UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Didáctica de la Matemática,
de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales

TESIS DOCTORAL

COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN. UN ESTUDIO EN EL GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Antonio Luis Ortiz Villarejo

Málaga, 2014

Publicaciones y
Divulgación Científica

UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

AUTOR: Antonio Luis Ortiz Villarejo

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

**Departamento de Didáctica de la Matemática,
de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales**

TESIS DOCTORAL

COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN. UN ESTUDIO EN EL GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Tesis Doctoral presentada por

ANTONIO LUIS ORTIZ VILLAREJO

Bajo la dirección de

DR. D. JOSÉ LUIS GONZÁLEZ MARÍ

Málaga, 2014

UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA
DE LAS MATEMÁTICAS DE LAS CIENCIAS SOCIALES
Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

José Luis González Mari, profesor del Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales, como director del trabajo de investigación titulado "Comprensión de los sistemas de numeración. Un estudio en el Grado de Maestro en Educación Primaria" presentado por D. Antonio Luis Ortiz Villarejo para la obtención del título de Doctor, me complace informar que reúne las condiciones científicas requeridas en la normativa vigente, por lo cual, autorizo su presentación, lectura y defensa publica.

Málaga a 21 de octubre de 2014.

A mis padres Paco y Ana a quienes todo le debo.
A Loli, mi compañera, apoyo indispensable e incondicional.
A mis hijos Alejandro, Fernando y Paloma.
Y a Pablo, mi nieto.

Agradecimientos

Quisiera desde estas líneas dejar constancia de mi agradecimiento a todas las personas que han contribuido, de alguna manera, a que pudiera realizar el trabajo que aquí se expone.

A mi Director, el Doctor D. José Luis González Marí, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continua que ha realizado, sin cuya ayuda esta tesis doctoral no habría sido posible.

Al Doctor D. Jesús Gallardo Romero, al que le debo la impagable deuda de ofrecerme su ayuda y todos sus conocimientos sobre el marco teórico en el que se sitúa mi tesis doctoral.

A mis compañeros y compañeras de Departamento por sus continuas palabras de ánimo y especialmente a mis compañeras y compañeros del área de conocimiento de Didáctica de las Matemáticas por su ayuda, consejos y sugerencias.

A mis compañeras y compañeros de los equipos decanales a los que he pertenecido en estos últimos años, por su motivación y apoyo.

A mi compañera y amiga Lola Alcántara, que a pesar de sus diferencias con "los números", ha leído, revisado y corregido con mucha paciencia y dedicación esta memoria de tesis.

A mis compañeros y compañeras de Facultad, que me han manifestado en todo momento su cariño y alegría por cerrar esta puerta abierta desde hace tantos años.

A todos los estudiantes que han participado en esta experiencias y especialmente a mis alumnos y alumnas de los grupos C y F, que además me han padecido como profesor.

Y finalmente a mi familia: a mis Padres y hermanos, y especialmente a Loli, mi mujer, a mis hijos Alejandro, Fernando y Paloma, que han sufrido en primera persona mis euforias y depresiones, y han soportado con estoicismo mis ausencias, y a Pablo con quien podré jugar sin mirar el reloj.

A todos ellos muchas gracias.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1
EL PROBLEMA DE INVESTIGACION

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DE NUMERACIÓN: ANTECEDENTES, FUNDAMENTOS TEÓRICOS, CURRÍCULO Y FORMACIÓN DE MAESTROS

CAPÍTULO 3

COMPRENSIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO, SU INTERPRETACIÓN Y VALORACIÓN: ANTECEDENTES Y ANÁLISIS DIDÁCTICO

CAPÍTULO 4

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO PARA EL ESTUDIO DE LA COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN EN ESTUDIANTES DEL GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

CAPÍTULO 5

COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN EN ESTUDIANTES DEL GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA: APROXIMACIÓN COGNITIVA GLOBAL

CAPÍTULO 6

PRIMERA APROXIMACIÓN SEMIÓTICA Y HERMENÉUTICA: ANÁLISIS DE RESPUESTAS, ESTRATEGIAS Y ERRORES EN TAREAS ESCRITAS

CAPÍTULO 7

ANÁLISIS SEMIÓTICO Y HERMENÉUTICO DE LA COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN EN ENTREVISTAS INDIVIDUALES

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

ANEXOS

Anexo I

Anexo II

Anexo III

Anexo IV

Anexo V (En formato DVD-ROM)

Índice de Tablas

ANEXO IV

Índice de Figuras

ANEXO V

Introducción

Lo importante, especialmente mientras son jóvenes, es comprender antes que cultivar la memoria, porque la comprensión libera la mente y despierta la facultad crítica del análisis.

Jiddu Krishnamurti

En esta memoria de tesis se exponen los aspectos fundamentales de una investigación realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga, en el marco de la línea de estudio y del Proyecto[1]: "Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático" desarrollados en el seno del grupo de investigación "Pensamiento Numérico y Algebraico". La finalidad general de la línea de estudio es indagar en la naturaleza y características de la comprensión del conocimiento matemático, identificar los factores que intervienen y establecer criterios, técnicas e instrumentos que permitan observar, diagnosticar, interpretar y valorar, en escolares de distintos niveles educativos, la situación de la comprensión y el dominio de los conocimientos matemáticos en torno a un campo conceptual o a un contenido matemático puntual.

El ***estudio*** que se presenta se ocupa de la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria, para lo

[1] Proyecto PB97-1066, presentado a la Dirección General de Enseñanza Superior en la convocatoria de Diciembre de 1.997.

que se ha tomado como referencia la población de estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga durante los cursos 2010-2011 y 2011-2012. Para su desarrollo se ha empleado una metodología mixta que da respuesta a las dos componentes principales del estudio:

a) La componente teórica, dirigida a fundamentar y validar el procedimiento y los resultados obtenidos, en la que cobran especial importancia el análisis didáctico de los antecedentes, el análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático, el análisis del conjunto de situaciones, tareas y problemas y la fundamentación y construcción, a través de un modelo local específico, de los instrumentos adecuados para la recogida de datos.
b) La componente empírica, orientada a obtener información para interpretar, diagnosticar y valorar la situación de la comprensión en los sujetos de las muestras utilizadas, mediante la aplicación de cuestionarios y entrevistas, el análisis e interpretación de las respuestas, las estrategias y los errores y la determinación de perfiles de comprensión.

Entre los ***antecedentes*** directos, que se analizan junto a otros en el capítulo 3, se encuentran la memoria de tercer ciclo sobre el mismo tema "*Comprensión del Sistema de Numeración: un análisis de la coordinación entre los sistemas de representación escrito y hablado*" (Ortiz, 1998)[2], los numerosos estudios de la línea de investigación de Gallardo y González (Gallardo y González 2006a, 2006b, 2006c, 2007a, 2007b, 2011; Gallardo, González, y Quispe, 2007, 2008a, 2008b; Gallardo, González y Quintanilla, 2013, 2014) y las publicaciones más recientes en las que se ha difundido una parte de los resultados de la investigación que se presenta (Ortiz, González y Gallardo, 2011; González, Ortiz, Gallardo, 2012, 2013, 2014).

Sobre la ***racionalidad y justificación*** del estudio, son diversos los motivos de la elección de las variables y condiciones concretas mencionadas anteriormente. Entre ellos, podemos destacar: la continuidad de estudios puntuales previos sobre el mismo contenido matemático, la nueva coyuntura en la que se encuentran los planes de formación de Maestros, las críticas que los planes de estudios anteriores suscitaron desde diferentes sectores ("Conclusiones de la reunión de Alcalá de Henares" (2005), Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1999), informe TEDS (2012)), los estudios realizados sobre la existencia de déficit de conocimiento matemático de los estudiantes de Magisterio, el orden lógico de los contenidos matemáticos elementales, tanto a nivel general como de los nuevos programas de la asignatura Didáctica de la Aritmética de 2º curso de la titulación y, por último, las necesidades de desarrollo del marco teórico general de la propia línea de investigación, entre las que resulta especialmente importante la operatividad del modelo utilizado.

En cuanto al ***sentido e interés***, creemos que el estudio es relevante, está justificado y es del máximo interés por la novedad del tema analizado y por la proyección que los conocimientos pueden tener sobre la formación del docente y sobre su tarea profesional posterior. No en vano se pretende poner de manifiesto en una etapa

[2] Memoria no publicada correspondiente al Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga en el bienio 1.996-1.998. En poder del autor y del Departamento.

posterior de la investigación que es posible mejorar los bajos niveles en comprensión del contenido matemático de los futuros maestros del nuevo Grado mediante procesos de reeducación "ad hoc" caracterizados por nuevas formas de ver y tratar los contenidos matemáticos basadas en los resultados de estudios como el que se presenta en esta memoria. De hecho, como se pone de manifiesto en los resultados de los estudios empíricos desarrollados, se ha observado una mejora sustancial en alumnos que han cursado las nuevas asignaturas del Grado sin que la investigación haya intervenido expresamente para provocar tales resultados. Creemos que la mejora es debida, en parte, al aumento del tiempo dedicado a estos contenidos en los nuevos programas y al hecho de que las nuevas asignaturas se han diseñado suponiendo ciertas, algunas de las conjeturas del presente estudio.

La memoria de tesis está ***organizada*** en ocho capítulos: en el primero se describe el problema de investigación, en los capítulos 2º y 3º se presenta el estudio de los antecedentes y la fundamentación teórica, en el capítulo 4º se expone el marco teórico y metodológico del estudio, los capítulo 5º, 6º y 7º se dedican a describir el desarrollo y los resultados de los estudios empíricos realizados y en el capítulo 8º se presentan las conclusiones y las perspectivas de futuro, tanto del estudio como de las necesidades inmediatas de la línea de investigación.

En el ***Capítulo 1*** se presenta el problema de investigación, señalando como origen la memoria de tercer ciclo mencionada (Ortiz, A., 1998; Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática del bienio 1996-98), cuya continuación se ha realizado en un marco teórico bastante más avanzado y con un modelo más completo para la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático. En este nuevo marco se amplía el estudio al campo de la comprensión de los sistemas de numeración usuales para la representación de los números naturales y se centra la indagación en los alumnos del Grado de Educación Primaria con el propósito de extraer consecuencias fundadas para su formación. Después de describir el área problemática y argumentar a favor de la racionalidad del estudio se presenta la caracterización formal del problema de investigación en términos de objetivos e hipótesis, incluyéndose referencias sobre las distintas fases del estudio y la metodología empleada en cada una de ellas. Para terminar, se exponen algunas reflexiones en torno a algunas características relevantes de la investigación desarrollada.

En los ***Capítulos 2 y 3*** se utiliza una aproximación al Análisis Didáctico como método que proporciona referencias precisas, específicas y operativas para afrontar con eficacia la fase de selección, análisis y tratamiento de los antecedentes bibliográficos en la investigación en Educación Matemática (Gallardo y González, 2013) y como soporte para la construcción del modelo operativo local que sirve de base para la elaboración de los instrumentos de recogida de datos.

En el ***Capítulo 2*** se aborda un análisis sobre la Historia y la Epistemología de los sistemas de numeración, la representación en matemáticas y algunos aspectos históricos, epistemológicos y matemáticos de los números naturales. A continuación se incluye un análisis sobre la fenomenología de los números naturales y se discute sobre el currículo y la formación matemática en Educación Primaria, la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) y la formación de los Maestros y Maestras de Educación Primaria.

En el ***Capítulo 3*** se describen y analizan los principales antecedentes de la línea de investigación sobre la comprensión del conocimiento matemático, su interpretación y valoración. El contenido se estructura en los cuatro campos de concreción creciente siguientes:

a) Estudios y teorías generales sobre la comprensión del conocimiento matemático, donde se analizan distintos enfoques que van desde los más generales (Sierpinska, Davis, Byers y Erlwanger, etc.) hasta los más cercanos a la línea de investigación en la que se desarrolla el estudio (Castro, Rico y Romero, Bender, Hiebert, Gallardo y González, etc.).
b) Estudios sobre diferentes facetas o componentes de la comprensión del conocimiento matemático, entre los que se encuentran *la evolución/desarrollo de la comprensión* (Pirie y Kieren, Koyama y otros), *su naturaleza y funcionamiento* (White y Gunston), o *su diagnóstico, interpretación y valoración* (Pirie, Schank, Morgan, Niemi, entre otros).
c) Estudios sobre la comprensión de conocimientos matemáticos específicos (Sfard, Nakahara, Castro, Rico y Romero, Sierpinska, entre otros).
d) Estudios sobre la *tendencia integradora para la interpretación* de la comprensión del conocimiento matemático, de los que se extrae el modelo operativo que se emplea como referencia para la presente investigación (Gallardo, Gallardo y González, Gallardo, González y Quispe). A partir de dicho modelo se construye el modelo local que se describe con detalle en el capítulo 4 de la memoria.

Para finalizar, en el capítulo 3 se incluyen las principales conclusiones del Análisis Didáctico realizado y las consecuencias para la investigación.

En el ***Capítulo 4*** se expone el marco teórico y metodológico de la investigación, en el que, de acuerdo con los planteamientos teóricos de la línea, se dedica una especial atención a la construcción del modelo local inicial modificando el modelo utilizado en la memoria de tercer ciclo. En dicho proceso se definen las categorías fenómeno-epistemológicas que permiten la identificación y organización de las tareas, la elaboración de los instrumentos adecuados para registrar la actividad matemática del estudiante y caracterizar el uso del conocimiento en la actividad matemática. En la componente epistemológica se distinguen los bloques de reproducción, análisis, síntesis y nivel formal; entre las categorías fenomenológicas se consideran los contextos relacionados con el conocimiento de los sistemas de numeración, con las situaciones de traducción entre distintos sistemas, de cuantificación y medida, de comparación y orden, y con las situaciones en las que los sistemas de numeración cobran protagonismo en el desarrollo de los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales.

Pero la investigación desarrollada se caracteriza por sucesivas aproximaciones teórico-empíricas al problema en estudio. A partir del modelo local inicial o modelo 1 se construye el primer instrumento o Prueba de Comprensión Numérica 1 (PCN1) en forma de cuestionario integrado por 41 ítems distribuidos entre las 20 categorías fenómeno-epistemológicas que resultan del cruce de las categorías citadas en el párrafo anterior. A continuación, teniendo en cuenta los primeros resultados de la aplicación de la prueba (capítulos 5 y 6) a una muestra de alumnos que inician sus estudios, se realizan algunas modificaciones que dan lugar al modelo local 2 y a la construcción de dos nuevos cuestionarios más reducidos PCN2 y PCN3 que se aplican nuevamente a varias muestras extraídas de la misma población. Se describen a continuación los análisis e instrumentos estadísticos utilizados así como los conceptos de vector de comprensión y de vector de comprensión singular, que nos permitirán organizar las muestras por niveles de comprensión y obtener una primera aproximación de la situación global en la que se encuentran los alumnos.

Para completar el modelo general de comprensión en su componente hermenéutica y superar algunas de las limitaciones de los estudios anteriores, en particular las debidas a las dimensiones cognitiva y semiótica de las pruebas escritas, se describe al final del capítulo la estructura de las entrevistas que se desarrollan con alumnos de las tres muestras estudiadas así como con alumnos de la especialidad de matemáticas del Master de Profesorado de Secundaria y Bachillerato, lo que nos permitirá obtener una medida de la potencialidad del modelo propuesto y de la validez de las tareas utilizadas.

En el ***Capítulo 5*** se procede a describir la población y las muestras para realizar a continuación una parte importante del análisis de los datos obtenidos por la aplicación de los tres cuestionarios. En una primera aproximación se estudia la comprensión que manifiestan los alumnos sobre los sistemas de numeración mediante el análisis descriptivo global de las respuestas correctas, incorrectas y en blanco. La determinación de los vectores de comprensión, utilizando los criterios para asignación de niveles y teniendo en cuenta la presencia de vectores singulares, nos permite disponer de una descripción más precisa de la distribución de la muestra por niveles de comprensión en cada una de pruebas aplicadas. Se finaliza el estudio con algunas conclusiones parciales y propuestas de mejora del modelo local y del instrumento utilizado.

La primera aproximación global a la comprensión que se realiza en el capítulo 5 no pasa de ser una panorámica general insuficiente, por lo que se incluye en el ***Capítulo 6*** un análisis puntual de cada uno de los ítems de las tres pruebas con el propósito de completar la información y profundizar en la interpretación global cognitiva descrita. Con ello se adentra la investigación en las dimensiones semiótica y hermenéutica del modelo global, tratando de identificar y estudiar las estrategias utilizadas, los estilos de pensamiento y la tipología de errores cometidos, concluyendo con resultados específicos sobre la comprensión de los sistemas de numeración que se deducen del análisis realizado y que complementan los generales obtenidos en la fase anterior. Análisis que se constituye como referencia básica para profundizar en la segunda aproximación semiótica y hermenéutica que se desarrolla en el capítulo 7.

Con la información y los resultados obtenidos en las dos primeras aproximaciones, el ***Capítulo 7*** se orienta al estudio de una tercera aproximación al fenómeno a través del análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas e interacciones observadas en entrevistas semi-estructuradas realizadas a una muestra reducida de sujetos con el propósito de profundizar en el estudio individualizado de cada uno de ellos. Aquí se trata de reconocer los usos detectados en los primeros estudios, identificar si fuera posible perfiles de alumnos contemplados en los estudios anteriores, profundizar en las facetas menos evidentes y más ocultas de la comprensión e involucrar a los sujetos en la interpretación de su propia comprensión. Con este análisis se completan los estudios empíricos realizados y se da por concluida esta fase de la investigación.

En el ***Capítulo 8*** se realiza una descripción general de la investigación, una síntesis de los resultados y conclusiones más relevantes que se obtienen en los estudios teóricos y empíricos, una revisión sobre la verificación de las hipótesis y su incidencia sobre la consecución de objetivos, un breve resumen de las consecuencias del estudio con especial atención a las implicaciones de la investigación para el diseño y desarrollo de la asignatura de Didáctica de la Aritmética, unas indicaciones sobre las principales limitaciones del estudio realizado y algunos propósitos sobre la continuación de la investigación presentada y las líneas de investigación abiertas para el futuro.

CAPÍTULO 1

El problema de investigación

1.1 Introducción

En el presente capítulo se describen los aspectos fundamentales de una investigación orientada a interpretar y valorar el conocimiento y la comprensión de los estudiantes del nuevo grado de Maestro en Educación Primaria sobre los sistemas de numeración; un estudio plenamente justificado por la necesidad de conocer el estado de la formación matemática con la que acceden los estudiantes a la universidad para planificar de manera fundada el proceso de formación y mejorar sus resultados.

El desarrollo de la investigación se centra en la aplicación de un modelo operativo construido de acuerdo con los planteamientos de la línea de investigación "*Interpretación de la comprensión del conocimiento matemático*" (González, 1998; Gallardo y González, 2006a; Gallardo, González y Quispe, 2007, 2008a, 2008b; Gallardo, González y Quintanilla, 2013, 2014). En una primera aproximación, que se describe con más detalle en el apartado 1.4 del presente capítulo y en los capítulos 3 y 4 de la memoria, concebimos la comprensión como un *mecanismo básico de respuesta relacionado con una capacidad esencial de la mente humana para gestionar con coherencia su interacción con el medio y regular el propio equilibrio cognitivo*. Desde el punto de vista general sostenemos que la comprensión tiene que ver con los procesos de adaptación al medio del sujeto y, consecuentemente, con los efectos del aprendizaje y las experiencias sobre la cognición; desde el punto de vista particular del conocimiento matemático, tiene que ver, además, con la manera de interpretar dicho conocimiento como parte de la realidad y con la forma en la que el individuo lo incorpora a su bagaje intelectual y lo utiliza funcionalmente[1].

El estudio atiende a tres frentes con propósitos relacionados: a) aplicación del modelo operativo al caso particular de los sistemas de representación de los números naturales; b) análisis de la situación concreta de la comprensión de los sistemas de numeración en una muestra de estudiantes del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria, c) comprobación de la operatividad y validez del modelo general así como de la idoneidad del marco teórico de la línea de investigación. En cada uno de estos frentes

[1] Aproximación sintetizada de una parte de los planteamientos teóricos generales de la línea de investigación en la que se sitúa el estudio. Dichas nociones proceden de una interpretación de los principios que fundamentan el desarrollo de las competencias básicas y matemáticas (DESECO-OCDE (2002); Niss, M. (2002)).

se desarrollan las siguientes actividades: construcción de un modelo local basado en el análisis fenómeno-epistemológico del contenido matemático en estudio y la determinación de los instrumentos adecuados para recabar los datos empíricos pertinentes (apartado a)); configuración de los escenarios de valoración, la selección de los sujetos para el estudio empírico, para lo que se toma como referencia la población de estudiantes de la nueva titulación del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga, y la organización y características de las distintas fases del estudio (apartado b)); la consideración de cautelas adecuadas y la determinación de procedimientos de validación del proceso, de los resultados y del marco teórico de la investigación (apartado c)).

En los sucesivos epígrafes del capítulo se aborda, por este orden, los orígenes del problema de investigación, la delimitación del área problemática, la formulación de los aspectos concretos que se van a investigar, la caracterización formal del problema en términos de objetivos e hipótesis de investigación, las distintas fases del estudio y la metodología empleada en cada una de ellas. Para terminar, se exponen algunas reflexiones en torno a la modalidad del estudio y otras características relevantes de la investigación desarrollada.

1.2 Los orígenes del problema de investigación

Los orígenes del estudio se sitúan en las siguientes necesidades, inquietudes y determinaciones:

a) La necesidad de completar y mejorar el **estudio previo** realizado sobre la "*Comprensión del Sistema de Numeración Decimal: un análisis de la coordinación entre los sistemas de representación escrito y hablado*" (Ortiz, A., 1998) surgida en el ámbito del Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga para el bienio 1996-98.
b) La necesidad de encontrar respuestas fundadas a los problemas generales relacionados con la **formación de maestros**.
c) La necesidad de encontrar respuestas fundadas a los numerosos e importantes interrogantes y conjeturas relacionados con la **formación de maestros** en Matemáticas y en Didáctica de la Matemática.
d) La necesidad de completar los estudios en torno a la **comprensión del conocimiento matemático** y someter a prueba y completar el modelo operativo y el marco teórico de la línea de investigación.
e) La conveniencia de conocer el estado real de la comprensión y de los conocimientos, habilidades y destrezas matemáticas de los estudiantes de Magisterio al comenzar sus estudios universitarios, para construir procesos formativos fundados y someterlos a revisión y mejora.

Veamos con detalle cada uno de los argumentos anteriores.

1.2.1 Estudio previo

La indagación sobre la comprensión de los sistemas de numeración se inició en el estudio que se menciona en el apartado a) anterior. Los principales logros y resultados de dicho estudio, que se analiza más extensamente en el capítulo 4, son los siguientes:

Desde el punto de vista histórico y epistemológico se actualizó la información (Guitel, G., 1.975; Ifrah, G., 1.994; Gómez, B., 1995, 1996) y se hizo un análisis de los sistemas de numeración actuales a la luz de la *Clasificación jerarquizada de las numeraciones escritas* propuesta por Guitel. Desde el punto de vista matemático y formal se actualizó la información sobre los intentos de generalización de los sistemas de numeración en el s. XVII, las reflexiones sobre los orígenes de la Aritmética (Caramuel, J., 1670) y las consideraciones formales actuales sobre los sistemas de numeración (Capelo, Ferrari y Padovan, 1990).

En lo que se refiere a la comprensión y dominio de los sistemas de numeración se organizaron y analizaron de cara al estudio empírico los resultados de los estudios:

- Estudios de Pedagogía Operatoria sobre el proceso de reconstrucción infantil de los sistemas de numeración (Sellarès, R. y Bassedas, M. en: Moreno, M. (1980)), en la que los autores establecen una génesis que incluye siete conductas en tres niveles o momentos de progresiva estructuración y toma de conciencia.
- Nadine Bednarz y Bernadette Dufour-Janvier (1982, 1988) en relación con la escritura convencional, la capacidad para leer y escribir números, el valor de posición, los algoritmos de cálculo y los agrupamientos.
- Mieko Kamii (1980,1981 y 1982) y Constance Kamii (1984, 1985) sobre el valor de posición y la capacidad de los niños entre 4 y 9 años para agrupar objetos y representar estos grupos con imágenes y cifras.
- Lucie Deblois (1.993) realiza 6 estudios de casos sobre la comprensión de la numeración en niños con dificultades de aprendizaje. Utilizando el modelo de comprensión de Bergeron y Hercovics (1.989) establece dos bloques (conceptos preliminares y conceptos emergentes) y cuatro componentes de la comprensión (intuitiva, procesual, abstracta y formal) y enuncia criterios observables para cada una de dichas componentes.
- Estudios sobre el dominio de la numeración al terminar la Educación Primaria (Aguilar, M.; Martinez, J., 1997), mediante la aplicación del *"Test de Evaluación Curricular Matemática. Primero, Segundo y Trecer Ciclo de Educación Primaria. Numeración",* con las siguientes conclusiones:
    - Hay competencias numéricas que evolucionan por madurez
    - hay dificultades y errores que persisten a lo largo de los tres ciclos de Primaria.
    - las respuestas son fruto de un aprendizaje repetitivo, rutinario y memorístico más que de uno significativo y conceptual.
    - interesaría averiguar: qué parte de los errores corresponden al desconocimiento de los conceptos numéricos y qué parte dependen de las propias capacidades cognoscitivas inherentes al desarrollo evolutivo y las estrategias que usan los niños que resuelven bien los ítems difíciles.

El estudio empírico se diseñó mediante una primera prueba exploratoria, tipo cuestionario (apartado A3.1 Anexo III), basada en el modelo de Jan de Lange (1.996), desarrollado por Mary C. Shafer y Sherian Foster en el trabajo, " The changing face of assessment" (1.997). En la prueba se consideraron las variables independientes de tarea: tipo de actividad, con tres categorías que representan los niveles de dificultad de la tarea; nivel de comprensión, con las categorías nivel I o de reproducción, nivel II o de conexiones y nivel III o de análisis; tipo de lenguaje utilizado, con dos categorías, según el soporte de la actividad sea de naturaleza fundamentalmente verbal o de naturaleza figurativa, y una tercera con dos modalidades distintas referidas a la utilización de los dos sistemas de representación numérico escrito (con cifras) y verbal (con letras). La variable dependiente o de respuesta es una variable discreta de carácter cuantitativo con cuatro posibles valores: respuesta correcta, parcialmente correcta, incorrecta y en blanco.

Las tareas se eligieron de entre las siguientes categorías:

- Escritura en ambos sistemas de números de hasta 5 cifras.
- Traducciones de un sistema a otro.
- Órdenes de agrupamientos: unidades, decenas, centenas.
- Número de agrupamientos distintos de una cantidad.
- Comparaciones de números, encontrar un número entre otros dos.
- Construcciones del mayor y menor número con distintos dígitos.
- Uso de las ideas de agrupamientos en los algoritmos de las operaciones elementales.

Tareas que han sido organizadas para el nuevo estudio en el marco de un modelo teórico con una nueva y más completa estructuración.

1.2.2 El problema de la formación de maestros en Matemáticas y en Didáctica de la Matemática

En el campo de la formación de Maestros y profesores de Matemáticas existe el principio ampliamente admitido de que la "buena formación matemática"[2] del profesional de la docencia es una condición *necesaria*, aunque no suficiente, para el desarrollo de una Educación Matemática de calidad (Shulman, 1986; Llinares,S.; Sánchez, M. V., 1990; Llinares, 2009), para la disminución del fracaso escolar y para la superación de la situación actual de bajo rendimiento académico que se puede apreciar claramente en las evaluaciones de diagnóstico realizadas hasta la fecha (Informe Pisa 2010). Por otra parte, existe un cierto consenso en que el Maestro de Primaria debe ser un profesional reflexivo (Flores, 2007), en particular sobre los procesos de adquisición del conocimiento matemático, los recursos, materiales y métodos adecuados para ello y las destrezas cognitivas y metacognitivas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas elementales (Llinares, S.; Sánchez, M. V., 1990), lo que requiere tener un cierto dominio y un buen nivel de comprensión de los conocimientos matemáticos elementales.

Pero la formación matemática de los estudiantes de Magisterio en el momento de comenzar sus estudios universitarios es insuficiente para abordar con garantías las tareas de formación matemática de los niños y niñas de la Educación Primaria. Se trata de una formación fuertemente condicionada, y con frecuencia deformada, por la formación previa recibida, y con una serie de deficiencias y lagunas (Contreras et al., 2012, pp. 433-436) que es necesario conocer (vía 2, *Figura 1.1*) para completar el proceso usual (vía 1, *Figura 1.1*) y realizar un plan formativo fundamentado, racional y efectivo que sirva de base para el desarrollo de estudios experimentales orientados a la optimización de resultados.

Así se pone de manifiesto en las "Conclusiones de la Reunión de Alcalá de Henares (24-25 de febrero de 2005)" (Fernández-Cano, Nortes, Gómez, Fonseca, Sáenz, Chamorro et al., 2005), en las que se afirma que *"La carga lectiva de formación*

[2] El significado concreto de esta expresión así como los contenidos, la estructura y el alcance de sus componentes se encuentra en la actualidad en discusión y pendiente de estudios que confirmen o rechacen las diferentes posiciones.

matemática y de Didáctica de las Matemáticas de los maestros en los planes de estudio de magisterio es tan escasa que resulta insuficiente para el desarrollo de las competencias que necesitan en su práctica profesional". Igualmente, en las conclusiones de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1999) se argumenta que "*la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas, tanto en las escuelas de magisterio como en las facultades de matemáticas deja mucho que desear"*. En el informe TEDS-M (Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los futuros maestros) (2012), se afirma que *"La formación en matemáticas prescrita era escasa e insuficiente, tratada en un bajo porcentaje de materias, presentada en modo global, y sin diferenciar las componentes de los conocimientos matemáticos y su enseñanza y aprendizaje";* y a propósito del desarrollo de los planes de estudio en las distintas Universidades concluye que "*La mayor parte de los centros universitarios mantuvieron en sus planes de estudio la estructura establecida por el Ministerio de Educación a nivel nacional en cuanto a porcentajes de materias y tiempos asignados a los distintos dominios de conocimiento: continuó el predominio de la formación pedagógica y se mantuvo una escasa formación en Matemáticas y en Didáctica de la Matemática"*.

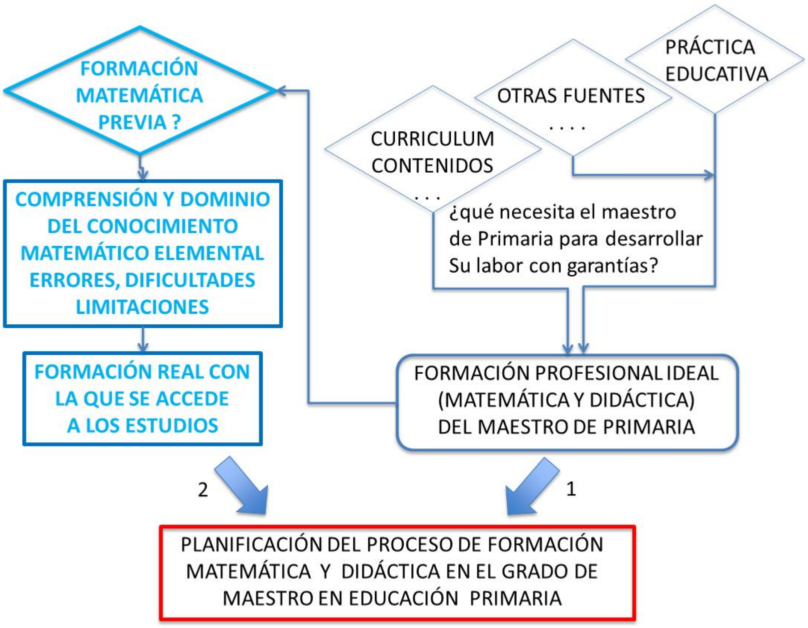


Figura 1.1 Las dos vías que fundamentan el proceso formativo del Maestro de Primaria

Las consideraciones anteriores, los numerosos estudios acerca de la existencia de un déficit en el conocimiento matemático de los estudiantes de magisterio (Llinares y Sánchez (1990); Nortes y Martínez (1992); Abraira y González (1995); Gutiérrez y Jaime (1996); Salinas (2003b); Alcalde (2010); Ball (1990); Tirosh y Graeber (1989) y Siegfried (2012), entre otros), las consideraciones de Carrillo, Climent y Contreras (1999) sobre la influencia de las deficiencias en el dominio del contenido matemático sobre la gestión del aula, y de Shulman (1986) y Ball (2.008) acerca de la necesidad de atender al conocimiento de la materia, al conocimiento pedagógico del contenido y al conocimiento curricular, avalan la ampliación a cuatro años de los estudios de grado de Maestro en Educación Primaria y el aumento del número de créditos que se destinan a las materias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Con dicha ampliación creemos que puede mejorar el dominio de los aspectos conceptuales y estructurales de la disciplina y, consecuentemente, la capacidad de gestión de la clase y las habilidades para crear y sostener un discurso productivo en el aula (Enderson, 1995 y Manouchehri, 1996) (citados en Contreras, L.C. y Blanco, L.J. (2001)).

1.2.3 Algunos interrogantes

A pesar de la claridad de las necesidades y actuaciones mencionadas, las siguientes cuestiones no están aún respondidas satisfactoriamente: *¿Cuáles deberían ser los conocimientos matemáticos elementales que debe dominar y comprender un maestro de Primaria para adquirir una formación profesional eficaz y completa?; ¿hasta dónde debe llegar el dominio y la comprensión de dichos conocimientos*?; *¿cuál es la situación real de la comprensión al comienzo de los estudios profesionales?*; *¿Cómo debería ser la formación universitaria para optimizar la comprensión y el dominio que ya poseen al comienzo de los estudios?*.

Pero las respuestas a las cuestiones anteriores requieren la indagación previa en las siguientes cuestiones: *¿Es posible asegurar que un sujeto tiene una cierta comprensión de un conocimiento matemático concreto?; ¿cuándo (en qué condiciones) y cómo se puede averiguar esto con ciertas garantías?* y la finalidad a largo plazo es la de clarificar la cognición matemática para orientar adecuadamente los procesos de enseñanza-aprendizaje: *¿Cómo planificar y desarrollar experiencias adecuadas para la formación del maestro de Primaria a partir del conocimiento de la situación de la comprensión y el dominio de los conocimientos matemáticos elementales?*.

1.2.4 Comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes para Maestro

Hablar de la formación real en torno a un conocimiento matemático remite al complejo campo de la cognición individual, incluyendo, entre otros, la determinación y el análisis de:

1) El estado real de la comprensión de los conocimientos matemáticos de los alumnos futuros maestros al acceder a la Universidad desde la doble dimensión fenómeno-epistemológica y hermenéutica así como de su disponibilidad, funcionalidad y utilidad práctica.
2) Los errores que cometen, las estrategias que utilizan y los modos y estilos de razonamiento cuando se enfrentan a situaciones y experiencias en las que intervienen los diferentes conocimientos matemáticos.

La nueva coyuntura en la formación de maestros y nuestro convencimiento de la necesidad de indagar en los conocimiento matemáticos de los futuros docentes, como parte del conocimiento profesional y requisito imprescindible para abordar con garantías los problemas específicos de la Educación Matemática, nos motivan a retomar el trabajo inicial y orientarlo al nuevo marco de la formación de maestros. Pero esta continuación se encuentra ahora con un marco teórico bastante más desarrollado y con un modelo más avanzado y completo para la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo, 2004, Gallardo y González, 2004, 2005a, 2005b, 2006a, 2006b, 2006c, 2007a, 2007b, 2011; Gallardo, González y Quispe, 2007, 2008a, 2008b; Gallardo, González y Quintanilla, 2013, 2014)

En el marco general mencionado, el conocimiento matemático en torno a la representación numérica usual y los sistemas de numeración, como parte de lo que se conoce como “sentido numérico” (Bruno, A., 2000), a pesar de ser un conocimiento matemático básico que debería ser dominado por el maestro de Primaria en mayor medida que otros de uso menos extendido, participa también de la situación descrita. Así lo indican los primeros resultados de la investigación (Ortiz, González y Gallardo, 2011; González, Ortiz y Gallardo, 2012; Ortiz, González y Gallardo, 2013, González, Ortiz y Gallardo, 2014), en los que los futuros maestros comienzan sus estudios universitarios con una formación meramente técnica y con un cúmulo de errores y estrategias que atestiguan un bajo nivel de comprensión general sobre el tema.

Nuestras conjeturas indican que los futuros maestros tienen dificultades y cometen errores que proceden de una formación previa mejorable y que, en consecuencia, poseen un nivel de comprensión medio bajo sobre el campo de los sistemas de numeración. Por otra parte, creemos que los errores y las estrategias utilizadas al resolver tareas propias del campo analizado proporcionan información privilegiada sobre las limitaciones, dificultades y otras características de las capacidades, destrezas y maneras de razonar relacionadas con los sistemas de numeración. A partir de la información obtenida se podrá plantear el desarrollo de un plan de formación inicial orientado a que los alumnos mejoren su nivel de comprensión y superen los errores y las dificultades encontradas, lo que será objeto de otra investigación.

En el nuevo estudio que proponemos se pretende:

- Ampliar el trabajo al resto de aspectos del campo de la representación numérica elemental.
- Utilizar el nuevo marco teórico y el nuevo modelo operativo sobre la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático.
- Centrar la indagación en los alumnos futuros maestros del nuevo Grado de Primaria.
- Extraer consecuencias fundadas para la formación específica de dichos alumnos.
- Sentar las bases para abrir una vía de indagación sobre diseño y desarrollo de planes de formación basados en los resultados de este tipo de estudios.

1.3 Área problemática y marco general del problema de investigación

En los apartados que siguen se detallan algunos de los elementos que configuran el marco general en el que se sitúa el problema de investigación.

1.3.1 Campos y núcleos de interés del estudio

La investigación se fundamenta en los siguientes campos y núcleos de interés que se relacionan de acuerdo con el esquema de la *Figura 1.2*:

1 *Sistemas de Numeración usuales para la representación de los números naturales*. En particular el Sistema de Numeración Decimal, el Sistema Posicional escrito en distintas bases y el Sistema de Numeración hablado.

2 *Comprensión del conocimiento matemático* y, en particular, de los Sistemas de Numeración usuales para números naturales en estudiantes del nuevo Grado de Primaria, con especial atención a la elaboración de un modelo local para la evaluación e interpretación de la comprensión de los SN, la construcción de instrumentos de recogida de datos, su aplicación y el análisis de resultados.

3 *Conocimiento sobre el contenido matemático y su Formación en Maestros de Educación Primaria*; en particular: conocimientos, capacidades y competencias sobre los Sistemas de Numeración y formación inicial en los estudios del Grado de Primaria sobre el campo de los Sistemas de Representación de los números naturales.

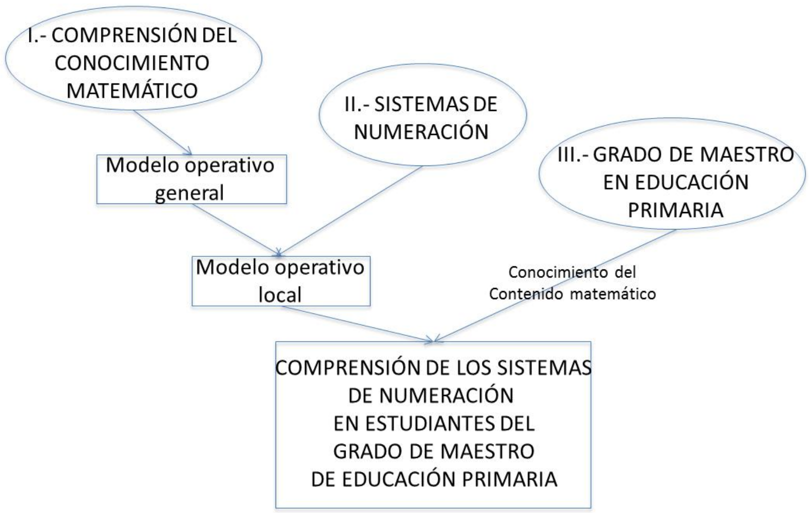


Figura 1.2 Campos y núcleos de interés del problema de investigación

1.3.2 Marco conceptual

1.Aproximación a la noción de comprensión

De los diferentes modelos y enfoques existentes para la noción de comprensión, preocupados básicamente por su origen, naturaleza, funcionamiento o evolución (ver capítulo 3), centramos aquí la atención en los efectos observables, en las manifestaciones externas y en la interpretación, adoptando una aproximación indirecta[3], menos teórica que las existentes, integradora, basada en la observación cuidadosa de comportamientos relevantes ante situaciones especialmente preparadas y que busca la operatividad entendida como capacidad para proporcionar categorías, tareas, medios e instrumentos válidos y fiables para la observación y el diagnóstico. En consecuencia:

Decimos que un sujeto manifiesta una cierta comprensión en relación con un objeto concreto (conocimiento, etc.) cuando elabora y emite a su satisfacción una respuesta centrada en dicho objeto y adaptada a la experiencia causante del desequilibrio. Para ello decimos que comprender es sinónimo de responder o de elaborar y emitir una respuesta adaptada. Si un sujeto emite una respuesta adaptada, podemos decir que comprende en los términos del problema propuesto. En otras palabras:

“Lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende”

[3] Proyecto PB97-1066 “Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático” subvencionado por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología durante el trienio 1998-2001.

Según sea dicha utilización, en cuanto a alcance, diversidad, complejidad, seguridad, efectividad o disponibilidad, así será el nivel o grado de comprensión que el sujeto maneja o dispone en el momento de responder.

2.Interpretación y valoración de la comprensión

Por tratarse de ideas y constructos inobservables directamente, utilizamos una estrategia de acercamiento indirecto con un fuerte apoyo en el análisis didáctico (González, 1998) y, en particular, en la epistemología y fenomenología del conocimiento matemático. El medio general que se emplea coincide con el que proponen Duffin y Simpson (1997), es decir, la interpretación de comportamientos provocados ante situaciones problemáticas.

Puesto que es posible obtener información detallada de lo que realizan los sujetos, pero no de lo que sucede en sus mentes, creemos que es más factible y apropiado limitar la evaluación a las manifestaciones externas, en términos de "registros objetivos", y considerar las interpretaciones como conjeturas provisionales y aproximadas a la situación real. En consecuencia, para observar el estado de la comprensión de un individuo sobre un conocimiento es necesario ponerlo en disposición de emplear todas las herramientas, medios y capacidades a su alcance para responder a situaciones especialmente preparadas para ello. En concreto, deben ser situaciones y tareas para cuya resolución se necesite emplear precisamente el conocimiento cuya comprensión queremos observar, que consigan implicar al sujeto (que este "haga suya la actividad") y que requieran de respuestas con las que podamos asegurar que se comprende de algún modo el conocimiento. Para ello es necesario que la tarea o situación propuesta sea específica, sencilla de entender, sin distractores, de respuesta controlada, atractiva para el resolutor, a ser posible lúdica, preferiblemente un verdadero problema y de una dificultad media dentro de las de su misma especie.

1.3.3 Marco teórico

De acuerdo con el esquema general del Área problemática vamos a centrar la atención en dos grandes núcleos del estudio: comprensión del conocimiento matemático y sistemas de numeración.

A) Desde el punto de vista de la ***comprensión***, nos remitimos a las referencias detalladas en Ortiz, González y Gallardo (2011) y González, Ortiz y Gallardo (2012, 2013, 2014), al análisis didáctico de los antecedentes que se describen en el capítulo 3 y a los numerosos estudios de la línea que venimos desarrollando (Gallardo y colaboradores, 2002-2011).

Son de destacar en este amplio campo (Ortiz, González y Gallardo, op. cit., pp. 7-10):

- Tres orientaciones básicas sobre la comprensión del conocimiento matemático: cognitiva, semiótica y hermenéutica.

- Un modelo general para la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo, González y colaboradores, 2002-2014) que se trata extensamente y se concreta en el capítulo 4 para el caso de la comprensión de los sistemas de numeración.

El modelo está basado en:

a) Una *concepción operativa sobre la comprensión del conocimiento matemático* y su valoración basada en la imposibilidad del acceso directo a la misma y en el papel relevante que desempeña el uso intencional del conocimiento matemático como forma de acción observable e interpretable: *un individuo comprende un conocimiento matemático si es capaz de emplearlo, en alguna de sus formas posibles, en todas aquellas situaciones pertenecientes a su ámbito fenómeno-epistemológico; lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende*;

b) Una *concepción analítica del conocimiento matemático* basada en las dos estructuras básicas (epistemológica y fenomenológica) y en los diferentes tipos de situaciones y categorías del conocimiento correspondientes;

c) Un método o *proceso secuenciado* articulado en torno a dos dimensiones:

c.1) Dimensión *fenómeno-epistemológica*, en la que se inicia el estudio mediante el siguiente procedimiento operativo (Gallardo y González, 2006b) para determinar situaciones problemáticas, configurar los instrumentos de recogida de datos y realizar un primer análisis macroscópico de los resultados:

1. Análisis Didáctico (González, 1998, Gallardo y González, 2006a).
2. Delimitación del conjunto genérico de situaciones.
3. Estructuración fenómeno-epistemológica del conjunto de situaciones. Criterios de clasificación y categorías de situaciones. Modelo local.
4. Selección de tareas y construcción de instrumentos.
5. Análisis de resultados y primeras conclusiones.

c.2) Dimensión *hermenéutica*, en la que se analiza la información con más detalle y se completan los resultados y conclusiones con las siguientes acciones puntuales:

1. Delimitación de los escenarios básicos de valoración (fases o situaciones distintas del proceso de enseñanza y aprendizaje, intérpretes y objetos de interpretación).
2. Proceso secuenciado, círculo interpretativo o método hermenéutico (esquema de la *Figura 1.3*) con las siguientes actividades:
   - determinación de rastros de comprensión matemática en el registro escrito;
   - caracterización de los usos del conocimiento matemático;
   - participación del sujeto como cierre del procedimiento;

El proceso se desarrolla de acuerdo con las siguientes pautas metodológicas:

Previo al episodio de interpretación: selección de las tareas matemáticas y configuración del escenario básico.

Durante el episodio de interpretación: garantizar la textualización y el registro.

Después del episodio de interpretación (a) identificar y validar los rastros de comprensión matemática diseminados a lo largo del registro escrito; (b) revelar en estos rastros los usos dados al conocimiento matemático.

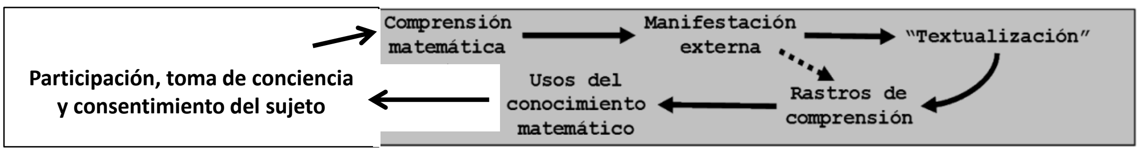


Figura 1.3 Ciclo interpretativo

Desde el punto de vista de la comprensión nos interesa en el estudio:

- Revisar los términos y definiciones y completar los aspectos teóricos del modelo general, en particular: definir de forma más precisa la noción de comprensión y otras nociones relacionadas, definir "vectores de comprensión", realizar precisiones fenomenológicas locales.

- Construir modelos locales para la valoración adaptados al problema específico, construir y validar instrumentos para la evaluación y la interpretación de la comprensión, comprobar la eficacia y operatividad de los modelos utilizados en escenarios con y sin interactividad.

B) Desde la óptica del ***conocimiento del contenido matemático*** por parte de los Maestros del Grado de Primaria y el tratamiento de estos conocimientos en el proceso de formación inicial nos remitimos a las referencias incluidas en Ortiz, González y Gallardo (2011, p. 6) y a los estudios realizados por Contreras et al. (2012). De este amplio y emergente campo de investigación nos interesa averiguar especialmente:

a) La situación real al comienzo de los estudios de la comprensión y el dominio de los conocimientos, procedimientos y destrezas relacionadas con el sistema de representación usual de los números naturales.

b) La incidencia que tiene sobre dicha situación el desarrollo de una asignatura de Didáctica de la Aritmética en la que los contenidos sobre sistemas de numeración reciben un tratamiento matemático y didáctico especial.

Con la información descrita esperamos poner de manifiesto:

a') Que la situación inicial que se menciona es limitada y deficiente para la formación que necesita un maestro de Primaria.

b') Que es posible mejorar dicha situación con un proceso de reeducación y reconstrucción asistida de los conocimientos teniendo en cuenta para ello los resultados de investigaciones como la que se presenta en esta memoria.

En este punto no pretendemos abordar los interesantes problemas de cuál debe ser la formación ideal ni cómo hay que abordarla, cuestiones que deben ser posteriores a las que aquí nos ocupan. Antes bien nos interesa comprobar que, al igual que ocurre con otros contenidos (García; Escudero; Llinares y Sánchez, 1994; Llinares y Sánchez, 1990; Carrillo y Contreras, 1993; Forner (1993, 1995); Fortes, A. (1995); (Palarea; Hernández; Socas, 2001), la formación específica sobre sistemas de numeración con la que inician sus estudios los estudiantes para maestros es marcadamente insuficiente. Pero, además, queremos precisar en qué aspectos es insuficiente y cuál es el alcance, en su caso, de las limitaciones que tiene y genera, sacando a la luz los errores que se cometen y las estrategias que se utilizan. Esto nos parece fundamental para poder hablar, a continuación, de un posible plan de formación orientado a mejorar la situación de partida.

1.4 Delimitación formal del problema de investigación

El estudio queda delimitado mediante la formulación de sus fines generales, los objetivos concretos que se persiguen y las conjeturas o hipótesis cuya confirmación va a permitir asegurar la consecución de los objetivos. Veamos a continuación la formulación precisa de cada uno de dichos elementos.

1.4.1 Fines del estudio

El estudio se desarrolla con una doble finalidad general, una teórica y otra empírica:

1.- Completar y someter a prueba el modelo operativo para el diagnóstico e interpretación de la comprensión del conocimiento matemático con el propósito de avanzar en las experiencias, los conocimientos y los planteamientos teóricos de la línea de investigación.

2.- Averiguar la comprensión que manifiestan, los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan los estudiantes del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria sobre los sistemas de numeración en general y, en particular, sobre el sistema de numeración usual para los números naturales, con el propósito de extraer consecuencias fundadas para orientar el diseño de esa parte específica de la formación inicial.

1.4.2 Objetivos de la investigación

En el contexto descrito nos hemos propuesto alcanzar con el estudio los siguientes objetivos:

O1. Ampliar los conocimientos sobre la línea de investigación “diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático” confirmando la operatividad del modelo general, actualizando sus planteamientos teóricos y empíricos y aportando nuevos elementos al modelo.

O2. Utilizar el nuevo marco teórico y el nuevo modelo operativo sobre la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático para su aplicación al estudio de la comprensión de los sistemas de numeración usuales para la representación del número natural y construir para ello un modelo local coherente y operativo. En particular se pretende:

O2.1. Revisar y estudiar el campo y las áreas de conocimiento en torno a la comprensión de los sistemas de numeración del número natural.

O2.2. Describir y organizar los fenómenos y las situaciones en las que los sistemas de numeración participan y los hacen significativos, proponiendo un modelo local que describa la estructura fenomenológica del campo en estudio.

O2.3. Utilizar la estructura epistemológica general de los sistemas de numeración para definir niveles epistemológicos adecuados para describir la comprensión que manifiestan los sujetos sobre dichos conocimientos.

O3. Efectuar una aproximación al estado de la comprensión y el dominio de los sistemas de numeración de los alumnos futuros maestros del nuevo Grado de Primaria mediante:

O3.1 La construcción de instrumentos válidos para la recogida de datos ajustados al modelo local para la interpretación de la comprensión de los sistemas de representación de los números naturales.

O3.2 El análisis descriptivo de las respuestas de los sujetos a los instrumentos de recogida de datos y la valoración global absoluta y relativa de la situación en la que se encuentran los individuos de las muestras utilizadas.

O3.3 La determinación y el análisis de los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan.

O3.4 La delimitación de trazos y perfiles de comprensión atendiendo a la estructura del modelo local y a los niveles de comprensión definidos.

O4. Extraer consecuencias fundadas para orientar algunos aspectos de la formación específica sobre el contenido matemático en estudio y modificar el diseño de la asignatura "Didáctica de la Aritmética" en términos de contenidos, metodología, recursos, material didáctico y tipos de actividades adecuados para optimizar dicha formación.

1.4.3 Conjeturas/Hipótesis de la investigación

Con el estudio se pretende someter a prueba la bondad de las siguientes hipótesis:

H1. El modelo general para el estudio e interpretación de la comprensión del conocimiento matemático resulta útil y operativo para el caso de la comprensión del sistema de numeración usual para los números naturales en estudiantes de los nuevos estudios del Grado de maestro en Educación Primaria.

H1.1. A partir del modelo operativo general, es posible construir un modelo local que permite valorar la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes que inician los estudios del grado de Maestro en Educación Primaria.

H1.2. Es posible construir instrumentos válidos y fiables para averiguar, al amparo de dicho modelo local, la situación relativa de la comprensión en los sujetos de la población indicada.

H2. Los estudiantes de Magisterio comienzan sus estudios profesionales con una formación técnica, memorística, basada en fórmulas y procedimientos aprendidos y una comprensión limitada y de bajo nivel sobre el sistema de representación usual de los números naturales y sus aplicaciones en los ámbitos fenomenológicos correspondientes.

H3. Los alumnos futuros maestros de Primaria manifiestan dificultades, cometen errores y utilizan estrategias cuyo origen se encuentra en la formación preuniversitaria recibida y que son indicadores de los bajos niveles de comprensión sobre el tema.

H4. Es posible mejorar la comprensión que manifiestan al comenzar sus estudios los estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria sobre el sistema de representación usual de los números naturales mediante procesos de reeducación y reconstrucción caracterizados por nuevas formas de ver y tratar los conocimientos.

