$ y $X \wedge Y = X \cap Y$ para todo $X, Y \in 2^A$.

Dado un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, \leq_A\rangle$, si existen el elemento mínimo de A y el elemento máximo de A se denotan por $\perp$ y $\top$, respectivamente. Obsérvese que, por definición, $\bigwedge A = \perp = \bigvee \varnothing$ y $\bigwedge \varnothing = \top = \bigvee A$, siempre que existan.

Un retículo $\langle A, \leq_A\rangle$ se dice que está *acotado* si existen $\perp$ y $\top$.

Definición 1.7 Un retículo $\langle A, \leq_A\rangle$, se dice que es *completo* si todo subconjunto X de A (finito o no) tiene supremo e ínfimo.

Por la definición anterior, se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.2 *Todo retículo completo es un retículo acotado.*

De forma alternativa, los retículos se pueden considerar álgebras en el sentido de la siguiente definición:

Definición 1.8 Sea L un conjunto no vacío con dos operaciones binarias $\vee, \wedge : L \times L \to L$, entonces $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ es un *retículo algebraico* si satisface las siguientes propiedades:

- *Idempotencia:* $x \vee x = x \quad$ y $\quad x \wedge x = x$ para $x \in L$
- *Conmutativa:* $x \vee y = y \vee x \quad$ y $\quad x \wedge y = y \wedge x$ para todo $x, y \in L$.
- *Asociativa:* $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \quad$ y $\quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ para todo $x, y, z \in L$.
- *Absorción:* $x \vee (x \wedge y) = x \quad$ y $\quad x \wedge (x \vee y) = x$ para todo $x, y \in L$.

La siguiente proposición muestra que se puede usar indistintamente la noción de retículo en ambos sentidos.

Proposición 1.1

1. *Si* $\mathcal{R} = \langle A, \leq_A\rangle$ *es un retículo, entonces* $\mathcal{R}_a = \langle A, \vee, \wedge\rangle$ *donde* $x \wedge y = \inf\{x, y\}$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$ *es un retículo algebraico.*

2. *Si* $\mathcal{R} = \langle L, \vee, \wedge\rangle$ *es retículo algebraico, entonces* $\mathcal{R}_o = \langle L, \leq_L\rangle$ *donde* $x \leq_L y$ *si y sólo si* $x \wedge y = x$ *(o equivalentemente,* $x \leq_L y$ *si y sólo si* $x \vee y = y$*) es un retículo tal que* $\inf\{x, y\} = x \wedge y \quad y \quad x \vee y = \sup\{x, y\}$.

3. $\mathcal{R}_{ao} = \mathcal{R}$ *y* $\mathcal{R}_{oa} = \mathcal{R}$

1.1.2. Retículos residuados

Los retículos residuados se utilizarán en este trabajo como estructuras básicas para establecer los grados de pertenencia en lógica difusa. En primer lugar se proporciona la definición de retículo residuado, para posteriormente recordar algunas de sus propiedades.

Definición 1.9 Un *retículo residuado* es un álgebra $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot, \otimes, \to)$ donde

1. $(L, \leq, \top, \bot)$ es un retículo acotado con elemento mínimo $\bot$ y con elemento máximo $\top$,

2. $(L, \otimes, \top)$ es un monoide conmutativo, es decir, $\otimes$ es asociativo, conmutativo y se verifica que $x \otimes \top = x$, para todo $x \in L$,

3. se verifica la *propiedad de adjunción*, es decir,

$$x \leq y \to z \quad \text{si y sólo si} \quad x \otimes y \leq z \tag{1.1}$$

para todo $x, y, z \in L$.

Las operaciones $\otimes$ y $\to$ se llaman *multiplicación* y *residuo*, respectivamente.

Un retículo residuado se dice que es *completo* si $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot)$ es un retículo completo.

Ejemplo 1.9

Sea $L = [0,1]$ el intervalo cerrado de todos los números reales comprendidos entre 0 y 1. Si se considera el orden natural de los números reales, este conjunto constituye un retículo completo donde $a \vee b = \max\{a,b\}$ y $a \wedge b = \min\{a,b\}$ para todo $a, b \in L$.

Con los siguientes pares de operaciones, se puede dotar al intervalo $[0,1]$ de diversas estructuras de retículo residuado:

- $a \otimes b = \max\{a+b-1, 0\}$ y $a \to b = \min\{1-a+b, 1\}$ para todo $a, b \in L$. Se denomina la *estructura de Lukasiewicz*.
- $a \otimes b = \min\{a,b\}$, $a \to b = 1$ si $a \leq b$ y $a \to b = b$ si $b < a$ para todo $a, b \in L$. Se denomina la *estructura de Gödel*.
- $a \otimes b = ab$, $a \to b = 1$ si $a \leq b$ y $a \to b = b/a$ si $b < a$ para todo $a, b \in L$. Se denomina la *estructura producto o de Goguen*.

A continuación se presentan algunas propiedades básicas de los retículos residuados.

Teorema 1.1 *Sea $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot, \otimes, \to)$ un retículo residuado. Entonces, para todo $x, y, z \in L$, se verifican las siguientes propiedades:*

1. $x \leq y$ *si y sólo si* $x \to y = \top$
2. $x \to x = \top$, $x \to \top = \top$, $\bot \to x = \top$
3. $\top \to x = x$
4. $x \otimes \bot = \bot$
5. $x \otimes y \leq x$, $x \leq y \to x$
6. $x \otimes y \leq x \wedge y$
7. $(x \otimes y) \to z = x \to (y \to z)$

8. $(x \to y) \otimes (y \to z) \leq (x \to z)$

Teorema 1.2 (monotonía de $\otimes$ y de $\to$) *Sea $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot, \otimes, \to)$ un retículo residuado. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

- $y_1 \leq y_2$ *implica* $x \otimes y_1 \leq x \otimes y_2$.
- $y_1 \leq y_2$ *implica* $x \to y_1 \leq x \to y_2$.
- $x_1 \leq x_2$ *implica* $x_2 \to y \leq x_1 \to y$.

para todo $x_1, x_2, x, y_1, y_2, y \in L$.

El siguiente teorema resume las propiedades de la operación multiplicación y residuo con respecto al supremo y al ínfimo.

Teorema 1.3 (propiedad distributiva de $\otimes$ y de $\to$ sobre $\wedge$ y $\vee$) *Sean $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot, \otimes, \to)$ un retículo residuado, $x, y \in L$ y $(x_i)_{i \in I} \subseteq L$ donde I es un conjunto de índices. Si para las Ecuaciones* (1.2), (1.3) *y* (1.4) *existe la parte izquierda de la igualdad, entonces existe la parte derecha y coinciden.*

$$x \otimes \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x \otimes y_i) \tag{1.2}$$

$$x \to \bigwedge_{i \in I} y_i = \bigwedge_{i \in I} (x \to y_i) \tag{1.3}$$

$$\bigvee_{i \in I} x_i \to y = \bigwedge_{i \in I} (x_i \to y) \tag{1.4}$$

Además, se verifica

$$x \otimes \bigwedge_{i \in I} y_i \leq \bigwedge_{i \in I} (x \otimes y_i) \tag{1.5}$$

$$\bigvee_{i\in I}(x \to y_i) \leq x \to \bigvee_{i\in I} y_i \tag{1.6}$$

$$\bigvee_{i\in I}(x_i \to y) \leq \bigwedge_{i\in I} x_i \to y \tag{1.7}$$

1.2. Adjunciones entre conjuntos parcialmente ordenados

En esta sección se va a introducir un concepto fundamental en este trabajo que es la de *adjunción* entre conjuntos parcialmente ordenados. De hecho, como se ha explicado en la introducción, gran parte de esta memoria está dedicada a establecer condiciones que nos permitan obtener pares de funciones que formen adjunciones.

Las siguientes definiciones presentan propiedades de las aplicaciones entre conjuntos parcialmente ordenados, necesarias para la definición y para diferentes caracterizaciones de la noción de adjunción.

Definición 1.10 Dados dos conjuntos parcialmente ordenados $\langle A, \leq_A\rangle$ y $\langle B, \leq_B\rangle$ y una aplicación $f\colon A \to B$ se dice que f es

- *isótona* si $a_1 \leq_A a_2$ implica $f(a_1) \leq_B f(a_2)$, para todo $a_1, a_2 \in A$.
- *antítona* si $a_1 \leq_A a_2$ implica $f(a_2) \leq_B f(a_1)$, para todo $a_1, a_2 \in A$.

En el caso particular en el que $A = B$,

- f es *inflacionaria* (también llamada *extensiva*) si $a \leq_A f(a)$ para todo $a \in A$.
- f es *deflacionaria* (también llamada *contractiva*) si $f(a) \leq_A a$ para todo $a \in A$.
- f es *idempotente* si $(f \circ f)(a) = f(a)$ para todo $a \in A$.

A continuación se proporciona la definición de adjunción o conexión de Galois isótona entre conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 1.11 Sean $\mathbb{A} = \langle A, \leq_A \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \leq_B \rangle$ dos conjuntos parcialmente ordenados, $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ dos aplicaciones. Se dice que el par (f, g) es una *adjunción entre* $\mathbb{A}$ *y* $\mathbb{B}$ cuando

$$a \leq_A g(b) \quad \text{si y sólo si} \quad f(a) \leq_B b$$

para todo $a \in A, b \in B$.

La aplicación f se llama *adjunto por la izquierda* y g se llama *adjunto por la derecha*.

Teorema 1.4 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \leq_A \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \leq_B \rangle$ dos conjuntos parcialmente ordenados, $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ dos aplicaciones. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$a \leq_A g(b)$ si y sólo si $f(a) \leq_B b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$.*
2. *f y g son isótonas, $g \circ f$ es inflacionaria y $f \circ g$ es deflacionaria.*
3. *$f(a)^{\uparrow} = g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a \in A$.*
4. *$g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$.*
5. *f es isótona y $g(b) = \max f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$.*
6. *g es isótona y $f(a) = \min g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a \in A$.*

Conviene destacar que en la literatura no existe uniformidad para referirse a la noción de conexión de Galois y adjunción. De hecho, en las mismas condiciones de la Definición 1.11, Erné et al, en su trabajo [24] utilizan el término conexión de Galois para referirse a la noción anterior de adjunción. En concreto, se dice que el par de aplicaciones (f, g) es una *conexión de Galois* *entre* $\mathbb{A}$ *y* $\mathbb{B}$, si f y g son funciones isótonas, $g \circ f$ es inflacionaria y $f \circ g$ es deflacionaria. Esto lleva a algunos autores a la utilización del término *conexión de Galois isótona* en lugar de *adjunción*.

Otros autores utilizan definiciones diferentes a la proporcionada en 1.11 para referirse al término conexión de Galois. Por ejemplo, Ø. Ore en su trabajo [46] define una conexión de Galois como un par de aplicaciones (f, g) tales que verifican $b \leq_B f(a)$ si y sólo si $a \leq_A g(b)$. Obsérvese que como consecuencia directa de esta definición, f y g son funciones antítonas.

Así pues, por todo lo expuesto anteriormente, es primordial señalar que todo este trabajo se desarrollará utilizando la definición de adjunción proporcionada en 1.11. En el siguiente capítulo, en la Sección 2.1 se realiza un estudio de las diferentes definiciones y caracterizaciones de la noción de adjunción y de conexión de Galois, entre conjuntos preordenados y además se justificará la equivalencia entre ellas.

1.3. Operadores y sistemas de cierre

En esta sección, se introducen las nociones de operadores de cierre, de núcleo y sistemas de cierre. Además se recuerdan algunos resultados sobre las relaciones entre operadores de cierre y sistemas de cierre, así como la relación entre las adjunciones y los operadores de cierre (sistemas de cierre).

Definición 1.12 Sea $\langle A, \leq_A \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado.

- Un *operador de cierre* (o de *clausura*) sobre A es una aplicación $c\colon A \to A$ isótona, idempotente e inflacionaria.
- Un *operador de núcleo* sobre A es una aplicación $c\colon A \to A$ isótona, idempotente y deflacionaria.

Definición 1.13 [24] Sea $\langle A, \leq_A \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Un subconjunto $S \subseteq A$ se dice que es un *sistema de cierre* si para todo $a \in A$ el conjunto $\{s \in S\colon a \leq_A s\}$ tiene elemento mínimo. Dicho de otro modo, si existe $\min(a^{\uparrow} \cap S)$ para todo $a \in A$.

La siguiente proposición muestra la relación biunívoca que existe entre operadores de cierre y sistemas de cierre de un conjunto parcialmente ordenado.

Proposición 1.2 *Sea $\langle A, \leq_A\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado.*

1. *Si $c : A \to A$ es un operador de cierre, entonces el conjunto imagen de c, que coincide con $S_c = \{a \in A\colon c(a) = a\}$ es un sistema de cierre.*

2. *Si S es un sistema de cierre, entonces cualquier aplicación $c_S : A \to A$ definida como $c_S(a) = \min(a^{\uparrow} \cap S)$ para todo $a \in A$, es un operador de cierre.*

Además, $c = c_{S_c}$ y $S = S_{c_S}$.

En la proposición anterior, c_S se denomina *operador de cierre asociado al sistema de cierre S*, y S_c se llama *sistema de cierre asociado al operador de cierre c*.

Dada una aplicación $f\colon A \to A$ se introduce la siguiente notación: se denotan por f^0 y f_0 a las siguientes aplicaciones:

- $f^0\colon A \to f(A)$ es la restricción de f a su imagen, es decir, $f^0(a) = f(a)$, para todo $a \in A$ y

- $f_0\colon f(A) \to A$ es la inclusión de la imagen de f en A, es decir, $f_0(a) = a$ para todo $a \in f(A)$.

Obsérvese que f^0 es sobreyectiva, f_0 es inyectiva y siempre se satisface $f = f_0 \circ f^0$.

En la siguiente proposición se pone de manifiesto la estrecha relación que existe también entre operadores (sistemas) de cierre sobre un conjunto parcialmente ordenado y adjunciones.

Proposición 1.3 *[17] Sea $\langle A, \leq_A \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $c : A \to A$ una aplicación. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *c es un operador de cierre.*
2. *(c^0, c_0) constituyen una adjunción entre $\langle A, \leq_A \rangle$ y $\langle S_c, \leq_A \rangle$.*
3. *Existe un conjunto parcialmente ordenado $\langle B, \leq_B \rangle$ y una adjunción (f, g) de $\langle A, \leq_A \rangle$ en $\langle B, \leq_B \rangle$ tal que $c = g \circ f$.*

1.4. Conjuntos difusos y relaciones difusas

1.4.1. Conjuntos difusos y propiedades

El concepto central de esta sección es el de *conjunto difuso*. Este concepto surge al intentar formalizar entornos en los que la información es imprecisa y modelar nociones que el razonamiento humano usa a diario. Así, por ejemplo, se puede hablar del conjunto de personas altas, aunque esto no encaja con la noción clásica de conjunto, pues la pertenencia de una persona a ese conjunto es cuestionable. Por ejemplo, nadie dudaría que una persona que mide dos metros pertenece al conjunto y otra persona que mida 1.50 m no, pero puede haber distintas opiniones acerca de si una persona que mide 1,75 m es alta o no.

Como en la teoría de conjuntos clásica, se trabajará dentro de un universo U y se especificará una regla que asocia a cada elemento $u \in U$ un grado de verdad con el cual u pertenece al conjunto X.

La Definición 1.14 introducida por Goguen en 1965 es una generalización de la primera definición de conjunto difuso dada por Zadeh en su artículo

Fuzzy sets [53] que supuso el comienzo de la teoría de sistemas difusos. En él, Zadeh definió los conjuntos difusos como funciones de un universo no vacío al intervalo de los números reales entre 0 y 1. Mientras que Goguen define los *L-conjuntos difusos* como funciones donde el grado de pertenencia está definida sobre un retículo completo.

Las estructuras algebraicas que se van a utilizar en este trabajo como conjuntos de grados de verdad son los *retículos residuados completos*. Estos combinan un retículo completo que es además un monoide conmutativo y la propiedad de adjunción, la cual permite trabajar con las operaciones de multiplicación $\otimes$ y de residuo $\to$.

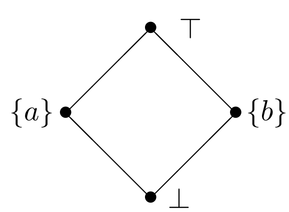
Definición 1.14 [32] Sean $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot, \otimes, \to)$ un retículo residuado completo y un conjunto U no vacío. Un *conjunto difuso o* $\mathbb{L}$*-conjunto* sobre U es una aplicación $X : U \to L$.

En adelante $\mathbb{L}$ denotará un retículo residuado completo.

Ejemplo 1.10

1. Sea $U = \{$círculo, cuadrado, hexágono$\}$. Se considera $X : U \to [0, 1]$ dado por X(círculo)$= 1$, X(cuadrado)$= 0$ y X(hexágono)$= 0,5$. Entonces, X es un conjunto difuso y representa el concepto de "tiene forma de círculo" en el universo U.

2. Sea $U = \{$círculo, cuadrado, hexágono, estrella de seis puntas$\}$. Se considera el retículo $L = \{\bot, a, b, \top\}$ cuya estructura de orden viene dada por el siguiente diagrama de Hasse:



Se define el conjunto difuso $X : U \to L$ como sigue: X(círculo)$= \top$, X(cuadrado)$= \perp$, X(hexágono)$= a$ y X(estrella)$= b$ que también representa la variable "tiene forma de círculo" en el universo U.

3. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Se define el conjunto difuso $X : \mathbb{R} \to [0,1]$ por

$$X(u) = \begin{cases} u-4 & \text{para } 4 \leq u \leq 5 \\ 6-u & \text{para } 5 < u \leq 6 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

X es un conjunto difuso que representa el concepto "ser aproximadamente 5".

Para un universo U, se denotará por L^U al conjunto (clásico) de todos los subconjuntos difusos de U. Este conjunto es un retículo residuado $L^U = (L^U, \cap, \cup, U, \varnothing, \otimes, \to)$ donde, para todo $X, Y \in L^U$, se definen

- $X \subseteq Y$ si y sólo si $X(u) \leq Y(u)$ para todo $u \in U$.
- $(X \cap Y)(u) = X(u) \wedge Y(u)$ para todo $u \in U$.
- $(X \cup Y)(u) = X(u) \vee Y(u)$ para todo $u \in U$.
- $(X \otimes Y)(u) = X(u) \otimes Y(u)$ para todo $u \in U$.
- $(X \to Y)(u) = X(u) \to Y(u)$ para todo $u \in U$.
- $\varnothing(u) = \perp$ y $U(u) = \top$ para todo $u \in U$.

Si $\mathbb{L}$ es un retículo completo, entonces $\mathbb{L}^U = (L^U, \cap, \cup, U, \varnothing, \otimes, \to)$ es también un retículo residuado completo.

1.4.2. Relaciones difusas

En la Definición 1.1 se recordaba la definición clásica de relación binaria junto con las propiedades reflexiva, transitiva, simétrica y antisimétrica. La extensión de esta noción y de las propiedades a ambiente difuso se realiza como se explica a continuación.

Dado un retículo residuado completo $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \perp, \otimes, \rightarrow)$, una *relación binaria $\mathbb{L}$-difusa sobre U* es un subconjunto difuso del producto cartesiano $U \times U$, esto es, una función $R\colon U \times U \to L$ donde $R(x, y)$ representa el grado de relación entre los elementos x e y de U.

Definición 1.15 Sea $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \perp, \otimes, \rightarrow)$ un retículo residuado completo. Se dice que una relación binaria $\mathbb{L}$-difusa sobre U es:

- *Reflexiva* si $R(u, u) = \top$ para todo $u \in U$.
- *Transitiva* si $R(u, v) \otimes R(v, w) \leq R(u, w)$ para todo $u, v, w \in U$.
- *Simétrica* si $R(u, v) = R(v, u)$ para todo $u, v \in U$.
- *Antisimétrica* si $R(u, v) = R(v, u) = \top$ implica $u = v$, para todo $u,\ v \in\ U$.

Las relaciones binarias $\mathbb{L}$-difusas también se denominan, simplemente, relaciones binarias difusas.

Definición 1.16 Una relación binaria difusa sobre U que satisface las propiedades reflexiva, transitiva y simétrica se dice que es *una relación de equivalencia difusa*.

Una relación de equivalencia difusa R es una $\mathbb{L}$-*igualdad* (*igualdad difusa*) si $R(u, v) = \top$ implica que $u = v$.

Definición 1.17 [54] Sea U un conjunto no vacío. Una *relación de orden difusa* (u *orden difuso*) en U es una relación difusa $R\colon U \times U \to L$ que satisface las propiedades reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Definición 1.18 [18] Dada una relación difusa $R\colon U \times U \to L$ *el cierre transitivo de* R es la menor relación difusa transitiva que contiene a R.

Para cualquier conjunto con un orden difuso $\mathbb{U} = \langle U, R\rangle$, se define el *dual* de $\mathbb{U}$ considerando el mismo universo y la relación difusa R^{op} donde $R^{\mathrm{op}}(a,b) = R(b,a)$ para todo $a, b \in U$.

La relación de inclusión $\subseteq$ definida anteriormente en $\mathbb{L}^U$ es una relación clásica, es decir, para dos conjuntos difusos cualesquiera $X, Y \in L^U$ o $X \subseteq Y$ o no. Desde este punto de vista es natural considerar algún tipo de propiedad que nos permita considerar el grado en que un conjunto difuso está contenido en otro conjunto difuso. La generalización más inmediata es considerar una relación binaria difusa sobre L^U, es decir, $S_U : L^U \times L^U \to L$, definida como sigue:

$$S_U(X,Y) = \bigwedge_{u \in U} (X(u) \to Y(u)) \tag{1.8}$$

para todo $X, Y \in L^U$. Así pues, $S_U(X,Y)$, *grado en el que* X *es subconjunto de* Y, expresa el grado de verdad con el que “cada elemento de X es un elemento de Y”.

Ejemplo 1.11

Para las estructuras de Lukasiewicz y de Gödel sobre el intervalo $[0,1]$, se tiene, respectivamente, que

$$S(X,Y) = \inf\{1 - X(u) + Y(u)\colon u \in U, X(u) > Y(u)\}$$

y

$$S(X,Y) = \inf\{Y(u)\colon u \in U, X(u) > Y(u)\}$$

para todo $X, Y \in L^U$.

En el siguiente resultado se presentan algunas propiedades de la relación S_U, así como su relación con la inclusión clásica $\subseteq$.

Teorema 1.5 *Sea $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot, \otimes, \rightarrow)$ un retículo residuado completo y un universo U. Entonces, para todo $X, Y, Z \in L^U$, se verifican las siguientes propiedades:*

1. $S_U(X, Y) = \top$ *si y sólo si* $X \subseteq Y$.
2. $S_U(X, X) = \top$.
3. $S_U(X, Y) \otimes S_U(Y, Z) \leq S_U(X, Z)$.
4. *Si* $S_U(X, Y) = S_U(Y, X) = \top$ *entonces* $X = Y$.

Observación 1.1 *Las propiedades $2, 3$ y 4 del Teorema 1.5 son exactamente las propiedades (reflexiva, transitiva y antisimétrica, respectivamente) de la Definición 1.17. Por tanto, la relación difusa definida en la Ecuación (1.8) sobre un conjunto no vacío U es un orden parcial difuso sobre L^U, es decir, el par $\langle L^U, S_U \rangle$ es un conjunto con un orden difuso.*

Se finaliza la sección introduciendo la extensión difusa de las definiciones 1.3 y 1.5.

Definición 1.19 Sea $\langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un orden difuso. Para cada elemento $a \in A$, se define la *clausura superior* $a^{\uparrow}$ y la *clausura inferior* $a^{\downarrow}$, respectivamente, como los siguientes conjuntos difusos:

- $a^{\uparrow}(u) = \rho_A(a, u)$ para todo $u \in A$.
- $a^{\downarrow}(u) = \rho_A(u, a)$ para todo $u \in A$.

Definición 1.20 Sea $\langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un orden difuso.

- El *máximo* de un subconjunto difuso X de A es un elemento $\overline{m} \in A$ tal que $X(\overline{m}) = \top$ y $X \subseteq \overline{m}^{\downarrow}$, es decir, $X(a) \leq \rho_A(a, \overline{m})$ para todo $a \in A$.

- El *mínimo* de un subconjunto difuso X de A es un elemento $\underline{m} \in A$ tal que $X(\underline{m}) = \top$ y $X \subseteq \underline{m}^{\uparrow}$, es decir, $X(a) \leq \rho_A(\underline{m}, a)$ para todo $a \in A$.

Obsérvese que debido a la propiedad antisimétrica de ρ_A el elemento máximo (respectivamente, mínimo) de un conjunto difuso es único.

1.5. Adjunción difusa

La sección empieza recordando las nociones de aplicación isótona, antítona, inflacionaria y deflacionaria definida entre conjuntos con órdenes difusos.

Definición 1.21 Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B \rangle$ conjuntos con órdenes difusos.

1. Una aplicación $f\colon A \to B$ se dice que es
   - *isótona* si $\rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_B(f(a_1), f(a_2))$ para cada $a_1, a_2 \in A$.
   - *antítona* si $\rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_B(f(a_2), f(a_1))$ para cada $a_1, a_2 \in A$.
2. Además, una aplicación $f\colon A \to A$ se dice que es
   - *inflacionaria* si $\rho_A(a, f(a)) = \top$ para todo $a \in A$.
   - *deflacionaria* si $\rho_A(f(a), a) = \top$ para todo $a \in A$.

En [3], R. Bělohlávek presenta una versión difusa del concepto clásico de conexión de Galois. Las aplicaciones que constituyen la conexión están definidas sobre conjuntos clásicos de conjuntos difusos. Para cualquier retículo residuado completo $\mathbb{L}$ y dos conjuntos U y V distintos del vacío, en lugar de considerar los tradicionales conjuntos de partes de U y partes de V, utilizó los conjuntos L^U y L^V y definió una *conexión de Galois difusa* como sigue:

Definición 1.22 [3] Sean U e V dos conjuntos no vacíos. Una *conexión de Galois difusa* entre U y V es un par (f, g) donde las aplicaciones $f : L^U \to L^V$ y $g : L^V \to L^U$ verifican:

i) $S_U(X_1, X_2) \leq S_V(f(X_2), f(X_1))$, para todo $X_1, X_2 \in L^U$.

ii) $S_V(Y_1, Y_2) \leq S_U(g(Y_2), g(Y_1))$, para todo $Y_1, Y_2 \in L^V$.

iii) $X \subseteq g(f(X))$ e $Y \subseteq f(g(Y))$ para todo $X \in L^U, Y \in L^V$.

Análogamente, la definición de *adjunción difusa* entre U y V quedaría como sigue.

Definición 1.23 Sean U e V dos conjuntos no vacíos. Una *adjunción difusa* entre U y V es un par de aplicaciones (f, g) donde $f : L^U \to L^V$ y $g : L^V \to L^U$ verifican:

i) $S_U(X_1, X_2) \leq S_V(f(X_1), f(X_2))$, para todo $X_1, X_2 \in L^U$.

ii) $S_V(Y_1, Y_2) \leq S_U(g(Y_1), g(Y_2))$, para todo $Y_1, Y_2 \in L^V$.

iii) $X \subseteq g(f(X))$ y $f(g(Y)) \subseteq Y$ para todo $X \in L^U$ e $Y \in L^V$.

Actualmente se pueden encontrar en la literatura otras definiciones de adjunción y/o conexión de Galois difusa. En concreto, la definición de adjunción difusa entre conjuntos con órdenes difusos que se introduce a continuación.

Definición 1.24 [52] Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$, $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B \rangle$ conjuntos con órdenes difusos, $f : A \to B$ y $g : B \to A$ dos aplicaciones. El par (f, g) se denomina *adjunción difusa entre* $\mathbb{A}$ *y* $\mathbb{B}$, denotado por $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$, si para todo $a \in A$ y $b \in B$ se satisface

$$\rho_A(a, g(b)) = \rho_B(f(a), b).$$

Es importante destacar que la Definición 1.22 es un caso particular de la Definición 1.24. En efecto, si un par de aplicaciones $f : L^U \to L^V$ y $g : L^V \to L^U$ forman una conexión de Galois entre U y V, según la Definición 1.22, ambas aplicaciones $f : L^U \to L^V$ y $g : L^V \to L^U$, también, forman una adjunción difusa entre $\langle L^U, S_U\rangle$ y $\langle L^V, S_V^{op}\rangle$, es decir, $(f, g) : \langle L^U, S_U\rangle \leftrightarrows \langle L^V, S_V^{op}\rangle$.

A lo largo de todo este trabajo se toma como definición de referencia la dada en 1.24.

Es posible establecer una relación entre adjunciones difusas entre conjuntos con órdenes difusos y adjunciones entre conjuntos clásicos parcialmente ordenados. Dado $\langle A, \rho_A\rangle$ un conjunto con un orden difuso, se puede definir un orden clásico en A de la siguiente forma:

$$a \leq_A b \quad \text{si y sólo si} \quad \rho_A(a, b) = \top. \tag{1.9}$$

Teorema 1.6 *[52] Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A\rangle$, $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B\rangle$ conjuntos con órdenes difusos, $f : A \to B$ y $g : B \to A$ dos aplicaciones. El par (f, g) es una adjunción difusa entre $\langle A, \rho_A\rangle$ y $\langle B, \rho_B\rangle$ si y sólo si f y g son aplicaciones isótonas y (f, g) es una adjunción entre $\langle A, \leq_A\rangle$ y $\langle B, \leq_B\rangle$.*

En [52] se utiliza el término *conexión de Galois* entre conjuntos con órdenes difusos para referirse a una adjunción entre conjuntos con órdenes difusos, según la Definición 1.24.

Capítulo 2

Adjunciones entre conjuntos preordenados

Al revisar la literatura existente, se ha detectado una falta de uniformidad en el uso de las nociones de conexión de Galois y adjunción entre conjuntos parcialmente ordenados. Ejemplos de ello se pueden encontrar en [24], [33] y [46] donde el término conexión de Galois se utiliza para denominar diferentes nociones. Este hecho es debido a la estrecha relación que existe entre las adjunciones y las conexiones de Galois, y además a la existencia de dos versiones de conexión de Galois y de adjunción.

Por lo descrito anteriormente, este capítulo está dedicado a establecer las definiciones de conexión de Galois y adjunción, la relación entre ellas, sus caracterizaciones y propiedades. Todo ello se formulará en conjuntos preordenados según la Definición 1.2, es decir, conjuntos dotados de una relación binaria reflexiva y transitiva.

2.1. Conexiones de Galois vs adjunciones

Esta sección se inicia extendiendo a conjuntos preordenados algunas nociones definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados en el Capítulo 1.

Para un conjunto preordenado $\mathbb{A} = \langle A \lesssim_A \rangle$, la relación inversa $\gtrsim_A$ de la relación $\lesssim_A$ es también un preorden y se denomina *relación dual* de $\lesssim_A$. El conjunto A con la relación dual de $\lesssim_A$ se denota por $\mathbb{A}^{op} = \langle A, \gtrsim_A \rangle$.

La clausura inferior y superior de un elemento $a \in A$ se denota por $a^{\downarrow} = \{x \in A : x \lesssim_A a\}$ y $a^{\uparrow} = \{x \in A : x \gtrsim_A a\}$, respectivamente.

Sea $f\colon \langle A, \lesssim_A \rangle \to \langle B, \lesssim_B \rangle$ una aplicación entre conjuntos preordenados.

- f es *isótona* si $a \lesssim_A b$ implica $f(a) \lesssim_B f(b)$, para todo $a, b \in A$.
- f es *antítona* si $a \lesssim_A b$ implica $f(b) \lesssim_B f(a)$, para todo $a, b \in A$.

En el caso particular en que $A = B$,

- f es *inflacionaria* (también llamada extensiva) si $a \lesssim_A f(a)$ para todo $a \in A$.
- f es *deflacionaria* si $f(a) \lesssim_A a$ para todo $a \in A$.

Definición 2.1 Sean $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ conjuntos preordenados, $f : A \to B$ y $g : B \to A$ dos aplicaciones. El par (f, g) se denomina[1]

- *Conexión de Galois por la derecha entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$*, denotado por $(f, g) : \mathbb{A} \rightharpoonup \mathbb{B}$, cuando

$$a \lesssim_A g(b) \text{ si y solo si } b \lesssim_B f(a) \quad \text{para todo } a \in A \text{ y } b \in B.$$

[1] El uso de las flechas para denotar las diferentes versiones se ha tomado de [51].

- *Conexión de Galois por la izquierda entre* $\mathbb{A}$ *y* $\mathbb{B}$, denotado por $(f,g) : \mathbb{A} \leftharpoondown\!\!\!\rightharpoondown \mathbb{B}$, cuando

$$g(b) \lesssim_A a \text{ si y solo si } f(a) \lesssim_B b \quad \text{para todo } a \in A \text{ y } b \in B.$$

- *Adjunción entre* $\mathbb{A}$ *y* $\mathbb{B}$, denotado por $(f,g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$, cuando

$$a \lesssim_A g(b) \text{ si y solo si } f(a) \lesssim_B b \quad \text{para todo } a \in A \text{ y } b \in B.$$

- *Co-adjunción entre* $\mathbb{A}$ *y* $\mathbb{B}$, denotado por $(f,g) : \mathbb{A} \rightleftharpoons \mathbb{B}$, cuando

$$g(b) \lesssim_A a \text{ si y solo si } b \lesssim_B f(a) \quad \text{para todo } a \in A \text{ y } b \in B.$$

El siguiente teorema establece la existencia de relaciones biunívocas entre todas las nociones anteriores. La transición entre los dos tipos de adjunciones (conexiones) se basa en el uso del orden dual en *ambos* conjuntos preordenados, mientras que la transición entre adjunciones y las conexiones, y viceversa, se basa en el uso del orden dual en *uno solo* de los conjuntos preordenados.

Teorema 2.1 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ conjuntos preordenados y dos aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to A$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

1. $(f,g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$
2. $(f,g) : \mathbb{A}^{op} \rightleftharpoons \mathbb{B}^{op}$
3. $(f,g) : \mathbb{A} \leftharpoonup\!\!\!\rightharpoonup \mathbb{B}^{op}$
4. $(f,g) : \mathbb{A}^{op} \leftharpoondown\!\!\!\rightharpoondown \mathbb{B}$

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$. Dados $a \in A$ y $b \in B$, por la definición de relación dual, $g(b) \gtrsim_A a$ si y sólo si $a \lesssim_A g(b)$. Por ser (f,g) una adjunción, $a \lesssim_A g(b)$ si y sólo si $f(a) \lesssim_B b$. Finalmente, otra vez por la definición de relación dual, $f(a) \lesssim_B b$ equivale a $b \gtrsim_B f(a)$.

Análogamente se prueban las demás implicaciones. □

Obsérvese que, como consecuencia directa de este teorema, cualquier propiedad sobre adjunciones puede ser extendida, por dualidad, a cualquier otro tipo de conexión o a co-adjunciones.

Observación 2.1

1. *(f,g) es una conexión de Galois por la derecha (por la izquierda, resp.) entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ si y sólo si (g,f) es una conexión de Galois por la derecha (por la izquierda, resp.) entre $\mathbb{B}$ y $\mathbb{A}$.*

2. *(f,g) es una adjunción entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ si y sólo si (g,f) es una co-adjunción entre $\mathbb{B}$ y $\mathbb{A}$.*

2.2. Caracterizaciones y propiedades de las adjunciones

Cualquier conjunto preordenado $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ induce una relación de equivalencia en A, definida de la siguiente forma

$$a_1 \approx_A a_2 \quad \text{si y sólo si} \quad a_1 \lesssim_A a_2 \ \text{ y } \ a_2 \lesssim_A a_1 \quad \text{para } a_1, a_2 \in A. \tag{2.1}$$

Esta relación se denomina *relación núcleo simétrico*.

Las nociones de máximo y mínimo en un conjunto parcialmente ordenado, (ver Definición 1.5), pueden ser extendidas a conjuntos preordenados como sigue: un elemento $a \in A$ es un *p-máximo* (*p-mínimo* resp.) de un conjunto $X \subseteq A$ si $a \in X$ y $x \lesssim_A a$ ($a \lesssim_A x$, resp.) para todo $x \in X$. El conjunto de p-máximos (p-mínimos) de X es denotado por p-$\max X$ (p-$\min X$, resp.).