1.5 Marco metodológico. Tipos de estudios

El estudio se desarrolla mediante una metodología mixta integrada por métodos no empíricos y métodos empíricos cuantitativos y cualitativos que pasamos a describir a continuación.

1.5.1 Estudios teóricos y metodologías no empíricas

La primera parte de los estudios teóricos que presentamos en esta memoria fue desarrollada en los sucesivos trabajos de la línea de investigación que se citan en el capítulo 3 y en la memoria de tercer ciclo mencionada en el apartado 1.2, completándose en la continuación del estudio a partir del curso 2010-2011. Según se describe en los capítulos 2, 3 y 4 de la memoria se han desarrollado a lo largo de todo el período los siguientes tipos de estudio cuyos resultados se incluyen en los capítulos que se indican en cada caso:

- Análisis Didáctico de los antecedentes (González, 1998, Gallardo y González, 2013) (capítulos 2 y 3).

- Revisión y estructuración matemática elemental de los Sistemas de Numeración (Ortiz, A., Memoria de Tercer Ciclo) (capítulos 2 y 4).

- Análisis Didáctico Curricular del contenido matemático elemental en Educación Primaria (González y Gallardo, 2013) y en la formación de los futuros maestros (capítulo 2).

- Estudio Fenomenológico y Epistemológico de los sistemas de representación de los números naturales. Determinación de las categorías de tareas y situaciones y del universo de tareas y situaciones (capítulo 4).

- Análisis estructural y conceptual del modelo general de interpretación de la comprensión del conocimiento matemático. Delimitación de las dimensiones cognitiva, semiótica y hermenéutica y adaptación al caso específico (capítulo 4).

- Reflexión epistemológica y análisis semiótico de las respuestas de los sujetos de las muestras. Actualización de la estructura y componentes del modelo general; concepto de comprensión y de vector de comprensión (capítulos 4).

- Adaptación al problema específico. Construcción de un modelo local (capítulo 4).

- Construcción de los instrumentos de observación y recogida de datos (tareas, pruebas, situaciones y protocolos) (capítulo 4).

1.5.2 Estudios y metodologías empíricas

Los estudios empíricos se iniciaron también durante el desarrollo de la investigación descrita en la memoria de investigación de tercer ciclo, en la que se diseñó un cuestionario a aplicar a alumnos y alumnas de 4º curso de la Educación Primaria. Una vez retomado el problema se han diseñado nuevos cuestionarios y entrevistas ajustados al modelo local construido de acuerdo con los resultados de los estudios previos.

Se han desarrollado los siguientes estudios empíricos que se describen extensamente en los capítulos 5, 6 y 7 de esta memoria:

- Estudios empíricos cuantitativos: análisis descriptivo global, puntual y comparativo de respuestas de las tres pruebas escritas (Capitulo 5).
- Estudios empíricos cualitativos:
    - Análisis cualitativo de las respuestas a las pruebas escritas (primera aproximación al análisis semiótico y hermenéutico): análisis de errores y estrategias, rastros de comprensión y usos del conocimiento (Capitulo 6).

- Análisis semióticos y hermenéuticos de las entrevistas semi-estructuradas: análisis de estrategias y errores, rastros de comprensión, usos del conocimiento matemático, intervención de los sujetos en el propio proceso de valoración y la búsqueda del consentimiento del sujeto (Capitulo 7).

- Estudios de validez y fiabilidad de los instrumentos (Validez interna y externa y validez de constructo): índices de facilidad/dificultad, índices de discriminación, coeficientes de homogeneidad total y parcial ítems-total. Otros estudios estadísticos: correlaciones entre muestras, contrates de hipótesis.

1.5.3 Esquema del proceso metodológico

La metodología utilizada en la continuación del estudio a partir del curso 2010-2011 (última etapa de la investigación) presenta las características propias del problema complejo tratado y se articula según el esquema de relaciones de la *Figura 1.4*, en el que se aprecian los dos bloques metodológicos y los procesos de ida y vuelta entre los mismos que se explican con detalle en el apartado siguiente.

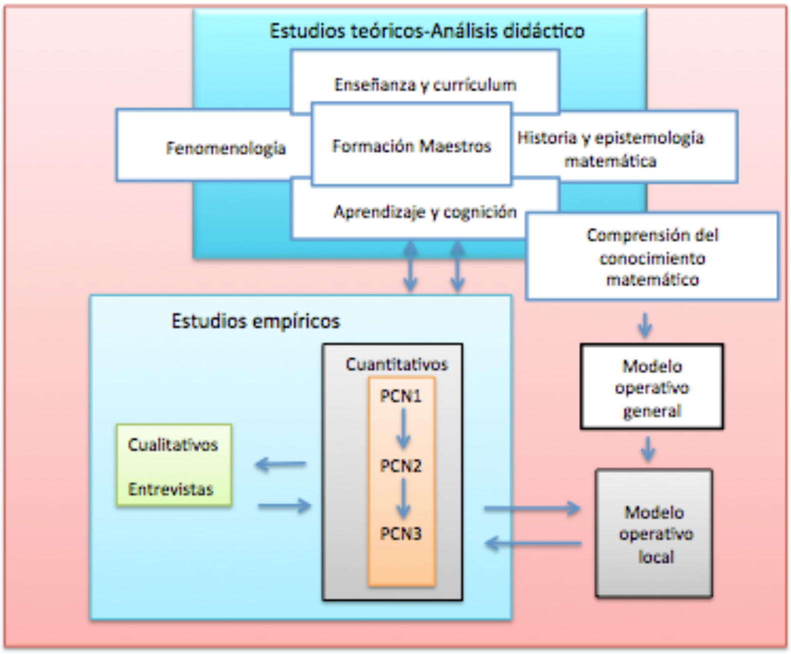


Figura 1.4 Esquema del proceso metodológico.

1.5.4 Secuenciación, etapas y desarrollo temporal del estudio

La investigación se caracteriza por el proceso secuenciado que se incluye a continuación y por el desarrollo temporal de los estudios en las etapas que se indican. Como se puede comprobar, se alternan los estudios teóricos, que permiten fundamentar y perfilar la continuación del trabajo, y los estudios empíricos de aplicación de las determinaciones establecidas en las etapas y estudios anteriores, tanto teóricos como empíricos.

T1.- Estudio Teórico 1

Este primer estudio pretende sentar las bases teóricas iniciales de la investigación consistentes en fundamentar todo el estudio y construir el modelo local 1 y la primera prueba escrita que servirá a modo de estudio exploratorio e iniciación de los estudios empíricos posteriores. Este primer estudio teórico se compone de los siguientes trabajos puntuales y en el orden en el que aparecen:

T1.1 Análisis Didáctico

T1.1.1 Análisis Didáctico de los antecedentes. Fases y conclusiones.

T1.1.2 Análisis Didáctico Curricular de los Sistemas de Numeración.

T1.2 Comprensión del conocimiento matemático. Comprensión de los Sistemas de Numeración. Modelo Local 1.

T1.2.1 Análisis fenómeno-epistemológico de los sistemas de numeración.

T1.2.2 Universo de tareas y situaciones. Características generales y categorías.

T1.2.3 Modelo operativo local 1 para el estudio de la comprensión del Sistema de Numeración para los números naturales en estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria.

T1.3 Construcción de la 1ª prueba de comprensión numérica (PCN1) de acuerdo con el modelo local 1 (1ª aproximación).

E1.- Estudio Empírico 1

Como se explica con detalle en los capítulos 5 y 6, se trata de la primera prueba escrita a que se someten los sujetos de una muestra amplia extraída de la población de estudiantes del primer curso de la carrera. En esta segunda etapa se desarrollan las siguientes actuaciones:

E1.1 Aplicación de la PCN1 a una muestra de alumnos de 1º del grado de Maestro en educación Primaria, durante el curso académico 2010/11, que solo habían cursado asignaturas de los módulos generales y por tanto no habían recibido formación en disciplinas relacionadas con las materias del área de Didáctica de la Matemática.

E1.2 Análisis de resultados.

E1.2.1 Análisis cognitivo puntual: tipos de respuestas (correctas, incorrectas y sin respuesta), consecuencias para el modelo local 2 y para la PCN2 (2ª aproximación).

E1.2.2 Análisis cognitivo global: estudio descriptivo. Consecuencias para el modelo local 2 y para la PCN2 (2ª aproximación).

E1.2.3.- Análisis semiótico: tipos de estrategias y errores. Rastros de comprensión. Consecuencias para el modelo local 2 y para la PCN2 (2ª aproximación).

T2.- Estudio Teórico 2

Los resultados del estudio empírico 1 permiten extraer conclusiones que evidencian la necesidad de modificar el marco teórico establecido en T1 y revisar y modificar todos los aspectos que se ven afectados por dicha modificación. En concreto se llevan a cabo los siguientes estudios teóricos en esta etapa:

T2.1 Comprensión de los Sistemas de Numeración. Modelo Local 2.

T2.1.1 Revisión del modelo 1 en función de los resultados de la PCN1.

- Ajuste y concordancia de los resultados con el Análisis Fenómeno-epistemológico, con el universo de tareas y situaciones y con las categorías establecidas.
- Análisis de niveles, categorías y tareas. Conclusiones.

T2.1.2 Modelo Local 2 para el estudio de la comprensión de los Sistemas de Numeración en estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria (2ª aproximación).

T2.2 Construcción de la PCN2 de acuerdo con el Modelo Local 2.

E2.- Estudio Empírico 2

Se trata de una etapa similar a E1. Además de emplear una nueva muestra y un nuevo cuestionario más reducido que el anterior y ajustado al nuevo modelo local, el estudio pretende avanzar en el análisis de la comprensión y disponer de información para validar y comparar los datos obtenidos y los instrumentos empleados. Se desarrollan aquí los siguientes trabajos:

E2.1 Aplicación PCN2 a una muestra de alumnos de 2º del grado de Educación Primaria, durante el curso académico 2011/12, y realizada previamente al desarrollo de la asignatura Didáctica de la Aritmética.

E2.2 Análisis de resultados.

E2.2.1.- Análisis cognitivo puntual: tipos de respuestas (correctas, incorrectas y sin respuesta), consecuencias para el modelo local definitivo y para la PCN3 (3ª aproximación).

E2.2.2.- Análisis cognitivo global: estudio descriptivo. Consecuencias para el modelo local definitivo y para la PCN3 (3ª aproximación).

E2.2.3.- Análisis semiótico: tipos de estrategias y errores. Rastros de comprensión. Consecuencias para el modelo local definitivo y para la PCN3 (3ª aproximación).

T3.- Estudio Teórico 3

Los resultados del estudio empírico 2 permiten extraer conclusiones que, junto a las que se deducen del estudio empírico 1, evidencian la necesidad de modificar el marco teórico establecido en T2 y revisar y modificar las tareas y el cuestionario, en una tercera aproximación para ajustarlo a la nueva modificación. Se llevan a cabo en esta etapa los siguientes estudios:

T3.1 Comprensión de los Sistemas de Numeración.

T3.1.1 Análisis resultados PCN1 y PCN2. Conclusiones.

T3.2 Construcción de la Prueba 3 de acuerdo con el Modelo Local 2 (3ª aproximación).

E3.- Estudio Empírico 3

Como se pone de manifiesto en los capítulos 5 y 6, la prueba PCN3, aunque teóricamente equivalente a la prueba PCN2, se aplica a una muestra de alumnos de 2º del grado de Educación Primaria, durante el curso 2011/12 y posteriormente al desarrollo de la asignatura de Didáctica de la Aritmética, con lo que se puede realizar la comparación basada en los efectos del tratamiento didáctico de la asignatura. El análisis de resultados es más amplio y profundo en un nuevo acercamiento a la interpretación de la comprensión. Los estudios que se desarrollan en esta etapa son los siguientes:

E3.1 Aplicación de la PCN3 a una muestra posterior a la asignatura Didáctica de la Aritmética.

E3.2 Análisis de resultados.

E3.2.1.- Análisis cognitivo puntual: tipos de respuestas (correctas, incorrectas y sin respuesta). Consecuencias para niveles y subniveles del modelo local y para entrevistas.

E3.2.2.- Análisis cognitivo global. Estudio Descriptivo. Consecuencias para niveles y subniveles del modelo local y para entrevistas.

E3.2.3.- Análisis Semiótico: tipos de estrategias y errores. Rastros de comprensión. Consecuencias para niveles y subniveles del modelo local y para entrevistas.

E4.- Estudio Empírico 4 (Comparaciones globales y puntuales en resultados de los cuestionarios)

Se da un paso más en el proceso de aproximación mediante un análisis más completo de los datos obtenidos en etapas anteriores. En particular, se estudian aquí:

E4.1 Evolución cognitiva y semiótica de la comprensión de los Sistemas de Numeración. Comparación pre-post asignatura Didáctica de la Aritmética (PCN1, PCN2 y PCN3).

E4.1.1 Confirmación resultados de la PCN1 y PCN2. Interpretación en términos de los modelos.

E4.1.2 Comparación resultados PCN1 y PCN2 con la prueba PCN3. Estudios cuantitativo y cualitativo. Interpretación en términos de los modelos.

E4.1.3 Conclusiones para un estudio complementario de carácter semiótico y hermenéutico. Niveles y perfiles de comprensión. Vectores de comprensión;

E5.- Estudio Empírico 5

E5.1. Protocolo entrevistas con Análisis de Tareas basadas en el Modelo Local 2.

E5.1.1 Entrevistas individuales y estudio con estudiantes del Grado de Maestro de Primaria, antes y después de cursar la asignatura de Didáctica de la Aritmética.

E5.1.2 Entrevistas individuales y estudio con sujetos con formación matemática superior.

E5.2 Resultados y conclusiones. Dimensiones cognitiva, semiótica y hermenéutica.

La *Tabla 1.1* recoge la distribución por capítulos y epígrafes de las distintas etapas y sub-etapas del problema de investigación que se han indicado en los párrafos anteriores.

Tabla 1.1 Distribución por capítulos y epígrafes de las distintas etapas y sub-etapas que componen los estudios teórico-empíricos.

Etapas	Sub-etapas		Capítulo	Epígrafe
T1	T1.1	T1.1.1	2 y 3	
		T1.1.2	2	
	T1.2	T1.2.1	2 y 4	2.6 / 4.5.1
		T1.2.2	4	4.5.2.
		T1.2.3	4	
	T1.3		4	4.5.3
E1	E1.1		5	5.2.1
	E1.2	E1.2.1	5	5.3
		E1.2.2		
		E1.2.3	6	6.3
T2	T2.1	T2.1.1	4	4.6
		T2.1.2		
	T2.2		4	4.6.3
E2	E2.1		5	5.2.2
	E2.2	E2.2.1	5	5.4
		E2.2.2		
		E2.2.3	6	6.3
T3	T3.1	T3.1.1	5-6	5.6-6.3
	T3.2		4	4.7.3

E3	E3.1		6	6.3.3
	E3.2	E3.2.1	5	5.2.3
		E3.2.2	5	5.5
		E3.2.3	6	6.4
E4	E4.1	E4.1.1	5-6	5.6/6.3
		E4.1.2	5-6	5.7/6.4.2
		E4.1.3	5-6	5.9/6.5
E5	E5.1	E5.1.1	7	7.3.1/7.3.2
		E5.1.2	7	7.3.3
	E5.2		7	7.4

1.6 Fuentes de información

1.6.1 Recogida y selección de la información

El proceso seguido en la recopilación y selección de la documentación, cuyos detalles se exponen en los capítulos 2 y 3, a los que nos remitimos, se concreta en los siguientes puntos:

1. Método general empleado

El proceso de búsqueda de información que hemos seguido puede considerarse cíclico. Comienza con una fase inicial, caracterizada por su extensión y profundidad, en la que se obtiene gran parte de la documentación empleada en la investigación. Posteriormente, se completa esta base de referencias con sucesivas búsquedas puntuales llevadas a cabo con regularidad a lo largo del desarrollo de la investigación.

En cuanto al tratamiento de la información, hemos tenido en cuenta la recomendación sugerida por Hitt (1999) en relación con los tipos de documentación existente y las posibles formas de analizar la información que contienen. Con esta referencia presente, adoptamos un esquema básico de análisis constituido por las dos partes diferenciadas siguientes:

- *Resumen neutro del contenido* del documento. En él se destacan, entre otros aspectos y según sea el caso, las principales ideas relativas a los supuestos teóricos adoptados, la metodología de investigación empleada, los resultados y conclusiones obtenidos o las propuestas didácticas y recomendaciones curriculares sugeridas. Es decir, destacamos lo más relevante de cada tipo de documento según su contenido.
- *Análisis crítico de la información revisada* en cada referencia, centrado principalmente en las características de los resultados obtenidos, en las potencialidades y limitaciones manifestadas, en las analogías y divergencias surgidas con nuestros planteamientos y en las cuestiones relevantes para los propósitos de la investigación.

2. Principales fuentes consultadas

Las principales fuentes de información utilizadas y los criterios empleados en las búsquedas de documentos se pueden resumir del siguiente modo:

(a) Bibliotecas, hemerotecas y librerías. Se realizaron consultas periódicas en los fondos bibliográficos de la Facultad de Educación de las Universidades de Málaga, fundamentalmente en las secciones de Educación Matemática. Las publicaciones periódicas revisadas fueron específicas de Didáctica de la Matemática.

(b) Bases de datos especializadas en Educación Matemática. Se han consultado la base de datos alemana *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), tanto en versión escrita como digital a través de CD, la base de datos del *Educational Resources Information Center* (ERIC) a través de Internet y otras bases documentales "on-line" más reducidas, como la que ofrece el grupo Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA).

Para la exploración en estas bases de datos se han empleado distintos campos de búsqueda, destacando entre ellos *descriptor* y *año*. Los descriptores más utilizados fueron los siguientes[4]: Comprensión del Conocimiento Matemático, Competencia Matemática, Sistemas de Numeración, Sistemas de Representación Numérica, Formación inicial de Profesores de matemáticas, Formación inicial Maestro en Educación Primaria.

Por su parte, el rango de años osciló con regularidad entre 1990 y 1998 en la memoria de tercer ciclo y entre el 2002 y 2013 para la continuación de nuestro estudio.

(c) Otras fuentes. Además de las mencionadas, se ha hecho uso de los recursos ofrecidos en Internet por diferentes departamentos universitarios y grupos de investigación en Didáctica de la Matemática, en cuanto a la adquisición libre de documentos, preferentemente publicados.

Por otra parte, también hemos considerado las referencias bibliográficas incluidas en los distintos documentos y obras revisados como fuente para la localización de nueva información. De hecho, las referencias bibliográficas consultadas a lo largo de la investigación posibilitaron establecer vínculos de unión claves entre la documentación, constituyéndose por tanto como una de las principales fuentes empleadas para la obtención de información.

3. Formato, estructura y contenido de la información utilizada

La información recopilada se presenta bajo distintas formas. Así, se han utilizado principalmente:

- Libros, considerados en su conjunto o tan sólo capítulos concretos de ellos. En este grupo destacamos los "Handbook".
- Artículos de revistas especializadas, nacionales e internacionales. De las primeras, subrayamos *PNA*, *Enseñanza de las Ciencias, UNO*, *Epsilon, Suma y Cuadernos de Pedagogía*. De las segundas, *Educational Studies in Mathematics*, *Journal for Research in Mathematics Education, Journal of Mathematical Behavior, Mathematics Teacher, Recherches en Didactique des Mathematiques, For the Learning of Mathematics* e *Hiroshima Journal of Mathematics Education*.
- Actas de Simposios y Congresos. Entre ellas cabe señalar las correspondientes a los Simposios de la SEIEM (años 1997-2013) y a las conferencias de los grupos *Psychology of Mathematics Education* (15ª, 20ª, 21ª y 23ª Conferencias).

[4] Aunque se indiquen en español, todos los descriptores se emplearon en inglés en las bases de datos ZDM y ERIC.

En la sección de referencias bibliográficas de este informe se recogen los detalles de cada una de las reseñas consideradas en la investigación. En términos generales, los documentos revisados para la investigación proceden de distintas Áreas de Conocimiento como la Filosofía, la Sociología, la Psicología cognitiva, la Historia y la Epistemología de las Ciencias y de la Matemática y, sobre todo, de la Didáctica de la Matemática.

4. Limitaciones

Una parte considerable del tiempo la hemos dedicado a buscar y revisar información relacionada con el trabajo de investigación. Durante este proceso han aparecido documentos que a la postre no han resultado útiles, pero también somos conscientes de que se ha podido obviar alguno interesante. A pesar de ello, consideramos que se han seleccionado y revisado los que a nuestro juicio son los más relevantes para la investigación. En cuanto al idioma utilizado, sólo se han tenido en cuenta las referencias en español, inglés y francés, descartando el resto de documentos. No obstante, en base a datos diversos, siempre hemos tenido la impresión de que los documentos descartados no tenían la misma relevancia que los demás.

1.7 Principales aportaciones de la investigación

Entre las aportaciones que consideramos hemos aportado con nuestra investigación destacamos las siguientes:

1.- Modelo local para el estudio de la comprensión del Sistema de Numeración en estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria.
2.- Pruebas escritas y entrevista semiestructurada para el estudio de la comprensión del Sistema de Numeración Posicional en estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria.
3.- Detección de errores cometidos y estrategias utilizadas durante el desarrollo de las Pruebas y entrevistas.
4.- Rastros de comprensión, niveles de comprensión y perfiles de comprensión sobre el Sistema de Numeración Posicional en estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria.
5.- Situación inicial y evolución debida a la asignatura Didáctica de la Aritmética en Educación Primaria.
6.- Orientaciones para un Diseño Curricular del Sistema de Numeración Posicional en el Plan de estudios del Grado de Maestro en Educación Primaria.

1.8 Racionalidad del estudio

Creemos que el estudio tiene sentido por la proyección que dichos conocimientos tienen o pueden tener sobre la tarea profesional del maestro y porque se realiza al comienzo de un nuevo plan europeo que amplía los estudios a cuatro años. En una etapa posterior de la investigación se podrá abordar la mejora de los bajos niveles en comprensión del contenido matemático de los futuros maestros mediante procesos de reeducación "ad hoc" caracterizados por nuevas formas de ver y tratar los contenidos matemáticos sobre la base de la comprensión previa de los estudiantes así como de los errores y estrategias constatados en estudios como el que se presenta.

Adicionalmente, las siguientes premisas delimitan con precisión el problema planteado en forma de conjeturas plausibles y justifican sobradamente la importancia y pertinencia del estudio:

1.- El profesor/maestro de matemáticas debe dominar el contenido matemático que va a enseñar (condición necesaria pero no suficiente). El tipo de habilidad, el nivel de conocimiento, las relaciones, la profundidad, etc., están por delimitar y estudiar: ¿contenido formal de nivel superior?, ¿sólo lo que va a enseñar y con el mismo nivel?, etc.

2.- Los estudiantes de Magisterio comienzan sus estudios profesionales con una formación limitada y deficiente sobre los contenidos matemáticos que deberán enseñar, cometiendo errores persistentes y utilizando estrategias no adecuadas. Parece que la formación que presentan es una formación técnica, memorística, basada en fórmulas y procedimientos aprendidos y no es una formación significativa, relacional, analítica, de alto nivel, como sería deseable que fuera para enseñar a los estudiantes de Primaria.

3.- A pesar de ser un contenido meramente técnico y aparentemente sencillo y que parece lógico que debe ser dominado por todo el mundo, incluidos los futuros maestros, el tema del sistema de numeración decimal participa también de la situación descrita en el apartado 2, es decir, los estudiantes de Magisterio presentan una comprensión limitada sobre el mismo con errores importantes y con lagunas que pueden afectar gravemente a su labor profesional en el aula de Primaria.

Como cuestión secundaria para los propósitos del estudio, aunque no menos importante y útil para la propia formación de docentes, se encuentra el hecho de que los datos que se obtengan van a proporcionar información sobre la formación matemática de LARGA DURACIÓN que se alcanza con el proceso educativo ordinario y las experiencias vitales del sujeto. Se trata de conocimientos que los futuros maestros de Primaria han aprendido, construido y trabajado durante un largo período de tiempo que va desde los niveles de Educación Infantil, con el aprendizaje de los primeros números naturales, la escritura y la lectura de números, hasta los años de Bachillerato.

Pero, puesto que somos responsables de la formación de los futuros docentes y suponiendo que las afirmaciones anteriores son ciertas, queda en el aire una cuarta cuestión no menos importante que deberá ser abordada en una investigación posterior fundamentada en los datos proporcionados por el estudio que presentamos, que tiene que ver con la posibilidad de corregir, enmendar, paliar, mejorar, etc. la situación descrita en el punto 3:

4.- Es posible mejorar los niveles bajos en comprensión del contenido matemático de los futuros docentes mediante procesos de reeducación "ad hoc" caracterizados por nuevas formas de ver y tratar los contenidos. Las experiencias se han de diseñar teniendo en cuenta las características de la comprensión así como los niveles, errores y estrategias constatados en el estudio correspondiente a los puntos 2 y 3.

1.9 Modalidad de la investigación

La aproximación adoptada en el estudio:

- Es operativa: Las afirmaciones vendrán respaldadas por datos y resultados empíricos. No tiene sentido construir modelos descriptivos sobre algo inobservable y cuya bondad no puede ser contrastada empíricamente. En su lugar, es más fácil profundizar en aquellos aspectos que pueden ser observados por medio de tareas y situaciones que obliguen al sujeto a responder. Además, se busca expresamente la facilidad para realizar valoraciones objetivas y para realizar comparaciones.

- Es indirecta: Reconocemos las limitaciones del investigador para observar de manera directa la comprensión que tiene, emplea o manifiesta un sujeto acerca de un conocimiento matemático. No obstante, ésta puede ser inferida o abordada indirectamente a través del análisis de las acciones que lleva a cabo el individuo en su intento por resolver tareas problemáticas.

- Es fenomenológica: El carácter indirecto de la aproximación remite a los fenómenos, tareas y situaciones que dan sentido al conocimiento matemático en juego, lo que obliga a fundamentar todos los estudios de esta clase en el análisis epistemológico y fenomenológico (Puig, 1997) del conocimiento matemático.

- Es positiva: Nos interesa determinar, por ahora, lo que los alumnos comprenden y no lo que no comprenden o porqué lo comprenden o no. Por tanto, el interés por la identificación de obstáculos epistemológicos, por ejemplo, queda relegado en esta aproximación a un segundo plano.

- Es provisional y limitada: Las conclusiones serán siempre consideradas provisionales. El diagnóstico y la evaluación deben abordarse en términos de aproximaciones sucesivas a una situación cognitiva real que nunca vamos a poder determinar con precisión. Además, no es posible completar al cien por cien el campo de situaciones donde tiene sentido el conocimiento matemático cuya comprensión nos interesa estudiar.

CAPÍTULO 2

Sistemas de Numeración: antecedentes, fundamentos teóricos, currículo y formación de Maestros

2.1 Introducción

La investigación objeto de la presente tesis doctoral se desarrolla en torno a la comprensión y el dominio de los estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria sobre la representación de los números naturales y los Sistemas de Numeración. Pero para averiguar lo que una persona comprende y domina en torno a un contenido matemático es fundamental establecer claramente lo que ese contenido significa, cuál es su naturaleza, fenomenología y alcance, cómo se originó, cuál ha sido su evolución y cuál es su situación actual en relación con todos y cada uno de los escenarios en los que tiene un papel relevante. En el núcleo de estas aproximaciones se encuentra el análisis epistemológico y fenomenológico como punto de partida de la investigación y soporte del resto de consideraciones.

Junto al estudio detallado de los fundamentos del conocimiento matemático involucrado abordamos en el presente capítulo una revisión de los antecedentes sobre los sistemas de numeración. Utilizaremos en este caso una aproximación al Análisis Didáctico[1] como método que proporciona referencias precisas, específicas y operativas para afrontar con eficacia la fase de selección y tratamiento de los antecedentes bibliográficos en la investigación en Educación Matemática (González y Gallardo, 2013).

En el estudio que se presenta en esta memoria son cuatro las áreas de conocimiento que consideramos como fuentes de información básica: Historia y Epistemología de la Matemática, Aprendizaje y Cognición, Fenomenología y Enseñanza y estudios curriculares sobre los sistemas de representación de los números naturales. En el presente capítulo centramos la atención en los tres campos que se mencionan a continuación, para abordar el cuarto en el capítulo siguiente. En primer lugar, se describen los principales resultados del análisis realizado sobre la Historia y la Epistemología de los sistemas de numeración, incidiendo, en particular, en el análisis de la representación en matemáticas y en los aspectos históricos, epistemológicos y matemáticos de los sistemas de numeración usuales o sistemas de representación de los números naturales; en segundo lugar, se incluye un análisis de los estudios realizados sobre la fenomenología de los números naturales; por último, se centra la atención en los estudios curriculares sobre la formación

[1] Procedimiento metodológico no-empírico que analiza, relaciona e integra, a través de un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, información procedente de diversas áreas de investigación interrelacionadas por su objeto de estudio (González, 1998b, 1998c).

matemática relacionada con los sistemas de numeración en la Educación Primaria, en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y en la formación de los Maestros(as) de Educación Primaria. En el capítulo siguiente se aborda la cuestión central en la investigación, que gira en torno a los antecedentes sobre la comprensión del conocimiento matemático en general y de los sistemas de numeración en particular.

2.2 Representación y sistemas de representación

Desde un punto de vista elemental, la noción de representación supone reconocer una dualidad entre dos entidades distintas, por una parte el elemento representado (ausente) y, por otra, el elemento representante (que actúa en lugar del primero). Dicho de otra manera, se puede hablar de representación cuando intervienen dos entes relacionados: el objeto representante (palabra, símbolo, modelo, figura) y el objeto representado (objeto, concepto, contenido) (Kaput, 1987). Pero estas ideas, en apariencia sencillas, se complican cuando los objetos representados son entidades abstractas, como ocurre en matemáticas, o cuando se pueden encontrar distintos representantes que encarnan/describen/sustituyen parcialmente al objeto representado o cuando los representantes tienen distintas naturalezas. Surgen entonces preguntas como: ¿cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos? ¿Qué relación guardan con sus representaciones? ¿Cómo estas representaciones favorecen el aprendizaje del conocimiento representado? ¿Pueden éstas llegar a ser obstáculos para realizar el aprendizaje?

En los apartados que siguen se exponen los aspectos más importantes de los antecedentes y fundamentos teóricos en torno a la representación y los sistemas de representación en general. Estos planteamientos son necesarios para pasar a continuación a analizar, en sucesivos apartados, las representaciones en matemáticas y, en particular, el campo concreto de la representación de los números naturales.

2.2.1 Consideraciones generales sobre la representación

Charles S. Peirce (1987), considerado fundador del pragmatismo y padre de la semiológica moderna, defiende, frente a la concepción dualista, la estructura triádica básica que conforma la relación lógica de nuestro conocimiento como un proceso de significación en el que se articulan tres elementos:

- El signo o *representamen* como *"algo que esta para alguien en lugar de algo bajo algún aspecto o capacidad. Se dirige a alguien, esto es, crea en la mente de esa persona un signo equivalente o quizá un signo más detallado. Ese signo creado es al que llamo interpretante del primer signo. Este signo está en lugar de algo, su objeto. Esta en lugar de algo no en todos sus aspectos, sino solo en relación con alguna idea a la que a veces he llamado la base del representamen" (*Peirce. 1897).

- El objeto es aquello por lo que está el signo, aquello que representa.

- El interpretante es el signo equivalente o más desarrollado que el signo original; causado por ese signo original en la mente de quien lo interpreta. Este tercer elemento convierte a la relación de significación en una relación triádica, pues el signo media entre el objeto y el interpretante, el interpretante relaciona el signo y el objeto y el objeto funda la relación entre el signo y el interpretante.

Este tercer elemento, que no aparece en la perspectiva de Saussure (1973), es interpretado por Eco (1974), que prioriza la función comunicativa frente a la semiológica, como "*interpretante, sentido, significado, referencia al código, etc.*" (p.20). Para este autor, la estructura triádica tendría en su base al símbolo o *representamen,* puesto en relación con un objeto al que representa (referente), y en el vértice del triángulo estaría el interpretante, que se identifica con el significado o la referencia del signo (*Figura 2.1*).

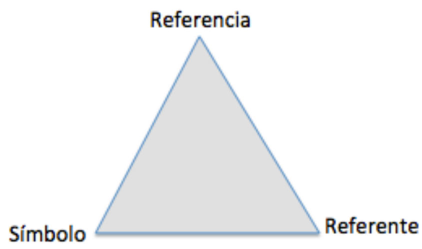


Figura 2.1 Estructura tríadica de la representación

Duval (1999) analiza la estructura del modelo diádico de representación, basado en la relación representante y representado, y la compara con el proceso de significación del signo lingüístico propuesta por Saussure (op. cit), basada en la relación entre el significante y el significado (*Figuras 2.2 y 2.3*); establece así los límites y las ambigüedades de éste al aplicarlo al modelo de la representación en el caso de algunos objetos conceptuales, como es el caso de la representación numérica. Estas estructuras semióticas propias de sistemas que tienen sus propias leyes de organización, como ocurre con la escritura de los números (escritura decimal, escritura fraccionaria) permiten una significación operatoria ligada a los tratamientos que se realizan al efectuar operaciones.

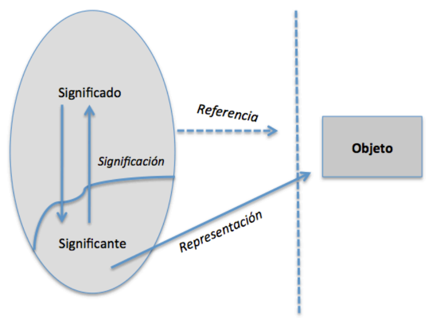


Figura 2.2 Estructura de la representación propuesta por Duval

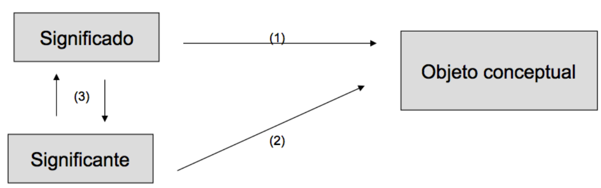


Figura 2.3 Esquema simplificado del modelo triádico de Duval

La estructura propuesta por Duval asume las consideraciones de Peirce y el triángulo de representación de Eco y completa las relaciones entre los tres elementos que participan en ellas. En las estructuras diádicas la relación de referencia está únicamente determinada por la flecha de representación que relaciona al significante con el objeto, mientras que en las estructuras de representación triádicas la referencia está subordinada por las relaciones de significación entre el significado y el significante.

Además de esta diferenciación entre los modelos triádicos de representación y el modelo lingüístico propuesto por Saussure, Duval presenta dos limitaciones mayores cuando se identifica la representación con la estructura del signo lingüístico: por una parte como cada sistema de representación tiene propiedades específicas que limitan intrínsecamente sus posibilidades de representación, se hacen necesarios diferentes sistemas y también la coordinación entre ellos; por otra parte, cuando se realiza esta identificación se olvidan dos funciones fundamentales de la representación, como son las de tratamiento y de objetivación además de la de expresión-comunicación característica del signo linguístico. La función de objetivación es esencial para analizar la relación entre los diversos registros y el funcionamiento cognitivo. En la *Figura 2.4* se describen estas dos funciones fundamentales de la representacion: las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas en un determinado registro, las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las traducciones entre registros de dos sistemas de representación distintos del mismo objeto, y la C corresponde a lo que Duval llama comprensión integrativa de una representación, que supone una coordinacion entre dos registros y está asociada a la funcion de objetivización o conceptualizacion de los objetos representados.

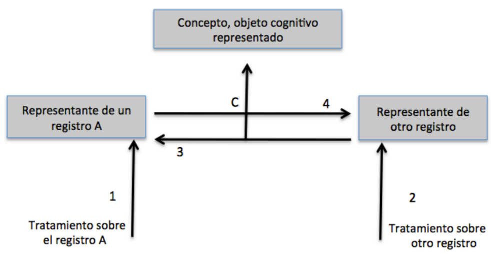


Figura 2.4 Tratamiento y objetivación de la representación.

Esta comprensión integrativa supondrá la existencia de dos planos en el analisis de la producción de conocimientos, de una parte los conocimientos construidos a través de la formación y el tratamiento de las representaciones semióticas y de otra el plano que corresponde al funcionamiento cognitivo que permite esta construcción, el cual implica a más de un registro y garantiza la diferenciación entre el representado y el representante.

En sintonía con la concepción de la representación como una estructura triádica, Kaput (1987) define el concepto de *sistema de representación* como una terna (S, F, c), donde S es un esquema simbólico, F es un campo de referencia y c es una correspondencia entre S y F. El autor considera además las siguientes entidades para que se pueda hablar de representación:

1. Los objetos representados
2. Los objetos representantes

3. Los aspectos del mundo representado que se representan
4. Los aspectos del mundo representante que realizan la representación
5. La correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.

González (1998) analiza el concepto de representacion ofrecido por Kaput y diferencia entre el carácter privado de toda representación y el carácter público de su expresión. Admite, sin embargo, que para determinados tipos de conocimientos, entre ellos los que corresponden al lenguaje ordinario y el conocimiento cientifico, existe un consenso en cuanto a su expresión y comunicación, lo que puede inducir a *cierta uniformidad* en las representaciones de todos los individuos. Asume que esta uniformidad no debe entenderse ni como identidad en las representaciones de la misma experiencia. ni como identidad entre representacion y su expresión, atendiendo al carácter singular e irrepetible de las experiencias de cada individuo. En el apartado siguiente se amplía la consideración de la representación como fenómeno cognitivo.

2.2.2 Representación y pensamiento: una interpretación[2]

El término representación es un término complejo y, por tanto, difícil de definir, como se pone de manifiesto en los intentos recientes por construir un marco teórico que permita abordar el uso de diferentes sistemas simbólicos (Kaput, Lesh, Behr, Post y otros en: Janvier, C., 1987).

La representación se puede entender desde una doble óptica: como una cierta relación entre la idea y el objeto representado, o bien, como la idea misma (Howard, R., 1987). Esta consideración refleja los dos sentidos básicos que se suelen señalar en epistemología. Nuestra valoración es que esta idea, además de ser problemática, en la medida en que la representación abarca algo más que los conceptos y relaciones, no es excesivamente útil, ya que hay que elegir una de las dos opciones y ambas se suelen utilizar por separado y de manera excluyente.

Por ello adoptaremos una interpretación particular del término representación como contenido mental y, por tanto, de acuerdo en líneas generales con las distintas acepciones que tiene el término en Psicología (González, 1995). Así, admitiremos que una representación es un modelo mental de carácter cognitivo que hace referencia y se sustenta en las experiencias del sujeto. El término experiencia es considerado en su acepción más general y se refiere tanto a las experiencias externas, en las que el individuo interactúa con el entorno, como a las experiencias internas, por las que el sujeto reflexiona, recuerda, contrasta conocimientos o crea e introduce relaciones y conocimientos nuevos; ambos tipos de experiencias se encuentran relacionadas y tienen como denominador común la actividad intelectual.

Al optar por la idea de representación como modelo cognitivo, hemos de modificar ligeramente los términos que propone Kaput, J. (Janvier, C., 1987; cap. 14, pp. 159-195) para definir el concepto de sistema de representación. Al diferenciar entre representación y expresión de una representación, diremos que un sistema de representación es una terna (S, F, c), donde S es un esquema simbólico en el mismo sentido dado por Kaput, F es un campo de referencia constituido por las relaciones, conceptos, significados y esquemas objetivos de la estructura subyacente que se pretende representar mediante el esquema simbólico, o dicho de

[2] Extraído de González (1995; 1998)

otra forma, el conjunto de conocimientos admitidos y compartidos por la comunidad de especialistas o por la comunidad de uso (conjunto de significados usuales que dotan de contenido al esquema simbólico), y c es una correspondencia específica que relaciona los elementos de S y de F. De esta manera, todo sistema de representación es un constructo controlado por la comunidad (es de dominio público), pertenece al ámbito de la conciencia compartida (tercer tipo de existencia del conocimiento), y es independiente del sujeto individual, en la medida en que incluso en el seno de la comunidad que lo emplea de forma regular puede haber diferencias individuales.

Al distinguir entre la representación y la expresión de una representación (*Figura 2.5*) es necesario tener en cuenta que las representaciones son observables externamente cuando el individuo responde, actúa o expresa de algún modo su pensamiento. En este caso, hablaremos de la expresión significante como expresión observable de representaciones o como manifestaciones externas que proporcionan información sobre las representaciones del sujeto. A su vez dichas expresiones significantes quedan materializadas en diversos soportes (escritos, gráficos, imágenes, etc.), pasando a integrar el universo de expresiones significantes susceptibles de comunicación y de ser medios para experiencias e interpretaciones por parte de otros sujetos. Igualmente, admitiremos que toda representación involucra dos factores: un contenido, constituido por una información que dota de significado al conocimiento, y un formato, que hace las veces de vehículo para su posible expresión observable.

En el ámbito educativo formal el alumno tiene experiencias con expresiones incluidas en diferentes sistemas de representación. La interpretación progresiva de dichas expresiones así como el aprendizaje de los términos y de las reglas que gobiernan su funcionamiento proporcionan al sujeto un dominio cada vez mayor en la dirección del status colectivo o público.

Los planteamientos anteriores concuerdan con la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1983), en la que se establece que un campo conceptual es un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones y en la que se considera la idea de concepto como una terna (S, I, R), donde:

S: conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto;

I: conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) que constituyen el concepto;

R: conjunto de representaciones simbolicas que pueden ser usadas para representar esos invariantes.

El primer conjunto de situaciones (S) corresponde al referente del concepto, el segundo (I) al significado del concepto y el tercero al significante. De nuevo aparece el triángulo epistemológico presentado por Eco (1974), Steinbring (1991) y Kaput (1987), formado por los tres elementos de la estructura triádica presente en la representación: objeto (referente-representado), signo (representante-significante) y referencia (sentido, significado).

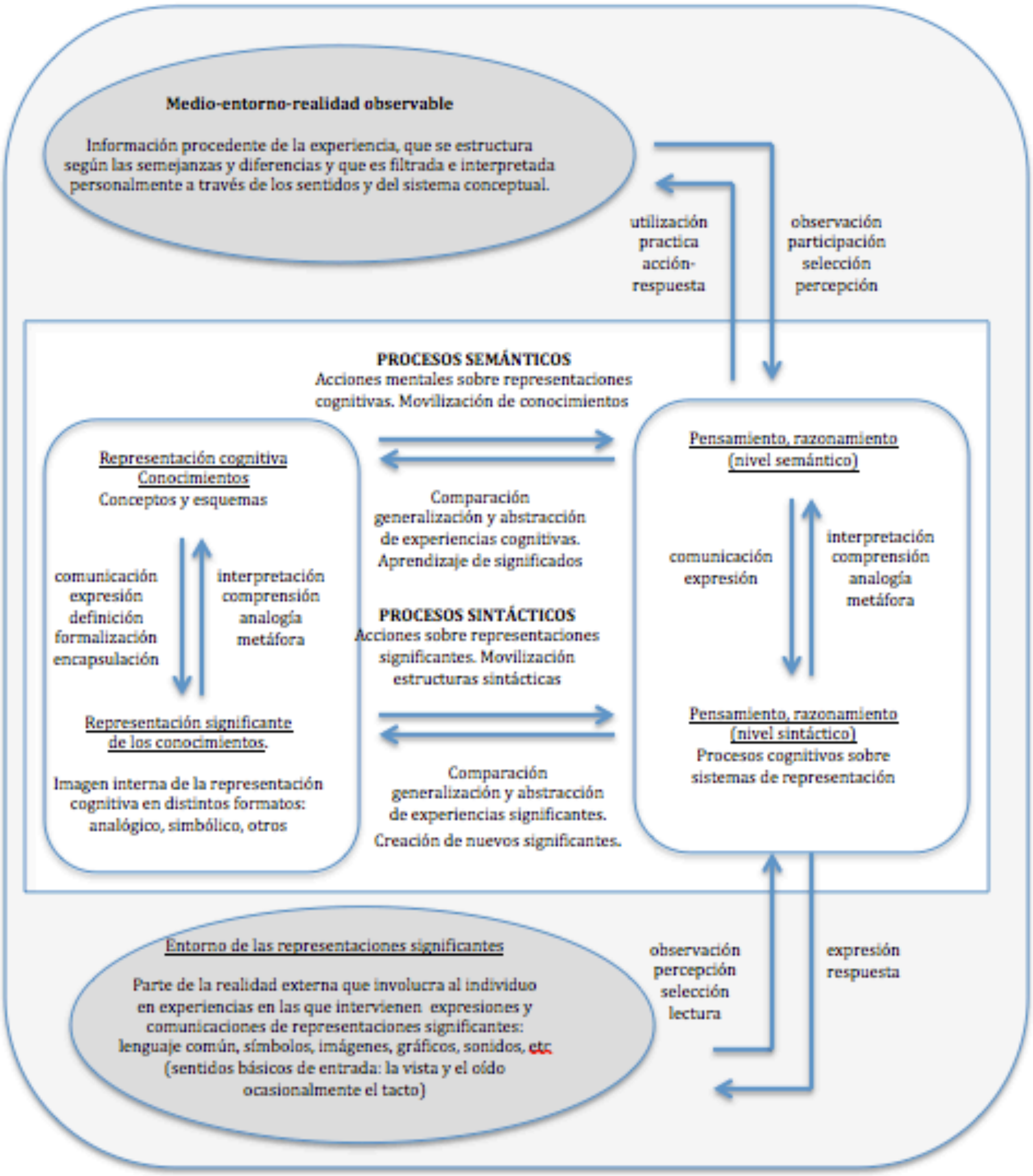


Figura 2.5 Tipos de representación y pensamiento

2.3 La representación en Matemáticas

El aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de estudio privilegiado para analizar actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas. Lo particular de este aprendizaje es la necesidad de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural: sistemas de escrituras para los números, expresiones algebraicas, figuras geométricas, gráficas, esquemas, etc. (Duval, 1995).

Si adoptamos el punto de vista cuasi-empirista para la naturaleza y el proceso de construcción del conocimiento matemático (Lakatos, I, 1978; Davis, P. J., Hersch, R., 1988; Tymoczko, T., 1986), completado desde el punto de vista de su existencia con los planteamientos recientes del constructivismo social (Ernest, P., 1991), la representación del conocimiento matemático, al igual que ocurre con el lenguaje ordinario, resulta de construcciones intelectuales formadas por representaciones procedentes de experiencias matemáticas con teorías y objetos matemáticos y sus expresiones significantes, y experiencias no matemáticas, incluídas las del lenguaje ordinario. Las representaciones significantes (constituidas por la conjunción entre significados y significantes, contenidos y formatos) no se producen aisladamente, sino mediatizadas por el sistema conceptual global del individuo, influenciadas por el conjunto de representaciones cognitivas y provocadas por las propias experiencias del sujeto.

Las afirmaciones anteriores concuerdan con el trabajo en los niveles elementales o con la producción del conocimiento en matemáticas aplicadas, pero no así con otras áreas y facetas del conocimiento matemático, en las que las experiencias no matemáticas reducen notablemente su protagonismo en una parte de la producción puramente formal. Pero esto, que favorece la consideración de la Matemática como un mundo cerrado de entidades formalmente postuladas al margen de la experiencia no matemática, sucede en aquéllos aspectos en los que no existe, *aparentemente,* ninguna aportación desde fuera del sistema; en cualquier caso parece dudoso que se pueda realizar una separación tan drástica entre los diversos tipos de conocimientos y representaciones coexistentes. Si esto fuera así, ¿cómo se podría explicar la concordancia con lo real manifestada en las numerosas aplicaciones del conocimiento matemático formal a fenómenos cotidianos?.

La representación significante del conocimiento matemático parece estar constituida por modelos privados (no observables) con características parecidas, e incluso coincidentes en muchos casos, de unos individuos a otros (a veces, las expresiones significantes son interpretadas de forma diferente por distintos individuos y, a veces, provocan representaciones idénticas). Pero donde se manifiesta una mayor unidad y coincidencia es en la expresión de dichas representaciones, en la utilización de los esquemas simbólicos en base a criterios convencionales y compartidos por los matemáticos profesionales. Un dominio del conocimiento matemático requiere de un cierto dominio simultáneo de varios sistemas de representación; unos son matemáticos y otros no matemáticos, como es el caso del lenguaje ordinario tanto oral como escrito.

2.3.1 La representación y las expresiones significantes en Matemáticas y en Educación Matemática[3]

Las expresiones significantes en Matemáticas constituyen una combinación de **signos y símbolos** matemáticos, dispuestos a veces en forma de **tablas, diagramas y gráficos** matemáticos, acompañados en ocasiones por algunas **palabras y frases** tanto específicas del lenguaje matemático como tomadas del lenguaje común. El soporte usual para dichas expresiones es el escrito, reducido por diversos motivos (elegancia, rigor, concisión, ausencia de ambigüedad, etc.) a lo estrictamente necesario para su correcta interpretación.

A tenor de las consideraciones expuestas en el apartado anterior y teniendo en cuenta que nuestra atención se centra en la representación escrita de información

[3] Consideraciones extraídas de González (1995, 1998, cap. 6, pp. 153 y sigtes.))

susceptible de ser considerada y estructurada matemáticamente, vamos a distinguir tres campos diferenciados que afectan al aprendizaje de las matemáticas: a) La representación verbal común o los registros verbales comunes; b) Las interacciones entre el lenguaje común y los registros matemáticos; c) La representación matemática o los registros matemáticos. El campo a) constituye una parte del dominio clásico de la Lingüística, el campo c) constituye una parte del dominio de la Matemática y el campo b) es de interés especial para la Educación Matemática.

En el ámbito educativo formal el conocimiento matemático se suele presentar al alumno de los primeros niveles en un doble formato:

i) Sintáctico-semántico, que incluye explicaciones en lenguaje común, enunciados de problemas y ejercicios en lenguaje común o en lenguaje mixto, haciendo siempre referencia a situaciones de la experiencia ordinaria fuera del aula; se trata en definitiva de combinaciones entre expresiones matemáticas y no matemáticas.

ii) Sintáctico puro, que incluye algoritmos, procedimientos matemáticos, ejercicios de aplicación sin referencia al lenguaje común, explicaciones y definiciones matemáticas sin referencia a la experiencia, utilizando términos del lenguaje común pero específicos de las matemáticas.

Un análisis más fino de las expresiones significantes de la matemática elemental, permite establecer **tres niveles de expresión**:

1.- **Elementos de primer orden**: elementos básicos simples aislados que podemos clasificar en tres grandes grupos: *signos y símbolos*, *palabras y expresiones lingüísticas simples* y *dibujos y gráficos simples.*

1.1.- ***Signos y símbolos**:* matemáticos (numerales, signos de las operaciones aritméticas, signo igual, de orden, etc.) y no matemáticos (letras como variables o que designan objetos matemáticos (funciones, conjuntos numéricos, ángulos, puntos, etc.) o no matemáticos (expresiones y abreviaturas para medidas y magnitudes físicas como temperaturas, longitudes, velocidad, tiempo, o económicas (moneda, interés, porcentaje, etc.)); paréntesis y otros signos lingüísticos).

1.2.- ***Términos y expresiones lingüísticas simples:*** con significado exclusivo o prioritariamente matemático (monomio, polinomio, circunferencia, círculo, suma, resta, fracción, número, diámetro, ecuación, calcular, raíz cuadrada, par, impar, etc.), con significado tanto matemático como no matemático (significados iguales: igualdad, función, variable, gráfico, mitad, doble, triángulo, cuadrado, ángulo, etc.; significados diferentes: recta, área, potencia, cateto, corona, interior, primo, entero, anillo, grupo, diferencia, positivo, negativo, etc.) y con significado exclusivo o prioritariamente no matemático (ganar, perder, temperatura, subir, bajar; palabras que se utilizan en aplicaciones prácticas y que son accesorias al contenido matemático).

1.3.- ***Dibujos y gráficos simples***.

- matemáticos: figuras geométricas elementales (triángulo, círculo, cuadrado, cubo, pirámide, etc.); representación gráfica de punto, recta, plano, segmento (radio de una circunferencia), altura de un triángulo, ángulos, regiones y superficies (cuadrículas y enrejados), movimientos mediante flechas (giros, traslaciones) o que indican sentido (ángulos, transformaciones sobre la recta numérica), expresión gráfica de longitudes y medidas, etc.

- no matemáticos: dibujos o fotografías de termómetro, botonera de ascensor, instrumentos de medida, dinero, juegos conocidos, objetos o imágenes alusivas a un tema (naipes, compás, dados, etc.), material didáctico (bloques multibase, ábacos, etc.), elementos gráficos simples de planos, esquemas no convencionales en matemáticas (organigramas).

2.- Elementos de segundo orden.

Expresiones que representan relaciones complejas entre elementos básicos o de primer orden dentro del mismo sistema de representación: ecuación, fórmula, tabla, igualdades aritméticas, textos en lenguaje común, diagramas de funciones, etc.

3.- Elementos de tercer orden.

Expresiones complejas tal y como se presentan en los libros de texto o en las clases de matemáticas (combinaciones de elementos de segundo orden): problemas, demostraciones, explicaciones, ejercicios, definiciones, etc.

Una parte importante de las tareas educativas, se centran en torno a la lectura e interpretación de expresiones matemáticas, pero donde realmente culmina el dominio sobre un conocimiento matemático es en las tareas que requieren de la interacción entre varios sistemas de representación y entre estos y los significados correspondientes de los conocimientos implicados.

2.3.2 Los procesos y las tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación en Matemáticas y en Educación Matemática

Algunas de las dificultades que los estudiantes tienen en Matemáticas y en particular en el campo de los sistemas de numeración están relacionadas con los procesos de **traducción** entre diferentes **representaciones** y entre la experiencia común y las ideas matemáticas, con especial atención hacia la representación escrita y haciendo una distinción entre dos grandes bloques de representación: los registros comunes y los registros matemáticos. A pesar de la importancia e interés creciente que esta cuestión tiene en el aprendizaje matemático, no existe actualmente un cuerpo sólido y coherente de información científica sobre el tema, sino contados trabajos realizados sobre áreas muy concretas[4].

Según Janvier, C. (1.987), *"los procesos de traducción son los procesos psicológicos que intervienen en el paso de un modo de representación a otro"* (cap. 3, pág. 27). Matizaremos y ampliaremos a continuación esta definición para utilizarla como soporte intuitivo, considerando que, para poder hablar de proceso de traducción, se deben dar las siguientes condiciones:

a) existencia de una situación matemática a traducir,

b) existencia de un sujeto capaz de llevar a cabo la traducción y

c) intencionalidad expresa por parte del sujeto de realizar la tarea.

Llamamos **proceso de traducción-interacción** en Educación Matemática, al conjunto de transformaciones y procesos psicológicos correspondientes que intervienen en el paso de un modo de representación a otro. De una manera más

[4]Ver entre otros, Janvier, C. (edit.) (1987).

concreta, podemos decir que un proceso de traducción-interacción está constituído por todas aquéllas acciones relacionadas entre sí y convenientemente secuenciadas que debe efectuar un individuo sobre cualquier situación-problema, expresada en uno o varios sistemas de representación combinados, para ser representada o expresada bien en los mismos sistemas de representación del enunciado original (lo que supone una simple *transformación sintáctica interna* del enunciado dentro de un contexto representacional determinado), bien en otro u otros sistemas de representación diferentes (lo que supone una verdadera *traducción o transformación sintáctica externa*), manteniéndose inalterada la información del mensaje inicial o, lo que es lo mismo, el contenido semántico de la situación-problema. Esto se puede expresar de otra manera diciendo que un proceso de traducción-interacción es aquél que trata de construir y relacionar situaciones matemáticamente equivalentes entre sí. En este sentido hablamos de interacción entre expresiones diferentes de la misma situación-problema, aunque equivalentes desde el punto de vista matemático.

Llamamos **tarea de traducción-interacción** en Educación Matemática a toda actividad de enseñanza-aprendizaje de matemáticas que comporte el desarrollo de un proceso de traducción-interacción entre sistemas de representación. Consideraremos como tareas de traducción-interacción las que se presentan aisladamente en los procesos didácticos (tareas de transformación, de lectura o expresión) y las que forman parte imprescindible de los procesos de demostración o resolución de problemas. Para que una tarea de este tipo pueda realizarse, la situación-problema debe ser transformada *sin que se produzca alteración de su contenido y significados*.

Las tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación constituyen instrumentos importantes para el hacer matemático, estrechamente relacionados con el lenguaje matemático (sintáxis) y con la red de significados que dan contenido a las representaciones correspondientes (semántica).

Los tipos de tareas bàsicas de traducción-interacción se delimitan al dar un corte transversal entre los diversos niveles o sistemas de expresiones significantes en matemáticas: simbólico (incluyendo fórmulas, signos y símbolos), gráfico, verbal (lenguaje común) y tabular, los cuales se combinan entre sí en el tercer nivel para dar lugar a expresiones complejas.

Janvier, Kaput, Lesh, Post y Behr (Janvier, C., 1987), establecen las principales tareas de interacción-traducción entre sistemas de representación escrita, las cuales constituyen sólo una parte del universo de tareas de traducción-interacción posibles, identificando los cinco tipos de sistemas de representación usualmente utilizados en el aprendizaje matemático y en la resolución de problemas de matemáticas y las correspondientes traducciones que se pueden establecer entre ellos (*Figura 2.6*):

1. Experiencias básicas o situaciones del mundo real.
2. Modelos manipulativos o modelos concretos: bloques multibase, regletas, ábacos, etc.
3. Dibujos y diagramas: material de Herbiniere-lebert,
4. Lenguaje hablado especifico o forma oral.
5. Símbolos escritos o representaciones escritas

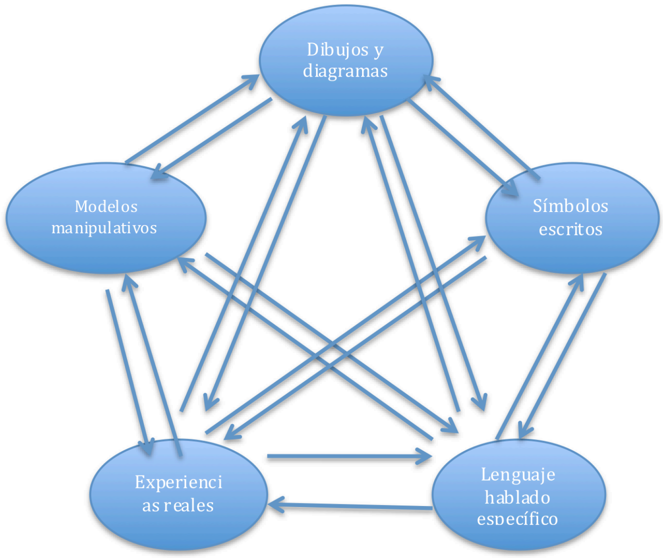


Figura 2.6 Sistemas de representación y tipos de traducción-interacción entre ellos (Esquema de Lesh, Post y Behr (1987))

Las dobles flechas indican la necesidad de realizar traducciones en ambos sentidos entre las distintas parejas de sistemas. Un ejemplo concreto de aplicación didáctica de este modelo en el caso del aprendizaje de las fracciones que se describe en Llinares y Sánchez (1988).

El marco particular que venimos describiendo es suficiente para encuadrar los aspectos específicos que se van a tratar en la investigación, en la que se emplea fundamentalmente un tipo concreto de tarea: *la transformación-interacción sintáctico-semántica interna dentro del contexto verbal escrito*, con la intervención de algunos símbolos numéricos. En este sentido, dejamos abierta la posibilidad de realización de futuras investigaciones en las que intervengan otros tipos de tareas.

2.3.3 Representación y comprensión en Matemáticas

Ante el extenso mundo de las representaciones en Matemáticas y en Educación Matemática, Pierce (citado en Bravari, V. 2006) postula que no hay pensamiento ni acción sin la mediación de los signos y ratifica que la realidad, el pensamiento y el entendimiento no ocurren sin mediación de los signos. Por su parte, Duval (1999) se plantea la siguiente cuestión: *"¿Es esencial esta utilización de varios sistemas semióticos de representación y expresión, o, por el contrario, no es más que un medio cómodo pero secundario para el ejercicio y para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales?"*. Aunque el autor considera que esta pregunta sobrepasa el dominio de las matemáticas, señala que resulta especialmente relevante para su aprendizaje y apunta algunas razones de peso para responder afirmativamente a la misma. Entre sus argumentos destacamos los siguientes:

1. No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Toda confusión entre objeto y representación provoca pérdida de la comprensión, de manera que los conocimientos adquiridos se vuelven inútiles, ya sea por olvido o porque permanecen como representaciones inertes sin posibilidad de provocar aplicaciones productivas (Duval, 1995).
2. Las representaciones semióticas (signos, escrituras decimales o fraccionarias, expresiones algebraicas, figuras geométricas, etc.), son el

medio para exteriorizar las representaciones mentales y hacerlas visibles. Las representaciones semióticas están, por tanto, subordinadas a las representaciones mentales y cumplen funciones de comunicación. Al mismo tiempo, el desarrollo de las representaciones mentales se produce como consecuencia de la interiorización de las representaciones semióticas, por lo que ambas representaciones no constituyen dominios totalmente diferentes.

3. Las representaciones semióticas no solo son indispensables para la comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma mediante las transformaciones realizadas sobre los sistemas semióticos asociados a los objetos matemáticos.
4. El progreso de los conocimientos se acompaña siempre de la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que coexisten con el lenguaje natural.

Atendiendo a los argumentos esgrimidos por Duval, podemos considerar dos tipos de representaciones. Por una parte las representaciones de naturaleza **externa**, que nos permiten comunicar, trasformar y conceptualizar tomando diversos registros o formatos: lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos, gráficos, objetos físicos (modelos), etc. Por otra, las representaciones mentales o **internas,** que son fundamentales para pensar y operar sobre las ideas matemáticas (Castro y Castro 1997). Ambos tipos de representaciones fueron mencionadas por Goldin y Kaput (1996), asignando el término "representación interna" a las que no son directamente observables pero que se pueden inferir a través de lo que dicen y hacen los estudiantes, y el término "representación externa" a los registros observables directamente, tales como palabras, símbolos, gráficos, dibujos, ecuaciones, etc.

Al amparo de esta categorización en dos tipos contrapuestos de representaciones, se han desarrollado numerosos estudios en el campo del enfoque cognitivo de la comprensión en Matemáticas. Así, por ejemplo, la comprensión del concepto de función y del campo conceptual de los números racionales, basadas en la adquisición y relación entre sus distintas representaciones, constituyeron estudios pioneros en señalar la importancia de las representaciones para analizar los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas. En el primero, Janvier (1978) realiza en su tesis doctoral un estudio detallado sobre las dificultades de la comprensión del concepto de función. En el segundo, Behr, Lesh, Post y Silver (1983) y, posteriormente, Carpenter, Fennema y Romberg (1993), realizan estudios sobre la comprensión de los números racionales considerando distintos sistemas de representación.

Paralelamente, las investigaciones sobre las representaciones simbólicas en numeración, realizadas en la década de los ochenta (Sierra, T. A., Gascón, J. 2011) dentro del grupo PME (International Group for the Psychology of Mathematics Education) y, posteriormente, la formación del grupo de trabajo sobre representaciones entre los años 90 y 95 en el seno del PME (Rico, 2009) supusieron un impulso importante en el desarrollo de los trabajos sobre representación y comprensión en matemáticas.

Son también de destacar en el campo de la representación en matemáticas, entre otras, las aportaciones de Duval en sus trabajos Semiosis y Noesis (1993) y Semiosis y Pensamiento Humano (1995), Janvier (1987), Hiebert y Carpenter (1992), Sierpinska (1994), Glasersfeld (1995), Cifarelli (1998), Goldin (1998), Kaput (1989, 1992) así como las aportaciones siguientes realizadas en el seno del grupo de investigación Pensamiento Numérico: Castro E. (1995), González, J. L.

(1995), Castro y Castro (1997), Fernández (1997), Ruiz (2000), Hitt (2001), Rico (1996, 2009), Claros, F. J. (2012), Sánchez, M. T. (2013) y Coriat, M. (2007).

La clasificación en representaciones externas e internas, aceptada por la psicología cognitiva, no resulta igualmente transparente para algunas corrientes de la Didáctica de la Matemática. Así, Kaput formula las siguientes preguntas:

¿Qué es la representación mental?, ¿De qué hablamos cuando decimos "representa" algo?, ¿Para quién?, ¿Cómo?, ¿Cuál es la diferencia entre la experiencia de una representación interna y de una representación externa?, ¿Una representación es externa en su consideración social o, por el contrario, es externa en su consideración personal? (Kaput, 1998).

Del mismo modo, la clasificación mencionada resulta problemática y poco operativa para el enfoque ontosemiótico, en el que se opta por reconvertirla en dos dualidades más útiles según dicho enfoque: la dualidad ostensivo-no ostensivo y la dualidad personal-institucional (Font, Godino y D'Amore , 2007).

En la investigación que presentamos se opta por una explicación cognitiva sobre la comprensión del conocimiento matemático y un planteamiento mixto acerca de su interpretación y valoración (capítulos 3 y 4) en el que se tienen en cuenta ambos tipos de representaciones y se avanza en una tercera dirección: la hermenéutica, para obtener una información a la vez amplia y profunda sobre la comprensión y el dominio de los estudiantes sobre el conocimiento estudiado.

2.4 Representación y estructura de los números naturales

Castro, Rico y Romero (1997), consideran los siguientes sistemas de representación para los números naturales:

1. El sistema numérico y aritmético: que resalta el carácter operativo de los números naturales y permite considerar cada número como un nudo en el que se entrecruzan una multitud de relaciones; una red compleja pero fuertemente conectada.

2. Los sistemas gráficos o sistemas que priorizan la visualización de su estructura ordinal como es el caso de la recta numérica natural, con la que se señalan y resaltan especialmente las ideas asociadas al orden total con primer elemento, al concepto de sucesor o siguiente, característico de los conjuntos numéricos discretos y de las construcciones axiomáticas, o las ideas asociadas a la infinitud y al carácter discreto de estos números que se continúa hasta llegar a la representación de los números reales (Coriat, M. Y Scaglia, S. 2000).

3. El sistema de las configuraciones puntuales, utilizadas para representar números figurados y que tuvieron su origen y desarrollo en el concepto de número de la escuela pitagórica. La idea básica de esta forma de representación es considerar cada número como una constelación de puntos distribuida en formatos poligonales que proporcionan informaciones importantes y exclusivas sobre los números. Por una parte visualizan aspectos aritméticos de los mismos: los números triangulares aparecen como suma de números consecutivos empezando por el 1; los cuadrados resultan del producto de un numero por si mismo, etc. Por otra parte, distintos números comparten la misma distribución espacial y el análisis aritmético de los mismos expresa una propiedad común a todos ello que se puede generalizar y expresar mediante identidades algebraicas.

En todos los tipos de representación descritos subyace la estructura común conocida como **sistema de numeración**, caracterizada por un conjunto de signos, relaciones, convenios y normas destinados a expresar de modo gráfico y verbal el valor de los números y las cantidades numéricas. Un sistema de numeración es, por tanto, un sistema matemático de representación de los números destinado a resolver problemas relacionados con el registro y la representación de cantidades mediante la introducción sistemática de marcas o símbolos simples que las representan. En la actualidad se usan predominantemente sistemas de numeración de carácter posicional, donde cada numeral o guarismo representa un valor distinto según la posición que ocupa en la cadena numérica.

En todo sistema de numeración se contemplan diversos elementos que lo caracterizan, tales como: la **base** del sistema, que se define como un convenio de agrupación de sus **unidades**, los numerales o **cifras** elementales que se utilizan, según la base, las **normas de combinación** de los numerales para formar los números y los dos **valores** que se asignan a cada cifra: su valor absoluto intrínseco y su valor posicional o relativo, que depende de la posición que ocupa en la expresión numérica.

Entre los diferentes sistemas de numeración destaca por su uso extendido el sistema de numeración decimal, constituido como una herramienta potente desde el punto de vista semiótico y operativo. Dicho sistema es el producto de una evolución milenaria en la que han participado todas las culturas que han habitado nuestro planeta y un instrumento hecho a medida para cuantificar, medir, clasificar, ordenar, operar, identificar, etc. Su conocimiento y dominio supone un hecho cultural y educativo de primer orden.

Pero, junto al sistema de numeración decimal, también existen otros registros como los mencionados al principio del presenta apartado, que complementan las potencialidades de éste y permiten la diferenciación entre lo que no es más que un buen registro y las propias nociones numéricas. Esos otros sistemas de representación proporcionan características distintas, quizás no tan potentes como la representación decimal, pero necesarias para la construcción y comprensión del concepto de número y del funcionamiento y estructura de la aritmética de los números naturales; algunas de ellas como las figurativas ayudaran al estudiante a enriquecer las representaciones internas y por consiguiente el significado de los objetos mentales y el manejo de las propias representaciones externas.

Centrando la atención en los sistemas de numeración usuales, podemos decir que en el sistema de numeración decimal coexisten dos formatos con características diferentes: el sistema de numeración **hablado o verbal**, que posee características que lo sitúan dentro de los sistemas multiplicativos ordenados con diversas irregularidades, y el sistema decimal **escrito**, que es posicional y se encuentra entre los más avanzados. Adaptando la estructura triádica y las relaciones entre registros que propone Duval (apartado 2.2.1), obtenemos el esquema que explica las funciones de transformación y comunicación entre significado y significantes y que constituye un primer intento de explicación de las relaciones entre estas dos representaciones diferentes (*Figura 2.7*).

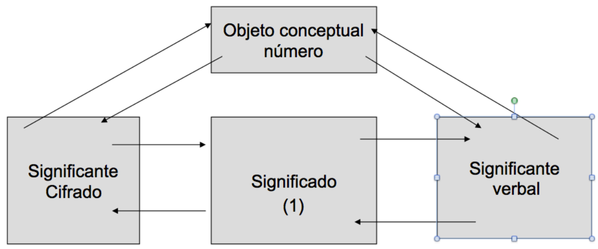


Figura 2.7 Adaptación del modelo de Duval con los significantes cifrado y verbal

En dicho esquema, el significado (referencia) está constituido por las ideas o principios aditivos y multiplicativos implícitos en ambos sistemas de representación, tales como: las cantidades de referencia, las ideas conjuntas de agrupamiento, unidades, decenas, centenas, la base del agrupamiento, etc. Este núcleo común, constituido por ideas, conceptos, estructuras, todas referidas a aspectos relacionados con el campo conceptual de los números naturales, lo podemos englobar bajo el término "sentido numérico" y considerarlo como el conjunto de representaciones internas o referentes cognitivos comunes que pueden ser representadas en los dos registros mencionados, verbal y escrito. Pero dicho núcleo opera y está relacionado con otros registros o representaciones de los números naturales que completan la noción de "sentido numérico" y configuran el modelo que se representa en la *Figura 2.8*.

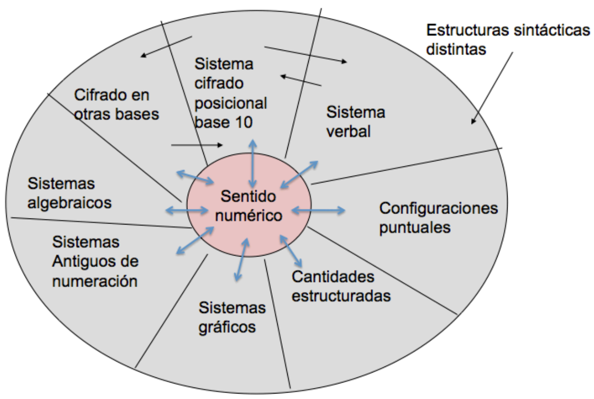


Figura 2.8 Modelo explicativo de las traducciones entre las representaciones numéricas

Resumiendo, algunas características del modelo descrito son las siguientes:

- El anillo interno es el núcleo común de las ideas, significados o aspectos semánticos del concepto de número natural, compartido por todos los sistemas de representación, que caracterizan a lo que se entiende como "sentido numérico".
- El anillo externo es el de las estructuras sintácticas, representaciones externas, de los diferentes sistemas de representación.
- El núcleo central, "neurona" interna de la mente del individuo, tiene múltiples conexiones con el exterior a través de los diferentes sistemas de representación.
- No todos los sistemas de representación están al mismo nivel; no todos los sistemas priorizan las mismas ideas; cabe preguntarse: ¿ se podría encontrar una graduación en la comprensión y en el uso de los mismos?
- Se puede pasar de un sistema a otro, bien de forma automática (sintáctico) o bien a través de este núcleo común de significados. El paso automático es de

naturaleza técnica o de reproducción mientras que el paso por el núcleo de significados puede necesitar de un tipo comprensión diferente.

El modelo explica la subestructura del número natural orientada a su representación, en la que se priorizan las traducciones entre las distintas representaciones como medio para la función de objetivación y conceptualización de la estructura numérica. Dicho modelo se puede extender a un modelo más completo si atendemos a todas las subestructuras que componen el sistema de los números naturales, entre las que destacan: la subestructura de orden, la aditiva, la multiplicativa y la factorial, entre otras (Rico, L. y col., 2008). Todas ellas compartirían como eje común vertebrador lo que hemos considerado como “sentido numérico” (*Figura 2.9*).

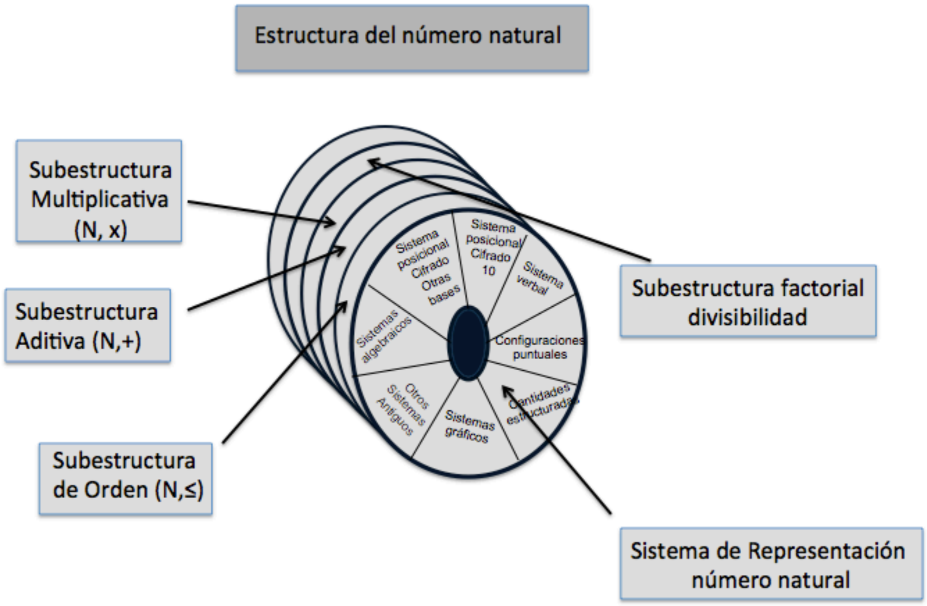


Figura 2.9 Estructura compleja del número natural

En el estudio objeto de la presente tesis doctoral se utilizarán las estructuras descritas para determinar los niveles y categorías de tareas que constituyen el fundamento para la construcción de los instrumentos de recogida de datos para interpretar y valorar la comprensión de los estudiantes sobre los sistemas de numeración (ver capítulos 4 y 5).

En los apartados que siguen se revisan algunos antecedentes y fundamentos teóricos de los sistemas de numeración en relación con su evolución histórica y sus estructuras fenomenológicas, epistemológicas y formales. A continuación, en la segunda parte del capítulo, se realiza una reflexión amplia y profunda sobre los aspectos curriculares y didácticos del tema tanto a nivel de Educación Primaria como en el ámbito de la formación de Maestros del grado de Educación Primaria.

2.5 Análisis histórico y epistemológico de los sistemas de numeración

En los apartados que siguen se aborda, por este orden: una breve reflexión sobre los sistemas de numeración en los orígenes de la aritmética desde el punto de vista de Caramuel (1607), algunas consideraciones formales sobre los sistemas de numeración incluyendo una breve descripción de los principales tipos de sistemas y una revisión de las principales clasificaciones de los sistemas de numeración aparecidos en diferentes culturas a lo largo del desarrollo histórico del tema.

2.5.1 Los sistemas de numeración y el origen de la Aritmética

Desde hace 5000 años la gran mayoría de las civilizaciones han contado en unidades, decenas, centenas, millares etc. de la misma forma que seguimos haciéndolo hoy. Sin embargo la forma de escribir los números ha sido muy diversa y muchos pueblos han visto impedido su avance científico por no disponer de un sistema eficaz que permitiese el cálculo. El sistema actual fue inventado por los indios y transmitido a Europa por los árabes, siendo su gran logro la introducción del concepto y símbolo del cero con sus conocidas ventajas: sólo diez símbolos para representar cualquier número por grande que sea y la posibilidad de simplificar la forma de efectuar las operaciones.

Ya en el siglo XVII se tiene constancia por escrito de intentos de generalización de los sistemas de numeración. En la magna obra *Mathesis Biceps (1670)*, del filosofo y matemático español Juan Caramuel Lobkowitz, y mas concretamente en su *Meditatio Proemialis*, reflexiona sobre el origen de la aritmética y argumenta lo siguiente:

> *Mas, una vez inventada (esto es, fundada) la sucesión de los números que tienden al infinito, el PROARITHMETES (aquel que por primera vez quiso gobernar los números por leyes) se encontró en una bifurcación; pudo seguir dos vías, a saber: la recta o la circular. Esto es : 1) Bien la RECTA, que proyectada al infinito nunca volviera al comienzo, como la que tuvieron los antiguos romanos, según atestiguan los clavos fijados anualmente para contar los años, sobre los cuales trata Olao Magno en su Literetura Runica, cap.18, y cita a Virgilio Polidoro (De rerum Inventoribus, libr. 1, cap. 19), quien dice: << En la pared del altar de Júpiter, en la parte que daba al templo de Minerva fijaban un clavo cada año para así llevar cuenta del número de años>>.... Y añade que estos clavos eran fijados en el templo, primero por los cónsules y posteriormente por el dictador, no sin ley, sino con ritos y ceremonias... Por tanto a cada año le correspondía un clavo, y no estaba entonces inventado el arte mediante el cual un solo clavo expresaba diez, cien o mil años. Esta sucesión perpetua de números sin vuelta atrás es la que sigue Juan Neper en sus logaritmos: éste, dividiendo al infinito el número 100.000, cada vez en cien mil partes, toma una vía por lo que nunca puede volver al comienzo. 2) Bien la CIRCULAR, en la que se traza un circulo y, una vez agotado, se recorre de nuevo en fases cada vez mayores pero proporcionales, y siempre, al final, volviendo al comienzo.*

La primera vía resultaría inefable. En efecto, ¿ quién podría dar nombres a unos números que discurrieran al infinito y nunca volvieran al comienzo? ¿Quién, si por casualidad tuviesen nombre por obra divina, podría recorrerlos en toda la eternidad? ¿ Quién, en caso de recorrer cien mil, sería capaz de retener sus nombres? ¿Quién, en caso de retenerlos, podría someterlos a las leyes y preceptos?
El PROARITHMETES debió, pues, seguir la segunda vía. Su primera tarea consistió, por tanto, en tomar una determinada multitud, numerar sus unidades, y, luego, tomando toda la multitud como unidades, numerar en una segunda vuelta tantas multitudes cuantas unidades había establecido en la multitud, y luego, acabado el período, tomar de nuevo como unidad toda aquella cantidad y comenzar otra vez a recorrer el período y a numerar. Éste es el prototeorema que debió proponerse; pues, al contrario, si los números fluyesen al infinito sin distinción de períodos, habría un confuso caos, y la ciencia de numerar no podría contarse entre las Matemáticas.
Mas ¿cuántas unidades debió elegir el PROARTHMETES para el primer período a fin de proceder con seguridad y con facilidad? Bien, ni demasiado pocas ni demasiadas; en todo caso, siempre habría podido escoger las que hubiese querido. Ciertamente, caso de inclinarse por demasiado pocas, habría instaurado una Aritmética molesta, debido a la excesiva frecuencia de los recursos; caso de inclinarse por demasiadas, habría instaurado una Aritmética ardua y difícil, pues las combinaciones deben ser tales que no perturben ni superen a la memoria humana.
De lo anterior se desprende que, así como puede haber diversas lenguas entre diversos pueblos, así también puede haber diversas Aritméticas. Imagina, pues, que un pueblo pueda proceder por cuaternarios, cuaternarios de cuaternarios, etc., y otros, por senarios, senarios de senarios, etc., pues la cantidad de unidades que deben constituir el primer período depende, no de la naturaleza de la cosa, sino del arbitrio del inventor. Así pues, para exponer más ampliamente esta teoría consideremos algunos números que pudieran ser tomados como período.

Las sabias disquisiciones de J. Caramuel continúan con el análisis de las Aritméticas Binarias, Ternaria, Cuaternaria, Senaria, Septenaria, Octonaria, Nonaria, Denaria, Duodenaria y Sexagesimal. En cada una de estas Aritméticas justifica la elección de la base y apunta el posible desarrollo de cada una con reflexiones tan profundas, interesantes y novedosas, para los tiempos en que se hicieron, como por ejemplo las relacionadas con la confección de un sistema de pesas y medidas apoyadas en el sistema adoptado. Cuando se pregunta por la Aritmética a elegir, argumenta:

Hoy día las pesas y las medidas de las cosas se fijan de manera tan variada, no sólo en regiones diversas, sino en una misma ciudad, que no podría aducir una regla general, pues una Aritmética que fuese conveniente para la Astronomía podría resultar no apta para la Geodesia; y la que resultase cómoda para la numeración de monedas podría no parecer oportuna para las pesas y medidas.
Si nos hallásemos en el comienzo mismo del mundo, antes de que fuesen determinadas las pesas y medidas, cuando Adán había de enseñar a sus hijos

los primeros cánones de las ciencias (pues, como dice Suidas, PANTON TON´EURETES PROTOPLASTOS`ESTI, << de todos ellos fue inventor el primer hombre>>, cuando, evidentemente, no había nadie que pudiese enseñar nociones falsas ni verdaderas de modo incongruente, si Adán te pidiese consejo, quizá le persuadirías para que tomase como primer período 12 unidades, ya que el DODEKAS admite más divisores que el DEKAS. Pero yo inmediatamente recomendaría que tomase alguna cosa determinada e incorruptible (una esfera de mármol o de hierro, por ejemplo) que con su diámetro y su peso sirviese de medida para las demás cosas. Y, dado que el hierro y el mármol, cuando se dedican a uso humano y se manejan con frecuencia en balanzas, se gastan, le aconsejaría que hiciese dos esferas iguales de la misma materia: que una de ellas la usasen como medida de longitud y de peso, que la otra la guardasen, para que, si la primera se desgastase con el correr de los siglos, pudiera restablecérsela a su estado normal...

Una vez tomado un pie como medida primer y fundamental, yo establecería que la esfera antes elegida tuviese un pie de diámetro; y, como aquella, lo dividiría y subdividiría en 12 partes, y asimismo lo multiplicaría una vez y otra vez por 12. Por lo tanto, de ahí podrían tomarse las medidas de telas y de cuerdas; también a partir de ahí se determinarían las distancias de los lugares en la tierra.
Tomaría el peso de aquella esfera para determinar el peso de los otros cuerpos, dividiéndolo y multiplicándolo por 12.
Para la medida de los líquidos buscaría agua de una determinada fuente en un determinado lugar; hallaría la cantidad de agua que igualase al peso de la esfera susodicha, y tomaría como medida primaria de los líquidos el vaso que contuviera esa agua, y procediendo análogamente dividiría y multiplicaría dicha medida por 12.

...

En este texto encontramos la constatación de las conexiones entre las dos estructuras matemáticas: la que permite la cuantificación de las magnitudes discretas y la de las magnitudes continuas. La relación estrecha entre los sistemas de numeración y los sistemas de medidas está justificada por el hecho de considerar a los sistemas de numeración como sistemas homogéneos de medidas de la cantidad discreta, formados por unidades, decenas, centenas, etc.

Pero el verdadero avance se produce cuando las matemáticas despojan a las herramientas cuasi-matemáticas utilizadas por la humanidad de los elementos que podemos llamar superficiales y anecdóticos para encontrar las estructuras más profundas que las caracterizan. Este proceso permitirá generalizar y encontrar, en pura entelequia, otras organizaciones que, aunque sin utilidad aparente, van a permitir y favorecer el progreso humano. En el caso concreto que nos ocupa, la matemática ha construido otras representaciones numéricas que actualmente son de suma utilidad para numerosos campos de conocimiento, como la informática, las telecomunicaciones o la economía, entre otros. Veamos a continuación unas breves reflexiones sobre el tratamiento matemático de los sistemas de numeración.

2.5.2 Algunas consideraciones formales sobre los sistemas de numeración

Las disquisiciones anteriores podemos considerarlas como algunos de los primeros intentos de organizar, formalizar y por tanto matematizar los sistemas de numeración, pero no es hasta mucho más tarde, ya en el siglo XX, cuando corrientes formalistas que pretenden organizar todo el saber matemático para evitar contradicciones y paradojas, cuando se formalizan estas ideas. No es nuestra intención realizar un recorrido por los distintos intentos, ni tampoco hacer una exposición de los distintos resultados. Por ello nos limitaremos a describir una formalización de los sistemas de numeración tomando las ideas de Antonio-Cândido Capelo, Mario Ferrari y Giovanni Padovan expuestas en el libro “I sistemi di numerazione” (1980).

Para estos autores, un sistema de numeración se puede definir como un conjunto infinito de enteros:

$$S= \{u_0, u_1, u_2, ... \} \qquad \text{tal que } u_0 = 1, \text{ y } u_n < u_{n+1} \quad \forall n\geq 0$$

Un sistema de numeración es simple si existe una sucesión $\{b_n\}$ de números naturales tales que $u_{n+1} / u_n = b_{n+1}$, $\forall n \geq 0$. En caso contrario decimos que es complejo (u_{n+1} / u_n no es natural para algún n).

Entre los sistemas de numeración simples se encuentran, nuestro sistema decimal y los sistemas polinómicos como generalización de aquél (en ellos se cumple: $u_{n+1} / u_n = b$, para cualquier n). Entre los sistemas complejos podemos citar el sistema de las décadas, el sistema de Fibonacci, el de los cuadrados perfectos y el generado por sucesiones numéricas, del que es un ejemplo particular el sistema de numeración factorial.

A partir de la definición de sistema de numeración, introducimos la idea de *representación de un número natural en un sistema de numeración* del siguiente modo:

Si S es un sistema de numeración y X un número natural mayor o igual que 1, llamaremos representación de X en el sistema S a una (n+1)-upla de números naturales $R = (q_o,..., q_n)$, tal que:

$$X = q_n u_n + ...+ q_o u_o \,, \text{ con } q_n \neq 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq q_i < u_{i+1} / u_i \qquad (i = 0, 1, 2, ...,n)$$

En el caso en que se cumpla: $q_i u_i + ...+ q_o u_o < u_{i+1}$ (i = 0, 1, 2, ...,n) diremos que esta representación es fundamental.

Como se puede observar, un número puede permitir varias representaciones dependiendo del tipo de sistema utilizado. El siguiente teorema asegura si existen representaciones fundamentales para cada número y propone un método para obtener representaciones para un número dado.

TEOREMA 1: Sea $S = \{u_0, u_1, u_2, ...\}$ un sistema de numeración y $X \geq 1$ un número natural. Se puede afirmar que:

- X admite una y sólo una representación fundamental en S.
- Si S es un sistema simple, cada representación es fundamental y, por tanto, cada número natural X admite una y sólo una representación fundamental.

Demostración:

Existencia: Sea u_n el mayor elemento de S tal que $u_n \leq X$.

Dividiendo X por u_n obtendremos como cociente q_n y como resto r_n, donde $0 \leq r_n < u_n$

Si volvemos a dividir r_n por u_{n-1} obtenemos como cociente q_{n-1} y como resto r_{n-1} , $0 \leq r_{n-1} < u_{n-1}$. Continuando el procedimiento podemos escribir:

$$X = q_n u_n + r_n$$
$$r_n = q_{n-1} u_{n-1} + r_{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{i+1} = q_i u_i + r_i \qquad \text{con } 0 \leq r_i < u_i \qquad (i=0, 1, \ldots, n)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$r_2 = q_1 u_1 + r_1$$
$$r_1 = q_0 u_0 = q_0$$

Sustituyendo r_1 en la expresión de r_2 , r_2 en la de r_3, ..., r_n en la de X, obtenemos:

$$X= q_n u_n + \ldots + q_o u_o$$

Asimismo, mediante este procedimiento de sustituciones podemos obtener:

$$r_{i+1} = q_i u_i + \ldots + q_o u_o \quad (i= 0,\ldots,n; \text{ con } X= r_{n+1})$$

Como $r_{i+1} < u_{i+1}$, sustituyendo en la expresión anterior obtenemos:

$q_i u_i + \ldots + q_o u_o = r_{i+1} < u_{i+1}$, y por tanto: $q_i u_i + \ldots + q_o u_o < u_{i+1}$ $(i= 0,\ldots,n)$

Por lo que queda demostrada la existencia de la representación y que esta es fundamental.

Unicidad: Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que X tiene en el sistema S dos representaciones fundamentales distintas $R = (q_o,\ldots,q_n)$ y $R` = (p_o,\ldots,p_m)$.
La primera cuestión a resolver es la de que necesariamente $m = n$, pues si por ejemplo $m > n$, por ser R y R` dos representaciones fundamentales:

$$X= q_n u_n + \ldots + q_o u_o \; ; \qquad u_n \leq X < u_{n+1}$$

$$X= p_m u_m + \ldots + p_o u_o \; ; \qquad u_m \leq X < u_{m+1}$$

Pero si $m > n$; $X \geq u_m \geq u_{n+1}$, y por tanto:

$$X= q_n u_n + \ldots + q_o u_o \geq u_{n+1}$$

Lo que significaría que R no es representación fundamental en contra de lo supuesto y por lo tanto m=n.

Por lo tanto $R = (q_o,\ldots,q_n)$ y $R` = (p_o,\ldots,p_n)$ y las expresiones anteriores se expresarían como:

$$X= q_n u_n + \ldots + q_o u_o \; ;$$

$$X= p_n u_n + \ldots + p_o u_o \; ;$$

Restando miembro a miembro, obtenemos: $0 = (q_n - p_n) u_n + \ldots + (q_o - p_o) u_o$
Si ambas representaciones son distintas, debe existir un i de manera que $q_i \neq p_i$ (supongamos el mayor i que cumple esta condición) y supongamos igualmente que $q_i < p_i$. Tenemos por tanto:

$$0 = (q_i - p_i)u_i + ... + (q_o - p_o)u_o$$

Despejando obtenemos:

$$(p_i - q_i)u_i = (q_{i-1} - p_{i-1})u_{i-1} + ... + (q_o - p_o)u_o$$

Y como $q_i < p_i$, resulta

$$u_i < (p_i - q_i)u_i = (q_{i-1} - p_{i-1})u_{i-1} + ... + (q_o - p_o)u_o < q_{i-1}u_{i-1} + ... + q_o u_o$$

lo que contradice el hecho de ser R una representación fundamental de X en S.

Queda por demostrar que si S es un sistema simple, toda representación es una representación fundamental. O lo que es lo mismo si R es una representación de X se cumple $q_i u_i + ... + q_o u_o < u_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, ...,n)$.

Lo haremos por inducción completa:

La afirmación es cierta para i=o, puesto que $q_o u_o < u_1$. Supongamos cierta para i=k:

$$q_k u_k + ... + q_o u_o < u_{k+1}$$

sumando $q_{k+1}u_{k+1}$ a cada uno de los miembros de la igualdad anterior, resulta:

$$q_{k+1}u_{k+1} + q_k u_k + ... + q_o u_o < u_{k+1} + q_{k+1}u_{k+1}.$$

Deberíamos demostrar que : $q_{k+1}u_{k+1} + q_k u_k + ... + q_o u_o < u_{k+2}$

Para esto bastaría con demostrar que: $u_{k+1} + q_{k+1}u_{k+1} < u_{k+2}$, y dado que S es un sistema simple, se cumple:

$$u_{k+2} = b_{k+2}u_{k+1} \text{ , pues } (u_{k+2} / u_{k+1} = b_{k+2})$$

bastaría demostrar : $1 + q_{k+1} \leq b_{k+2}$

Que se deduce inmediatamente del hecho de ser:

$$q_{k+1}u_{k+1} + q_k u_k + ... + q_o u_o < u_{k+2} \Rightarrow q_{k+1}u_{k+1} < u_{k+2} \Rightarrow q_{k+1} < u_{k+2} / u_{k+1} = b_{k+2}$$

y por ser q_{k+1} y b_{k+2} dos cantidades naturales.

2.5.2.1 Sistemas de numeración simples

De entre los sistemas de numeración definidos anteriormente, destacan por su utilidad los siguientes sistemas de numeración:

Sistema polinómico

Es un sistema de la forma: $S = \{1, b, b^2, b^3 , b^4 , ..., b^n \}$ y dado que $u_{n+1} / u_n = b$ y además se cumple $0 \leq q_i < u_{i+1} / u_n = b$ $(i = 0, 1, 2, ...,n)$, esto supone que $q_i \in \{0, 1, 2, ..., b-1\}$, por lo que los sistemas polinómicos están caracterizados por la base del sistema b y por el conjunto de cifras $C = \{0, 1, 2, ..., b-1\}$, que corresponden a los distintos valores de q_i.

Dado un número natural $X \geq 1$, llamamos representación de X en el sistema (b, C) , a la (n+1)-upla $(q_o,...,q_n)_b$ tal que:

$$X = \Sigma q_i b^i \text{, con } q_i \in C \text{ y , con } q_n \neq 0 \ (n \geq 0), \ i \in \{0, 1, 2, ...,n\}.$$

Dado que los sistemas polinómicos son sistemas de numeración simples, es inmediato el siguiente teorema, que se conoce en el estudio clásico de los sistemas de numeración como teorema fundamental.

Teorema 2: Todo número natural $X \geq 1$ admite una y sólo una representación en un sistema de numeración polinómico (b, C).

La demostración del teorema 1, nos ofrece un buen procedimiento para encontrar la representación de cualquier número natural en cualquier sistema polinómico.

2.5.2.2 Sistemas de numeración complejos

Sistema de las décadas.

Es el sistema definido de la forma: S= {1, 10, 20, ..., n10,... }. Se trata de un sistema complejo, dado que u_{n+1}/ u_n no es siempre un número natural, y en el que las cifras para las unidades puede tomar los diez posibles valores, mientras que para el resto tiene carácter binario, ya que:

i=1, $0 \leq q_1 < u_1/ u_o = 10/1 = 10$

$\forall i \neq 1$ $0 \leq q_i < u_{i+1}/ u_i = (i+1)c/ic = i+1/i = 1+ 1/i < 2 \Rightarrow q_i \in \{0, 1\}$

Por ser un sistema complejo, y en virtud del Teorema 1, cualquier número natural admite varias representaciones, de las cuales una, y solo una de ellas, será fundamental.

Por ejemplo: El número 65 se puede representar:

65 = 1x60 + 0x50 + 0x40 + 0x30+ 0x20 + 0x10 + 5 o también (1, 0, 0, 0, 0, 0, 5)

65 = 1x50 +0x40 + 0x30+0x20 +1x10 +5 o en forma reducida (1, 0, 0, 0, 1, 5)

65 = 1x40 + 0x30+1x20 +0x10 +5 o en forma reducida (1, 0, 1, 0, 5)

65 = 1x30+1x20 +1x10 +5 o en forma reducida (1, 1, 1, 5)

De todas ellas sólo la primera cumple la condición de ser representación fundamental pues:

1x60 + 0x50 + 0x40 + 0x30+ 0x20 + 0x10 + 5 < 70

Mientras que las otras representaciones no son fundamentales:

1x50 +0x40 + 0x30+0x20 +1x10 +5 > 60

1x40 + 0x30+1x20 +0x10 +5 > 50

1x30+1x20 +1x10 +5 > 40

Sistema de numeración de Fibonacci

Es un sistema de numeración complejo definido por la sucesión de Fibonacci:
$u_o=1, u_1=2,..., u_i= u_{i-1} + u_{i-2}$ (i≥2),...

Por tanto S={1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...}

También es un sistema binario pues:

$\forall i$ $0 \leq q_i < u_{i+1}/ u_i = (u_i +u_{i-1})/ u_i < 1 + u_{i-1}/ u_i = 2 \Rightarrow q_i \in \{0, 1\}$

En este sistema un número admite distintas representaciones, que se puede demostrar que no son fundamentales si tienen dos unos consecutivos, por ejemplo el número 23 admite como representaciones: R=(1, 1, 1, 0), R´= (1, 0, 1, 1, 1, 0), R´´ = (1, 0, 0, 0, 1, 0) y otras. De todas ellas se puede comprobar que sólo R´´ es fundamental.

Sistema de numeración de los cuadrados perfectos

Es un sistema binario definido por : S={1, 4, 9, 16, 25, 36, ...} pero sólo a partir de la cifra de las unidades de tercer orden, pues:
$\forall i \neq 1, 2 \quad 0 \leq q_i < u_{i+1} / u_i = (n + 1)^2 / n^2 < [n+1 / n]^2 = [1 + 1/n]^2 < 2 \Rightarrow q_i \in \{0, 1\}$
para $i = 1 \qquad 0 \leq q_1 < u_2/ u_1 = 4/1 = 4 \Rightarrow q_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$
para $i = 2 \qquad 0 \leq q_2 < u_3/ u_2 = 9/ 4 < 3 \Rightarrow q_2 \in \{0, 1, 2\}$

En éste sistema, en virtud del teorema 1, cualquier número admite varias representaciones de las que sólo una es fundamental. Así, por ejemplo, se dan las dos representaciones siguientes para el número 27, de las que sólo la primera es fundamental:
$R= (1, 0, 0, 0, 2)$; $27 = 1x5^2 + 0x4^2 + 0x3^2 + 0x2^2 + 2x1^2 < 6^2$
$R'= (1, 1, 0, 2)$; $27 = 1x4^2 + 1x3^2 + 0x2^2 + 2x1^2 > 5^2$

Sistema de numeración decimal actual

El sistema decimal, el más utilizado en todos los ámbitos de la actividad humana, se distingue por las siguientes características:

- Es un sistema de numeración polinómico y por tanto simple, con b=10 y $q_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.
- Los elementos que constituyen este sistema y que señalan las posiciones relativas de los números se denominan unidades, decenas, centenas, unidades de millar, decenas de millar, centenas de millar, unidades de millón, etc.
- La forma polinómica de un número X, en el sistema decimal es la siguiente:

  $X_{(10} = X = q_n\, q_{n-1} \ldots\ldots q_2 q_1\, q_0 = q_0 + q_1 .10 + q_2 .10^2 + \ldots\ldots + q_{n-1} .10^{n-1} + q_n .10^n$

2.5.3 Los sistemas de numeración a través de la historia. Diferentes clasificaciones

Es un hecho que las distintas civilizaciones han utilizado diferentes sistemas para representar los números naturales. Incluso en la actualidad son utilizadas diferentes representaciones numéricas: números romanos, chinos, sistemas binarios, sistemas sexagesimales, etc. Organizar este vasto universo de representaciones ha constituido uno de los problemas de los historiadores de la matemáticas. Obras como las de Genevieve Guitel (1.975) y Georges Ifrah (1.994) describen de forma exhaustiva los sistemas utilizados por las distintas culturas. Interesante es observar la clasificación que proponen ambos autores, y que resume de forma muy precisa e interesante las características comunes de todos ellos.

Guitel, en su *Clasificación jerarquizada de las numeraciones escritas*, propone tres grandes categorías, que coinciden con las consideradas por Ifrah :

Los sistemas aditivos, que, como afirma el propio Ifrah, no son mas que transcripciones escritas de cuentas arcaicas.

Los sistemas híbridos, transcripciones escritas de numeraciones habladas más o menos bien organizadas.

Los sistemas posicionales, que marcan el último grado de abstracción en este dominio y constituyen el último perfeccionamiento de la notación numérica.

Sin embargo, ambos autores subdividen estas tres clases en diferentes subcategorías, en las que, a pesar de coincidir fundamentalmente, aparecen algunos matices dignos de resaltar como tratamos de poner de manifiesto a continuación.

2.5.3.1 La clasificación jerarquizada de Genevieve Guitel

En su importante obra *Histoire comparée des numérations écrites,* comenzada en 1937 y acabada en 1975, G. Guitel realiza un pormenorizado recorrido histórico por los sistemas de numeración de las civilizaciones que han poblado nuestro planeta. Sin desmerecer la importancia que supone esta descripción, su aportación más relevante, desde nuestro punto de vista, radica en la organización de todos estos sistemas numéricos en lo que el propio autor denomina "*Classification hiérarchisée des numérations écrites*"; como indica Charles Mozaré en su prefacio, antes de esta obra existían algunas otras historias de las numeraciones, pero ninguna había concedido tanta importancia a las comparaciones como la que Guitel estableció mediante su principio clasificatorio, riguroso desde el punto de vista matemático y pertinente desde su perspectiva histórica.

En esta clasificación, como hemos indicado, los sistemas de numeración se pueden clasificar en tres grandes categorías: aditivos, híbridos y posicionales, que a su vez se dividen en diferentes subcategorías.

Los aditivos o de Tipo I, se subdividen en tres subclases: los sistemas I_A, los I_B y los I_C. A su vez, los I_A, se subdividen en $I_{A'}$ y $I_{A''}$ y los I_C en $I_{C'}$ y $I_{C''}$.

Los híbridos o de Tipo II, se agrupan en dos subclases: los sistemas II_A o parciales y los II_B o completos.

Los posicionales o Tipo III, en dos: los sistemas III_A y III_B. Y a su vez los del tipo III_A los descompone en $III_{A'}$ y $III_{A''}$.

Veamos cada una de dichas categorías con un poco más de detalle.

Los sistemas de numeración aditivos

Los sistemas del tipo I o aditivos aplican el principio de adición y se caracterizan por tener sus símbolos-cifras totalmente libres, es decir, utilizan la yuxtaposición de los monomios de cada tipo de cifra y, por tanto, el valor numérico total se obtendrá por la adición de los valores de cada monomio de cifras.

El caso más simple es el tipo $I_{A'}$, que es aquél en que sólo se simboliza la unidad y las distintas potencias de la base, es decir, las cifras de estos sistemas serán: 1, m, m^2, m^3, m^4, … Ejemplos de estos lo constituyen los sistemas de numeración egipcio ($m = 10$) y azteca ($m = 20$). Estos sistemas se caracterizan por su simplicidad de manejo, pero necesitan una gran cantidad de símbolos para escribir cantidades elevadas.

Una posibilidad de simplificación la ofrecen los sistemas $I_{A''}$, consistente en la utilización de una cifra suplementaria k que funciona como base auxiliar y reduce de alguna manera la repetición de las sucesivas unidades o potencias de la base. Las cifras en estos sistemas serían: 1, k, m, km, m^2, km^2, etc. Ejemplos de estos sistemas lo constituyen la numeración griega (sistema acrofónico o ático) y la numeración romana.

La numeración sumeria ofrece un interesante ejemplo de sistema del tipo I_B, caracterizado por compaginar dos bases alternadas k y k´(10 y 6 en el caso sumerio), de manera que m = kxk´ y cuyas cifras serían 1, k, kxk`= m, $k^2$xk`= kxm, k^2xk`^{2} = m^2... Se trata de un sistema complejo, y como asegura el propio G. Guitel, muy inteligentemente abandonado en beneficio del sistema babilónico de base 60.

La numeración de tipo I_C se caracteriza por asignar cifras distintas a todos los números inferiores a la base. De esta manera da a los coeficientes de los monomios todos sus posibles valores. Las cifras en estos sistemas representan: 1, 2, 3,..., (m-1), m, 2m, 3m, ..., (m-1) m, m^2, 2 m^2, 3 m^2, ..., (m-1) m^2 …, etc. Podemos considerar como ejemplos de este tipo: las numeraciones egipcia (hierática), la china arcaica y la india. Retener muchos símbolos originales supone un gran esfuerzo de memoria, pero, en contrapartida, necesitaremos pocas cifras para representar grandes números. Dada la gran cantidad de signos necesarios para representar a todas estas cifras, algunos sistemas optaron por aprovechar en unos casos los símbolos del alfabeto y en otros las sílabas, lo que representaba como ventaja tener un criterio en cuanto al orden de sucesión de los símbolos. Estos constituyen los sistemas $I_{C''}$, de los que el griego (alfabético), el hebreo, el árabe y el indio, constituyen buenos ejemplos.

Los sistemas de numeración del tipo II o sistemas híbridos

También llamados híbridos, se caracterizan por ser una transcripción integral de la numeración hablada, en los que los números se formarán mediante la yuxtaposición de los símbolos originales, sobreentendiendo en cada caso principios aditivos o multiplicativos sin ningún tipo de ambigüedad.

Las cifras originales en estos sistemas representan: 1, 2, 3, 4, ..., (m-1), m, m^2, m^3, m^4, ..., y Guitel los clasifica a su vez en parciales y totales según utilicen parcialmente o no la regla multiplicativa, como en el caso del sistema chino antiguo, donde se aprecia este principio en la confección de signos para algunos múltiplos de las decenas (50 es claramente 5x10, 60 es 6x10 y 80 es 8x10) y alguno de las centenas (200, 300, 500 y 600); en otros casos este principio multiplicativo se aplica de forma completa para todos los múltiplos de las potencias de la base, como en el caso de la numeración china actual, en el cual todos los múltiplos de las decenas, centenas, etc., se forman mediante este principio.

Los sistemas de numeración de tipo III o posicionales

En estos sistemas de numeración sólo los coeficientes subsisten, las potencias de la base se sobreentienden. En ellos se da un encadenamiento de los coeficientes en un orden estricto y se pueden suponer como los herederos de los sistemas híbridos completos, en los que sí eran explícitas las distintas potencias de la base.

G. Guitel divide este tipo de sistemas en dos categorías: III_A y III_B, según necesiten o no una base auxiliar. Entre los del tipo III_A, en los que aparece una base auxiliar, considera el sistema babilonio de base 60 y auxiliar 10, el maya de base 20 y auxiliar 5, donde los números inferiores a la base (los primeros m-1 número) se escriben según un sistema aditivo del tipo A′, y el sistema chino de fichas, de base 100 y auxiliar 10, en el que los números inferiores a la base se escriben según el sistema aditivo del tipo $I_{C'}$.

Los sistemas del tipo III_B , que como se ha indicado anteriormente no necesitan de una base auxiliar, tienen como representantes la numeración china (Gwalior) y nuestro sistema de numeración heredero del anterior.

En la clasificación jerarquizada de Guitel se recogen relaciones de parentescos entre diversos sistemas de numeración y propone itinerarios de progreso desde unos a otros, o lo que es lo mismo, evoluciones naturales que suponen superación de determinadas limitaciones.

2.5.3.2 La clasificación de Georges Ifrah

G. Ifrah retoma la clasificación de Guitel y la actualiza con algunos añadidos y rectificaciones. Sustancialmente considera los tres tipos de sistemas de numeración ya conocidos: aditivos, híbridos y posicionales. Las diferencias más importantes aparecen en las subcategorías en que el autor divide los tres grupos anteriores.

Sistemas aditivos:

- Numeraciones aditivas de primera especie: de base única.
- Numeraciones aditivas de segunda especie: con base auxiliar .
- Numeraciones aditivas de tercera especie.