Observación 2.2 *En un conjunto preordenado $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$, varios elementos distintos pueden ser p-máximos (p-mínimos resp.) de un mismo subconjunto $X \subseteq A$. Obsérvese que si $a_1, a_2 \in \text{p-max}\, X$ ($\text{p-min}\, X$ resp.) entonces $a_1 \approx_A a_2$.*

En las referencias consultadas, se pueden encontrar diferentes definiciones para un mismo término de los introducidos en la Definición 2.1. Por ejemplo Ore, en [46], define las llamadas conexiones de Galois por la derecha como un par de aplicaciones (f, g) tales que f y g son antítonas y $g \circ f$ y $f \circ g$ son inflacionarias; mientras que Valverde-Albacete, en [51], definen las conexiones de Galois por la derecha como un par de aplicaciones (f, g) que verifican $a \lesssim_A g(b)$ si y solo si $b \lesssim_B f(a)$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. En el siguiente teorema, se recogen diferentes caracterizaciones de la noción de adjunción.

Teorema 2.2 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle, \mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ dos conjuntos preordenados, $f : A \to B$ y $g : B \to A$ dos aplicaciones. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$.

ii) *f y g son aplicaciones isótonas, $g \circ f$ es inflacionaria y $f \circ g$ es deflacionaria.*

iii) *$f(a)^{\uparrow} = g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a \in A$.*

iv) *$g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$.*

v) *f es una aplicación isótona y $g(b) \in \text{p-max}\, f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$.*

vi) *g es una aplicación isótona y $f(a) \in \text{p-min}\, g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a \in A$.*

DEMOSTRACIÓN: Dados $a \in A$ y $b \in B$, obsérvese que $f(a) \lesssim_A b$ si y sólo si $b \in f(a)^{\uparrow}$ y, también, $f(a) \lesssim_A b$ si y sólo si $a \in f^{-1}(b^{\downarrow})$. De igual modo, $a \lesssim_A g(b)$ es equivalente a que $b \in g^{-1}(a^{\uparrow})$ y a que $a \in g(b)^{\downarrow}$. Por tanto, la condición de ser adjunción es equivalente a las siguientes igualdades de conjuntos $f(a)^{\uparrow} = g^{-1}(a^{\uparrow})$ y $g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\downarrow})$, para todo $a \in A$ y $b \in B$. Por consiguiente, $i)$, $iii)$ y $iv)$ son condiciones equivalentes.

i) ⇒ ii) Dado $a \in A$, como $f(a) \lesssim_B f(a)$, por hipótesis $a \lesssim_A g(f(a))$, por consiguiente $g \circ f$ es inflacionaria. Ahora, sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \lesssim_A a_2$. Como $a_2 \lesssim_A g(f(a_2))$ se deduce que $a_1 \lesssim_A a_2 \lesssim_A g(f(a_2))$. Y utilizando de nuevo la hipótesis, obtenemos que $f(a_1) \lesssim_B f(a_2)$. Por tanto, f es una aplicación isótona. De forma similar, se prueba que $f \circ g$ es deflacionaria y que g es una aplicación isótona.

ii) ⇒ v) Para todo $b \in B$, por ser $f \circ g$ deflacionaria, $g(b) \in f^{-1}(b^{\downarrow})$. Por otro lado, dado $a \in f^{-1}(b^{\downarrow})$, partiendo de que $f(a) \lesssim_B b$ y por ser g isótona y $g \circ f$ inflacionaria, se obtiene que $a \lesssim_A g(f(a)) \lesssim_A g(b)$. Por tanto, $g(b) \in \text{p-max}\, f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$.

v) ⇒ i) Dado $b \in B$, como $g(b) \in f^{-1}(b^{\downarrow})$, se tiene que $f \circ g$ es deflacionaria. Si $a \lesssim_A g(b)$, por ser f isótona y $f \circ g$ deflacionaria, entonces $f(a) \lesssim_B f(g(b)) \lesssim_B b$. Por otro lado, como $g(b) \in \text{p-max}\, f^{-1}(b^{\downarrow})$, se obtiene que si $f(a) \lesssim_A b$, i.e. $a \in f^{-1}(b^{\downarrow})$, entonces $a \lesssim_A g(b)$.

ii) ⇒ vi) Por ser $g \circ f$ es inflacionaria, $f(a) \in g^{-1}(a^{\uparrow})$. Por otro lado, para todo $b \in g^{-1}(a^{\uparrow})$, se tiene que $a \lesssim_A g(b)$. Como f es isótona y $f \circ g$ es deflacionaria, se obtiene que $f(a) \lesssim_B f(g(b)) \lesssim_B b$. Por tanto, $f(a) \in \text{p-min}\, g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a \in A$.

vi) ⇒ i) Dado $a \in A$, como $f(a) \in g^{-1}(a^{\uparrow})$, se tiene que $g \circ f$ es inflacionaria. Si $f(a) \lesssim_B b$, por ser g isótona y $g \circ f$ es inflacionaria, $a \lesssim_A g(f(a)) \lesssim_A g(b)$. Por otro lado, como $f(a) \in \text{p-min}\, g^{-1}(a^{\uparrow})$, si $a \lesssim_B g(b)$, i.e. $b \in g^{-1}(a^{\uparrow})$, entonces $f(a) \lesssim_B b$.

□

El Teorema 2.1 y el Teorema 2.2 proporcionan las diferentes caracterizaciones para conexiones de Galois, adjunciones y co-adjunciones, presentadas a modo de resumen en el Cuadro 2.1.

En conjuntos ordenados, al componer las aplicaciones que constituyen una adjunción, se obtienen aplicaciones que son idempotentes. En ausencia de antisimetría, esta propiedad se debilita en los términos del siguiente resultado, en donde la relación núcleo simétrico, introducida en la Ecuación (2.1), sustituye a la igualdad del caso ordenado.

Teorema 2.3 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle, \mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ dos conjuntos preordenados, $f : A \to B$ y $g : B \to A$ dos aplicaciones. Si $(f, g) \colon \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B}$, donde $\rightleftarrows \in \{\leftharpoonup\!\rightharpoonup, \leftharpoondown\!\rightharpoondown, \leftrightharpoons, \rightleftharpoons\}$, entonces, $(f \circ g \circ f)(a) \approx_B f(a)$, para todo $a \in A$, y $(g \circ f \circ g)(b) \approx_A g(b)$ para todo $b \in B$. Además,*

1. *Si (f, g) es simultáneamente una adjunción y co-adjunción (conexión de Galois por la izquierda y por la derecha resp.) entonces $(g \circ f)(a) \approx_A a$ para todo $a \in A$ y $(f \circ g)(b) \approx_B b$ para todo $b \in B$.*

2. *Si (f, g) es simultáneamente una (co-) adjunción y una conexión de Galois (por la izquierda o por la derecha) entonces $f(a_1) \approx_B f(a_2)$ para todo $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \lesssim_A a_2$, y $g(b_1) \approx_A g(b_2)$ para todo $b_1, b_2 \in B$ con $b_1 \lesssim_B b_2$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $(f, g) \colon \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$ y $a \in A$. Por ser f isótona y $g \circ f$ inflacionaria se tiene que $f(a) \lesssim_B f(g(f(a)))$, y por ser $f \circ g$ deflacionaria, $(f(g(f(a))) \lesssim_B f(a)$. Por tanto, $(f \circ g \circ f)(a) \approx_B f(a)$, para todo $a \in A$. De forma análoga se prueba que $(g \circ f \circ g)(b) \approx_B b$ para todo $b \in B$. Para $\rightleftarrows \in \{\leftharpoonup\!\rightharpoonup, \leftharpoondown\!\rightharpoondown, \rightleftharpoons\}$, la demostración es similar.

Ahora, sea (f, g) una adjunción y co-adjunción. Por tanto, $f \circ g$ y $g \circ f$ son aplicaciones inflacionarias y deflacionarias a la vez, es decir, $(g \circ f)(a) \lesssim_A a$

Cuadro 2.1: Resumen de las definiciones y caracterizaciones equivalentes

Conexiones de Galois	
Conexión de Galois por la derecha entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ $(f, g)\colon \mathbb{A} \leftharpoonup\!\!\rightharpoonup \mathbb{B}$	Conexión de Galois por la izquierda entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ $(f, g)\colon \mathbb{A} \leftharpoondown\!\!\rightharpoondown \mathbb{B}$
$b \lesssim_B f(a) \Leftrightarrow a \lesssim_A g(b)$ para todo $a \in A$ y $b \in B$	$f(a) \lesssim_B b \Leftrightarrow g(b) \lesssim_A a$ para todo $a \in A$ y $b \in B$
f y g son antítonas y $g \circ f$ y $f \circ g$ son inflacionarias	f y g son antítonas y $g \circ f$ y $f \circ g$ son deflacionarias
$f(a)^{\downarrow} = g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a \in A$	$f(a)^{\uparrow} = g^{-1}(a^{\downarrow})$ para todo $a \in A$
$g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\uparrow})$ para todo $b \in B$	$g(b)^{\uparrow} = f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$
f es antítona y $g(b) \in$ p-max $f^{-1}(b^{\uparrow})$ para todo $b \in B$	f es antítona y $g(b) \in$ p-min $f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$
g es antítona y $f(a) \in$ p-max $g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a \in A$	g es antítona y $f(a) \in$ p-min $g^{-1}(a^{\downarrow})$ para todo $a \in A$
Adjunción y co-adjunción	
Adjunción entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ $(f, g)\colon \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$	Co-adjunción entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ $(f, g)\colon \mathbb{A} \rightleftharpoons \mathbb{B}$
$f(a) \lesssim_B b \Leftrightarrow a \lesssim_A g(b)$ para todo $a \in A$ y $b \in B$	$b \lesssim_B f(a) \Leftrightarrow g(b) \lesssim_A a$ para todo $a \in A$ y $b \in B$
f y g son isótonas, $g \circ f$ es inflacionaria y $f \circ g$ es deflacionaria	f y g son isótonas, $g \circ f$ es deflacionaria y $f \circ g$ es inflacionaria
$f(a)^{\uparrow} = g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a \in A$	$f(a)^{\downarrow} = g^{-1}(a^{\downarrow})$ para todo $a \in A$
$g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$	$g(b)^{\uparrow} = f^{-1}(b^{\uparrow})$ para todo $b \in B$
f es isótona y $g(b) \in$ p-max $f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$	f es isótona y $g(b) \in$ p-min $f^{-1}(b^{\uparrow})$ para todo $b \in B$
g es isótona y $f(a) \in$ p-min $g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a \in A$	g es isótona y $f(a) \in$ p-max $g^{-1}(a^{\downarrow})$ para todo $a \in A$

y $a \lesssim_A (g \circ f)(a)$ para todo $a \in A$, y $(f \circ g)(b) \lesssim_B b$ y $b \lesssim_B (f \circ g)(b)$ para todo $b \in B$.

Finalmente, se considera (f, g) adjunción y conexión de Galois por la derecha entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$. Por ser las aplicaciones f y g isótonas y antítonas a la vez, se obtiene para todo $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$ con $a_1 \lesssim_A a_2$ y $b_1 \lesssim_B b_2$, que $f(a_2) \approx_B f(a_1)$ y $g(b_2) \approx_A g(b_1)$.

Los casos restantes, se prueban de forma análoga al caso anterior. $\square$

Dado un conjunto preordenado $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$, al conjunto cociente sobre la relación núcleo simétrico $\approx_A$ se le denotará por $\overline{A}$ y a los elementos de este conjunto cociente se les representará por $[a]_\approx$. Para simplificar la notación, en lo sucesivo, no se utilizará el subíndice en las clases de equivalencia anteriores. Se puede definir la siguiente relación:

$$[a_1]_\approx \lesssim_{\overline{A}} [a_2]_\approx \quad \text{si y sólo si} \quad a_1 \lesssim_A a_2 \tag{2.2}$$

Esta relación binaria está bien definida, puesto que si $a_1 \approx_A \alpha_1$ y $a_2 \approx_A \alpha_2$ entonces $a_1 \lesssim_A a_2$ implica $\alpha_1 \lesssim_A a_1 \lesssim_A a_2 \lesssim_A \alpha_2$ que por transitividad de la relación $\lesssim_A$ demuestra que también $\alpha_1 \lesssim_A \alpha_2$. Es claramente reflexiva y transitiva y además por la propia definición de la relación núcleo simétrico, se deduce que es un orden parcial. Al conjunto ordenado $\langle \overline{A}, \lesssim_{\overline{A}} \rangle$ se le denotará por $\overline{\mathbb{A}}$.

Asimismo, dados dos conjuntos preordenados $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ y una aplicación isótona (respectivamente, antítona) $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, se puede definir la aplicación $\overline{f}\colon \overline{\mathbb{A}} \to \overline{\mathbb{B}}$ como $\overline{f}([a]_\approx) = [f(a)]_\approx$. La aplicación $\overline{f}$ está bien definida pues como f es isótona (resp. antítona) si $[a_1]_\approx = [a_2]_\approx$, entonces $a_1 \lesssim_A a_2$ implica $f(a_1) \lesssim_A f(a_2)$ (resp. $f(a_2) \lesssim_A f(a_1)$) y viceversa.

Además, si f es isótona (resp. antítona), entonces $\overline{f}$ también lo es: si $[a_1]_\approx \lesssim_{\overline{A}} [a_2]_\approx$ entonces $a_1 \lesssim_A a_2$ lo que implica por ser f isótona que $f(a_1) \lesssim_A f(a_2)$. Por la definición del orden en $\overline{B}$, se deduce $[f(a_1)]_\approx \lesssim_{\overline{B}} [f(a_2)]_\approx$ o lo que es equivalente $\overline{f}([a_1]_\approx) \lesssim_{\overline{B}} \overline{f}([a_2]_\approx)$.

El siguiente teorema muestra cómo trasladar adjunciones (co-adjunciones, conexiones de Galois por la derecha y por la izquierda) entre dos conjuntos preordenados A y B a los conjuntos parcialmente ordenados $\overline{\mathbb{A}}$ y $\overline{\mathbb{B}}$.

Teorema 2.4 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ dos conjuntos preordenados y sea $\leftrightarrows \in \{\leftharpoonup, \rightharpoondown, \leftrightharpoons, \rightleftharpoons\}$. Si $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightarrows \mathbb{B}$ entonces $(\overline{f}, \overline{g}) : \overline{\mathbb{A}} \leftrightarrows \overline{\mathbb{B}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Suponiendo que $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$, se probará que $[a]_\approx \lesssim_{\overline{A}} \overline{g}([b]_\approx)$ si y sólo si $\overline{f}([a]_\approx) \lesssim_{\overline{B}} [b]_\approx$ para todo $[a]_\approx \in \overline{A}$ y $[b]_\approx \in \overline{B}$. Si $[a]_\approx \lesssim_{\overline{A}} \overline{g}([b]_\approx) = [g(b)]_\approx$, por la definición de $\lesssim_{\overline{A}}$ se deduce que $a \lesssim_A g(b)$ lo que es equivalente a $f(a) \lesssim_B b$. Esto implica $\overline{f}([a]_\approx) = [f(a)]_\approx \lesssim_{\overline{B}} [b]_\approx$. Recíprocamente, si $\overline{f}([a]_\approx) \lesssim_{\overline{B}} [b]_\approx$, de forma análoga, se obtiene que $[a]_\approx \lesssim_{\overline{A}} \overline{g}([b]_\approx)$.

Para $\leftrightarrows \in \{\leftharpoonup, \rightharpoondown, \rightleftharpoons\}$ la prueba es similar. □

Cualquier relación de equivalencia es un preorden, por tanto se pueden considerar conexiones de Galois entre dos conjuntos dotados con relaciones de equivalencia. Pero las propiedades que obtenemos en estos casos no son significativas como muestra el siguiente corolario.

Corolario 2.1 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle, \mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ dos conjuntos preordenados, $f : A \to B$ y $g : B \to A$ dos aplicaciones.*

1. *(f, g) es una adjunción y co-adjunción (resp. conexión de Galois por la izquierda y por la derecha) si y sólo si f y g son isótonas (resp. antítonas) y $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son aplicaciones inversas (i.e. $(\overline{f})^{-1} = \overline{g}$).*

2. *Ambas relaciones $\lesssim_A$ y $\lesssim_B$ son relaciones de equivalencia y (f, g) es una adjunción (resp. co-adjunción, conexión de Galois por la derecha, por la izquierda) si y sólo si (f, g) es una adjunción, co-adjunción, conexión de Galois por la derecha y conexión de Galois por la izquierda al mismo tiempo.*

DEMOSTRACIÓN:

1. Supongamos que (f, g) forman una adjunción y co-adjunción al mismo tiempo. Por el Teorema 2.3, se tiene que $[(g \circ f)(a)]_{\approx} = [a]_{\approx}$, que por definición de $\overline{f}$ y $\overline{g}$ implica $(\overline{g} \circ \overline{f})([a]_{\approx}) = [a]_{\approx}$, para todo $[a]_{\approx} \in \overline{A}$. Análogamente se demuestra que $(\overline{f} \circ \overline{g})([b]_{\approx}) = [b]_{\approx}$, para todo $[b]_{\approx} \in \overline{B}$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son aplicaciones una inversa de la otra y sean $a \in A, b \in B$ tales que $a \lesssim_A g(b)$. Entonces, $[a]_{\approx} \lesssim_{\overline{A}} [g(b)]_{\approx} = \overline{g}([b]_{\approx}) = (\overline{f})^{-1}[b]_{\approx}$. Por ser $\overline{f}$ isótona, $\overline{f}([a]_{\approx}) \lesssim_{\overline{B}} [b]_{\approx}$ de donde se deduce $f(a) \lesssim_B b$. De manera similar, se prueba que si $f(a) \lesssim_B b$ entonces $a \lesssim_A g(b)$ para $a \in A, b \in B$, y también que (f, g) es co-adjunción.

2. Sea (f, g) una adjunción y supongamos que $\lesssim_A$ y $\lesssim_B$ son relaciones simétricas. En tal caso, $\mathbb{A}^{op} = \mathbb{A}$ y $\mathbb{B}^{op} = \mathbb{B}$. En virtud del Teorema 2.1, se tiene que (f, g) es también co-adjunción, conexión de Galois por la derecha y conexión de Galois por la izquierda.

Recíprocamente, supongamos que (f, g) es una adjunción, co-adjunción, conexión de Galois por la derecha y conexión de Galois por la izquierda al mismo tiempo. Dados $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \lesssim_A a_2$, por ser f antítona, $f(a_2) \lesssim_A f(a_1)$. Ahora usando, en primer lugar, que (f, g) es adjunción, se obtiene que $a_2 \lesssim_A g(f(a_1))$, y utilizando que $g \circ f$ es deflacionaria, ya que (f, g) es una co-adjunción y conexión de Galois por la derecha, obtenemos que $a_2 \lesssim_A g(f(a_1)) \lesssim_A a_1$. De forma análoga, dados $b_1, b_2 \in B$ tales que $b_1 \lesssim_B b_2$ se obtiene que $b_2 \lesssim_B b_1$. $\square$

2.3. Construcción de adjunciones

En esta sección, se considera una aplicación $f\colon A \to B$ definida desde un conjunto parcialmente ordenado (preordenado) A hasta un conjunto B no necesariamente dotado de estructura. Y se estudiará el problema de definir una relación de orden parcial (preorden) adecuada en B de forma que exista una aplicación $g\colon B \to A$ tal que el par de aplicaciones (f, g) formen una adjunción entre los conjuntos parcialmente ordenados (preordenados).

A lo largo de este capítulo se va trabajar con adjunciones, y en virtud del Teorema 2.1 todos los resultados obtenidos, se pueden extender a cualquiera de las cuatro posibles nociones de conexión de Galois introducidas en la Definición 2.1.

2.3.1. Entre conjuntos parcialmente ordenados

Como se ha comentado, estudiaremos el problema para conjuntos parcialmente ordenados y para preordenados. Se comienza con el primer caso y para ello introducimos el siguiente lema técnico que permite, en algunos casos, simplificar una de las caracterizaciones de las adjunciones eliminando una clausura inferior (véase apartado 5 del Teorema 1.4).

Lema 2.1 *Sean $\langle A, \leq_A\rangle$ y $\langle B, \leq_B\rangle$ dos conjuntos parcialmente ordenados, $f\colon A \to B$ una aplicación isótona y sea $b \in f(A)$. Si $\max f^{-1}(b^{\downarrow})$ existe, entonces $\max f^{-1}(b)$ existe y $\max f^{-1}(b^{\downarrow}) = \max f^{-1}(b)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $m = \max f^{-1}(b^{\downarrow})$. Se demostrará que $a \leq_A m$, para todo $a \in f^{-1}(b)$, y que $m \in f^{-1}(b)$, obteniendo de este modo que $m = \max f^{-1}(b)$.

Si $a \in f^{-1}(b)$, entonces $f(a) = b \in b^{\downarrow}$ y $a \in f^{-1}(b^{\downarrow})$, por tanto, utilizando que $m = \max f^{-1}(b^{\downarrow})$, se obtiene que $a \leq_A m$.

Ahora, la isotonía de f muestra que $f(a) = b \leq_B f(m)$. Para la otra desigualdad, se utiliza que $m \in f^{-1}(b^{\downarrow})$, lo cual implica que $f(m) \leq_B b$. Por tanto, $f(m) = b$ por la antisimetría de $\leq_B$. $\square$

En general, dado un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, \leq_A\rangle$ junto con una relación de equivalencia $\sim$ sobre A, es habitual considerar el conjunto

$A_\sim = A/\!\sim$, el conjunto cociente de A con respecto a $\sim$, y la aplicación proyección $\pi\colon A \to A_\sim$. La clase de equivalencia de un elemento $a \in A$ se denota, de forma usual, por $[a]_\sim$ y, entonces, $\pi(a) = [a]_\sim$.

Consideremos una aplicación f definida desde un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, \leq_A\rangle$ a un conjunto B no dotado necesariamente de estructura. Con el fin de encontrar condiciones para la construcción de un adjunto por la derecha de la aplicación f, se usará la descomposición canónica de $f\colon A \to B$ a través de $A_{\equiv_f}$, el conjunto cociente de A con respecto a la *relación núcleo* $\equiv_f$ definida como

$$a \equiv_f b \quad \text{si y sólo si} \quad f(a) = f(b) \tag{2.3}$$

Dicha descomposición canónica se representa en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, two heads, "\pi"'] & B \\
A_{\equiv_f} \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & f(A) \arrow[u, dashed, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

donde π representa la proyección canónica sobre $A_{\equiv_f}$, la aplicación $\varphi\colon A_{\equiv_f} \to f(A)$ está definida por $\varphi([a]_{\equiv_f}) = f(a)$ para todo $a \in A$ y la aplicación $i\colon f(A) \to B$ es la inclusión de la imagen de f en B, es decir, $i(b) = b$ para todo $b \in f(A)$.

Cabe recordar que la aplicación φ es biyectiva: si $\varphi([a_1]_{\equiv_f}) = \varphi([a_2]_{\equiv_f})$ se tiene, por definición de φ, que $f(a_1) = f(a_2)$ lo cual implica que $[a_1]_{\equiv_f} = [a_2]_{\equiv_f}$ y para todo $f(a) \in f(A)$, la propia clase $[a]_{\equiv_f} \in A_{\equiv_f}$ verifica $\varphi([a]_{\equiv_f}) = f(a)$.

El siguiente lema proporciona condiciones suficientes para que la aplicación proyección sea el componente izquierdo de una adjunción.

Lema 2.2 *Sea $\langle A, \leq_A \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

1. *Existe* $\max([a]_\sim)$*, para todo* $a \in A$*.*
2. *Si* $a_1 \leq_A a_2$ *entonces* $\max([a_1]_\sim) \leq_A \max([a_2]_\sim)$*, para todo* $a_1, a_2 \in A$*.*

Entonces, la relación $\leq_{A_\sim}$ *definida por* $[a_1]_\sim \leq_{A_\sim} [a_2]_\sim$ *si y sólo si* $a_1 \leq_A \max([a_2]_\sim)$ *es un orden en* $A_\sim$ *y, además, el par de aplicaciones* $(\pi, \max)$ *es una adjunción entre* $\langle A, \leq_A \rangle$ *y* $\langle A_\sim, \leq_{A_\sim} \rangle$*.*

DEMOSTRACIÓN: Primero se comprobará que la relación $\leq_{A_\sim}$ está bien definida. Por la primera hipótesis se tiene que $\max([a]_\sim)$ existe para todo $a \in A$, y se probará que la definición de la relación $\leq_{A_\sim}$ no depende de la elección del elemento en la clase; es decir, dados $a_1 \sim \alpha_1$ y $a_2 \sim \alpha_2$ se probará que $a_1 \leq_A \max([a_2]_\sim)$ si y sólo si $\alpha_1 \leq_A \max([\alpha_2]_\sim)$.

Supóngase que $a_1 \leq_A \max([a_2]_\sim)$. Utilizando la hipótesis 2, se tiene que $\max([a_1]_\sim) \leq_A \max(\max([a_2]_\sim)) = \max([a_2]_\sim)$ y como $\alpha_1 \leq_A \max([\alpha_1]_\sim) = \max([a_1]_\sim)$ entonces $\alpha_1 \leq_A \max([a_2]_\sim)$. Ahora, como $a_2 \sim \alpha_2$ se tiene, de forma directa, que $[a_2]_\sim = [\alpha_2]_\sim$ lo cual implica que $\alpha_1 \leq_A \max([\alpha_2]_\sim)$.

Ahora se verá que la relación $\leq_{A_\sim}$ es un orden:

Reflexividad Para todo elemento $a \in A$, se tiene $a \leq_A \max([a]_\sim)$, lo cual significa que $[a]_\sim \leq_{A_\sim} [a]_\sim$.

Transitividad Sean $a_1, a_2, a_3 \in A$ tales que $[a_1]_\sim \leq_{A_\sim} [a_2]_\sim$ y $[a_2]_\sim \leq_{A_\sim} [a_3]_\sim$.

Como $[a_1]_\sim \leq_{A_\sim} [a_2]_\sim$, por definición, se tiene que $a_1 \leq_A \max([a_2]_\sim)$. Ahora, usando $[a_2]_\sim \leq_{A_\sim} [a_3]_\sim$ se obtiene, por definición del orden y por la segunda hipótesis, que $\max([a_2]_\sim) \leq_A \max([a_3]_\sim)$. Por tanto, $[a_1] \leq_{A_\sim} \max([a_3]_\sim)$, esto es, $[a_1]_\sim \leq_{A_\sim} [a_3]_\sim$.

Antisimetría Sean dos elementos $a_1, a_2 \in A$ tales que $[a_1]_\sim \leq_{A_\sim} [a_2]_\sim$ y $[a_2]_\sim \leq_{A_\sim} [a_1]_\sim$.

Por hipótesis, se tiene que $a_1 \leq_A \max([a_2]_\sim)$ entonces $\max([a_1]_\sim) \leq_A \max([a_2]_\sim)$, y $a_2 \leq_A \max([a_1]_\sim)$ entonces $\max([a_2]_\sim) \leq_A \max([a_1])_\sim$. Como $\leq_A$ es antisimétrica, entonces $\max([a_1]_\sim) = \max([a_2]_\sim)$; ahora, por ser la intersección de las dos clases $[a_1]_\sim$ y $[a_2]_\sim$ no vacía, se tiene que $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$.

Finalmente, veamos que $(\pi, \max)$ forman una adjunción, usando la definición de π y del orden $\leq_{A_\sim}$:

$$\begin{aligned} \pi(a_1) \leq_{A_\sim} [a_2]_\sim \quad & \text{si y sólo si} \quad [a_1]_\sim \leq_{A_\sim} [a_2]_\sim \\ & \text{si y sólo si} \quad a_1 \leq_A \max([a_2]_\sim) \end{aligned}$$

□

Con el lema anterior se han proporcionado las condiciones suficientes para que la aplicación π sea un adjunto por la izquierda; el siguiente resultado muestra que estas condiciones son también condiciones necesarias, y que la relación de orden y el adjunto por la derecha se definen de forma única.

Lema 2.3 *Sea $\langle A, \leq_A \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. Sea $A_\sim = A/\!\sim$ el conjunto cociente de A con respecto a $\sim$ y $\pi\colon A \to A_\sim$ la aplicación proyección. Si existe una relación de orden $\leq_{A_\sim}$ en $A_\sim$ y $g\colon A_\sim \to A$ tal que $(\pi, g)\colon \langle A, \leq_A \rangle \leftrightharpoons \langle A_\sim, \leq_{A_\sim} \rangle$ entonces,*

1. *$g([a]_\sim) = \max([a]_\sim)$ para todo $a \in A$.*

2. *$[a_1]_\sim \leq_{A_\sim} [a_2]_\sim$ si y sólo si $a_1 \leq_A \max([a_2]_\sim)$ para todo $a_1, a_2 \in A$.*

3. *Si $a_1 \leq_A a_2$ entonces $\max([a_1]_\sim) \leq_A \max([a_2]_\sim)$ para todo $a_1, a_2 \in A$.*

DEMOSTRACIÓN:

1. Por el Teorema 1.4 se tiene que $g([a]_\sim) = \max \pi^{-1}([a]_\sim^\downarrow)$. Ahora, por el Lema 2.1 se obtiene que $\max \pi^{-1}([a]_\sim^\downarrow) = \max \pi^{-1}([a]_\sim) = \max([a]_\sim)$.

Obsérvese que hay un ligero abuso de notación, ya que $[a]_\sim$ es a veces considerada un elemento, i.e. una clase de equivalencia del conjunto cociente, y otras veces el conjunto de elementos de la clase de equivalencia. El contexto ayuda a saber qué significado se pretende en cada caso.

2. Por ser adjunción (π, g), definición de π, y el apartado anterior se tiene la siguiente cadena de equivalencias

$$\begin{aligned} [a_1]_\sim \leq_{A_\sim} [a_2]_\sim \quad & \text{si y sólo si} \quad \pi(a_1) \leq_{A_\sim} [a_2]_\sim \\ & \text{si y sólo si} \quad a_1 \leq_A g([a_2]_\sim) \\ & \text{si y sólo si} \quad a_1 \leq_A \max([a_2]_\sim) \end{aligned}$$

3. Finalmente, como π y g son aplicaciones isótonas, $a_1 \leq_A a_2$ implica que $[a_1]_\sim \leq_{A_\sim} [a_2]_\sim$ y $g([a_1]_\sim) \leq_A g([a_2]_\sim)$, por tanto $\max([a_1]_\sim) \leq_A \max([a_2]_\sim)$ por el primer apartado. $\square$

Continuando con el análisis de la descomposición canónica, se llega de forma natural al resultado siguiente.

Lema 2.4 *Sea $\langle A, \leq_A\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y una aplicación biyectiva $\varphi\colon A \to B$. Entonces existe una única relación de orden en B, definida como $b_1 \leq_B b_2$ si y sólo si $\varphi^{-1}(b_1) \leq_A \varphi^{-1}(b_2)$, tal que $(\varphi, \varphi^{-1})\colon \langle A, \leq_A\rangle \leftrightharpoons \langle B, \leq_B\rangle$.*

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar, usando la definición de $\leq_B$ y la reflexividad de $\leq_A$, para todo $b \in B$, se tiene que $\varphi^{-1}(b) \leq_A \varphi^{-1}(b)$ si y sólo si $b \leq_B b$. Ahora, dados $b_1, b_2, b_3 \in B$ tales que $b_1 \leq_B b_2$ y $b_2 \leq_B b_3$, por la definición de $\leq_B$ y transitividad de $\leq_A$, se obtiene que $\varphi^{-1}(b_1) \leq_A \varphi^{-1}(b_3)$ si y sólo si $b_1 \leq_B b_3$.

Finalmente, para todo $b_1, b_2 \in B$ tales que $b_1 \leq_B b_2$ y $b_2 \leq_B b_1$, de nuevo por definición de $\leq_B$ y por antisimetría de $\leq_A$, se tiene que $\varphi^{-1}(b_1) = \varphi^{-1}(b_2)$, lo cual implica, por ser φ biyectiva, que $b_1 = b_2$.

Ahora se comprobará que el par (φ, φ^{-1}) constituye una adjunción. Obsérvese que φ^{-1} es isótona por la definición de $\leq_B$, y que φ es también isótona ya que si $a_1 \leq_A a_2$ existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $a_1 = \varphi^{-1}(b_1) \leq_A \varphi^{-1}(b_2) = a_2$, y por la definición de $\leq_B$ esto implica $b_1 \leq_B b_2$, i.e. $\varphi(a_1) \leq_B \varphi(a_2)$. Para finalizar, sea $a \in A$ y $b \in B$ tales que $a \leq_A \varphi(b)$, utilizando que φ^{-1} es la inversa de φ y que φ^{-1} es isótona, se obtiene que $\varphi^{-1}(a) \leq_B \varphi^{-1}(\varphi(b)) = b$. De forma análoga, se obtiene que si $\varphi^{-1}(a) \leq_B b$ entonces $a \leq_A \varphi(b)$. □

Como consecuencia de los resultados anteriores, se han establecido las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia y unicidad del adjunto derecho para cualquier aplicación *sobreyectiva* f definida desde un conjunto parcialmente ordenado A a un conjunto B no necesariamente dotado de estructura.

Teorema 2.5 *Dado un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, \leq_A \rangle$ y una aplicación sobreyectiva $f\colon A \to B$, sea $\equiv_f$ la relación núcleo. Entonces, existe un orden parcial $\leq_B$ en B y una aplicación $g\colon B \to A$ tal que $(f, g)\colon \langle A, \leq_A \rangle \leftrightarrows \langle B, \leq_B \rangle$ si y sólo si*

1. *Existe* $\max([a]_{\equiv_f})$ *para todo* $a \in A$.
2. $a_1 \leq_A a_2$ *implica* $\max([a_1]_{\equiv_f}) \leq_A \max([a_2]_{\equiv_f})$, *para todo* $a_1, a_2 \in A$.

DEMOSTRACIÓN: Se considera una adjunción $(f, g)\colon \langle A, \leq_A \rangle \leftrightarrows \langle B, \leq_B \rangle$.

Dado $a \in A$, el punto 1 se cumple por la siguiente cadena de igualdades, donde la primera igualdad viene del Teorema 1.4, la segunda del Lema 3.2, y la tercera de la definición de $[a]_{\equiv_f}$:

$$g(f(a)) = \max f^{-1}(f(a)^{\downarrow}) = \max f^{-1}(f(a)) = \max([a]_{\equiv_f}) \tag{2.4}$$

Ahora, el punto 2 es directo, ya que si $a_1 \leq_A a_2$ entonces, por isotonía, $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ y $g(f(a_1)) \leq_A g(f(a_2))$ y por tanto, según (2.4), $\max([a_1]_{\equiv_f}) \leq_A \max([a_2]_{\equiv_f})$.

Recíprocamente, dados $\langle A, \leq_A\rangle$ un conjunto ordenado y $f\colon A \to B$ sobreyectiva tal que se verifican los apartados 1 y 2, se probará que f es el adjunto por la izquierda de una aplicación $g\colon B \to A$.

Se considera la descomposición canónica de f a través del conjunto cociente $A_{\equiv_f}$ de A con respecto a $\equiv_f$, es decir, $f = \pi \circ \varphi$ descrita en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[l, bend right, dashed, "g"'] \\
A_{\equiv_f} \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

donde $\pi(a) = [a]_{\equiv_f}$ y φ es la aplicación biyectiva definida por $\varphi([a]_{\equiv_f}) = f(a)$.

En primer lugar, por el Lema 2.2, utilizando las condiciones 1 y 2, y el hecho de que $[a]_{\equiv_f} = \pi(a)$, se obtiene que $(\pi, \max)\colon \langle A, \leq_A\rangle \leftrightharpoons \langle A_{\equiv_f}, \leq_{\equiv_f}\rangle$.

Además, como la aplicación $\varphi\colon A_{\equiv_f} \to B$ es biyectiva, se puede aplicar el Lema 2.4 para inducir un orden $\leq_B$ en B tal que se tenga otra adjunción, el par de aplicaciones $(\varphi, \varphi^{-1})\colon \langle A_{\equiv_f}, \leq_{\equiv_f}\rangle \leftrightharpoons \langle B, \leq_B\rangle$.

Obsérvese que para todo $b = f(x) \in B$ se tiene que

$$\varphi^{-1}(b) = \left\{[a]_{\equiv_f} \in A_{\equiv_f} \mid \varphi([a]_{\equiv_f}) = b\right\} = \left\{[a]_{\equiv_f} \in A_{\equiv_f} \mid f(a) = f(x)\right\} = [x]_{\equiv_f}$$

Por consiguiente, la aplicación $g = (\max \circ\ \varphi^{-1})\colon B \to A$, se puede escribir como

$$g(b) = \max(\varphi^{-1}(b)) = \max([x]_{\equiv_f}) \tag{2.5}$$

para todo $x \in f^{-1}(b)$.