Sistemas híbridos:

- Numeraciones híbridas de primera especie.
- Numeraciones híbridas de segunda especie.
- Numeraciones híbridas de tercera especie.
- Numeraciones híbridas de cuarta especie.
- Numeraciones híbridas de quinta especie.

Sistemas posicionales:

- Numeraciones posicionales de primera especie.
- Numeraciones posicionales de segunda especie.

Remitimos al lector al apartado A1.1 del Anexo I para profundizar en la características y diferencias de cada una de las distintas subcategorías mencionadas.

2.5.3.3 Nuestros sistemas de numeración en las clasificaciones de G. Guitel y G. Ifrah

Compaginamos distintos sistemas de numeración, como ya lo hicieran las civilizaciones india, china, griega, egipcia, etc. Es indudable que de todos los sistemas el dominante es el posicional, dada su potencialidad tanto en la representación de números como a la hora de operar con ellos; incluso los otros sistemas, sexagesimal, verbal, sistema de medidas, utilizan el sistema posicional para su desarrollo.

Las características que definen al sistema posicional deberían permitirnos situarlo en las clasificaciones que anteriormente hemos desarrollado. En efecto, dado que la clasificación realizada por Ifrah es una ampliación de la realizada por Guitel, situamos nuestros sistemas de numeración sólo en esta segunda clasificación. En consecuencia, nuestro sistema posicional es claramente un sistema de segunda especie, y su característica fundamental es la de poder extender las diversas convenciones a una notación simple y muy coherente de todos los números enteros, fraccionarios, irracionales, ya sean transcendentes o no.

El sistema de medición del tiempo y el de la amplitud angular, son sistemas heredados de la civilización babilónica, posicional de primera especie, pero modificados por las influencias de nuestro sistema posicional. Para representar cantidades inferiores a la base (60), utilizamos nuestro sistema de representación posicional, a diferencia de los babilonios que utilizaban uno de características aditivas; por lo tanto podemos considerarlo como un sistema doblemente posicional que compagina dos bases distintas: la base 10 y la base 60. En consecuencia podemos considerarlo como sistemas con características distintas a los dos que describe Ifrah, lo que supone que pertenecen a un tercer tipo de sistema posicional.

Por tanto, considerando los sistemas de medida como sistemas de numeración que representan la cuantificación de magnitudes continuas, podemos decir que tienen unas estructuras que nos permite situarlos como sistemas híbridos de quinta especie de base 10.

El más complejo para clasificar resulta el sistema de numeración hablado. Se trata de un sistema de naturaleza híbrido que compagina las bases 10 y 1000, y presentando determinadas irregularidades (once, doce, trece, catorce, quince). La estructura sería la que se ilustra en la *Tabla 2.1*.

Tabla 2.1 Estructura del sistema de numeración decimal "verbal"

1er Orden			2º Orden			3er orden		
U.	D.	C.	M.	D. M.	C. M.	Millón	D. Mi.	C. Mi
1	10	10^2	10^3	$10x10^3$	10^2x10^3	10^6	$10x10^6$	10^2x10^6
2	20	$2x10^2$	$2x10^3$	$20x10^3$	$2x10^2x10^3$	$2x10^6$	$20x10^6$	$2x10^2x10^6$
3	30	$3x10^2$	$3x10^3$	$30x10^3$	$3x10^2x10^3$	$3x10^6$	$30x10^6$	$3x10^2x10^6$
......	....	......	....	....	....	....	....	....
9	90	$9x10^2$	$9x10^3$	$90x10^3$	$9x10^2x10^3$	$9x10^6$	$90x10^6$	$9x10^2x10^6$

En dicho sistema existen vocablos independientes y específicos para:

- Los primeros 9 números (uno, dos,..., nueve), y las irregularidades : once, doce, trece, catorce, quince.
- Las decenas: veinte, treinta, ..., noventa.
- La centena: cien, quinientos
- Para el millar y sus potencias: mil, millón, millardo, billón, etc.

El resto de números se expresan utilizando principios aditivos y multiplicativos:

- Multiplicativo: como se expresa en el cuadro anterior, para los múltiplos de 10^2, las centenas (doscientos, trescientos,..., novecientos), salvo el 500 que se puede considerar una irregularidad heredada de la numeración romana. Los millares (dos mil, tres mil, ..., nueve mil), las decenas de mil, etc.
- Aditivos: para expresar los números del 1 al 99.
- Expresiones verbales que hacen intervenir a la vez los principios aditivos y multiplicativos para el resto de números.

Por tanto, lo podemos considerar como un sistema híbrido de características parecidas a los de la cuarta especie, aunque la base no es 10^2 sino10^3.

2.6 Consideraciones fenomenológicas sobre los sistemas de numeración

Uno de los componentes fundamentales del análisis didáctico toma su nombre de la obra de titulada "Didactical Phenomenology of Mathematical Structures" (Freudenthal, 1983). El autor llama *fenomenología* a un método de estudio de los contenidos matemáticos; para este autor, el análisis fenomenológico de un concepto, estructura o idea matemática es describir cuales son los fenómenos para los que es medio de organización y describir la relación entre éste y dichos fenómenos. Le llama fenomenología porque parte de la contraposición, establecida en la filosofía tradicional, entre los términos "noúmeno" y "fenómeno", que relaciona con los conceptos, estructuras o ideas matemáticas y los fenómenos que esos conceptos organizan.

El análisis fenomenológico que realiza este autor tiene como objetivo servir de base para la organización de las enseñanzas de la matemática en la escuela, está por tanto al servicio de la didáctica, aunque distingue varios tipos de fenomenología: fenomenología, fenomenología didáctica, fenomenología genética y fenomenología histórica, diferenciadas unas de otras por los fenómenos que se tienen en cuenta con respecto al concepto matemático del que se ocupan. En el primer caso se habla de fenómenos que están organizados por las matemáticas en el momento actual y en su uso actual. La fenomenología didáctica se ocupa de fenómenos que están presentes en el ámbito de la enseñanza. En la fenomenología genética se tratan los fenómenos que tienen en cuenta el desarrollo cognitivo de los aprendices. En la fenomenología histórica se encuentran los fenómenos que son organizados por el concepto matemático y cómo esta organización se extendió a otros fenómenos.

Puig (1997) señala dos ideas básicas para entender el fin perseguido por el análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal: La primera atañe a la naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática y, en consecuencia, a la naturaleza de la actividad que hay que dar la oportunidad a los alumnos que realicen para que puedan tener acceso a la genuina experiencia matemática. La segunda es una toma de partido sobre cuáles son los objetivos que hay que perseguir en la enseñanza de las matemáticas para capas amplias de la población con respecto a la naturaleza de los conocimientos matemáticos que se propone que adquieran; en este caso se cifra en la expresión de Freudenthal *constitución de objetos mentales versus adquisición de conceptos* (Puig, 1997, p.61). Como consecuencia de estos planteamientos se introduce la fenomenología didáctica como alternativa al método de enseñanza basado en la exposición directa de conceptos matemáticos. Dicho método se apoya en el supuesto implícito de que el aprendizaje de los alumnos estará garantizado siempre que el profesor muestre los conceptos en el aula tal como son, a través de caracterizaciones o definiciones. En esta labor, el profesor puede ayudarse de concretizaciones o ejemplificaciones del concepto en cuestión, aunque ésta es una opción secundaria y siempre posterior a la presentación ostensiva. La propuesta de Freudenthal, por el contrario, consiste en comenzar por los fenómenos que solicitan ser organizados y desde aquí enseñar al alumno a manipular los correspondientes medios de organización, esto es, defiende la constitución de objetos mentales basada en la fenomenología frente al logro de conceptos a través de personificaciones concretas. El autor entiende que la manipulación de objetos mentales precede a la construcción de conceptos, sugiriendo por ello que se establezcan en cada caso criterios con los que determinar si un objeto puede considerarse mentalmente constituido (Gallardo, 2004).

En nuestro trabajo emplearemos el análisis fenomenológico con un propósito diferente al de Freudenthal; nos interesan los fenómenos o situaciones como medios para realizar un diagnóstico y una valoración de la comprensión que manifiestan los alumnos acerca de un determinado conocimiento matemático. Nuestra aproximación irá dirigida a determinar la totalidad de situaciones en las que tiene sentido emplear en el momento actual ese conocimiento; en este sentido el análisis fenomenológico lo consideraremos sinónimo de análisis de situaciones o situacional, puesto que identificamos, o más bien sustituimos, el término fenómeno por el de situación. Las situaciones serán las tareas problemáticas surgidas de la experiencia a las que continuamente se está enfrentando el sujeto en contextos diversos (Gallardo, 2004).

En cuanto a las fuentes utilizadas para llevar a cabo el análisis fenomenológico, recogemos las siguientes orientaciones de Freudenthal (1983):

> *"¿Dónde he buscado el material requerido para mi fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas? Apenas podría apoyarme en el trabajo de otros. He aprovechado mi conocimiento de las matemáticas, sus aplicaciones y su historia. Conozco cómo las ideas matemáticas han o podrían haber nacido/surgido. Del análisis de libros de texto conozco cómo los didactas consideran/calculan lo que puede apoyar el desarrollo de estas ideas en las mentes de los sujetos. Finalmente, al observar los procesos de aprendizaje he conseguido comprender un poco los procesos actuales de constitución de las estructuras matemáticas y el logro de conceptos matemáticos" (p. 29).*

De sus comentarios recogemos tres fuentes principales desde las que extraer una información completa sobre la naturaleza del conocimiento en estudio, así como para confeccionar una muestra representativa de situaciones donde tiene sentido su utilización como medio de resolución. En primer lugar situaríamos los trabajos e investigaciones publicadas en Educación Matemática, en segundo lugar los materiales curriculares utilizados en las aulas: libros de texto, recursos web, obras de divulgación y entretenimiento donde estén presentes los conocimientos implicados, y en tercer lugar el conocimiento de los especialistas o expertos del área de Didáctica de la Matemática, que en parte pueden estar relacionado con la primera fuente.

Estas consideraciones realizadas sobre la fenomenología quedaría incompleta si con ella entendiéramos separados el mundo de las matemáticas del mundo cuyos fenómenos organiza, que sería el mundo que nos rodea, el mundo real. *La interpretación anterior no es afortunada en este punto porque no toma en cuenta que Freudenthal no se queda en el nivel más bajo describiendo la actividad matemática* simplemente *como un juego entre fenómenos del mundo y medios de organización de las matemáticas, en el que los fenómenos solicitan ser organizados y se crean medios para ello en las matemáticas. Por el contrario, el proceso de creación de objetos matemáticos como medios de organización lo acompaña Freudenthal de un proceso por el que los medios de organización se convierten en objetos que se sitúan en un campo de fenómenos. En consecuencia, los objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia, en el que entran como fenómenos en una nueva relación fenómenos / medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos, y este proceso se reitera una y otra vez (Puig, 1997, p.66).*

Las consideraciones anteriores nos introducen en los niveles epistemológicos (Castro-Rodríguez, Castro y Torralbo, 2013), aspecto clave en los procesos de abstracción que llevan a cabo los aprendices de la matemática desde el fenómeno hasta el noúmeno, entendiendo que este complejo proceso se realiza en distintos niveles intercambiándose los papeles de conceptos y fenómenos. *Se debe añadir que, en un primer nivel los fenómenos los constituyen los objetos del mundo real y las acciones sobre los objetos que dan lugar a conceptos y estructuras; en un segundo nivel, estos conceptos pasan a constituirse a su vez en fenómenos que* *generan nuevos conceptos de un mayor nivel de abstracción. Por ejemplo, el concepto de número natural, que se deriva de fenómenos de cantidad y orden, interviene en los fenómenos que dan lugar al concepto de número racional (*Segovia y Rico, 2001, *p.90).*

Los sistemas de numeración, como medios de expresión de los números naturales y como subestructura orientada a representar verbal y simbólicamente los términos numéricos (Rico y col. 2008), participan del análisis fenomenológico de los números naturales. En el proceso de construcción de la estructura matemática del número natural, siguiendo el proceso de abstracción de los distintos niveles epistemológicos descritos anteriormente, podemos señalar, en primer lugar, las situaciones del mundo real (natural, cultural, científico o cultural). Del trabajo con esos fenómenos o situaciones reales se deriva la identificación de distintas situaciones en las que interviene o se da un fenómeno similar, situaciones semejantes que se aglutinan en torno a nuevos noúmenos intermedios denominados **usos o contextos numéricos**. En la *Figura 2.10*, que resume los niveles de análisis en la estructura aditiva de los números naturales que proponen Castro-Rodríguez, Castro y Torralbo (2013), se aprecian los distintos niveles de abstracción partiendo de las experiencias y las situaciones del mundo real y los distintos objetos mentales que el alumno construye a partir de ella y que se agrupan en una estructura matemática más general. Se identifican, por una parte, cuatro contextos numéricos, como son: ordinal, cardinal, medida y nominal, y, por otra, los tres contextos que caracterizan los significados de la operación aditiva: comparación, cambio y combinación, los cuales permitirán definir los distintos problemas aditivos.

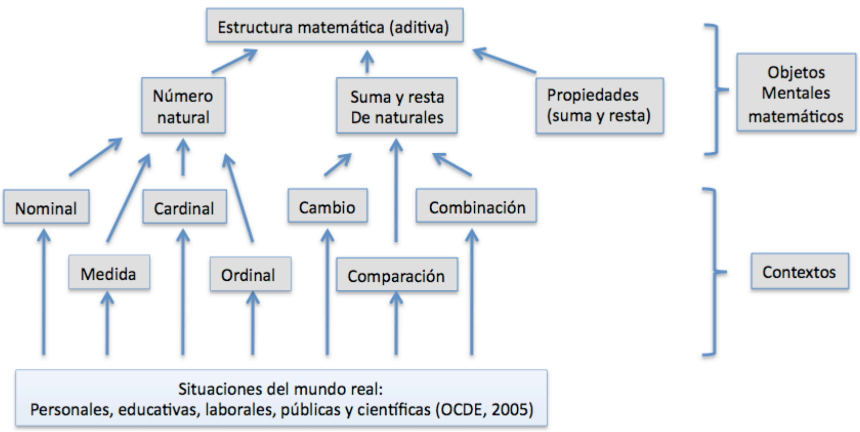


Figura 2.10 Niveles de análisis en la estructura (N,+)
(Castro-Rodríguez, Castro y Torralbo (2013)

Castro, Rico y Castro (1987), ampliando los estudios de (Fuson y Mierkiewicz (1980), Fuson, Richards y Briars (1982), Fuson y Hall (1983), describen los diferentes significados que adquieren los números en función de los contextos particulares en los que aparecen, en los siguiente términos:

a) Secuencia verbal: Recitado de los números en su orden sin referirlos a ningún objeto concreto. Se emplea para diferentes funciones: para aprender la serie numérica, para cronometrar, como componente esencial para otras funciones numéricas, etc..

b) *Recuento:* Incorpora sobre el uso anterior la exigencia de relacionar cada elemento de la secuencia numérica con un objeto concreto de una colección. Este significado y el anterior están relacionados con la acción de contar, aunque esta acción supone el correcto empleo de la correspondencia biunívoca que asocia a cada término un objeto.

c) *Cardinal:* Está relacionado con la numerosidad de una colección de objetos. Responde a "cuántos?" y, por tanto, es un índice del tamaño o medida de una colección de objetos. Para obtener el cardinal se puede proceder por subitización, mediante la acción de contar, mediante la estimación o a través de operaciones.

d) *Medida:* En este contexto, considerado como una extensión del anterior, el número describe la cantidad de unidades de alguna magnitud continua. A las estrategias anteriores para obtener el "cuántos", se añaden algunas específicas como las escalas, el uso de fórmulas, las tallas, etc.

e) *Ordinal:* Expresa la posición relativa de un objeto en un conjunto discreto y totalmente ordenado en el que se ha tomado a uno de sus elementos como inicial. En este contexto se suelen emplear los números ordinales. Los procedimientos para obtener el ordinal son del mismo tipo que los utilizados para obtener el cardinal.

f) *Código:* Se utiliza para identificar o distinguir a los elemento de una determinada colección. Las ventajas de utilizar los símbolos numéricos para nominar son, entre otras: ocupan poco espacio, se identifican rápidamente, son fáciles de nombrar y escribir y sobre todo si la asignación se realiza siguiendo la serie numérica, nos permite cuantificar y ordenar la colección.

g) *El número como tecla*: resorte diferenciado que hay que accionar físicamente para su utilización.

Puig (1997) completa los anteriores añadiendo los contextos cálculo y mágico, éste último *para dar cuenta de esos usos de los números, que en versiones inocuas están presentes en el mundo de los niños y pueden explicar comportamientos como los que ocurren usualmente ante el famoso problema de "la edad del capitán"*[5].

Gómez, B. (1988), para caracterizar a los números naturales, considera cuatro usos fundamentales que organizan las situaciones en las que se presentan los números. Para este autor el número se puede utilizar:

a) *Para contar:* función cotidiana del número, que puede ser enfocada para contar a secas, para contar cosas, en busca de la propiedad de los conjuntos (cardinal) que da la respuesta a la pregunta: ¿cuántos?; o en busca de la propiedad numérica de los objetos (ordinal) que da respuesta a la pregunta: ¿cuál?

b) *Para numerar:* Numerar o asignar números a los objetos es una función utilitaria del número. Se puede enfocar a diversos propósitos: identificar, nombrar, delimitar, señalar (contexto código).

[5] Nota a pie de página de la introducción a la traducción realizada por L. Puig de la obra Hans Freudenthal (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

c) *Para medir:* Utilizado en distintos instrumentos de medida (termómetro, regleta graduada, cronómetro, balanza), con el fin de describir medidas, clasificar, evaluar, puntuar, etc.
d) *Para operar (suma, resta,...):* Como operador.

Del análisis conjunto de estas propuestas destacaríamos cuatro contextos fundamentales: cardinal, ordinal, medida y cálculo, a los que deberíamos añadir las situaciones de traducción entre distintos sistemas de representación usuales y que constituirían los contextos o categorías fenomenológicas relacionadas con el sistema de numeración decimal como subestructura del campo de los números naturales

2.7 Los sistemas de numeración en la legislación para Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria

El número natural, su representación y las operaciones básicas han estado presente en todos los planes de estudios de la Escuela Elemental, desde la Ley Moyano (1857), considerada como primera ley de Educación de nuestro país, hasta la LOE. Se puede decir que la enseñanza de la aritmética ha sido una constante en la formación matemática básica impartida por la Escuela Elemental.

En los dos primeros apartados estudiaremos y realizaremos una comparación entre los dos marcos legales de la Educación Primaria que afectan a la investigación: por una parte la Ley 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación del Sistema Educativo (LOGSE), por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria en el momento de inicio del trabajo y que ha constituido el marco curricular en el que se han formado los alumnos futuros maestros que han constituido parte de la población en estudio; por otra, la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006a), que establece el currículum actual de la Educación Primaria y orienta los programas de las asignaturas de Didáctica de la Matemática del nuevo Grado de Educación Primaria en las Facultades de Educación. Para hacer dicha comparación utilizaremos los resultados de Rico y col. (2010) sobre los cuatro últimos sistemas educativos.

Del mismo modo realizaremos un análisis de los currículos de matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria en los dos sistemas considerados, dado que en estos niveles existen contenidos relacionados con los sistemas de numeración y, por tanto, que pueden haber influido en el nivel de comprensión que manifiestan los alumnos al comenzar sus estudios universitarios.

2.7.1 El currículo de Matemáticas en la Educación Primaria

En los apartados que siguen se incluyen sendas revisiones curriculares relacionadas con el contenido objeto del estudio en los Decretos de Educación Primaria de las dos últimas leyes para la Educación. En el momento de la redacción de este capítulo, la LOMCE se encuentra en fase de aprobación y desarrollo reglamentario. Dado que la formación de los estudiantes de la muestra depende de leyes anteriores a esta última, no incluimos aquí su revisión.

2.7.1.1 El currículo de Matemáticas en la Educación Primaria en la LOGSE

La Ley General de Ordenación del Sistema Educativo (LOGSE) se basa en una orientación constructivista, con una tipificación de los conocimientos en conceptuales, procedimentales y actitudinales, agrupados por bloques temáticos y orientados a la construcción de instrumentos intelectuales para "*interpretar, representar, analizar, explicar y predecir aspectos de la realidad*" (Rico, 2010, p.155). En esta línea se proponen los siguientes objetivos para el área de Matemáticas:

-*Utilizar el conocimiento matemático para interpretar, producir y valorar informaciones.*
-*Reconocer situaciones y problemas, interpretarlos y resolverlos mediante cálculos elementales.*
-*Utilizar instrumentos de cálculo y medida.*
-*Utilizar estrategias de estimación y cálculo mental.*
-*Identificar formas geométricas en el entorno y actuar mediante ellas.*
-*Recoger representar y sistematizar datos del entorno.*
-*Apreciar y valorar las matemáticas en la vida cotidiana.*
-*Identificar situaciones y problemas en la vida cotidiana que puedan ser resueltos por medios matemáticos.*

Los bloques temáticos propuestos para la Educación Primaria son:

1. Números y operaciones: significado y estrategias.
2. Medida: información cuantitativa sobre los objetos y el tiempo.
3. Orientación y representación en el espacio.
4. Las formas en el espacio.
5. Organizar la información: gráficos e iniciación a la estadística.

La relación de los contenidos propuestos para el primer bloque, organizados en las componentes conceptuales (hechos, conceptos y principios), procedimentales y actitudinales (actitudes, valores y normas), sin secuenciar por cursos o ciclos, y los contenidos mínimos relacionados con los sistemas de representación del número natural se recogen en las *Tablas I.2.1 y I.3.1* del Anexo I.

Por su parte, en el documento "Orientaciones para la secuenciación de contenidos" (Dirección General de Evaluación Educativa y Formación del Profesorado (1992)) y en el Decreto 105/92 de 9 de junio de la Junta de Andalucía, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la educación Primaria, se resalta el carácter flexible y abierto del currículum y se recogen las orientaciones para la secuenciación por ciclos de los contenidos de las materias básicas de la Educación Primaria.

2.7.1.2 El currículo de Matemáticas en la Educación Primaria en la LOE

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) (Ministerio de

Educación y Ciencia, 2006a) y el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, de enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006b), propugnan el desarrollo de las competencias matemáticas y el uso de los conocimientos adquiridos para abordar y dar respuesta a situaciones de aplicación práctica del conocimiento; las matemáticas escolares deben proporcionar herramientas para "*comprender, interpretar y actuar en la realidad*" (Rico, 2010). Los objetivos que propone la LOE para el área de Matemáticas en la Educación Primaria (*Tabla I.4.1,* Anexo I) se enuncian en forma de capacidades para las que resulta especialmente importante el dominio y la comprensión de los sistemas de representación de los números naturales.

Los contenidos de matemáticas que propone la LOE están organizados en bloques temáticos que no varían sustancialmente de los que propone la LOGSE:

1. Números y operaciones.
2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes.
3. Geometría.
4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad.

En las *Tablas I.4.2, I.4.3, I.4.4 , I.4.4 y I.4.5* del Anexo I se incluyen los contenidos del primer bloque numérico, resaltando los elementos relacionados expresamente con la representación de los números naturales.

Paralelamente, el Decreto 230/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria y la Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla, ambas de la Junta de Andalucía, incorporan tres núcleos temáticos transversales:

1. Resolución de problemas;
2. Uso de los recursos TIC;
3. Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas.

y reorganizan los cuatro bloques propuestos por la normativa estatal en los tres siguientes:

4. Desarrollo del sentido numérico. Medida de magnitudes;
5. Las formas y figuras y sus propiedades;
6. Tratamiento de la información, azar y probabilidad.

2.7.1.3 Análisis comparativo del Área de Matemática en ambas leyes de Educación.

De la comparación de ambas leyes educativas, en lo que concierne al Área de Matemáticas y al bloque de numeración y cálculo, destacamos los siguientes aspectos:

- La adquisición de las competencias matemáticas, propuesta en la LOE, prepara a los jóvenes para vivir en un mundo en continuo cambio y con exigencias de nuevos aprendizajes (sociedad de la información y del conocimiento). La consideración de las competencias matemáticas permite realizar una identificación mas precisa de los contenidos y los criterios de evaluación.

- En la LOE se prescinde de la organización en las componentes conceptuales, procedimentales y actitudinales y se opta, en cambio, por organizar los contenidos de numeración y cálculo en números, operaciones y estrategias de cálculo.

- En la propuesta curricular de la LOE, en su concreción andaluza, se aprecia la consideración de los tres bloques transversales y la incorporación del "sentido numérico" como habilidad para manejar los números y las operaciones en la resolución de problemas y en el dominio de estrategias de cálculo mental.

- Se aprecia una mayor concreción de contenidos en la propuesta de la LOE, que se refleja en la secuenciación de contenidos por ciclos a nivel nacional. Por el contrario, en la LOGSE se proponen orientaciones muy generales tanto en la normativa nacional como en la autonómica.
- En la LOE se aprecian avances significativos en los planteamientos orientados a potenciar la comprensión de significados matemáticos frente a la simple adquisición de técnicas, algoritmos y procedimientos, característicos de propuestas anteriores.
- A pesar de que no se aprecian diferencias significativas en los contenidos numéricos entre ambas leyes, la distribución de estos contenidos en conceptuales, procedimentales y actitudinales favorece una mayor presencia expresa de los sistemas de representación en el currículo de la LOGSE. No cabe duda de que la organización de los contenidos de la LOE se orienta más a la estructura tradicional de la aritmética que la que se propone desde la LOGSE.

Los alumnos que han participado en el estudio objeto de la tesis doctoral acceden a la Universidad con una formación inmersa en sus inicios en la primera de las dos leyes analizadas y completada en un segundo tramo (ESO y Bachillerato) en un sistema mixto que ha conservado por inercia los principales aspectos de los planteamientos anteriores y ha tratado de implementar las nuevas orientaciones de la segunda ley.

2.7.2 El número natural y los sistemas de representación en la Educación Secundaria Obligatoria

A pesar de que los contenidos relacionados con los números naturales se encuentran fundamentalmente en el currículum de Primaria, realizaremos un análisis de los textos legales que regulan los contenidos de matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en las dos leyes educativas analizados (LOGSE y LOE).

2.7.2.1 El currículum de Matemáticas de la ESO en la LOGSE

Las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria según la LOGSE se recogen en el Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio. Y aunque se realizan dos modificaciones del mismo, en el RD 894/1995 y el RD 3473/2000, dichos contenidos mínimos se mantienen hasta su derogación el 29 de diciembre de 2006, fecha en la que se promulga el RD 1631/2006 con las enseñanzas mínimas de la LOE.

Una de las características de las orientaciones didácticas de este ley es la de mantener la orientación constructivista y la clasificación de los conocimientos en conceptuales, procedimentales y actitudinales, agrupados por bloques temáticos. La distribución por cursos quedaba en manos de los seminarios/departamentos por medio de las programaciones didácticas, lo que en la práctica ha sido monopolizado por las editoriales. Tanto los objetivos como los contenidos mínimos dentro del bloque “Números y operaciones: significados, estrategias y simbolización” propuestos en el RD 1007/1991 se recogen en las *Tablas I.5.1 y I.5.2* del Anexo I

El marco legal de la LOGSE introdujo algunos cambios sustanciales en el sistema de enseñanza, como la ampliación de la escolarización obligatoria hasta los 16 años (un incremento de dos años de escolarización obligatoria) y la modificación profunda de los objetivos, los métodos y la organización de las enseñanzas de los contenidos matemáticos (por ejemplo, la comprensión, el requerimiento a los docentes para que participaran activamente en el desarrollo curricular o la importancia dada a los procedimientos y actitudes en la clase de matemáticas).

Sin embargo a pesar de los avances normativos, la aplicación de la LOGSE introdujo dificultades organizativas que fueron el blanco de diversas críticas. Las más importantes en relación con la Educación Matemática fueron las siguientes

- *Imposibilidad de atender a la diversidad amplia de capacidades intelectuales y culturales de los alumnos*.

- *La promoción automática de los alumnos en los cursos de ESO.*

- *Dificultades con la organización de espacios y tiempos en los centros.*

- *Falta de tiempo para desarrollar el currículum con la metodología propuesta.*

- *Falta de materiales didácticos para desarrollar los objetivos marcados con la metodología propuesta.*

En este sentido, hay un consenso generalizado en la bajada de nivel que ha provocado la ESO y la consideración del poco esfuerzo necesario para aprobar las asignaturas (Merino, 2005, pp.477-478*)*. Si bien la extensión de la escolaridad obligatoria hasta los 16 años no se cuestiona, son criticadas las soluciones que tienen que ver con el discurso de la segregación o con la ausencia de diversificación de itinerarios que garanticen la consecución de mejores metas educativas para los buenos estudiantes y así evitar la "pérdida de tiempo" para los considerados "objetores escolares".

Las críticas anteriores junto al cambio de gobierno producido en el año 96 y la mayoría absoluta en las elecciones del 2000, provocan la gestación de una nueva ley de educación, la Ley Orgánica de la Calidad de la Educación (LOCE), que se promulga como Ley Orgánica el 24 de diciembre de 2002 con la intencionalidad pedagógica e ideológica de devolver a la educación la visión mas tradicional del proceso de enseñanza y aprendizaje centrada en los contenidos y el nivel, y alejarla de la visión mas constructivista que se preocupa por el aprendizaje y la atención a la diversidad (Merino 2005).

La LOCE propone reintroducir la cultura del esfuerzo y la excelencia, implícitamente proscritas por la LOGSE a causa de la promoción automática que permitía a los alumnos pasar de curso sin haber aprobado ninguna materia. La nueva ley también pretende eliminar la posibilidad de superar la ESO con grandes lagunas de conocimiento, reduciendo a la categoría de excepcionalidad el poder titularse con dos materias no superadas. Se establecen las pruebas de recuperación y se instauran programas de Iniciación Profesional para alumnos que no quisieran continuar estudiando. Se instaura la prueba General de Bachillerato, eliminándose la Selectividad y se introducen los itinerarios formativos en 3º y 4º de la ESO.

Con el cambio de gobierno en 2004 se suspende la aplicación de esta ley y se comienza a gestar la futura LOE que se aprueba en mayo de 2006. Estos sucesivos cambios normativos responden a una falta de acuerdo educativo entre las fuerzas políticas y se traducen en presiones sobre el propio sistema. La educación debe responder a un proyecto a largo plazo, en el que participen todos los actores implicados; *las leyes educativas deben ser aceptadas socialmente, deben ser conocidas y respetadas por los profesionales encargados de ponerlas en práctica, y* *deben suscitar la colaboración de las familias y del profesorado en la ardua tarea educativa. Para ello es necesario conocerlas y situarlas en su contexto histórico, para poder valorarlas y criticarlas con conocimiento de causa, para extraer o explotar sus virtudes, y para exigir, si es preciso, su cumplimiento.* (Escamilla, A. Lagares, A. 2006).

2.7.2.2 El currículum de Matemática de la ESO en la LOE

El currículum de matemática para la Enseñanza Secundaria Obligatoria que propone la LOE se recoge en el Real Decreto 1631/2006, de 3 de mayo, de enseñanzas mínimas y se describen los aspectos básicos del currículum referidos a los objetivos, las competencias básicas, los contenidos y los criterios de evaluación. La LOE deroga totalmente la LOGSE y paraliza la LOCE.

Las competencias básicas se constituyen en el eje en torno al cual girará el currículum en la LOE y en el referente para determinar y seleccionar tanto los objetivos como los contenidos; los criterios de evaluación servirán para valorar el progresivo grado de adquisición de éstas. Entre las competencias básicas, el RD 1631/2006 considera a la competencia matemática como aquella que "*supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad*". Los objetivos a conseguir se consideran directamente relacionados con las competencias a desarrollar y se redactan en términos de capacidades (*Ver Tabla I.6.1* del Anexo I).

La LOE, a diferencia de la LOGSE, propone una distribución de los contenidos y criterios de evaluación distinguiendo para el cuarto curso dos modalidades o ámbitos específicos, uno de ellos con elementos formativos de carácter lingüístico y social y otro con elementos formativos de carácter científico-tecnológico. Los contenidos están agrupados en seis bloques:

1. Contenidos comunes de naturaleza transversal y referidos fundamentalmente a la resolución de problemas, la comunicación y el uso de las Tics.
2. Números y operaciones.
3. Álgebra.
4. Geometría.
5. Funciones y gráficas.
6. Estadística y probabilidad.

En las *Tablas I.6.2 y I.6.3* del Anexo I se relacionan los contenidos del bloque *"Números y operaciones"* distribuidos en los cuatro cursos de la ESO. En dichas tablas se observa que los números naturales y, sobre todo, las representaciones de los números naturales no quedan recogidos en los contenidos mínimos que propone la LOE. Sin embargo, como se verá en un apartado posterior, los libros de texto de primer curso suelen reservar el primer capítulo para realizar un breve repaso de los números naturales y la representación natural en otros registros distintos al decimal.

2.7.2.3 Análisis comparativo

De la comparación de ambas leyes educativas en lo que concierne al Área de Matemáticas y al bloque de números y operaciones destacamos los siguientes aspectos:

- En líneas generales no se aprecian diferencias en la relación de contenidos numéricos propuestos por ambas leyes, salvo en el caso de los contenidos mínimos de la LOGSE para los números naturales en el apartado "*Significado, uso y notación de los números naturales*", en el que se recogen aspectos sobre la representación que no están presentes en los contenidos mínimos de la LOE.
- En la LOE, al igual que ocurre en Educación Primaria, se prescinde de la organización en componentes conceptuales, procedimentales y actitudinales y se limita a describirlos sin realizar ninguna distinción entre los números, sus operaciones o las estrategias de cálculo.
- A diferencia de la LOGSE, la determinación de las competencias matemáticas en la LOE permite realizar una identificación más precisa de los contenidos y los criterios de evaluación.
- A diferencia de la LOGSE, en el bloque de contenidos transversales de la LOE se priorizan las estrategias y técnicas de resolución de problemas, la expresión verbal de los procedimientos seguidos en su resolución, los recursos TIC,s para facilitar los cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, las representaciones funcionales y la comprensión de las propiedades geométricas.
- En la propuesta de la LOE se aprecia una mayor concreción en la secuenciación de contenidos por cursos. Por el contrario, en la LOGSE se ofrecen orientaciones muy generales, reservando a los centros y a los respectivos departamentos la concreción del currículum en los cuatro cursos de la ESO.
- En la LOE se aprecian avances significativos en el intento de potenciar la comprensión del conocimiento matemático frente a la simple adquisición de técnicas, algoritmos y procedimientos que constituía el enfoque instrumental característico de propuestas anteriores.

2.8 Los números y las operaciones aritméticas en los libros de texto de Primaria y Secundaria Obligatoria

Se incluye aquí una breve reflexión sobre el tratamiento didáctico implícito en los libros de texto como uno de los aspectos que inciden decisivamente en la formación matemática de los alumnos antes de su ingreso en la Universidad. La incidencia especial de este recurso se debe a que el desarrollo práctico del currículo escolar lo marcan en gran medida las editoriales, *"los libros de texto determinan en la práctica de la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos"* (Schubring, 1987, citado por González y Sierra, 2004, p. 390), a pesar de que la concreción y el desarrollo del currículo corresponde al profesorado a través del Proyecto de Centro y las programaciones de Aula. Posiblemente queda la herencia y la inercia de las primeras leyes educativas en las que el libro de texto cumplía un papel primordial; en ellas se recogían las condiciones que deberían cumplir para que pudieran acompañar a los maestros en su trabajo diario. Así, en la Ley Moyano de 1857 se recogía, en el título V de la primera sección, un apartado especial para los libros de texto en el que se decía, Art. 86: "*Todas las asignaturas de la primera y segunda enseñanza, las de las carreras profesionales y superiores y las de las facultades hasta el grado de Licenciado, se estudiarán por libros de texto: estos* *libros serán señalados en listas que el Gobierno publicará cada tres años."*

En la actualidad, el decreto 227/2011 de la Junta de Andalucía regula el depósito, el registro y la supervisión de los textos a la vez que las condiciones de selección por los centros docentes públicos de Andalucía, correspondiendo al servicio de inspección el proceso de supervisión de los mismos. En cuanto a la presencia y el valor curricular de los libros de texto, la reforma educativa de la LOGSE suscitó expectativas de cambio por el énfasis que se hacía sobre el currículum abierto y flexible y la autonomía del profesorado y de los centros. Pero la realidad ha sido otra, como indica Rodriguez Diéguez (1998) en el informe sobre las valoraciones de los enseñantes sobre los libros de texto: *"pese a las actitudes que se levantaron (al inicio de la Reforma LOGSE) contra el libro de texto, su aceptación global, la toma de conciencia de que es un instrumento, hoy por hoy, insustituible, aparece frecuentemente expresa, con todos los matices críticos y relativos que se quiera"*.

La realidad es que los libros de texto son los mediadores "casi" exclusivos entre el currículo prescrito y las prácticas docentes, entre el saber sabio y el saber enseñado; no son un mero recurso ni tienen sólo un valor instrumental, su papel va mucho mas allá, pues organizan de una manera precisa el desarrollo curricular y por tanto el trabajo de los profesores y los estudiantes (Villella, J.A., Contreras, L.C. 2005). Si además tenemos en cuenta que el enfoque que presentan y las actividades que proponen son limitadas e incompletas, son evidentes los efectos negativos sobre la formación de los alumnos.

Del mismo modo, tampoco se pueden obviar los efectos negativos para el profesorado que los utiliza con exclusividad, dado que se trata de un diseño curricular cerrado, completamente definido y secuenciado y, por tanto, afecta significativamente a la profesionalización. Así se pone de manifiesto en las investigaciones de Freeman y col. (1983), Alverman (1989), Zahorik (1990, 1991), Gimeno (1994), Henson (1981) o Freeman y Poster (1988), citado por Stodolky (1989), que señalan los siguientes estilos de profesores en función del uso del libro de texto:

El libro de texto como currículo. Se trabaja lección por lección hasta que finaliza el periodo escolar.

Omisión selectiva. Se respeta el orden de los contenidos pero se omiten algunas partes o lecciones.

Saltando alrededor del texto. Manteniendo como eje el libro de texto pero sin respetar el orden de los capítulos.

Combinación del libro de texto con otros materiales. El texto sirve de recurso auxiliar para orientar al profesorado en la selección de las tareas y de los contenidos, pero es el profesor el que planifica y desarrolla el currículo.

Sustitución del texto escolar por otros medios o recursos. Se sustituye por otros materiales elaborados o seleccionados de entre los que ofrece el mercado editorial. El profesor es el que planifica la enseñanza.

La experiencia indica que cuanto mayor y mejor es la formación del profesorado menor es la dependencia del libro de texto, adoptándose usos más cercanos a los dos últimos estilos mencionados. Asimismo, parece que la dependencia del libro de texto es muy elevada en la mayoría de los casos, lo que aconseja analizar las propuestas curriculares que realizan las editoriales sobre el contenido matemático en estudio.

2.8.1 Los números y las operaciones en los libros de texto de Primaria

Del análisis de los libros de textos correspondientes a la LOGSE y la LOE se aprecian diferencias mínimas en cuanto a *contenidos* en el desarrollo editorial en ambas leyes (*Tablas I.7.1, I.7.2, I.7.3 e I.7.4* del Anexo I). Así, se incluye en **primer** curso la presentación de los nueve primeros números, la construcción de la idea de decena y la representación de los números de dos cifras. En **segundo** curso se presenta la centena, los números de tres cifras y las descomposiciones de los números en unidades, decenas y centenas. En **tercero** se tratan las unidades y decenas de millar y los números de cuatro y cinco cifras. En **cuarto** y en **quinto** se incluyen las unidades de millón y superiores y los sistemas de numeración no posicionales, fundamentalmente el sistema romano.

En cuanto al *modo de presentación* de los contenidos se observan diferencias en los libros de texto de la LOGSE y de la LOE; mientras que en los primeros se hace referencia expresa a los contenidos a tratar, en los segundos, en particular en los primeros niveles, se presentan los contenidos organizados en centros de interés al comienzo del desarrollo de los temas, continuando a renglón seguido con desarrollos similares a los de los textos anteriores.

En lo que se refiere a las representaciones del número natural, se aprecian coincidencias entre las editoriales en ambos marcos normativos (*Tablas I.8.1, I.8.2, I.8.3 e I.8.4* del Anexo I). En los primeros cursos se utilizan representaciones gráficas de modelos físicos, como los bloques multibase y el ábaco, que se alternan con representaciones de cantidades estructuradas. En el segundo ciclo se utiliza el sistema monetario y en el tercer ciclo sistemas antiguos como el romano; en todos se utiliza la recta numérica como modelo para representar las acciones aditivas y multiplicativas. La diversidad de representaciones numéricas disminuye a medida que se avanza en los niveles; en los primeros cursos se utilizan representaciones gráficas de modelos físicos para pasar en cursos superiores a la representación decimal y la recta numérica junto a sistemas antiguos como el romano y babilonio y los sistemas sexagesimales que caracterizan la medida del tiempo y de la amplitud angular.

2.8.2 Los números y las operaciones en los libros de texto de la ESO

El número y los sistemas de numeración sólo aparecen como contenidos mínimos en el currículum de la LOGSE, en el que se recoge el significado, uso y notación de los números naturales dentro del bloque “Números y operaciones: significados, estrategias”. En la LOE sólo se recogen referencias a la divisibilidad en los números naturales y se reserva para los otros conjuntos numéricos todas las referencias. A pesar de todo, los libros de texto de primer curso de la ESO en ambos sistemas educativos incluyen, en el primer capítulo, un breve repaso de los números naturales y un acercamiento a la representación natural en otros registros distintos al decimal.

En la *Tabla I.9.1* del Anexo I, en la que se recogen los sistemas de representación utilizados, se observa el predominio de la representación decimal y la recta numérica. Sólo en alguna editorial se constata la atención a otros sistemas antiguos de numeración (egipcio, romano o babilonio) y alguna actividad relacionada con las configuraciones puntuales.

2.9 Los sistemas de numeración en la formación inicial del Maestro/a de Educación Primaria

En los apartados que siguen se analizan los conocimientos básicos que un maestro debe tener para el buen desarrollo de su actividad docente y los dos planes de estudio actuales para la formación de Maestros: el plan 91, en extinción, y el plan del nuevo grado de Maestro/a de Educación Primaria, adaptado al Espacio Europeo de Educación Superior y en el que se ha desarrollado el estudio que se presenta en la tesis doctoral.

2.9.1 El dominio del contenido como elemento del conocimiento base del profesor/ maestro de matemáticas

Hasta aquí hemos analizado los marcos legislativos que regulan el conocimiento básico que debe poseer un alumno al comenzar el grado de Maestro sobre el número natural y los sistemas de representación. En lo que sigue se realiza un análisis del conocimiento necesario para desempeñar las tareas de profesor/maestro de matemáticas, teniendo en cuenta que el dominio del contenido matemático es condición necesaria, aunque no suficiente, para el desarrollo adecuado de las labores profesionales.

Desde la concepción del enfoque denominado “proceso-producto” hasta las teorías y los estudios posteriores sobre el conocimiento base, desarrollada por Shulman (1986, 1987), se constata la relevancia del conocimiento de la materia como condición “sine qua non” en la formación del profesor de matemáticas. Sin embargo, no hay consenso en la manera en cómo deben ser dominados dichos conocimientos ni en cuáles deben ser los conocimientos complementarios a poner en juego para llegar a ser “buenos maestros y profesores”.

Shulman (1986) propone tres componentes del conocimiento del contenido para la enseñanza: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento curricular. En un trabajo posterior (Shulman, 1987) amplia esta taxonomía a las siete componentes siguientes:

1. Conocimiento del contenido.
2. Conocimiento pedagógico general, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales sobre el manejo y organización de la clase que trasciende el ámbito de la materia.
3. Conocimiento del currículo, con especial dominio de las materias y los programas que sirven como “herramientas para el oficio” del docente.
4. Conocimiento pedagógico del contenido; campo en el que confluyen materia y pedagogía y que forma parte de la esfera exclusiva de los maestros, incluyendo la forma especial de comprensión profesional de este colectivo.
5. Conocimiento de los alumnos y de sus características.
6. Conocimiento de los contextos educativos, desde el funcionamiento del grupo o de la clase o la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas.

7. Conocimientos de los objetivos, las finalidades, los valores educativos y sus fundamentos filosóficos e históricos.

Entre ellos destacan, como significativos, el conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK), porque identifican los cuerpos de conocimientos relevantes para la enseñanza y distingue la comprensión del especialista de la comprensión del pedagogo.

Los trabajos de Shulman, Ball, Thames y Phelps (2008) y de Hill, Ball y Schilling (2008) identifican el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y lo dividen en las dos componentes prioritarias (*Figura 2.11*): Conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido, que a su vez abarca el conocimiento del contenido y de los estudiantes, conocimiento del contenido y de la enseñanza y el conocimiento del contenido y del currículo. También consideran tres componentes en el conocimiento del contenido: conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento en el horizonte matemático, con lo que se diferencia entre un conocimiento de características técnicas y procedimentales, característico de cualquier persona con formación matemática, del conocimiento que es necesario para que el profesor pueda hacer que otro entienda lo que hace y no sólo que ejecute un conjunto de técnicas y procedimientos.

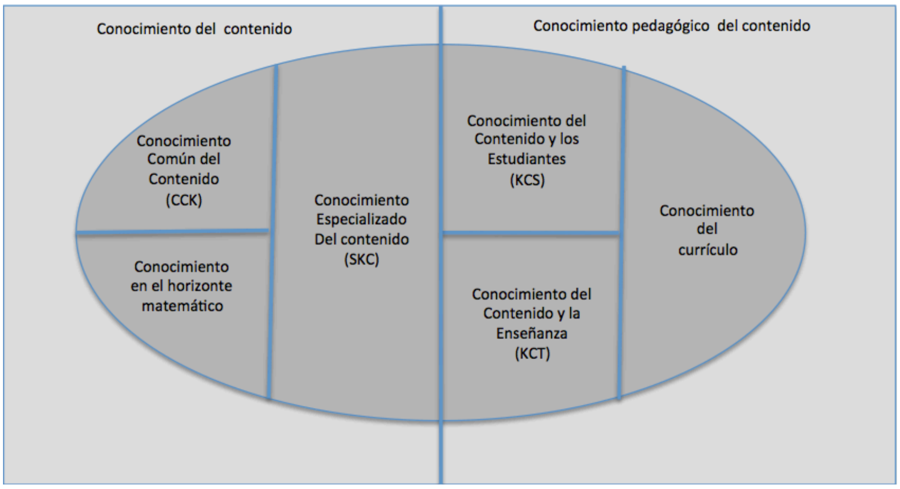


Figura 2.11 Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2.008, p.403; Hill, Ball y Schilling, 2008, p.377)

Otras referencias que sostienen la relevancia del conocimiento de la materia como elemento básico en el conocimiento profesional del docente son:

- Bromme (1988, 1994) define lo que denomina una "topología del conocimiento profesional de los profesores" en la que ocupa un lugar destacado el conocimiento del contenido de las matemáticas como disciplina.
- Lappan y Theulen Lubinski (1994), a la luz de los Professional Standards for Teaching Mathematics (NCTM, 1991), identifican el conocimientos de las Matemáticas como uno de los pilares básicos de la formación de docentes.
- Schoenfeld y Kilpatrick (2008) señalan el conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud como una de las dimensiones que debe dominar el profesor de matemáticas.
- Llinares (2009), revisando la literatura existente, considera que el

conocimiento de y sobre las Matemáticas, sobre la actividad matemática y sobre el currículum de matemáticas constituyen partes importantes del conocimiento de los profesores.

La cuestión central se traslada entonces al debate acerca del tipo de conocimiento matemático que se debe trabajar en los planes de formación de maestros. Por ejemplo, Fennema y Loef (1992) aseguran que el profesor deberá tener un entendimiento conceptual de las Matemáticas cifrado en dos constructos importantes: la naturaleza de las Matemáticas en sí misma y la organización mental del conocimiento matemático.

El conocimiento de cómo las Matemáticas deben ser presentadas en la enseñanza requiere tomar una materia compleja y transformarla de modo que pueda ser entendida por los alumnos. Esto distingue a los profesores de Matemáticas de los matemáticos profesionales (investigadores); estos deben crear nuevos conocimientos de la disciplina mientras que los profesores deben fomentar la comprensión en la mente del alumno, lo que requiere, evidentemente, procesos formativos distintos.

En consecuencia, parece plausible que para facilitar el aprendizaje comprensivo el profesor debe saber transformar/presentar las Matemáticas bajo formas sencillas, asequibles y conectadas con conocimientos y situaciones conocidas para que los estudiantes puedan ver la relación entre lo que conocen y el nuevo conocimiento que deben adquirir. Para ello, es necesario tener un dominio del contenido que incluye un alto nivel de comprensión del mismo.

Pero nuestro interés no se centra todavía en la formación matemática que hay que planificar para los futuros docentes ni en cómo debe ser dicha formación, sino en la formación matemática con la que estos llegan a la Universidad, lo que remite directamente a los alumnos de Magisterio de Educación Primaria sobre los que se han realizado estudios que indican que la formación matemática con la que acceden a la Universidad es insuficiente y con grandes lagunas en la comprensión de nociones elementales (Llinares y Sánchez, 1990; García; Escudero; Carrillo y Contreras, 1993; Llinares y Sánchez, 1994; Forner 1993, 1996; Fortes, A. 1995; Palarea; Hernández; Socas, 2001; Alcalde, M. 2010; Siegfried, J.M. 2012). No obstante, la formación del maestro en general y más particularmente aquella que le permitirá responsabilizarse de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas constituye un referente necesario de nuestra investigación y por ello analizaremos en lo que sigue, las características generales de un maestro de Primaria, las funciones del maestro como educador matemático y los programas de formación del maestro de Primaria.

2.9.2 Características generales de un maestro de primaria

El perfil general de un maestro de Primaria es el de un profesional “generalista”, abarcando la formación de las áreas básicas del currículo escolar: Matemáticas, Lengua, Conocimiento del Medio y Educación Artística, si bien no se incluyen en su tareas docentes los aspectos específicos relacionados con las áreas de Música, Educación Física y del Deporte, Lengua Extranjera y Religión o Ética. Así se especifica en los documentos oficiales: "*El papel del profesor en la*

Educación Primaria, es quizás uno de los elementos más determinantes de todo el proceso educativo ya que es en última instancia quien va a guiar de forma directa el aprendizaje de un grupo de alumnos. Es el profesor el que deberá tomar una serie de decisiones de diversa índole que configurarán una forma particular de intervención didáctica" (Junta de Andalucía, 1989). En consecuencia, del análisis de los objetivos, principios y fines de la educación, LOE artículo 1, capítulo I, y de los principios generales y los objetivos de la Educación Primaria, LOE artículos 16 y 17, capítulo II, se desprende la necesidad de una formación inicial generalista del futuro maestro/a de Educación Primaria que le asegure las competencias necesarias y le capacite para el desarrollo de su profesión; formación general que debe incluir como aspecto destacado una formación específica disciplinar adecuada en las materias fundamentales (lengua castellana, matemáticas, conocimiento del medio social y natural y educación artística).

En la síntesis final del Título de Maestro en Educación Primaria del Libro Blanco de Magisterio de la ANECA (2004) se puede leer lo siguiente: "*se propone un Grado de Maestro de Educación Primaria (240 créditos ECTS) que debe conferir competencias docentes generales para ayudar al desarrollo, tutelar el aprendizaje y promover la consecución de los objetivos que establece el Sistema Educativo para la Educación Primaria. Ha de ser capaz de ser responsable docente de todas las materias comunes que actualmente son competencia de los tutores (Matemáticas, Lengua, Ciencias-Geografía e Historia [o Conocimiento del Medio] y Educación Artística [plástica])*".

En la ficha Técnica de la Propuesta de la Conferencia de Decanos de Educación y Magisterio del Título de Grado de Maestro de Educación Primaria se afirma lo siguiente: "*. . . para desarrollar con eficacia los procesos educativos propios de las distintas áreas de esta etapa, los maestros han de adquirir la formación académica y práctica acorde con los objetivos previstos en las leyes que regulan sus funciones. Los maestros han de estar capacitados para participar activamente tanto en el diseño como en el desarrollo de proyectos de innovación que contribuyan a la permanente mejora cualitativa del Sistema Educativo*".

Gimeno (1983), por su parte, apunta el siguiente listado de competencias generales que debe tener el profesorado:

1) Nivel de conocimientos suficiente para desarrollar los programas escolares.

2) Sensibilización ante la psicología del niño, sus peculiaridades, variables de su desarrollo y aprendizaje.

3) Capacitación en las diversas metodologías para conseguir que el alumno supere los objetivos y los contenidos de los programas, adaptándolos a las peculiaridades de los alumnos de forma que su aprendizaje sea activo, significativo y creador.

4) Comprensión y gobierno de las relaciones interpersonales en el aula y en el centro escolar, en un marco de relaciones no agresivas ordenadas por un sentido de la disciplina basado en el trabajo.

5) Programación a corto, medio y largo plazo de la tarea docente y del aprendizaje del alumno.

6) Conexión de los contenidos con la psicología del alumno y las

peculiaridades del medio.

7) Selección, capacidad de uso y confección de los medios técnicos apropiados para la enseñanza.

8) Capacidad de diagnóstico y evaluación del alumno, de su aprendizaje y de las variables que condicionan ese aprendizaje, en el orden escolar, personal y ambiental.

9) Capacitación para integrar la escuela en el medio extraescolar.

10) Organización del aula y del centro en las áreas de su competencia para mejor canalizar los métodos que utiliza.

11) Desenvolverse en el marco de las tareas administrativas que le incumben.

12) Atención especial a los aprendizajes instrumentales y sus problemas.

Por otra parte, teniendo en cuenta las interacciones educativas necesarias para facilitar el aprendizaje, Zabala (1995) establece las siguientes funciones que debe asumir el profesorado:

a) Planificar la actuación docente de una manera lo suficientemente flexible para permitir la adaptación a las necesidades de los alumnos en todo el proceso de enseñanza aprendizaje.

b) Contar con las aportaciones y los conocimientos de los alumnos, tanto al inicio de las actividades como durante su realización.

c) Ayudar a los alumnos a encontrar sentido a lo que están haciendo para que conozcan lo que tienen que hacer, sientan que lo pueden hacer y les resulte interesante hacerlo.

d) Establecer retos y desafíos a su alcance que puedan ser superados con el esfuerzo y la ayuda necesarios.

e) Ofrecer ayudas adecuadas a los progresos que experimentan y a los obstáculos con los que se encuentran en el proceso de construcción.

f) Promover la actividad mental autoestructurante que permita establecer el máximo de relaciones con el nuevo contenido, atribuyéndole significado en el mayor grado posible y fomentando los procesos de metacognición que le faciliten asegurar el control personal sobre sus conocimientos y los propios procesos durante el aprendizaje.

g) Establecer un ambiente y unas relaciones presididas por el respeto mutuo y por el sentimiento de confianza.

h) Promover canales de comunicación que regulen los procesos de negociación, participación y construcción.

i) Potenciar progresivamente la autonomía de los alumnos en el establecimiento de objetivos, en la planificación de las acciones que les conducirán a ello y en su realización y control, posibilitando que aprendan a aprender.

j) Valorar a los alumnos según sus capacidades y esfuerzo, teniendo en cuenta el punto personal de partida y el proceso a través del cual adquieren conocimientos, e incentivando la autoevaluación de las competencias como medio para favorecer las estrategias de control y regulación de la propia actividad.

El Diseño Curricular de la Junta de Andalucía para Educación Primaria establece el papel del Maestro de Primaria en los siguientes términos:

1. Deberá planificar y organizar las distintas relaciones que se pretenden establecer en su grupo de alumnos: tipo de intervenciones en el grupo, tipo de relaciones entre alumnos, con los padres y con el resto de la comunidad. Debe ser por tanto un maestro estructurador de relaciones.

2. El maestro debe constituirse en modelo adulto significativo para su grupo de alumnos. El maestro debe cultivar actitudes: de respeto y confianza en el niño, fomentando el sentimiento de seguridad del niño, de afecto, de diálogo, de coherencia, de no autoritarismo, etc.

3. El maestro tiene el importante papel en cuanto a la formación en la clase de un grupo humano cohesionado mediante el empleo de recursos como: la asamblea, formación de grupos de trabajo, relación dentro y fuera del aula.

4. El maestro tiene un papel esencial como mediador de aprendizajes. Debe diseñar su intervención didáctica en función de los procesos de adquisición de conocimiento y características evolutivas de los alumnos.

5. El maestro como investigador curricular en el aula. Frente al simple papel de técnico ejecutor, el maestro puede asumir el papel de investigador de su acción desde un planteamiento basado en que la ejecución de algo puede ser mejorada; sus programaciones adquieren el papel de hipótesis de trabajo a comprobar.

Estamos de acuerdo con Segovia (1997a) en que este perfil de Maestro de Primaria tiene unas características generales que, consideradas como metas, no son exclusivas de ningún área de conocimientos. Desde cualquier área y, en particular, desde el área de matemáticas, se puede potenciar la consecución de estos objetivos de manera indirecta, asumiendo como profesores de educación matemática los mismos roles que queremos que nuestros alumnos desempeñen como futuros maestros. Por ejemplo, promoveremos un maestro investigador si a su vez nosotros adaptamos esa manera de ejercer la profesión en nuestras clases.

Por último señalamos los objetivos que reflejan la orientación general del título del grado de Educación Primaria en la memoria "verifica" aprobada por la ANECA el 23 de junio de 2010.

1. Formar profesionales capaces de anticiparse a las necesidades integrales del alumnado a través del diseño y desarrollo de propuestas de trabajo inclusivas en donde tenga cabida el alumnado procedente de distintos entornos familiares y socio-culturales y de este modo garantizar la igualdad de acceso, éxito y utilidad social.
2. Formar profesionales reflexivos, creativos, comprometidos y autónomos que sepan responder a las exigencias de una sociedad cambiante, plural que atienda a las diferentes circunstancias, valiéndose de diferentes entornos de aprendizaje, metodologías y recursos didácticos.
3. Formar profesionales con una visión integradora y global del saber profesional, con el convencimiento de que la formación no es una actividad puntual en la vida, sino que se va desarrollando de manera consciente e intencionada a lo largo de ella, siendo la investigación un pilar clave para avanzar en la construcción del conocimiento profesional.
4. Formar profesionales polivalentes que ante todo sean educadores con sólidas competencias en el "saber" y "saber hacer", "saber vivir y trabajar con otros" así como en el "saber ser", entendida esta última como la formación integral de las

personas que van a trabajar en la enseñanza.

5. Formar profesionales con competencias docentes generales y específicas para ayudar al aprendizaje, al desarrollo y a la consecución de los objetivos previstos por las normativas educativas para el alumnado de la etapa de primaria.

2.9.3 El maestro de Primaria como educador matemático

La idea de *"educador matemático"* trata de resaltar la importancia del aspecto educador por encima del aspecto instructivo en matemáticas; educar en matemáticas implica tener en cuenta las características y peculiaridades de la persona que es educada y situar la educación matemática dentro de un sentido general de la educación.

> *"Si hasta este momento han predominado los componentes instructivos del conocimiento matemático, cada vez se aprecia con más fuerza la insuficiencia de ese planteamiento y se va tomando conciencia de que la formación matemática es una dimensión relevante de la educación de los niños y adolescentes. De ahí que se hable de Educación Matemática, con una visión más integradora de las capacidades humanas que se desarrolla mediante los procesos de aprendizaje de las matemáticas" (Rico, 1991).*

Por otra parte, a pesar del tiempo transcurrido desde que escribiera en 1955 su decálogo de sugerencias dirigidas a los profesores de matemáticas, creemos que las siguientes ideas del profesor Puig Adam siguen siendo de actualidad:

1) No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.
2) No olvidar el origen concreto de la matemática ni los procesos históricos de su evolución.
3) Presentar la matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.
4) Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
5) Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
6) Estimular la actividad creadora, despertando el interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
7) Promover en todo lo posible la autocorrección.
8) Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
9) Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
10) Procurar que todo alumno tenga éxitos que eviten su desaliento.

Un documento más reciente en este sentido es el editado por *The Professional Standards for Teaching Mathematics* del NCTM (1991), en el cual se consideran las siguientes funciones a cumplir por un buen profesor de matemáticas:

a) Crear un ambiente en la clase que favorezca la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
b) Fijar objetivos así como diseñar y seleccionar tareas matemáticas que ayuden a los estudiantes a conseguir dichos objetivos.
c) Estimular y dirigir el discurso de la clase para que, tanto profesor como estudiantes, vean con claridad lo que se está aprendiendo.

d) Analizar el aprendizaje, las tareas matemáticas y el ambiente en orden a dirigir la instrucción y la toma de decisiones.

Por su parte, Niss (1994) presenta las características de un buen profesor de matemáticas:

1º) Los profesores deben acometer el equipamiento de sus estudiantes con conocimientos de las matemáticas, intuición y experiencia, que puedan servirles en su vida privada, profesional y social. En otras palabras, los profesores deben servir como genuinos mentores y no sólo como simples empleados.

2º) Los profesores deben ser capaces de realizar todo el trabajo que se espera hagan sus estudiantes. En otras palabras, los profesores deben de poseer la lista de competencias que deberá requerir a sus estudiantes (esto no implica que deban de ser tan buenos realizadores como el mejor de sus estudiantes).

3º) Usualmente los profesores van a estar en activo durante varias décadas por lo que, al ser preparados para su trabajo, se deberá tener en cuenta esta circunstancia y se les ayudará a ser constructores activos en el desarrollo de la educación matemática, incluso si esto implica cambios fundamentales en las componentes y factores que determinan la figura y funciones de los profesores de matemáticas. En otras palabras, en orden a ser agentes e instrumentos para el desarrollo y ante las posibilidades de cambios, los profesores han de poseer una gran flexibilidad, competencia que va más allá del requerimiento inmediato diario.

A partir de los enunciados anteriores se describe las cualidades del profesor de matemáticas ideal (Segovia, 1997a).

a) Debe poseer un profundo y rico conocimiento y una percepción de las matemáticas en multitud de dimensiones y manifestaciones. Así, debe de adquirir no sólo teorías matemáticas, sino también aspectos de la matemática como una ciencia que tiene historia y que se introduce en la sociedad como parte de la cultura humana en toda su diversidad. Muchos modelos matemáticos son usados en un gran número de diferentes contextos extramatemáticos en estrecha relación con otras materias de categoría similar. Las matemáticas no son sólo un edificio de un producto teórico, sino también un área de actividad y procesos que incluye plantear, explorar, investigar, crear y resolver problemas.

b) Comprender continuamente las razones fundamentales para enseñar matemáticas a las distintas categorías de estudiantes y cómo estas razones pueden ser discutidas con los propios estudiantes, con colegas y otras personas, parientes, vecinos, políticos, etc.

c) Estar en un continuo proceso de crecimiento y desarrollo basado en la apertura de la mente; orientar el conocimiento al interés reflejado por la gente, por los educadores matemáticos, los investigadores, la sociedad, la cultura, es decir, ser un profesor profesionalmente activo.

d) Ser capaz de seleccionar y producir una riqueza de materiales para la enseñanza y recursos ajustados a las circunstancias específicas y a las necesidades de sus clases y de sus estudiantes.

e) Ser capaz de organizar grupos de trabajo y supervisar diferentes formas de estudio y de actividades apropiadas para trabajar en y con las matemáticas.

f) Ser capaz de comunicar con sus estudiantes y con otras personas, en y sobre matemáticas, en una amplia variedad de caminos y niveles.

g) Ser capaz de tomar ante sus estudiantes la posición y el papel del matemático en la sociedad y en la cultura.

h) Poseer conocimiento teórico y empírico sobre los procesos en donde los estudiantes deben experimentar, percibir y reflexionar, sobre los errores que estos pueden cometer, sobre las formas de los alumnos para obtener conocimiento matemático.

i) Ser una persona capaz de observar e investigar con actitud científica el proceso y el producto del aprendizaje de sus estudiantes, es decir, ser capaz de llevar a cabo a pequeña escala investigaciones didácticas.

j) Ser una persona capaz de valorar, en múltiples facetas, la comprensión y los logros de sus estudiantes sobre el conocimiento matemático así como de comunicar y discutir los descubrimientos con los estudiantes individualmente o en grupo.

Por último, citaremos las recomendaciones de Romberg (1991) en torno a la necesidad de profesores:

a) Que creen situaciones epistemológicas en las que los niños pueda explorar problemas, crear estructuras, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos.

b) Con los conocimientos académicos y pedagógicos para proporcionar enfoques flexibles, estimular representaciones informales y múltiples y al mismo tiempo promover el aumento gradual del lenguaje matemático.

c) Que puedan diagnosticar las dificultades y planificar cuestiones que faciliten el progreso mediante el conflicto cognitivo.

d) Que puedan mantener una atmósfera cooperativa que conduzca a una mayor independencia de los alumnos, una reflexión atenta sobre las estrategias de motivación cognitiva y un reconocimiento de los tópicos epistemológicos, cognitivos y sociales de la enseñanza y del aprendizaje.

2.9.4 La formación en Matemáticas y su Didáctica en los dos últimos planes de estudios de Maestro/a de Primaria

El Grado en Educación Primaria que se imparte en la Facultades de Educación es heredero del proceso que se inicia con la creación de las escuelas Normales en España en el periodo que va desde 1839 a 1972. La Escuela Normal de Maestros de Málaga se inaugura en 1846 y la de Maestras en 1862, se transforman en Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado en 1972. Pero no es hasta 1983, con la Ley de Reforma Universitaria, cuando realmente se lleva a cabo su integración en la Universidad que culmina finalmente con la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (1990).

No realizaremos un análisis histórico de todo el proceso descrito, que por otra parte se puede consultar en Rico y col (1996), sino que nos limitaremos a analizar brevemente la formación en matemáticas y su didáctica en los dos últimos planes de estudio: el plan de 1990 y los actuales estudios de grado que comienzan en 2008.

2.9.4.1 Los Diplomados en Magisterio del plan de 1990

En 1990 se elabora el Plan de Estudios que en la actualidad está en proceso de extinción. Dicho Plan incluía el bachillerato superior junto a la prueba de selectividad como condiciones para el ingreso en las Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado. La formación se prolongaba durante tres años, al término de los cuales el alumno adquiría el título de Maestro Diplomado en: Educación Infantil, Educación Primaria, Audición y Lenguaje, Educación Especial, Educación Musical, Educación Física, y Lengua Extranjera. A partir de este Plan de Estudios se produce la plena integración del profesorado de las Escuelas Universitarias en los cuerpos universitarios y muchas de las llamadas Escuelas Normales y Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado en Facultades de Educación, dando así origen a un nuevo tipo de centros de formación del profesorado con estudios de primero, segundo y tercer ciclos, lo que se produce en la Universidad de Málaga en el año 1992.

Con la aprobación de la LOGSE se publica el RD 1440/1991, de 30 de agosto, por el que se establece el titulo universitario de Maestro en sus diversas especialidades. Las materias que conforman estos planes de estudio se clasifican en:

- Materias troncales, de obligada inclusión en todas las Universidades.
- Materias obligatorias y optativas, propuestas por cada Universidad.
- Materias de libre configuración, propuestas por cada Universidad y elegidas por el alumnado en orden a flexibilizar y organizar personalmente la configuración del propio currículo.

Para el Área de Didáctica de la Matemática y en relación con el título de Maestro en Educación Primaria se propone la asignatura de “Matemáticas y su Didáctica” con ocho créditos y los siguientes descriptores: conocimiento de las Matemáticas, contenidos, recursos y materiales para la enseñanza de las Matemáticas. Se proponen materias con descriptores similares para las diplomaturas de Maestro en las distintas especialidades pero con una asignación de 4 créditos, salvo en las especialidades de Educación Especial y de Audición y lenguaje donde no se incorpora ninguna asignatura troncal relacionada con el Área mencionada.

En la Resolución 10024 de 7 de abril de 1999 (BOE Nº 108), de la Universidad de Málaga, se modifica el plan de estudios conducente a la obtención del título de Maestro (especialidad en "Educación Primaria"), ampliándose la asignatura de Matemáticas y su Didáctica a 12 créditos, 6 teóricos y 6 prácticos, y añadiendo a los descriptores anteriores el de la evolución del conocimiento matemático en los escolares de Educación Primaria. Se incorporan en este plan experimental de la Universidad de Málaga como optativas las siguientes asignaturas:

Específicas para el título de Maestro de Educación Primaria:

- “Matemáticas”, con 6 créditos y adscrita al Área de Matemática Aplicada, con los siguientes descriptores: Estructuras algebraicas, movimientos en el plano, estudios de las simetrías, concepto de magnitud, proporcionalidad de magnitudes.
- “Resolución de problemas matemáticos”, con 6 créditos y adscrita al Área de conocimiento de Didáctica de las Matemáticas con los siguientes descriptores: Resolución de problemas, análisis de errores, estrategias de resolución, procedimientos y algoritmos, análisis de tareas, procesos de

resolución, tipos de problemas.

Comunes para todas las titulaciones de Maestro:

- "Elementos de Geometría", con 6 créditos y adscrita a las áreas de Geometría, Topología, Algebra y Matemática Aplicada, con los siguientes descriptores: Figuras geométricas elementales, resolución de problemas geométricos.
- "Introducción al Álgebra", con 6 créditos y adscrita a las áreas de Álgebra y Matemática Aplicada, con los descriptores: Estructuras algebraicas.
- "Laboratorio de matemáticas", con 6 créditos y adscrita al área de Didáctica de las Matemáticas, con los descriptores: La manipulación y la acción en la construcción del conocimiento matemático, juegos y materiales para el aprendizaje de conceptos y procedimientos matemáticos básicos, juegos y materiales en el currículo de matemáticas, análisis didáctico de los recursos y materiales.

La formación recibida por los Maestros formados en el Plan 90 es manifiestamente mejorable, como indican Blanco, L. (2002) y Fernández-Cano, Nortes, Gómez, Fonseca, Sáenz, Chamorro (2005) en sendas conclusiones que se han tomado como referencia para la modificación de los nuevos estudios de Grado. Igualmente, en las "Conclusiones de la Reunión de Alcalá de Henares (op. Cit., 2005) se realiza un análisis de dicha formación y se establecen algunas de las directrices que deben seguir los nuevos planes de estudio en lo concerniente a la formación en Matemáticas y en Didáctica de la Matemática de los futuros maestros.

Por último, en las conclusiones de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1999) y en el informe español sobre el TEDS-M (Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los futuros maestros) (2012) se recogen diversas consideraciones sobre estos planes de estudios, distinguiendo en ellas las relativas a las directrices nacionales, a los desarrollos que realizan las Facultades y Escuelas y a los programas implementados por los propios departamentos; las conclusiones de estos estudios han servido de base para la fundamentación y elaboración de los Planes de estudio actuales que se analizan a continuación.

2.9.4.2 El Grado de Maestro/a en Educación Primaria

La Declaración de Bolonia (19 de junio de 1999) tenía por objeto el establecimiento para el año 2010 de un Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) para conseguir:

- Un sistema comparable de estudios de grado, Máster y Doctorado;
- Una medida del trabajo y estudio de los estudiantes fácil de medir y transferir, denominado crédito ECTS (European Credit Transfer System);
- Facilitar la movilidad europea e internacional;
- La garantía de la calidad de las titulaciones e instituciones universitarias;

Dentro de este proceso se aprueban normativas que persiguen regular las distintas propuestas de planes de estudio para el grado de Maestro en Educación Primaria. Entre ellas destacamos como relevantes:

<u>Regulaciones generales sobre Educación Primaria:</u>

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (BOE nº 106, 4 de mayo).

- Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (BOE nº 293, 8 de diciembre de 2006).

- Decreto 230/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación Primaria en Andalucía (BOJA 8 de agosto de 2007).

Regulaciones ministeriales que afectan al Grado de Maestro en Educación Primaria:

- Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales (BOE nº 260, 30 de octubre).

- Resolución de 17 de diciembre de 2007, de la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación, por la que se publica el Acuerdo del Consejo de Ministros de 14 de diciembre de 2007 que establece las condiciones a las que deberán adecuarse los planes de estudio conducentes a la obtención de títulos que habiliten para el ejercicio de la profesión regulada de Maestro de Educación Primaria (BOE nº 305, 21 de diciembre de 2007).

- Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos de verificación de los títulos universitarios oficiales para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria (BOE nº 312, 29 de diciembre de 2007).

- Real Decreto 1125/2003, de 5 de septiembre, por el que se establece el sistema de créditos y el sistema de calificaciones en las titulaciones universitarias de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional (BOE nº 224, de 18 de septiembre de 2003).

- Real Decreto 1044/2003, de 1 de agosto, por el que se establece el procedimiento para la expedición por las universidades del Suplemento Europeo al Título (BOE nº 218, de 11 de septiembre de 2003).

Regulaciones autonómicas que afectan al grado de Maestro de Educación Primaria:

- Acuerdo provisional del CAU de 22 de enero de 2008, para la implantación de las nuevas enseñanzas universitarias oficiales.

- Acuerdos de la comisión andaluza de la titulación de Maestro de Primaria de 28 y 29 de mayo de 2008.

- Acuerdos de la comisión de Rama de Ciencias Sociales y de la Educación de 10 de junio de 2008.

Regulaciones de la Universidad de Málaga que afectan al grado de Maestro de Primaria:

-Diseño de titulaciones. Documento marco UMA.

Con estas normativas y otros documentos de ayuda, la Comisión encargada de la elaboración del Grado de Maestro en Educación Primaria realiza una propuesta de estudios que es aprobada por la ANECA el 23 de junio de 2010, después de completar las aprobaciones oportunas de la Junta de Facultad, la Comisión de Títulos de la UMA y el Consejo de Gobierno de la Universidad de Málaga.

La Organización modular de la propuesta contenida en la Orden ECI/3857/2007, es la que aparece en la *Tabla 2.2*.

Tabla 2.2 Estructura modular del grado de Educación Primaria UMA.

MODULOS DE FORMACIÓN BÁSICA (60 créditos)		
Aprendizaje y desarrollo de la personalidad (M001)	**Procesos y contextos educativos (M002)**	**Sociedad, familia y escuela (M003)**
12 créditos	39 créditos	6 créditos

MÓDULOS DIDÁCTICO DISCIPLINAR (100 créditos)					
Enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Experimentales (M004)	**Enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Sociales (M005)**	**Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas (M006)**	**Enseñanza y aprendizaje de las Lenguas (M007)**	**Enseñanza y aprendizaje de la educación musical, plástica y visual (M008)**	**Enseñanza y aprendizaje de la educación física (M009)**
14 créditos	14 créditos	21 créditos	27 créditos	18 créditos	6 créditos

MÓDULO DE PRÁCTICUM(44 + 6 créditos) (M010)	
PRÁCTICAS ESCOLARES	Trabajo fin de grado
44 CRÉDITOS	6 créditos

MÓDULOS OPTATIVOS	
MÓDULO OPTATIVAS A (24) **(M012)**	MÓDULO OPTATIVAS B (6) **(M011)**
Este módulo está formado por 4 materias optativas de 24 créditos cada una, de las que el/la alumno/a deberá elegir una; cada una de estas materias está organizadas en cuatro asignaturas de 6 créditos cada una, que corresponden a parte de la carga lectiva necesaria para el reconocimiento de una de las cuatro menciones que se proponen en este título.	Este módulo está formado por 4 materias optativas de 6 créditos cada, de las que el/la alumno/a deberá elegir una; entre ellas se incluyen dos materias/asignaturas de "Enseñanza de la doctrina católica y su pedagogía" en cumplimiento de la Resolución de 17 de diciembre de 2007, de la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación, por el que se publica el Acuerdo del Consejo de Ministro de 14 de diciembre de 2007.
24 créditos	6 créditos

Las mejoras sustanciales que se recogen en este plan de estudio respecto a los anteriores se concretan en las siguientes aportaciones:

- Título de grado equiparable al resto de las titulaciones universitarias con una ampliación de un curso académico con 240 créditos ECTS.
- Apuesta por la formación de un Maestro generalista con competencias en las materias básicas del currículo de Primaria. El 90% de los créditos se destinan a esta orientación.
- Frente a la dispersión y el excesivo número de optativas de las diplomaturas de Maestro, el nuevo grado organiza las enseñanzas en itinerarios/menciones cualificadoras que complementan la formación generalista y capacita a los alumnos en una de las cuatro especialidades clásicas de la Educación Primaria.
- Incremento de créditos en la formación de las didácticas especiales. En los estudios de Diplomados en Maestro de Primaria las didácticas especiales suponían un 35 % de la carga total (74 créditos), frente al 41,6% en el grado (100 créditos).

En el caso de las materias del área de Didáctica de las Matemáticas, se pasa de un 5,8% (12 créditos) a un 8,75% (21 créditos).

-Aumento de créditos asignados al módulo de prácticas escolares, que en los estudios de Maestro a extinguir era de 36 créditos (17,5%) frente a los 44 créditos en el nuevo grado (18,3%), a los que se añaden los 6 del TFG (Trabajo Fin de Grado).

- La distribución de las asignaturas en materias y módulos permite una visión global de todas ellas, permitiendo una definición conjunta de competencias, contenidos, metodologías, sistemas de evaluación, etc.

- El incremento de créditos y su distribución en cuatro cursos permite organizar el módulo de *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* en tres asignaturas distribuidas en los tres últimos años de carrera.

- La consideración de las prácticas de enseñanza como módulo integrador que permite la formación del pensamiento práctico y, por tanto, se constituye en elemento esencial en la relación teoría-práctica, permitiendo definir y plantear situaciones en las que el alumnado pueda construir, modificar o refutar conocimientos y competencias utilizando los contenidos disciplinares.

- Eliminación de los créditos de libre configuración, que aunque respondían a la posibilidad de que el alumnado configurara y completara su propio currículo, en la práctica se había traducido en la búsqueda de asignaturas que resultaran "cómodas" de aprobar.

2.9.4.3 El Módulo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el Grado de Maestro/a en Educación Primaria

En la Orden ECI/3857/2007 se describen los módulos que incluyen los planes de estudio: módulos de formación básica, a los que se le asignan 60 créditos ECTS; módulos didáctico y disciplinares, a los que se les dedica 100 créditos, y el módulo de Prácticum, con 50 créditos. Dentro de los módulos didáctico-disciplinares se recoge en la *Tabla 2.3* la estructura del submódulo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, describiéndose a continuación las competencias que se deben adquirir en el mismo.

Tabla 2.3 Estructura del modulo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas (M006)	21 créditos, formación didáctico-disciplinar y obligatoria	
Materia/Asignatura 1º	*Materia/Asignatura 2º*	*Materia/Asignatura 3º*
Didáctica de la Aritmética (601) 9 créditos, carácter obligatorio	**Didáctica de la Geometría (602)** 6 créditos, carácter obligatorio	**Didáctica de la medida (603)** 6 créditos, carácter obligatorio

Competencias del Módulo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:

El Real Decreto 1393/2007 y la Orden ECI/3854/2007 regulan las competencias que debe adquirir un Maestro de Educación Primaria y las agrupa en tres categorías diferentes. En primer lugar, se enuncian en el Anexo I del Real Decreto las competencias básicas que como mínimo deberán acreditar los gradua dos. En segundo lugar, las competencias específicas y las competencias del módulo didáctico-disciplinar, correspondientes a la "enseñanza y aprendizaje de las matemáticas", están incluidas en la Orden ECI/3854/2007. En la *Tabla I.10.1* del Anexo I se incluyen las competencias correspondientes a cada uno de estos tres grupos.

Contenidos del Módulo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Los contenidos del Módulo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la memoria verifica del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Facultad de Ciencias de la educación de la Universidad de Málaga son los siguientes:

- Didáctica de la aritmética, geometría, medida, tratamiento de la información, azar y probabilidad: contenidos, recursos y materiales para su enseñanza, errores y dificultades de aprendizaje y orientaciones didácticas.
- Diseño, estudio y análisis de propuestas didácticas.
- Tres ejes transversales: resolución de problemas, TICs y atención a la diversidad.

Materias/Asignaturas del Módulo de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas

Contiene las siguientes tres materias/asignaturas distribuidas en los tres últimos cursos del Grado de Maestro de Educación Primaria:

- **Didáctica de la Aritmética**: asignatura ubicada en el primer semestre del segundo curso, con una extensión de 9 créditos ECTS. En esta materia se abordan los siguientes contenidos específicos:
    - Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas:
        - Competencias básicas y matemáticas específicas.
        - Currículo de matemáticas en la educación primaria.
        - La resolución de problemas y las TICs como ejes transversales en la enseñanza de las matemáticas.
    - Didáctica de la aritmética elemental:
        - Análisis de conceptos y procedimientos de aritmética elemental: Sistemas de numeración, números naturales, números enteros y fraccionarios. Operaciones aritméticas y algoritmos.
        - Errores y dificultades para su enseñanza y aprendizaje.
        - Recursos y materiales didácticos para su enseñanza.
        - Orientaciones didácticas.
        - Diseño, estudio y análisis de propuestas didácticas.

- **Didáctica de la Geometría**: asignatura ubicada en el segundo semestre de tercer curso con una asignación de 6 créditos. En esta materia se abordan los siguientes contenidos específicos:
    - Análisis de conceptos y procedimientos geométricos elementales: figuras, elementos notables, regularidades geométricas y construcciones geométricas con materiales clásicos y software dinámico. Áreas de figuras planas. Cuerpos geométricos y volúmenes.

-Errores y dificultades para su enseñanza y aprendizaje.
-Recursos y materiales didácticos para su enseñanza.
-Orientaciones didácticas.
-Diseño, estudio y análisis de propuestas didácticas.

- **Didáctica de la Medida**: asignatura ubicada en el segundo semestre de cuarto curso con una asignación de 6 créditos. En esta materia se abordan los siguientes contenidos específicos:
  - Didáctica de la medida, del tratamiento de la información, del azar y la probabilidad:
  - Análisis de conceptos y procedimientos: cantidad y medida, estimación y aproximación, nociones básicas de estadística y probabilidad (datos, representación gráfica, azar y probabilidad elemental).
  - Errores y dificultades para su enseñanza y aprendizaje.
  - Recursos y materiales para su enseñanza.
  - Orientaciones didácticas.
  - Diseño, estudio y análisis de propuestas didácticas.

Algunas consideraciones sobre la formación para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en el nuevo Grado de Maestro/a de Educación Primaria.

Aunque el grado de Maestro en Educación Primaria es una titulación en desarrollo y aún no disponemos de datos para realizar una valoración del resultado formativo de la misma, no cabe duda de la mejora en el tratamiento que han recibido las asignaturas del área de Didáctica de las Matemáticas en su organización curricular. El módulo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tiene asignado un porcentaje que está entre el 7,5% y el 8,75 % (de 18 a 22 créditos sobre un total de 240), sin contar la participación que el área tiene en las prácticas y en el TFG.

Las propuestas de mejora del Seminario sobre "La formación inicial del profesorado de matemáticas ante la implantación de los nuevos grados en Infantil, Primaria y Master de Secundaria" (Estepa y col., 2011) no apuestan por una mayor participación del área en el currículo de la formación inicial de Maestros, sino que se orientan fundamentalmente hacia la mejora de la coordinación entre las distintas asignaturas del área, las materias del prácticum y del TFG. Dichas propuesta se concretan en los siguientes puntos:

- *Para que el Grado promueva los conocimientos y competencias profesionales que el maestro de Primaria requiere, es necesario, aumentar la coordinación entre todas las materias en general, y de las materias que competen al Área de Didáctica de la Matemática en particular.*
- *Es necesario clarificar la orientación de las asignaturas de Matemáticas para Maestros, Didácticas de las Matemáticas o Matemáticas y su Didáctica, que aparecen en las diferentes propuestas, de tal forma que resulten coherentes con las directrices oficiales y posean el carácter disciplinar y didáctico adecuado a la profesión de docente en Matemáticas.*

- Formular una propuesta de organización y ubicación del Prácticum que potencie y de sentido al conocimiento teórico y técnico recibido y su aplicación en un contexto real.
- Establecer con claridad la coordinación del profesorado del Grado y del profesorado de Primaria que participa en el mismo (Convenios de colaboración Universidad/Consejería de Educación).
- Adecuar el número de estudiantes por grupo, ya que las nuevas metodologías que emanan de las propuestas de los nuevos títulos de grado requieren grupos de estudiantes no muy numerosos
- Reflexionar y concretar los estándares para el Trabajo Fin de Grado (TFG), en cuanto a la participación del área de Didáctica de la Matemática.

2.9.4.4 Los sistemas de numeración en el grado de Maestro/a de Educación Primaria

El proceso formativo que se viene desarrollando en la actualidad en torno a este contenido matemático y didáctico se sitúa en el segundo capítulo del temario de la asignatura Didáctica de la Aritmética. Algunas de las pautas que orientan dicho desarrollo son las siguientes:

- Dada las limitaciones del alumnado y el déficit de conocimiento con el que acceden a los estudios de Grado, circunstancia acreditada por García, Escudero, Llinares y Sánchez (1994); Llinares y Sánchez (1990); Carrillo y Contreras (1993); Forner (1993, 1996); Fortes, A. (1995); Palarea, Hernández y Socas (2001); Siegfrid (2012) y por nuestra propia experiencia, y reflejada en la primera conjetura de la investigación que se presenta, no se realiza una mera descripción del concepto de número, sino que se opta por su reconstrucción intuitiva basada en su fenomenología y en los usos y situaciones en los que interviene el número natural. Se trata de una orientación que tiene en cuenta los aspectos fundamentales de los planteamientos incluidos en el capítulo primero de Castro, E y col. (1987) y en los contenidos y enfoques presentados en Gómez, B. (1989).

- Se hace hincapié en la diferenciación entre el propio concepto de número y su representación. Para ello se realiza una reconstrucción “ficticia” del proceso histórico por el que pasa la representación numérica, partiendo de las primeras representaciones y progresando por ellas mediante la aplicación de los principios de agrupamiento, multiplicativo y posicional (Gómez, B. 1.989). En el desarrollo del proceso formativo se analizan algunos de los sistemas representativos de las categorías descritas por Guitel, G. (1975) e Ifrach, G. (1997).

- Se describen las propiedades que caracterizan al sistema de numeración decimal, lo que permite construir otros sistemas de representación posicionales en los que se realizan los diferentes algoritmos de las operaciones elementales (contexto privilegiado para justificar los procedimientos implícitos utilizados en ellos).

- Se analizan algunos estudios sobre dificultades y errores en la construcción de la numeración en niños y niñas de educación infantil y primaria.

- Se analizan igualmente alternativas didácticas y los recursos y materiales implicados en ellas.

- Se incide en el diseño de unidades didácticas sobre el contenido matemático del tema, utilizando para ello un procedimiento común para todos los contenidos abordados en el programa de la asignatura.

CAPÍTULO 3

Comprensión del conocimiento matemático, su interpretación y valoración: antecedentes y análisis didáctico

3.1 Introducción

Durante las últimas décadas la preocupación por el estudio de la comprensión se ha generalizado en el ámbito de la Educación Matemática al reconocerse, de forma mayoritaria, la conveniencia de garantizar entre los alumnos un aprendizaje comprensivo de las matemáticas, principalmente porque aporta privilegios y ventajas intelectuales, reduce las dificultades derivadas del carácter jerárquico de la propia disciplina matemática, proporciona experiencias satisfactorias que fomentan actitudes favorables hacia las matemáticas, apoya la autonomía en el aprendizaje futuro, permite adaptarse a las condiciones de un entorno tecnológico cada vez más desarrollado y complejo y propicia el uso flexible del conocimiento ante nuevos tipos de problemas en contextos diversos (Byers y Erlwanger, 1985; Carpenter y Lherer, 1999; NCTM, 2000; Rico, 1997), entre otras razones. A este reconocimiento hay que unir, de otro lado, la consideración de la especificidad del conocimiento matemático como factor determinante que condiciona su comprensión, lo cual acredita aún más que su estudio se contemple en la actualidad como una labor específica a realizar desde la Educación Matemática.

Desde una perspectiva complementaria, la aproximación a la comprensión a través del estudio de su relación con otras nociones cognitivas de similar complejidad constituye otra de las alternativas empleadas en su exploración. De este modo la comprensión comparte protagonismo con otros objetos de investigación de interés para el área, como el significado, el aprendizaje, el pensamiento matemático o la competencia, entre otros. La propuesta, que reconoce la comprensión como necesariamente vinculada al resto de configuraciones cognitivas, define una vía de acceso complementaria que extiende la posición centrada en el análisis específico de sus distintas dimensiones.

Es posible apreciar esta visión integral de la comprensión del conocimiento matemático en trabajos como los de Byers y Erlwanger (1985), donde se vincula con el aprendizaje y la memoria, los trabajos de Díaz Godino y Batanero (1994), en relación con el significado de los objetos matemáticos, o Bender (1996), que asume imagen y comprensión como modos de pensamiento distintos aunque estrechamente relacionados. Dos aportes recientes en este mismo sentido provienen de Warner, Alcock, Coppolo y Davis (2003), al estudiar la contribución del pensamiento matemático flexible en el crecimiento de la comprensión, y de Roth (2004), quien propone una aproximación fenomenológica al significado y la comprensión en el contexto de las gráficas de funciones.

Otro referente organizativo para las aproximaciones a la comprensión del conocimiento matemático, complementario a los ya descritos, se obtiene atendiendo a las posibles consecuencias que se derivan de ellas. En particular las aproximaciones a la comprensión en matemáticas tienen consecuencias en forma de:

- Implicaciones didácticas para la enseñanza;
- Influencia sobre otros temas de interés en Educación Matemática.

Por un lado, los estudios sobre comprensión suelen venir acompañados de recomendaciones, propuestas e iniciativas de distinta índole para fomentar el aprendizaje comprensivo entre los alumnos, como así ocurre en el caso del modelo propuesto por Gallardo y González (2006c), en el que se facilita un procedimiento operativo para la identificación y organización de situaciones matemáticas de utilidad para la práctica docente.

Por otro lado, las aproximaciones sobre comprensión aportan, además de información específica sobre su ámbito de estudio, referencias añadidas con las que mejorar la situación actual de conocimientos en torno a otras áreas de interés para la Educación Matemática, organizando, interpretando, explicando, solucionando o ampliando, en su caso, las distintas problemáticas ya existentes. Muestra de ello son las aportaciones de la aproximación representacional a la controversia vigente sobre la enseñanza del cálculo aritmético elemental en sus distintas manifestaciones, concretadas en propuestas basadas en la construcción de relaciones mediante la comparación de algoritmos alternativos como vía para favorecer la comprensión (Philipp, 1996; Mason, 1998). También son destacables las consecuencias derivadas de la aplicación del modelo Pirie-Kieren en el ámbito de la formación inicial de profesores de matemáticas (Cavey y Berenson, 2005).

La preocupación fundamental por el desarrollo de la comprensión matemática en los alumnos forma parte de un problema más amplio en el que también intervienen otras dimensiones del fenómeno (Meel, 2003). De hecho, es en el carácter multidimensional de la comprensión donde radica una de las principales causas por la que su estudio resulta una tarea altamente compleja y un condicionante para los distintos trabajos en curso. Por lo general, las aproximaciones a la comprensión en matemáticas reconocen la influencia de distintas dimensiones del fenómeno:

- El ***origen*** hace referencia a las situaciones y circunstancias responsables de la aparición de la comprensión y las ***fuentes*** a los acontecimientos concretos previos generadores de tales situaciones y que se encuentran en las experiencias generadoras que obligan al individuo a elaborar respuestas adaptadas a cada situación particular (English y Halford, 1995).
- Las dimensiones ***naturaleza*** **y** ***funcionamiento***, estrechamente relacionadas, suponen enfrentarse a las complejas cuestiones sobre qué es y cómo se produce la comprensión. Por tratarse de un constructo que acontece en la esfera interna del individuo, y por tanto sin posibilidad de ser observado directamente, estas

dimensiones suelen estudiarse al amparo de propuestas teóricas interpretativas de la relación reconocida entre los estados mentales del sujeto y su comportamiento externo observable. Una de estas propuestas, desarrolla una visión de la comprensión vinculada a las representaciones y conexiones internas del conocimiento matemático (Goldin, 2002; Hiebert y Carpenter, 1992; Romero, 2000). El empleo de tipologías generales de comprensión (Hiebert y Lefevre, 1986; Skemp, 1993) o de referencias metafóricas (Davis, 1992) son otras de las estrategias clásicas presentes en el estudio de tales dimensiones.

- Los ***factores****,* por su parte, se refieren a todos aquellos aspectos condicionantes de la comprensión. La especificidad del objeto de comprensión, las capacidades cognitivas generales del sujeto, la valoración personal que éste realiza sobre el propio objeto o las características del medio donde se produce la interacción entre ambos son algunos de los factores reconocidos por los que se ve afectada la comprensión (Sierpinska, 1994; Godino, 2000).
- El estudio de la ***evolución*** se relaciona con la faceta dinámica de la comprensión y supone reconocer que el conocimiento no se adquiere de forma inmediata e instantánea sino que se va desarrollando en el individuo a lo largo del tiempo. La comprensión, por tanto, no es un fenómeno estático, sino que emerge, se desarrolla y evoluciona (Carpenter y Lehrer, 1999). En este contexto, la teoría dinámica de Pirie-Kieren para el crecimiento de la comprensión matemática (Kieren, Pirie y Calvert, 1999; Pirie y Kieren, 1989, 1994) aparece entre las propuestas más consolidadas y con mayor influencia en el estudio de esta dimensión en Educación Matemática. Los modelos jerárquicos de categorías o niveles aplicados con el propósito de capturar los procesos dinámicos de la comprensión constituyen también otra de las estrategias extendidas en la investigación sobre la evolución. Un claro ejemplo de esta última opción se presenta en el modelo de proceso de dos ejes desarrollado por Koyama (1993, 1997, 2000).
- Por último, los ***efectos*** se asocian a los resultados o productos derivados de la presencia de una determinada comprensión en el individuo. Suelen considerarse efectos observables los comportamientos adaptados, la aplicación de conocimientos, la resolución de problemas o la descripción de acciones. Entre los efectos internos no observables cabe mencionar como ejemplo las nuevas estructuras cognitivas y semánticas resultantes de un cambio en la comprensión. Esta dimensión aparece reflejada en aproximaciones como la de Duffin y Simpon (1997, 2000) donde se describen algunos de los efectos internos y externos (por ejemplo, sentirse capaz de reconstruir lo olvidado o derivar consecuencias, respectivamente) asociados a las tres componentes de su definición de comprensión.

La creciente especialización en el tema ha motivado la proliferación de diferentes aproximaciones con marcos teóricos y métodos de valoración específicos, en la mayoría de las cuales se llega a reconocer la naturaleza interpretativa de la valoración de la comprensión. Es decir, toda observación sobre el quehacer matemático de los alumnos, realizada con el fin de extraer información sobre su comprensión, tiene que ser necesariamente interpretada por quien efectúa la observación (Morgan y Watson, 2002). Es así como el objetivo básico de desarrollar la comprensión de los escolares queda ligado de manera ineludible a la actividad de interpretar sus acciones matemáticas en el aula. Una circunstancia que nos permite situar la *interpretación* en la base de las cuestiones fundamentales que atañen al estudio de la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo y González, 2007a, 2007b; Gallardo, González y Quintanilla, 2013, 2014) y nos lleva a buscar métodos cada vez más eficaces con los que aproximarnos a la comprensión de los alumnos.

Pero la interpretación de la comprensión a partir de los comportamientos y las respuestas del sujeto plantea la dificultad de averiguar cómo transitar desde las acciones y registros matemáticos del estudiante hasta la delimitación de una buena aproximación a la situación real de su comprensión; en otras palabras: ¿cómo podemos interpretar la comprensión de los estudiantes a partir de su actividad matemática observable? Se trata de una cuestión básica que motiva el estudio que aquí se presenta y que genera a su vez interrogantes concretos sobre diversos aspectos particulares de la interpretación, entre los que se encuentran los relativos a la naturaleza de las situaciones matemáticas a emplear, las componentes que configuran los escenarios donde transcurre la interpretación, los fragmentos que revelan la comprensión a partir de la actividad matemática registrada y la caracterización de los usos del conocimiento matemático y la comprensión de los estudiantes sobre la base de esos rastros visibles.

Por lo general, las aproximaciones en Educación Matemática suelen ser conscientes de la dificultad de la interpretación y entre sus configuraciones y planteamientos teóricos resulta frecuente encontrar referencias y supuestos básicos compartidos en torno a la valoración, llegándose a reconocer circunstancias tales como:

- La elevada complejidad y la existencia de limitaciones inherentes a su naturaleza.
- Las diferentes formas en las que podemos examinar la comprensión matemática de los estudiantes.
- La adecuación de las manifestaciones observables como vía para obtener información sobre la comprensión de los alumnos.
- La influencia de la especificidad del conocimiento matemático en la valoración.

Referentes genéricos como éstos sirven de base a los diferentes enfoques para desarrollar sus propuestas de valoración en correspondencia con aquellos aspectos particulares de la comprensión que constituyen su centro de interés, generándose una variedad de posibilidades sobre los modos y términos con los que valorar la comprensión y sobre los métodos, técnicas e instrumentos a emplear. Entre las contribuciones que se vienen realizando en este sentido, resultan relevantes las propuestas que plantean valorar la comprensión en función de la representación y las conexiones internas del conocimiento matemático (Barmby, Harries, Higgins y Suggate, 2007; Hiebert y Carpenter, 1992), de la superación de obstáculos epistemológicos (Sierpinska, 1990, 1994) o de las relaciones con significados institucionales preestablecidos (Díaz Godino y Batanero, 1994). Igualmente destacan los métodos y técnicas centrados en la elaboración de perfiles de comprensión (Pirie y Kieren, 1994) así como las estrategias y procedimientos de valoración multifacética basados en el análisis del conocimiento matemático, como son los análisis semántico y estructural propuestos por Niemi (1996) y el análisis de los significados praxeológicos de los objetos matemáticos derivado del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002).

En este capítulo se aborda una revisión actualizada de los estudios que se han desarrollado y se vienen desarrollando sobre la comprensión y su interpretación, en general y en matemáticas en particular. Con ella se pretende proporcionar un marco útil para:

(a) progresar hacia un mayor entendimiento de la comprensión en matemáticas,

(b) establecer las limitaciones y cuestiones abiertas que delimitan las fronteras de la comprensión y su interpretación en matemáticas,

(c) situar el estudio en torno a la comprensión de los sistemas de numeración en el marco de referencias adecuadas y

(d) orientar el estudio futuro usando una base compartida de conocimiento consolidado.

Es aquí donde encontramos la justificación para proponer un modelo operativo para la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático que conecta las orientaciones cognitiva, semiótica y hermenéutica de la interpretación en matemáticas a través de una propuesta integradora que ofrece una vía operativa para transitar desde la actividad del estudiante hasta su comprensión matemática. En la actualidad, los principios que conforman el modelo se organizan en dos dimensiones, una fenómeno-epistemológica, con una vertiente conocida como análisis de contenido (Gómez y González, 2013) como parte del Análisis Didáctico, orientada a la determinación del conjunto referencial o universo de tareas (González, 1998, Gallardo y González, 2006a) y otra hermenéutica. La primera incluye un método para la identificación y organización de tareas con las que registrar la actividad matemática del estudiante. La segunda incorpora un recorrido interpretativo que permite acceder a la comprensión matemática del alumno en términos de usos dados al conocimiento matemático. En el modelo teórico que sustenta el desarrollo del presente estudio se utilizan las dos dimensiones en distintas fases de la investigación.

La revisión se estructura en dos grandes apartados: antecedentes del modelo global sobre la comprensión del conocimiento matemático y antecedentes sobre la valoración e interpretación de la comprensión del conocimiento matemático. La primera parte la estructuramos en cuatro campos de concreción creciente: antecedentes y fundamentos generales sobre la comprensión del conocimiento matemático, antecedentes y fundamentos sobre facetas o componentes de la comprensión del conocimiento matemático, estudios sobre temas relacionados con la comprensión del conocimiento matemático y estudios sobre la comprensión de conocimientos matemáticos específicos; en la segunda parte del capítulo se presenta la tendencia integradora sobre la interpretación y valoración de la comprensión del conocimiento matemático en la que se sustenta el modelo general de referencia para la investigación. Para terminar se presentan las conclusiones y consecuencias de la revisión realizada.

En el análisis de cada uno de los antecedentes se han tenido en cuenta los siguientes núcleos de interés:

a) **Noción de comprensión** que interviene en el estudio y supuestos sobre su naturaleza y formación.
b) Papel del **conocimiento matemático** y de las tareas matemáticas en el estudio.
c) Modos o **vías de acceso** que se establecen para acceder a la comprensión del sujeto; ¿cómo se supone que se manifiesta la comprensión?
d) Situaciones y **escenarios** para observar: ¿dónde y en qué tipo de situaciones se realizan las observaciones?

e) Medios para la **observación**; ¿cómo se observan las manifestaciones, los comportamientos?; instrumentos para recogida de datos.

f) Modos de **registro** de la información y su tratamiento; ¿cómo se registran y almacenan los datos?, ¿Cómo se aborda el tratamiento de la información?

g) Criterios, categorías y estructura para la **interpretación / valoración** de la información; ¿Qué modelo de interpretación/valoración de datos se utiliza?

h) Fronteras y **limitaciones** de la aproximación.

3.2 Comprensión del conocimiento matemático

Uno de los objetivos prioritarios en Educación Matemática es garantizar el aprendizaje comprensivo de los estudiantes. Para alcanzar este propósito, se viene contemplando, desde hace décadas, la comprensión como un objeto de investigación en el área (Kieran, 1994). En los últimos años, la creciente especialización en el tema ha motivado la proliferación de diferentes aproximaciones con marcos teóricos y métodos de valoración específicos. En los apartados que siguen se incluyen revisiones críticas sobre las principales aproximaciones, empezando por las más generales, en el campo de la Filosofía, la Epistemología o la Psicologìa, y siguiendo con las más específicas en torno al campo de la Cognición y Educación Matemática.

3.2.1 Aproximaciones generales a la comprensión del conocimiento matemático[1]

3.2.1.1 Enfoque general

La obra de **Wittgenstein** "Investigaciones filosóficas" es un compendio, una reunión de anotaciones filosóficas, de pensamientos sobre temas diversos redactados en párrafos de extensión reducida. En palabras del autor: *"[...] Este libro es en realidad sólo un álbum"* (p.13). Como señala Sánchez (2000), *"sus escritos son fragmentarios e inconexos, divididos en parágrafos de una densidad y riqueza extraordinarias en los que recoge reflexiones más o menos independientes entre sí, observaciones crípticas que parecen aforismos... El resultado es un conjunto de textos complejos y densos, frecuentemente oscuros, susceptibles de múltiples interpretaciones y reconstrucciones"* (p. 217). La estructura de este libro nos permite, por tanto, extraer las notas que hacen referencia al fenómeno de la comprensión con independencia del resto de la información contenida en él.

Da la impresión de que Wittgenstein quiere resaltar la arbitrariedad de los significados de las palabras, y por tanto, de su comprensión. Refiriéndose a la palabra "losa" y a su enseñanza ostensiva (esto es, el instructor llamando la atención del niño señala directamente el objeto "losa" a la vez que pronuncia la palabra), afirma que *"con una diferente instrucción la misma enseñanza ostensiva habría producido una comprensión enteramente diferente"* (p. 23). En realidad estamos hablando de enseñanza y comprensión de convenios, que pueden ser tanto palabras como signos matemáticos convencionales (piénsese, por ejemplo, en el numeral 4 o en el signo "=").

[1] Los análisis que se incluyen en este apartado se basan en revisiones realizadas por Gallardo, J. dentro de la línea de investigación, a lo largo de los últimos años (Ver referencias del autor).

Ante la tarea de continuar la serie de números naturales: 0,1,2,3,4,..., Wittgenstein señala que la posibilidad de comprensión dependerá de que el alumno continúe escribiendo la serie con independencia del instructor. Se dan tres casos:

(1) El sujeto continúa la serie correctamente.

(2) El sujeto continúa la serie pero cometiendo una falta sistemática. Por ejemplo, siempre copia la serie 0,2,4,6,8,... o 1,0,3,2,5,4,.... El autor no justifica este caso como ausencia de comprensión sino más bien como una mala interpretación del sujeto respecto de lo que le habíamos dicho que hiciese. *"[...] Aquí casi estaremos tentados a decir que nos ha entendido incorrectamente"* (p.145).

(3) El sujeto continúa la serie cometiendo faltas que no siguen ninguna regla. (¿ausencia de lógica interna aparente?). En este caso sí que lo considera Wittgenstein como ausencia de comprensión: *"[...] podemos imaginarnos, por ejemplo, que copia ciertamente las cifras de modo independiente, pero no la serie, sino unas veces una y otras veces otra sin regla alguna. Y entonces ahí acaba la comprensión"* (p. 145).

En cualquier caso, Wittgenstein subraya también que no está claro cuál es el límite entre lo que uno pudiera considerar una falta carente de regla y una sistemática.

Parece ser que la interpretación del observador sobre lo que hace el sujeto juega un papel fundamental en este punto. [Podemos conectar con Morgan (1996) y Pirie y Kieren (1994), entre otros]. Por otra parte, ¿acaso Wittgenstein está insinuando diferentes grados, categorías o niveles de comprensión?.

A la pregunta ¿se puede concluir que el sujeto ha interiorizado (ha entendido) el sistema de la serie si es capaz de continuarla correctamente hasta el centésimo lugar?, Wittgenstein responde negativamente afirmando que continuar la serie hasta un determinado número no es sino la aplicación de la comprensión. *"[...] La comprensión misma es un estado del cual brota el empleo correcto...La aplicación continúa siendo un criterio de comprensión"* (p. 149).

Con esta última frase parece que el autor da a entender que existen más criterios de comprensión además del de aplicación; ¿Es esto cierto? ¿Cuáles serían estos criterios? En nuestro trabajo estamos utilizando precisamente la aplicación del conocimiento matemático como criterio de comprensión: lo que se utiliza y cómo se utiliza proporciona información sobre lo que se comprende y cómo se comprende.

A partir de la interpretación que hemos realizado de los aforismos 143 y 146 hemos llegado al esquema-resumen de la *Figura 3.1*.

Empleo correcto ⇔ Comprensión

Empleo incorrecto sistemático ⇔ Comprensión incorrecta (comprensión subjetiva; ver aforismo 269)

Empleo incorrecto no sistemático ⇔ Ausencia de comprensión

Figura 3.1 Esquema-resumen entre comprensión y tipos de respuestas

Wittgenstein afirma que la expresión <<Él entiende>> ha de cumplir más cosas que cualquiera de los procesos concomitantes (acompañantes) o manifestaciones de la comprensión. Según el autor, entender el sistema de una serie no significa simplemente que se conozca la fórmula del término general de esa serie, ya que es posible que a alguien se le ocurra la fórmula y sin embargo no comprenda (p. 153). ¿Entra esta idea en conflicto con nuestra caracterización de comprensión?: *un sujeto comprende un conocimiento matemático cuando es capaz de emplearlo con éxito en todas aquellas situaciones que lo requieran.* En principio parece que sí, aunque hemos de aclarar que nosotros no concluimos que un sujeto entiende (o comprende) por una simple manifestación de la comprensión. Para determinar el grado de comprensión es necesario observar las acciones que el sujeto realiza cuando intenta resolver el mayor número posible de situaciones problema donde interviene el conocimiento matemático a comprender. No nos restringimos, por tanto, a un solo proceso concomitante, a una única manifestación particular de la comprensión.