Finalmente, se probará (f, g) es una adjunción. Supongamos que $a \leq_A \max(\varphi^{-1}(b))$. Por ser f sobreyectiva existe $x \in A$ tal que $f(x) = b$ y, como $\varphi^{-1}(b) = [x]_{\equiv_f}$ entonces $a \leq_A \max([x]_{\equiv_f})$. Por la definición del orden $\leq_{\equiv_f}$, se tiene que $a \leq_A \max([x]_{\equiv_f})$ si y sólo si $[a]_{\equiv_f} \leq_{\equiv_f} [x]_{\equiv_f}$. Ahora, como $[a]_{\equiv_f} = \varphi^{-1}(f(a))$ y $[x]_{\equiv_f} = \varphi^{-1}(b)$, se tiene $\varphi^{-1}(f(a)) \leq_{\equiv_f} \varphi^{-1}(b)$ lo cual es equivalente a $f(a) \leq_B b$, por la definición del orden $\leq_B$ en B.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "\pi"] & B \arrow[l, bend right, dashed, "g=\max\circ\varphi^{-1}"'] \arrow[dl, shift left, dashed, "\varphi^{-1}"] \\
A_{\equiv_f} \arrow[u, shift left, dashed, "\max"] \arrow[ur, shift left, "\varphi"] &
\end{tikzcd}
$$

□

La tercera parte de esta sección se dedica a estudiar el caso en el que la aplicación f no es sobreyectiva. En este caso, en general, hay varias posibilidades de órdenes en B que permiten definir el adjunto por la derecha. La clave para la construcción es definir un orden en B que incluya el orden que se podría definir en la imagen de la aplicación f.

De forma más general, la idea es extender el orden definido en un subconjunto de un conjunto al conjunto completo, como se detalla en la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *Dado un subconjunto $X \subseteq B$, y un elemento fijo $m \in X$, cualquier preorden $\leq_X$ en X puede ser extendido a un preorden $\leq_m$ en B, definido de la siguiente forma: para $x, y \in B$ se verifica $x \leq_m y$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

(a) $x, y \in X$ *y* $x \leq_X y$

(b) $x \in X, y \notin X$ *y* $x \leq_X m$

(c) $x, y \notin X$ y $x = y$

DEMOSTRACIÓN:

Veamos que la relación $\leq_m$ en B es reflexiva y transitiva:

Dado $x \in B$, si $x \in X$ entonces $x \leq_m x$ ya que $\leq_X$ es reflexiva y si $x \notin X$ tenemos que $x \leq_m x$ porque se cumplen las condiciones del caso (c).

Ahora, dados $x, y, z \in B$ tales que $x \leq_m y$ e $y \leq_m z$ se probará que $x \leq_m z$. Para ello basta probar los siguientes casos:

- Si $x, y, z \in X$ entonces, por la transitividad de $\leq_X$, se tiene que $x \leq_m z$.
- Si $x, y \in X$ y $z \notin X$ entonces, por definición de $\leq_m$, se tiene que $x \leq_X y$ e $y \leq_X m$. Por tanto, usando la transitividad de $\leq_X$, se obtiene que $x \leq_X m$ y por consiguiente, $x \leq_m z$.
- Si $x \in X$ e $y, z \notin X$ entonces, por definición de $\leq_m$, se obtiene que $x \leq_X m$ e $y = z$, lo cual implica que $x \leq_m z$.
- Si $x, y, z \notin X$ entonces, por la definición de $\leq_m$, se tiene $x = y = z$, es decir $x \leq_m z$.

□

A continuación se verá que si la relación inicial $\leq_X$ es una relación de orden, entonces $\leq_m$ también es un orden. Formalmente, se tiene que

Lema 2.5 *Dado un subconjunto $X \subseteq B$, y un elemento fijo $m \in X$, entonces $\leq_X$ es un orden en X si y sólo si $\leq_m$ es un orden en B.*

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposición 2.1, sólo se necesita probar que $\leq_m$ es antisimétrica. Sean $x, y \in X$ tal que $x \leq_m y$ e $y \leq_m x$, entonces por la propiedad antisimétrica de $\leq_X$, se tiene que $x = y$. Por otro lado, dados

$x, y \notin X$ tal que $x \leq_m y$ e $y \leq_m x$ entonces, por la definición de $\leq_m$, se tiene que $x = y$. A la inversa, si $\leq_m$ es un orden, entonces $\leq_X$ es también un orden, ya que es una restricción de $\leq_m$. □

Lema 2.6 *Sea X un subconjunto de B, se considera un elemento fijo $m \in X$ y un orden $\leq_X$ en X. Se define la aplicación $j_m \colon \langle B, \leq_m \rangle \to \langle X, \leq_X \rangle$ como*

$$j_m(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \\ m & \text{si } x \notin X \end{cases}$$

Entonces, $(i, j_m) \colon \langle X, \leq_X \rangle \leftrightharpoons \langle B, \leq_m \rangle$, donde i denota la inclusión $X \hookrightarrow B$.

DEMOSTRACIÓN: Dados $x, y \in X \subseteq B$, utilizando que i es la aplicación inclusión, se tiene que $i(x) \leq_m y$ si y sólo si $x \leq_m y$. Y, por las definiciones de j_m y $\leq_m$, se obtiene que $x \leq_m y$ si y sólo si $x \leq_X j_m(y)$. Ahora, sean $x \in X$ e $y \notin X$, usando de nuevo las definiciones de $\leq_m$ y j_m, se obtiene que $i(x) \leq_m y$ si y sólo si $x \leq_X m = j_m(y)$. □

Ya se han introducido todos los elementos necesarios para extender el Teorema 2.5 al caso en que la aplicación de partida no sea necesariamente sobreyectiva.

Teorema 2.6 *Dados un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, \leq_A \rangle$ y una aplicación $f \colon A \to B$, sea $\equiv_f$ la relación núcleo. Entonces, existe un orden parcial $\leq_B$ en B y una aplicación $g \colon B \to A$ tal que $(f, g) \colon \langle A, \leq_A \rangle \leftrightharpoons \langle B, \leq_B \rangle$ si y sólo si*

1. *Existe* $\max([a]_{\equiv_f})$ *para todo $a \in A$.*

2. *$a_1 \leq_A a_2$ implica* $\max([a_1]_{\equiv_f}) \leq_A \max([a_2]_{\equiv_f})$*, para todo $a_1, a_2 \in A$.*

DEMOSTRACIÓN: Para $(f, g) \colon \langle A, \leq_A \rangle \leftrightharpoons \langle B, \leq_B \rangle$, la demostración de los puntos 1 y 2 es exactamente igual a la realizada en el Teorema 2.5, para la cual no se utiliza la hipótesis de que f es una aplicación sobreyectiva.

Recíprocamente, dados $\langle A, \leq_A \rangle$ un conjunto ordenado y $f \colon A \to B$ que cumplen los puntos 1 y 2, se probará que f es el adjunto por la izquierda de una aplicación $g \colon B \to A$.

Por el Teorema 2.5, existe un orden parcial $\leq_{f(A)}$ en $f(A)$ y una aplicación $g' \colon f(A) \to B$ tal que $(f, g') \colon \langle A, \leq_A \rangle \leftrightharpoons \langle f(A), \leq_{f(A)} \rangle$.

Ahora, considerado un elemento arbitrario $m \in f(A)$, el orden parcial $\leq_{f(A)}$ induce un orden parcial $\leq_m$ en B, como se indica en el Lema 2.5, y se puede definir una aplicación $j_m \colon B \to f(A)$ tal que $(i, j_m) \colon \langle f(A), \leq_{f(A)} \rangle \leftrightharpoons \langle B, \leq_m \rangle$, según el Lema 2.6.

Finalmente, se demostrará que la composición $g = g' \circ j_m \colon B \to A$ junto con la aplicación f forman una adjunción entre A y B. Sean $a \in A$ y $b \in B$ tales que $a \leq_A g(b)$. Si $b \in f(A)$, por la definición de j_m y por ser (f, g') adjunción, se tiene que $a \leq_A g(b) = g'(b)$ si y sólo si $f(a) \leq_{f(A)} b$, lo cual implica, por la definición de $\leq_m$, que $a \leq_A g(b)$ si y sólo si $f(a) \leq_m b$.

Si $b \notin f(A)$, por la definición de j_m y por ser (f, g') adjunción, se tiene que $a \leq_A g(b) = g'(m)$ si y sólo si $f(a) \leq_{f(A)} m$, lo que es equivalente a $f(a) \leq_m b$. $\square$

Gráficamente, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo de adjunciones, en el que la aplicación anterior g' es la composición $(\max \circ \varphi^{-1})$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, shift left, "\pi"] & B \arrow[l, dashed, bend right, "g = \max \circ \varphi^{-1} \circ j_m"'] \arrow[d, dashed, shift left, "j_m"] \\
A_{\equiv_f} \arrow[u, dashed, shift left, "\max"] \arrow[r, shift left, "\varphi"] & f(A) \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[l, dashed, shift left, "\varphi^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Para finalizar esta sección se presentan dos contraejemplos, en los que se muestra que ninguna de las condiciones del teorema anterior pueden ser eliminadas.

Ejemplo 2.1 Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$ dos conjuntos y $f : A \to B$ la aplicación sobreyectiva definida como $f(a) = d$ y $f(b) = f(c) = e$. Entonces las clases de equivalencia respecto a la relación núcleo son $[a]_{\equiv_f} = \{a\}$ y $[b]_{\equiv_f} = [c]_{\equiv_f} = \{b, c\}$.

La condición 1 no puede ser eliminada: Se considera un orden parcial en A donde $a \leq_A b, a \leq_A c$ y b, c no están relacionados. Obsérvese que según la definición de f, se tiene que $[b]_{\equiv_f} = \{b, c\}$ y no existe $\max([b]_{\equiv_f})$.

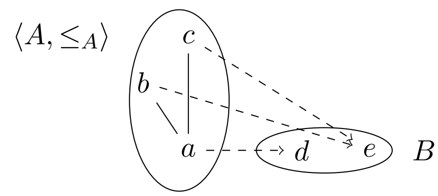


Figura 2.1: $f : \langle A, \leq_A \rangle \to B$ tal que $f(a) = d$ y $f(b) = f(c) = e$.

Si se supone que existe un orden en B y un adjunto por la derecha g, dado que $f(b) = e$ se tendría que $g(e) = \max f^{-1}(e^{\downarrow}) = \max f^{-1}(e) = \max([b]_{\equiv_f})$, lo cual es una contradicción ya que se ha visto que $\max([b]_{\equiv_f})$ no existe.

La condición 2 no puede ser eliminada: Ahora, se considera otro orden distinto en A donde $b \leq_A a \leq_A c$ y la misma aplicación f.

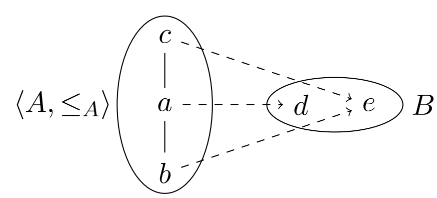


Figura 2.2: $f : \langle A, \leq_A \rangle \to B$ tal que $f(a) = d$ y $f(b) = f(c) = e$.

En este caso, se verifica la Condición 1, ya que existen ambos $\max [a]_{\equiv_f} = a$ y $\max [b]_{\equiv_f} = c$. Claramente no se cumple la Condición 2 ya que siendo $b \leq_A a$ se tiene que $\max [a]_{\equiv_f} \leq_A \max [b]_{\equiv_f}$. De este modo, nuevamente, el adjunto por la derecha g de la aplicación f no puede existir ya que f nunca podrá ser una aplicación isótona siendo d y e distintos.

2.3.2. Entre conjuntos preordenados

En esta sección se extienden los resultados anteriormente desarrollados a conjuntos preordenados, es decir, se trabajará con conjuntos dotados de relaciones reflexivas y transitivas. Análogamente al problema resuelto en la sección anterior, la situación de partida es una aplicación $f\colon \langle A, \lesssim_A\rangle \to B$ tal que el conjunto de origen A es un conjunto preordenado y el codominio B es un conjunto no necesariamente dotado de estructura.

La idea subyacente en el estudio de condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un adjunto por la derecha y un preorden en el conjunto B, es similar a la utilizada en la Sección 2.3.1, pero la ausencia de antisimetría hace más complicados los cálculos que en el caso de órdenes parciales.

Con el fin de estudiar la existencia de los adjuntos en este marco de trabajo, es necesario utilizar la relación núcleo simétrico $\approx_A$ junto con la relación núcleo $\equiv_f$, anteriormente definidas en (2.1) y (2.3) respectivamente. Estas dos relaciones se utilizan conjuntamente en la relación *p-núcleo*, la cual se define a continuación:

Definición 2.2 Sea $\langle A, \lesssim_A\rangle$ un conjunto preordenado y $f\colon A \to B$ una aplicación. La relación *p-núcleo* $\cong_A$ en A es el cierre transitivo de la unión de las relaciones núcleo simétrico $\approx_A$ y núcleo $\equiv_f$.

La definición anterior se puede describir de la siguiente forma: dados $a_1, a_2 \in A$, se tiene que $a_1 \cong_A a_2$ si y sólo si existe una cadena finita

$\{x_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \subseteq A$ tal que $x_1 = a_1$, $x_n = a_2$ y, para todo $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, o bien $x_i \equiv_f x_{i+1}$ o bien $x_i \approx_A x_{i+1}$.

Por otro lado, como se ha expuesto en la Sección 2.2, un subconjunto de un conjunto preordenado no tiene un único elemento máximo. Por consiguiente se necesita introducir herramientas que permitan trabajar con relaciones definidas entre subconjuntos. Para ello, se recuerda la noción de preorden de Hoare entre subconjuntos de un conjunto preordenado, y a continuación se introduce una caracterización alternativa a la definición.

Definición 2.3 Sea $\langle A, \lesssim_A\rangle$ un conjunto preordenado y X, Y subconjuntos de A. Se define $\sqsubseteq_H$, la relación de Hoare, $X \sqsubseteq_H Y$ si y sólo si, para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $x \lesssim_A y$.

Observación 2.3 *Si $\langle A, \lesssim_A\rangle$ es un conjunto preordenado, entonces también $\langle 2^A, \sqsubseteq_H \rangle$ es un conjunto preordenado:*

dado $X \subseteq 2^A$, por la reflexividad de $\lesssim_A$, se tiene que para todo $x \in X$, $x \lesssim_A x$, lo cual implica que $X \sqsubseteq_H X$. Ahora, dados $X, Y, Z \subseteq 2^A$ tales que $X \sqsubseteq_H Y$ e $Y \sqsubseteq_H Z$, para todo $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $x \lesssim_A y$. Por otro lado, para el elemento $y \in Y$, existe $z \in Z$ tal que $y \lesssim_A z$. Utilizando la propiedad transitiva de $\lesssim_A$, se obtiene entonces que $x \lesssim_A z$, lo cual implica que $X \sqsubseteq_H Z$.

Definición 2.4 Sea $\langle A, \lesssim_A\rangle$ un conjunto preordenado y X un subconjunto de A. Se dice que X es *cíclico* si $x \approx_A y$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Lema 2.7 *Sea $\langle A, \lesssim_A\rangle$ un conjunto preordenado y $X, Y \subseteq A$ no vacíos, donde Y es cíclico. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$X \sqsubseteq_H Y$.*

2. *Existen $x \in X$ e $y \in Y$ tales que $x \lesssim_A y$.*

3. *$x \lesssim_A y$, para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$.*

DEMOSTRACIÓN: Las implicaciones $1 \Rightarrow 2$ y $3 \Rightarrow 1$ son directas.

Se probará que $2 \Rightarrow 3$. Para ello, se considera $x \in X$ e $y \in Y$. Utilizando la hipótesis, existe $y_1 \in Y$ tal que $x \lesssim_A y_1$. Como Y es cíclico, se tiene que $y_1 \lesssim_A y$ para todo $y \in Y$. Por tanto, $x \lesssim_A y$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. □

A continuación, introducimos una notación que se usará en el resto de la sección.

Definición 2.5 Sea $\langle A, \lesssim_A \rangle$ un conjunto preordenado y sean X, S subconjuntos de A. Se denota por $UB(X)$ al conjunto de las cotas superiores de X. Para todo $a \in A$, se define el conjunto $\varphi_S(a)$ como

$$\varphi_S(a) = \text{p-min}(\text{UB}([a]_{\cong_A}) \cap S)$$

donde $[a]_{\cong_A}$ denota la clase de equivalencia del elemento a con respecto a la relación p-núcleo $\cong_A$.

El primer objetivo de esta sección es encontrar condiciones suficientes para, dada una aplicación sobreyectiva $f\colon \mathbb{A} \to B$ donde $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ es un conjunto preordenado y B es un conjunto no dotado de estructura, definir un preorden adecuado en B tal que exista un adjunto por la derecha de f. Para esta búsqueda se procederá como en el Lema 2.2, aunque el procedimiento, en este caso, será más que una mera adaptación de los resultados obtenidos en el caso de conjuntos parcialmente ordenados.

Lema 2.8 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ un conjunto preordenado y $f\colon \mathbb{A} \to B$ una aplicación sobreyectiva. Sea S un subconjunto de A tal que las siguientes condiciones se verifican:*

- $S \subseteq \bigcup_{a \in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$

- $\varphi_S(a) \neq \varnothing$, *para todo* $a \in A$.
- *Si* $a_1 \lesssim_A a_2$, *entonces* $\varphi_S(a_1) \sqsubseteq_H \varphi_S(a_2)$.

Entonces, existe un preorden $\lesssim_B$ *en* B *y una aplicación* $g\colon B \to A$ *tal que* (f, g) : $\mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$.

DEMOSTRACIÓN: Se define la relación $\lesssim_B$ en B de la siguiente forma:

$$b_1 \lesssim_B b_2 \text{ si y sólo si existen } a_i \in f^{-1}(b_i), i \in \{1,2\}, \text{ tales que}$$
$$\varphi_S(a_1) \sqsubseteq_H \varphi_S(a_2). \tag{2.6}$$

La definición de $\lesssim_B$ no depende de la elección de las preimágenes, puesto que si $f(x) = f(y)$ se verifica que $[x]_{\cong_A} = [y]_{\cong_A}$ y, por tanto, $\varphi_S(x) = \varphi_S(y)$. Además $\varphi_S(x)$ es un subconjunto no vacío y cíclico de A, para todo $x \in A$, luego utilizando el Lema 2.7, la relación $\lesssim_B$ definida en (2.6) se puede escribir como sigue: $b_1 \lesssim_B b_2$ si y sólo si

$$\text{existen } a_i \in f^{-1}(b_i) \text{ y } c_i \in \varphi_S(a_i) \text{ para } i \in \{1,2\} \text{ con } c_1 \lesssim_A c_2. \tag{2.7}$$

La relación $\lesssim_B$ es un preorden:

Reflexividad: Por la segunda hipótesis, se tiene que $\varphi_S(a) \neq \varnothing$ para todo $a \in A$. Por lo tanto, dado $b \in B$, para cualquier $a \in f^{-1}(b)$, se verifica $\varphi_S(a) \sqsubseteq_H \varphi_S(a)$, lo cual implica que $b \lesssim_B b$.

Transitividad: Supongamos que $b_1 \lesssim_B b_2$ y $b_2 \lesssim_B b_3$.

Como $b_1 \lesssim_B b_2$, existe $a_i \in f^{-1}(b_i)$, y $c_i \in \varphi_S(a_i)$ para $i \in \{1,2\}$ tal que $c_1 \lesssim_A c_2$.

Como $b_2 \lesssim_B b_3$, existe $a'_j \in f^{-1}(b_j)$, y $c'_j \in \varphi_S(a'_j)$ para $j \in \{2,3\}$ tal que $c'_2 \lesssim_A c'_3$.

Como $a_2, a'_2 \in f^{-1}(b_2)$, se tiene que $[a_2]_{\cong_A} = [a'_2]_{\cong_A}$, lo cual implica que $\varphi_S(a_2) = \varphi_S(a'_2)$. Entonces, por ser $\varphi_S(a_2)$ un subconjunto cíclico, se obtiene $c_1 \lesssim_A c_2 \approx_A c'_2 \lesssim_A c'_3$ y, como consecuencia, $b_1 \lesssim_B b_3$.

Dado que f es sobreyectiva, para todo $b \in B$ se puede elegir $x_b \in A$ con $f(x_b) = b$ y como por hipótesis, $\varphi_S(x_b) \neq \varnothing$, se puede definir una aplicación $g\colon B \to A$ de forma que

$$g(b) \in \varphi_S(x_b) \text{ donde } x_b \in f^{-1}(b). \tag{2.8}$$

Se finaliza la demostración comprobando que $(f,g)\colon \langle A, \lesssim_A\rangle \leftrightharpoons \langle B, \lesssim_B\rangle$.

Suponemos que $f(a) \lesssim_B b$. Por la definición de $\lesssim_B$, existe $a_1 \in f^{-1}(f(a))$, $a_2 \in f^{-1}(b)$, $c_1 \in \varphi_S(a_1)$ y $c_2 \in \varphi_S(a_2)$ con $c_1 \lesssim_A c_2$; como $a_1 \in f^{-1}(f(a))$ se tiene que $[a_1]_{\cong_A} = [a]_{\cong_A}$, y, por otro lado, como $c_1 \in \mathrm{UB}[a_1]_{\cong_A} = \mathrm{UB}[a]_{\cong_A}$ se obtiene que $a \lesssim_A c_1$. Sea $x_b \in f^{-1}(b)$ tal que $g(b) \in \varphi_S(x_b)$. Como $a_2, x_b \in f^{-1}(b)$, entonces $[a_2]_{\cong_A} = [x_b]_{\cong_A}$ y, por tanto, $\varphi_S(a_2) = \varphi_S(x_b)$. Entonces, $c_2, g(b) \in \varphi_S(a_2)$ lo cual implica que $c_2 \approx_A g(b)$. De este modo, como $a \lesssim_A c_1 \lesssim_A c_2 \approx_A g(b)$, entonces $a \lesssim_A g(b)$.

Supongamos ahora que $a \lesssim_A g(b)$, y se demostrará que $f(a) \lesssim_B b$. Sea $x_b \in f^{-1}(b)$ tal que $g(b) \in \varphi_S(x_b)$. La desigualdad $f(a) \lesssim_B b$, se probará en tres pasos:

- Primero, se verá que $g(b) \in \varphi_S(g(b))$: Como $g(b) \in \varphi_S(x_b)$, en particular $g(b) \in S$, y utilizando la hipótesis sobre S, se tiene que existe $c \in A$ tal que $g(b) \in \text{p-max}[c]_{\cong_A}$, lo cual implica que $g(b) \in [c]_{\cong_A} = [g(b)]_{\cong_A}$. Por tanto, $g(b) \in \text{p-max}[g(b)]_{\cong_A} \subseteq \mathrm{UB}[g(b)]_{\cong_A}$, obteniendo así que $g(b) \in \mathrm{UB}[g(b)]_{\cong_A} \cap S$. Ahora, dado $t \in \mathrm{UB}[g(b)]_{\cong_A} \cap S$, por ser t cota superior de $[g(b)]_{\cong_A}$ y $g(b) \in [g(b)]_{\cong_A}$, se tiene $g(b) \lesssim_A t$, lo cual implica que $g(b)$ es un p-mínimo del conjunto $\mathrm{UB}[g(b)]_{\cong_A} \cap S$.

- Ahora, se demostrará que $\varphi_S(a) \sqsubseteq_H \varphi_S(x_b)$. Como $a \lesssim_A g(b)$, por la tercera hipótesis se tiene que $\varphi_S(a) \sqsubseteq_H \varphi_S(g(b))$. Por el Lema 2.7 y por $g(b) \in \varphi_S(g(b))$, se tiene que $z \lesssim_A g(b)$ para todo $z \in \varphi_S(a)$. Y como $g(b) \in \varphi_S(x_b)$, entonces también $\varphi_S(a) \sqsubseteq_H \varphi_S(x_b)$.

- Finalmente, como $\varphi_S(a) \sqsubseteq_H \varphi_S(x_b)$ para $a \in f^{-1}(f(a))$ y $x_b \in f^{-1}(b)$, por la definición de preorden dada en (2.6), se tiene que $f(a) \lesssim_B b$.

□

El siguiente lema se utilizará para la demostración del resultado principal de esta sección, que será el Teorema 2.7. Este resultado es la adaptación a conjuntos preordenados del Lema 2.5 y de la parte final de la demostración del Teorema 2.6.

Lema 2.9 *Sea $\langle A, \lesssim_A\rangle$ un conjunto preordenado, B un conjunto y $f\colon A \to B$. Entonces, existe un preorden $\lesssim_B$ y una adjunción $(f,g)\colon \langle A, \lesssim_A\rangle \leftrightharpoons \langle B, \lesssim_B\rangle$ si y sólo si existe un preorden $\lesssim_{f(A)}$ y una adjunción $(f,g')\colon \langle A, \lesssim_A\rangle \leftrightharpoons \langle f(A), \lesssim_{f(A)}\rangle$.*

DEMOSTRACIÓN: La implicación directa es trivial, ya que se consideran $\lesssim_{f(A)}$ y g' como las restricciones a $f(A)$ de $\lesssim_B$ y g, respectivamente.

Recíprocamente, se considera la adjunción $(f,g')\colon \langle A, \lesssim_A\rangle \leftrightharpoons \langle f(A), \lesssim_{f(A)}\rangle$. Se fija un elemento $m \in f(A)$ y se elige $\lesssim_B$ como el preorden extendido del subconjunto $f(A)$ al conjunto B, tal y como se introdujo en la Proposición 2.1. Se considera g la extensión de g' definida como sigue:

$$g(b) = \begin{cases} g'(b) & \text{si } b \in f(A) \\ g'(m) & \text{si } b \notin f(A) \end{cases}$$

Se comprobará que $(f,g)\colon \langle A, \lesssim_A\rangle \leftrightharpoons \langle B, \lesssim_B\rangle$. Sean $a \in A$ y $b \in B$ tales que $a \lesssim_A g(b)$. Si $b \in f(A)$, se tiene $g(b) = g'(b)$. Así, utilizando la hipótesis, se obtiene que $a \lesssim_A g'(b)$ si y sólo si $f(a) \lesssim_{f(A)} b$, lo cual, por la definición de $\lesssim_B$, es equivalente a $f(a) \lesssim_B b$. Si $b \notin f(A)$, por la definición de g se tiene que $a \lesssim_A g'(m)$ lo cual equivale $f(a) \lesssim_{f(A)} m$. Por la definición de $\lesssim_B$, se verifica $f(a) \lesssim_{f(A)} m$ si y sólo si $f(a) \lesssim_B b$. □

A continuación se presenta la versión del Teorema 2.6 para el actual marco de trabajo. Este teorema es doble extensión del Lema 2.8 ya que, primero, la aplicación f no es necesariamente sobreyectiva y, segundo, proporciona las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una adjunción.

Teorema 2.7 *Dado cualquier conjunto preordenado $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ y una aplicación $f : \mathbb{A} \to B$, existe un preorden $\mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ y $g : B \to A$ tal que $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$ si y sólo si existe un subconjunto S de A tal que las siguientes condiciones se verifican:*

1. $S \subseteq \bigcup_{a \in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$
2. $\varphi_S(a) \neq \varnothing$, *para todo* $a \in A$.
3. *Si* $a_1 \lesssim_A a_2$, *entonces* $\varphi_S(a_1) \sqsubseteq_H \varphi_S(a_2)$, *para* $a_1, a_2 \in A$.

DEMOSTRACIÓN: Se supone que existe un preorden en B, la aplicación g tal que $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$ y se probará que se verifican las tres condiciones.

Para la condición 1, se define $S = g(f(A))$, se considera $g(f(a)) \in S$ y bastará probar que $g(f(a)) \in \text{p-max}[g(f(a))]_{\cong_A}$. Dado $x \in [g(f(a))]_{\cong_A}$, se razonará por inducción sobre la longitud n de cualquier cadena $\{a_i\}_{i \in \{0,\dots,n\}} \subseteq A$ tal que $a_0 = x$, $a_n = g(f(a))$ y $a_i \approx_A a_{i+1}$ o $f(a_i) = f(a_{i+1})$ para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, para demostrar $f(x) \approx_B f(a_n)$:

- Para $n = 0$, se tiene $x = a_0 = a_n = g(f(a))$, por consiguiente $f(a_0) \approx_B f(g(f(a)))$.
- Por hipótesis de inducción, se supone que el resultado es cierto para cualquier cadena de longitud k. Sea $\{a_i\}_{i \in \{0,\dots,k+1\}} \subseteq A$ una cadena tal que $a_0 = x$, $a_{k+1} = g(f(a))$ y para todo $0 \leq i \leq k$, o $a_i \approx_A a_{i+1}$ o $f(a_i) = f(a_{i+1})$. Por la hipótesis de inducción, se cumple que $f(a_0) \approx_B f(a_k)$. Hay dos posibilidades:
  - Si $a_k \approx_A a_{k+1}$, por ser f isótona, $f(a_k) \approx_B f(a_{k+1})$ y por transitividad de $\lesssim_B$, se tiene $f(a_0) \approx_B f(a_{k+1})$.

- Si $f(a_k) = f(a_{k+1})$, se obtiene de forma directa que $f(a_k) \approx_B f(a_{k+1})$. Así, de nuevo por transitividad, se tiene que $f(a_0) \approx_B f(a_{k+1})$.

Ahora, utilizando el Teorema 2.3, se sabe que $f(g(f(a))) \approx_B f(a)$, lo cual implica que $f(x) \approx_B f(a)$. Así $f(x) \lesssim_B f(a)$ y como (f, g) es adjunción, se obtiene que $x \lesssim_A g(f(a))$, por lo tanto $g(f(a)) \in$ p-$\max[g(f(a))]_{\cong_A}$.

Para la condición 2, se comprobará que $g(f(a)) \in \varphi_S(a)$. Por definición se tiene que $g(f(a)) \in S$; entonces, se probará que $g(f(a)) \in \mathrm{UB}[a]_{\cong_A}$, es decir, $x \lesssim_A g(f(a))$ para todo $x \in [a]_{\cong_A}$. Se razona por inducción sobre la longitud n de cualquier cadena $\{a_i\}_{i \in \{0,\dots,n\}} \subseteq A$ tal que $a_0 = a$, $a_n = x$ y $a_i \approx_A a_{i+1}$ o $f(a_i) = f(a_{i+1})$ para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$:

- Para $n = 0$, se tiene que $a \lesssim_A g(f(a))$ puesto que por el Teorema 2.2 se tiene que $g \circ f$ es inflacionaria.

- Se supone ahora que el resultado es cierto para cualquier cadena de longitud k. Sea $\{a_i\}_{i \in \{0,\dots,k+1\}} \subseteq A$ una cadena tal que $a_0 = a$, $a_{k+1} = x$ y para todo $0 \leq i \leq k$, o $a_i \approx_A a_{i+1}$ o $f(a_i) = f(a_{i+1})$. Por la hipótesis de inducción, se cumple que $a_k \lesssim_A g(f(a_0))$. Hay dos posibilidades:

  - Si $a_k \approx_A a_{k+1}$, por hipótesis, se tiene que $a_{k+1} \lesssim_A a_k \lesssim_A g(f(a_0))$ y por transitividad, $x = a_{k+1} \lesssim_A g(f(a))$.
  - Si $f(a_k) = f(a_{k+1})$ como f es isótona, $f(a_{k+1}) = f(a_k) \lesssim_A f(g(f(a_0)))$. Por tanto, de nuevo por ser adjunción y por el Teorema 2.3, se tiene que $a_{k+1} \lesssim_A g(f(g(f(a_0)))) \approx_A g(f(a_0))$.

Se ha probado que $g(f(a)) \in \mathrm{UB}[a]_{\cong_A} \cap S$ y queda probar que es un p-mínimo. Se considera $x \in \mathrm{UB}[a]_{\cong_A} \cap S$; entonces $z \lesssim_A x$ para todo $z \in [a]_{\cong_A}$ y, por definición de S, se sabe que existe $a_1 \in A$ tal que $x = g(f(a_1))$. En particular, para $z = a$ se tiene que, $a \lesssim_A g(f(a_1))$ lo cual implica $g(f(a)) \lesssim_A g(f(g(f(a_1))))$ por ser f y g isótonas. Además, por el Teorema 2.3, se obtiene $g(f(g(f(a_1)))) \approx_A g(f(a_1)) = x$, es decir $g(f(a)) \lesssim_A x$.

Para probar la condición 3, se consideran $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \lesssim_A a_2$. Las aplicaciones f y g son isótonas, entonces $g(f(a_1)) \lesssim_A g(f(a_2))$. De aquí, por el Lema 2.7, se obtiene directamente que $\varphi_S(a_1) \sqsubseteq \varphi_S(a_2)$, ya que se ha probado que $g(f(a)) \in \varphi_S(a)$ para todo $a \in A$.

Recíprocamente, si se suponen las condiciones 1, 2, y 3, entonces por el Lema 2.8 y el Lema 2.9, existe un preorden $\mathbb{B} = \langle B, \lesssim_B \rangle$ y una aplicación $g\colon \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ tal que $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$. □

Finalizamos esta sección con una serie de observaciones sobre las condiciones necesarias y suficientes obtenidas en el Teorema 2.7. En la Sección 2.3.1 se probó que, dado un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, \leq_A \rangle$ y una aplicación $f\colon A \to B$, existe un orden $\leq_B$ en B y una aplicación $g\colon B \to A$ tal que (f, g) es una adjunción entre los conjuntos parcialmente ordenados $\langle A, \leq_A \rangle$ y $\langle B, \leq_B \rangle$ si y sólo si

(I) Existe $\max([a]_{\equiv_f})$ para todo $a \in A$.

(II) $a_1 \leq_A a_2$ implica $\max([a_1]_{\equiv_f}) \leq_A \max([a_2]_{\equiv_f})$, para todo $a_1, a_2 \in A$.

Estas dos condiciones están estrechamente relacionadas con las diferentes caracterizaciones de la noción de adjunción, que se muestran en el Teorema 1.4 (apartados 5 y 6). Concretamente:

- La condición (I) hace referencia a la definición del adjunto por la derecha, pues si $b \in B$ y existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$, siendo (f, g) adjunción, entonces, necesariamente, $g(b) = \max([a]_{\equiv_f})$: en efecto, por el Teorema 1.4, el Lema 2.1, y la definición de $[a]_{\equiv_f}$, se tiene

$$g(f(a)) = \max f^{-1}(f(a)^{\downarrow}) = \max f^{-1}(f(a)) = \max([a]_{\equiv_f})$$

- Mientras que la condición (II) hace referencia a la isotonía de ambas aplicaciones f y g.

En el caso de los preórdenes, en el Teorema 2.7 las condiciones 1, 2 y 3 reflejan las consideraciones realizadas en el párrafo anterior, pero en este contexto de trabajo se requiere una formalización distinta. Formalmente la condición (I) está implícita en las condiciones 1 y 2, ya que si $b \in B$ y $f(a) = b$, entonces $g(b)$ no necesariamente estará en la misma clase del elemento a pero sí será máximo en su clase, es decir, $g(f(a)) \in \text{p-max}[g(f(a))]_{\cong_A}$. Por consiguiente:

- La condición 1, $S \subseteq \bigcup_{a\in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$, garantiza trabajar con elementos que verifican el hecho anteriormente mencionado, ya que S satisface que $s \in \text{p-max}[s]_{\cong_A}$ para todo $s \in S$.

- Obsérvese que la condición 1 es demasiado débil en relación con la condición (I). Sin embargo, la condición 2 proporciona los requisitos necesarios para poder definir de forma adecuada la aplicación g como adjunto por la derecha de f. Es decir, si $b \in B$ y existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$, cuando (f, g) es una adjunción entre preórdenes, se tiene que, necesariamente, $g(f(a)) \in UB[a]_{\cong_A} \cap S$ y que $g(f(a)) \in \text{p-min}(\text{UB}([a]_{\cong_A}) \cap S) = \varphi_S(a)$ para todo $a \in A$ (tal y como se comprobó en la demostración del Teorema 2.7).

De este modo, con las condiciones 1 y 2 se garantiza que si $b \in B$, $f(a) = b$ y (f, g) es una adjunción, entonces $g(f(a)) \in S$ es una cota superior minimal de $[a]_{\cong_A}$.

Finalmente, la condición 3 es una adaptación de la condición (II) descrita en los términos introducidos anteriormente.

2.3.3. Unicidad en la construcción de adjunciones.

La unicidad del adjunto por la derecha de una aplicación entre conjuntos parcialmente ordenados ya se ha comentado en secciones anteriores. Concretamente, dados dos conjuntos parcialmente ordenados $\langle A, \leq_A \rangle$ y $\langle B, \leq_B \rangle$ y una aplicación $f\colon A \to B$, si existe $g\colon B \to A$ tal que el par (f, g) es una adjunción, entonces g está unívocamente determinada.

Este comportamiento fue analizado en la Sección 2.3.1, donde la propiedad de unicidad se extendió, en el caso de aplicaciones sobreyectivas, no sólo al adjunto por la derecha, sino también a la relación de orden definida sobre el codominio. Por consiguiente, dada una aplicación sobreyectiva f de un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, \leq_A \rangle$ a un conjunto no necesariamente dotado de estructura B, se han proporcionado condiciones necesarias y suficientes para asegurar la existencia de un orden $\leq_B$ en B y una aplicación $g\colon B \to A$ tal que (f, g) es una adjunción, donde tanto el orden $\leq_B$ como la aplicación g están determinados de forma única por $\leq_A$ y f.

A diferencia del caso de conjuntos parcialmente ordenados, dados dos conjuntos preordenados $\langle A, \lesssim_A \rangle$ y $\langle B, \lesssim_B \rangle$ y una aplicación $f\colon A \to B$, la unicidad de la aplicación $g\colon B \to A$ tal que $(f, g)\colon \langle A, \lesssim_A \rangle \leftrightharpoons \langle B, \lesssim_B \rangle$, cuando existe, no se puede garantizar. Sin embargo, por la definición del adjunto por la derecha, se observa que si g_1 y g_2 son adjuntos por la derecha de una misma aplicación f, entonces, por el Teorema 2.2, $g_1(b) \in \text{p-max}\, f^{-1}(b^{\downarrow})$ y $g_2(b) \in \text{p-max}\, f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$. Por consiguiente, en virtud de la Observación 2.2, $g_1(b) \approx_A g_2(b)$ para todo $b \in B$. En este caso, se podría decir que el adjunto por la derecha es *esencialmente único*.

Veamos algunos ejemplos donde apoyar estas consideraciones.

Ejemplo 2.2 Sean $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{o, p, q\}$ dos conjuntos. Se considera en A el orden total en el que $a \leq_A b \leq_A c \leq_A d$.

Sea $f\colon A \to B$ definida como $f(a) = f(c) = p$, $f(b) = o$ y $f(d) = q$

tal y como se representa en la siguiente figura. Las clases de equivalencia de la relación núcleo $\equiv_f$ en A, son las siguientes: $[a]_{\equiv_f} = [c]_{\equiv_f} = \{a, c\}$, $[b]_{\equiv_f} = \{b\}$ y $[d]_{\equiv_f} = \{d\}$.

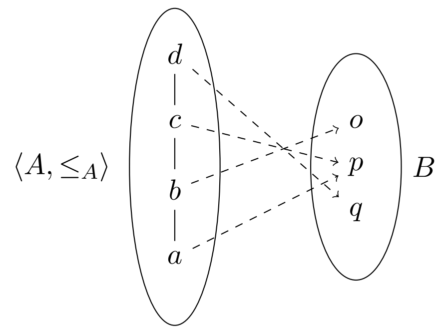


Figura 2.3: $f : \langle A, \leq_A \rangle \to B$ tal que $f(a) = f(c) = p$, $f(b) = o$ y $f(d) = q$.

Se puede observar que f es sobreyectiva, y que no se verifican las condiciones del Teorema 2.6, concretamente la segunda, ya que $a \leq_A b$ pero $\max([b]_{\equiv_f}) \not\leq_A \max([a]_{\equiv_f})$. Por consiguiente, se puede asegurar que no existe ninguna relación de orden parcial en B y ninguna $g\colon B \to A$ de forma que (f, g) sea una adjunción entre conjuntos parcialmente ordenados.

Sin embargo, si se relajan las condiciones y se busca construir una adjunción entre *conjuntos preordenados*, entonces existe un preorden (en concreto más de uno) y un adjunto por la derecha de f. Véase este hecho en los siguientes casos, en los cuales se construirán diferentes adjuntos por la derecha para la aplicación $f\colon A \to B$ definida en el Ejemplo 2.2.

Ejemplo 2.3 Como la relación definida en A es un orden total, la relación núcleo simétrico es trivial, por lo que $\equiv_f$ coincide con $\cong_A$. Obsérvese además que $\bigcup\limits_{x \in A} \text{p-max}[x]_{\cong_A} = \{b, c, d\}$. Para su subconjunto $S_1 = \{c, d\}$, se verifican también las condiciones 2 y 3 del Teorema 2.7:

2. Es sencillo comprobar que $\varphi_{S_1}(x) = \text{p-min}(\text{UB}[x]_{\cong_A} \cap S_1) \neq \varnothing$ para

todo $x \in A$, puesto que $\text{p-min}(\text{UB}[a]_{\cong_A} \cap S_1) = \text{p-min}(\text{UB}[c]_{\cong_A} \cap S_1) = \text{p-min}(\text{UB}[b]_{\cong_A} \cap S_1) = \{c\}$ y $\text{p-min}(\text{UB}[d]_{\cong_A} \cap S_1) = \{d\}$.

3. Asimismo, con el cálculo anterior, es directo comprobar que si $a_1 \lesssim_A a_2$ entonces $\text{p-min}(\text{UB}[a_1]_{\cong_A} \cap S_1) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}[a_2]_{\cong_A} \cap S_1)$ para todo $a_1, a_2 \in A$.

Por consiguiente, como resultado tenemos que existe un preorden $\lesssim_B$ en B y una aplicación $g_1\colon B \to A$ tal que el par (f, g_1) es una adjunción entre los preórdenes $\langle A, \leq_A\rangle$ y $\langle B, \lesssim_B\rangle$.

Siguiendo la demostración del Lema 2.8, podemos deducir las definiciones del preorden en B y de la aplicación g_1 :

como $\varphi_{S_1}(a) \sqsubseteq_H \varphi_{S_1}(b)$ entonces $p \lesssim_B o$; asimismo, $\varphi_{S_1}(a) \sqsubseteq_H \varphi_{S_1}(d)$ por tanto, $p \lesssim_B q$; también $\varphi_{S_1}(b) \sqsubseteq_H \varphi_{S_1}(a)$ y $\varphi_{S_1}(b) \sqsubseteq_H \varphi_{S_1}(d)$, lo cual implica $o \lesssim_B p$ y $o \lesssim_B q$, respectivamente; además, la relación es reflexiva puesto que $\varphi_{S_1}(x) \sqsubseteq_H \varphi_{S_1}(x)$, para todo $x \in A$.

Por otro lado, $g_1(y) = \varphi_{S_1}(x)$, para $x \in f^{-1}(y)$ para todo $y \in B$. Teniendo en cuenta que $f^{-1}(o) = \{b\}$, $f^{-1}(p) = \{a, c\}$ y $f^{-1}(q) = \{d\}$, la definición de g_1 es la siguiente: $g_1(o) = g_1(p) = c$ y $g_1(q) = d$ (ver Figura 2.4).

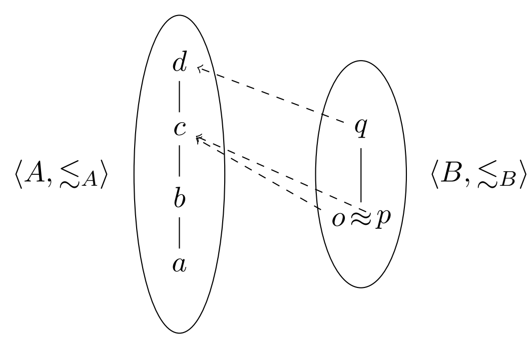


Figura 2.4: $g_1 : \langle B, \lesssim_B\rangle \to \langle A, \lesssim_A\rangle$ tal que $g_1(o) = g_1(p) = c$ y $g_1(q) = d$.

Ejemplo 2.4 Considérese ahora $S_2 = \{d\}$ otro subconjunto distinto de

$\bigcup_{x\in A}$ p-max$[x]_{\cong_A}$. Se comprueba a continuación que también verifica las condiciones del Teorema 2.7:

2. En este caso, $\text{p-min}(\text{UB}[x]_{\cong_A} \cap S_2) = \{d\}$ para todo $x \in A$.

3. Como consecuencia, de forma directa, si $a_1 \lesssim_A a_2$ entonces $\text{p-min}(\text{UB}[a_1]_{\cong_A} \cap S_1) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}[a_2]_{\cong_A} \cap S_1)$ para todo $a_1, a_2 \in A$.

Como $\varphi_S(x) = \{d\}$ para todo $x \in A$, siguiendo de nuevo la demostración del Lema 2.8 para la definición de un preorden nuevo $\lesssim'_B$, se deduce que $b_1 \lesssim'_B b_2$ para cualesquiera $b_1, b_2 \in B$ o, dicho de otro modo, $o \approx'_B p$ y $p \approx'_B q$. Además la definición del adjunto por la derecha $g_2\colon B \to A$ es constante, a saber, $g_2(b) = d$ para todo $b \in B$ (ver Figura 2.5).

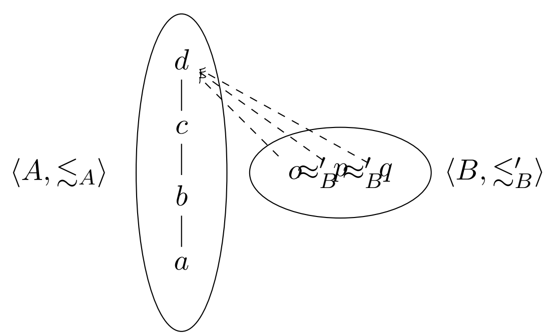


Figura 2.5: $g_2 : \langle B, \lesssim'_B\rangle \to \langle A, \lesssim_A\rangle$ tal que $g_2(o) = g_2(p) = g_2(q) = d$.

Tal y como se ha podido comprobar en los ejemplos anteriores, en un conjunto preordenado $\langle A, \lesssim_A\rangle$ la elección de un subconjunto S que verifique las condiciones $1, 2$ y 3 del Teorema 2.7 condiciona las definiciones de los preórdenes inducidos en B. A continuación, se verá un resultado que permite establecer qué relación existe entre ellos.

Teorema 2.8 *Sea* $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ *un conjunto preordenado y* $f\colon \mathbb{A} \to B$ *una aplicación sobreyectiva. Sean* $S_1, S_2 \subseteq \bigcup_{a \in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$ *subconjuntos de* A *tales que* $S_1 \subseteq S_2$ *y cumplen las siguientes condiciones:*

- $\varphi_{S_1}(a) \neq \varnothing \neq \varphi_{S_2}(a)$*, para todo* $a \in A$.
- *si* $a_1 \lesssim_A a_2$*, entonces* $\varphi_{S_1}(a_1) \sqsubseteq_H \varphi_{S_1}(a_2)$ *y* $\varphi_{S_2}(a_1) \sqsubseteq_H \varphi_{S_2}(a_2)$.

Sean $\lesssim_1$ *y* $\lesssim_2$ *preórdenes en* B *inducidos por* S_1 *y* S_2*, respectivamente. Entonces,* $b_1 \lesssim_2 b_2$ *implica que* $b_1 \lesssim_1 b_2$ *para todo* $b_1, b_2 \in B$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $b_1, b_2 \in B$ tales que $b_1 \lesssim_2 b_2$. Por la definición de $\lesssim_2$, existen $a_i \in f^{-1}(b_i)$ para $i \in \{1,2\}$, tales que $\varphi_{S_2}(a_1) \sqsubseteq \varphi_{S_2}(a_2)$. Utilizando que $\varphi_{S_1}(a) \neq \varnothing \neq \varphi_{S_2}(a)$, se eligen $c_1 \in \varphi_{S_1}(a_1)$ y $c_2 \in \varphi_{S_1}(a_2)$ y se probará que $c_1 \lesssim_A c_2$. Como $S_1 \subseteq S_2$, se tiene que $\varphi_{S_1}(a_1) \subseteq \varphi_{S_2}(a_1)$ y $\varphi_{S_1}(a_2) \subseteq \varphi_{S_2}(a_2)$. Por consiguiente, $c_1 \in \varphi_{S_2}(a_1)$ y $c_2 \in \varphi_{S_2}(a_2)$ y, utilizando que $\varphi_{S_2}(a_1) \sqsubseteq \varphi_{S_2}(a_2)$ y el Lema 2.7, se obtiene que $c_1 \lesssim_A c_2$, lo cual es equivalente a que $b_1 \lesssim_1 b_2$. □

Observación 2.4 *Obsérvese que en las condiciones del teorema anterior, considerando* $S = \bigcup_{a \in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$*, el preorden correspondiente inducido en* B *estará siempre contenido en cualquier otro preorden inducido en* B *por cualquier subconjunto de* S.

Para finalizar este capítulo se presenta un ejemplo para ilustrar el resultado anterior.

Ejemplo 2.5 Se considera la misma aplicación $f\colon A \to B$ utilizada en los Ejemplos 2.3 y 2.4.

El subconjunto $S_1 = \{c, d\}$ induce el preorden $\lesssim_1$ definido en la siguiente Figura 2.6.

$$\begin{array}{c} q \\ | \\ o \approx p \end{array}$$

Figura 2.6: $\langle B, \lesssim_1 \rangle$ preorden inducido por S_1.

$$o \approx p \approx q$$

Figura 2.7: $\langle B, \lesssim_2 \rangle$ preorden inducido por S_2.

Para $S_2 = \{d\}$ el preorden inducido, $\lesssim_2$, está definido en la Figura 2.7.

Finalmente, para $S_3 = \bigcup\limits_{x \in A} \text{p-max}[x]_{\cong_A} = \{b, c, d\}$, el preorden inducido es el definido en la Figura 2.8. En efecto, en primer lugar, véase que $\varphi_S(a) = \varphi_S(c) = \{c\}; \varphi_S(b) = \{b\}$ y $\varphi_S(d) = \{d\}$. Como $\varphi_S(a) \sqsubseteq_H \varphi_S(d)$, entonces $p \lesssim_B q$; también $\varphi_S(b) \sqsubseteq_H \varphi_S(a)$ y $\varphi_S(b) \sqsubseteq_H \varphi_S(d)$, lo cual implica $o \lesssim_B p$ y $o \lesssim_B q$, respectivamente; además, la relación es reflexiva puesto que $\varphi_S(x) \sqsubseteq_H \varphi_S(x)$, para todo $x \in A$. Sin embargo, para S_3 no se puede construir el adjunto derecho de f ya que no cumple la condición 3 del Teorema 2.7.

$$\begin{array}{c} q \\ | \\ p \\ | \\ o \end{array}$$

Figura 2.8: $\langle B, \lesssim_3 \rangle$ preorden inducido por S_3

2.4. Sistemas de cierre y adjunciones en preórdenes

Existe una estrecha relación entre adjunciones definidas en conjuntos parcialmente ordenados y operadores de cierre, tal y como se indicó en la Sección 1.3, concretamente en la Proposición 1.3. En ausencia de antisimetría, esta relación no es biunívoca exactamente, pero siguen siendo nociones muy próximas.

Por tanto, parece natural que la construcción de adjunciones tal y como se ha descrito en las secciones anteriores, se pueda explicar en términos de operadores de cierre. Ese es el objetivo de esta sección.

Se empezará adaptando ambas nociones al caso de conjuntos preordenados. Para ello se utiliza la relación núcleo simétrico $\approx_A$ sobre un conjunto preordenado $\langle A, \lesssim_A \rangle$, la cual se introdujo en (2.1) (Sección 2.2).

Definición 2.6 Sea $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ un conjunto preordenado y la relación núcleo simétrico $\approx_A$.

1. Una aplicación $c\colon A \to A$ se dice que es una aplicación $\approx_A$-idempotente, si $(c \circ c)(a) \approx_A c(a)$, para todo $a \in A$.

2. Una aplicación $c\colon A \to A$ se dice que es un operador de $\approx_A$-cierre si c es inflacionaria, isótona y $\approx_A$-idempotente.

3. Un subconjunto $S \subseteq A$ es un sistema de $\approx_A$-cierre si el conjunto $\text{p-min}(a^\uparrow \cap S)$ es no vacío para todo $a \in A$.

La noción de conjunto $\approx_A$-cerrado puede encontrarse en [24], mientras que la versión anterior de sistema de $\approx_A$-cierre se entiende como una noción novedosa de este trabajo.

Proposición 2.2 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ un conjunto preordenado.*

- *Si $c\colon A \to A$ es un operador de $\approx_A$-cierre, entonces el subconjunto*

$$S_c = \{a \in A \mid c(a) \approx_A a\}$$

  es un sistema de $\approx_A$-cierre.

- *Si S un sistema de $\approx_A$-cierre, entonces cualquier aplicación $c\colon A \to A$ tal que $c(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ para todo $a \in A$, es un operador de $\approx_A$-cierre.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $c\colon A \to A$ es un operador de $\approx_A$-cierre, se demostrará que $c(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S_c)$. Por ser c inflacionaria y $\approx_A$-idempotente, se tiene que $c(a) \in a^{\uparrow} \cap S_c$. Dado $x \in a^{\uparrow} \cap S_c$, por ser c isótona, se tiene que $c(a) \lesssim_A c(x)$. Y como $x \in S_c$, se obtiene que $c(a) \lesssim_A c(x) \approx_A x$, lo cual implica que $c(a) \lesssim_A x$.

Ahora, sea $S \subseteq A$ un sistema de $\approx_A$-cierre y $c\colon A \to A$ tal que $c(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ para todo $a \in A$. Como $c(a) \in a^{\uparrow}$, se tiene de forma directa que c es inflacionaria. Además, como $c(c(a)) \in \text{p-min}(c(a)^{\uparrow} \cap S)$ y $c(a) \in c(a)^{\uparrow} \cap S$ entonces $c(c(a)) \lesssim_A c(a)$. Por otro lado, como c es inflacionaria, se tiene que $c(a) \lesssim_A c(c(a))$. Obteniendo así que c es $\approx_A$-idempotente. Ahora, dados $a_1 \lesssim_A a_2$, por ser c inflacionaria, se tiene que $a_1 \lesssim_A a_2 \lesssim_A c(a_2)$. Por consiguiente $c(a_2) \in {a_1}^{\uparrow}$, y como $c(a_2) \in S$ se tiene que $c(a_2) \in {a_1}^{\uparrow} \cap S$. Utilizando que $c(a_1) \in \text{p-min}({a_1}^{\uparrow} \cap S)$, se obtiene que $c(a_1) \lesssim_A c(a_2)$, lo cual demuestra que c es isótona. $\square$

Definición 2.7 Sea $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ un conjunto preordenado.

- Si $c\colon A \to A$ es un operador de $\approx_A$-cierre, entonces al sistema de $\approx_A$-cierre $S_c = \{a \in A \mid c(a) \approx_A a\}$ se le denomina *sistema de $\approx_A$-cierre asociado a c.*

- Si S es un sistema de $\approx_A$-cierre, entonces a cualquier aplicación $c_S\colon A \to A$ tal que $c_S(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ para todo $a \in A$, se la denominará *operador de $\approx_A$-cierre asociado a S.*

Como se ha comentado, en conjuntos parcialmente ordenados, existe una relación biunívoca entre operadores de cierre y sistemas de cierre (para cada operador de cierre, se tiene $c = c_{S_c}$ y para cualquier sistema de cierre se tiene $S = S_{c_S}$,véase Proposición 1.2). Esta relación entre ambas nociones se debilita cuando trabajamos con conjuntos preordenados, como se expone en la siguiente proposición.

Proposición 2.3 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ un conjunto preordenado.*

1. *Si $c\colon A \to A$ es un operador de $\approx_A$-cierre, entonces $c(a) \approx_A c_{S_c}(a)$ para todo $a \in A$.*

2. *Si S es un sistema de $\approx_A$-cierre entonces $S \subseteq S_{c_S}$ y para todo $s_1 \in S_{c_S}$ existe $s_2 \in S$ tal que $s_1 \approx_A s_2$.*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que $S_c = \{a \in A \mid c(a) \approx_A a\}$ es el sistema de $\approx_A$-cierre asociado a un operador de $\approx_A$-cierre $c\colon A \to A$, y el operador de $\approx_A$-cierre $c_{S_c}\colon A \to A$ satisface que $c_{S_c}(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S_c)$. Por una parte, para todo $a \in A$, como $c_{S_c}(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S_c)$, se tiene que $a \lesssim_A c_{S_c}(a)$ y $c_{S_c}(a) \in S_c$, lo cual implica que $c(c_{S_c}(a)) \approx_A c_{S_c}(a)$. Utilizando la isotonía de c, se obtiene $c(a) \lesssim_A c(c_{S_c}(a))$. Por transitividad, $c(a) \lesssim_A c_{S_c}(a)$. Por otro lado, utilizando de nuevo que $c_{S_c}(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S_c)$, se obtiene que $c_{S_c}(a) \lesssim_A u$ para todo $u \in a^{\uparrow} \cap S_c$. Por tanto, como $c(a) \in S_c$, entonces $c_{S_c}(a) \lesssim_A c(a)$.

Para probar el segundo apartado, se considera un sistema de $\approx_A$-cierre S, un operador de $\approx_A$-cierre $c_S\colon A \to A$ asociado a S (es decir, tal que $c_S(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ para todo $a \in A$) y el sistema de $\approx_A$-cierre $S_{c_S} = \{a \in A \mid c_S(a) \approx_A a\}$. Para cualquier $a \in S$, se tiene que $a \in a^{\uparrow} \cap S$ y como $c_S(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ entonces $c_S(a) \lesssim_A a$. Utilizando que c_S es inflacionaria, se tiene que $c_S(a) \approx_A a$, es decir, $a \in S_{c_S}$. Por tanto, se ha probado que $S \subseteq S_{c_S}$. Además, si $s_1 \in S_{c_S}$ entonces $s_2 = c_S(s_1) \approx_A s_1$ y $s_2 \in S$ ya que $c_S(s_1) \in \text{p-min}(s_1^{\uparrow} \cap S)$. □

Ahora introducimos la noción de compatibilidad con una relación de equivalencia.

Definición 2.8 Sea $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ un conjunto preordenado y una relación de equivalencia $\sim$ en A.

1. Un operador de $\approx_A$-cierre $c\colon A \to A$ se dice que es compatible con $\sim$ si $a \sim b$ implica que $c(a) \approx_A c(b)$ para todo $a, b \in A$.

2. Análogamente, un sistema de $\approx_A$-cierre S se dice que es compatible con $\sim$ si $a \lesssim_A s$ implica que $[a]_\sim \subseteq s^{\downarrow}$, para todo $a \in A, s \in S$.

La noción de compatibilidad de la definición anterior se mantiene cuando nos movemos entre operadores y sistemas de $\approx_A$-cierre, en el sentido de la Proposición 2.2. Este hecho se formaliza en el siguiente resultado:

Lema 2.10 *Sea $c\colon A \to A$ un operador de $\approx_A$-cierre compatible con una relación de equivalencia $\sim$ sobre A. Entonces, el sistema de $\approx_A$-cierre asociado a c es compatible con $\sim$.*

Recíprocamente, dado S un sistema de $\approx_A$-cierre compatible con $\sim$, entonces cualquier operador de $\approx_A$-cierre asociado a S es, también, compatible con $\sim$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $c\colon A \to A$ un operador de $\approx_A$-cierre compatible con $\sim$ y $S_c = \{a \in A \mid c(a) \approx_A a\}$ el sistema de $\approx_A$-cierre asociado a c. Sean $a \in A$ y $s \in S_c$ tales que $a \lesssim_A s$. Para todo $x \in [a]_\sim$, por compatibilidad de c con $\sim$, se tiene que $c(x) \approx_A c(a)$, y, como c es un operador de $\approx_A$-cierre, se concluye que $x \lesssim_A c(x) \approx_A c(a) \lesssim_A c(s) \approx_A s$. Por tanto, $x \lesssim_A s$ para todo $x \in [a]_\sim$, lo cual es equivalente a que $[a]_\sim \subseteq s^{\downarrow}$, es decir, S_c es compatible con $\sim$.

Recíprocamente, sea S un sistema de $\approx_A$-cierre compatible con $\sim$ y sea c_S un operador de $\approx_A$-cierre tal que $c_S(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ para todo $a \in A$. Sean $a, b \in A$ tales que $a \sim b$. Como $a \lesssim_A c_S(a)$ y $b \in [a]_\sim$, por compatibilidad de S con $\sim$, se tiene que $[a]_\sim \subseteq c_S(a)^{\downarrow}$, es decir, $b \lesssim_A c_S(a)$. Por tanto, utilizando que c es un operador de $\approx_A$-cierre, se obtiene que $c_S(b) \lesssim_A c_S(c_S(a)) \approx_A c_S(a)$. De forma análoga, como $b \lesssim_A c_S(b)$ y $a \in [b]_\sim$, se obtiene que $c_S(a) \lesssim_A c_S(c_S(b)) \approx_A c_S(b)$. Por tanto, $c_S(a) \approx_A c_S(b)$. $\square$

Lema 2.11 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ un conjunto preordenado y una aplicación $f \colon \mathbb{A} \to B$. Un sistema de $\approx_A$-cierre es compatible con la relación núcleo $\equiv_f$ si y sólo si es compatible con la relación p-núcleo $\cong_A$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea S un sistema de $\approx_A$-cierre compatible con $\equiv_f$, es decir, dados $a \in A$ y $s \in S$ tales que $a \lesssim_A s$ se tiene que $[a]_{\equiv_f} \subseteq s^{\downarrow}$. Se probará que $[a]_{\cong_A} \subseteq s^{\downarrow}$.

Dado $x \in [a]_{\cong_A}$, razonamos por inducción sobre la longitud n de cualquier cadena que conecta los elementos a y x para probar que $x \lesssim_A s$:

- El caso base $n = 0$ es directo, ya que si $x = a$ se cumple por hipótesis que $a \lesssim_A s$.
- Se supone cierto el resultado para cualquier cadena de longitud k, y se considera una cadena finita $\{x_i\}_{i \in \{0,\dots,k+1\}} \subseteq A$ tal que $x_0 = a$, $x_{k+1} = x$ y, para todo $i \in \{0, \dots, k\}$, o $x_i \equiv_f x_{i+1}$ o $x_i \approx_A x_{i+1}$ y por tanto, $x_k \lesssim_A s$. Ahora, se tienen las dos posibilidades siguientes:
  - Si $x_k \approx_A x_{k+1}$, en particular $x_{k+1} \lesssim_A x_k \lesssim_A s$, según hipótesis de inducción.
  - Si $f(x_k) = f(x_{k+1})$, entonces se tiene que $x_{k+1} \in [x_k]_{\equiv_f}$. Como $x_k \lesssim_A s$, utilizando la compatibilidad con $\equiv_f$, se deduce que $[x_k]_{\equiv_f} \subseteq s^{\downarrow}$, por tanto $x_{k+1} \lesssim_A s$.

La implicación recíproca es trivial, ya que la relación $\equiv_f$ está contenida en la relación $\cong_A$. $\square$

En la Sección 2.3.2, se abordó el problema de definir un preorden sobre un conjunto B no necesariamente dotado de estructura, donde B es el codominio de una aplicación $f\colon A \to B$, y una aplicación $g\colon B \to A$ de forma que (f, g) sea una adjunción entre los conjuntos preordenados A y B. Por tanto, si (f, g) es una adjunción entre los conjuntos preordenados A y B, por el Teorema 2.2, se tiene que la composición $g \circ f$ es inflacionaria e isótona, y, por el Teorema 2.3, $g \circ f$ es $\approx_A$-idempotente. De este modo, si (f, g) es una adjunción entre los conjuntos preordenados A y B, se tiene que la composición $g \circ f$ es un operador de $\approx_A$-cierre. Además, $g \circ f$ es compatible con la relación de núcleo asociada a la aplicación f, ya que si $x \in [a]_{\equiv_f}$ entonces, por la definición de $\equiv_f$ y la isotonía de g, se verifica que $g(f(x)) \approx_A g(f(a))$. Como consecuencia de esto, la existencia de un sistema de $\approx_A$-cierre compatible con la relación de núcleo resulta ser una condición necesaria para la existencia de una adjunción.

En el siguiente resultado, se demostrará que la existencia de un sistema de $\approx_A$-cierre compatible con la relación de núcleo, además, es condición suficiente.

Teorema 2.9 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \lesssim_A \rangle$ un conjunto preordenado y una aplicación $f\colon \mathbb{A} \to B$. Entonces, existe un preorden en B y una aplicación $g\colon B \to A$ tal que (f, g) forman una adjunción si y sólo si existe un sistema de $\approx_A$-cierre compatible con $\equiv_f$.*

DEMOSTRACIÓN: Si (f, g) es una adjunción entre los conjuntos preordenados A y B, la composición $g \circ f$ es un operador de $\approx_A$-cierre (por los Teoremas 2.2 y 2.3). Entonces, por la Proposición 2.2, el conjunto $S = \{a \in A : g(f(a)) \approx_A a\}$ es un sistema de $\approx_A$-cierre. Además es compatible con $\equiv_f$: si $a \in A$ y $s \in A$ verifica $g(f(s)) \approx_A s$ y $a \lesssim_A s$, entonces, para todo $x \in A$ tal que $f(x) = f(a)$, se verifica $a \lesssim_A s \lesssim_A g(f(s))$ lo cual implica que $f(a) \lesssim_A f(s)$, por ser (f, g) una adjunción. Sustituyendo $f(a)$ por $f(x)$ y aplicando la definición de adjunción de nuevo, se obtiene $x \lesssim_A g(f(s))$.

Para el recíproco, dado S un sistema de $\approx_A$-cierre compatible con $\equiv_f$, se demostrará que S verifica las tres condiciones del Teorema 2.7:

- $S \subseteq \bigcup\limits_{a \in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$.

  Para todo $x \in S$, como $x \in [x]_{\cong_A}$ y $x \in x^{\downarrow}$ se obtiene que $[x]_{\cong_A} \subseteq x^{\downarrow}$, puesto que por el Lema 2.11, el sistema de $\approx_A$-cierre S es compatible con $\cong_A$. Entonces, para todo $y \in [x]_{\cong_A}$, se verifica $y \lesssim_A x$. Se ha probado entonces que, para todo $x \in S$, se cumple que $x \in \text{p-max}[x]_{\cong_A}$.

- $\varphi_S(a) = \text{p-min}(\text{UB}[a]_{\cong_A} \cap S) \neq \varnothing$, para todo $a \in A$.

  Primero, se probará que $\text{UB}[a]_{\cong_A} \cap S = a^{\uparrow} \cap S$. Se puede escribir $\text{UB}[a]_{\cong_A} = \bigcap\limits_{\{z \mid z \cong_A a\}} z^{\uparrow}$, por tanto será suficiente probar que $a_1 \cong_A a_2$ implica que ${a_1}^{\uparrow} \cap S = {a_2}^{\uparrow} \cap S$. Sea $x \in {a_1}^{\uparrow} \cap S$, entonces $a_1 \lesssim_A x$ lo cual implica que $[a_1]_{\cong_A} \subseteq x^{\downarrow}$. En particular, $a_2 \lesssim_A x$, así $x \in {a_2}^{\uparrow} \cap S$. Por tanto, ${a_1}^{\uparrow} \cap S \subseteq {a_2}^{\uparrow} \cap S$. Análogamente, ${a_2}^{\uparrow} \cap S \subseteq {a_1}^{\uparrow} \cap S$.

  Por tanto, $\varphi_S(a) = \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ y como S es un sistema de $\approx_A$-cierre, el conjunto $\text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S) \neq \varnothing$, para todo $a \in A$.

- Si $a_1 \lesssim_A a_2$, se verá que entonces $\varphi_S(a_1) \sqsubseteq_H \varphi_S(a_2)$.

  Sean $a_1 \lesssim_A a_2$ y $x_i \in \varphi_S(a_i)$, para $i \in \{1, 2\}$. Como $x_2 \in \text{UB}[a_2]_{\cong_A}$, en particular, $a_1 \lesssim_A a_2 \lesssim_A x_2$ entonces, por ser S compatible con $\cong_A$, se obtiene que $[a_1]_{\cong_A} \subseteq {x_2}^{\downarrow}$. Por tanto, $x_2 \in \text{UB}[a_1]_{\cong_A} \cap S$ lo cual implica que $x_1 \lesssim_A x_2$. Por consiguiente, por el Lema 2.7, se obtiene que $\varphi_S(a_1) \sqsubseteq_H \varphi_S(a_2)$.

□

Finalizamos este capítulo con un ejemplo en el que se muestran las particularidades de los resultados presentados hasta ahora. En el Ejemplo 2.3, el dominio de f, es decir $\langle A, \leq_A \rangle$, era un conjunto linealmente ordenado; esto se ha hecho así por razones de simplicidad pero no es un requisito imprescindible para que los resultados se cumplan. En el ejemplo que se presenta a continuación $\langle A, \lesssim_A \rangle$ es un preorden (no se verifica la propiedad de antisimetría).

Ejemplo 2.6 Sea $A = \{\bot, a, b, c_1, c_2, d, \top\}$ y $\lesssim_A$ la relación de preorden representada en la Figura 2.9. Sea $B = \{p, r, s, t, q\}$ y $f\colon A \to B$ la aplicación definida como $f(\bot) = p$, $f(b) = r$, $f(\top) = t$, $f(a) = f(c_1) = f(c_2) = q$ y $f(d) = s$. Entonces las clases de equivalencia respecto a la relación núcleo son $[\bot]_{\equiv_f} = \{\bot\}$, $[a]_{\equiv_f} = [c_1]_{\equiv_f} = [c_2]_{\equiv_f} = \{a, c_1, c_2\}$, $[b]_{\equiv_f} = \{b\}$, $[d]_{\equiv_f} = \{d\}$y $[\top]_{\equiv_f} = \{\top\}$.

Se pueden definir varios sistemas de $\approx$-cierre en $\langle A, \lesssim_A \rangle$ compatibles con $\equiv_f$, lo cual, en general, nos conduce a diferentes adjuntos por la derecha.

Se considera el conjunto $S_1 = \{\top, c_1, c_2\}$. Todos los subconjuntos no vacíos de S_1 tienen al menos un p-mínimo, y como para todo $a \in A$, el subconjunto $a^{\uparrow} \cap S_1$ es no vacío, se cumple la definición de sistema de $\approx$-cierre para S_1.

Para comprobar la compatibilidad de S_1 con la relación núcleo $\equiv_f$, obsérvese en primer lugar que $c_1{}^{\downarrow} = c_2{}^{\downarrow} = \{a, b, c_1, c_2, \bot\}$ y $\top^{\downarrow} = A$. Para cada elemento x de $c_1{}^{\downarrow} = c_2{}^{\downarrow}$ se cumple que $[x]_{\equiv_f} \subseteq c_1{}^{\downarrow}$: en efecto, $[a]_{\equiv_f} = [c_1]_{\equiv_f} = [c_2]_{\equiv_f} = \{a, c_1, c_2\} \subseteq c_1{}^{\downarrow}$, $[b]_{\equiv_f} = \{b\} \subseteq c_1{}^{\downarrow}$, $[\bot]_{\equiv_f} = \{\bot\} \subseteq c_1{}^{\downarrow}$ y lo mismo ocurre para los elementos de $\top^{\downarrow} = A$, obviamente.