Para el autor no se puede apresar el proceso mental de entender que parece ocultarse tras los fenómenos concomitantes de la comprensión, que son más visibles. Hay varias cuestiones que están por responder relacionadas, en parte, con el origen de la comprensión y con el tránsito que va del no comprender al comprender:

(1) Cuando el sujeto afirma "ahora entiendo", ¿cómo pudo estar oculto el proceso de la comprensión antes de que ocurriera esto?

(2) Aún considerando oculto el proceso de comprensión, ¿cómo sabe el sujeto dónde tiene que ir a buscar para llegar a decir "ahora entiendo"?

Para Wittgenstein, lo que hay detrás de las manifestaciones visibles de la comprensión, del empleo correcto del conocimiento, de lo que provoca que el sujeto diga "ahora entiendo", no es un proceso mental oculto sino "ciertas circunstancias" justificativas: *"[...] ¡No pienses ni una sola vez en la comprensión como "proceso mental"! – Pues ésa es la manera de hablar que te confunde. Pregúntate en cambio: ¿en qué tipo de caso, bajo qué circunstancias, decimos "ahora sé seguir"? quiero decir, cuándo se me ha ocurrido la fórmula?. – En el sentido en que hay procesos (incluso procesos mentales) característicos de la comprensión, la comprensión no es un proceso mental"* (p. 155). [Cuando leemos "procesos característicos de la comprensión" entendemos manifestaciones visibles de la comprensión].

Por cierto, ¿cuáles son esas circunstancias de las que habla Wittgenstein que están detrás y *justifican* los efectos visibles de la comprensión? Nos parece que todas estas ideas tienen que ver con el origen de la comprensión y con la influencia del entorno, del medio, de las circunstancias que lo rodean en la comprensión del sujeto.

El autor parece indicar que tanto la comprensión del instructor como la del alumno son más profundas, van más allá de la explicación y de los ejemplos. Es decir, el instructor (un profesor) posee mayor comprensión de la que manifiesta con su explicación (su instrucción apunta más allá de los ejemplos) y el alumno adquiere una mayor comprensión de la que recibe a través de la explicación (es capaz de continuar otras series distintas a las presentadas como ejemplos) (*Figura 3.2)*. Wittgenstein enuncia algunas cuestiones respecto a este tema: *"¿... no ha de ser más profunda al menos la comprensión de la explicación? – Bueno, ¿tengo yo mismo, pues, una comprensión más profunda? ¿Tengo más de lo que doy en la explicación? – ¿Pero entonces de dónde viene el sentimiento de que tenía más?* (p. 207).

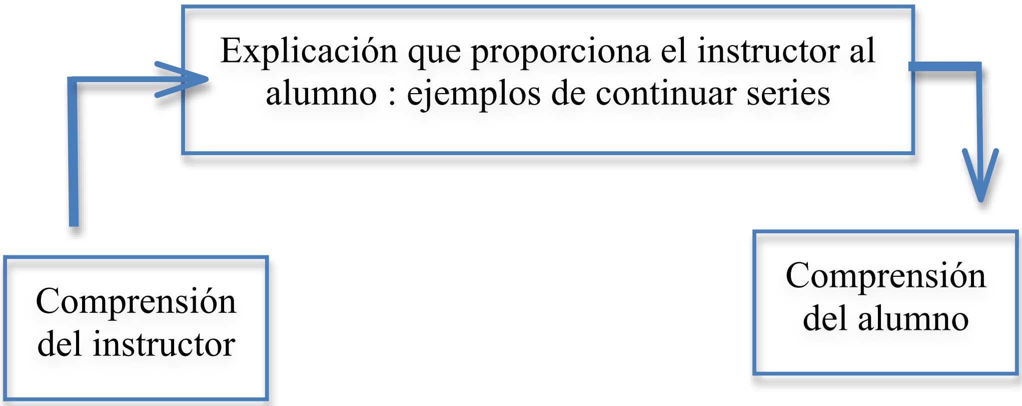


Figura 3.2 Esquema de las relaciones de comprensión entre los agentes y el proceso de explicación

Wittgenstein retoma la idea de criterio de comprensión contenida en el aforismo 146, aunque esta vez habla de que existen criterios de conducta para saber si alguien no entiende una palabra (no le dice nada, no sabe qué hacer con ella), la entiende pero de un modo incorrecto (conecta un significado erróneo a la palabra) o la entiende correctamente. *"[...] En el segundo caso podría hablarse de una comprensión subjetiva. Y podríamos llamar <<lenguaje privado>> a los sonidos que ningún otro entiende pero yo 'parezco entender'"* (p. 233). Parece que con Wittgenstein las manifestaciones externas de la comprensión cobran un especial interés. En el caso de un conocimiento matemático, a lo más que podríamos aspirar es a una comprensión subjetiva de él; subjetiva por incompleta y no por ser una comprensión incorrecta.

De nuevo aparece la idea de que la comprensión no es un proceso mental:

" <<¿Qué sucede cuando un hombre entiende de repente?>> – La pregunta está mal planteada. Si pregunta por el significado de la expresión <<entender de repente>>, la respuesta no consiste *en enseñar un proceso que llamemos así. – La pregunta pudiera significar: ¿Cuáles son los indicios de que alguien entiende de repente?; ¿cuáles son los fenómenos psíquicos concomitantes característicos de la comprensión repentina?"* (aforismo 321; p. 257).

Nos desorienta la expresión "fenómenos psíquicos" ¿Por qué el autor la utiliza a la vez que menciona que la comprensión no es un proceso mental? Sería más adecuado evitar el adjetivo "psíquico" y hablar de fenómenos externos que se pueden observar o acciones que el sujeto realiza (exterioriza).

Para **Sierpinska, A. (1990),** la noción de comprensión adopta distintos significados según el contexto en el que es utilizada: como un objetivo prioritario en la enseñanza y aprendizaje de la matemática (aprendizaje con comprensión y enseñanza para la comprensión), como un método de investigación para las Ciencias Sociales (Verstehen) o como un objeto digno de estudio para la Didáctica de la Matemática.

En la primera parte del artículo, la autora analiza la comprensión como término científico que requiere de una conceptualización clara y precisa. Para ello plantea las ocho cuestiones siguientes relacionadas con su significado, aunque sólo trata de responder a las tres primeras:

Q1: ¿Es la comprensión un acto, una experiencia emocional, un proceso intelectual o una forma de conocer?

Q2: ¿Cuáles son las relaciones entre comprender y las nociones de: conocer, concebir, explicar, sentido, significado, obstáculo epistemológico, idea (insight)?

Q3: ¿Hay niveles, grados o más bien tipos de comprensión?

Q4: ¿La comprensión de un concepto, de un texto, de una actividad humana y sus productos, son conceptos diferentes o sólo son casos especiales del concepto general de comprensión?

Q5: ¿Cuáles son las condiciones para la comprensión entendida como un acto?

Q6: ¿Cuáles son los pasos de la comprensión entendida como un proceso?

Q7: ¿Cómo llegamos a comprender?

Q8: ¿Puede ser medida la comprensión? ¿Cómo?

Como respuesta a la cuestión Q1, Sierpinska entiende que la comprensión puede considerarse tanto un acto como un proceso, según el enfoque que se adopte en su estudio. Para apoyar esta afirmación hace un recorrido por la matemática, psicología y filosofía describiendo los supuestos de algunos de los autores y corrientes que se han preocupado por analizar el fenómeno.

En el ámbito de la matemática destaca a Hadamard y Poincaré, para los que la comprensión es vista como un proceso continuo de trabajo mental consciente e inconsciente seguido de un instante de súbita "iluminación". En psicología conviven ambas posiciones. La comprensión es entendida como un proceso cuando se atiende a su evolución y desarrollo. No obstante, corrientes como la psicología de la Gestalt o el conductismo (behaviorismo) conciben la comprensión, respectivamente, como un acto mental consistente en la percepción de la "esencia de las cosas" o como un tipo de reacción a un estímulo. Dewey también la considera como un acto, aunque para él no todos los actos son del mismo tipo.

En lo que respecta a la filosofía, Sierpinska subraya las ideas de los filósofos Dilthey y Paul Ricoeur. Para el primero, la noción de comprensión surge en el contexto de la interpretación humanística como método que permite atribuir sentido a la conducta humana, mientras que en Ricoeur aparece vinculada a la interpretación de textos y en estrecha relación con la explicación. En ambos casos, la comprensión es un acto antes que un proceso.

Tras finalizar este recorrido, la autora propone considerar la comprensión *"[...] como un acto, pero un acto* involucrado *en un proceso de interpretación, siendo esta interpretación una dialéctica en desarrollo entre conjeturas cada vez más elaboradas y validaciones de estas conjeturas"* (p. 26).

Respecto a la cuestión Q2, Sierpinska aclara la relación entre comprender y conocer aceptando la existencia de varios tipos de actos de comprensión, los cuales conducen a diferentes maneras de conocer. De este modo proporciona una explicación que satisface, en su opinión, la aparente contradicción existente en algunos autores (en concreto, Skemp y Dewey) cuando entienden la comprensión como un acto a la vez que definen distintos tipos o estilos de comprensión/conocimiento (ambos términos considerados sinónimos).

Por otra parte, con el apoyo del modelo de Ricoeur para la interpretación de textos, Sierpinska intenta esclarecer la relación entre comprensión, sentido y significado, y propone además un método para elaborar análisis epistemológicos de conceptos matemáticos. En términos de la autora, el método consiste en lo siguiente:

"Supongamos que comenzamos desde el lenguaje informal de las matemáticas. Encontramos palabras y expresiones usadas al definir, describir, trabajar con el concepto que estamos analizando. Localizamos entonces sentencias que constituyen los sentidos en los que estas palabras y expresiones son utilizadas. Después, buscamos las referencias de estas sentencias. Y por último buscamos relaciones entre todos estos sentidos y referencias.

Este análisis puede conducirnos a una descripción del significado del concepto en cuestión (en un cierto nivel, dependiendo del grado de análisis que hayamos hecho). La comprensión de un concepto será concebida entonces como el acto [o los actos, como se verá más adelante] *de captar su significado"* (p. 27).

La relación entre las nociones de comprensión y obstáculo epistemológico también es establecida por Sierpinska. Según ella, superar un obstáculo epistemológico y comprender son sólo dos formas de hablar sobre lo mismo. La diferencia está en el punto de vista que adopte el observador. Así, los obstáculos epistemológicos centran su atención en las maneras insuficientes o incorrectas de conocer (punto de vista "negativo"); por el contrario, la comprensión dirige su atención hacia los nuevos modos de conocimiento (punto de vista "positivo"). Añade la autora que ambas perspectivas no pueden adoptarse simultáneamente, aunque tampoco puede olvidarse ninguna de ellas si se quiere completar el cuadro epistémico del sujeto.

Para la cuestión Q3, Sierpinska propone una categorización de actos de comprensión para un concepto matemático con cuatro categorías (p. 29):

- <u>Identificación</u>: de objetos asociados a un mismo concepto o de un término con estatus científico.

- <u>Discriminación</u>: entre dos objetos, propiedades, ideas que anteriormente eran confundidas.

- <u>Generalización</u>: Ser consciente de que algunos supuestos no son esenciales o de la posibilidad de extender el rango de aplicaciones.

- <u>Síntesis</u>: Captar relaciones entre dos o más propiedades, hechos, objetos y organizarlos en un todo consistente.

Según Sierpinska, experimentar, utilizar y aplicar es condición necesaria para que se produzcan todos estos actos de comprensión; afirmación, por otro lado, que está en consonancia con los supuestos de partida adoptados en nuestra investigación sobre la comprensión del conocimiento matemático.

La autora concluye el artículo haciendo unos breves comentarios relacionados con la medición de la comprensión (cuestión Q8). *"[...] La profundidad de la comprensión podría ser medida por el número y la calidad de los actos de comprensión que uno ha experimentado o por el número de obstáculos epistemológicos que ha superado"* (p. 35). Reconoce además el problema que supone idear métodos que muestren con certeza los actos de comprensión de los sujetos así como diseñar mecanismos que los provoquen (tareas escolares,...).

Davis, R. B. (1992), examina las principales características de lo que denomina la nueva visión emergente de la Educación Matemática. En esta nueva aproximación se reconoce la necesidad de elaborar teorías sobre cómo piensan los sujetos cuando trabajan en matemáticas, con idea de aportar el sustento o el fundamento conceptual necesario para desarrollar posteriormente una instrucción adecuada en el aula. El interés está puesto en la comprensión y no en la *memorización* de contenidos matemáticos. Los estudiantes necesitan comprender y si la instrucción que reciben no se ajusta a sus exigencias cognitivas se ven obligados a crear sus propias formas de comprensión. Los problemas surgen cuando esta comprensión es defectuosa o incompleta ya que lo que aprenden los alumnos es construido sobre la base de lo que ya comprenden.

El autor presenta una teoría acerca de cómo se produce el fenómeno de la comprensión, utilizando la denominada metáfora del puzzle. Considera que las ideas son como piezas de un puzzle. Para llegar a comprenderlas hay que unirlas a otros conocimientos e ideas previamente construidos en la mente del sujeto, de la misma forma que una pieza de un puzzle llega a ser útil y cobra sentido sólo si encaja en un conjunto de piezas combinadas entre sí. En términos del propio Davis, *"[...] La "comprensión" ocurre cuando una nueva idea puede ser encajada en una estructura más amplia de ideas previamente reunidas. Esto es particularmente importante cuando la nueva pieza es reconocida como la "respuesta" a una cuestión que ya ha sido de interés, quizá de vital interés. Es una pieza del puzzle lo que en realidad uno ha estado buscando, y su inclusión ayuda a dar sentido a todo el cuadro"* (p. 229).

Otra de las nociones clave en la nueva visión de la Educación Matemática es la representación mental del conocimiento. Las matemáticas son consideradas como *"[...] una forma de pensar que involucra representaciones mentales de situaciones problema y de conocimiento pertinente,..."* (p. 226). Las implicaciones didácticas que se derivan de esta suposición es clara. El nuevo programa pretende conseguir que los estudiantes tengan experiencias matemáticas significativas con materiales didácticos, problemas matemáticos extraídos de la vida cotidiana, etc. A través de estas experiencias, construirían las componentes previas necesarias para la elaboración de representaciones mentales eficaces, esto es, símbolos e imágenes mentales básicos junto con reglas de manipulación bien definidas. En última instancia, la comprensión del sujeto vendrá determinada por las relaciones establecidas entre esas representaciones mentales.

En lo que respecta a la evaluación, la nueva aproximación centra su atención en el estudio de las *representaciones* mentales de los sujetos. Para ello, se aconseja usar como instrumento de recogida de datos, además del material escrito elaborado por los alumnos, la grabación en video de entrevistas o sesiones de clase donde un pequeño grupo o un sujeto resuelve tareas matemáticas. Según Davis, se obtiene una información más detallada de cómo piensan los estudiantes cuando trabajan en matemáticas si se hace un seguimiento continuado de un individuo concreto antes que un estudio puntual con un grupo numeroso. El interés por la evolución en la comprensión de los sujetos es otra de las características del programa presentado por el autor.

3.2.1.2 Enfoque constructivista

Byers, V. y Erlwanger, S. (1985), reconocen como objetivo de la Educación Matemática el que todos los alumnos lleguen a comprender las matemáticas y realicen un aprendizaje compresivo del conocimiento matemático. La memoria juega un papel fundamental en la comprensión y no se puede considerar como antagónica a la comprensión, si bien hacen patentes las limitaciones de los modelos estructuralista y de procesamiento de la información acerca de la memoria (a largo plazo) cuando se aplica a la enseñanza-aprendizaje de la matemática. Se trata de modelos que *"no proporcionan* *la base necesaria para una descripción adecuada de la comprensión matemática"* (p. 271). El interés se desplaza ahora hacia la organización de la memoria, al problema de cómo está organizada.

Por el contrario, según los autores, la aproximación constructivista, que postula que el sujeto organiza la matemática de un modo propio y que el conocimiento almacenado en la memoria puede experimentar cambios cualitativos, supone un avance cualitativo frente a los modelos anteriores, a pesar de la existencia de limitaciones. El aprendizaje no sólo requiere interconexión entre las piezas almacenadas en la memoria, también necesita integración y modificación. Subrayan la idea de que la comprensión de la matemática no debe identificarse sólo con la habilidad para hacer matemáticas, se requiere además que éstas matemáticas sean válidas. Asimismo reconocen la especificidad del conocimiento matemático y la conveniencia de hablar de procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático considerado como un tipo de pensamiento muy particular.

Von Glasersfeld, E. (1987), identifica "comprender" con "dar sentido a" y con la habilidad, producto de la reflexión, para calcular nuevos resultados, para generar algo nuevo; el conocimiento de qué hacer para producir una respuesta. La reflexión no es observable pero *sus productos pueden ser inferidos de las respuestas observables....* (pp. 10-11). Según el autor, el conocimiento y la competencia son vistos como productos de la organización conceptual del individuo y de la experiencia individual (p. 16).

3.2.1.3 Enfoque representacionalista

Janvier, C. (1987), no entra en profundidad en el estudio del fenómeno de la comprensión sino en la relación entre la comprensión y la representación. Para ello enumera algunas características de la comprensión como las siguientes: *". . es un proceso acumulativo en desarrollo; . . se comprueba por la realización de actos mentales definidos controlados por procesos mentales de reflexión y planificación . ."* (p. 67).

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987), respecto a los efectos de la comprensión, afirman lo siguiente: *" . . . cuando decimos que un estudiante "comprende" una idea como "1/3" es que: (1) el o ella puede reconocer la idea fijada en una variedad de sistemas de representación cualitativamente diferentes, (2) el o ella puede manipular con flexibilidad la idea dentro de sistemas de representación dados, y (3) el o ella puede trasladar fielmente la idea de un sistema a otro"* (p. 36). Es evidente que la noción de comprensión aparece estrechamente vinculada a la de representación. Por otra parte, en opinión de Lesh, *". . . la comprensión tiende casi exclusivamente a ser evaluada en términos de las habilidades de los estudiantes para llevar a cabo los procedimientos..."* (p. 202).

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992), proponen un marco teórico desde el que abordar el estudio del fenómeno de la comprensión en matemáticas que se puede denominar ***modelo representacionalista de la comprensión***, utilizado en algunos de los trabajos del grupo español de investigación en Pensamiento Numérico (Castro y Castro, 1997; Castro, Rico y Romero, 1997; Romero y Rico, 1999; Rico, 2000; Romero, 2000). Algunos de los supuestos del modelo son los siguientes:

- Las ideas matemáticas deben ser representadas, tanto interna como externamente, para poder ser comunicadas y pensar sobre ellas. Ambas representaciones están relacionadas, por lo que hay que considerarlas conjuntamente.

- Es imposible especificar la naturaleza exacta de las representaciones internas y de las conexiones entre ellas; tan sólo podrán ser inferidas a través de las representaciones externas.

- El grado de relaciones establecidas internamente podría determinarse observando desde una posición externa el número y la fuerza de las conexiones empleadas por los sujetos (aspecto observable) pero no así la naturaleza de esas relaciones internas.

Hiebert y Carpenter describen la comprensión en función de cómo la información es representada y conectada internamente, de manera que comprender supone reconocer relaciones entre unidades de información.

"[...] Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido si forma parte de una red interna. Más *específicamente, las matemáticas son comprendidas si su representación mental forma parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se enlaza a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes "* (p. 67).

Hiebert y Carpenter justifican su propuesta porque ofrece un nivel de análisis que permite conectar temas cognitivos con cuestiones educativas prácticas, sirve para aunar temas diversos que han sido tratados tradicionalmente de forma separada (tipos de conocimiento, relación entre matemáticas escolares y no escolares, etc.), permite realizar interpretaciones del aprendizaje útiles para explicar los éxitos y fracasos escolares. El aumento de comprensión se interpreta como crecimiento en las redes de representaciones mentales que se produce por la unión de nuevas representaciones internas a la red ya existente o por la reestructuración o reorganización de la red a causa de la creación de nuevas conexiones entre representaciones existentes.

Para los autores, la comprensión es dinámica y generativa (posibilita la re-invención y la re-creación de conocimiento matemático), promueve el recuerdo y reduce la cantidad de información a recordar, favorece la transferencia del conocimiento (aspecto esencial para adquirir competencia en matemáticas) e influye positivamente en las creencias acerca de la matemática. La valoración de la comprensión es difícil por tratarse de aspectos que funcionan en la dimensión interna de la mente y no pueden ser observados de forma directa (se trata de una tarea inferencial) y porque requiere de una variedad de tareas de diferente naturaleza asociadas a un mismo conocimiento matemático para poder llegar a establecer con ciertas garantías un perfil de comprensión para un sujeto.

3.2.1.4 Otros enfoques

Bender, P. (1996) analiza la noción de BIU (Basic Imagery and Understandings), con la que pretende ofrecer un marco adecuado para tratar los procesos de formación de los conceptos matemáticos. La enseñanza y el aprendizaje de la matemática no se debe enfocar ni de un modo intuitivo, informal, en contexto u orientado a la aplicación ni ignorando por completo los significados. Por otro lado, existen dificultades para controlar los procesos que tienen lugar en la mente del sujeto, incluido el de la formación de conceptos matemáticos y limitaciones en la comprensión de los profesores sobre los conceptos matemáticos. En consecuencia, Bender establece que un *concepto* matemático es adecuado en un sujeto (o se le puede conceder alguna adecuación) cuando las afirmaciones y acciones realizadas sobre él resulten admisibles y útiles, tanto para su sentido común como para el de los sujetos, y construye el complejo BIU (Basic, imagery and Understanding) con las siguientes características:

Con el adjetivo *básico* pretende subrayar:

- La conveniencia de construir para cada conocimiento matemático un núcleo epistemológico lo más amplio posible, que sea socialmente compartido y sirva de referencia para percibir los conceptos individuales elaborados por los estudiantes, juzgar su adecuación, evitar y corregir posibles conceptos inadecuados y fomentar el desarrollo entre los alumnos de conceptos propios cercanos a ese núcleo.

- Los conceptos individuales de los sujetos están vinculados a sus propios mundos de experiencia y los procesos de enseñanza de los distintos conceptos matemáticos deberían contemplar también esa conexión real en aquellos casos donde sea claramente beneficiosa.

- Las imágenes y comprensiones básicas se consideran ideas fundamentales para la interpretación significativa de los conceptos en la disciplina matemática.

Las nociones de "imagery" y "understandings" son consideradas por Bender como constructos psicológicos fundamentales y complejos que constituyen un medio apropiado para el análisis y promoción de los procesos de enseñanza-aprendizaje de los sujetos. Estas imágenes y comprensiones están estrechamente relacionadas y se asocian a distintos modos de pensamiento que se han de desarrollar por igual en Educación Matemática: el analógico para las primeras y el proposicional para las segundas. No se puede concebir un proceso de comprensión que transcurra al margen de todo elemento analógico (intuición, referencia a lo real,…) y, al mismo tiempo, el empleo de una imagen ya lleva consigo algún grado de comprensión, sobre todo en situaciones que exigen de una explicación verbal (*Figura 3.3*).

En la propuesta se distinguen hasta cuatro objetos de comprensión: las acciones humanas (comportamientos, motivos, propósitos,…); las declaraciones (realizadas en un lenguaje conocido); el contenido de un mensaje hecho por alguien (escrito, gráfico,…); y las disciplinas técnicas (comprensión de los principios funcionales de un dispositivo, de estructuras matemáticas, de procedimientos, etc.). Para Bender, todos estos aspectos o ámbitos de comprensión (nosotros preferimos utilizar la expresión "objetos de comprensión") resultan importantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas y tal como muestra en el artículo desempeñan un papel esencial dentro del marco propuesto. Entre las afirmaciones realizadas destacamos una relacionada con el origen de la comprensión que nos parece relevante. *"[…] cada proceso de comprensión comienza sobre la base de alguna comprensión ya existente"* (p. 67).

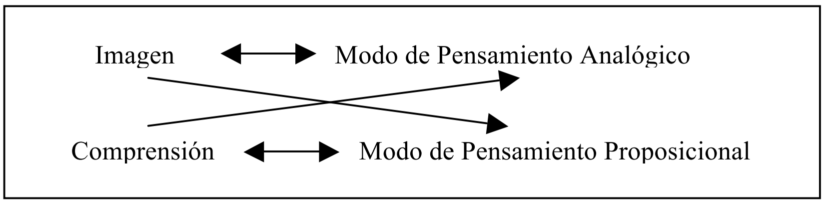


Figura 3.3 Relaciones entre imagen y comprensión

Díaz-Godino, J. y Batanero, C. (1994) presentan una teoría sobre el significado de los objetos matemáticos con pretensiones de servir de base a la elaboración de una teoría de la evaluación del conocimiento matemático. Utilizan dos unidades primarias de análisis para el estudio de los procesos didácticos y cognitivos: las experiencias significativas y el significado de un objeto, para lo que postulan dos dimensiones interdependientes: la **personal** y la **institucional**. La *institución* es considerada como el conjunto de personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas y que realizan unas prácticas sociales compartidas. Los objetos matemáticos son abstracciones o generalizaciones empíricas u operativas (Dörfler, 1991) emergentes de los sistemas de prácticas o experiencias personales (objetos personales) o institucionales (objetos institucionales) al trabajar con situaciones-problema.

En la teoría se distingue entre las *prácticas significativas* como las que conducen a la solución del problema y las *prácticas prototípicas*, que son las que constituyen un tipo o una clase de práctica característica. De dichas prácticas o experiencias surgen los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos, que nos permiten centrarnos en el diseño de situaciones de enseñanza y en el análisis y evaluación del conocimiento de los sujetos, que sólo puede ser inferido a través de las prácticas que realizan ante situaciones problemáticas. Este sistema de prácticas proporciona los indicadores empíricos que permiten valorar la comprensión de los alumnos, definida por los autores de la siguiente forma:

"En una situación ideal, y en una institución dada, diríamos que un sujeto "comprende" el significado del objeto O_I -o que ha "captado el significado" de un concepto, por ejemplo- si fuese capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente." (p. 342)

Reconocer la complejidad sistémica del significado del objeto implica una naturaleza dinámica, *progresiva*, no lineal del proceso de apropiación por parte del sujeto (Pirie & Kirien, 1994), debido a los diferentes dominios de experiencia y contextos institucionales en el que él/ella participa. El eje del proceso hacia la comprensión matemática debe contener las siguientes categorías: intuición (operativa), declaratoria (comunicativa), argumento (validación), y estructural (institucionalizado). Por otra parte, la comprensión de un objeto en un sentido sistémico o integral, exige del sujeto no sólo las componentes semióticas y de relación, sino también que el sujeto identifique la función que desempeñan en el proceso de resolución.

Díaz Godino, J. (2000) parte del reconocimiento de las limitaciones y dificultades que, respecto a la evaluación, conlleva caracterizar la comprensión desde un enfoque psicológico como "experiencia mental" en la que se establecen conexiones entre representaciones y correspondencias entre términos y objetos matemáticos (*"Pensamos que una teoría de la comprensión de las abstracciones matemáticas debe estar apoyada por una teoría previa sobre la naturaleza de tales objetos"* (p. 79)).

Por otra parte, se subraya la elevada complejidad de los objetos matemáticos y el autor aconseja sustituir la disquisición sobre *qué significa comprender* por la labor de determinar los aspectos de los objetos matemáticos que son más convenientes y adecuados para ser comprendidos y las fases o niveles necesarios para lograr que los alumnos consigan alcanzar esa "buena comprensión" establecida previamente. Otras consideraciones son las siguientes:

-La comprensión como un proceso social y cultural y no sólo mental.

-La comprensión personal de un objeto matemático, entendida como la captación o apropiación de su significado, se valorará en términos de correspondencia con el significado institucional del objeto. Esto significa que el individuo tendrá que reconocer:

(a) las situaciones prototípicas de uso del objeto de comprensión (aspectos extensionales),

(b) las distintas propiedades características del objeto así como su relación con otras entidades matemáticas (aspectos intensionales), y

(c) la sintaxis empleada para representar esas situaciones, propiedades y relaciones.

- La comprensión individual tiene un carácter no observable, por lo que la evaluación depende del análisis de las prácticas realizadas por el sujeto al resolver las diferentes actividades prototipo que engloban el significado institucional del conocimiento en cuestión. En este sentido, se reconoce la amplitud del campo de situaciones asociadas a cualquier objeto matemático.

- La comprensión de un conocimiento matemático exige del sujeto el reconocimiento de una finalidad para resolver una clase de situaciones-problemas, lo que se pone de manifiesto mediante el uso consciente, libre e intencionado de ese objeto.

Para la evaluación del conocimiento matemático el autor propone:

(a) Fijar una comprensión deseable del conocimiento/objeto matemático desde la institución en la que el sujeto participa (*relatividad institucional*).

(b) Elaborar una lista de las situaciones-problema de las que emerge el significado del objeto matemático institucionalizado.

(c) Estudiar la correspondencia entre los significados personales e institucionales mediante el análisis de las prácticas realizadas por el sujeto en la resolución de esas tareas.

Font, V. (2000), se sirve de la teoría de los objetos personales e institucionales de Díaz Godino y Batanero (1994) ampliada con una teoría de funciones semióticas (Díaz Godino y Recio, 1998) para exponer sus ideas sobre las representaciones, los procesos mentales y la comprensión, dando lugar a lo que denomina la dimensión pragmático-semiótica de la representación. Su idea de comprensión y significado se pone de manifiesto cuando afirma:

"[...] diremos que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Se entiende pues, la comprensión y el significado, básicamente*, como una capacidad que tiene el alumno y no tanto como un proceso mental que se produce en su mente cuando usa el contenido matemático. La capacidad se traduce en prácticas que son evaluables públicamente, mientras que el proceso mental es una experiencia privada de la persona."* (p. 24).

Su propuesta se resume en dos puntos: *" 1) Considerar que la "manipulación de ostensivos* materiales*" se realiza en un contexto social de interacción y va acompañada de "pensamientos en los que se manipulan símbolos mentales" (y no necesariamente es causada de manera mecánica) y 2) Explorar la posibilidad que las funciones semióticas sean un instrumento que permita el análisis conjunto de la "manipulación de ostensivos materiales" en un contexto social y del "pensamiento" que lo acompaña"* (p. 29).

Gusev, V. A. y Safuanov, I. S. (2000) consideran que: *"[...] comprender un fenómeno significa descubrir la esencia, revelar las razones de su origen, su* *correlación con otros fenómenos, su lugar en un sistema de fenómenos circundantes. El acto de comprensión puede no ser momentáneo, tiene una variedad de parámetros interconectados*" (pág.19). Proponen algunos *consejos* para que el profesor elabore métodos de enseñanza que favorezcan el desarrollo de la comprensión en clase de matemáticas:

1) Un objeto matemático no puede ser comprendido si se considera aislado, sin conexiones con otros objetos.

2) Es muy importante enseñar a los alumnos a deducir algunos corolarios y conclusiones del concepto matemático estudiado. Este proceso de derivar conclusiones asegura la comprensión del propio concepto.

Gallardo, J. y González, J. L. (2001)) proponen un modelo en el que responder adecuadamente es comprender. A diferencia de los modelos elaborados para explicar los aspectos estáticos de la comprensión (naturaleza, características, estructura, tipos), los autores consideran que los centrados en los aspectos dinámicos (origen, funcionamiento, evolución, efectos) son más adecuados para la observación y contrastación empírica. De entre ellos, centran la atención en los efectos sobre la capacidad de respuesta adaptativa específica de los sujetos así como en los medios e instrumentos necesarios para observar dichas respuestas. En consecuencia:

Un sujeto manifiesta una cierta comprensión en relación con un objeto concreto (conocimiento, etc.) cuando, deseando colaborar y/o buscando una estabilidad relativa o un mayor equilibrio cognitivo, elabora y emite a su satisfacción una respuesta centrada en dicho objeto y adaptada a la experiencia causante del desequilibrio. Para ello el sujeto tendrá que analizar la situación, valorar la información disponible, determinar la conveniencia de intervenir y actuar en consecuencia fabricando una respuesta, valorar la intervención en términos de efectividad y adecuación de la misma a la situación de interacción vivida y decidir finalizar la intervención o bien continuarla retomando algunos pasos del proceso. Es en este sentido en el que los autores dicen que comprender es sinónimo de responder o de elaborar y emitir una respuesta adaptada. Si un sujeto emite una respuesta adaptada, podemos decir que comprende en los términos del problema propuesto. Alternativamente, si el individuo no responde o lo hace incorrectamente o la respuesta no es adaptada, no podremos afirmar nada sobre la situación de su comprensión por desconocer los verdaderos motivos de ese proceder.

La conclusión anterior, sin embargo, se encuentra en la actualidad bajo revisión por parte de los autores. Así, reconocen que "Lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende". Según sea dicha utilización, en cuanto a alcance, diversidad, complejidad, seguridad, efectividad o disponibilidad, así será el nivel o grado de comprensión del sujeto. La aproximación adoptada, que se completa en apartados subsiguientes del presente capítulo así como en el capítulo 4, presenta las características:

- Es **operativa**: Las afirmaciones vendrán respaldadas por datos y resultados empíricos. No tiene sentido construir modelos descriptivos sobre algo inobservable y cuya bondad no puede ser contrastada empíricamente. En su lugar, es más fácil profundizar en aquellos aspectos que pueden ser observados por medio de tareas y situaciones que obliguen al sujeto a responder. Además, se busca expresamente la facilidad para realizar valoraciones objetivas y comparaciones.

- Es **indirecta**: Se reconocen las limitaciones del investigador para observar de manera directa la comprensión que tiene, emplea o manifiesta un sujeto acerca de un conocimiento matemático. No obstante, ésta puede ser inferida o abordada indirectamente a través del análisis de las acciones que lleva a cabo el individuo en su intento por resolver tareas problemáticas.

- Es **fenomenológica**: El carácter indirecto de la aproximación remite a los fenómenos y situaciones que dan sentido al conocimiento matemático en juego, lo que obliga a fundamentar todos los estudios en el análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático.

- Es **positiva**: Interesa determinar, por ahora, lo que los alumnos comprenden y no lo que no comprenden o porqué lo comprenden o no. Por tanto, el interés por la identificación de obstáculos epistemológicos, por ejemplo, queda relegado en esta aproximación a un segundo plano, aunque los autores admiten que los errores y las estrategias que aparecen en la actividad matemática pueden proporcionar información relevante sobre la comprensión de los sujetos (Gallardo y González, 2014).

- Es **provisional y limitada**: Las conclusiones serán siempre consideradas provisionales. El diagnóstico y la evaluación deben abordarse en términos de aproximaciones sucesivas a una situación cognitiva real que nunca vamos a poder determinar con precisión. Además, no es posible completar al cien por cien el campo de situaciones donde tiene sentido el conocimiento matemático cuya comprensión nos interesa estudiar.

Alfeld, P. (2013) postula que se comprende una pieza de las matemáticas si se puede:

• Explicar los conceptos y hechos matemáticos en términos de conceptos más simples.

• realizar fácilmente conexiones lógicas entre diferentes hechos y conceptos.

• Reconocer la conexión cuando se encuentra con algo nuevo (dentro o fuera de las matemáticas) que está cerca de las matemáticas que usted entienda.

• Identificar los principios de la pieza dada de las matemáticas que hacen que todo funcione (se puede ver más allá del desorden).

Por el contrario, la comprensión de las matemáticas no significa memorizar recetas, fórmulas, definiciones o teoremas. Todo ello se puede resumir de la siguiente forma:

Un sujeto comprende un conocimiento matemático si posee una situación cognitiva en relación con dicho conocimiento en la que es capaz de: Simplificar para explicar un conocimiento, una técnica o un razonamiento, conectar el conocimiento con otros conocimientos y reconocer nuevas conexiones e identificar principios y estructuras en dicho conocimiento.

3.2.2 Facetas o componentes de la comprensión del conocimiento matemático

Las investigaciones sobre comprensión del conocimiento matemático han tratado de profundizar en algunas de las facetas que se incluyen en el esquema de la *Figura 3.4*.

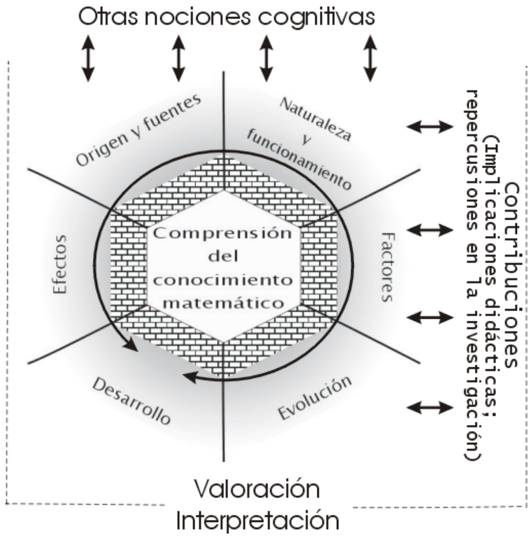


Figura 3.4 Organizadores para la investigación sobre comprensión en matemática

3.2.2.1 Evolución/desarrollo de la comprensión

Pirie, S. y Kieren, T. (1989, 1994) consideran la comprensión del conocimiento matemático como un fenómeno complejo basado en un proceso dinámico, continuo y nivelado de forma no lineal, caracterizado por la *recursión* y la *acción efectiva*, que evoluciona mediante sucesivos avances y retrocesos a lo largo de los ocho niveles siguientes:

1. *Primitive Knowing*. Conocimiento básico previo al inicio del proceso.

2. *Image Making*. El individuo es capaz de hacer distinciones en el conocimiento previo que ya posee y utilizarlo en nuevas situaciones.

3. *Image Having*. El sujeto posee un constructo mental sobre un tópico sin tener que llevar a cabo las actividades particulares de las que surge.

4. *Property Noticing*. El sujeto puede manipular o combinar aspectos de sus imágenes ya creadas para construir contextos concretos y detectar propiedades relevantes.

5. *Formalising*. El sujeto abstrae un método o cualidad común de su imagen previa que depende del conocimiento de las propiedades detectadas anteriormente.

6. *Observing*. Es capaz de coordinar y reflexionar sobre su actividad formal y expresarla como teoremas.

7. *Structuring*. Observaciones formales como si estuvieran constituyendo una teoría. Esto significa que el individuo se da cuenta de cómo están relacionados una colección de teoremas y hace una llamada a la justificación o verificación de las distintas afirmaciones a través de un argumento lógico o meta-matemático.

8. *Inventing*. Un sujeto es capaz de separarse de las preconcepciones que generaron la compresión para crear nuevas cuestiones que podrían dar lugar a un concepto totalmente nuevo.

En cada nivel intervienen dos aspectos complementarios, actuar (acting) y expresar (expressing), que son necesarios para el desarrollo de la comprensión. Esta complementariedad se manifiesta en el hecho de que al actuar ponemos en juego toda la comprensión previa facilitando la continuidad con los niveles internos, mientras que al expresar se está dando una clara solidez al nivel particular en el que estamos situados. Los autores insinúan que gracias a la recursión los sujetos pueden pasar de un determinado nivel de comprensión a otro superior, dándose la circunstancia de que el nuevo nivel alcanzado trasciende al anterior (recursión trascendente), es decir, libera al alumno de las acciones propias del nivel inferior que acaba de superar. Por su parte, la noción de acción efectiva, que permite la evolución hacia niveles superiores de conocimiento, aparece estrechamente vinculada a la de recursión y tiene lugar cuando el sujeto utiliza el conocimiento de un nivel interno para construir un conocimiento más complejo (p. 11).

En esta aproximación, es el observador (profesor o investigador) quien determina la efectividad de las acciones efectuadas por los alumnos, siendo estas acciones el medio a través del cual se exhibe el conocimiento. Pirie y Kieren ilustran con un ejemplo hipotético de conocimiento matemático toda la cadena de recursiones que permiten progresar desde el "*primitive doing*" (1^{er} nivel de comprensión) hasta el "*inventing*" (8° nivel) y concluyen con unos breves comentarios sobre las potencialidades de la teoría propuesta.

Para **Koyama, M. (1993, 1997, 2000)** un conocimiento matemático es comprendido cuando se conecta a una red interna de conocimientos previamente adquiridos o a un esquema o estructura cognitiva ya existente. Para este autor, si se acepta la concepción psicológica de la comprensión como actividad interna, dinámica, que tiene lugar en la mente del sujeto, necesariamente se necesitarán métodos que posibiliten exteriorizar esta actividad interna de los alumnos ya que, de otro modo, sería imposible obtener información sobre el fenómeno.

A partir de los modelos propuestos por Herscovics y Bergeron (1983, 1988) y Pirie y Kieren (1989), así como el modelo de aprendizaje de Van Hiele (1986), el autor presenta un modelo de comprensión denominado "modelo de proceso de dos ejes" (two axes process model), con el que pretende clarificar los procesos dinámicos reales de la comprensión de los alumnos (evolución) cuando se ven inmersos en situaciones de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos. En el eje vertical se sitúan algunos niveles jerárquicos de comprensión y en el eje horizontal tres etapas de aprendizaje (intuitiva, reflexiva y analítica) por cada nivel de comprensión.

<u>Etapa intuitiva:</u> Se proporcionan oportunidades a los estudiantes para manipular objetos concretos u operar con conceptos o relaciones matemáticas adquiridas en un nivel previo. Los estudiantes utilizan aquí un *pensamiento intuitivo*.

<u>Etapa reflexiva:</u> Se estimula a los alumnos a que presten atención a sus propias actividades manipulativas u operativas; a que sean conscientes de ellas y sus consecuencias y a que las representen en términos de diagramas, figuras o lenguajes. Los estudiantes hacen uso de un *pensamiento reflexivo*.

<u>Etapa analítica:</u> Los alumnos elaboran sus propias representaciones utilizando términos matemáticos, verifican las consecuencias por medio de otros ejemplo o analizan las relaciones entre las consecuencias en orden a integrarlas en un todo. Usan un *pensamiento analítico*.

Para Koyama (1993), *"[...] un modelo de comprensión que sea útil y efectivo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debe tener características tanto descriptivas como prescriptivas"* (p. 66).

Nunes, T. y Bryant, P. (1997) realizan consideraciones sobre el desarrollo / evolución de la comprensión. Veamos algunas de ellas.

- La comprensión no tiene un desarrollo en el tiempo en el sentido de pasar por sucesivas formas *incompletas* cada vez más cercanas a la comprensión completa, sino que se va modificando cualitativamente en *formas diferentes* cada vez más evolucionadas a través de sucesivas etapas o niveles a modo de *aproximaciones* al conocimiento en cuestión.

- La comprensión de un conocimiento no es innata sino construida / adquirida. En parte es construida (inferencias, deducción, razonamiento, etc.) y en parte es adquirida (aspectos socioculturales y convencionales del conocimiento); no todo es construido, sino que hay aspectos convencionales o socioculturales (sistema posicional, decimal, lenguaje, etc.) que sería imposible que el sujeto reconstruyera por sí sólo.

- Las etapas o niveles parece que son desiguales en cuanto a duración y alcance y suponen aproximaciones diferentes al conocimiento; cada etapa o nivel debe preceder a los siguientes, se apoya en los anteriores y depende, entre otros aspectos, del nivel de desarrollo cognitivo, capacidades, etc., así como de las experiencias y de la instrucción recibida.

- La evolución de la comprensión depende del aprendizaje de los invariantes y regularidades existentes en torno al conocimiento, de la adquisición de herramientas culturales y de la manera en que los sujetos representan los problemas y cómo estas representaciones afectan a las soluciones;

- En cada etapa, la comprensión debe poseer una cierta estabilidad interna; mientras que no se produzcan desajustes, obstáculos, rupturas, desequilibrios, etc., debe existir una cierta coherencia del pensamiento, es decir, las ideas que el sujeto utiliza son coherentes con el resto del pensamiento matemático; cuando los conocimientos del sujeto funcionan (para él), este no tiene motivos para buscar otros, modificarlos o desecharlos; no debe haber incoherencias internas, puesto que si las hubiera, la tendencia natural iría a cubrir las lagunas o deficiencias detectadas.

- Las etapas o niveles forman una secuencia más o menos ordenada para la mayoría de los sujetos de un mismo nivel sociocultural y con una historia similar.

- La evolución entre las sucesivas formas de comprensión requiere su tiempo en cada caso; parece que no es plausible la conjetura de que se puede acortar significativamente la evolución del pensamiento y del conocimiento.

- Cada forma de comprensión de un conocimiento puede ser identificada mediante el análisis de los patrones de los comportamientos observables ante diferentes problemas y situaciones.

- Para observar la situación de la comprensión no sirve cualquier tipo de preguntas, situaciones, cuestiones o problemas; si las tareas están relacionadas con lo que se está haciendo en clase las respuestas pueden estar influenciadas por factores extraños que enmascaran o dificultan lo que queremos observar (un sujeto puede responder bien a una serie de cuestiones o problemas porque ha aprendido a identificar las tareas realizadas con anterioridad, recordar las acciones a realizar en cada caso y responder sin tener un nivel de comprensión aceptable).

3.2.2.2 Naturaleza y funcionamiento

White, R. y Gunstone, R. (1992), se interesan por la naturaleza de la comprensión, por la manera de comprobar si un estudiante comprende un conocimiento y por la relación entre la comprensión y el aprendizaje. Los autores postulan que ***la comprensión es un constructo multidimensional*** y tan complejo que no puede encapsularse en definiciones de extensión reducida, porque se limitan los efectos y los procedimientos empíricos de valoración (metodologías, instrumentos de recogida de datos, etc.). Por dicho motivo, los autores no parten de una definición sino de una descripción extensa de la comprensión basada en seis categorías diferentes según el objeto a comprender:

1. *Comprensión de conceptos:* Distinguen seis tipos de conocimiento involucrados en la comprensión de conceptos: proposiciones (hechos, opiniones y creencias sobre un concepto), cadenas (tablas de multiplicar, reglas nemotécnicas o proverbios), imágenes (representaciones mentales de percepciones sensoriales), episodios (recuerdos de eventos), destrezas intelectuales y motoras (capacidades y procedimientos almacenados en la memoria). "Mientras más rico sea el conjunto de elementos asociados a un concepto, mayor será la comprensión". A este respecto, una medida válida de comprensión de un concepto exige la determinación del conjunto más extenso de elementos (proposiciones, cadenas, imágenes,…) que sobre el concepto posee el sujeto;

2. *Comprensión de disciplinas completas*: Según los autores, todo lo dicho para la comprensión de conceptos se puede aplicar a la comprensión de disciplinas completas. De este apartado nos interesa destacar lo que se denomina ***la triple subjetividad de la comprensión.*** La valoración de la comprensión es una actividad claramente subjetiva que se manifiesta en:

(a) el juicio sobre la relevancia del conocimiento en la comprensión (discrepancias entre los evaluadores),

(b) el estatus asignado al sujeto cuya comprensión se está valorando y

(c) las características de la persona que realiza la valoración. Además, la valoración de la comprensión de un sujeto varía según la posición social y el contexto en el que se desenvuelve.

3. *Comprensión de elementos simples de conocimiento*: Un algoritmo puede ser aprendido mediante reiteraciones sucesivas como un conjunto de pasos secuenciados ejecutables de forma mecánica, sin más. White y Gunstone afirman que ***lo esencial para comprender una regla o un algoritmo es ser capaz de explicar el procedimiento que subyace en él***. De este modo surge el concepto de *explicación* en relación con el de comprensión, el cual también presenta dificultades importantes;

4. *Comprensión de comunicaciones*: Hace referencia a la comprensión de una comunicación en sentido amplio (verbal, gestual, acústica, etc.) y como un proceso, a diferencia de la comprensión del resto de objetos que los autores las consideran como estados de conocimiento. Destacan la importancia de las imágenes asociadas a un conocimiento y la necesidad de que se hagan explícitas dichas imágenes de cara a la valoración;

5. *Comprensión de situaciones*: Comunicación extensa donde la información se muestra de forma instantánea más que secuencialmente. La comprensión de una situación pasa por establecer paralelismos con las experiencias previas del sujeto. Se

mide en términos de capacidad para seleccionar información relevante, explicar cómo y porqué surge y predecir que sucederá en el transcurso futuro de dicha situación;

6. Comprensión de personas: La comprensión de la conducta de un sujeto supone ser capaz de explicar las acciones que realiza y de predecir las que podría realizar. Explicación y predicción se convierten entonces en elementos indicativos de la comprensión.

Por último, White y Gunstone son partidarios de la concepción fundamental de la comprensión, consistente con las teorías cognitivas y constructivistas del aprendizaje. Identifican tres formas de construcción de significados: la reflexión interna, el aprendizaje accidental y las situaciones provocadas de aprendizaje y postulan que el uso de tests de evaluación de un mismo tipo y la asignación de puntuaciones numéricas simples no constituyen un medio válido para valorar la comprensión de los individuos.

3.2.2.3 Diagnóstico, interpretación y valoración

Pirie, S.E.B. (1988) muestra parte de la problemática que existe en torno a la valoración de la comprensión reconociendo la imposibilidad de llegar a entender en su totalidad el fenómeno, aunque considera útil y necesaria la elaboración de modelos teóricos para explicar aspectos parciales del fenómeno. Lo que realmente pretende la autora del artículo es advertir sobre la precaución que debe tenerse a la hora de describir e interpretar la comprensión que posee un sujeto a partir de las acciones que realiza cuando resuelve tareas problemáticas. *"[...] Las metáforas y categorizaciones teóricas son indudablemente valiosas, pero debemos tener especial cuidado cuando, en la práctica, intentamos describir el pensamiento de un alumno particular como algo evidenciado por sus acciones"* (p.2).

Para la autora del artículo, las herramientas de las que disponemos en la actualidad para medir la comprensión matemática son primitivas y *"[...] deberíamos ser reacios a poner etiquetas a los niños* [sobre su comprensión] *basadas en cómo "hacen" matemáticas a menos que explícitamente afirmemos que las etiquetas se refieran sólo a las habilidades de los alumnos para ejecutar tareas matemáticas particulares"* (p. 6).

Schank, R. C. (1988) en relación con el diagnóstico y valoración de la comprensión se pregunta: ¿debemos aceptar que nunca vamos a poder determinar dicha comprensión con total precisión?, ¿para llegar a precisar con exactitud lo que un alumno comprende, deberíamos conseguir algo así como ser otro alumno íntimo amigo suyo? Pareciera como si el investigador estuviese condenado a no alcanzar nunca la empatía completa de la que habla Schank (máximo grado de comprensión) por el simple hecho de ser una persona muy diferente al alumno (mayor edad, intereses distintos, creencias dispares, formación desigual...). Quizá debiéramos aceptar de entrada la imposibilidad de lograr un diagnóstico y evaluación completos de la comprensión de los sujetos, aunque sin perder por ello la esperanza de poder ir describiendo una situación de comprensión cada vez más ajustada a la realidad. Todas estas reflexiones conectan con el trabajo de Abel (1964) sobre la operación de la Verstehen.

El problema del diagnóstico y la valoración de la comprensión es expuesto por Schank con meridiana claridad:

"[...] todo sistema, humano o mecánico, se juzga por sus outputs. [...] Nos enfrentamos a un dilema*. No podemos recurrir al output para decirnos si un sistema*

realmente comprende. Por otra parte, un output es todo lo que razonablemente esperamos conseguir" (p. 151)

En otras palabras, la única información pertinente que podemos obtener sobre la comprensión de un individuo viene proporcionada por su comportamiento observable (gestos, producción escrita, explicación verbal,...). Pero al ser la comprensión un fenómeno que transcurre en el interior de la mente, no puede ser observada directamente en su totalidad y de forma completa (al menos por ahora). Esta es la razón por la que sólo podemos aspirar a describir aproximadamente una situación real de comprensión y por este motivo hablamos en la investigación de una aproximación al fenómeno de la comprensión.

Admitida esta limitación, la cuestión principal pasa a ser la de cómo un sujeto debe comportarse, qué acciones debe realizar para mostrar a un observador externo que comprende en un cierto grado. Schank lo expresa del siguiente modo:

"Un sistema que no *solamente hace cosas interesantes, sino que puede explicar por qué las hace relacionándolas con lo que hizo en otras situaciones y circunstancias de este mundo, bien puede decirse que comprende en alguno de los niveles del modelo de comprensión. Esto no quiere decir que un sistema que no pueda explicar no pueda comprender. La cuestión es cómo un sistema que comprende puede demostrarlo a un observador externo. [...] Así, mientras no podemos afirmar que quien no puede explicar, es que no ha comprendido, sí podemos afirmar que quien puede explicar, sí que ha comprendido"* (p. 151).

Sin duda, esta última afirmación refuerza aún más el carácter positivo que le hemos asignado al estudio de la comprensión: de los sujetos que no hacen nada, o lo hacen mal, no podemos afirmar nada acerca de su comprensión, aunque quizás sí de sus competencias. Por otro lado, Schank utiliza la explicación como criterio o instrumento para valorar la comprensión, asignando a cada punto de su modelo de comprensión un tipo de explicación característica diferente a las demás. Así, al nivel de "dar sentido" le asocia una "explicación de coherencia", al de "comprensión cognitiva" una "explicación de fracaso" y al de "empatía completa" una "explicación contributiva". No describimos la naturaleza de cada tipo de explicación, pero sí vamos a insistir una vez más en el hecho de que la explicación verbal no es el único medio para extraer información acerca de lo que el sujeto comprende. No coincidimos, por tanto, con la afirmación de Schank: *"[...] la única manera de saber si las personas o nuestras máquinas son inteligentes es hacer que nos expliquen cómo han hecho lo que han hecho"* (p. 157).

Morgan, C. (1996) aborda algunas cuestiones relacionadas con el lenguaje y la valoración (assessment) en Educación Matemática. En particular, se pretende mostrar que la producción lingüística elaborada por un estudiante, ya sea en forma escrita u oral, no representa de un modo transparente su pensamiento matemático. Para ello se discuten ejemplos que ponen de manifiesto:

(a) El lenguaje elegido y empleado por el estudiante influye en la impresión y el juicio del profesor sobre su competencia intelectual.

(b) Ante la misma producción escrita, diversos profesores asignan diferentes grados de comprensión al alumno a consecuencia de sus lecturas.