Por consiguiente, el subconjunto S_1 induce la relación de preorden $\lesssim_B$ dada en (2.6) (en la demostración del Lema 2.8) , es decir,

$$b_1 \lesssim_B b_2 \text{ si y sólo si existen } a_i \in f^{-1}(b_i), i \in \{1, 2\} \quad \text{tales que}$$
$$\text{p-min}(\text{UB}[a_1]_{\cong_A} \cap S_1) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}[a_2]_{\cong_A} \cap S_1). \tag{2.9}$$

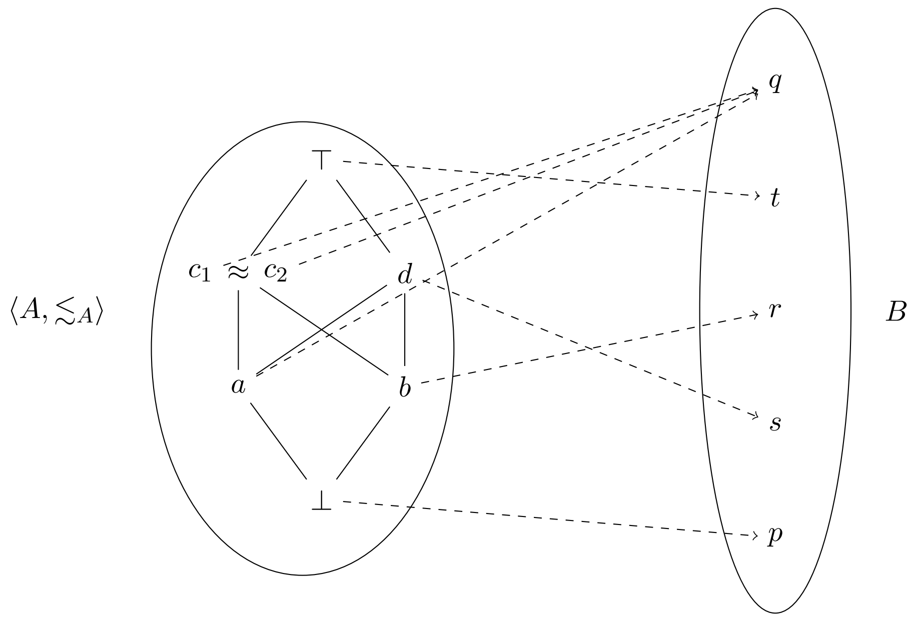


Figura 2.9: Preorden en A y $f\colon A \to B$

A continuación, veamos la definición explícita de este preorden en B:

Obsérvese, en primer lugar, que $[x]_{\equiv_f} = [x]_{\cong_A}$ para todo $x \in A$, debido a que c_1 y c_2 son los únicos elementos de A que están relacionados por la relación núcleo simétrico y ambos elementos tienen la misma imagen. Por tanto,

$$\mathrm{UB}([\perp]_{\cong_A}) = UB(\{\perp\}) = \{a, b, c_1, c_2, d, \top\}$$

$$UB([d]_{\cong_A}) = \mathrm{UB}(\{d\}) = \{\top\} = UB([\top]_{\cong_A}) = UB(\{\top\})$$

$$UB([a]_{\cong_A}) = \mathrm{UB}([c_1]_{\cong_A}) = \mathrm{UB}([c_2]_{\cong_A}) = \mathrm{UB}(\{a, c_1, c_2\}) = \{c_1, c_2, \top\} \text{ y}$$

$$\mathrm{UB}([b]_{\cong_A}) = \mathrm{UB}(\{b\}) = \{b, c_1, c_2, d, \top\}$$

Obsérvese que $S_1 \subseteq UB([\perp]_{\cong_A}), \mathrm{UB}([a]_{\cong_A}), \mathrm{UB}([c_1]_{\cong_A}), \mathrm{UB}([c_2]_{\cong_A}), \mathrm{UB}([b]_{\cong_A})$.

A partir de aquí se obtiene:

$$\text{p-min}(\text{UB}[\bot]_{\cong_A} \cap S_1) = \text{p-min}(\text{UB}[a]_{\cong_A} \cap S_1) = \text{p-min}(\text{UB}[c_1]_{\cong_A} \cap S_1) =$$

$$\text{p-min}(\text{UB}[c_2]_{\cong_A} \cap S_1) = \text{p-min}(\text{UB}[b]_{\cong_A} \cap S_1) = \text{p-min}(S_1) = \{c_1, c_2\} \text{ y}$$

$$\text{p-min}(\text{UB}[\top]_{\cong_A} \cap S_1) = \text{p-min}(\text{UB}[d]_{\cong_A} \cap S_1) = \text{p-min}(\{\top\}) = \{\top\}$$

Al ser coincidentes, se verifica

$$\text{p-min}(\text{UB}[x]_{\cong_A} \cap S_1) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}[y]_{\cong_A} \cap S_1)$$

para todo $x, y \in \{\bot, a, c_1, c_2, b\}$. Como consecuencia, dado que $\bot \in f^{-1}(p), a, c_1, c_2 \in f^{-1}(q)$ y $b \in f^{-1}(r)$, se tiene que $p \approx_B q \approx_B r$.

También se verifica

$$\text{p-min}(\text{UB}[z]_{\cong_A} \cap S_1) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}[d]_{\cong_A} \cap S_1) \text{ y}$$

$$\text{p-min}(\text{UB}[z]_{\cong_A} \cap S_1) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}[\top]_{\cong_A} \cap S_1)$$

para todo $z \in A$. Entonces, teniendo en cuenta que $d \in f^{-1}(s)$ y $\top \in f^{-1}(t)$, se satisface $b \lesssim_B s$ y $b \lesssim_B t$, para todo $b \in B$.

Por lo tanto, la relación de preorden en B quedaría como se describe en la siguiente Figura 2.10:

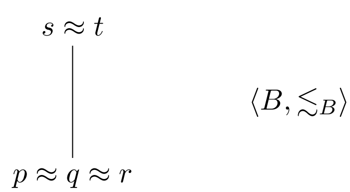


Figura 2.10: Preorden en B.

Finalmente, para construir adjuntos por la derecha de la aplicación f, se utiliza el Lema 2.8 donde $g(b) \in \text{p-min}(\text{UB}[x_b]_{\cong_A} \cap S_1)$ con $x_b \in f^{-1}(b)$.

Obsérvese que como $f^{-1}(s) = \{d\}$ y $f^{-1}(t) = \{\top\}$, entonces $g(s), g(t) = \top$; para el resto de elementos de B se tiene que $g(b) \in \{c_1, c_2\}$, por lo tanto, f admite ocho diferentes adjuntos por la derecha (tantos como funciones hay de $\{p, q, r\}$ en $\{c_1, c_2\}$, es decir $2^3 = 8$) definidos como sigue:

- g_1 con $g_1(s) = g_1(t) = \top$, $g_1(p) = g_1(q) = c_1$ y $g_1(r) = c_2$.
- g_2 con $g_2(s) = g_2(t) = \top$, $g_2(p) = c_1$ y $g_2(q) = g_2(r) = c_2$.
- g_3 con $g_3(s) = g_3(t) = \top$, $g_3(p) = g_3(r) = c_1$ y $g_3(q) = c_2$.
- g_4 con $g_4(s) = g_4(t) = \top$, $g_4(p) = g_4(q) = c_2$ y $g_4(r) = c_1$.
- g_5 con $g_5(s) = g_5(t) = \top$, $g_5(p) = c_2$ y $g_5(q) = g_5(r) = c_1$.
- g_6 con $g_6(s) = g_6(t) = \top$, $g_6(p) = g_6(r) = c_2$ y $g_6(q) = c_1$
- g_7 con $g_7(s) = g_7(t) = \top$, $g_7(p) = g_7(q) = g_7(r) = c_1$.
- g_8 con $g_8(s) = g_8(t) = \top$, $g_8(p) = g_8(q) = g_8(r) = c_2$.

Capítulo 3

Adjunciones difusas entre preórdenes difusos

3.1. Definición y caracterización de las adjunciones entre conjuntos con preórdenes difusos

Esta sección está dedicada a establecer las definiciones y caracterizaciones de conexión de Galois difusa y adjunción difusa entre conjuntos clásicos dotados de relaciones difusas preordenadas. Además se estudiarán las relaciones entre ellas, sus caracterizaciones y sus propiedades.

Para la extensión a ambiente difuso de los conceptos estudiados en el capítulo anterior, se trabajará con la estructura de retículo residuado completo, $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot, \otimes, \to)$ (ver Definición 1.9).

Recordemos que un conjunto $\mathbb{L}$-difuso es una aplicación desde el universo de discurso hasta el conjunto de valores de pertenencia $X\colon A \to L$ donde $X(u)$ significa el grado en el que u pertenece a X (Definición 1.14).

Existen diversas generalizaciones (no equivalentes) de la propiedad antisimétrica clásica a relaciones binarias difusas.

Beg en [2] trabaja con relaciones binarias difusas definidas en un universo A sobre el intervalo real $[0,1]$, es decir, $\rho_A \colon A \times A \to [0,1]$, y se define la propiedad antisimétrica del siguiente modo:

$$\text{si} \quad \rho_A(a,b) + \rho_A(b,a) > 1 \quad \text{entonces} \quad a = b, \text{ para todo } a, b \in A. \tag{3.1}$$

Bodenhofer en [11] también utiliza como conjunto de valores de verdad el intervalo real $[0,1]$ y define la propiedad antisimétrica respecto a una t-norma T [1] como sigue:

$$\text{si } a \neq b \text{ entonces } T(\rho_A(a,b), \rho_A(b,a)) = 0 \text{ para todo } a, b \in A. \tag{3.2}$$

Šešelja en [49] introduce otra definición alternativa que dice que una relación difusa definida sobre un retículo completo L es antisimétrica si

$$\rho_A(a,b) \wedge \rho_A(b,a) = \perp \quad \text{para todo } a, b \in A \text{ tales que } a \neq b. \tag{3.3}$$

Obsérvese que en el retículo $[0,1]$ se tiene un orden total, por tanto si $\rho_A(a,b) \wedge \rho_A(b,a) = 0$ quiere decir que o bien $\rho_A(a,b) = 0$ o bien $\rho_A(b,a) = 0$, para dos elementos distintos cualesquiera $a, b \in A$. Por consiguiente, tomando como retículo completo el intervalo $[0,1]$ se verifica:

- La definición (3.3) implica la (3.1): se considera $\rho_A \colon A \times A \to [0,1]$ y se supone que se verifica (3.3). Para dos elementos $a, b \in A$ tales que $\rho_A(a,b) + \rho_A(b,a) > 1$, si suponemos que $a \neq b$, entonces se tendría $\rho_A(a,b) = 0$ o bien $\rho_A(b,a) = 0$, lo cual hace imposible que $\rho_A(a,b) + \rho_A(b,a) > 1$. Como consecuencia, se obtiene que $a = b$.

- La definición (3.3) es la antisimetría definida en (3.2) respecto de la t-norma del mínimo. Sin embargo, puede ocurrir que una relación ρ_A sea antisimétrica respecto a una t-norma concreta T y no cumpla la definición (3.3).

[1] Una t-norma es una operación binaria $T \colon [0,1] \times]0,1] \to [0,1]$ monótona creciente en ambos argumentos, conmutativa, asociativa y que tiene a 1 como elemento neutro.

Los reciprocos no son ciertos, en general. Considérese en el conjunto $A = \{a, b\}$, la siguiente relación difusa sobre el intervalo [0,1]:

ρ_A	a	b
a	1	$0{,}1$
b	$0{,}1$	1

Obsérvese que ρ_A cumple (3.1) y (3.2) respecto a la t-norma de Łukasiewicz. Sin embargo no se verifica (3.3) pues para los elementos a y b que son distintos, $\rho_A(a, b) \wedge \rho_A(b, a) = 0{,}1 \neq 0$.

En el presente trabajo, se utilizará la definición propuesta por Zhang y Fan en [54], en el marco de relaciones difusas definidas sobre un retículo residuado completo $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot, \otimes, \rightarrow)$:

$$\rho_A(a, b) = \rho_A(b, a) = \top \quad \text{implica } a = b, \text{ para todo } a, b \in A. \tag{3.4}$$

Obsérvese que esta última definición es la menos exigente de las propuestas, en el sentido de que se puede inferir de cada una de las otras tres:

- Antisimetría (3.1) implica antisimetría (3.4):

  Supongamos que la relación $\rho_A \colon A \times A \to [0, 1]$ satisface (3.1) y que para dos elementos $a, b \in A$, se satisface $\rho_A(a, b) = \rho_A(b, a) = 1$. Entonces, $\rho_A(a, b) + \rho_A(b, a) = 2 > 1$ lo que implica $a = b$.

- Antisimetría (3.2) implica antisimetría (3.4):

  Supongamos que la relación $\rho_A \colon A \times A \to [0, 1]$ satisface (3.2) y que para dos elementos $a, b \in A$, se satisface $\rho_A(a, b) = \rho_A(b, a) = 1$. Entonces, por las propiedades de las t-normas, $T(\rho_A(a, b), \rho_A(b, a)) = 1$. Si se supone que los elementos a y b son distintos, se tendría que $T(\rho_A(a, b), \rho_A(b, a)) = 0$, lo cual lleva a una contradicción.

- Antisimetría (3.3) implica antisimetría (3.4):

  Supongamos que la relación $\rho_A\colon A \times A \to L$ satisface (3.3) y que para dos elementos $a, b \in A$, se satisface $\rho_A(a,b) = \rho_A(b,a) = \top$. Entonces, $\rho_A(a,b) \wedge \rho_A(b,a) = \top$. Pero, por hipótesis, si se supone que los elementos a y b son distintos, se tendría que $\rho_A(a,b) \wedge \rho_A(b,a) = \bot$, lo cual lleva a una contradicción.

No obstante, no son definiciones equivalentes, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1 Sea $A = \{a, b\}$ y se define la relación difusa $\rho_A : A \times A \to [0,1]$ como sigue:

ρ_A	a	b
a	1	1
b	0,1	1

Esta relación es antisimétrica en el sentido (3.4), pero no cumple (3.1) pues $\rho_A(a,b) + \rho_A(b,a) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1 > 1$ y $a, b \in A$ son elementos distintos.

Además, tampoco se verifica la antisimetría según (3.2) y (3.3) porque para cualquier t-norma T, por las llamadas condiciones de frontera, se verifica que $T(\rho_A(a,b), \rho_A(b,a)) = T(0{,}1\,, 1) = 0{,}1 \neq 0$ para los elementos a y b que son distintos.

De aquí en adelante, se supone como estructura subyacente un retículo residuado completo $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot, \otimes, \to)$.

Definición 3.1

- Un *conjunto con un preorden difuso* es un par $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ donde ρ_A es una relación difusa en A reflexiva y transitiva.

- Un *conjunto con un orden difuso* es un par $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ donde ρ_A es una relación difusa en A reflexiva, transitiva y antisimétrica (en el sentido de (3.4)).

Ejemplo 3.2 Dado cualquier conjunto clásico A no vacío, el par $\langle L^A, S_A \rangle$ es un conjunto con un orden difuso (ver Observación 1.1), donde $S_A : L^A \times L^A \to L$ es la relación difusa definida en la Ecuación (1.8) como

$$S_A(X, Y) = \bigwedge_{a \in A} (X(a) \to Y(a)),$$

para todo $X, Y \in L^A$.

Se debe destacar que $\langle L^A, S_A \rangle$ cumple la propiedad antisimétrica definida en (3.4). Sin embargo, para $L = [0, 1]$, no necesariamente cumple (3.1), (3.2) y (3.3) como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.3 Se considera el retículo residuado $\mathbb{L} = ([0, 1], \leq, 0, 1, \min, \to)$ donde $l_1 \to l_2 = l_2$ si $l_2 < l_1$ y $l_1 \to l_2 = 1$ si $l_1 \leq l_2$ y el universo $A = \{a, b\}$. En L^A se consideran los elementos $X, Y \colon A \to [0, 1]$ definidos por

$$X(a) = 0{,}1 \quad \text{y} \quad X(b) = 1$$

$$Y(a) = 1 \quad \text{e} \quad Y(b) = 1.$$

Por la definición de S_A, se tiene que $S_A(X, Y) = (0{,}1 \to 1) \wedge (1 \to 1) = 1$ y $S_A(Y, X) = (1 \to 0{,}1) \wedge (1 \to 1) = 0{,}1$. Por tanto:

- S_A no cumple (3.1) ya que $S_A(X, Y) + S_A(Y, X) = 1{,}1 > 1$, siendo X e Y elementos distintos.

- S_A no cumple (3.2) ni (3.3) puesto que, para cualquier t-norma T, se tiene $T(S_A(X, Y), S_A(Y, X)) = 0{,}1 \neq 0$.

Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso . La extensión a ambiente difuso de las nociones de clausura inferior $a^{\downarrow}$ y clausura superior $a^{\uparrow}$ de un elemento $a \in A$ están definidas como conjuntos difusos $a^{\downarrow}, a^{\uparrow} \colon A \to L$ de la siguiente forma:

- $a^{\downarrow}(x) = \rho_A(x, a)$ para todo $x \in A$.
- $a^{\uparrow}(x) = \rho_A(a, x)$ para todo $x \in A$.

Definición 3.2 Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso.
Un elemento $\underline{m} \in A$ es un *p-mínimo* para un subconjunto difuso X de A si

1. $X(\underline{m}) = \top$ y
2. $X \subseteq \underline{m}^{\uparrow}$, es decir, $X(a) \leq \rho_A(\underline{m}, a)$, para todo $a \in A$.

Un elemento $\overline{m} \in A$ es un *p-máximo* para un conjunto difuso X si

1. $X(\overline{m}) = \top$ y
2. $X \subseteq \overline{m}^{\downarrow}$, es decir, $X(a) \leq \rho_A(a, \overline{m})$, para todo $a \in A$.

Observación 3.1 *En conjuntos con preórdenes difusos, para cada conjunto difuso X existe un conjunto (clásico) de p-mínimos (resp. p-máximos) de X no necesariamente unitario. Estos conjuntos se denotarán por* $\text{p-min}(X)$ *y* $\text{p-max}(X)$, *respectivamente.*

Además, si $\underline{m}_1, \underline{m}_2 \in \text{p-min}(X)$ entonces $\top = X(\underline{m}_1) \leq \rho_A(\underline{m}_1, \underline{m}_2)$ por tanto, $\rho_A(\underline{m}_1, \underline{m}_2) = \top$. Análogamente, también $\rho_A(\underline{m}_2, \underline{m}_1) = \top$ y para $\overline{m}_1, \overline{m}_2 \in \text{p-max}(X)$ se satisface igualmente $\rho_A(\overline{m}_1, \overline{m}_2) = \rho_A(\overline{m}_2, \overline{m}_1) = \top$.

Observación 3.2 *A partir de cualquier conjunto con un preorden difuso $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$, se puede definir un conjunto (clásico) preordenado $\mathbb{A}_c = \langle A, \lesssim_A \rangle$ donde*

$$a \lesssim_A b \quad \textit{si y sólo si} \quad \rho_A(a, b) = \top. \tag{3.5}$$

Obsérvese que, además, ρ_A es antisimétrica si y sólo si $\lesssim_A$ lo es.

En un conjunto con un preorden difuso $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$, en el caso particular de que X sea un subconjunto clásico de A, un elemento $m \in A$ es un p-mínimo de X si y sólo si es un p-mínimo de la función característica de X (a la que, con un ligero abuso de notación, llamaremos también X). Además, $m \in A$ es un p-mínimo de X considerando en A la estructura de preorden clásico $\mathbb{A}_c = \langle A, \lesssim_A \rangle$. En efecto,

1. *$X(m) = \top$ equivale a que $m \in X$ y*

2. *$X(a) \leq \rho_A(m, a)$, para todo $a \in A$, equivale a que $\rho_A(m, a) = \top$ para todo $a \in X$, es decir, $m \lesssim_A a$ para todo $a \in X\cdot$*

Definición 3.3 Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$, $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B \rangle$ conjuntos con preórdenes difusos y sean dos aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to A$. El par (f, g) se denomina

- *Conexión de Galois difusa por la derecha entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$* si

$$\rho_A(a, g(b)) = \rho_B(b, f(a)) \ \text{ para todo } \ a \in A, b \in B.$$

  Se denotará por $(f, g) : \mathbb{A} \leftharpoonup\!\!\rightharpoondown \mathbb{B}$.

- *Conexión de Galois difusa por la izquierda entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$* si

$$\rho_A(g(b), a) = \rho_B(f(a), b) \ \text{ para todo } \ a \in A, b \in B.$$

  Se denotará por $(f, g) : \mathbb{A} \leftharpoondown\!\!\rightharpoonup \mathbb{B}$.

- *Adjunción difusa entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$* si

$$\rho_A(a, g(b)) = \rho_B(f(a), b) \ \text{ para todo } \ a \in A, b \in B.$$

  Se denotará por $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$.

- *Co-adjunción difusa entre* $\mathbb{A}$ *y* $\mathbb{B}$ si

$$\rho_A(g(b), a) = \rho_B(b, f(a)) \text{ para todo } a \in A, b \in B.$$

Se denotará por $(f, g) : \mathbb{A} \rightleftharpoons \mathbb{B}$.

Para cualquier conjunto con un preorden difuso $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$, su conjunto *dual* se define como $\mathbb{A}^{op} = \langle A, \rho_A^{-1} \rangle$ donde $\rho_A^{-1}(a, b) = \rho_A(b, a)$ para todo $a, b \in A$.

Observación 3.3 *El Teorema 2.1 se extiende directamente al caso difuso y, por tanto, cualquier propiedad dada para adjunciones difusas se puede trasladar a co-adjunciones difusas y conexiones de Galois difusas, tanto por la derecha como por la izquierda.*

Como ya se mencionó en la Sección 1.5, la noción de adjunción/conexión de Galois dada por Bělohlávek en [6] es un caso particular de la definición de adjunción/conexión de Galois difusa introducida aquí.

A continuación se verán ejemplos de aplicaciones que forman una adjunción difusa y/o una conexión de Galois difusa entre $\langle L^A, S_A \rangle$ y $\langle L^B, S_B \rangle$, para conjuntos A y B arbitrarios.

Ejemplo 3.4 Dada una aplicación biyectiva $f \colon A \to B$, con un ligero abuso de notación, se definen $f \colon L^A \to L^B$ y $f^{-1} \colon L^B \to L^A$ de la siguiente forma: para $X \in L^A$ e $Y \in L^B$

$$f(X)(b) = \bigvee_{x \in A} \{X(x) \mid f(x) = b\} \qquad f^{-1}(Y)(a) = Y(f(a)) \tag{3.6}$$

para todo $b \in B, a \in A$.

Por la definición de S_B (ver Ecuación (1.8)) y de f, se tiene que

$$S_B(f(X), Y) = \bigwedge_{b \in B} \Big(f(X)(b) \to Y(b) \Big) =$$

$$\bigwedge_{b \in B} \Big(\Big(\bigvee_{x \in A} \{X(x) \mid f(x) = b\} \Big) \to Y(b) \Big)$$

Pero, por ser f una aplicación biyectiva, para todo $b \in B$ existe un único $a \in A$ tal que $b = f(a)$, por tanto, $\bigvee_{x\in A}\{X(x) \mid f(x) = b\} = X(a)$. Entonces, $S_B(f(X), Y) = \bigwedge\limits_{a\in A} \Big(X(a) \to Y(f(a))\Big)$.

Ahora, por la definición de S_A (ver Ecuación (1.8)) y de f^{-1}, se tiene que

$$S_A(X, f^{-1}(Y)) = \bigwedge_{a\in A} \Big(X(a) \to Y(f(a))\Big).$$

Por consiguiente, $S_A(X, f^{-1}(Y)) = S_B(f(X), Y)$ para todo $X \in L^A$ e $Y \in L^B$, lo cual implica que $(f, f^{-1})\colon \langle L^A, S_A\rangle \leftrightharpoons \langle L^B, S_B\rangle$.

Ejemplo 3.5 [3] Dado $\mathbb{L} = (L, \leq, \top, \bot, \otimes, \to)$ un retículo residuado completo, sean A, B dos conjuntos e $I\colon A \times B \to L$ una relación difusa entre ellos. Para todo $X \in L^A$ e $Y \in L^B$, se define

$$X^{\triangle}(b) = \bigwedge_{a\in A} \Big(X(a) \to I(a,b)\Big) \qquad Y^{\triangledown}(a) = \bigwedge_{b\in B} \Big(Y(b) \to I(a,b)\Big)$$

El par $(^{\triangle}, ^{\triangledown})$ es una conexión de Galois difusa por la derecha entre $\langle L^A, S_A\rangle$ y $\langle L^B, S_B\rangle$.

Notación 3.1 De ahora en adelante, se utilizará la notación introducida en el Ejemplo 3.4: para una aplicación $f\colon A \to B$ y un subconjunto difuso Y de B, se define el subconjunto difuso $f^{-1}(Y)$ como $f^{-1}(Y)(a) = Y(f(a))$, para todo $a \in A$.

El siguiente teorema, proporciona distintas caracterizaciones de la noción de adjunción difusa.

Teorema 3.1 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A\rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B\rangle$ conjuntos con preórdenes difusos. Dadas dos aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $(f, g)\colon \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$.

2. *f y g son isótonas, $g \circ f$ es inflacionaria y $f \circ g$ es deflacionaria.*
3. *$f(a)^{\uparrow} = g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a \in A$.*
4. *$g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$.*
5. *f es isótona y $g(b) \in \text{p-max}\, f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$.*
6. *g es isótona y $f(a) \in \text{p-min}\, g^{-1}(a^{\uparrow})$ para cada $a \in A$.*

DEMOSTRACIÓN: Dados $a \in A$ y $b \in B$, obsérvese que por la definición de f^{-1} y de g^{-1} (ver Notación 3.1) se tiene que,

$$f^{-1}(b^{\downarrow})(a) = b^{\downarrow}(f(a)) = \rho_B(f(a), b) = f(a)^{\uparrow}(b)$$

$$g^{-1}(a^{\uparrow})(b) = a^{\uparrow}(g(b)) = \rho_A(a, g(b)) = g(b)^{\downarrow}(a).$$

Por tanto, la condición de adjunción es equivalente a las siguientes igualdades $f(a)^{\uparrow}(b) = g^{-1}(a^{\uparrow})(b)$ y $g(b)^{\downarrow}(a) = f^{-1}(b^{\downarrow})(a)$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Por consiguiente, las condiciones 1, 3 y 4 son equivalentes.

1 ⇒ 2 Dado $a \in A$, por ser ρ_B reflexiva, $\top = \rho_B(f(a), f(a))$ y por hipótesis, $\rho_A(a, g(f(a))) = \rho_B(f(a), f(a)) = \top$, por tanto, $g \circ f$ es inflacionaria. Ahora, para $a_1, a_2 \in A$, se tiene que $\rho_A(a_1, a_2) = \rho_A(a_1, a_2) \otimes \top = \rho_A(a_1, a_2) \otimes \rho_A(a_2, g(f(a_2)))$. Utilizando que ρ_A es transitiva, se obtiene que $\rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_A(a_1, g(f(a_2))) = \rho_B(f(a_1), f(a_2))$. Es decir, f es una aplicación isótona. De forma análoga, se prueba que $f \circ g$ es deflacionaria y que g es una aplicación isótona.

2 ⇒ 5 Para todo $b \in B$, por ser $f \circ g$ deflacionaria, $\top = \rho_B(f(g(b)), b) = f^{-1}(b^{\downarrow})(g(b))$. Por otro lado, utilizando que g es isótona y $g \circ f$ es inflacionaria, se tiene que

$$f^{-1}(b^{\downarrow})(a) = b^{\downarrow}(f(a)) = \rho_B(f(a), b) \leq \rho_A(g(f(a)), g(b)) =$$
$$\top \otimes \rho_A(g(f(a)), g(b)) = \rho_A(a, g(f(a))) \otimes \rho_A(g(f(a)), g(b))$$

Por consiguiente, usando que ρ_A es transitiva, se tiene que $f^{-1}(b^{\downarrow})(a) \leq \rho_A(a, g(b)) = g(b)^{\downarrow}(a)$, para todo $a \in A$. Por tanto, $g(b) \in$ p-max $f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b \in B$.

5 ⇒ 1 Por hipótesis, como $g(b) \in$ p-max $f^{-1}(b^{\downarrow})$, se tiene que $\rho_B(f(a), b) = f^{-1}(b^{\downarrow})(a) \leq g(b)^{\downarrow}(a) = \rho_A(a, g(b))$ para todo $a \in A$. Se observa que $f^{-1}(b^{\downarrow})(g(b)) = \top$ es equivalente a que $f \circ g$ es deflacionaria. Entonces, por ser f isótona,

$$\begin{aligned} \rho_A(a, g(b)) &\leq \rho_B(f(a), f(g(b))) \otimes \top \\ &= \rho_B(f(a), f(g(b))) \otimes \rho_B(f(g(b)), b) \\ &\leq \rho_B(f(a), b) \end{aligned}$$

2 ⇒ 6 Por ser $g \circ f$ inflacionaria, $\top = \rho_A(a, g(f(a))) = a^{\uparrow}(g(f(a))) = g^{-1}(a^{\uparrow})(f(a))$, para todo $a \in A$. Por otro lado, utilizando que f es isótona y $f \circ g$ es deflacionaria, se tiene, para todo $b \in B$

$$g^{-1}(a^{\uparrow})(b) = a^{\uparrow}(g(b)) = \rho_A(a, g(b)) \leq \rho_A(f(a), f(g(b))) =$$
$$\rho_A(f(a), f(g(b))) \otimes \top = \rho_A(f(a), f(g(b))) \otimes \rho_A(f(g(b)), b)$$

Ahora, utilizando la propiedad transitiva, se deduce que $g^{-1}(a^{\uparrow})(b) \leq \rho_A(f(a), b)$. Por consiguiente, $f(a) \in$ p-min $g^{-1}(a^{\uparrow})$ para cada $a \in A$.

6 ⇒ 1 Por hipótesis, como $f(a) \in$ p-min $g^{-1}(a^{\uparrow})$, se tiene que $\rho_A(a, g(b)) = a^{\uparrow}(g(b)) = g^{-1}(a^{\uparrow})(b) \leq \rho_B(f(a), b)$ para todo $b \in B$. Por otro lado, $g^{-1}(a^{\uparrow})(f(a)) = \top = \rho_A(a, g(f(a)))$ para todo $a \in A$. Entonces, utilizando que g es isótona,

$$\begin{aligned} \rho_B(f(a), b) &\leq \rho_A(g(f(a)), g(b)) \otimes \rho_A(a, g(f(a))) \\ &\leq \rho_A(a, g(b)) \end{aligned}$$

□

Teniendo en cuenta la Observación 3.3 y el Teorema 3.1 se obtienen las diferentes caracterizaciones de las adjunciones/conexiones de Galois difusas tal y como se muestra en el Cuadro 3.1.

A continuación, hacemos un breve análisis sobre la relación entre la definición de conexión de Galois/adjunción difusa y conexión de Galois/adjunción clásica. Lo natural es que la definición difusa generalice a la definición clásica, como así sucede. Recuérdese que, partir de cualquier conjunto con un preorden difuso $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$, se puede definir un conjunto (clásico) preordenado $\mathbb{A}_c = \langle A, \lesssim_A \rangle$, según se indicó en (3.5).

Lema 3.1 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B \rangle$ dos conjuntos con preórdenes difusos y sean dos aplicaciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$. Si $\rightleftarrows \in \{\leftharpoondown, \rightharpoondown, \leftrightharpoons, \rightleftharpoons\}$,*

$$(f, g) : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B} \quad \textit{implica} \quad (f, g)\colon \mathbb{A}_c \rightleftarrows \mathbb{B}_c$$

DEMOSTRACIÓN: En efecto: supongamos $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$ y $a \in A, b \in B$ tales que $a \lesssim_A g(b)$; esto equivale a $\rho_A(a, g(b)) = \top$. Como $\rho_A(a, g(b)) = \rho_B(f(a), b)$, entonces, también $\rho_B(f(a), b) = \top$, por tanto $f(a) \lesssim_B b$. □

Sin embargo, en los siguientes ejemplos se muestra que no es cierto el recíproco.

Ejemplo 3.6 Sea $\mathbb{L}$ el retículo residuado (producto) $([0, 1], \leq, 1, 0, \cdot, \to)$. Sea $A = \{a, b\}$ y el orden difuso ρ_A dado en la tabla siguiente

ρ_A	a	b
a	1	0,5
b	0,2	1

En este caso, se tiene que $\lesssim_A = \{(a, a), (b, b)\}$. Entonces, si llamamos I a la aplicación identidad en A ocurre que (I, I) constituye una conexión de

Cuadro 3.1: Resumen de las definiciones y caracterizaciones equivalentes

Conexiones de Galois difusas	
Conexión de Galois por la derecha entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ $(f,g)\colon \mathbb{A}=\langle A,\rho_A\rangle \rightharpoondown \mathbb{B}=\langle B,\rho_B\rangle$	Conexión de Galois por la izquierda entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ $(f,g)\colon \mathbb{A}=\langle A,\rho_A\rangle \leftharpoondown \mathbb{B}=\langle B,\rho_B\rangle$
$\rho_B(b,f(a))=\rho_A(a,g(b))$ para todo $a\in A$ y $b\in B$	$\rho_B(f(a),b)=\rho_A(g(b),a)$ para todo $a\in A$ y $b\in B$
f y g son antítonas y $g\circ f$ y $f\circ g$ son inflacionarias	f y g son antítonas y $g\circ f$ y $f\circ g$ son deflacionarias
$f(a)^{\downarrow}=g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a\in A$	$f(a)^{\uparrow}=g^{-1}(a^{\downarrow})$ para todo $a\in A$
$g(b)^{\downarrow}=f^{-1}(b^{\uparrow})$ para todo $b\in B$	$g(b)^{\uparrow}=f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b\in B$
f es antítona y $g(b)\in \text{p-max}\, f^{-1}(b^{\uparrow})$ para todo $b\in B$	f es antítona y $g(b)\in \text{p-min}\, f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b\in B$
g es antítona y $f(a)\in \text{p-max}\, g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a\in A$	g es antítona y $f(a)\in \text{p-min}\, g^{-1}(a^{\downarrow})$ para todo $a\in A$
Adjunción y co-adjunción difusas	
Adjunción entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ $(f,g)\colon \mathbb{A}=\langle A,\rho_A\rangle \leftrightharpoons \mathbb{B}=\langle B,\rho_B\rangle$	Co-adjunción entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ $(f,g)\colon \mathbb{A}=\langle A,\rho_A\rangle \rightleftharpoons \mathbb{B}=\langle B,\rho_B\rangle$
$\rho_B(f(a),b)=\rho_A(a,g(b))$ para todo $a\in A$ y $b\in B$	$\rho_B(b,f(a))=\rho_A(g(b),a)$ para todo $a\in A$ y $b\in B$
f y g son isótonas, $g\circ f$ es inflacionaria y $f\circ g$ es deflacionaria	f y g son isótonas, $g\circ f$ es deflacionaria y $f\circ g$ es inflacionaria
$f(a)^{\uparrow}=g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a\in A$	$f(a)^{\downarrow}=g^{-1}(a^{\downarrow})$ para todo $a\in A$
$g(b)^{\downarrow}=f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b\in B$	$g(b)^{\uparrow}=f^{-1}(b^{\uparrow})$ para todo $b\in B$
f es isótona y $g(b)\in \text{p-max}\, f^{-1}(b^{\downarrow})$ para todo $b\in B$	f es isótona y $g(b)\in \text{p-min}\, f^{-1}(b^{\uparrow})$ para todo $b\in B$
g es isótona y $f(a)\in \text{p-min}\, g^{-1}(a^{\uparrow})$ para todo $a\in A$	g es isótona y $f(a)\in \text{p-max}\, g^{-1}(a^{\downarrow})$ para todo $a\in A$

Galois clásica entre $\mathbb{A}_c=\langle A,\lesssim_A\rangle$ y $\mathbb{A}_c=\langle A,\lesssim_A\rangle$. Sin embargo, (I,I) no es una conexión de Galois difusa entre $\mathbb{A}=\langle A,\rho_A\rangle$ y $\mathbb{A}=\langle A,\rho_A\rangle$ puesto que

$0{,}5 = \rho_A(a, I(b)) \neq \rho_A(b, I(a)) = 0{,}2$.

Ejemplo 3.7 Se consideran ahora los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, \top\}$ y $B = \{p, q, r, s, t\}$ con las siguientes relaciones difusas reflexivas y transitivas:

ρ_A	a	b	c	d	e	$\top$
a	1	0,5	1	1	1	1
b	0,7	1	1	1	1	1
c	0,7	0,5	1	1	0,7	1
d	0,7	0,5	1	1	0,7	1
e	0,7	0,5	0,7	0,7	1	1
$\top$	0,7	0,5	0,7	0,7	0,7	1

ρ_B	p	q	r	s	t
p	1	1	1	1	1
q	1	1	1	1	1
r	0,4	0,4	1	0,4	0,4
s	1	1	1	1	1
t	0,4	0,4	0,4	0,4	1

El par de aplicaciones (f, g) donde

- $f\colon A \to B$ está definida por $f(a) = f(c) = p$; $f(b) = q$; $f(d) = f(e) = f(\top) = r$ y
- $g\colon B \to A$ está definida por $g(p) = g(q) = g(s) = g(t) = c$; $g(r) = \top$

no es una adjunción difusa porque

$$\rho_A(d, g(p)) = \rho_A(d, c) = 1 \quad \text{y} \quad \rho_B(f(d), p) = \rho_B(r, p) = 0{,}4 \neq 1$$

Ahora bien, para los conjuntos preordenados clásicos $\mathbb{A}_c$ y $\mathbb{B}_c$, representados en la Figura 3.1, el par (f, g) sí constituye una adjunción.

Del mismo modo que ocurre con el caso clásico (ver Sección 2.2), para cualquier conjunto con un preorden difuso $\langle A, \rho_A \rangle$ se puede definir el conjunto cociente sobre la relación núcleo simétrico $\approx_A$ (ver Ecuación (2.1)), es decir, donde

$$a \approx_A b \quad \text{si y sólo si} \quad \rho_A(a, b) = \rho_A(b, a) = \top$$

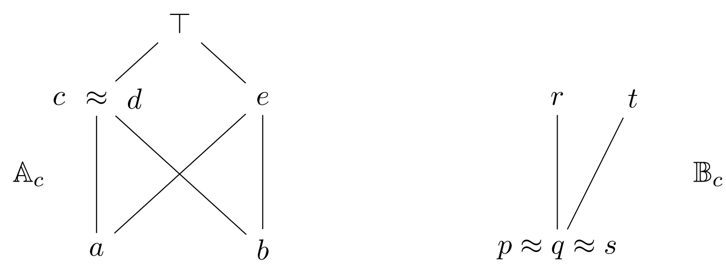


Figura 3.1: Preórdenes $\mathbb{A}_c$ y $\mathbb{B}_c$.

y se denota por $A_\approx$.

En el conjunto $A_\approx$ se puede definir la siguiente relación binaria difusa,

$$\rho_{A_\approx}([a]_\approx, [b]_\approx) = \rho_A(a, b) \tag{3.7}$$

Obsérvese que $\rho_{A_\approx}$ está bien definida ya que para cualesquiera $\alpha \approx_A a$ y $\beta \approx_A b$ se tiene que $\rho_A(a, b) = \rho_A(\alpha, a) \otimes \rho_A(a, b) \otimes \rho_A(b, \beta) \leq \rho_A(\alpha, \beta)$ y análogamente $\rho_A(\alpha, \beta) \leq \rho_A(a, b)$.

También, $\rho_{A_\approx}$ es un orden difuso ya que es obviamente reflexiva y transitiva (por la propiedad reflexiva y transitiva de ρ_A y $\rho_{A_\approx}$) y también es antisimétrica porque si $\rho_{A_\approx}([a]_\approx, [b]_\approx) = \rho_{A_\approx}([b]_\approx, [a]_\approx) = \top$, entonces $\rho_A(a, b) = \rho_A(b, a) = \top$, lo cual es equivalente a que $a \approx_A b$, es decir, $[a]_\approx = [b]_\approx$. De este modo, dado un conjunto con un preorden difuso $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$, al par $\langle A_\approx, \rho_{A_\approx} \rangle$ lo denotaremos como $\overline{\mathbb{A}}$.

Además, cualquier aplicación f entre conjuntos con preórdenes difusos induce una aplicación $\overline{f}$ definida como $\overline{f} \colon A_\approx \to B_\approx$ con $\overline{f}([a]_\approx) = [f(a)]_\approx$ para todo $a \in A$.

El siguiente teorema muestra cómo trasladar adjunciones difusas, co-adjunciones difusas, conexiones de Galois difusas por la derecha y conexiones de Galois difusas por la izquierda a los conjuntos cocientes $\overline{\mathbb{A}}$, $\overline{\mathbb{B}}$.

Teorema 3.2 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A\rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B\rangle$ dos conjuntos con preórdenes difusos y dos aplicaciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$. Entonces, para $\leftrightarrows \in \{\leftharpoonup\!\rightharpoonup, \leftharpoondown\!\rightharpoondown, \leftrightharpoons, \rightleftharpoons\}$, se verifica $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightarrows \mathbb{B}$ si y sólo si $(\overline{f}, \overline{g})\colon \overline{\mathbb{A}} \leftrightarrows \overline{\mathbb{B}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Por un lado, utilizando la definición de $\overline{g}$ y $\rho_{A_\approx}$, se tiene que $\rho_{A_\approx}([a]_\approx, \overline{g}([b]_\approx)) = \rho_{A_\approx}([a]_\approx, [g(b)]_\approx) = \rho_A(a, g(b))$. Por otro lado, usando la definición $\overline{f}$ y $\rho_{B_\approx}$, se obtiene que

$$\rho_{B_\approx}(\overline{f}([a]_\approx), [b]_\approx) = \rho_{B_\approx}([f(a)]_\approx, [b]_\approx) = \rho_B(f(a), b).$$

Por consiguiente, $\rho_A(a, g(b)) = \rho_B(f(a), b)$ si y sólo si $\rho_{A_\approx}([a]_\approx, \overline{g}([b]_\approx))$.

De forma análoga, se prueba para $\leftrightarrows \in \{\leftharpoonup\!\rightharpoonup, \leftharpoondown\!\rightharpoondown, \rightleftharpoons\}$. $\square$

En un conjunto A la única relación binaria clásica que es a la vez reflexiva, simétrica y antisimétrica es la identidad ($R = \{(x, x) : x \in A\}$). Sin embargo, existen relaciones difusas que son a la vez relaciones de equivalencia y de orden. Más aún, estas son las conocidas como *igualdades* difusas, que son relaciones difusas fuertemente reflexivas (es decir, $\rho(a, b) = \top$ si y sólo si $a = b$), simétricas y transitivas. En estos casos, obviamente, las aplicaciones isótonas y antítonas coinciden. No obstante, existen aplicaciones no triviales entre conjuntos con órdenes difusos (que no tienen por qué ser igualdades difusas) que son a la vez antítonas e isótonas tal y como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.8 Sea $\mathbb{L}$ el retículo residuado (producto) $([0, 1], \leq, 1, 0, \cdot, \to)$. Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$ con un preorden difuso ρ_A dado en la siguiente tabla:

ρ_A	a	b	c
a	1	0,5	0,3
b	0,5	1	0,3
c	0,2	0,2	1

Se considera la aplicación $f\colon A \to A$ donde $f(a) = f(c) = b$ y $f(b) = a$. Véase que f es a la vez una aplicación isótona y antítona, es decir, $\rho_A(x, y) \leq \rho_{f(A)}(f(x), f(y))$ y que $\rho_A(x, y) \leq \rho_{f(A)}(f(y), f(x))$ para todo $x, y \in A$, comparando uno a uno los elementos de la tabla anterior con la siguiente:

$\rho_{f(A)}$	$f(a) = b$	$f(b) = a$	$f(c) = b$
$f(a) = b$	1	0,5	1
$f(b) = a$	0,5	1	0,5
$f(c) = b$	1	0,5	1

Para finalizar esta sección, se proporcionará un resultado donde se adaptan, al marco difuso y a la ausencia de antisimetría, algunas propiedades de las adjunciones y conexiones de Galois.

Teorema 3.3 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B \rangle$ conjuntos con preórdenes difusos y $\leftrightarrows \in \{\leftharpoonup\!\!\rightharpoondown, \leftharpoondown\!\!\rightharpoondown, \leftrightharpoons, \rightleftharpoons\}$.*

1. *Si $(f, g)\colon \mathbb{A} \leftrightarrows \mathbb{B}$ entonces, $(f \circ g \circ f)(a) \approx f(a)$ y $(g \circ f \circ g)(b) \approx g(b)$ para todo $a \in A, b \in B$.*

2. *Si (f, g) es a la vez adjunción y co-adjunción difusa (resp., conexión de Galois difusa tanto por la izquierda como por la derecha) entonces $(g \circ f)(a) \approx a$ y $(f \circ g)(b) \approx b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$.*

3. *Si (f, g) es simultáneamente una conexión de Galois difusa (por la izquierda o por la derecha) y una (co-) adjunción difusa entonces, para todo $a_1, a_2 \in A$, $\rho_A(a_1, a_2) = \top$ implica $f(a_1) \approx_B f(a_2)$ y, para todo $b_1, b_2 \in B$, $\rho_B(b_1, b_2) = \top$ implica $g(b_1) \approx_B g(b_2)$.*

DEMOSTRACIÓN:

1. Sea $(f, g) \colon \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$ y $a \in A$. Por ser $g \circ f$ inflacionaria y f isótona se tiene que $\top = \rho_A(a, (g(f(a)))) \leq \rho_B(f(a), (f(g(f(a))))$, lo cual implica que $\rho_B(f(a), f(g(f(a)))) = \top$. Utilizando que $f \circ g$ es deflacionaria se deduce $\top = \rho_B((f \circ g)(f(a)), f(a))$. Por tanto, por la definición de la relación núcleo simétrico (ver Ecuación (2.1)), se tiene que $(f \circ g \circ f)(a) \approx f(a)$, para todo $a \in A$. De forma análoga se prueba que $(g \circ f \circ g)(b) \approx g(b)$ para todo $b \in B$.

   Para $\leftrightharpoons \in \{\hookleftarrow\!\!\!\rightharpoonup, \leftharpoondown\!\!\!\rightharpoondown, \rightleftharpoons\}$ la demostración es similar.

2. Ahora, supongamos que (f, g) es adjunción y co-adjunción. Por tanto, $f \circ g$ y $g \circ f$ son aplicaciones inflacionarias y deflacionarias a la vez, es decir, $\rho_A(g(f(a)), a) = \top = \rho_A(a, g(f(a)))$ para todo $a \in A$, y $\rho_B(f(g(b)), b) = \top = \rho_B(b, f(g(b)))$ para todo $b \in B$.

3. Finalmente, supongamos que (f, g) es adjunción difusa y conexión de Galois difusa por la derecha. Por ser las aplicaciones f y g isótonas y antítonas a la vez, por un lado, se tiene $\top = \rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_B(f(a_1), f(a_2))$ y $\top = \rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_B(f(a_2), f(a_1))$ para todo $a_1, a_2 \in A$, y por otro lado, $\top = \rho_B(b_1, b_2) \leq \rho_A(g(b_1), g(b_2))$ y $\top = \rho_B(b_1, b_2) \leq \rho_A(g(b_2), g(b_1))$ para todo $b_1, b_2 \in B$. Por consiguiente, $f(a_1) \approx f(a_2)$ y $g(b_1) \approx g(b_2)$ para todo $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$.

$\square$

3.2. Construcción de adjunciones difusas

En esta sección se estudiará la construcción de adjunciones difusas, en primer lugar, entre conjuntos con órdenes difusos y, a continuación, entre conjuntos con preórdenes difusos. Se sigue una estructura similar a la del Capítulo 2. Se trabajará con adjunciones difusas, y por la Observación 3.3

todos los resultados obtenidos se pueden extender a cualquiera de las cuatro posibles nociones de conexión de Galois o adjunción de la Definición 3.3.

3.2.1. Entre conjuntos con órdenes difusos

Se considera una aplicación $f\colon \langle A, \rho_A\rangle \to B$, donde el conjunto A está dotado de una relación difusa parcialmente ordenada y el conjunto B es un conjunto no necesariamente dotado de estructura. Se estudiará el problema de definir una relación difusa de orden sobre el conjunto B de forma que exista una aplicación $g\colon \langle B, \rho_B\rangle \to \langle A, \rho_A\rangle$ tal que el par de aplicaciones (f, g) formen una adjunción difusa.

Se empieza introduciendo el siguiente lema que permite, en algunos casos, simplificar una de las caracterizaciones de adjunción difusa eliminando la clausura inferior del apartado 5 del Teorema 3.1.

Lema 3.2 *Sean $\langle A, \rho_A\rangle$, $\langle B, \rho_B\rangle$ dos conjuntos con órdenes difusos y $f\colon A \to B$ una aplicación isótona. Entonces, para todo $b \in f(A)$, si existe* $\max f^{-1}(b^{\downarrow})$ *entonces existe* $\max f^{-1}(b)$ *y, además, se cumple* $\max f^{-1}(b^{\downarrow}) = \max f^{-1}(b)$.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, obsérvese que $f^{-1}(b^{\downarrow})$ es un conjunto difuso definido como $f^{-1}(b^{\downarrow})(a) = b^{\downarrow}(f(a)) = \rho_A(f(a), b)$, para todo $a \in A$. Por el contrario, $f^{-1}(b)$ es un conjunto clásico. Al decir que existe $\max f^{-1}(b)$ se está considerando en A el orden clásico $\lesssim_A$ tal y como se presentó en la Observación 3.2.

Sea $m = \max f^{-1}(b^{\downarrow})$. Se demostrará que $a \lesssim_A m$, para todo $a \in f^{-1}(b)$, y que $m \in f^{-1}(b)$, lo cual es equivalente a que $m = \max f^{-1}(b)$.

Por un lado, utilizando la definición de $\max f^{-1}(b^{\downarrow})$, para todo $x \in A$ se tiene que $f^{-1}(b^{\downarrow})(x) \leq m^{\downarrow}(x)$, es decir, $\rho_B(f(x), b) \leq \rho_A(x, m)$. Por consiguiente, para todo $a \in f^{-1}(b)$, se tiene que $\top = \rho_B(b, b) = \rho_B(f(a), b) \leq \rho_A(a, m)$ lo cual implica que $a \lesssim_A m$.

Ahora, como f es isótona se tiene que $\top = \rho_A(a, m) \leq \rho_B(f(a), f(m)) = \rho_B(b, f(m))$. Por otro lado, $\top = f^{-1}(b^{\downarrow})(m) = \rho_B(f(m), b)$. Así, usando la antisimetría de ρ_B, se tiene que $f(m) = b$.

$\square$

El problema anteriormente planteado, se abordará de manera similar a la forma de construir el orden parcial y el adjunto por la derecha de la función f utilizado en la Sección 2.3.1. Para ello, se considerará la descomposición canónica de la aplicación $f\colon \langle A, \rho_A\rangle \to B$ a través de $A_{\equiv_f}$, conjunto cociente de A con respecto a la *relación núcleo* $\equiv_f$ definida en la Ecuación (2.3), y representada en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\langle A, \rho_A\rangle \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, two heads, "\pi"'] & B \\
A_{\equiv_f} \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & f(A) \arrow[u, dashed, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

donde π representa la proyección canónica sobre el conjunto cociente $A_{\equiv_f}$, $i : f(A) \to B$ es la aplicación inclusión y la aplicación $\varphi\colon A_{\equiv_f} \to f(A)$ está definida como la única aplicación (biyectiva) que hace conmutativo el diagrama. La definición es, por tanto, $\varphi([a]_{\equiv_f}) = f(a)$ para todo $a \in A$.

En el siguiente resultado se proporcionan las condiciones necesarias para la existencia de un adjunto por la derecha de la aplicación proyección sobre el conjunto cociente.

Lema 3.3 *Dada $\langle A, \rho_A\rangle$ un conjunto con un orden difuso y una aplicación $f\colon A \to B$, sea $A_{\equiv_f}$ el conjunto cociente con respecto a la relación núcleo. Si existe un orden difuso $\rho_{A_{\equiv_f}}$ en $A_{\equiv_f}$ y una aplicación $g : A_{\equiv_f} \to A$ tal que $(\pi, g) : A \leftrightharpoons A_{\equiv_f}$ entonces,*

1. $g([a]_{\equiv_f}) = \max\left([a]_{\equiv_f}\right)$ *para todo $a \in A$.*

2. $\rho_{A_{\equiv_f}}([a_1]_{\equiv_f}, [a_2]_{\equiv_f}) = \rho_A(a_1, \max [a_2]_{\equiv_f})$ *para todo* $a_1, a_2 \in A$.

3. $\rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_A(\max([a_1]_{\equiv_f}), \max([a_2]_{\equiv_f}))$ *para todo* $a_1, a_2 \in A$.

DEMOSTRACIÓN: Sea (π, g) una adjunción difusa entre A y $A_{\equiv_f}$. Usando el Teorema 3.1, se tiene que $g([a]_{\equiv_f}) = \max \pi^{-1}([a]^{\downarrow}_{\equiv_f})$. Por el Lema 3.2, se obtiene que $\max \pi^{-1}([a]^{\downarrow}_{\equiv_f}) = \max \pi^{-1}([a]_{\equiv_f}) = \max([a]_{\equiv_f})$. La condición de adjunción $\rho_A(a_1, g([a_2]_{\equiv_f}) = \rho_{A_{\equiv_f}}(\pi(a_1), [a_2]_{\equiv_f})$ nos lleva a la definición de un orden difuso en $A_{\equiv_f}$, como $\rho_{A_{\equiv_f}}([a_1]_{\equiv_f}, [a_2]_{\equiv_f}) = \rho_A(a_1, \max([a_2]_{\equiv_f}))$.

Por último, como π y g son aplicaciones isótonas, se obtiene que

$$\rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_{A_{\equiv_f}}([a_1]_{\equiv_f}, [a_2]_{\equiv_f}) \leq$$

$$\leq \rho_A(g([a_1]_{\equiv_f}), g([a_2]_{\equiv_f})) = \rho_A(\max([a_1]_{\equiv_f}), \max([a_2]_{\equiv_f})).$$

□

Dada una relación de equivalencia clásica $\sim$ sobre A, se considera el conjunto cociente de A con respecto a $\sim$, denotado por $A_\sim$, y la proyección natural por $\pi : A \to A_\sim$. El siguiente resultado proporciona las condiciones suficientes para poder definir un orden difuso en $A_\sim$ de forma que el par de aplicaciones $(\pi, \max)$ sea una adjunción difusa. En particular, el resultado se verifica para la relación núcleo $\equiv_f$.

Lema 3.4 *Sea* $\langle A, \rho_A \rangle$ *un conjunto con un orden difuso y* $\sim$ *una relación de equivalencia clásica definida sobre A (es decir, se tiene que* $\sim \subseteq A \times A$*). Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

1. *Existe* $\max([a]_\sim)$, *para todo* $a \in A$.

2. $\rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_A(\max([a_1]_\sim), \max([a_2]_\sim))$, *para todo* $a_1, a_2 \in A$.

Entonces, $\rho_{A_\sim} : A_\sim \times A_\sim \to L$ *definida como*

$$\rho_{A_\sim}([a_1]_\sim, [a_2]_\sim) = \rho_A(a_1, \max([a_2]_\sim))$$

es un orden difuso en $A_\sim$*.*

Además, el par de aplicaciones $(\pi, \max)$ *es una adjunción difusa, es decir,* $(\pi, \max)\colon \langle A, \rho_A\rangle \leftrightharpoons \langle A_\sim, \rho_{A_\sim}\rangle$.

DEMOSTRACIÓN:

Comenzamos demostrando que $\rho_{A_\sim}$ está bien definida. Se tiene, por hipótesis, que existe $\max([a]_\sim)$, para todo $a \in A$, y se demuestra que, dados $a_1 \sim \alpha_1$ y $a_2 \sim \alpha_2$ se verifica $\rho_A(a_1, \max([a_2]_\sim)) = \rho_A(\alpha_1, \max([\alpha_2]_\sim))$.

Utilizando la hipótesis 2, se tiene que

$$\begin{aligned}\rho_A(a_1, \max([a_2]_\sim)) \leq \rho_A(\max([a_1]_\sim), \max([\max([a_2]_\sim)]_\sim)) = \\ \rho_A(\max([a_1]_\sim), \max([a_2]_\sim)).\end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando la definición de max y que $a_1 \sim \alpha_1$, se tiene que $\top = \rho_A(\alpha_1, \max([\alpha_1]_\sim) = \rho_A(\alpha_1, \max([a_1]_\sim)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\rho_A(a_1, \max([a_2]_\sim) \leq \rho_A(\max([a_1]_\sim), \max([a_2]_\sim)) = \\ \top \otimes \rho_A(\max([a_1]_\sim), \max([a_2]_\sim)) = \\ \rho_A(\alpha_1, \max([a_1]_\sim) \otimes \rho_A(\max([a_1]_\sim), \max([a_2]_\sim)).\end{aligned}$$

Ahora, por la transitividad de ρ_A y puesto que $\max([a_2]_\sim) = \max([\alpha_2]_\sim)$, se obtiene

$$\rho_A(a_1, \max([a_2]_\sim) \leq \rho_A(\alpha_1, \max([a_2]_\sim) = \rho_A(\alpha_1, \max([\alpha_2]_\sim).$$

De forma análoga se muestra que $\rho_A(\alpha_1, \max([\alpha_2]_\sim) \leq \rho_A(a_1, \max([a_2]_\sim)$.

A continuación se probará que $\rho_{A_\sim}$ es un orden difuso:

- Reflexividad: $\rho_{A_\sim}([a]_\sim, [a]_\sim) = \rho_A(a, \max([a]_\sim)) = \top$, para todo $a \in A$.
- Transitividad: Sean $a_1, a_2, a_3 \in A$. Entonces,

$$\begin{aligned}\rho_{A_\sim}([a_1]_\sim, [a_2]_\sim) \otimes \rho_{A_\sim}([a_2]_\sim, [a_3]_\sim) = \\ = \rho_A(a_1, \max([a_2]_\sim)) \otimes \rho_A(a_2, \max([a_3]_\sim)).\end{aligned}$$

Usando la hipótesis 2 y las propiedades de $\otimes$, se obtiene que

$$\rho_A(a_1, \max([a_2]_\sim)) \otimes \rho_A(a_2, \max([a_3]_\sim)) \leq$$
$$\leq \rho_A(a_1, \max([a_2]_\sim)) \otimes \rho_A(\max([a_2]_\sim), \max([a_3]_\sim)).$$

Finalmente, por transitividad de ρ_A, se deduce que

$$\rho_{A_\sim}([a_1]_\sim, [a_2]_\sim) \otimes \rho_{A_\sim}([a_2]_\sim, [a_3]_\sim) \leq \rho_{A_\sim}([a_1]_\sim, [a_3]_\sim).$$

- Antisimetría: Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que

$$\rho_{A_\sim}([a_1]_\sim, [a_2]_\sim)) = \rho_{A_\sim}([a_2]_\sim, [a_1]_\sim) = \top.$$

Por la hipótesis 2, se tiene que

$$\top = \rho_A(a_1, \max[a_2]_\sim) \leq \rho_A(\max[a_1]_\sim, \max[a_2]_\sim)$$

y

$$\top = \rho_A(a_2, \max[a_1]_\sim) \leq \rho_A(\max[a_2]_\sim, \max[a_1]_\sim).$$

Utilizando la antisimetría de ρ_A, se tiene que $\max[a_1]_\sim = \max[a_2]_\sim$, lo cual implica que $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$.

Por último, $\rho_A(a_1, \max[a_2]_\sim) = \rho_{A_\sim}([a_1]_\sim, [a_2]_\sim) = \rho_{A_\sim}(\pi(a_1), [a_2]_\sim)$, para todo $a_1, a_2 \in A$. Por tanto, $(\pi, \max)$ constituye una adjunción difusa.

□

A continuación, presentamos un resultado que resuelve el problema de la búsqueda de un adjunto por la derecha, en el caso de que la aplicación de partida sea biyectiva.

Lema 3.5 *Sea $\langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un orden difuso y una aplicación biyectiva $\varphi\colon A \to B$. Entonces φ induce un orden difuso $\rho_B : B \times B \to \mathbb{L}$ definido del siguiente modo*

$$\rho_B(b, b') = \rho_A(\varphi^{-1}(b), \varphi^{-1}(b')) \quad \textit{para todo } b, b' \in B$$

tal que φ y φ^{-1} son isótonas y $(\varphi, \varphi^{-1})\colon \langle A, \rho_A\rangle \leftrightharpoons \langle B, \rho_B\rangle$.

DEMOSTRACIÓN: Primero, se demostrará que ρ_B es un orden difuso en B. Dado $b \in B$, por la reflexividad de ρ_A, se tiene $\top = \rho_A(\varphi^{-1}(b), \varphi^{-1}(b)) = \rho_B(b, b)$. Ahora, dados $b_1, b_2, b_3 \in B$, por la transitividad de ρ_A, se obtiene $\rho_B(b_1, b_2) \otimes \rho_B(b_2, b_3) = \rho_A(\varphi^{-1}(b_1), \varphi^{-1}(b_2)) \otimes \rho_A(\varphi^{-1}(b_2), \varphi^{-1}(b_3)) \le \rho_A(\varphi^{-1}(b_1), \varphi^{-1}(b_3))$. Por tanto, $\rho_B(b_1, b_2) \otimes \rho_B(b_2, b_3) \le \rho_B(b_1, b_3)$. Finalmente, para todo $b_1, b_2 \in B$ tales que $\rho_B(b_1, b_2) = \rho_B(b_2, b_1) = \top$, por antisimetría de ρ_A, se tiene que $\varphi^{-1}(b_1) = \varphi^{-1}(b_2)$, lo cual implica, por ser φ biyectiva, que $b_1 = b_2$.

Ahora se comprobará que (φ, φ^{-1}) es una adjunción difusa. Obsérvese que φ^{-1} es isótona por la definición de ρ_B, y que φ es también isótona ya que, dados $a_1, a_2 \in A$, existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $\rho_A(a_1, a_2) = \rho_A(\varphi^{-1}(b_1), \varphi^{-1}(b_2)) = \rho_B(b_1, b_2) = \rho_B(\varphi(a_1), \varphi(a_2))$. Por último, dados $a \in A$ y $b \in B$, utilizando que φ^{-1} es isótona, se deduce $\rho_A(a, \varphi(b)) \le \rho_B(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(\varphi(b))) = \rho_B(\varphi^{-1}(a), b)$. De forma análoga, por ser φ isótona, se obtiene $\rho_B(\varphi^{-1}(a), b) \le \rho_A(a, \varphi(b))$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. $\square$

A continuación, se estudia el caso en el que la aplicación $f : \langle A, \rho_A\rangle \to B$ no es sobreyectiva. Para ello empezamos extendiendo el orden difuso definido en un subconjunto de un conjunto al conjunto completo, tal y como se detalla en el siguiente lema:

Lema 3.6 *Dado un subconjunto $X \subseteq U$, y un elemento fijo $m \in X$, cualquier orden difuso ρ_X en X puede ser extendido a un orden difuso ρ_m en U de la siguiente forma: para todo $x, y \in U$,*

$$\rho_m(x,y) = \begin{cases} \rho_X(x,y) & \textit{si } x, y \in X \\ \rho_X(x,m) & \textit{si } x \in X, y \notin X \\ \bot & \textit{si } x \notin X, x \neq y \\ \top & \textit{si } x \notin X, x = y \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN:

Reflexividad: Si $x \in X$, se tiene que $\rho_m(x,x) = \rho_X(x,x) = \top$; y si $x \notin X$, entonces $\rho_m(x,x) = \top$.

Transitividad:

- Si x_1, x_2 y $x_3 \in X$:

$$\rho_m(x_1,x_2) \otimes \rho_m(x_2,x_3) = \rho_X(x_1,x_2) \otimes \rho_X(x_2,x_3) \leq \rho_X(x_1,x_3) = \rho_m(x_1,x_3).$$

- Si $x_1, x_2 \in X$ y $x_3 \notin X$:

$$\rho_m(x_1,x_2) \otimes \rho_m(x_2,x_3) = \rho_X(x_1,x_2) \otimes \rho_X(x_2,m) \leq \rho_X(x_1,m) = \rho_m(x_1,x_3).$$

- Si $x_1, x_3 \in X$ y $x_2 \notin X$:

$$\rho_m(x_1,x_2) \otimes \rho_m(x_2,x_3) = \rho_X(x_1,m) \otimes \perp = \perp \leq \rho_m(x_1,x_3).$$

- Si $x_2, x_3 \in X$ y $x_1 \notin X$:

$$\rho_m(x_1,x_2) \otimes \rho_m(x_2,x_3) = \perp \otimes \rho_X(x_2,x_3) = \perp \leq \rho_m(x_1,x_3).$$

- Si $x_1 \in X$ y $x_2, x_3 \notin X$ con $x_2 \neq x_3$ ó con $x_2 = x_3$:

$$\rho_m(x_1,x_2) \otimes \rho_m(x_2,x_3) \leq \rho_X(x_1,m) = \rho_m(x_1,x_3).$$

- Si $x_2 \in X$ y $x_1, x_3 \notin X$:

$$\rho_m(x_1,x_2) \otimes \rho_m(x_2,x_3) = \perp \otimes \rho_X(x_2,m) = \perp \leq \rho_m(x_1,x_3).$$

- Si $x_3 \in X$ y $x_1, x_2 \notin X$ con $x_1 \neq x_2$ ó con $x_1 = x_2$:

$$\rho_m(x_1,x_2) \otimes \rho_m(x_2,x_3) = \perp \leq \rho_m(x_1,x_3).$$

- Si $x_1, x_2, x_3 \notin X$ con $x_1 \neq x_2 \neq x_3$:

$$\rho_m(x_1, x_2) \otimes \rho_m(x_2, x_3) = \bot \otimes \bot = \bot \leq \rho_m(x_1, x_3).$$

- Si $x_1, x_2, x_3 \notin X$ con $x_1 = x_2 \neq x_3$:

$$\rho_m(x_1, x_2) \otimes \rho_m(x_2, x_3) = \top \otimes \bot = \bot \leq \rho_m(x_1, x_3).$$

- Si $x_1, x_2, x_3 \notin X$ con $x_1 \neq x_2 = x_3$:

$$\rho_m(x_1, x_2) \otimes \rho_m(x_2, x_3) = \bot \otimes \top = \bot \leq \rho_m(x_1, x_3).$$

- Si $x_1, x_2, x_3 \notin X$ con $x_1 = x_2 = x_3$:

$$\rho_m(x_1, x_2) \otimes \rho_m(x_2, x_3) = \top \otimes \top = \top = \rho_m(x_1, x_3).$$

Antisimetría: Sean $x_1, x_2 \in U$ tales que $\rho_m(x_1, x_2) = \rho_m(x_2, x_1) = \top$. Si $x_1, x_2 \notin X$, por definición de ρ_m, se tiene que $x_1 = x_2$. Además, por la propia definición de ρ_m, la única alternativa es que $x_1, x_2 \in X$ y por la antisimetría de ρ_X se tiene que $x_1 = x_2$.

□

Una vez extendida una relación de orden ρ_X de un subconjunto X de U a todo U utilizando ρ_m, vamos a construir un adjunto por la derecha para la inclusión canónica $i \colon X \hookrightarrow U$.

Lema 3.7 *Consideramos $X \subseteq U$, un elemento $m \in X$ y un orden difuso ρ_X en X. Sea i la aplicación inclusión de X en U y se define la aplicación $j_m \colon \langle U, \rho_m \rangle \to \langle X, \rho_X \rangle$ como*

$$j_m(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \\ m & \text{si } x \notin X \end{cases}$$

Entonces, $(i, j_m) \colon \langle X, \rho_X \rangle \leftrightharpoons \langle U, \rho_m \rangle$.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, probaremos que la aplicación j_m es isótona. Por la definición de ρ_m, se tiene que:

- Si $x, y \in X$, $\rho_m(x,y) = \rho_X(x,y) = \rho_X(j_m(x), j_m(y))$.
- Si $x \in X$ e $y \notin X$, $\rho_m(x,y) = \rho_X(x,m) = \rho_X(j_m(x), j_m(y))$.
- Si $x \notin X$ e $y \neq v$, $\rho_m(x,y) = \bot \leq \rho_X(j_m(x), j_m(y))$.
- Si $x \notin X$ y $x = y$, $\rho_m(x,y) = \top = \rho_X(m,m) = \rho_X(j_m(x), j_m(y))$.

Ahora, se debe probar que $\rho_A(x, j_m(y)) = \rho_m(i(x), y)$ para todo $x \in X$ e $y \in U$. Si $y \in X$, utilizando que i es la aplicación inclusión, se tiene que $\rho_m(i(x), y) = \rho_m(x,y)$. Y, por las definiciones de j_m y ρ_m, se obtiene que $\rho_m(x,y) = \rho_X(x, j_m(y))$. Ahora, si $y \notin X$, usando de nuevo las definiciones de ρ_m y j_m, se obtiene que $\rho_m(i(x), y) = \rho_X(x,m) = \rho_X(x, j_m(y))$.

□

Teorema 3.4 *Dado un conjunto con un orden difuso $\langle A, \rho_A \rangle$, se considera una aplicación $f\colon A \to B$. Sea $A_{\equiv_f}$ el conjunto cociente sobre la relación núcleo. Entonces, existe un orden difuso ρ_B en B y una aplicación $g\colon B \longrightarrow A$ tales que $(f,g) : \langle A, \rho_A \rangle \leftrightharpoons \langle B, \rho_B \rangle$ si y sólo si*

1. *Existe* $\max([a]_{\equiv_f})$ *para todo $a \in A$.*
2. $\rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_A(\max([a_1]_{\equiv_f}), \max([a_2]_{\equiv_f}))$ *para todo $a_1, a_2 \in A$.*

DEMOSTRACIÓN: Por una parte, si se supone que existe $(f,g) : \langle A, \rho_A \rangle \leftrightharpoons \langle B, \rho_B \rangle$, entonces, por el Teorema 3.1, en el caso de órdenes difusos, se verifica $g(b) = \max f^{-1}(b^{\downarrow})$ y, por el Lema 3.2, $g(b) = \max f^{-1}(b)$ para todo $b \in B$. Dado $a \in A$, obsérvese que si $b = f(a)$ entonces $[a]_{\equiv_f} = \{x \in A \mid f(x) = f(a)\} = f^{-1}(b)$. Por tanto, $g(f(a)) = \max([a]_{\equiv_f})$. Además,

$$\rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_B(f(a_1), f(a_2)) \leq \rho_A(g(f(a_1)), g(f(a_2))) =$$

$$\rho_A(\max([a_1]_{\equiv_f}), \max([a_2]_{\equiv_f})).$$

Recíprocamente, dados $\langle A, \rho_A\rangle$ y $f\colon A \to B$, se considera la descomposición canónica de f a través del conjunto cociente $A_{\equiv_f}$

$$\begin{tikzcd}
\langle A, \rho_A\rangle \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & B \\
\langle A_{\equiv_f}, \rho_{A_{\equiv_f}}\rangle \arrow[r, "\varphi"] & f(A) \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

donde π es la proyección natural, $\pi(a) = [a]_{\equiv_f}$, φ es el isomorfismo natural entre cociente e imagen, $\varphi([a]_{\equiv_f}) = f(a)$, e $i(b) = b$ es la aplicación inclusión.

Ahora, usando que $[a]_{\equiv_f} = \pi(a)$ y las condiciones 1 y 2, se tiene que $(\pi, \max) : \langle A, \rho_A\rangle \leftrightharpoons \langle A_{\equiv_f}, \rho_{A_{\equiv_f}}\rangle$, por el Lema 3.4.

$$\begin{tikzcd}
\langle A, \rho_A\rangle \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & B \\
\langle A_{\equiv_f}, \rho_{A_{\equiv_f}}\rangle \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, dashed, bend left, "\max"] & f(A) \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

Además, como la aplicación $\varphi : A_{\equiv_f} \to f(A)$ es biyectiva, se puede aplicar el Lema 3.5 y se tiene un orden difuso $\rho_{f(A)}$ en $f(A)$ tal que $(\varphi, \varphi^{-1})\colon \langle A_{\equiv_f}, \rho_{A_{\equiv_f}}\rangle \leftrightharpoons \langle f(A), \rho_{f(A)}\rangle$.

$$\begin{tikzcd}
\langle A, \rho_A\rangle \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & B \\
\langle A_{\equiv_f}, \rho_{A_{\equiv_f}}\rangle \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[u, dashed, bend left, "\max"] & \langle f(A), \rho_{f(A)}\rangle \arrow[u, hook, "i"'] \arrow[l, dashed, shift left, "\varphi^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

El orden difuso $\rho_{f(A)}$ se puede extender a un orden difuso ρ_B en B, como se indica en el Lema 3.7, y existe una aplicación $j\colon B \to f(A)$ tal que

$(i, j)\colon \langle f(A), \rho_f(A)\rangle \leftrightharpoons \langle B, \rho_B\rangle$.

$$\begin{tikzcd}
\langle A, \rho_A\rangle \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "\pi"] & \langle B, \rho_B\rangle \arrow[d, shift left, dashed, "j"] \\
\langle A_{\equiv_f}, \rho_{A_{\equiv_f}}\rangle \arrow[u, shift left, dashed, "\max"] \arrow[r, shift left, "\varphi"] & \langle f(A), \rho_{f(A)}\rangle \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[l, shift left, dashed, "\varphi^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Finalmente, se prueba que la composición $g = \max \circ \varphi^{-1} \circ j$ es una aplicación $g\colon B \to A$ tal que (f, g) es una adjunción difusa. Para probar la condición de adjunción, se distinguen dos casos:

- Si $b = f(x) \in f(A)$, se tiene que $\varphi^{-1}(b) = \big\{[a]_{\equiv_f} \in A_{\equiv_f} : \varphi([a]_{\equiv_f}) = b\big\} = \big\{[a]_{\equiv_f} \in A_{\equiv_f} : f(a) = f(x)\big\} = [x]_{\equiv_f}$. Por consiguiente, por la definición de j, la aplicación $g = (\max \circ \varphi^{-1} \circ j)\colon B \to A$, se puede escribir como $g(b) = \max(\varphi^{-1}(b)) = \max([x]_{\equiv_f})$ donde $x \in f^{-1}(b)$. Por tanto, $\rho_A(a, g(b)) = \rho_A(a, \max([x]_{\equiv_f}))$. Utilizando la definición del orden $\rho_{A_{\equiv_f}}$, se tiene que $\rho_A(a, \max([x]_{\equiv_f})) = \rho_{A_{\equiv_f}}([a]_{\equiv_f}, [x]_{\equiv_f})$. Ahora, como $[a]_{\equiv_f} = \varphi^{-1}(f(a))$ y $[x]_{\equiv_f} = \varphi^{-1}(b)$, por la definición del orden ρ_B en B, se verifica $\rho_{A_{\equiv_f}}([a]_{\equiv_f}, [x]_{\equiv_f}) = \rho_{A_{\equiv_f}}(\varphi^{-1}(f(a)), \varphi^{-1}(b)) = \rho_{f(A)}(f(a), b) = \rho_B(f(a), b)$.