Ninguna producción observable o manifestación externa resulta lo suficientemente transparente como para que la evaluación sea totalmente objetiva o "auténtica" y de ella se pueda construir una fiel imagen, una representación exacta y real, de la verdadera comprensión que posee el sujeto. No en vano sucede: *". . . que el lenguaje no transmite transparentemente unas intenciones del autor y que diferentes lectores pueden construir diferentes significados desde el mismo texto . . ."* (p. 25).

Morgan reivindica el desarrollo en el aula del lenguaje matemático, aunque aprender a escribir matemáticas de una mejor forma o adquirir un mayor conocimiento sobre el lenguaje matemático no garantiza que los profesores realicen un diagnóstico más apropiado de la comprensión o del pensamiento matemático que poseen los estudiantes.

El autor no desaconseja el uso de metodologías de corte cualitativo e interpretativo, sino que sugiere que tener un cierto conocimiento sobre cómo el lenguaje empleado puede influir en las inferencias del investigador puede ser de utilidad para enriquecer los análisis resultantes y evitar posibles distorsiones debidas a una falta de control sobre las formas de lenguaje de los estudiantes.

Niemi, D. (1996), considera que son escasas las investigaciones en Educación Matemática dedicadas a validar instrumentos de valoración de la comprensión y que las pruebas y tests de evaluación proporcionan una información muy limitada y poco fiable. El proceso para obtener unos instrumentos de valoración válidos comienza con el Análisis del dominio conceptual seleccionado desde un doble punto de vista:

(a) *Un Análisis Semántico*, dirigido a esclarecer la naturaleza del conocimiento, sus significados y presentaciones, elementos constituyentes, etc. (similar a lo que nosotros denominamos Análisis Epistemológico del conocimiento matemático).

(b) *Un Análisis Estructural*, del que se extrae un modelo general de comprensión matemática. En este trabajo, al entenderse la comprensión en términos de redes de relaciones entre diferentes elementos (símbolos, conceptos, procedimientos, objetos, acciones, situaciones), la valoración (*assessment*) transcurre en términos de habilidad o capacidad para establecer relaciones de distinto tipo.

El siguiente paso consiste en diseñar unos instrumentos de medida con los que poder confirmar o refutar las hipótesis de investigación planteadas. El objetivo no es otro que el de averiguar si los estudiantes construyen un sistema de relaciones entre los distintos elementos que componen el concepto y si lo organizan en torno a conceptos y principios relevantes. El autor hace una selección condicionada de los instrumentos de medida en función de que éstos puedan aplicarse en un momento determinado en una evaluación rutinaria de clase o ser utilizados con fines instruccionales o para llevar a cabo evaluaciones a gran escala. Estas posibilidades hacen que queden descartados métodos como la entrevista clínica u otros de carácter cualitativo, erigiéndose el cuestionario escrito como el método de valoración más adecuado.

Las tareas elegidas deben valorar diferentes facetas de la comprensión. Así, el conocimiento representacional (identificación y uso de representaciones) está asociado a una comprensión implícita del conocimiento, mientras que la capacidad para justificar y explicar, para acceder y mostrar de forma consciente y explícita lo que uno conoce, suele vincularse más a una comprensión explícita y conceptual. En cualquier caso, lo que Niemi está proponiendo al considerar tal variedad de tareas es una estrategia de valoración multifacética con la que alcanzar una validez de constructo aceptable para el instrumento de evaluación, o sea, una cierta garantía de que las inferencias realizadas a partir de los resultados obtenidos se ajusten a la realidad.

Ainley, J. y Lowe, A. (1999) examinan la efectividad de los SATs (Standards of Assessment and Testing), unos instrumentos diseñados por el Departamento de

Educación y Ciencia y el Ministerio Galés para distinguir entre las diferentes formas o tipos de comprensión matemática que poseen los estudiantes. Los autores analizan el trabajo de algunos alumnos que obtuvieron una misma puntuación y se les hicieron entrevistas individuales con el propósito de determinar de un modo más preciso los tipos de comprensión que mostraban. Ainley y Lowe utilizaron cuatro categorías de comprensión en el análisis de las respuestas escritas y de los datos obtenidos en las entrevistas:

- *Comprensión no aparente*: Los alumnos que no responden a las cuestiones o las responden incorrectamente; la comprensión del sujeto no puede ser identificada.

- *Comprensión procedimental (instrumental)*: los alumnos que conocen cómo efectuar un procedimiento pero son incapaces de reconocer cuándo un algoritmo ha sido mal aplicado o incorrectamente recordado.

- *Comprensión conceptual (relacional)*: Los alumnos que conocen "el cómo y el porqué". Esta comprensión se muestra en sujetos que reconocen las implicaciones de las respuestas o son capaces de comentar constructivamente su trabajo.

- *Comprensión proceptual*: El alumno capaz de apreciar que un símbolo matemático puede representar tanto un concepto como un procedimiento. Por ejemplo, el símbolo 2x2 evoca el proceso de adición y el concepto de suma.

Las respuestas dadas a cinco de las cuestiones contenidas en el cuestionario propuesto muestran que algunos alumnos del mismo nivel eran incapaces de comprender lo mismo que los demás. En consecuencia, se pone de manifiesto que los SATs no son instrumentos adecuados para valorar la comprensión de los estudiantes ya que, basándose en las puntuaciones que asignan, consideran con un mismo nivel de matemáticas a alumnos que en realidad poseen una comprensión muy diferente (p. 35).

Clausen-May, T. (2000) analiza la influencia de la evaluación en la enseñanza de las matemáticas: *"los profesores usarán las evaluaciones para decidir lo que deben enseñar y cómo deben abordar cada tópico"* (p. 32). Clausen-May pretende dar una respuesta a la pregunta planteada por Ainley y Lowe (1999) sobre si las cuestiones escritas pueden diferenciar entre grados de comprensión. Para ello analiza los tipos de cuestiones que aparecen en los tests de evaluación escritos, distinguiendo entre cuestiones de elección múltiple, de respuesta múltiple, de respuesta cerrada y de respuesta abierta.

Para evaluar los conocimientos matemáticos de los alumnos, las tres primeras presentan el importante inconveniente de que no permiten conocer en profundidad la comprensión que poseen los sujetos, siendo, por tanto, inadecuadas para distinguir entre grados de comprensión. Responder de forma correcta a una de estas cuestiones no constituye un indicador fiable de la comprensión conceptual, al existir múltiples vias para la respuesta correcta (memoria, técnica, etc.).

Respecto a las cuestiones escritas de respuesta abierta sucede justamente lo contrario; permiten obtener una mayor evidencia sobre el tipo de comprensión pero plantean la dificultad insuperable de la calificación. La autora del artículo destaca además esta limitación para poner de manifiesto que el método que proponen Ainley y Lowe (1999) sólo es viable con grupos reducidos de alumnos pero no para proyectos de evaluación amplios. El reto, por tanto, consiste en diseñar cuestiones cerradas que permitan valorar la comprensión conceptual de los sujetos.

Conradie, J. y Frith, J. (2000). El método tradicional consistente en proponer a los alumnos tareas tipo y cuestiones teóricas es inadecuado para evaluar la comprensión. Como alternativa los autores proponen el empleo de los tests de comprensión, consistentes en presentar al sujeto una demostración y unas cuestiones cortas para responder sobre características específicas de la propia demostración. Entre las ventajas de estos tests, los autores destacan que proporcionan un incentivo para comprender y no sólo memorizar, permiten una evaluación mucho más precisa, posibilitan detectar problemas de comprensión específicos, pueden emplearse también en pruebas de acceso a la Universidad o para desarrollar en el alumno la capacidad de leer y comprender nuevo conocimiento matemático. Entre las desventajas se pueden citar: el diseño requiere mucho tiempo (selección de las demostraciones, enunciado de las cuestiones) y no permite comprobar la capacidad de los estudiantes para presentar de forma coherente argumentos de mayor envergadura a los que se exige con las preguntas cortas.

Gallardo (2004), Gallardo y González (2004, 2006b, 2006c, 2007b, 2011).

Según los autores, todo conocimiento matemático lleva consigo dos estructuras fundamentales que determinan de forma única su *naturaleza* y *existencia*:

A. *Una Estructura Epistemológica, c*onstituida por: *una sintaxis* (representaciones externas que admite), *unos conocimientos previos* (matemáticos y no-matemáticos) y *unas relaciones o conexiones internas*.

*B. Una Estructura Fenomenológica, c*onstituida por situaciones en las que participa o en las que tiene sentido como medio de solución o respuesta.

Para *observar*, diagnosticar y valorar la comprensión el investigador necesita poseer de antemano una "radiografía" sobre las características del conocimiento matemático. Las Estructuras Epistemológica y Fenomenológica:

(a) surgen de esta labor de análisis y búsqueda de información;

(b) son independientes del sujeto cuya comprensión se pretende valorar y

(c) proporcionan el instrumento-guía necesario para la investigación empírica (p.e., permite justificar la elección de situaciones y tareas matemáticas así como interpretar posteriormente los datos obtenidos).

El *modelo* que proponen los autores, que se explica con detalle en el capítulo 4, es descriptivo y prescriptivo, puesto que se pueden extraer de él algunas consecuencias didácticas útiles para el profesor de matemáticas. La consideración de la fenomenología del conocimiento matemático, por otra parte, conduce a las distintas situaciones que dan sentido al conocimiento, siendo una pieza clave en el modelo: el sujeto comprende un conocimiento matemático cuando es capaz de utilizarlo en todas aquellas situaciones que lo requieran. Por tanto, mientras más variadas sean las tareas mayor garantía habrá de desarrollar una mejor comprensión del conocimiento matemático.

En relación con la interpretación y valoración, los autores entienden que la comprensión de un conocimiento matemático está ligada a las experiencias matemáticas concretas del sujeto, de manera que el uso intencional del conocimiento matemático, como forma de acción observable e interpretable, da cuenta del estado de la comprensión. En este sentido, un individuo comprende un conocimiento matemático si es capaz de emplearlo, en alguna de sus formas posibles, en todas aquellas situaciones pertenecientes a su ámbito fenómeno-epistemológico. Por esta razón los autores se apoyan en el supuesto valorativo de que lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende. Según sea dicha utilización, en cuanto a disponibilidad, diversidad y efectividad, así será la comprensión manifestada en el momento de responder. También se admite la posibilidad de una mayor comprensión que la revelada a través de una acción observable, pero nunca menor si la implicación es importante y voluntariamente decidida y el rendimiento es alto en la elaboración y valoración de la respuesta.

3.2.3 Estudios sobre temas relacionados

En la revisión de antecedentes hemos analizado algunos trabajos que no abordan directamente el fenómeno de la comprensión pero que pueden considerarse como estudios estrechamente relacionados con la comprensión en matemáticas. Esto abre un apartado nuevo en el capítulo de revisión de antecedentes: “Temas relacionados con la comprensión en Educación Matemática”. Entre los documentos estudiados están los de Sfard (1991), Nakahara, T. (1994), Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997), Farhnam-Diggory (1994), Sierpinska, A. (2000), Byrnes y Wasik (1991), Rittle-Johnson, B. y Siegler, R. S. (1998), Vergnaud, G. (1990, 1997), Anthony, G. y Knight, G. (1999). Veamos a continuación una breve revisión de dichos estudios agrupados por núcleos de interés.

3.2.3.1 Conocimiento y comprensión

Sfard, A. (1991) analiza los diferentes tipos de conocimiento que se pueden tener de un determinado tópico matemático y la posible relación entre ellos, aspecto que sigue siendo un tema muy discutido en Educación Matemática. En la misma línea que otros autores (Piaget (1970), Henrici (1974), Anderson (1976), Tulving (1983), Halmos (1985), Hiebert (1986)), Sfard intenta mostrar que una determinada noción matemática, por ejemplo el número o la función, puede ser concebida de dos formas diferentes: estructuralmente (como un objeto) y operacionalmente (como un proceso). Se hace necesario, por tanto, distinguir entre noción o concepto matemático y concepción por parte del sujeto. Lo primero se refiere al constructo teórico que está dentro del “universo formal del conocimiento ideal”, mientras que lo segundo incluye las representaciones y asociaciones internas evocadas por el concepto, es decir, el homólogo del concepto en el “universo subjetivo del conocimiento humano”. Es lógico pensar que la representación que elaboremos de una noción matemática determina el tipo de acercamiento, operacional o estructural, que podamos tener de ella.

La complementariedad entre la concepción operacional y estructural de un mismo concepto matemático es una de las características que diferencia a la clasificación propuesta por Sfard de todas las demás. Según ella, los constructos matemáticos tienen una naturaleza dual y *“la habilidad para ver un concepto matemático como un proceso y como un objeto es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas, cualquiera que sea la definición de comprensión”* (pág. 5)

Sfard propone un modelo que describe el proceso de aprendizaje que debe seguir una persona para comprender un determinado tópico matemático. Este modelo consta de tres etapas:

1ª) *Interiorización:* En esta etapa uno consigue familiarizarse con el proceso que dará lugar posteriormente al nuevo concepto (por ejemplo, restar para llegar al número entero). El término “interiorización” es usado aquí en el sentido de Piaget: *“diremos* *que un proceso ha sido interiorizado si se puede llevar a cabo mediante una representación mental"* (pág. 18).

2ª) Condensación: Es una etapa en la que se exprimen lentamente las secuencias de operaciones en unidades más manejables. En esta etapa una persona llega a ser capaz de pensar acerca del proceso como un todo, como algo completo sin sentir la necesidad de ir a los detalles.

3ª) *Reificación (reification):* Sólo cuando una persona es capaz de concebir la noción matemática como un objeto consolidado podremos decir que el concepto ha sido "reificado". La reificación, por tanto, es definida como un cambio ontológico, una repentina habilidad para ver algo familiar de forma diferente. Conlleva un salto cualitativo.

Algunas de las consecuencias del esquema trifásico anterior son las siguientes:

(a) Cualquier tópico matemático debe ser presentado en clase de tal forma que el alumno adquiera una primera concepción operacional de él. El trabajo posterior del profesor deberá ir enfocado a conseguir que el estudiante conciba ese concepto matemático como un objeto.

(b) El modelo es jerárquico y unidireccional. Ninguna etapa puede ser alcanzada sin antes haber dado todos los pasos anteriores.

(c) La comprensión no se logra sólo por el hecho de que el sujeto indague un poco en la nueva idea. La reificación, que provoca comprensión relacional (o conceptual), es difícil de conseguir, requiere mucho esfuerzo y llega casi siempre a través de un repentino "flash".

(d) Aunque con un carácter altamente especulativo, el esquema puede servir según Sfard de marco teórico para la investigación cognitiva.

De acuerdo con el acercamiento operacional y estructural (conjuntamente) a una determinada noción matemática, es indispensable una comprensión operacional previa en la línea piagetiana de que es esencial la acción del sujeto sobre el objeto. Por otra parte no es posible trabajar toda la matemática de modo operacional, siendo la concepción estructural necesaria porque nos libera de la dependencia absoluta de la memoria. Según la autora: *"casi cualquier actividad matemática puede ser vista como una compleja interacción entre las versiones operacional y estructural de la misma idea matemática: cuando un problema complejo es abordado, el resolutor cambiará repetidamente de un acercamiento a otro con el fin de usar su conocimiento de la manera más eficaz posible"* (p. 28).

3.2.3.2 Representación y comprensión

Nakahara, T. (1994) clasifica los distintos modos de representación externa que se emplean en Educación Matemática en cinco categorías: Simbólica, Lingüística, Ilustrativa, Manipulativa y Realista (realistic). Estas categorías, junto con sus relaciones, constituyen lo que el autor denomina *Sistema Representacional (Externo) en Educación Matemática.* En su opinión dicho sistema muestra desventajas importantes, como la ambigüedad en la conexión entre las representaciones externas y sus significados matemáticos o la limitación en el estudio del aspecto interno de los procesos de pensamiento de los sujetos.

Se pueden considerar diversos puntos de vista al discutir la posible relación existente entre las representaciones externas o instruccionales empleadas como instrumentos de enseñanza y sus correspondientes significados en matemáticas. Las dos cuestiones planteadas son: (1) si la representación externa tiene un significado matemático inherente y (2) si son estas representaciones el origen principal y primario del significado matemático. El autor propone una extensión del Sistema Representacional (externo) original en la que también incluye las representaciones internas (mentales) que los sujetos construyen a partir de las externas (simbólicas, lingüísticas, etc.) así como las representaciones (tanto externas como internas) que con un significado referencial son compartidas por el grupo-clase. Para Nakahara es posible emplear el Sistema extendido y los análisis que de él se derivan cuando se estudian los procesos de comprensión y resolución de problemas desde el punto de vista de las representaciones.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). En este documento se resume un trabajo de investigación (Castro, 1994) *"[…] que estudia la integración de tres sistemas de representación para los números naturales con el fin de profundizar sobre la comprensión –por escolares de 12 a 14 años-, de conceptos y procedimientos implicados en la noción de término general de una sucesión de números naturales"* (p. 365). El propósito del estudio es el de mostrar la necesidad de emplear de forma coordinada una pluralidad de sistemas de representación para poner de manifiesto aspectos esenciales de las estructuras numéricas.

Los autores utilizan la expresión "sistemas de representación" para hacer referencia a los modos de expresar las estructuras numéricas mediante símbolos, reglas y enunciados. Las figuras y gráficas, las tablas y cuadros, la notación algorítmica o el propio lenguaje natural son algunos de los sistemas de representación utilizados en matemáticas. Desde un punto de vista epistemológico, los autores consideran que los conceptos matemáticos vienen establecidos por los distintos significados y usos que determinan su campo semántico.

Romero, I. (2000) distingue entre un mundo mental interno y un mundo físico externo. Las representaciones internas pertenecen al primer mundo y las externas, que corresponden a los sistemas semióticos, al segundo. La autora identifica cinco actividades distintas asociadas a los sistemas de representación: formación de representaciones identificables en un sistema dado; transformación dentro de un sistema de representación; traducción entre sistemas de representación; encapsulación de relaciones y procesos en objetos conceptuales y modelización.

Se adopta una caracterización de la comprensión en consonancia con el modelo representacionalista de Hiebert y Carpenter:

"Nuestra noción de comprensión asume que el conocimiento se caracteriza por ser rico en relaciones. Puede pensarse como una membrana conectada de conocimientos, una red en la que las relaciones de conexión son tan importantes como las piezas discretas de información. …suponemos que el conocimiento se representa internamente y que esas representaciones internas están estructuradas. La comprensión de un concepto consiste entonces en el modo y grado de integración en la estructura de conocimientos de un sujeto"(p.38).

La estrecha *relación* que ha de existir entre las representaciones externas e internas se pone de manifiesto sobre todo a la hora de evaluar la comprensión:

"[...] podemos afirmar que se ha producido la comprensión de un concepto por parte de un sujeto cuando éste manifieste que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento. Y esta manifestación sólo puede hacerse a través de los sistemas de representación [externos] *y mediante las actividades asociadas a los mismos. Observando el dominio que el sujeto presenta a este nivel podemos inferir algo acerca de su organización mental interna y del grado de estructuración y la riqueza de la misma, la cual permitiría caracterizar diversos niveles de comprensión para un concepto determinado" (p.38).*

3.2.3.3 Comprensión y aprendizaje-enseñanza

Farnham-Diggory, S. (1994), presenta una clasificación de los diferentes tipos de conocimiento y modelos o paradigmas de instrucción existentes: de conducta, de desarrollo y de aprendizaje. En el modelo de conducta, el principiante alcanza el estado de experto por incrementación, siendo el más rápido, el más hábil, etc. En el modelo de desarrollo, los principiantes y los expertos se distinguen en base a sus ideas y explicaciones personales y el desarrollo se basa en un cambio cualitativo en la manera de pensar. En el modelo de aprendizaje los principiantes llegarán a ser expertos a través de su enculturación en el mundo del experto.

Dentro del marco de los tres paradigmas instruccionales, pueden ser adquiridos cinco tipos de conocimiento: declarativo, procedimental, conceptual, analógico y lógico. El declarativo es el conocimiento que puede ser reconocido usualmente en las palabras, a través de lecturas, libros, escritos, a través de signos de lenguaje, braille, notación matemática, etc. El conocimiento procedimental está en la forma de las secuencias de acción y se suele tratar en la literatura referente al aprendizaje de destrezas. El conocimiento conceptual se refiere a la formación de conceptos y puede ser de dos tipos: categorías y esquemas. El analógico se refiere a correspondencias específicas entre lo que está fuera en el mundo y el interior de la mente y el conocimiento lógico está formado por implicaciones causales.

Farnham-Diggory concluye analizando la relación entre los métodos de enseñanza en la escuela y los paradigmas de instrucción y tipos de conocimientos descritos, constatando que la mayoría de la investigación en educación que se realiza actualmente puede ser descrita dentro del paradigma instruccional y de la adquisición de conocimientos declarativos y procedimentales.

Sierpinska, A. (2000) (revisión de Carpenter y Lehrer (1999)) presenta los supuestos fundamentales para una reforma de la enseñanza de la matemática, incluyendo una descripción de lo que se conoce por "aprender matemáticas con comprensión" y "enseñar matemáticas para la comprensión". La definición que adoptan de *comprensión en matemáticas* se basa en la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática y bajo una doble aproximación:

1) como estado que permite afrontar nuevas situaciones (*"Cuando los estudiantes adquieren conocimiento con comprensión, ellos pueden aplicar este conocimiento para aprender nuevos tópicos y resolver nuevos y desconocidos problemas"* (p.19));

2) como fenómeno en evolución y no como un atributo estático (*"Proponemos cinco formas de actividad mental de las que emerge la comprensión matemática:*

(a) construcción de relaciones,

(b) extensión y aplicación del conocimiento matemático,

(c) reflexión sobre las experiencias,

(d) articulación de lo que uno conoce y

(e) construcción de conocimiento matemático por uno mismo.” (p. 20)).

En definitiva, la idea que subyace en la obra es que se comprende “[…]cuando nueva información es conectada e integrada con conocimiento existente.”(p.160). Este desarrollo, afirman los autores, transcurre más bien de forma intermitente, en periodos de avance y retroceso antes que en etapas lineales de progreso continuo.

Los autores postulan que las matemáticas aprendidas con comprensión son las más útiles para conocer el mundo impredecible que nos rodea. Debido a la continua evolución en las tecnologías, los autores consideran imposible anticipar todas las destrezas que los estudiantes necesitarán a lo largo de su vida, de ahí que *“a menos que los alumnos aprendan con comprensión es probable que cualquier conocimiento que adquieran les sea de poca utilidad fuera de la escuela”* (p. 20).

La “enseñanza para la comprensión” que se preconiza en el texto viene caracterizada por tres ejes de instrucción con actividades especialmente diseñadas para fomentar la comprensión e integrando la resolución de problemas con el aprendizaje de conceptos y destrezas básicas: Tareas (tasks), Instrumentos (tools) y Prácticas Normativas (normatives practices) (*“Enseñar matemáticas para la comprensión significa que sean utilizadas muchas representaciones diferentes y sean construidas conexiones entre ellas; no sólo representaciones dadas por el profesor sino también inventadas por los estudiantes”* (p. 46)).

En lo que respecta a la valoración de la comprensión, se concibe en estrecha relación con la instrucción. En realidad se está manejando una propuesta de naturaleza circular donde instrucción y valoración dependen la una de la otra y en la que no se tiene ningún soporte teórico de referencia para guiar las acciones en el aula.

Por otra parte, los autores dan por supuesto sin excesiva reflexión previa que algunas de las respuestas proporcionadas por los sujetos *demuestran* habilidades mentales que fomentan el aprendizaje con comprensión. Pero, ¿es posible afirmar algo así?, ¿lo observable en los individuos es suficiente para hacer enunciados sobre habilidades, capacidades, estructuras, organizaciones, etc., *mentales*? Más aún, ***¿hasta qué punto podemos estar seguros de que la comprensión, como fenómeno mental interno, es valorable y evaluable?***. En relación con la aportación analizada por Sierpinska, parece que los autores están preocupados por defender y aportar argumentos y datos a favor de una enseñanza para la comprensión de la matemática, pero sin haber reflexionado lo suficiente sobre aspectos previos acerca del fenómeno de la comprensión necesarios para poder fundamentar la enseñanza que proponen o sin basar la propuesta en datos científicamente establecidos. Por otra parte, existe confusión en el empleo de los términos *comprender* y *aprender con comprensión* que para Sierpinska son nociones diferentes. Por este motivo, Sierpinska define la propuesta como de “retórica persuasiva”, recordando de este modo la diferencia que ha de existir entre el investigador y el reformador.

3.2.3.4 Comprensión y cognición matemática

Brynes, J. P y Wasik B. A. (1991) consideran fundamental la distinción entre conocimiento conceptual y procedimental propuesta por algunos teóricos cognitivos (Anderson (1983), Inhelder y Piaget (1980)). Sin embargo, no se han dado explicaciones adecuadas de las relaciones existentes entre estos dos tipos de conocimiento. En el caso de las matemáticas, los autores realizan un estudio para comprobar cuál de los dos enfoques, el de la *activación simultanea* o el de la *interacción dinámica*, ofrece una explicación más adecuada de la relación entre el conocimiento conceptual y procedimental. El punto de vista de la activación simultánea especifica que los alumnos cometen errores de cálculo porque los símbolos matemáticos son poco significativos para ellos. Sugiere, por tanto, que el conocimiento conceptual es necesario y suficiente para usar correctamente los procedimientos. Por el contrario, el punto de vista de la interacción dinámica sugiere que el conocimiento conceptual es necesario pero no suficiente para adquirir destrezas. Ambos conocimientos se apoyan entre sí pero no avanzan simultáneamente sino de forma sucesiva (en ciclos "primero uno - después otro").

A través de dos experimentos en los que alumnos de 4º a 6º grado tienen que trabajar con fracciones, los autores llegan a la conclusión de que el enfoque de la interacción dinámica es más adecuado por varias razones:

- Los chicos que cometieron errores de cálculo demostraron un conocimiento conceptual importante.
- El desarrollo del conocimiento conceptual fue previo al conocimiento procedimental.
- El uso de materiales manipulativos para aumentar el conocimiento conceptual de los cálculos matemáticos no incrementó el nivel procedimental de los alumnos.

Brynes y Wasik llaman la atención sobre la necesidad de caracterizar en los estudios que se llevan a cabo en distintos dominios las intrincadas relaciones entre estas formas de conocimiento. Por ejemplo, el contexto es un factor que afecta a estas relaciones y sólo ahora comienza a ser explorado (T. N. Carraher, D.W Carraher y Schlieman (1987)).

Rittle-Johnson, B. y Siegler, R. S. (1998) plantean una cuestión tradicionalmente compartida en este campo: ¿Por qué la comprensión conceptual y las destrezas procedimentales de los alumnos mayores parecen ser mucho menos adecuadas que las de los menores?. Existen dos hipótesis que intentan dar respuesta a esta pregunta: 1) los alumnos presentan una mayor comprensión conceptual de aquellos dominios que se desarrollan antes; la comprensión conceptual es anterior a la destreza en los procedimientos, 2) El entorno ofrece más oportunidades para el desarrollo de unas determinadas competencias en lugar de otras; los procedimientos deben ser adquiridos antes que los conceptos subyacentes.

Para comprobar cuál de las dos hipótesis es verdadera los autores examinan las relaciones entre la comprensión y la habilidad para ejecutar procedimientos, encontrando cuatro posibles tipos de relaciones: el conocimiento conceptual se desarrolla antes, después, simultáneamente o iterativamente en relación con el procedimental. Parece ser, en opinión de los autores que la *frecuencia de exposición* a los conceptos y procedimientos en cada dominio puede ser la clave para que los alumnos adquieran una mayor comprensión conceptual y un mayor dominio procedimental.

Vergnaud, G. (1990*)* considera necesario clarificar cuestiones epistemológicas como la siguiente: ¿cuál es la relación de las nuevas ideas, concepciones y competencias matemáticas (surgidas, presentadas, adquiridas) con los problemas prácticos y teóricos que las hacen útiles y significativas?. Segun el autor es fundamental para la Psicología de la Educación Matemática (desarrollo cognitivo de las ideas matemáticas; cómo se desarrolla el conocimiento matemático en los sujetos, cómo adquieren los conceptos y procedimientos matemáticos,...) considerar la relación del conocimiento matemático con los problemas y situaciones que lo hacen significativo, siendo a su vez necesaria la Epistemología y la consideración de la influencia del entorno socio-cultural para clarificar dicha relación.

El autor describe los puntos de vista o posiciones epistemológicas de autores como Piaget y Vigotsky y de concepciones como la formalista, intuicionista (Fischbein), procesamiento de la información y la conocida como inteligencia artificial. Llega a la conclusión de que en la actualidad casi la totalidad de los investigadores en Educación Matemática son constructivistas y se sitúan en un rango epistemológico que va desde el constructivismo radical hasta el social.

Una de las ideas centrales es que el desarrollo del conocimiento matemático en un sujeto se produce por las interacciones de éste con las distintas situaciones-problema en las que ese conocimiento adquiere su significado y por el diálogo con otros individuos; es decir, a través de la acción y de la comunicación. Vergnaud, sin embargo, es consciente de la dificultad que conlleva determinar esa relación entre las diversas concepciones y competencias matemáticas que el sujeto va adquiriendo con el tiempo y las correspondientes situaciones y problemas que las hacen significativas y útiles. Según él, esta complejidad es el resultado de la unión de tres hechos fundamentales o básicos:

(1) los conceptos matemáticos adquieren su significado de una variedad de situaciones, cuyo análisis requiere de la consideración conjunta de varios conceptos (noción de ***campo conceptual*** para referirse a aquellos *"diferentes conjuntos de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere numerosos tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectados unos con otros"* (p. 23)).

(2) Un conocimiento matemático concreto no se adquiere de una vez sino que se va desarrollando en el sujeto a lo largo del tiempo y en diferentes tipos de situaciones.

(3) La necesidad de un marco teórico que nos permita conducir e interpretar las acciones dirigidas a establecer las relaciones entre el conocimiento matemático y las situaciones que le dan sentido. Para ello hay que analizar y clasificar la variedad de situaciones en cada campo conceptual y describir de forma precisa la variedad de conductas, procedimientos y razonamientos que los estudiantes exhiben al tratar con cada clase de situaciones.

Vergnaud, G. (1997) aborda la naturaleza de los conceptos matemáticos y el proceso de conceptualización distinguiendo entre la definición formal y las competencias usuales que se activan al enfrentar la resolución de situaciones problemáticas. La definición formal de un concepto matemático no incluye algunas de las propiedades que utilizan los sujetos, de manera que puede llegarse a comprender la definición de un concepto sin comprender la totalidad de los elementos que lo componen. El concepto matemático no llega a comprenderse en su totalidad de forma inmediata, sino a través de un proceso de conceptualización complejo cuya comprensión es esencial para la propia comprensión de lo que es un concepto en sí.

Vergnaud trata de esclarecer la relación entre dichos tipos de conocimientos a fin de llegar a comprender los procesos cognitivos de conceptualización, para lo que propone representar cada concepto mediante " . . . *una 3-upla de tres conjuntos* ***C = (S, I, R)****, donde* ***S*** *es el conjunto de situaciones que hacen al concepto útil y* *significativo, **I** es el conjunto de invariantes operacionales que pueden ser usados por los individuos para tratar con estas situaciones y **R** es el conjunto de representaciones simbólicas, lingüísticas, gráficas o gestuales que pueden utilizarse para representar invariantes, situaciones y procedimientos"* (p. 6).

Para llegar a describir y determinar el proceso de conceptualización, se considera oportuno enfrentar a los individuos a las situaciones problemáticas que lo hacen útil y significativo, lo que requiere, por tanto, la determinación de **S**. Se trata, por tanto, de emplear las distintas situaciones de **S** para establecer los diferentes *esquemas* de los sujetos. Vergnaud utiliza el término esquema para referirse a la organización invariante de conducta para cierta clase de situaciones. Podríamos identificarlo como un comportamiento tipo (en principio, difícil de observar) asociado a una clase o categoría de situaciones.

Para el autor, el esquema es una combinación de unos objetivos y expectativas, unas reglas de acción para encontrar información y comprobarla, unos procedimientos a seguir para resolver la tarea, unos invariantes operacionales para comprender y seleccionar la información relevante (*conceptos en acción*) y tratar esta información (*teoremas en acción*)[2], origen fundamental de los conceptos, y unas posibilidades de inferencia: el esquema es válido no para una sola situación, sino para todo un conjunto de situaciones aunque no para otras. Vergnaud excluye como parte del esquema a las capacidades generales, complementarias al conocimiento específico sobre el concepto matemático, que posibilitan al sujeto tomar decisiones adecuadas sobre cómo actuar ante la situación planteada.

Según Vergnaud: *"La teoría del campo conceptual proporciona un marco para la comprensión de la relación entre las situaciones ofrecidas a los estudiantes y las diferentes tareas cognitivas que pueden realizar al tratar con ellas, los conceptos en acción que son relevantes para seleccionar la información, los teoremas en acción que son necesarios para calcular las reglas de acción y expectativas adecuadas, y las diferentes expresiones y representaciones simbólicas que pueden usarse con rentabilidad para construir la estructura y los procedimientos explícitos en las diferentes fases de los procesos de aprendizaje de los estudiantes"* (p. 24).

Vergnaud plantea que quedan aún pendientes de respuesta cuestiones relacionadas con: las *categorías de* situaciones *para formar conceptos matemáticos y su clasificación*, los *procedimientos utilizados y enseñados,* las *palabras, sentencias y expresiones simbólicas usadas para comunicar, acompañar, generar, representar y controlar las operaciones de pensamiento,* los *tipos de situaciones de fuera del contexto escolar que deberíamos introducir en clase para hacer ciertos conceptos matemáticos significativos . ." (p. 9).*

En **Anthony, G. y Knight, G. (1999)** se presentan algunas reflexiones en torno al papel que juegan la memoria, la comprensión y la práctica en el aprendizaje de los hechos numéricos básicos. Los autores reconocen la importancia que tiene la adquisición de un conocimiento sólido y profundo de los hechos numéricos básicos de cara al desarrollo de un cálculo aritmético efectivo en todas sus variantes (mental o escrito, estimado o exacto, etc.). No obstante, también son conscientes de las dificultades que tienen los alumnos para conseguir unas destrezas y una comprensión adecuadas.

[2] Los conceptos en acción son los conceptos matemáticos previos indispensables para afrontar la tarea o situación propuesta. Los teoremas en acción son los resultados, propiedades o regularidades relacionadas con el concepto que el sujeto ha asimilado de forma implícita y utiliza sin saberlo.

Se justifica la automaticidad apelando a la capacidad limitada de la memoria de trabajo, la facilidad de la recuperación automática y el sentimiento de seguridad y de dominio que proporciona. Sin embargo, no existe aún una explicación satisfactoria y definitiva para la automatización, lo que está o no automatizado ni cuándo llega a estarlo, ni tampoco lo que debiera automatizarse ni el tipo de práctica que resultaría más efectiva para desarrollar esa automaticidad, para la que los autores describen dos modelos explicativos: el modelo de *selección de estrategia* (la aplicación reiterada concluye con una fuerte conexión entre el problema y la respuesta dando como resultado la adquisición de un conocimiento recuperable y el abandono del procedimiento inicial); el modelo que conjuga *mecanismos metacognitivos y asociativos de desarrollo de estrategias*, que considera la comprensión de la tarea como un requisito fundamental.

La interacción entre comprensión y memoria se manifiesta cuando Anthony y Knight sostienen que el conocimiento computacional eficiente necesita tanto de la destreza automática como de la comprensión de las relaciones existentes, las cuales constituyen un marco organizador de las representaciones y de la información en la memoria. No obstante, todavía están pendientes algunas cuestiones relativas al vínculo comprensión-memoria. Por ejemplo, ¿cuál es la naturaleza real de dicha relación?, ¿Cómo transcurre o evoluciona?, ¿De qué modo se pueden lograr unas destrezas, una comprensión y un conocimiento computacional eficientes?.

Por otra parte, Anthony y Knight reconocen que todavía sigue siendo extenso el debate en torno a la naturaleza y alcance de la práctica efectiva. Estos autores presentan una concepción de práctica no como actividad repetitiva sino como una actividad *"de naturaleza experiencial que proporciona experiencias variadas dirigidas al desarrollo y mantenimiento de la comprensión"* (p. 33). La práctica es necesaria para la comprensión, pero no debería llevarse a cabo sin haber adquirido antes algún significado apropiado, aunque sea inicial e "ingenuo", del conocimiento en cuestión.

Anthony y Knight se sitúan en la corriente representacional de la comprensión, al describirla en términos de conexiones entre representaciones. Para ellos, la comprensión *"[...] es un proceso en desarrollo, que se intensifica cuando se expanden las concepciones y se desarrollan el número y la solidez de las conexiones entre ellas"* (p. 36).

En cuanto a la relación comprensión-explicación, consideran la explicación como evidencia o manifestación externa de la comprensión, que suele llevar consigo numerosas conexiones (implícitas o explícitas) entre el conocimiento que posee el sujeto y la situación problemática a la que se enfrenta.

3.2.4 Estudios sobre la comprensión de conocimientos matemáticos específicos

3.2.4.1 Comprensión y destrezas algorítmicas

Nesher, P. (1986) analiza la diferencia conceptual entre las nociones de *comprensión* y *ejecución algorítmica* y establece que la capacidad del ser humano para ejecutar algoritmos requiere de comprensión o de un sistema de control del que carecen las máquinas. Utiliza como ejemplo el procedimiento de contar en los niños para analizar hasta qué punto la comprensión interviene en el aprendizaje de destrezas algorítmicas, concluyendo que no todo es mecánico, sino que la comprensión se pone en funcionamiento en cuanto se detecta algún error y que la separación entre la ejecución algorítmica y la comprensión es imposible en cualquier etapa del aprendizaje.

3.2.4.2 Comprensión de los algoritmos escritos de los números naturales

Algunas investigaciones sobre la comprensión del algoritmo escrito para la multiplicación de números naturales son: los estudios de **Vergnaud, G**., los realizados por **Gallardo, J. y González, J. L.** (2002, 2004, 2005b, 2007b) y los de **Salinas, M. J.** (2003a) sobre la comprensión de los algoritmos de las operaciones elementales en estudiantes de Magisterio.

Como se ha mencionado anteriormente, la noción central de la propuesta de Vergnaud (1998) es la de "campo conceptual", definido como "*un conjunto de situaciones, cuyo dominio requiere el dominio de varios conceptos de diferente naturaleza. Por ejemplo, el campo conceptual de las estructuras multiplicativas consta de todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporción simple y múltiple y para las cuales uno necesita usualmente multiplicar y dividir" (p. 141). Igualmente afirma: "La aproximación canónica al estudio de un campo conceptual supone identificar y clasificar situaciones y luego recoger datos sobre procedimientos y otras maneras en las que los estudiantes expresan su razonamiento. . . ."* (p. 149). Acerca del progreso de la comprensión, el autor indica que *"[...] El progreso puede consistir en enriquecer las propiedades de los conceptos involucrados (nuevos invariantes) o aplicar las mismas operaciones a un rango más amplio de contextos y valores numéricos"* (p. 143).

El autor utiliza los *términos* "conocimientos (explícitos e implícitos)", "concepciones" y "competencias" como términos cercanos al de comprensión. En una reflexión sobre las experiencias y las acciones de los sujetos pone de manifiesto la complementariedad existente entre el actuar y el explicar. El par acción-explicación no debería entenderse como una dualidad que contrapone aspectos incompatibles, sino más bien complementarios. Centrando la cuestión en el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático, convendría considerar conjuntamente tanto las acciones realizadas por los sujetos (producción escrita) como las explicaciones (verbales o escritas) que puedan proporcionar en su intento por resolver las tareas y situaciones propuestas. Cualquier información extraída del comportamiento observable de los sujetos puede ser de ayuda para configurar un perfil de comprensión lo más completo y ajustado a la realidad. En este marco general, el autor califica el estudio de las estructuras multiplicativas como un "programa a largo plazo" (p. 149).

Por su parte, **Gallardo, J. y González, J. L. (2002), Gallardo, J. (2004),** proponen un marco teórico y metodológico general para examinar la comprensión del conocimiento matemático con dos dimensiones fundamentales, una fenómeno-epistemológica y otra hermenéutica. La primera reúne los principios adoptados en torno al conocimiento matemático y a la comprensión en matemáticas y su valoración así como una propuesta de análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático que posibilita la identificación y organización de tareas y la elaboración de instrumentos propicios para registrar la actividad matemática del estudiante. Las estructuras epistemológica y fenomenológica asociadas al conocimiento matemático son propuestas como referencia objetiva para caracterizar el uso del conocimiento en la actividad matemática. Con estos referentes iniciales, los autores dirigen la atención hacia el propio proceso de interpretación, incorporando al modelo una segunda dimensión hermenéutica. Una descripción más detallada de este modelo se incluye en la segunda parte de este capítulo, a propósito del análisis de los antecedentes y fundamentos teóricos relacionados con el problema de la interpretación y valoración de la comprensión así como en el capítulo 4 en relación con el marco teórico y metodológico de la investigación objeto de la presente tesis doctoral.

Con el fin de comprobar la operatividad del mencionado modelo general, los autores realizan un estudio sobre el diagnóstico y la valoración de la comprensión en el caso particular del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. En la delimitación de la estructura epistemológica distinguen tres grupos de relaciones entre los conocimientos previos que conforman el algoritmo: estructura del sistema de numeración decimal posicional, las tablas de multiplicar y la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Igualmente distinguen:

- Relaciones externas a nivel técnico (grupo 1): Son las relaciones usuales entre los elementos básicos del algoritmo que hacen posible recorrer la secuencia procedimental establecida en el sentido apropiado.

- Relaciones externas a nivel analítico (grupo 2): Son aquellas relaciones externas no incluidas en el grupo 1. Por ejemplo, relaciones no-usuales, tales como: a) el número total de resultados parciales depende del número de cifras del multiplicador, mientras que el número de cifras de cada resultado (su extensión o tamaño) depende del de las cifras del multiplicando; b) el producto de una de las cifras del multiplicador por una de las del multiplicando, además de un resultado, proporciona información acerca de la posición relativa que ha de ocupar entre el resto de cifras que configuran el espacio de resultados parciales.

- Relaciones internas a nivel formal (grupo 3): Son las relaciones que sustentan y validan el mecanismo subyacente al algoritmo, entre ellas las derivadas de las propiedades del sistema de numeración decimal posicional.

En la estructura fenomenológica, la posibilidad de que el algoritmo intervenga en una situación de forma necesaria o como alternativa entre varios conocimientos matemáticos constituye el criterio fenomenológico del que se derivan, respectivamente, dos tipos de situaciones: exclusivas y no-exclusivas. El uso del algoritmo en las primeras permite caracterizar un primer ámbito de comprensión (comprensión fundamental), que se amplía con un segundo ámbito (comprensión extendida) identificado a través del desempeño ante situaciones no-exclusivas. Ambas facetas son complementarias por lo que su consideración resulta precisa para conformar estados y perfiles de comprensión entre los sujetos.

Por último, en el estudio de Salinas, M. J. (2003a) se ponen de manifiesto los errores conceptuales y las lagunas de conocimiento de los alumnos que finalizan los estudios de la Diplomatura de Magisterio en lo relativo a los algoritmos usuales de las operaciones aritméticas, el alto porcentaje de alumnos que responden con una aplicación mecánica de los algoritmos, o las dificultades que manifiestan en su explicacion, producto de una comprensión insuficiente de los principios que caracterizan al sistema de numeración decimal.

3.2.4.3 Comprensión del concepto de variable y sus diferentes usos

Ursini, S. y Trigueros, M. (1996, 1997) realizan un análisis detallado de las respuestas a cuestiones sobre diferentes usos de la variable (valor desconocido, un número general, variables en relación funcional). La comprensión del concepto de variable para estos autores va desde la posibilidad de realizar cálculos simples y operaciones con símbolos hasta alcanzar a entender por qué estos cálculos funcionan, predecir las consecuencias de utilizarlos, distinguir entre los diferentes usos de la variable y pasar de la una a la otra de un modo flexible integrándolas como componentes del mismo objeto matemático.

3.2.4.4 Dimensiones y niveles de comprensión del concepto de función

Teniendo en cuenta las teorías de la representación múltiple y el modelo proceso-objeto para el desarrollo conceptual del conocimiento matemático, desarrollado por autores como **Sfard** (1991,1992), **Dubinsky** (1991), **Dubinsky y Harel**, (1992) o **Gray y Tall** (1994), los autores **DeMarois, P. y Tall, D.** (1996) elaboran un modelo para el concepto de función con el que tratan de determinar, mediante entrevistas, los perfiles de comprensión de los estudiantes.

El modelo surge al considerar dos dimensiones diferentes en el desarrollo del concepto de función. La primera (longitud) se centra en las distintas representaciones que admite la función, no sólo las clásicas simbólica, numérica (tablas de valores) y geométrica (graficas), sino también otras como las descripciones escritas y verbales, la representación notacional, la coloquial y la kinestésica (la explicación de los sujetos sobre su propia comprensión de la noción de función).

La segunda dimensión (profundidad) se refiere al desarrollo vertical del concepto de función y abarca distintos niveles; desde un nivel de pre-acción (conocimientos mínimos) hasta el nivel proceptual, pasando por los niveles de acción, proceso y objeto (las acciones mentales (sobre objetos) se convierten en procesos reproducibles/repetitivos que se encapsulan como objetos). Los procedimientos específicos (algoritmos que permiten implementar un proceso determinado) se incluyen en el nivel de acción, siendo cognitivamente más primitivos que los procesos en sí (distinción entre Proceso y Procedimiento). En este nivel, la función es vista como una secuencia de cálculos no relacionados, mientras que en el nivel de proceso es contemplada como una transformación dinámica. El nivel objeto, por su parte, exige que la función sea vista como un objeto con entidad propia que puede participar en procesos de mayor orden. Por último, el procepto se concibe como la amalgama de tres elementos: un proceso (como suma de tres o cuatro), un concepto producido por el proceso (la suma) y un símbolo que evoca tanto el proceso como el objeto (ejemplo 3+4). Por otra parte, lo proceptual se entiende como la capacidad para trasladarse con facilidad por los niveles proceso y objeto, es decir, para ver la función como proceso u objeto según la necesidad. El modelo admite una representación gráfica en forma de diagrama circular compuesto por cinco círculos concéntricos que muestran los *niveles* y ocho sectores que los cruzan simbolizando las *facetas* (representaciones).

Los autores reconocen la complejidad del tema, las limitaciones que ofrece la aproximación propuesta y la necesidad de realizar más trabajos en este campo. Aún así, reconocen que los perfiles proporcionados por el modelo son útiles como primer acercamiento a una evaluación de la comprensión. Las facetas y niveles contemplados proporcionan un marco amplio desde el que iniciar un análisis del concepto de función. El estudio pone de manifiesto además nuevas cuestiones acerca de la relación existente entre los niveles y posibles sub-niveles.

3.2.4.5 Comprensión del concepto de fracción

Señalaremos los estudios realizados por **Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2007, 2008a),** dirigidos al diagnóstico y la valoración de la comprensión de las fracciones, especialmente en lo que se refiere a las prioridades e interferencias que surgen en el uso de sus significados, en profesores en formación de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno, Perú.

Entre los resultados obtenidos se señala la potencialidad descriptiva y prescriptiva del modelo de interpretación seguido[3], por proporcionar un patrón para la organización de situaciones matemáticas y suponer un referente objetivo con el que es posible afrontar la interpretación en términos de comprensión de las acciones de los estudiantes. *"A través de la experiencia sobre los significados de la fracción se dan muestras del uso que podría darse a estas situaciones en el aula de cara a la valoración y al desarrollo de la comprensión del conocimiento matemático en los alumnos. Se revela en consecuencia, el apoyo que a través del modelo puede ofrecerse al profesorado en la toma de decisiones sobre contenidos o formas de enseñanza"* (Gallardo, González y Quispe 2008a, p.379).

3.2.4.6 Comprensión del sistema de numeración decimal

Destacamos en este apartado los estudios realizados por **Salinas, M. J.** (2003b, 2007) y la memoria de tercer ciclo del autor de la presente investigación (**Ortiz, A. L.**, 1998).

En Salinas, M. J. (2003b, 2007) se realiza un estudio sobre la comprensión de los sistemas de numeración en alumnos de magisterio que pone de manifiesto los errores referidos al valor de posición. Los ítems de la prueba, extraídos de los estudios de Flornoy y col. (1963) y Aguilar y Martínez (1996), habían sido preparados para alumnos de enseñanza secundaria y final de la enseñanza primaria, a pesar de lo cual no se aprecian diferencias entre las respuestas: *"Lo que si creemos es que los alumnos que inician los estudios de Magisterio no dominan los contenidos referidos a las matemáticas escolares, en el sentido de recordar conocimientos adquiridos en las primeras etapas de la enseñanza."* (Salinas, 2007, p.389).

La memoria de tercer ciclo de Ortiz, A. L. del programa de doctorado de Didáctica de la Matemática del bienio 1996-98, titulada "Conocimiento del Sistema de Numeración Decimal: un análisis de la coordinación entre los sistemas de representación escrito y hablado", supone un antecedente fundamental para la investigación desarrollada en la presente tesis doctoral. La finalidad de este estudio era la de indagar en la naturaleza y características de la comprensión del conocimiento matemático, identificar los factores que intervienen, establecer criterios, técnicas e instrumentos que permitan observar, diagnosticar y valorar, en escolares de distintos niveles educativos y con un alto grado de fiabilidad, la situación de la comprensión y el dominio de los conocimientos matemáticos aprendidos en torno al campo conceptual de los sistemas de representación de los números naturales.

Dada la relevancia de este estudio previo como primera aproximación exploratoria al problema tratado en la presente tesis doctoral, se ha incluido en el capítulo 4 de la memoria, al que nos remitimos, el análisis del modelo local utilizado y la prueba de comprensión diseñada para su aplicación a una muestra de escolares de 4º de primaria. Esta primera aproximación constituye uno de los puntos de partida de lo que más tarde se configura, en virtud de aportaciones decisivas de otros trabajos (Gallardo, op. Cit.),

[3] El modelo propuesto por los autores al que se hace referencia en distintos apartados del capítulo y que se explica con detalle en el capítulo 4

como modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas. En sus inicios se utilizó el análisis didáctico y las dimensiones fenómeno-epistemológicas para la organización y selección de las tareas que formarían parte de los instrumentos de recogida de datos, pero se trataba de un modelo incompleto para la interpretación de la comprensión al no contemplar la triple dimensión cognitiva, semiótica y hermenéutica que se detallan en el siguiente apartado y en el capítulo 4 de la memoria.

3.3 Interpretación y valoración de la comprensión del conocimiento matemático

Se trata de una línea de investigación que emerge con los trabajos del Proyecto de investigación PB97-1066 y la tesis doctoral de Gallardo, J. (2004). Las principales referencias que recogen los aspectos fundamentales de esta tendencia, en la que se sitúa el estudio que se presenta en esta tesis doctoral son las siguientes: **Gallardo, J. (2004), Gallardo, J. y González, J. L. (2002, 2006b, 2006c, 2007a), Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2007, 2008a).**

Cualquier estudio sobre la comprensión involucra necesariamente el problema de la interpretación. En la mayoría de las aproximaciones se llega a reconocer la naturaleza interpretativa de la valoración de la comprensión. Es decir, que toda observación sobre el quehacer matemático de los alumnos, realizada con el fin de extraer información sobre su comprensión, tiene que ser necesariamente interpretada por quien efectúa la observación (Morgan y Watson, 2002). Es así como el objetivo básico, tanto en lo que se refiere a indagar sobre la situación de la comprensión como en la tarea de desarrollar la comprensión de los escolares, queda ligado de manera ineludible a la actividad de interpretar las acciones matemáticas de los sujetos. Una circunstancia que nos permite situar la interpretación en la base de las cuestiones fundamentales que atañen al estudio de la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo y González, 2007a).

La interpretación de la actividad matemática nos enfrenta al desafío constante de encontrar métodos cada vez más eficaces con los que aproximarnos a la verdadera comprensión de los alumnos. La principal dificultad operativa reside en cómo transitar desde las acciones y registros matemáticos del estudiante hasta su comprensión. Este problema genera a su vez interrogantes sobre diversos aspectos particulares de la interpretación, entre los que se encuentran los relativos a la naturaleza de las situaciones matemáticas a emplear, las componentes que configuran los escenarios donde transcurre la interpretación, los rastros que revelan la comprensión a partir de la actividad matemática registrada y la caracterización de los usos del conocimiento matemático y la comprensión de los estudiantes en base a estos rastros.

3.3.1 Tendencias usuales

En Educación Matemática se parte del supuesto de que siempre se interpreta a la luz de una teoría (Popper, 2005). Así, es usual que los distintos enfoques sobre comprensión incluyan entre sus principios generales algunos referentes acerca de cómo afrontar la interpretación. Desde una perspectiva general y con propósito integrador, llegamos a identificar tres orientaciones básicas en la consideración y el tratamiento de la interpretación en matemáticas: la orientación cognitiva, la semiótica y la hermenéutica. Veamos a continuación unas breves indicaciones acerca de cada una de ellas.