- Si $b \notin f(A)$, existe un elemento fijo $m = f(x_m) \in f(A)$ tal que $j = j_m$ en los términos del Lema 3.7. Entonces, $g(b) = (\max \circ \varphi^{-1})(j(b)) = (\max \circ \varphi^{-1})(m) = \max([x_m]_{\equiv_f})$. De forma análoga al caso anterior,

  $$\rho_A(a, g(b)) = \rho_{A_{\equiv_f}}([a]_{\equiv_f}, [x_m]_{\equiv_f}) = \rho_{A_{\equiv_f}}(\varphi^{-1}(f(a)), \varphi^{-1}(m)) = \rho_{f(A)}(f(a), m) = \rho_B(f(a), b),$$

  por la definición del orden ρ_B en B.

Gráficamente se obtiene el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\langle A, \rho_A \rangle \arrow[r, "f"'] \arrow[d, two heads, shift left, "\pi"] & \langle B, \rho_B \rangle \arrow[l, dashed, bend right, "g = \max \circ \varphi^{-1} \circ j"'] \arrow[d, dashed, shift left, "j"] \\
\langle A_{\equiv_f}, \rho_{A_{\equiv_f}} \rangle \arrow[u, dashed, shift left, "\max"] \arrow[r, shift left, "\varphi"] & \langle f(A), \rho_{f(A)} \rangle \arrow[l, dashed, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[u, hook, shift left, "i"]
\end{tikzcd}
$$

□

3.2.2. Entre conjuntos con preórdenes difusos

En esta sección se abordará la generalización del teorema 3.4 a conjuntos con preórdenes difusos. Se seguirá una estructura similar a la de la sección 2.3.2. Para ello es necesario empezar adaptando las diferentes definiciones utilizadas en el caso de preórdenes clásicos a preórdenes difusos.

La primera noción que se adaptará al nuevo marco de trabajo difuso, es la definición de relación p-núcleo, para ello, primero, se necesita utilizar la noción difusa de cierre transitivo introducida en la Definición 1.18.

Obsérvese que para cualquier relación difusa $R\colon U \times U \to L$, el conjunto de relaciones difusas transitivas que contienen a R es no vacío, pues la relación total (definida como $T(x,y) = \top$, para todo $x, y \in U$) es transitiva. Por otro lado, la intersección arbitraria de relaciones difusas transitivas es también una relación difusa transitiva. Recuérdese que se está suponiendo que el retículo residuado $\mathbb{L}$ es completo, lo cual asegura que el cierre transitivo de una relación difusa siempre existe. Por tanto, el cierre transitivo de una relación arbitraria coincide con la intersección (difusa) de todas las relaciones difusas transitivas que la contienen.

Por otro lado, el cierre transitivo R^{tr} de una relación difusa binaria R se puede caracterizar con la siguiente definición operacional.

Proposición 3.1 *[18] Dada una relación difusa $R\colon U \times U \to L$, para todo $n \in \mathbb{N}$, las iteraciones $R^n\colon U \times U \to L$ se definen de forma secuencial donde el caso base es $R^1 = R$ y*

$$R^n(a,b) = \bigvee_{x \in U} \Big(R^{n-1}(a,x) \otimes R(x,b) \Big)$$

Entonces, el cierre transitivo de R verifica

$$R^{tr}(a,b) = \bigvee_{n=1}^{\infty} R^n(a,b)$$

La relación núcleo simétrico $\approx_A$ permitirá trabajar con la ausencia de la propiedad antisimétrica, enlazando elementos "casi coincidentes"; formalmente, la relación $\approx_A$ se define en un conjunto con un preorden difuso $\langle A, \rho_A \rangle$ del siguiente modo:

$$(a_1 \approx_A a_2) = \rho_A(a_1,a_2) \otimes \rho_A(a_2,a_1) \qquad \text{para } a_1, a_2 \in A$$

La relación núcleo $\equiv_f$ asociada a una aplicación $f\colon A \to B$ se define como la función característica de la relación núcleo clásica:

$$(a_1 \equiv_f a_2) = \begin{cases} \bot & \text{si } f(a_1) \neq f(a_2) \\ \top & \text{si } f(a_1) = f(a_2) \end{cases}$$

Definición 3.4 Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso y una aplicación $f\colon A \to B$. La relación *p-núcleo difusa* $\cong_A$ es la relación de equivalencia obtenida como el cierre transitivo de la unión de las relaciones $\approx_A$ y $\equiv_f$.

Obsérvese que las clases de equivalencia asociadas a $\cong_A$ son conjuntos difusos $[a]_{\cong_A}\colon A \to L$ definidos como

$$[a]_{\cong_A}(x) = (x \cong_A a) \tag{3.8}$$

Ejemplo 3.9 Sea $\mathbb{L}$ el retículo residuado (producto) $([0,1], \leq, 1, 0, \cdot, \rightarrow)$. Se consideran los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, \top\}$, $B = \{p, q, r, s, t\}$ y la aplicación $f \colon A \rightarrow B$ definida por $f(a) = f(c) = p$, $f(b) = q$, $f(d) = f(\top) = r$ y $f(e) = s$.

Dado ρ_A el preorden difuso en A descrito en la siguiente tabla

ρ_A	a	b	c	d	e	$\top$
a	1	0,5	1	1	1	1
b	0,2	1	1	1	1	1
c	0,2	0,2	1	0,3	1	1
d	0,08	0,2	0,4	1	0,4	1
e	0,2	0,2	1	0,3	1	1
$\top$	0,08	0,2	0,4	0,2	0,4	1

la relación p-núcleo difusa es el cierre transitivo de la unión difusa de las dos relaciones siguientes

$\equiv_f$	a	b	c	d	e	$\top$
a	1	0	1	0	0	0
b	0	1	0	0	0	0
c	1	0	1	0	0	0
d	0	0	0	1	0	1
e	0	0	0	0	1	0
$\top$	0	0	0	1	0	1

$\approx_A$	a	b	c	d	e	$\top$
a	1	0,1	0,2	0,08	0,2	0,08
b	0,1	1	0,2	0,2	0,2	0,2
c	0,2	0,2	1	0,12	1	0,4
d	0,08	0,2	0,12	1	0,12	0,2
e	0,2	0,2	1	0,12	1	0,4
$\top$	0,08	0,2	0,4	0,2	0,4	1

Por lo tanto, se obtiene la siguiente tabla para $\cong_A$

$\cong_A$	a	b	c	d	e	$\top$
a	1	0,2	1	0,4	1	0,4
b	0,2	1	0,2	0,2	0,2	0,2
c	1	0,2	1	0,4	1	0,4
d	0,4	0,2	0,4	1	0,4	1
e	1	0,2	1	0,4	1	0,4
$\top$	0,4	0,2	0,4	1	0,4	1

Las clases de equivalencia difusas son

$$\begin{aligned} [a]_{\cong_A} = [c]_{\cong_A} = [e]_{\cong_A} &= \{a/1, b/0{,}2, c/1, d/0{,}4, e/1, \top/0{,}4\} \\ [b]_{\cong_A} &= \{a/0{,}2, b/1, c/0{,}2, d/0{,}2, e/0{,}2, \top/0{,}2\} \\ [d]_{\cong_A} = [\top]_{\cong_A} &= \{a/0{,}4, b/0{,}2, c/0{,}4, d/1, e/0{,}4, \top/1\} \end{aligned}$$

Lema 3.8 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso y una aplicación $f\colon A \to B$. Entonces, $(a_1 \cong_A a_2) = \top$ si y sólo si $[a_1]_{\cong_A} = [a_2]_{\cong_A}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $(a_1 \cong_A a_2) = \top$. Para todo $u \in A$, utilizando el elemento neutro del producto y las propiedades simétrica y transitiva de $\cong_A$, se tiene

$$(a_1 \cong_A u) = \top \otimes (a_1 \cong_A u) = (a_2 \cong_A a_1) \otimes (a_1 \cong_A u) \leq (a_2 \cong_A u)$$

Análogamente, $(a_2 \cong_A u) \leq (a_1 \cong_A u)$ y, por tanto, $[a_1]_{\cong_A}(u) = [a_2]_{\cong_A}(u)$ para todo $u \in A$.

El recíproco es trivial pues si $[a_1]_{\cong_A} = [a_2]_{\cong_A}$, para $a_2 \in A$, se verifica $\top = [a_2]_{\cong_A}(a_2) = [a_1]_{\cong_A}(a_2) = (a_1 \cong_A a_2)$. $\square$

La noción de elemento máximo o mínimo de un subconjunto difuso X de A, donde $\langle A, \rho_A \rangle$ es un conjunto con un preorden difuso, es la misma que la dada en la Definición 3.2. Al igual que ocurre para conjuntos clásicos preordenados, la ausencia de antisimetría hace que exista un conjunto, no necesariamente unitario, de elementos máximos y mínimos del subconjunto que se denotan por p-$\max X$ y p-$\min X$. Es importante destacar que ambos conjuntos p-$\max X$ y p-$\min X$ son conjuntos en el sentido clásico.

Si se considera un preorden difuso ρ_A en lugar de un orden clásico $\lesssim_A$, es posible extender la definición del preorden de Hoare (Definición 2.3) a relaciones difusas entre subconjuntos clásicos. Formalmente, esta extensión viene dada como sigue:

Definición 3.5 Sea $\langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso y C, D subconjuntos de A. Se define la siguiente relación difusa en 2^A:

$$(C \sqsubseteq_H D) = \bigwedge_{c \in C} \bigvee_{d \in D} \rho_A(c, d)$$

Proposición 3.2 *La relación $\sqsubseteq_H$ es un preorden difuso en 2^A.*

DEMOSTRACIÓN: La propiedad reflexiva se verifica por la reflexividad de ρ_A, ya que

$$(C \sqsubseteq_H C) = \bigwedge_{c_1 \in C} \bigvee_{c_2 \in C} \rho_A(c_1, c_2) = \bigwedge_{c_1 \in C} \rho_A(c_1, c_1) = \top$$

para todo $C \subseteq A$.

Para comprobar la propiedad transitiva, dados $C, D, E \subseteq A$, se debe probar que

$$(C \sqsubseteq_H D) \otimes (D \sqsubseteq_H E) \leq (C \sqsubseteq_H E)$$

Se usará la propiedad distributiva de las t-normas con respecto al supremo y al ínfimo (ver Sección 1.4), junto con la transitividad de ρ_A, como sigue

$$\bigvee_{d \in D} (\rho_A(c, d) \otimes \rho_A(d, e)) \leq \rho_A(c, e)$$

para todo $c \in C$, $d \in D$, $e \in E$:

$$\begin{aligned}
(C \sqsubseteq_H D) \otimes (D \sqsubseteq_H E) &= \bigwedge_{c \in C} \bigvee_{d \in D} \rho_A(c,d) \otimes \bigwedge_{d' \in D} \bigvee_{e \in E} \rho_A(d',e) \\
&\leq \bigwedge_{c \in C} \left(\bigvee_{d \in D} \rho_A(c,d) \otimes \bigwedge_{d' \in D} \bigvee_{e \in E} \rho_A(d',e) \right) \\
&= \bigwedge_{c \in C} \bigvee_{d \in D} \left(\rho_A(c,d) \otimes \bigwedge_{d' \in D} \bigvee_{e \in E} \rho_A(d',e) \right) \\
&\leq \bigwedge_{c \in C} \bigvee_{d \in D} \left(\rho_A(c,d) \otimes \bigvee_{e \in E} \rho_A(d,e) \right) \\
&= \bigwedge_{c \in C} \bigvee_{d \in D} \bigvee_{e \in E} (\rho_A(c,d) \otimes \rho_A(d,e)) \\
&= \bigwedge_{c \in C} \bigvee_{e \in E} \bigvee_{d \in D} (\rho_A(c,d) \otimes \rho_A(d,e)) \\
&\leq \bigwedge_{c \in C} \bigvee_{e \in E} \rho_A(c,e) = (C \sqsubseteq_H E)
\end{aligned}$$

□

Definición 3.6 Sea $\langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso y $X \subseteq A$. Se dice que X es *cíclico* si $\rho_A(x_1, x_2) = \top$ para todo $x_1, x_2 \in X$.

El siguiente lema establece que, para el caso específico en el que los conjuntos son cíclicos, la relación difusa $\sqsubseteq_H$ puede calcularse de forma más simple.

Lema 3.9 *Sea $\langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso y $X, Y \subseteq A$ subconjuntos cíclicos distintos del vacío. Entonces*

$$\Big(X \sqsubseteq_H Y\Big) = \rho_A(x,y) \quad \textit{para cualquier} \quad x \in X, y \in Y.$$

DEMOSTRACIÓN: Bastará comprobar que $\rho_A(x_1, y_1) = \rho_A(x_2, y_2)$ para todo $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$. Utilizando la propiedad transitiva y que $\rho_A(x_1, x_2) =$

$\top = \rho_A(y_2, y_1)$, se tiene que $\rho_A(x_1, y_1) \geq \rho_A(x_1, x_2) \otimes \rho_A(x_2, y_1) = \top \otimes \rho_A(x_2, y_1) \geq \rho_A(x_2, y_2) \otimes \rho_A(y_2, y_1) = \rho_A(x_2, y_2)$. Análogamente, $\rho_A(x_2, y_2) \geq \rho_A(x_1, y_1)$. □

A continuación, se van a establecer algunas condiciones necesarias para la existencia de adjunciones difusas entre conjuntos con preórdenes difusos. Se comienza introduciendo la notación conveniente:

Notación 3.2 Sea $\langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso y $X\colon A \to L$. El conjunto de las cotas superiores del conjunto difuso X se denota como

$$\mathrm{UB}(X) = \{b \in A \mid X(u) \leq \rho_A(u, b) \text{ para todo } u \in A\}$$

Teorema 3.5 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B \rangle$ dos conjuntos con preórdenes difusos y dos aplicaciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ tales que $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$. Entonces*

1. $g(f(A)) \subseteq \bigcup_{a \in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$
2. $\text{p-min}(\mathrm{UB}[a]_{\cong_A} \cap g(f(A))) \neq \varnothing$, *para todo $a \in A$.*
3. $\rho_A(a_1, a_2) \leq$
$$\Big(\text{p-min}(\mathrm{UB}[a_1]_{\cong_A} \cap g(f(A))) \quad \sqsubseteq_H \quad \text{p-min}(\mathrm{UB}[a_2]_{\cong_A} \cap g(f(A)))\Big)$$
para todo $a_1, a_2 \in A$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Dado $a \in A$, se probará que $g(f(a)) \in \text{p-max}[g(f(a))]_{\cong_A}$.

   Por la propiedad reflexiva de $\cong_A$, se tiene que $[g(f(a))]_{\cong_A}(g(f(a))) = (g(f(a)) \cong_A g(f(a))) = \top$. Por tanto, bastará probar la inclusión entre conjuntos difusos $[g(f(a))]_{\cong_A} \subseteq (g(f(a)))^{\downarrow}$, es decir, se verá que $(g(f(a)) \cong_A u) \leq \rho_A(u, g(f(a)))$ para todo $u \in A$.

Recordemos que la relación $\cong_A$ se ha definido como el cierre transitivo de la unión de $\approx_A$ y $\equiv_f$, la cual, de aquí en adelante en esta demostración, se denotará por R. Concretamente, usando la caracterización del cierre transitivo dada en la Proposición 3.1, se demostrará por inducción que para todo $n \geq 1$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$g(f(a))R^n u \leq \rho_A(u, g(f(a))) \quad \text{para todo } u \in A \tag{3.9}$$

- Para $n = 1$ y $u \in A$, se probará la desigualdad utilizando las definiciones de las relaciones involucradas y las propiedades de $\otimes$:

$$\begin{aligned} g(f(a))R\,u &= \Big(g(f(a)) \approx_A u\Big) \vee \Big(g(f(a)) \equiv_f u\Big) \\ &= \Big(\rho_A(g(f(a)), u) \otimes \rho_A(u, g(f(a)))\Big) \vee \Big(g(f(a)) \equiv_f u\Big) \\ &\leq \rho_A(u, g(f(a))) \vee \Big(g(f(a)) \equiv_f u\Big) \end{aligned}$$

  Por la definición de $\equiv_f$, se obtienen dos posibilidades para el valor de $\Big(g(f(a)) \equiv_f u\Big)$:

  Si $\Big(g(f(a)) \equiv_f u\Big) = \bot$, se tiene que $g(f(a))R\,u \leq \rho_A(u, g(f(a)))$.

  Si $\Big(g(f(a)) \equiv_f u\Big) = \top$, la desigualdad (3.9) degenera en una tautología ya que la cota superior es el elemento $\top$. En efecto, por definición de la relación núcleo $\equiv_f$, se tiene que $f(g(f(a))) = f(u)$, además, utilizando que $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$, se deduce

$$\begin{aligned} \rho_A(u, g(f(a))) &= \rho_B(f(u), f(a)) \\ &= \rho_B(f(g(f(a))), f(a)) = \rho_A(g(f(a)), g(f(a))) = \top. \end{aligned}$$

- Supongamos que se verifica la desigualdad (3.9) para $n - 1$. Utilizando la definición de la n-ésima iteración de una relación difusa, la hipótesis de inducción y las propiedades de $\otimes$, se tiene que

$$\begin{aligned}
g(f(a))R^n u &= \bigvee_{x\in A}\Big(g(f(a))R^{n-1}x \otimes xRu\Big)\\
&\leq \bigvee_{x\in A}\Big(\rho_A(x,g(f(a)))\otimes\Big((x\approx_A u)\vee(x\equiv_f u)\Big)\Big)\\
&= \bigvee_{x\in A}\Big(\rho_A(x,g(f(a)))\otimes\Big((\rho_A(x,u)\otimes\rho_A(u,x))\vee(x\equiv_f u)\Big)\Big)\\
&\leq \bigvee_{x\in A}\Big(\rho_A(x,g(f(a)))\otimes\Big(\rho_A(u,x)\vee(x\equiv_f u)\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Ahora, de forma análoga al caso $n=1$, por la definición de la relación núcleo, se distinguen dos casos:

Cuando $(x\equiv_f u)=\bot$, por conmutatividad de $\otimes$ y transitividad de ρ_A, se tiene

$$\Big(\rho_A(x,g(f(a)))\otimes\rho_A(u,x)\Big)\leq\rho_A(u,g(f(a))).$$

Cuando $(x\equiv_f u)=\top$, entonces $\rho_A(x,g(f(a)))\otimes\Big(\rho_A(u,x)\vee(x\equiv_f u)\Big)=\Big(\rho_A(x,gf(a))\Big)$; usando que $f(x)=f(u)$ y que $(f,g):\mathbb{A}\leftrightharpoons\mathbb{B}$, se tiene

$$\rho_A(x,g(f(a)))=\rho_B(f(x),f(a))=\rho_B(f(u),f(a))=\rho_A(u,g(f(a))).$$

Por tanto, $g(f(a))R^n u\leq\rho_A(u,g(f(a)))$ para todo $n\geq 1$ y, por la definición del cierre transitivo, $[g(f(a))]_{\cong_A}(u)\leq\rho_A(u,g(f(a)))$ para todo $u\in A$.

2. Obsérvese que los conjuntos $UB[a]_{\cong_A}$ y $g(f(A))$ son conjuntos clásicos. Se probará que $g(f(a))$ pertenece a p-$\min(\mathrm{UB}[a]_{\cong_A}\cap g(f(A)))$, para todo $a\in A$.

   Primero se comprobará que $g(f(a))\in\mathrm{UB}[a]_{\cong_A}\cap g(f(A))$. Obviamente $g(f(a))\in g(f(A))$, por tanto basta probar que $g(f(a))\in\mathrm{UB}[a]_{\cong_A}$, es decir, $(a \cong_A u) \leq \rho_A(u, g(f(a)))$ para todo $u \in A$. Para ello, usando la definición de $\cong_A$ y por las propiedades del supremo, es suficiente probar que

$$aR^n u \leq \rho_A(u, g(f(a))) \quad \text{para todo } u \in A \tag{3.10}$$

De ahora en adelante, la demostración sigue la misma estructura que en el apartado anterior.

- Para $n = 1$, y $u \in A$, por las propiedades de $\otimes$, se tiene que

$$\begin{aligned} aRu &= (a \approx_A u) \vee (a \equiv_f u) \\ &= \Big(\rho_A(a, u) \otimes \rho_A(u, a)\Big) \vee (a \equiv_f u) \\ &\leq \rho_A(u, a) \vee (a \equiv_f u). \end{aligned}$$

  Teniendo en cuenta los dos posibles valores de $a \equiv_f u$:
  Si $(a \equiv_f u) = \bot$, por monotonía de f y por ser $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$, se tiene que

$$\rho_A(u, a) \leq \rho_B(f(u), f(a)) = \rho_A(u, g(f(a))).$$

  Si $(a \equiv_f u) = \top$, otra vez la desigualdad (3.10) genera una tautología. Concretamente, utilizando que $f(a) = f(u)$ y por ser $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$, se tiene que

$$\rho_A(u, gf(a)) = \rho_B(f(u), f(a)) = \rho_B(f(a), f(a)) = \top$$

  Por tanto, en efecto, en ambos casos

$$aRu \leq \rho_A(u, a) \leq \rho_A(u, g(f(a))).$$

- Se supone que se verifica la desigualdad (3.10) para $n - 1$, y se demostrará para n.

$$
\begin{aligned}
aR^n u &= \bigvee_{x\in A} \Big(aR^{n-1}x \otimes xRu \Big) \\
&\le \bigvee_{x\in A} \rho_A(x, g(f(a))) \otimes \Big((x \approx_A u) \vee (x \equiv_f u) \Big) \\
&= \bigvee_{x\in A} \rho_A(x, g(f(a))) \otimes \Big((\rho_A(x,u) \otimes \rho_A(u,x)) \vee (x \equiv_f u) \Big) \\
&\le \bigvee_{x\in A} \rho_A(x, g(f(a))) \otimes \Big(\rho_A(u,x) \vee (x \equiv_f u) \Big).
\end{aligned}
$$

Cuando $(x \equiv_f u) = \bot$, entonces, por conmutatividad de $\otimes$ y transitividad de ρ_A, se tiene que $\rho_A(x, g(f(a))) \otimes \rho_A(u,x) \le \rho_A(u, g(f(a)))$.

Cuando $(x \equiv_f u) = \top$, como $f(x) = f(u)$, entonces

$$\rho_A(x, g(f(a))) = \rho_B(f(x), f(a)) = \rho_B(f(u), f(a)) = \rho_A(u, g(f(a)))$$

Por tanto, $aR^n u \le \rho_A(u, g(f(a)))$ para todo $n \ge 1$ y para todo $u \in A$.

En resumen, se ha probado que $g(f(a))$ es una cota superior del conjunto difuso $[a]_{\cong_A}$.

Por último, se debe probar que $\rho_A(gf(a), x) = \top$ para todo $x \in \mathrm{UB}[a]_{\cong_A} \cap g(f(A))$. Dado $x \in \mathrm{UB}[a]_{\cong_A} \cap g(f(A))$ existe $a_1 \in A$ tal que $x = g(f(a_1))$ y $(a \cong_A u) \le \rho_A(u, x)$ para todo $u \in A$. En particular, se considera $u = a$ y utilizando la monotonía de g y que (f, g) es una adjunción difusa, se verifica:

$$
\begin{aligned}
\top = (a \cong_A a) \le \rho_A(a, x) &= \rho_A(a, g(f(a_1))) \\
&= \rho_B(f(a), f(a_1)) \\
&\le \rho_A(g(f(a)), g(f(a_1))) = \rho_A(g(f(a)), x).
\end{aligned}
$$

3. Dados $a_1, a_2 \in A$, como f y g son aplicaciones isótonas, entonces se tiene que

$$\rho_A(a_1, a_2) \leq \rho_A(g(f(a_1)), g(f(a_2)))$$

De la desigualdad anterior, por el Lema 3.9, se obtiene la condición que se buscaba

$$\rho_A(a_1, a_2) \leq \Big(\text{p-min}(\text{UB}[a_1]_{\cong_A} \cap g(f(A))) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}[a_2]_{\cong_A} \cap g(f(A)))\Big).$$

□

Corolario 3.1 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso, B un conjunto no necesariamente dotado de estructura y una aplicación $f\colon A \to B$. Si f es el adjunto por la izquierda de una adjunción difusa, entonces existe un subconjunto $S \subseteq A$ tal que*

(1) $S \subseteq \bigcup_{a \in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$

(2) $\text{p-min}(\text{UB}[a]_{\cong_A} \cap S) \neq \varnothing$, *para todo* $a \in A$.

(3) $\rho_A(a_1, a_2) \leq \Big(\text{p-min}(\text{UB}[a_1]_{\cong_A} \cap S) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}[a_2]_{\cong_A} \cap S)\Big)$ *para todo* $a_1, a_2 \in A$.

La segunda parte de esta sección está dedicada a demostrar que estas condiciones necesarias para la existencia de un adjunto por la derecha son también condiciones suficientes.

Notación 3.3 De ahora en adelante, se usará la siguiente notación,

$$\varphi_S(a) \stackrel{def}{=} \text{p-min}(\text{UB}[a]_{\cong_A} \cap S). \tag{3.11}$$

Observación 3.4 *Obsérvese que, por el Lema 3.9,* $\Big(\varphi_S(a_1) \sqsubseteq_H \varphi_S(a_2)\Big) = \rho_A(x, y)$ *para cualquier* $x \in \varphi_S(a_1)$ *e* $y \in \varphi_S(a_2)$*, y esto justifica que, para simplificar la notación, se escriba que* $\rho_A(\varphi_S(a_1), \varphi_S(a_2))$ *en lugar de* $\Big(\varphi_S(a_1) \sqsubseteq_H \varphi_S(a_2)\Big)$*.*

Definición 3.7 Sea un conjunto con un preorden difuso $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A\rangle$ junto con una aplicación $f\colon A \to B$ y un subconjunto $S \subseteq A$ que cumpla las siguientes condiciones:

$$S \subseteq \bigcup_{a\in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A} \tag{3.12}$$

$$\varphi_S(a) \neq \varnothing, \text{para todo } a \in A \tag{3.13}$$

$$\rho_A(a_1, a_2) \leq \Big(\varphi_S(a_1) \sqsubseteq_H \varphi_S(a_2)\Big) \quad \text{para todo } a_1, a_2 \in A \tag{3.14}$$

Para todo $a_0 \in A$, se define la relación difusa $\rho_B^{a_0}\colon B \times B \to L$ del siguiente modo

$$\rho_B^{a_0}(b_1, b_2) = \rho_A(\varphi_S(a_1), \varphi_S(a_2))$$

donde $a_i \in f^{-1}(b_i)$ si $f^{-1}(b_i) \neq \varnothing$ y $a_i = a_0$ en otros casos, para cada $i \in \{1, 2\}$.

Obsérvese que la definición anterior podría depender en gran medida de las posibles elecciones de a_i; sin embargo, el siguiente lema, basado en la Observación 3.4, mostrará que el valor de $\rho_B^{a_0}$ es totalmente independiente de estas elecciones.

Lema 3.10 *La relación difusa* $\rho_B^{a_0}$ *está bien definida y es un preorden difuso en* B*.*

DEMOSTRACIÓN: La definición no depende de la elección de las preimágenes a_i ya que, si se eligieran otras preimágenes $\bar{a}_i$, por la definición de $\equiv_f$, se tiene que $(a_i \equiv_f \bar{a}_i) = \top$ y, por consiguiente, por el Lema 3.8, los conjuntos difusos correspondiente a las clases $[a_i]_{\cong_A}$ y $[\bar{a}_i]_{\cong_A}$ coincidirían y en tal caso $\varphi_S(a_i) = \varphi_S(\bar{a}_i)$. Además, por la Observación 3.4, se tiene que

$$\rho_A(\varphi_S(a_1), \varphi_S(a_2)) = \rho_A(x, y) \quad \text{para cualquier } x \in \varphi_S(a_1) \text{ e } y \in \varphi_S(a_2).$$

Ahora se demostrará que $\rho_B^{a_0}$ es un preorden difuso en B.

Reflexividad Si $b \in f(A)$ y $f(a) = b$ se tiene $\rho_B^{a_0}(b, b) = \rho_A(\varphi_S(a), \varphi_S(a)) = \top$ y si $b \notin f(A)$ se tiene $\rho_B^{a_0}(b, b) = \rho_A(\varphi_S(a_0), \varphi_S(a_0)) = \top$.

Transitividad La transitividad se deduce directamente de la definición de $\rho_B^{a_0}$ y la transitividad de ρ_A.

$\square$

Ejemplo 3.10 Para el conjunto con preorden difuso $\langle A, \rho_A \rangle$ y la aplicación $f\colon A \to B$ definidos en el Ejemplo 3.9, observamos que el subconjunto $S = \{c, \top\} \subseteq A$ verifica las tres condiciones (3.12), (3.13) y (3.14), ya que

$$\text{p-max}\,[a]_{\cong_A} \cup \text{p-max}\,[b]_{\cong_A} \cup \text{p-max}\,[d]_{\cong_A} = \{c, e\} \cup \{b\} \cup \{\top\}\,,$$

y $\varphi_S(a) = \varphi_S(b) = \varphi_S(c) = \varphi_S(e) = \{c\}$ y $\varphi_S(d) = \varphi_S(\top) = \{\top\}$. Por tanto, el preorden difuso ρ_B^c en B se define como sigue

ρ_B^c	p	q	r	s	t
p	1	1	1	1	1
q	1	1	1	1	1
r	0,4	0,4	1	0,4	0,4
s	1	1	1	1	1
t	1	1	1	1	1

Ahora, los resultados se centrarán en proporcionar una definición adecuada de la aplicación $g\colon B \to A$ de forma que (f, g) sea una adjunción difusa.

Lema 3.11 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso, una aplicación $f\colon A \to B$ y S un subconjunto de A que cumple las condiciones* (3.12), (3.13) *y* (3.14)*. Entonces existe una aplicación $g\colon B \to A$ tal que $(f, g)\colon \langle A, \rho_A \rangle \leftrightharpoons \langle B, \rho_B^{a_0} \rangle$ donde $\rho_B^{a_0}$ es el preorden difuso introducido en la Definición 3.7, para algún $a_0 \in A$.*

DEMOSTRACIÓN: La aplicación g está definida por casos:

(C1) Si $b \in f(A)$, entonces $g(b)$ se define como un elemento en $\varphi_S(x_b)$ donde $x_b \in f^{-1}(b)$.

(C2) Si $b \notin f(A)$, entonces $g(b)$ se define como un elemento en $\varphi_S(a_0)$.

Para todo $b \in f(A)$, el conjunto $f^{-1}(b)$ es distinto del vacío, por tanto x_b puede ser elegido para todo $b \in f(A)$. Además, por la hipótesis (3.13), los conjuntos $\varphi_S(x_b)$ y $\varphi_S(a_0)$ son no vacíos. La definición de g tampoco depende de la elección de la preimagen de b ya que $\varphi_S(x) = \varphi_S(y)$ para $x, y \in f^{-1}(b)$.

Ahora, se debe probar que g es el adjunto por la derecha de f, es decir, que para todo $a \in A$ y $b \in B$ se verifica

$$\rho_B^{a_0}\Big(f(a), b\Big) = \rho_A\Big(a, g(b)\Big)$$

Por definición de $\rho_B^{a_0}$ (ver Definición 3.7), se tiene que

$$\rho_B^{a_0}(f(a), b) = \rho_A(\varphi_S(a), \varphi_S(w))$$

donde $w \in f^{-1}(b)$ si $b \in f(A)$ (por tanto, se puede elegir w siendo el anterior x_b) o $w = a_0$ en caso contrario. Por consiguiente, se puede elegir $g(b) \in \varphi_S(w)$. Así,

$$\rho_B^{a_0}(f(a), b) = \rho_A(x, g(b)) \text{ para cualquier } x \in \varphi_S(a) \tag{3.15}$$

La demostración se finalizará si mostramos que, fijado $x \in \varphi_S(a)$, se obtiene $\rho_A(x, g(b)) = \rho_A(a, g(b))$.

Por la definición de φ_S, ver (3.11), se observa que $x \in \varphi_S(a)$ implica que $\rho_A(a, x) = \top$ y, por consiguiente,

$$\rho_A\Big(x, g(b)\Big) = \rho_A(a, x) \otimes \rho_A\Big(x, g(b)\Big) \leq \rho_A\Big(a, g(b)\Big) \tag{3.16}$$

Para la otra desigualdad, usando la hipótesis (3.14), se tiene

$$\rho_A\Big(a, g(b)\Big) \leq \rho_A\Big(\varphi_S(a), \varphi_S\Big(g(b)\Big)\Big) = \rho_A(x, y) \tag{3.17}$$

para cualquier $x \in \varphi_S(a)$ e $y \in \varphi_S(g(b))$. Por la definición de la aplicación g, se tiene que $g(b) \in S$, lo cual implica que $g(b) \in \text{p-max}[g(b)]_{\cong_A}$, en particular $g(b) \in \mathrm{UB}[g(b)]_{\cong_A}$, por tanto $g(b) \in \mathrm{UB}[g(b)]_{\cong_A} \cap S$. Por otro lado, como $y \in \varphi_S\Big(g(b)\Big)$ se tiene que $\rho_A(y, \alpha) = \top$ para todo $\alpha \in \mathrm{UB}[g(b)]_{\cong_A} \cap S$. Por tanto, se obtiene que $\rho_A\Big(y, g(b)\Big) = \top$. Ahora, utilizando la expresión (3.17) junto con la transitividad de ρ_A, se deduce

$$\rho_A\Big(a, g(b)\Big) \leq \rho_A(x, y) = \rho_A(x, y) \otimes \rho_A\Big(y, g(b)\Big) \leq \rho_A\Big(x, g(b)\Big) \tag{3.18}$$

para todo $x \in \varphi_S(a)$.

Uniendo (3.16) y (3.18) se obtiene la igualdad $\rho_A(x, g(b)) = \rho_A(a, g(b))$.

$\square$

Para concluir esta sección se proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un adjunto por la derecha para una aplicación de un conjunto con un preorden difuso a un conjunto no necesariamente dotado de estructura. Con objeto de clarificar el enunciado y la demostración del resultado, no utilizaremos la versión previa del lema, en que se utilizaba $\varphi_S(a)$ en lugar de $\text{p-min}(\mathrm{UB}[a]_{\cong_A} \cap S)$ para todo $a \in A$.

Teorema 3.6 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso junto con una aplicación $f\colon A \to B$. Existe un preorden difuso ρ_B en B y una aplicación*

$g\colon B \to A$ tal que $(f,g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$ si y sólo si existe $S \subseteq A$ tal que, para todo $a, a_1, a_2, \in A$, se verifican las siguientes condiciones:

1. $S \subseteq \bigcup_{a \in A} \text{p-max}[a]_{\cong_A}$
2. $\text{p-min}(\text{UB}[a]_{\cong_A} \cap S) \neq \varnothing$
3. $\rho_A(a_1 a_2) \leq \Big(\text{p-min}(\text{UB}[a_1]_{\cong_A} \cap S) \sqsubseteq_H \text{p-min}(\text{UB}[a_2]_{\cong_A} \cap S)\Big)$

Ejemplo 3.11 Se considera de nuevo la aplicación $f\colon A \to B$ dada en el Ejemplo 3.9 y la relación difusa de preorden ρ_B^c dada en el Ejemplo 3.10, el adjunto por la derecha $g\colon B \to A$ se define como $g(p) = g(q) = g(s) = g(t) = c$ y $g(r) = \top$.

3.3. Sistemas de cierre y adjunciones difusas

La primera parte de esta sección está dedicada a establecer la definición y algunas caracterizaciones de los conceptos de sistema de cierre y de sistema de cierre compatible con una relación de equivalencia difusa, todo ello en conjuntos con preórdenes difusos. También se establecerá la relación entre operador de cierre y sistema de cierre. En la segunda parte de la sección se estudiarán, mediante sistemas de cierre compatibles con relaciones de equivalencia difusas, condiciones necesarias y suficientes para la construcción de un adjunto por la derecha y un preorden difuso sobre un conjunto B a partir de una aplicación $f\colon \langle A, \rho_A \rangle \to B$.

3.3.1. Sistemas y operadores de cierre en preórdenes difusos

La noción de sistema de cierre en conjuntos con preórdenes difusos con la que se va a trabajar es una extensión natural de los sistemas de cierre clásicos sobre conjuntos clásicos parcialmente ordenados. De hecho, la definición estará formulada en los mismos términos del caso clásico, no obstante se proporcionarán caracterizaciones alternativas más sencillas de manejar.

Definición 3.8 Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso y S un subconjunto de A. Se dice que S es un *sistema de cierre* si el conjunto p-$\min(a^{\uparrow} \cap S)$ es no vacío, para todo $a \in A$.

En la bibliografía, se pueden encontrar otras definiciones de sistema de cierre en ambiente difuso. Destaca la dada por Bělohlávek en [4], en la que se introdujo la noción de operador de L_K-cierre sobre un conjunto L-ordenado, donde K es un filtro del retículo residuado L (ver sección 1.3). En la definición de Bělohlávek, se debe observar que los sistemas difusos de cierre son conjuntos difusos, mientras que en la Definición 3.8, los sistemas de cierre son subconjuntos clásicos.

Existe otra definición de sistema de cierre difuso similar a la Definición 3.8 donde el marco de trabajo son los llamados *conjuntos L-ordenados*. Los conjuntos L-ordenados son ternas $\langle A, \approx_A, \rho_A \rangle$ donde $\approx_A$ es una relación de equivalencia en A y ρ_A es un L-orden (ver definición en [34]). En el siguiente resultado se va establecer una caracterización alternativa de la noción de sistema de cierre dada en la Definición 3.8 basada en las ideas de [34].

Proposición 3.3 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso. Un subconjunto no vacío $S \subseteq A$ es un sistema de cierre en A si y sólo si para cualquier $a \in A$, existe $m_a \in S$ tal que*

1. $\rho_A(a, m_a) = \top$ *y*
2. $\rho_A(s_1, m_a) \otimes \rho_A(a, s_2) \leq \rho_A(s_1, s_2)$ *para todo* $s_1, s_2 \in S$.

DEMOSTRACIÓN: Sea S un subconjunto de A y se supone que para todo elemento $a \in A$, el conjunto p-$\min(a^{\uparrow} \cap S)$ es no vacío. Veamos que cualquier elemento $m_a \in$ p-$\min(a^\uparrow \cap S)$ satisface las Condiciones 1 y 2. Obsérvese que $a^\uparrow \cap S$ es un conjunto difuso definido por

$$(a^\uparrow \cap S)(x) = (a^\uparrow)(x) \wedge S(x) = \begin{cases} \bot & \text{si } x \notin S \\ \rho_A(a,x) & \text{si } x \in S \end{cases} \tag{3.19}$$

Para cualquier elemento m_a del conjunto p-$\min(a^\uparrow \cap S)$, se tiene que $m_a \in S$, $\rho_A(a, m_a) = \top$ y $\rho_A(a,s) \leq \rho_A(m_a, s)$ para todo $s \in S$. Entonces, utilizando la isotonía de $\otimes$ y la propiedad transitiva de ρ_A, para todo $s_1, s_2 \in S$, se verifica

$$\rho_A(s_1, m_a) \otimes \rho_A(a, s_2) \leq \rho_A(s_1, m_a) \otimes \rho_A(m_a, s_2) \leq \rho_A(s_1, s_2).$$

Recíprocamente, dado $a \in A$ y un elemento $m_a \in S$ que satisface las condiciones 1 y 2, se probará que $m_a \in$ p-$\min(a^\uparrow \cap S)$. La condición 1 es igual a la primera condición de la definición de p-mínimo, es decir, $\rho_A(a, m_a) = \top$. Por otro lado, por reflexividad de ρ_A y la condición 2, se tiene que $\rho_A(a,s) = \rho_A(m_a, m_a) \otimes \rho_A(a,s) \leq \rho_A(m_a, s)$ para todo $s \in S$.

□

El resultado anterior se puede mejorar proporcionando una nueva caracterización que se formulará utilizando una única condición.

Teorema 3.7 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso. Un subconjunto $S \subseteq A$ es un sistema de cierre si y sólo si para todo $a \in A$ existe $m_a \in S$ tal que $\rho_A(a,u) = \rho_A(m_a, u)$ para todo $u \in S$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea S un sistema de cierre. Por la Proposición 3.3, para todo $a \in A$ existe $m_a \in S$ tal que

1. $\rho_A(a, m_a) = \top$ y

2. $\rho_A(s_1, m_a) \otimes \rho_A(a, s_2) \leq \rho_A(s_1, s_2)$ para todo $s_1, s_2 \in S$.

Utilizando la Condición 1 y la propiedad transitiva de ρ_A, se deduce que $\rho_A(m_a, u) = \rho_A(a, m_a) \otimes \rho_A(m_a, u) \leq \rho_A(a, u)$. Por otro lado, usando la Condición 2, se toma m_a como s_1 y u como s_2 y, por reflexividad y transitividad de ρ_A, se obtiene $\rho_A(a, u) \leq \rho_A(m_a, u)$. Por consiguiente, $\rho_A(a, u) = \rho_A(m_a, u)$.

Recíprocamente, se probará que $m_a \in$ p-$\min(a^{\uparrow} \cap S)$. Como $\rho_A(a, u) = \rho_A(m_a, u)$ para todo $u \in S$, en particular $\rho_A(a, m_a) = \rho_A(m_a, m_a) = \top$. Ahora, para comprobar que $(a^{\uparrow} \cap S)(x) \leq {m_a}^{\uparrow}(x)$ para todo $x \in A$ se deben distinguir dos casos:

- Para $x \notin S$, por (3.19), se tiene que $(a^{\uparrow} \cap S)(x) = \perp \leq {m_a}^{\uparrow}(x)$.
- Para $x \in S$, por (3.19) y por la hipótesis, se tiene que $(a^{\uparrow} \cap S)(x) = \rho_A(a, x) = \rho_A(m_a, x) = {m_a}^{\uparrow}(x)$.

□

Como consecuencia directa del teorema anterior se obtiene una nueva versión de la definición del conjunto p-$\min(a^{\uparrow} \cap S)$ para S un sistema de cierre de un conjunto con un preorden difuso $\langle A, \rho_A \rangle$.

Corolario 3.2 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso. Si $S \subseteq A$ es un sistema de cierre, para todo $a \in A$ se verifica que el conjunto* p-$\min(a^{\uparrow} \cap S) = \{s \in S \mid \rho_A(a, u) = \rho_A(s, u)$ *para todo* $u \in S\}$.

Como se ha comentado en capítulos anteriores, los sistemas de cierre y los operadores de cierre, en el caso clásico, son diferentes enfoques de un mismo fenómeno. Ahora, nos centraremos en el estudio de esta relación entre ambas nociones en conjuntos con preórdenes difusos.

Definición 3.9 Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso. Una aplicación $c\colon A \to A$ se dice que es un *operador de cierre* si es isótona, inflacionaria y satisface que $\rho_A(c(c(a)), c(a)) = \top$ para todo $a \in A$.

En el siguiente lema se pone de manifiesto que, sobre conjuntos con preórdenes difusos, los sistemas de cierre permiten definir operadores de cierre y viceversa.

Lema 3.12 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso.*

i) Si $S \subseteq A$ es un sistema de cierre, cualquier aplicación $c\colon A \to A$ tal que $c(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ es un operador de cierre, al que se denotará por c_S y se llamará operador de cierre asociado a S.

ii) Si $c\colon A \to A$ es un operador de cierre, entonces el conjunto $S = \{a \in A : \rho_A(c(a), a) = \top\}$ es un sistema de cierre, que se denotará por S_c y se llamará sistema de cierre asociado a c.

DEMOSTRACIÓN:

i) Se consideran un sistema de cierre $S \subseteq A$ y una aplicación $c\colon A \to A$ tal que $c(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ para todo $a \in A$. Por la definición de $\text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ se sabe que $c(a) \in S$, por tanto, utilizando el Corolario 3.2 y la reflexividad de ρ_A, se obtiene que $\rho_A(a, c(a)) = \rho_A(c(a), c(a)) = \top$, lo cual implica que c es inflacionaria. Análogamente, $\rho_A(c(c(a)), c(a)) = \rho_A(c(a), c(a)) = \top$. Por último, utilizando que c es inflacionaria, transitividad y que $c(a_1) \in \text{p-min}({a_1}^{\uparrow} \cap S)$, se tiene que c es isótona ya que

$$\rho_A(a_1, a_2) = \rho_A(a_1, a_2) \otimes \rho_A(a_2, c(a_2)) \leq \rho_A(a_1, c(a_2)) = \rho_A(c(a_1), c(a_2)).$$

ii) El subconjunto $S = \{a \in A : \rho_A(c(a), a) = \top\}$ es un sistema de cierre ya que $c(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$, para todo $a \in A$. En efecto, primero obsérvese que por hipótesis $\rho_A(c(c(a)), c(a)) = \top$, entonces $c(a) \in S$. En virtud del Corolario 3.2 bastará probar que $\rho_A(a, u) = \rho_A(c(a), u)$ para todo $u \in S$. Como c es isótona y $u \in S$, se deduce que

$$\rho_A(a, u) \le \rho_A(c(a), c(u)) = \rho_A(c(a), c(u)) \otimes \rho_A(c(u), u) \le \rho_A(c(a), u).$$

Ahora, por ser c inflacionaria, $\rho_A(c(a), u) = \rho_A(a, c(a)) \otimes \rho_A(c(a), u) \le \rho_A(a, u)$.

□

En la Sección 2.4, ya se comentó el hecho de que en conjuntos parcialmente ordenados, existe una relación biunívoca entre operadores de cierre y sistemas de cierre (para cada operador de cierre se tiene que $c = c_{S_c}$ y para cualquier sistema de cierre se tiene que $S = S_{c_S}$). Esta relación entre ambas nociones se debilita cuando se trabaja con conjuntos preordenados en el sentido clásico y, también, cuando se trabaja con conjuntos con preórdenes difusos.

Proposición 3.4 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso.*

1. *Si $c\colon A \to A$ es un operador de cierre, entonces*

$$\rho_A(c(a), c_{S_c}(a)) = \rho_A(c_{S_c}(a), c(a)) = \top$$

para todo $a \in A$.

2. *Si S es un sistema de cierre entonces $S \subseteq S_{c_S}$ y para todo $s_1 \in S_{c_S}$ existe $s_2 \in S$ tal que $\rho_A(s_1, s_2) = \rho_A(s_2, s_1) = \top$.*

DEMOSTRACIÓN:

Para demostrar el primer apartado, se empieza probando que, para todo $a \in A$, $\rho_A(c(a), c_{S_c}(a)) = \top$: dado $a \in A$, por ser S_c sistema de cierre,

$c_{S_c}(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S_c)$ lo cual implica que $\rho_A(a, c_{S_c}(a)) = \top$ y $c_{S_c}(a) \in S_c$, es decir, $\rho_A(c(c_{S_c}(a)), c_{S_c}(a)) = \top$. Por tanto, utilizando la isotonía de c y la propiedad transitiva de ρ_A, se obtiene

$$\top = \rho_A(a, c_{S_c}(a)) \leq \rho_A(c(a), c(c_{S_c}(a))) = \rho_A(c(a), c(c_{S_c}(a))) \otimes \top =$$

$$\rho_A(c(a), c(c_{S_c}(a))) \otimes \rho_A(c(c_{S_c}(a)), c_{S_c}(a)) \leq \rho_A(c(a), c_{S_c}(a)).$$

Por último, se verá que $\rho_A(c_{S_c}(a), c(a)) = \top$ para todo $a \in A$. Dado $a \in A$, utilizando de nuevo que $c_{S_c}(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S_c)$, se tiene que $\rho_A(a, u) \leq \rho_A(c_{S_c}(a), u)$ para todo $u \in S_c$. Por otro lado, se tiene que $c(a) \in S_c$ ya que $\rho_A(c(c(a)), c(a)) = \top$. Por consiguiente, utilizando que c es inflacionaria, se obtiene que $\top = \rho_A(a, c(a)) \leq \rho_A(c_{S_c}(a), c(a))$, lo cual implica que $\rho_A(c_{S_c}(a), c(a)) = \top$.

Para probar el segundo apartado, se considera un sistema de cierre S, un operador de cierre $c_S \colon A \to A$ asociado a S (es decir, que cumpla $c_S(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ para todo $a \in A$) y el sistema de cierre $S_{c_S} = \{a \in A : \rho_A(c_S(a), a) = \top\}$. Para cualquier $a \in S$, se tiene de forma directa que $a \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$. Además, como $c_S(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$, se satisface que $\rho_A(c_S(a), a) = \top$. Por tanto, $a \in S_{c_S}$. Por consiguiente, se ha probado que $S \subseteq S_{c_S}$. Ahora, si $s_1 \in S_{c_S}$ para $s_2 = c_S(s_1)$ se cumple $\rho_A(c_S(s_1), s_1) = \top$. Por otro lado, como $c_S(s_1) \in \text{p-min}(s_1^{\uparrow} \cap S)$, se tiene que $c_S(s_1) \in S$ y $\rho_A(s_1, c_S(s_1)) = \top$.

$\square$

El resto de la sección se dedica a definir la noción de un sistema de cierre compatible con una relación difusa de equivalencia arbitraria, en particular se estudiará el caso de compatibilidad con la llamada relación de núcleo.

Definición 3.10 Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso y $\sim$ una relación difusa de equivalencia en A.

i) Un operador de cierre $c \colon A \to A$ se dice que es *compatible* con la relación $\sim$ si $(a_1 \sim a_2) \leq \rho_A(c(a_1), c(a_2))$, para todo $a_1, a_2 \in A$.

ii) Un sistema de cierre $S \subseteq A$ se dice que es *compatible* con $\sim$ si cualquier operador de cierre asociado a S es compatible con $\sim$.

Lema 3.13 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso y una relación difusa de equivalencia $\sim$ sobre A. Entonces, un sistema de cierre S es compatible con $\sim$ si y sólo si*

$$\rho_A(a, s) \leq \bigwedge_{u \in A} ((a \sim u) \to \rho_A(u, s)) \tag{3.20}$$

para todo $s \in S$ y $a \in A$.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, se empieza observando que $\rho_A(a, s) \leq \bigwedge_{u \in A} ((a \sim u) \to \rho_A(u, s))$ para todo $s \in S$ y $a \in A$ es equivalente a que $\rho_A(a, s) \otimes (a \sim u) \leq \rho_A(u, s)$ para todo $s \in S$ y $a, u \in A$, de acuerdo con la propiedad de adjunción de los retículos residuados (ver Definición 1.9).

Sea S un sistema de cierre compatible con $\sim$ y $c\colon A \to A$ un operador de cierre asociado a S, es decir, $c(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ para todo $a \in A$ y $(a_1 \sim a_2) \leq \rho_A(c(a_1), c(a_2))$, para todo $a_1, a_2 \in A$. Se considera $s \in S$ y $a, u \in A$, entonces, por el Corolario 3.2, se tiene que $\rho_A(a, s) \otimes (a \sim u) = \rho_A(c(a), s) \otimes (a \sim u)$. Utilizando la compatibilidad de S y simetría de $\sim$, se deduce que $(a \sim u) = (u \sim a) \leq \rho_A(c(u), c(a))$. Por consiguiente, usando la monotonía de $\otimes$, $\rho_A(c(a), s) \otimes (a \sim u) \leq \rho_A(c(a), s) \otimes \rho_A(c(u), c(a)) \leq \rho_A(c(u), s)$, y, por ser c es inflacionaria, $\rho_A(c(u), s) = \rho_A(u, c(u)) \otimes \rho_A(c(u), s) \leq \rho_A(u, s)$. Por tanto, $\rho_A(a, s) \otimes (a \sim u) \leq \rho_A(u, s)$ para todo $s \in S$ y $a, u \in A$.

Recíprocamente, dado S un sistema de cierre tal que $\rho_A(a, s) \otimes (a \sim u) \leq \rho_A(u, s)$ para todo $s \in S$ y $a, u \in A$, se probará que para un operador $c\colon A \to A$ tal que $c(a) \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S)$ para todo $a \in A$, se tiene que $(a_1 \sim a_2) \leq \rho_A(c(a_1), c(a_2))$, para todo $a_1, a_2 \in A$. Por la simetría de $\sim$ y puesto que $c(a_2) \in \text{p-min}(a_2^{\uparrow} \cap S)$, se cumple $(a_1 \sim a_2) = (a_2 \sim a_1) =$

$\rho_A(a_2, c(a_2)) \otimes (a_2 \sim a_1)$. Entonces, por la hipótesis, y por el Corolario 3.2 (como $c(a_1) \in$ p-min$(a_1^{\uparrow} \cap S)$ y $c(a_2) \in S$) se tiene que $\rho_A(a_2, c(a_2)) \otimes (a_2 \sim a_1) \leq \rho_A(a_1, c(a_2)) = \rho_A(c(a_1), c(a_2))$.

□

A continuación, se utilizará este lema en el caso particular en el que la relación de equivalencia difusa $\sim$ sea la relación núcleo $\equiv_f$ asociada a una aplicación $f : \langle A, \rho_A \rangle \to B$, esto es:

$$(a_1 \equiv_f a_2) = \begin{cases} \bot & \text{si } f(a_1) \neq f(a_2) \\ \top & \text{si } f(a_1) = f(a_2) \end{cases}$$

Corolario 3.3 *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso, una aplicación $f \colon A \to B$ y $\equiv_f$ la relación núcleo asociada a f. Un sistema de cierre $S \subseteq A$ es compatible con la relación núcleo si y sólo si $\rho_A(a, s) = \rho_A(u, s)$ para todo $s \in S$ y $a, u \in A$ tal que $f(a) = f(u)$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado S un sistema de cierre compatible con $\equiv_f$, por el Lema 3.13, se tiene que $\rho_A(a, s) \leq \bigwedge_{u \in A} ((a \equiv_f u) \to \rho_A(u, s))$ para todo $s \in S$ y $a \in A$. Por consiguiente, utilizando la definición de $\equiv_f$ y las propiedades de los retículos residuados (ver Teorema 1.1), se tiene que cuando $f(a) = f(u)$ entonces $\top \to \rho_A(u, s) = \rho_A(u, s)$ y si $f(a) \neq f(u)$ entonces $\bot \to \rho_A(u, s) = \top$. Por lo tanto, $\rho_A(a, s) \leq \bigwedge\limits_{f(u) = f(a)} \rho_A(u, s) \leq \rho_A(u, s)$ para todo $s \in S$ y $a, u \in A$ tal que $f(a) = f(u)$. □

3.3.2. Construcción de adjunciones difusas

En esta sección se presenta una caracterización con sistemas de cierre que permite garantizar dada una aplicación $f \colon \langle A, \rho_A \rangle \to B$, la existencia de un preorden difuso en el conjunto B y adjuntos por la derecha para f

(se verá que no hay unicidad). La condición necesaria y suficiente que se aportará difiere considerablemente de las condiciones obtenidas en secciones anteriores.

Proposición 3.5 *Sean* $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ *y* $\mathbb{B} = \langle B, \rho_B \rangle$ *dos conjuntos con preórdenes difusos y dos aplicaciones* $f\colon A \to B$, $g\colon B \to A$ *tales que* $(f, g) : \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$. *Entonces el conjunto* $g(f(A))$ *es un sistema de cierre en* $\mathbb{A}$ *compatible con la relación núcleo* $\equiv_f$.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, se probará que $S = g(f(A))$ es un sistema de cierre. Por el Teorema 3.7, bastará probar que $\rho_A(a, u) = \rho_A(g(f(a)), u)$ para todo $u \in S$. Por un lado, por ser $g \circ f$ inflacionaria y por la transitividad de ρ_A, se tiene que, para todo $u \in A$,

$$\rho_A(g(f(a)), u) = \rho_A(a, g(f(a))) \otimes \rho_A(g(f(a)), u) \leq \rho_A(a, u).$$

Por otro lado, dado $u = g(f(x)) \in S$, utilizando la hipótesis y que la aplicación g es isótona, se tiene que

$$\begin{aligned}\rho_A(a, u) = \rho_A(a, g(f(x))) = \rho_B(f(a), f(x)) \leq \\ \leq \rho_A(g(f(a)), g(f(x))) = \rho_A(g(f(a)), u).\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\rho_A(a, u) = \rho_A(g(f(a)), u)$ para todo $u \in S$.

Ahora, para demostrar la compatibilidad de S con $\equiv_f$, se empieza observando que para $a, u \in A$ tales que $f(a) = f(u)$ y un elemento arbitrario de S, digamos $s = g(f(x))$, se tiene la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}\rho_A(a, s) = \rho_A(a, g(f(x)) = \rho_B(f(a), f(x)) = \\ = \rho_B(f(u), f(x)) = \rho_A(u, g(f(x))) = \rho_A(u, s)\end{aligned}$$

Lo cual implica, por el Corolario 3.3, que el sistema de cierre S es compatible con la relación núcleo. □

Para abordar el problema de construir el preorden difuso ρ_B sobre el codominio B, se usará el preorden de Hoare (Definición 3.5) junto con el Lema 3.9, en el caso particular en el que los subconjuntos son los conjuntos de p-mínimos de un subconjunto difuso (lo cuales resultan ser cíclicos, debido a la definición de p-mínimo).

Lema 3.14 *Sea $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ un conjunto con un preorden difuso junto con una aplicación $f \colon A \to B$ y $S \subseteq A$ un sistema de cierre compatible con la relación núcleo $\equiv_f$. Para cada $a_0 \in A$, se tiene un preorden difuso $\rho_B^{a_0} \colon B \times B \to L$ definido como sigue*

$$\rho_B^{a_0}(b_1, b_2) = \Big((\text{p-min}(a_1^{\uparrow} \cap S)) \sqsubseteq_H (\text{p-min}(a_2^{\uparrow} \cap S)) \Big)$$

donde $a_i \in f^{-1}(b_i)$ si $f^{-1}(b_i) \neq \varnothing$ y $a_i = a_0$ en otro caso, para cada $i \in \{1, 2\}$.

DEMOSTRACIÓN: La definición no depende de la elección de las preimágenes, ya que dados $x, y \in f^{-1}(b)$ se tiene que $\text{p-min}(x^{\uparrow} \cap S) = \text{p-min}(y^{\uparrow} \cap S)$. En efecto, dado $s \in \text{p-min}(x^{\uparrow} \cap S)$ entonces $\rho_A(x, u) = \rho_A(s, u)$, para todo $u \in S$. Por tanto, como $f(x) = f(y)$ y S es compatible con la relación núcleo entonces, por el Corolario 3.3, $\rho_A(x, u) = \rho_A(y, u)$ para todo $u \in S$. Por consiguiente, se obtiene que $\rho_A(y, u) = \rho_A(s, u)$ y, por tanto, $s \in \text{p-min}(y^{\uparrow} \cap S)$. Los roles de x e y en el argumento previo se pueden intercambiar, obteniendo así la igualdad entre ambos conjuntos.

Por el Lema 3.9, se tiene que

$$\rho_B^{a_0}(b_1, b_2) = \rho_A(x, y)$$

para cualquier $x \in \text{p-min}({a_1}^{\uparrow} \cap S)$ e $y \in \text{p-min}({a_2}^{\uparrow} \cap S)$ y se ha probado que el valor es independiente de la elección de x e y.

Por la reflexividad de ρ_A, es directo probar que $\rho_B^{a_0}$ es reflexivo ya que $\rho_B^{a_0}(b, b) = \rho_A(x, x) = \top$ para $x \in \text{p-min}(a^{\uparrow} \cap S))$ donde $a \in f^{-1}(b)$ si $f^{-1}(b) \neq \varnothing$ y $a = a_0$ en otro caso.

Análogamente, obsérvese que

$$\rho_B^{a_0}(b_1,b_2)\otimes\rho_B^{a_0}(b_2,b_3)=\rho_A(x,y)\otimes\rho_A(y,z)\leq\rho_A(x,z)=\rho_B^{a_0}(b_1,b_3)$$

para $x\in \text{p-min}(a_1^{\uparrow}\cap S)), y\in \text{p-min}(a_2^{\uparrow}\cap S))$ y $z\in \text{p-min}(a_3^{\uparrow}\cap S))$ donde $a_i\in f^{-1}(b_i)$ si $f^{-1}(b_i)\neq\varnothing$ y $a_i=a_0$ en otro caso, para cada $i\in\{1,2,3\}$. Por consiguiente, $\rho_B^{a_0}$ es transitivo. □

Ahora se definirán las aplicaciones $g\colon B\to A$ tales que (f,g) formen una adjunción difusa entre $\mathbb{A}=\langle A,\rho_A\rangle$ y $\mathbb{B}=\langle B,\rho_B\rangle$.

Proposición 3.6 *Sean $\mathbb{A}=\langle A,\rho_A\rangle$ un conjunto con un preorden difuso, una aplicación $f\colon A\to B$ y $S\subseteq A$ un sistema de cierre compatible con la relación núcleo. Entonces, existe un preorden difuso ρ_B en B y una aplicación $g\colon B\to A$ tales que (f,g) es una adjunción difusa.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, la existencia de un preorden difuso en B viene dado por el Lema 3.14 y se puede observar que esta relación difusa no es única, debido a que depende del elemento elegido $a_0\in A$. Fijado el elemento $a_0\in A$, se considera el preorden difuso $\rho_B^{a_0}$ definido en B. Pueden formularse varias definiciones de la aplicación $g\colon B\to A$ cumpliendo las siguientes condiciones:

(C1) Si $b\in f(A)$, entonces $g(b)\in \text{p-min}(x_b^{\uparrow}\cap S)$ para algún $x_b\in f^{-1}(b)$.

(C2) Si $b\notin f(A)$, entonces $g(b)\in \text{p-min}(a_0^{\uparrow}\cap S)$.

La existencia de g es clara por el axioma de elección, ya que para todo $b\in f(A)$, los conjuntos $f^{-1}(b)$ son no vacíos (así x_b puede elegirse para todo $b\in f(A)$) y, además, $\text{p-min}(x_b^{\uparrow}\cap S)$ y $\text{p-min}(a_0^{\uparrow}\cap S)$ son, también, no vacíos, por ser S un sistema de cierre.

Ahora, dado cualquier aplicación g que cumpla las condiciones $(C1)$ y $(C2)$, se demostrará que g es un adjunto por la derecha de f, es decir, $\rho_B^{a_0}\Big(f(a),b\Big)=\rho_A\Big(a,g(b)\Big)$ para todo $a\in A$ y $b\in B$.

Por definición de $\rho_B^{a_0}$ (ver Lema 3.14), se tiene que

$$\rho_B^{a_0}(f(a), b) = \Big((\text{p-min}(a^\uparrow \cap S)) \sqsubseteq_H (\text{p-min}(w^\uparrow \cap S))\Big)$$

donde w satisface que $w \in f^{-1}(b)$ si $b \in f(A)$ (por tanto, se puede elegir w siendo x_b, ver condición (C1)) o, en otro caso, $w = a_0$. Por el Lema 3.9 y por la definición de g, se tiene que

$$\rho_B^{a_0}(f(a), b) = \rho_A(x, g(b)) \quad \text{para cualquier } x \in \text{p-min}(a^\uparrow \cap S)$$

La demostración terminará si se muestra que $\rho_A(x, g(b)) = \rho_A(a, g(b))$ para cualquier $x \in \text{p-min}(a^\uparrow \cap S)$. Por el Corolario 3.2 para $x \in \text{p-min}(a^\uparrow \cap S)$ se tiene que $\rho_A(a, u) = \rho_A(x, u)$ para todo $u \in S$. En ambos casos, tanto para la condición (C1) como para la (C2), se tiene que $g(b) \in S$ por tanto, $\rho_A(x, g(b)) = \rho_A(a, g(b))$. □

La sección finaliza con un resultado que resume los lemas anteriores, y nos proporciona la condición necesaria y suficiente para la construcción de un preorden difuso y un adjunto por la derecha entre conjuntos con preórdenes difusos, todo ello en términos de sistemas de cierre.

Teorema 3.8 *Sea un conjunto difuso preordenado $\mathbb{A} = \langle A, \rho_A \rangle$ y una aplicación $f\colon A \to B$. Existe un preorden difuso ρ_B en B y una aplicación $g\colon B \to A$ tales que (f, g) forma una adjunción difusa si y sólo si existe $S \subseteq A$ un sistema de cierre compatible con la relación núcleo $\equiv_f$.*

DEMOSTRACIÓN: Si (f, g) forma una adjunción difusa, por la Proposición 3.5, se tiene que existe $S \subseteq A$ un sistema de cierre compatible con la relación núcleo $\equiv_f$. Recíprocamente, si $S \subseteq A$ es un sistema de cierre compatible con la relación núcleo $\equiv_f$, por la Proposición 3.6, se obtiene que existe un preorden difuso ρ_B en B y una aplicación $g\colon B \to A$ tales que (f, g) es una adjunción difusa. □

Bibliografía

[1] H. G. Bartel. Formal concept analysis and chemometrics: Chemical composition of ancient egyptian bronze artifacts. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 42:25–38, 2000.

[2] I. Beg. On fuzzy order relations. *J. Nonlinear Science and Applications*, 5:357–378, 2012.

[3] R. Bělohlávek. Fuzzy Galois connections. *Mathematical Logic Quarterly*, 45:497–504, 1999.

[4] R. Bělohlávek. Fuzzy closure operators. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 262:473–489, 2001.

[5] R. Bělohlávek. Lattices of fixed points of fuzzy Galois connections. *Mathematical Logic Quartely*, 47(1):111–116, 2001.

[6] R. Bělohlávek. *Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles*. Kluwer, 2002.

[7] R. Bělohlávek, B. De Baets, J. Outrata, and V. Vychodil. Lindig's algorithm for concept lattices over graded attributes. *Lecture Notes in Computer Science*, 4617:156–167, 2007.

[8] R. Bělohlávek and J. Konecny. Concept lattices of isotone vs. antitone galois connections in graded setting: Mutual reducibility revisited. *Information Sciences*, 199:133–137, 2012.

[9] R. Bělohlávek and P. Osička. Triadic fuzzy Galois connections as ordinary connections. In *IEEE Intl Conf on Fuzzy Systems*. IEEE Press, 2012.

[10] G. Birkhoff. *Lattice theory*, volume 25 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 1967.

[11] U. Bodenhofer. A similarity-based generalization of fuzzy orderings preserving the classical axioms. *Intl J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 8(5):593–610, 2000.

[12] U. Bodenhofer. Representations and constructions of similarity-based fuzzy orderings. *Fuzzy Sets and Systems*, 137(1):113–136, 2003.

[13] U. Bodenhofer, B. De Baets, and J. Fodor. A compendium of fuzzy weak orders: Representations and constructions. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(8):811–829, 2007.

[14] F. Börner. Basics of Galois connections. *Lect. Notes in Computer Science*, 5250:38–67, 2008.

[15] G. Castellini, J. Koslowski, and G. Strecker. Categorical closure operators via Galois connections. In *Recent developments of general topology and its applications*, volume 67 of *Mathematical research*, pages 72–79. Akademie Verlag, 1992.

[16] D. Cohen, P. J. P. Creed, and S. Živný. An algebraic theory of complexity for valued constraints: Establishing a Galois connection. *Lect. Notes in Computer Science*, 6907:231–242, 2011.

[17] B. Davey and H. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, second edition, 2002.

[18] B. De Baets and H. De Meyer. On the existence and construction of t-transitive closures. *Information Sciences*, 152:167–179, 2003.

[19] K. Denecke, M. Erné, and S. Wismath. *Galois connections and applications*, volume 565 of *Mathematics and its Applications*. Springer, 2004.

[20] J. Denniston, A. Melton, and S. E. Rodabaugh. Formal contexts, formal concept analysis, and Galois connections. In *Electronic Proc. in Theoretical Computer Science*, volume 129, pages 105–120, 2013.

[21] J. Díaz and J. Medina. Multi-adjoint relation equations: Definition, properties and solutions using concept lattices. *Information Sciences*, 253:100–109, 2013.

[22] D. Dikranjan and W. Tholen. *Categorical structure of closure operators*. Kluwer, 1995.

[23] R. P. Dilworth and M. Ward. Residuated lattices. *Transactions of the American Mathematical Society*, 45:335–354, 1939.

[24] M. Erné, J. Koslowski, A. Melton, and G. Strecker. A primer on Galois connections. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 704:103–125, 1993.

[25] F. Fages and S. Soliman. Abstract interpretation and types for systems biology. *Theoretical Computer Science*, 403(1):52–70, 2008.

[26] S. Ferré and R. King. BLID: An application of logical information systems to bioinformatics. *Lecture Notes in Computer Science*, 2961:47–54, 2004.

[27] J. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer, 1994.

[28] A. Frascella. Fuzzy Galois connections under weak conditions. *Fuzzy Sets and Systems*, 172(1):33–50, 2011.

[29] J. García, I. Mardones-Pérez, M. de Prada-Vicente, and D. Zhang. Fuzzy Galois connections categorically. *Mathematical Logic Quarterly*, 56(2):131–147, 2010.

[30] G. Georgescu and A. Popescu. Non-commutative fuzzy Galois connections. *Soft Computing*, 7(7):458–467, 2003.

[31] G. Gierz et al. *Continuous lattices and domains*. Cambridge University Press, 2003.

[32] J. Goguen. L-fuzzy sets. *J. Mathematical Analysis and Applications*, 18:145–174, 1967.

[33] G. Grätzer. *General Lattice Theory*. Birkhäuser Verlag, 1998.

[34] L. Guo, G.-Q. Zhang, and Q. Li. Fuzzy closure systems on L-ordered sets. *Mathematical Logic Quarterly*, 57(3):281–291, 2011.

[35] J. Järvinen, M. Kondo, and J. Kortelainen. Logics from Galois connections. *Int. J. Approx. Reasoning*, 49(3):595–606, 2008.

[36] D. M. Kan. Adjoint functors. *Transactions of the American Mathematical Society*, 87(2):294–329, 1958.

[37] A. Kerber. Posets and lattices, contexts and concepts. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 54:551–560, 2005.

[38] S. Kerkhoff. A general Galois theory for operations and relations in arbitrary categories. *Algebra Universalis*, 68(3):325–352, 2012.

[39] J. Konecny. Isotone fuzzy Galois connections with hedges. *Information Sciences*, 181(10):1804–1817, 2011.

[40] S. Kuznetsov. Galois connections in data analysis: Contributions from the soviet era and modern russian research. *Lect. Notes in Computer Science*, 3626:196–225, 2005.

[41] C. Marsala, B. Bouchon-Meunier, and A. Ramer. Hierarchical model for discrimination measures. In *Proc. of the IFSA World Congress*, pages 339–343, 1999.

[42] C. Marsala and D. Petturiti. Monotone classification with decision trees. In *Proc of the Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology*, pages 810–817, 2013.

[43] A. Melton, D. Schmidt, and G. E. Strecker. Galois connections and computer science applications. *Lect. Notes in Computer Science*, 240:299–312, 1986.

[44] M. Moortgat. Multimodal linguistic inference. *Journal of Logic, Language and Information*, 5(3-4):349–385, 1996.

[45] S.-C. Mu and J. N. Oliveira. Programming from Galois connections. *The Journal of Logic and Algebraic Programming*, 81(6):680–704, 2012.

[46] Ø. Ore. Galois connections. *Transactions of the American Mathematical Society*, 55:493–513, 1944.

[47] F. Rioult, J.-F. Boulicaut, B. Crémilleux, and J. Besson. Using transposition for pattern discovery from microarray data. In *Proceedings of the 8th ACM SIGMOD Workshop on Research Issues in Data Mining and Knowledge Discovery*, DMKD '03, pages 73–79, New York, NY, USA, 2003. ACM.

[48] J. Schmidt. Beiträge zur filtertheorie II. *Mathematische Nachrichten*, 10:197–232, 1953.

[49] B. Šešelja and A. Tepavčević. Fuzzy ordering relation and fuzzy poset. *Lecture Notes in Computer Science*, 4815:209–216, 2007.

[50] Y. Shi, M. Nachtegael, D. Ruan, and E. Kerre. Fuzzy adjunctions and fuzzy morphological operations based on implications. *Intl J of Intelligent Systems*, 24(12):1280–1296, 2009.

[51] F. J. Valverde-Albacete and C. Peláez-Moreno. Extending conceptualisation modes for generalised formal concept analysis. *Information Sciences*, 181(10):1888–1909, 2011.

[52] W. Yao and L.-X. Lu. Fuzzy Galois connections on fuzzy posets. *Mathematical Logic Quarterly*, 55:105–112, 2009.

[53] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

[54] Q.-Y. Zhang and L. Fan. Continuity in quantitative domains. *Fuzzy Sets and Systems*, 154(1):118–131, 2005.