3.3.1.1 Orientación cognitiva

Influenciada por la tradición psicológica, esta orientación pone la atención en la subjetividad del alumno y determina como propósito fundamental responder a algunas de sus complejidades internas. Suele aparecer reflejada en aquellas aproximaciones que contemplan la comprensión como su principal objeto de estudio y que deciden abordar el análisis de algunas de sus dimensiones reconocidas. Esta orientación se caracteriza por concebir la comprensión matemática como un fenómeno cognitivo y por reconocer la posibilidad de su acceso y captación en las mentes ajenas de los escolares. La interpretación se presenta entonces como un traslado hacia la esfera mental del estudiante, a la que pertenece su comprensión matemática, tomando como vía las distintas manifestaciones observables generadas durante su quehacer matemático. Así lo reconocen Duffin y Simpson (2000) cuando afirman:

"De repente llegó a ser claro para nosotros que es sólo a través de la interpretación de las manifestaciones físicas del estudiante en el uso de su comprensión que el profesor puede hacer algún tipo de juicio acerca de ella." (p. 419)

En esencia, en esta orientación interpretar supone acceder a realidades cognitivas internas con ayuda de la observación de realizaciones sensibles objetivadas. La objetividad de la interpretación se sustenta en la autonomía proporcionada por la fijación y conservación de las producciones externas en registros o representaciones de distinto tipo, verbales y escritos. Por tratarse la comprensión de una actividad que acontece en la esfera interna del individuo, y por tanto sin posibilidad de ser observada directamente, su interpretación desde esta perspectiva necesita y suele abordarse al amparo de supuestos teóricos sobre la relación reconocida entre los estados mentales del sujeto y su comportamiento externo visible (Koyama, 1993). El proceso metodológico recurrente implicado en la interpretación cognitiva tiene por objeto estrechar progresivamente la distancia entre estas realidades interna y externa. Un claro exponente de esta orientación lo encontramos en el conocido *enfoque representacional*, que desarrolla una visión de la comprensión vinculada a las representaciones y conexiones, internas y externas, del conocimiento matemático (Hiebert y Carpenter, 1992; Romero, 2000; Goldin, 2002). El acceso interpretativo al ámbito mental de la comprensión resulta especialmente directo en este enfoque al plantear la valoración en función de las conexiones mentales que se establecen entre las diversas representaciones internas del conocimiento matemático objeto de comprensión (Rico, 2009). Las principales dificultades operativas por las que se ve afectada la orientación cognitiva de la interpretación están relacionadas con la transición entre los ámbitos externo e interno de la comprensión junto con los propios rasgos mentales de la misma.

3.3.1.2 Orientación semiótica

Las fronteras reconocidas en la interpretación cognitiva sirven de justificación para presentar la orientación semiótica como variante alternativa en la gestión de la interpretación de la comprensión en matemáticas. Esta opción interpretativa emerge de algunas de las aproximaciones semióticas al conocimiento matemático y su cognición que se vienen desarrollando recientemente en Educación Matemática. La orientación semiótica, tal como la derivamos de estos enfoques, asume en primer lugar un claro distanciamiento con el carácter mental de la comprensión:

"[...] en esta visión la interiorización no juega un papel porque el objetivo del aprendizaje no es una construcción mental interna sino una actividad con diagramas externa y observable. [...] De una manera más extrema: la comprensión no es, entonces, la aprehensión de objetos abstractos (basada en otros mentales construidos apropiadamente) sino la experiencia aceptada socialmente con actividades con diagramas." (Dörfler, 2006, p. 109)

En su lugar, se opta por presentar la comprensión como una capacidad esencial o competencia del alumno que se traduce en prácticas sociales interpretables públicamente (Font, Díaz Godino y D'Amore, 2007). En esta orientación la interpretación se circunscribe al espacio exclusivo de la actividad matemática visible y al uso que en ella se hace de los sistemas de signos matemáticos. Básicamente, interpretar supone trasladarse a los entornos semióticos generados por estas prácticas y producciones matemáticas observables, suspendiendo incluso cualquier referencia a la realidad externa que circunda a los propios productos semióticos: *"Ni el autor ni el lector son la única fuente de significado porque el significado no es más que el propio proceso del signo. La realidad de un texto es su desarrollo, el significado de una proposición radica en sus consecuencias y la esencia de una cosa es la esencia o el significado de una representación de esa cosa, y así sucesivamente"* (Otte, 2006, p. 27). La objetividad descansa en esta orientación en la propia estructura interna de las producciones semióticas a las que se traslada la tarea interpretativa. El método involucrado en esta interpretación se ajusta en lo fundamental a un modelo de análisis estructural de inspiración lingüística que tiene como objeto captar la complejidad de las relaciones semióticas desplegadas en las diversas acciones matemáticas observadas y registradas en los alumnos. Ejemplo de ello lo encontramos en el análisis semiótico incluido en el *enfoque ontosemiótico* de la cognición e instrucción matemática (Díaz Godino, 2002; Díaz Godino, Batanero y Font, 2007). Las posibles fronteras de la orientación semiótica de la interpretación las situamos en la suspensión de las referencias externas sobre las que se proyectan los registros semióticos, en la omisión del texto como *unidad* global de reflexión semiótica y en la problemática relación entre el signo hablado y el signo escrito.

3.3.1.3 Orientación hermenéutica

En este enfoque, la interpretación adopta un papel más central en la comprensión matemática. Al considerar que la evaluación de las matemáticas debe estar dirigida hacia la toma de conciencia por parte del estudiante sobre su actividad matemática, nos movemos en el terreno de las interpretaciones (Brown, 1996). Influenciado por la hermenéutica moderada, la interacción y los procesos de aula se contemplan como un intercambio de las interpretaciones mediadas por el contexto social y cultural (Ell , 2006). Por lo tanto, la interpretación se considera como un requisito necesario en la identificación y caracterización de la comprensión de la actividad matemática, en lugar de limitar o condicionar el acceso a la propia comprensión . En este punto de vista , el círculo hermenéutico se mostró como un método fundamental para la interpretación . En esencia, la actividad matemática tanto del profesor como del estudiante están inmersos en un proceso abierto y reiterativo, por tanto para registrar la experiencia matemática que sucede en el aula, es necesario describir todo el proceso y contrastarlo con las expectativas previas (Brown, 2001). Por otra parte, el modelo básico del que disponen los maestros que quieren obtener información sobre la actividad del estudiante involucrado en una actividad matemática, está condicionado por el propio lenguaje; por ello es necesario generar registros observables durante la actividad matemática y su " contextualización " (respuestas matemáticas escritas por el estudiante, transcripciones de los diálogos , las acciones grabadas en vídeo , etc), constituyendo estos registros la fuente principal de la expresión visible de la comprensión.

La capacidad de utilizar el conocimiento matemático depende en gran medida de la comprensión (uno no puede usar algo que no posee). Esto significa que la referencia última de la comprensión del estudiante no sólo se encuentra en el registro escrito (signo o texto), sino que también, y fundamentalmente, en las referencias externas, como por ejemplo el uso evidente del conocimiento matemático. Un ejemplo de este enfoque hermenéutico y una explicación más detallada de sus características y fundamentos se pueden consultar en el modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas propuesto por Gallardo, González y Quispe (2008a, 2008b) y que se expone en el capítulo 4 de esta memoria, apartado 4.3.

3.3.2 Interpretación y valoración de la comprensión del conocimiento matemático. La triada cognitivo-semiótico-hermenéutica y su dilema metodológico

Según se desprende de las caracterizaciones esbozadas, las particularidades de cada orientación quedan reflejadas en aspectos como las áreas de conocimiento por las que se ven influenciadas, el estatus asignado a la comprensión en matemáticas, el espacio de acceso delimitado para la interpretación, el fundamento de su objetividad, el círculo interpretativo involucrado en el método asociado, la terminología específica instaurada o las fronteras de su operatividad. Tal como se expone en la *Tabla II.2.1* del *Anexo II*, la confrontación de las tres orientaciones en base a estos aspectos nos permite identificar diversas dualidades con las que pensamos queda suficientemente argumentada la presencia de una triada epistemológica en la interpretación de la comprensión en Educación Matemática.

Por nuestra parte, entendemos que la comprensión en matemáticas genera un campo limitado de interpretaciones potenciales donde siempre resulta posible la confrontación de alternativas y el respaldo justificado de unas opciones en detrimento de otras. Particularizando en las tres orientaciones interpretativas delineadas, al tiempo que reconocemos la legitimidad y potencialidad de cada una de ellas para la investigación ligada a la comprensión (Tahta, 1996), también subrayamos el dilema metodológico fundamental que plantea la triada *cognitiva-semiótica-hermenéutica* mencionada, que enunciamos en términos interrogativos del siguiente modo:

Al afrontar la interpretación de la comprensión en matemáticas, ¿hay que asumir que las orientaciones cognitiva, semiótica y hermenéutica (aún en sus versiones más 'débiles') son los polos de una relación de exclusión que nos impone una necesaria *elección entre estas posiciones? O por el contrario, ¿se pueden establecer vínculos dialécticos entre ellas con los que superar, o al menos reducir, el dualismo exhibido?*

En los apartados 3.3.3 y 4.3 de los capítulos 3 y 4 respectivamente, se puede apreciar en qué sentido apostamos por una respuesta afirmativa a la última pregunta formulada.

3.3.3 Líneas generales del modelo operativo para la interpretación y valoración de la comprensión del conocimiento matemático

Con una clara intención integradora, los autores introducen una visión extendida de la interpretación, donde las distintas orientaciones contribuyan a la misma propuesta interpretativa, complementándose mutuamente y mostrándose por ello solidarias. El modelo propuesto se caracteriza por los siguientes aspectos:

(a) Una *concepción operativa sobre la comprensión del conocimiento matemático* y su valoración.

(b) Una concepción *relativa y no acumulativa* de la comprensión que evoluciona en función de la situación, las condiciones y los factores que intervienen.

(c) Una *concepción analítica del conocimiento matemático* basada en las dos estructuras básicas (epistemológica y fenomenológica) y en los diferentes tipos de categorías del conocimiento.

(d) Un método o *proceso secuenciado* en torno a dos dimensiones:

> (d1) Dimensión *fenómeno-epistemológica*, en la que se inicia el estudio mediante el siguiente procedimiento operativo (Gallardo y González, 2006a):
>
> 1. Análisis Didáctico (González, 1998, Gallardo y González, 2006b);
>
> 2. Delimitación del conjunto genérico de situaciones;
>
> 3. Estructuración fenómeno-epistemológica del conjunto de situaciones. Modelo local.
>
> 4. Selección de tareas y construcción de instrumentos.
>
> 5. Análisis de resultados y primeras conclusiones.
>
> (d2) Dimensión *hermenéutica*, en la que se analiza la información y se completan los resultados y conclusiones mediante el círculo interpretativo o método hermenéutico.

Remitimos al lector al capítulo 4 para una información detallada sobre dicho modelo integrador que utilizamos parcialmente como parte del marco teórico y metodológico de la investigación objeto de la presente tesis doctoral.

3.4 Comprensión del conocimiento matemático y competencia matemática[4]

En la actualidad, el desarrollo de la competencia matemática entre los estudiantes se presenta en el ámbito curricular como el objetivo prioritario fundamental de las matemáticas enseñadas en la educación básica (UNESCO, 2012). El marco por competencias en Educación Matemática pone el acento sobre todo en lo que los estudiantes *saben hacer* con las matemáticas, o más exactamente, en cómo pueden utilizar los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela para actuar en situaciones usuales de la vida cotidiana (Niss, 2002; Niss y Højgaard, 2011). Este enfoque aparece en estrecha relación con la perspectiva funcional de la matemática escolar, aquélla donde los conocimientos matemáticos se perciben esencialmente como herramientas con una clara finalidad y utilidad prácticas y cuyo uso permite resolver distintos problemas e interrogantes surgidos del entorno (Rico y Lupiáñez, 2008). Desde esta perspectiva se promueven las capacidades y destrezas de los alumnos en el aula para usar las matemáticas de una forma apropiada (con flexibilidad y eficiencia) en contextos y situaciones donde pueden mostrarse pertinentes como medios de resolución (NTCM, 2000; OCDE, 2003). En la práctica, el desarrollo curricular de la competencia matemática exige transitar hacia sus componentes caracterizadoras en forma de competencias específicas o capacidades concretas que buscan ser operativas. Los descriptores particulares en los que se desgrana la competencia matemática en un ámbito de planificación más local se definen a su vez en términos de atributos externos prefijados que detallan la riqueza o potencialidad cognitiva del alumno. La competencia que subyace a la actividad matemática del estudiante queda entonces determinada por el dominio que éste posee de los correspondientes atributos que la sustentan (Rico y Lupiáñez, 2008).

Si bien el marco por competencias está cada vez más extendido en Educación Matemática, recientemente han surgido diversas controversias desde el ámbito de la investigación que sugieren revisar sus planteamientos y matizar algunos de sus supuestos (Brown, 2008; Gresalfi, Martin, Hand y Greeno, 2009; Llewellyn, 2012; Puig, 2006). Las discusiones giran en torno a cuestiones fundamentales relativas a la vinculación de la competencia con el fenómeno de la comprensión en matemáticas, al estatus del conocimiento matemático como objeto de aprendizaje y a su protagonismo en relación con las situaciones problemáticas y las tareas matemáticas contextualizadas, o a la interpretación de la competencia matemática a partir de la actividad observable del estudiante, entre otras.

Pero al igual que ocurre con la observación, interpretación y valoración de la comprensión, también parece conveniente tender hacia una visión más interpretativa de la competencia matemática. Para ello, se centra la reflexión en el conocimiento matemático, en la comprensión y en la interpretación de la actividad matemática, e introducimos nuevos principios teórico-metodológicos que, siendo complementarios y compatibles con los del enfoque curricular, proporcionan en nuestra opinión respuestas

[4] El contenido de este apartado se ha configurado a partir de los estudios de González y Gallardo que se encuentran en la actualidad en desarrollo y de los que una parte están pendientes de publicación (Gallardo y González, 2014). En este sentido, transcribimos las reflexiones de los autores, con algunos comentarios añadidos para poner de manifiesto la especial incidencia del tema sobre el problema de la interpretación de la comprensión.

satisfactorias a las distintas controversias planteadas. Nuestra propuesta se sustenta en el modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas que desarrollamos en este trabajo.

A continuación, delimitamos algunas cuestiones abiertas que permiten profundizar en las relaciones de la competencia matemática con el fenómeno de la comprensión, con el propio conocimiento matemático, con las tareas y situaciones matemáticas y con la interpretación de la actividad matemática. Estas cuestiones afectan directamente a la naturaleza funcional de la competencia matemática así como a la operatividad de su desarrollo.

3.4.1 Competencia y comprensión en matemáticas

Para el enfoque curricular vigente, la competencia matemática plantea mayores requerimientos al alumno que el "simple *saber qué"* sobre los objetos matemáticos característico del tradicional discurso cognitivo de la comprensión. De este modo, la comprensión conceptual, el conocimiento factual y la destreza procedimental se contemplan como prerrequisitos necesarios, aunque no suficientes, de la competencia matemática y se incluyen entre sus componentes fundamentales (NCTM, 2000, p. 21; Niss y Højgaard, 2011). Esta relación inclusiva es matizada, no obstante, por autores como Díaz Godino (2002a, 2002b), quien sugiere un vínculo más bien complementario para ambas nociones cognitivas; entre el carácter funcional de las matemáticas vinculado a la competencia, por un lado, y la comprensión de las técnicas necesarias para realizar las tareas y de las relaciones entre los diversos contenidos y procesos matemáticos puestos en juego, por otro. Aunque puedan percibirse diferencias entre competencia y comprensión en la práctica de la enseñanza y el aprendizaje matemático, lo cierto es que las manifestaciones observables del uso del conocimiento matemático en diversos contextos, característico del alumno competente, sólo constituyen una de las dimensiones que conforman el fenómeno complejo de la comprensión en matemáticas. De hecho, la preocupación fundamental por el *desarrollo* de la competencia matemática en los estudiantes forma parte de un problema más amplio en el que también intervienen otras dimensiones de la comprensión (Meel, 2003; Gallardo y González, 2011). Y es precisamente en el carácter multidimensional de la comprensión donde radica una de las principales causas por la que su estudio resulta una tarea altamente compleja y un condicionante para las distintas propuestas encaminadas a fomentar la competencia matemática. Estas iniciativas pueden verse afectadas por dificultades importantes en cuanto a su fundamentación y operatividad si no contemplan el desarrollo del aprendizaje y de la competencia matemática como un problema incluido en el de la comprensión en toda su extensión (Sierpinska, 2000). Si el marco por competencias no atiende en profundidad al fenómeno de la comprensión en matemáticas, pueden verse comprometidos la idoneidad del desarrollo de la competencia matemática y su valor como objetivo prioritario de la educación básica (Llewellyn, 2012).

3.4.2 Competencia y conocimiento matemático

El interés por el estudio de la complejidad fenomenológica y epistemológica de los conocimientos matemáticos y su consideración integral para la valoración y el desarrollo de la competencia debería ser más explícito y cobrar mayor protagonismo en el enfoque curricular actual. Más que el aprendizaje en sí de los conocimientos matemáticos en todas sus variantes básicas, el marco por competencias organiza el currículo por las capacidades y destrezas necesarias para afrontar con éxito tareas matemáticas particulares (Niss, 2002). Sin embargo, para Puig (2006) el currículo de matemáticas debiera procurar enseñar a los alumnos a organizar campos de fenómenos, y no tanto enseñar los propios fenómenos de forma directa, como objetos inmutables o ideales, a través de tareas específicamente diseñadas para ello. Organizar fenómenos no de cualquier forma, sino a través de un trabajo centrado en el análisis epistemológico y fenomenológico del propio conocimiento matemático. Las competencias se alcanzarían precisamente al ir realizando los distintos análisis fenómeno-epistemológicos de los conceptos matemáticos que organizan los fenómenos en estudio. Todo modelo de competencia y comprensión en matemáticas involucra un modelo del objeto a estudiar que ha de tener en cuenta las diversas facetas y estructuras del conocimiento matemático (Godino, 2002a). Cualquier análisis riguroso de las competencias matemáticas nos lleva a la adopción de un modelo epistemológico y fenomenológico sobre la propia matemática que responda, entre otras cuestiones, a cómo emergen los objetos matemáticos de las prácticas escolares (Font, Godino y Gallardo, 2013). Esto nos exige poner el énfasis tanto en la concepción de la naturaleza de las matemáticas que se está adoptando en la práctica docente, como en los fenómenos que organiza el conocimiento matemático y en las consecuencias que se derivan de ello (Puig, 2006).

El marco por competencias organiza el currículo por las capacidades y destrezas necesarias para afrontar con éxito tareas matemáticas contextualizadas y surgidas de la vida cotidiana (Niss y Højgaard, 2011). No obstante, resulta una limitación vincular el trabajo por competencias exclusivamente a la utilidad práctica de las matemáticas y al uso cotidiano del conocimiento matemático. De ser así, ello reflejaría una visión parcial y restringida de la competencia matemática, dado que el trabajo en situaciones puramente matemáticas también pertenece al ámbito de la funcionalidad y la utilidad del conocimiento matemático (González, 2008). Al no poderse separar las situaciones de aplicación de las ideas que se aplican, no es posible separar lo concreto de lo abstracto. Por ello, resulta pertinente contemplar también dentro del campo de acción de la competencia matemática las situaciones descontextualizadas y no cotidianas que requieren, por ejemplo, de una demostración matemática elemental o de un razonamiento algebraico o puramente numérico. También en ellas se usa el conocimiento matemático, son ejemplos patentes de su funcionalidad y se despliegan la comprensión y la competencia matemática en toda su extensión.

3.4.3 Interpretación de la competencia matemática

En la práctica, el trazado metodológico hacia las componentes caracterizadoras de la competencia matemática en forma de competencias específicas o capacidades concretas que buscan ser operativas y definidas a su vez en términos de atributos externos, genera nuevos debates en el enfoque curricular, esta vez en torno a aspectos operativos relacionados con la interpretación de la competencia matemática.

En *primer lugar*, las competencias matemáticas específicas se refieren más bien a lo que los estudiantes necesitan conocer, hacer o disponer potencialmente para ser considerados exitosos por el profesor o por sus compañeros en el aula de matemáticas. Se definen, por tanto, en base a unas expectativas sobre lo que habría de considerarse como buenas prácticas matemáticas (prácticas correctas o aceptables), prefijadas desde el exterior y establecidas al margen de los acontecimientos que transcurren en cada aula particular. En contraposición a esta visión, autores como Brown (2008) buscan presentar la competencia matemática y la comprensión de los alumnos desde una perspectiva más inclusiva, donde el objetivo es compartir diferentes formas de ver y comprender las matemáticas antes que insistir en una versión correcta de las matemáticas y una supuesta buena comprensión o competencia; un lugar alejado de la comprensión "estándar" establecida puede llegar a ser en ocasiones la situación cognitiva más deseable, confortable y segura para determinados alumnos (Llewellyn, 2012).

En *segundo lugar*, el carácter de *atributo externo* que el enfoque curricular asigna a la competencia matemática es discutible. Sobre este punto, Gresalfi, Martin, Hand y Greeno (2009) argumentan que las destrezas, habilidades o capacidades de referencia no debieran ser atribuidas externamente a los estudiantes porque en realidad son construidas en el interior de la clase de matemáticas y en contextos de participación conjunta con su profesor y compañeros. Estos autores muestran evidencias de los procesos de construcción de la competencia desde el interior de las clases de matemáticas. *"Considerar la competencia como construida en interacción presta atención a las diferencias entre cómo podría ser definida la conducta competente en las aulas. Un estudiante considerado competente en un aula de matemáticas puede no ser necesariamente considerado competente en otra aula. Esto sugiere que las consideraciones acerca de quién es bueno en matemáticas deberían estar acompañadas por cuestiones sobre porqué las personas son buenas en matemáticas y, sobre todo, cómo lo sabemos"* (p. 52). Por otra parte, también se corre el riesgo de simplificar la complejidad inherente a la competencia matemática si en la práctica se mantienen caracterizaciones de sus atributos específicos en términos tan genéricos como los del tipo "plantear y resolver problemas" y similares (Puig, 2006).

En *tercer lugar*, establecer los atributos vinculados con la competencia matemática exige un ejercicio de *inferencia* que ha de realizarse a partir de las evidencias proporcionadas por las actuaciones externas del estudiante (acciones, comportamientos, decisiones, producciones escritas,…) y las observaciones de su desempeño al enfrentar tareas matemáticas (Rico y Lupiañez, 2008). En este sentido, propuestas como la de Lupiáñez y Rico (2006) en el ámbito de la formación inicial de profesores permiten describir el modo en que unas capacidades específicas relativas a un tema matemático particular contribuyen a la formación matemática general de los escolares en términos de competencias. En definitiva, el objetivo básico de desarrollar la competencia matemática de los escolares queda ligado de manera ineludible a la actividad de interpretar sus acciones matemáticas en el aula. Una circunstancia que nos permite situar la *interpretación* en la base de las cuestiones abiertas fundamentales que atañen, no sólo al marco por competencias, sino al estudio de la competencia y la comprensión en matemáticas desde cualquier otra perspectiva (Gallardo y González, 2011).

3.5 Conclusiones y consecuencias para la investigación

Una buena parte de las conclusiones para el estudio que se presenta se puede deducir de las discusiones planteadas a propósito del examen de los distintos estudios presentados en los diferentes apartados de la memoria. No obstante, parece conveniente delimitar de una manera más precisa algunas de las principales consecuencias para la investigación de la revisión realizada. En este sentido, agrupamos a continuación las principales conclusiones en dos apartados: el primero sobre la comprensión del conocimiento matemático y su interpretación; el segundo sobre las relaciones entre comprensión y competencia en matemáticas.

3.5.1 Análisis Didáctico sobre la comprensión del conocimiento matemático y su interpretación. Resultados primarios y secundarios

El progresivo desarrollo que viene experimentando la investigación sobre comprensión en matemáticas en los últimos años justifica la pertinencia de realizar esfuerzos destinados a configurar marcos referenciales con los que articular, confrontando e integrando en lo posible, los distintos enfoques y planteamientos existentes. En nuestra opinión, esta estrategia permite progresar hacia un mayor entendimiento sobre la comprensión en matemáticas así como orientar el desarrollo de la investigación futura a partir de una base compartida de conocimiento consolidado en torno a este fenómeno. Precisamente, con este propósito integrador nos aproximamos en este trabajo a una de las cuestiones abiertas presentes en el estudio de la comprensión como es el problema de la interpretación, por parte de un agente externo (profesor o investigador), de la comprensión matemática de los estudiantes a partir de la actividad que manifiestan cuando se enfrentan a situaciones problemáticas que requieren el uso del conocimiento matemático objeto de comprensión.

Como se refleja en el presente capítulo y en el siguiente, estamos a favor de una visión interpretativa integradora de las orientaciones cognitiva y semiótica (Duval, 2006). Nuestra propuesta específica incluye una dimensión fenómeno-epistemológica que consideramos compatible con otros procedimientos de valoración multifacética basados en el análisis del conocimiento matemático, como son los análisis semántico y estructural (Niemi, 1996), el análisis de la naturaleza de los conceptos matemáticos (Vergnaud, 1997), el análisis fenomenológico (Freudenthal, 1983; Puig, 1997) o el análisis de los significados praxeológicos de los objetos matemáticos derivado del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Díaz Godino, 2002b). La dimensión fenómeno-epistemológica de nuestro modelo se ve fortalecida con una segunda dimensión hermenéutica que nos permite gestionar desde una posición más favorable la complejidad inherente a la interpretación de la comprensión en matemáticas. En este punto, unimos lo expuesto a otras contribuciones hermenéuticas (Brown, 2001; Ell, 2006) para responder positivamente desde el contexto específico de la valoración a la cuestión de la potencialidad del conocimiento hermenéutico para la Educación Matemática. En última instancia, aspiramos a aportar con todo ello un instrumento operativo para gestionar la actividad interpretativa que se ejerce, o se debiera ejercer, regularmente en el aula de matemáticas, una labor compleja que situamos en el núcleo de la discusión sobre los problemas fundamentales de la Educación Matemática. La novedad consiste en partir de conocimientos matemáticos específicos ya establecidos sobre los cuales exigimos un análisis epistemológico y fenomenológico para determinar conjuntos reducidos de situaciones representativas pertinentes para ser empleadas en labores de diagnóstico y valoración de la comprensión. Además, la reflexión sobre la comprensión transcurre en términos de posibilidad de uso del conocimiento matemático en tales situaciones.

De la propuesta integradora sobre la valoración e interpretación de la comprensión del conocimiento matemático presentada en el apartado 3.3 y desarrollada extensamente en el capítulo 4, extraemos y señalamos algunos de los **resultados y conclusiones** que entendemos son de aplicación a nuestro estudio y que por tanto hacemos nuestros.

✓ <u>Sobre las manifestaciones externas</u>:

- La comprensión de un individuo sobre un conocimiento matemático puede ser inferida indirectamente a través del análisis de las acciones que lleva a cabo en su intento por resolver tareas problemáticas que requieren el uso de ese conocimiento;
- La formación matemática que posee un sujeto sólo puede ser exhibida mediante las acciones que realiza al tratar con tareas problemáticas;
- Las manifestaciones observables (acciones externas, producción escrita, afirmaciones y explicaciones) se erigen como un medio adecuado, e incluso único, del cual el observador puede extraer información relevante y objetiva sobre el estado de comprensión de los sujetos.
- Las producciones escritas y las explicaciones dadas por los alumnos ante situaciones-problemáticas son criterios interpretados por el investigador como indicios de la presencia de comprensión. Existe, sin embargo, una cierta controversia en torno a la relación entre acción y explicación en el proceso de evaluación de los sujetos.
- Conviene considerar conjuntamente tanto las acciones realizadas por los sujetos (producción escrita) como las explicaciones (verbales o escritas) que puedan proporcionar en su intento por resolver las tareas y situaciones propuestas.
- La capacidad de los alumnos para expresar y explicar los procedimientos empleados en un problema es un criterio importante para evaluar su comprensión, aunque no necesariamente es el más relevante y tampoco debe ser el único a tener en cuenta.

✓ <u>Sobre las limitaciones de las valoraciones y las interpretaciones</u>:

- La valoración, entendida como interpretación de acciones observables realizadas por otros sujetos, ha de ser necesariamente abierta e incompleta. Abierta porque ninguna cantidad de evidencia podría aportar la certeza suficiente para admitir que no existe otra interpretación distinta e igualmente correcta (Dancy, 1993). Incompleta porque resultaría imposible alcanzar una empatía completa con el otro, según se desprende de la concepción de comprensión de Schank (1988) o de Abel (1964) sobre la operación de la Verstehen.
- La valoración depende además del propósito del investigador, del modelo de comprensión adoptado como referencia teórica y de la metodología empleada en las fases empíricas de las investigaciones. Las tareas utilizadas es otro condicionante de la valoración que justifica su carácter relativo.
- El enfoque representacionalista plantea el problema fundamental de la viabilidad a la hora de evaluar representaciones privadas que los sujetos construyen en su mente.
- Es más factible y apropiado limitar la evaluación a las manifestaciones externas de la comprensión, dejando a un lado las afirmaciones de carácter interno y las conclusiones referentes a características internas.

✓ Sobre la elección de situaciones-problema:

- La mayoría de los trabajos revisados no justifican adecuadamente la selección de los problemas y tareas a los que se enfrentan los alumnos.

✓ Sobre la necesidad de la fundamentación epistemológica y fenomenológica:

- Se echa en falta un mayor número de estudios que establezcan y muestren con detalle las pautas a seguir para la elaboración precisa de análisis de corte epistemológico y fenomenológico como vía de acceso adecuada con la que afrontar la valoración objetiva de la comprensión del conocimiento matemático.
- La determinación del campo de acción del análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático, en sus distintas acepciones, constituye una cuestión abierta no resuelta en investigaciones precedentes.

✓ Sobre la comprensión del conocimiento matemático:

- En el ámbito concreto de la Educación Matemática, tal vez resulte más apropiado desarrollar marcos teóricos de carácter general sobre la comprensión que sirvan de referencia y guía para el posterior diseño de modelos locales más específicos y operativos desde los que afrontar problemas puntuales de investigación centrados en tópicos matemáticos concretos.
- Creemos necesario que toda aproximación al fenómeno de la comprensión preste atención a los posibles condicionantes externos de la comprensión y los tenga en cuenta de cara a la valoración de la misma. Entre todos ellos, cobra especial importancia las experiencias vividas por el sujeto, constituyéndose de este modo en el principal condicionante de la comprensión.
- La comprensión que un sujeto puede tener de un conocimiento matemático siempre va a estar ligada desde el inicio a las situaciones en las que ese conocimiento interviene.

✓ **En resumen:** La distinción en el ámbito de la comprensión entre lo observable y lo inobservable; la conveniencia de reflexionar sobre la correspondencia existente entre las manifestaciones empíricas mostradas por el sujeto y lo que realmente sucede en el interior de su mente; la importancia del conocimiento matemático y de su uso por parte del individuo en la evaluación; y la consideración del análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático como elemento que posibilita la elección de situaciones para la elaboración de instrumentos de observación adecuados, son algunos de los puntos con los que nos sentimos plenamente identificados.

3.5.2 En torno a las relaciones entre comprensión y competencia en matemáticas

Consideramos que las controversias delimitadas y discutidas en este estudio en torno al marco por competencias en matemáticas merecen una mayor atención y reflexión por parte de los diseñadores curriculares, investigadores y profesores, a la hora de planificar el currículo, trabajar en el aula de matemáticas y/o evaluar los logros de los estudiantes en términos de competencias. Como contribución específica al debate, nuestro enfoque interpretativo intenta integrar la competencia y el conocimiento matemático dentro del mismo proceso complejo de análisis de la comprensión. En este trabajo hemos pretendido mostrar cómo el fomento de las capacidades y destrezas en el uso de los objetos matemáticos básicos en tareas problemáticas planificadas y concretas, característico del marco por competencias, resulta compatible con el estudio de las diversas variantes fenómeno-epistemológicas del conocimiento matemático. La dimensión fenómeno-epistemológica de nuestro enfoque interpretativo propone unos referentes teórico-metodológicos operativos sobre el conocimiento matemático y sobre la comprensión en matemáticas y su valoración. Consideramos que ello puede resultar eficaz en la interpretación de la competencia en matemáticas.

La comprensión y la competencia en matemáticas quedan entonces caracterizadas desde nuestros planteamientos por el conjunto de evidencias recabadas acerca de los usos dados a los conocimientos matemáticos que emergen de la actividad matemática desplegada en el intento por resolver las tareas. Estas evidencias provienen de los propios conocimientos matemáticos, son inherentes a ellos y a las acciones particulares realizadas con ellos. Finalmente, constituyen la referencia interna objetiva desde la que proponemos interpretar la competencia matemática en cada caso. En nuestra opinión, se trata de una alternativa complementaria a la opción curricular vigente de sustentar la valoración de la competencia matemática en términos de listas genéricas de atributos externos definidos con independencia de la propia actividad matemática particular de cada estudiante.

Finalmente, nuestro modelo lo hemos presentado como una propuesta en desarrollo cuya configuración admite ser mejorada y ampliada. Quedan cuestiones abiertas por resolver, como profundizar en la visión funcional de la comprensión presentada aquí a través del estudio de su relación con otras nociones cognitivas de similar complejidad como el aprendizaje o la competencia matemática. En lo que respecta a la dimensión fenómeno-epistemológica, a fin de aidentificar los límites de su aplicabilidad, resultan pertinentes nuevos estudios centrados en conocimientos matemáticos más complejos que el algoritmo analizado en esta ocasión. En la dimensión hermenéutica, al situar la referencia última de la comprensión en el uso del conocimiento matemático, se hace preciso responder a la cuestión ontológica de la existencia de los objetos matemáticos (Font, Godino y Gallardo, 2013). Posibilidades de mejora como éstas quedan pendientes para futuras exploraciones.

3.6 Fronteras y limitaciones en la investigación sobre la comprensión del conocimiento matemático y su interpretación

Los resultados obtenidos por las diferentes investigaciones llevadas a cabo en la Educación Matemática han consolidado un cuerpo de conocimiento en relación a los diferentes aspectos relacionados con la comprensión matemático y su interpretación. Este progreso en la consolidación del cuerpo de conocimientos, sin embargo, contrasta con importantes limitaciones a las que la presente investigación todavía no ha encontrado soluciones definitivas. En particular señalaremos las siguientes :

(a) Quedan pendiente por responder algunas preguntas abiertas relacionadas con dimensiones de la comprensión. Este es el caso de establecer sus límites en la dimensión dinámica y también las cuestiones relacionadas con la imposibilidad de la observación directa del funcionamiento de la comprensión.

(b) La controversia sobre el grado de profundidad y extension que deberia exigirse al estudio de la comprensión e interpretación en matematica. Clarificar el tipo de conocimientos necesario para gestionar con garantias las investigaciones sobre la comprensión matemática y obtener por tanto el consenso de la comunidad científica.

A pesar de los últimos avances producidos en la investigación sobre comprensión en matemáticas, el carácter multidimensional del fenómeno sigue provocando que su estudio resulte una tarea altamente compleja y un condicionante para los distintos trabajos en curso. Ni tan siquiera puede considerarse resuelta la cuestión epistemológica general sobre si el problema de la comprensión del conocimiento (matemático) admite o no una solución completa, esto es, de si es posible elaborar una teoría coherente y plausible que explique y regule todos los aspectos vinculados a la comprensión. Hoy por hoy, parece ser que no existe tal teoría y cabe la duda de si llegará a elaborarse con carácter definitivo en un futuro. No obstante, a pesar de que la naturaleza de la comprensión imponga un horizonte por ahora desconocido e inalcanzable, permanece abierto el debate acerca de si ha de ser labor de la Educación Matemática solucionar el problema de la comprensión en toda su extensión, propósito en el que también vienen fracasando disciplinas con una mayor tradición investigadora.

(c) Las limitaciones de las distintas dimensiones de la comprensión e interpretación del conocimiento en matemática. Así por ejemplo las dificultades que afectan a la aproximación cognitiva y relacionadas con la transición de los registros externos a las realidades cognitivas internas del sujeto; o en el caso de la aproximación semiótica, las limitaciones se situan en la problamática relación entre los distintos registros (hablado-escrito) y la eliminación de otras referencias externas en las que se apoyan las crónicas registradas. Por ultimo, la aproximación hermeneutica, en la búsqueda de la comprensión matemática está afectada por la cuestión ontológica de la existencia de los objetos matemáticos.

(d) La triada cognitivo-semiótico-hermenéutica y su dilema metodológico. Cuando nos dirigimos hacia la interpretación de la comprensión en matemáticas, ¿deberíamos asumir que las dimensiones cognitiva, semiótica y hermenéutica (incluso en sus versiones más débiles) son los polos de una relación de exclusión que nos obligaría a elegir entre una de estas posiciones? O, por el contrario, ¿podríamos establecer una relación dialéctica entre ellas, permitiendo eliminar a al menos reducir sus diferencias?.

Entre las distintas contribuciones que dan luz a estos dilemas, encontramos por una parte la propuesta de Duval (2006), en la que se consideran las representaciones semióticas internas (conexión cognitiva-semiótica), y por otra el modelo operativo de interpretación de la comprensión propuesto por Gallardo y colaboradores (Gallardo, J. (2004), Gallardo, J. y González, J. L. (2002, 2006b, 2006c, 2007a), Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2007, 2008a)), Gallardo, J, González, J.L. y Quintanilla (2013, 2014); la estrategia para dirimir el dilema consistirá en considerar una amplia perspectiva de la comprensión, donde los tres acercamientos intervienen en las diferentes fases de su propuesta, complementándose y por tanto mostrándose solidarias.

En concreto la propuesta comienza con el nivel cognitivo, al reconocer que la comprensión matemática es un fenómeno de naturaleza mental, se mueve hacia la dimensión semiótica al analizar la actividad matemática del alumno mediante los registros escritos y por último, y mediante la consideración de las dimensión fenómeno-epistemológica nos permite regresar a la comprensión del alumno considerando los usos que hace del conocimiento matemático (conexión cognitiva-semiótica-hermenéutica).

(e) La cuestión relacionada con la interpretación más adecuada. En relación con el dilema desarrollado en el apartado anterior, la comprensión en matemáticas da pié al limitado territorio de las potenciales interpretaciones. En este sentido Tahta (1996) reconoce la legitimidad y potencialidad de cada acercamiento interpretativo, y propone el uso de interpretaciones alternativas, incluso en el caso de que pudieran estar en contradicción, juzgándolas no para dar veracidad a posibles hipótesis, sino valorarlas en termino de posibilidades. En orden a garantizar su utilidad y efectividad en la Educación Matemática, es interesante que cada aproximación muestre una clara descripción y una potencial prescripción (Koyama, 1993).

Por último, el modelo genérico basado en la naturaleza multifacética de la comprensión hace posible establecer una estructura de referencia con la cual organizar la diversidad de resultados que emergen de los estudios, a la vez que también hace posible identificar, desde los distintos componentes analizados, los principales propósitos al enfrentarse al tema de la comprensión. Esta estructura organizativa resultante también nos será de gran utilidad para establecer las limitaciones y delimitar las fronteras de los estudios sobre la comprensión.

CAPÍTULO 4

Marco teórico y metodológico para el estudio de la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria

4.1 Introducción

La investigación objeto de la presente tesis doctoral forma parte de una línea de investigación sobre la comprensión del conocimiento matemático, su interpretación y valoración que se viene desarrollando desde hace más de una década por profesorado adscrito al Área de Conocimientos de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga. Al mismo tiempo, se trata de la continuación de un estudio exploratorio previo realizado por el autor y presentado en la Memoria de Tercer Ciclo del Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales del bienio 1996-98 del Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga; un estudio que se realizó con los conocimientos y las herramientas existentes entonces, respondiendo a la preocupación del autor por los problemas detectados en torno a las limitaciones en el dominio de los sistemas de numeración hablado y escrito y por el tratamiento didáctico del tema, tanto en Educación Primaria como en los planes de formación de Maestros.

En la investigación que se presenta en esta memoria, el problema inicial abordado en el estudio exploratorio se traslada al ámbito de la formación de Maestros de Educación Primaria y a la totalidad de conocimientos y destrezas involucrados en los sistemas de representación de los números naturales. Pero no son estas las únicas modificaciones introducidas en el trabajo previo; además de las nuevas condiciones y los nuevos conocimientos considerados, el problema se aborda desde un nuevo marco teórico y con un nuevo modelo operativo general para interpretar y valorar la comprensión del conocimiento matemático, lo que ha necesitado de una completa adaptación del problema inicial a las nuevas condiciones. Es evidente, por tanto, que la fundamentación teórica y metodológica del estudio debe tomar en consideración los aspectos básicos de los dos pilares o vías de acceso mencionados, a saber:

a) los nuevos referentes teóricos y metodológicos que resultan de los estudios que se han venido desarrollando en el seno de la línea de investigación en relación con conocimientos matemáticos diversos bajo el enfoque común de un modelo para la interpretación y valoración de la comprensión y

b) los resultados y las consideraciones teóricas y metodológicas específicas de la Memoria de Tercer Ciclo, por una parte ligadas al conocimiento matemático en juego y por otra incardinadas en los inicios de la línea de investigación. El marco teórico y metodológico de la línea de investigación así como el modelo operativo general para la interpretación y valoración de la comprensión del conocimiento matemático se describen en el apartado 4.3, mientras que en el apartado 4.4 se describen los aspectos fundamentales del estudio exploratorio inicial.

Por otra parte, tanto el modelo general como la información obtenida en el estudio exploratorio deben ser adaptados a las características epistemológicas y fenomenológicas de los sistemas de numeración, configuradas inicialmente en la memoria de Tercer Ciclo y ampliadas en esta investigación a la totalidad del campo de conocimientos. Asimismo, la adaptación debe responder a las condiciones empíricas de las nuevas circunstancias en las que se va a desarrollar el trabajo, a los nuevos propósitos del estudio y a las nuevas características de los sujetos de las muestras utilizadas. Esta adaptación a las condiciones locales del nuevo estudio se ha realizado en sucesivas etapas o aproximaciones teórico-empíricas, en las que ha jugado un papel relevante la construcción, por etapas, del *modelo local* de la investigación y la construcción y aplicación, también por etapas, de los sucesivos instrumentos de recogida de datos que, bajo la forma de pruebas escritas, se han ido depurando y simplificando en cada etapa teniendo en cuenta las respuestas de los sujetos de otras tantas muestras. Cada etapa se caracteriza, como se verá más adelante, por una versión distinta y más evolucionada del modelo, una prueba escrita equivalente a las anteriores aunque más reducida y una muestra diferente en cada ocasión para la recogida y el análisis de datos en función de los propósitos del estudio. Las aproximaciones mencionadas, los procesos seguidos, las modificaciones realizadas y las pruebas resultantes se describen en los apartados 4.5, 4.6 y 4.7 del presente capítulo, si bien los datos que justifican algunos de los cambios producidos se describen en los capítulos 5 y 6 correspondientes al desarrollo y resultados de los estudios empíricos, a los que haremos las referencias oportunas en cada momento para justificar los argumentos utilizados. Por último, la información de este primer bloque se completa en el apartado 4.8 con la descripción de los instrumentos y métodos empleados para el análisis de datos.

El proceso que se ha descrito en los párrafos anteriores corresponde a la primera parte del estudio realizado, que se puede considerar situada en las dimensiones cognitiva y semiótica del modelo general. Que duda cabe, como se pone de manifiesto a lo largo de toda la memoria, que la información obtenida en esta primera parte es general, superficial e incompleta y requiere, de acuerdo con el marco teórico y el modelo operativo, información complementaria de mayor profundidad que la obtenida mediante las pruebas escritas y que dé cuenta de la complejidad de los fenómenos en estudio. Por ello se ha desarrollado una segunda parte, de carácter cualitativo, basada en la entrevista y centrada en las dimensiones semiótica y hermenéutica de la interpretación. Las referencias metodológicas de esta última parte se recogen brevemente en el apartado 4.9 con el que culmina el presente capítulo.

4.2 Del modelo general al modelo local. Esquema metodológico del proceso de adaptación y desarrollo de la investigación

El proyecto de investigación sobre la comprensión de los sistemas de numeración se inicia con la Memoria de Tercer Ciclo (apartado 4.4) en el año 1998 y se retoma en el año 2010, encontrándose con un marco teórico bastante más desarrollado y con un modelo más avanzado y completo para la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo y González, 2006a, 2006b, 2006c, 2007a, 2007b, 2011; Gallardo, González, y Quispe, 2007, 2008a, 2008b; Gallardo, González y Quintanilla, 2013, 2014). En este nuevo marco se profundiza en aspectos fundamentales para la investigación, como son las precisiones sobre el propio concepto de comprensión y los avances en el modelo operativo global en su doble dimensión fenómeno-epistemológica y hermenéutica, correspondiendo esta última a la valoración de la comprensión mediante un nuevo ciclo interpretativo (apartado 4.3). Estos avances en el modelo general han permitido también la adaptación a los casos particulares en estudio y la determinación del modelo local en cada caso.

Por otra parte, como hemos señalado en el capítulo 1 de la memoria, también nos encontramos en un momento de cambio en la formación inicial de los Maestros de Primaria con la implantación de la titulación de Grado. Las nuevas circunstancias trasladan el interés al currículum del Plan de estudios y a su adaptación al nuevo marco del Espacio Europeo de la Educación Superior (Orden ECI/3857/2007), en el que, entre otras consideraciones, se pretende ampliar la formación y las competencias profesionales en las materias didáctico/disciplinares. Pero estos cambios no siempre han encontrado el apoyo suficiente en los resultados de investigaciones con la conveniente solvencia y profundidad como para fundamentar y pilotar cambios significativos en los planes de estudio. En particular, las carencias de estudios sobre el dominio y la comprensión de conocimientos matemáticos concretos por parte de los futuros maestros hace prácticamente imposible realizar cualquier modificación curricular que se pretenda sustentar en lo que los alumnos ya saben y dominan, aspecto básico para diseñar un proceso formativo con garantías de éxito.

Siendo conscientes de la necesidad e importancia de disponer de nueva información para acometer con garantías la empresa descrita y con el fin de atender a las nuevas condiciones, la continuación de la investigación ha requerido modificar el marco teórico y metodológico del estudio exploratorio en el siguiente sentido:

- Centrar la indagación en los alumnos futuros maestros del nuevo Grado de Primaria; un colectivo con características especiales y cuya formación inicial es fundamental para mejorar la calidad de la Educación Primaria.
- Utilizar el marco teórico y el modelo operativo sobre la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático obtenidos recientemente en otros estudios de la línea de investigación y contrastar su bondad, utilidad y eficacia.
- Ampliar el estudio de la comprensión sobre las situaciones de traducción entre sistemas de representación numérica elemental, una parte del universo de situaciones del campo en estudio, al resto de aspectos de dicho campo; una ampliación deseable, para poder examinar la comprensión del campo en su conjunto, y posible, gracias a los avances producidos en la faceta fenómeno-epistemológica del modelo general.

- Abrir una vía interesada en relacionar el estudio de la comprensión con el desarrollo de la competencia matemática y con el tratamiento didáctico del tema, estableciendo consecuencias fundadas para la formación matemática.
- Sentar las bases para abrir una línea de indagación sobre comprensión y diseño y desarrollo de planes de formación de Maestros de Primaria basados en los resultados de este tipo de estudios.

En la *Figura 4.1* se representa el proceso de construcción del modelo local y de los instrumentos de recogida de datos para la interpretación de la comprensión de los sistemas de numeración en las nuevas condiciones. Las distintas partes de dicho esquema así como las relaciones entre sus elementos se explican con detalle en los distintos apartados del capítulo.

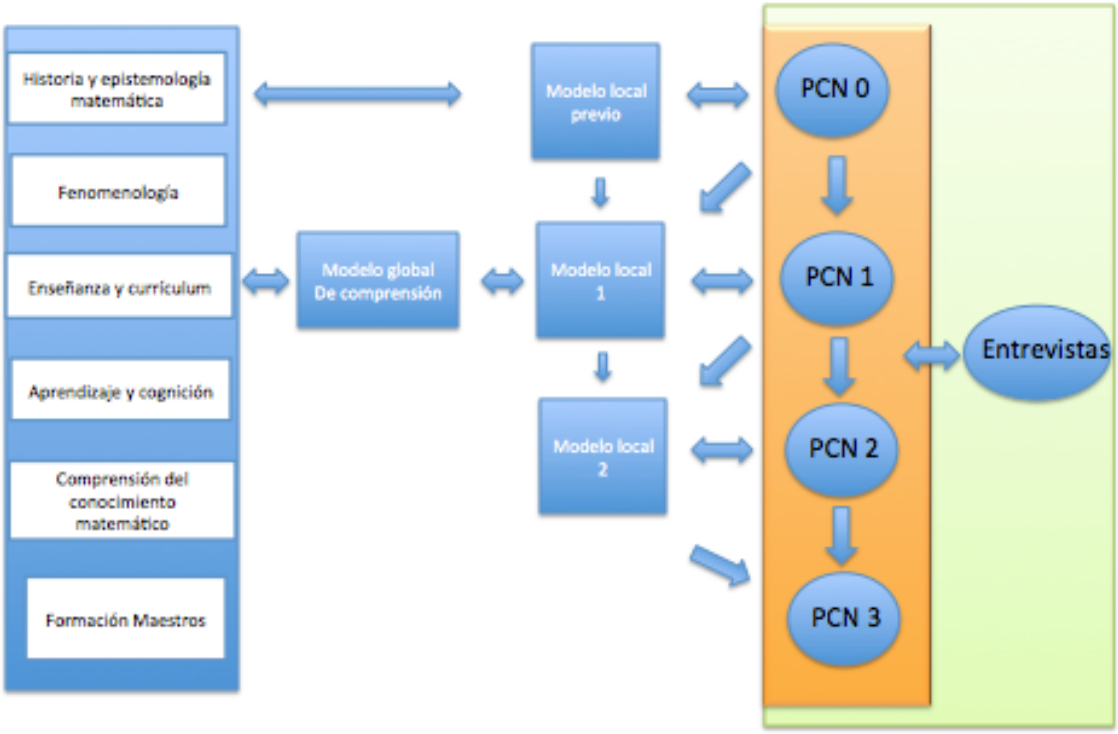


Figura 4.1 Resumen del proceso metodológico seguido

El esquema presenta los elementos del proceso organizados en grupos y con indicación de las principales relaciones entre ellos. En dicho esquema son dignos de mención los siguientes aspectos (de izquierda a derecha de la figura):

a) Los ***campos científicos*** que intervienen: constituyen los fundamentos del estudio y las fuentes de información para la construcción del marco teórico y metodológico del modelo general y su adaptación a las condiciones particulares para la construcción del modelo local.
b) El ***modelo general*** o global de la comprensión del conocimiento matemático y su interpretación (apartado 4.3): constituye la referencia metodológica central y está relacionado, por un lado, con los campos científicos que sustentan el marco teórico y epistemológico de la línea de investigación, y, por otro, con el modelo local en sus distintas aproximaciones.
c) El ***modelo local*** para la interpretación y valoración de la comprensión de los sistemas de numeración: supone un constructo teórico y metodológico elaborado a través de un proceso de aproximación teórico-empírica desarrollado en tres etapas: *el modelo local previo* o inicial, que se utilizó en el

estudio exploratorio (apartado 4.4), *el modelo local 1*, resultado de la primera actualización del modelo previo a las condiciones mencionadas en el apartado anterior (apartado 4.5), y *el modelo local 2*, resultado del ajuste definitivo, en función, entre otros factores, de los datos de la primera prueba de comprensión (apartado 4.6).

d) Los ***instrumentos de recogida de datos***, en estrecha relación con las distintas aproximaciones al modelo local y agrupados en dos bloques: pruebas escritas de comprensión de los sistemas de representación, con 4 versiones (PC0, PC1, PC2 y PC3) (apartados 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7), y el bloque de entrevistas complementarias a las pruebas anteriores (apartado 4.9).

4.3 Modelo operativo para la interpretación y valoración de la comprensión del conocimiento matemático

Se describe en este apartado un modelo operativo[1] para la interpretación de la comprensión en matemáticas que constituye el eje central del marco teórico y metodológico de la investigación desarrollada. El modelo aspira a mediar en el dualismo existente entre las orientaciones cognitiva y semiótica de la interpretación, ofreciendo una visión interpretativa integradora de ambos enfoques, y busca presentar la interpretación desde una perspectiva más inclusiva, donde el objetivo es compartir diferentes formas de ver y comprender las matemáticas antes que insistir en una versión correcta de las matemáticas y una supuesta buena comprensión (Brown, 2008).

Los referentes que configuran el modelo se exponen organizados en dos dimensiones, una fenómeno-epistemológica y otra hermenéutica. La **primera** reúne los principios adoptados en torno al conocimiento matemático y a la comprensión en matemáticas y su valoración. También incluye una propuesta de análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático que posibilita la identificación y organización de tareas y la elaboración de instrumentos propicios para registrar la actividad matemática del estudiante. Ambas estructuras se constituyen en referencias objetivas para caracterizar el uso del conocimiento en la actividad matemática.

Partiendo del análisis fenómeno-epistemológico dirigimos la atención, en segundo lugar, hacia el propio proceso de interpretación, incorporando al modelo una **segunda** dimensión hermenéutica que introduce nuevos principios centrados en los escenarios básicos de interpretación así como un ciclo interpretativo que nos posibilita acceder a la comprensión de los estudiantes en términos del uso que hacen del conocimiento matemático. De este modo, pretendemos dar una respuesta operativa a la problemática transición entre actividad y comprensión matemática.

Las dos dimensiones del modelo establecen pautas metodológicas operativas para interpretar la comprensión matemática de los estudiantes y para transitar hacia un enfoque más interpretativo de la competencia matemática, donde el conocimiento

[1] Construido por Gallardo, J. y colaboradores a lo largo del desarrollo de la línea de investigación sobre comprensión del conocimiento matemático (ver referencias del autor). En este apartado se incluye una descripción extensa del modelo utilizando los aspectos mas importantes descritos en las publicaciones referenciadas en 3.2.2.3, 3.2.4.3, 3.3 y 4.2

matemático, la comprensión y su interpretación cobran un mayor protagonismo. Los referentes que configuran nuestra visión incluyen una idea funcional de la comprensión compatible con la caracterización curricular de la competencia matemática (Gallardo y González, 2014). Veamos a continuación una descripción detallada de cada una de las dimensiones junto a los procedimientos y técnicas metodológicas asociadas a cada una de ellas.

4.3.1 Dimensión fenómeno-epistemológica

La configuración de nuestro modelo parte de un doble reconocimiento: (a) la imposibilidad de acceder de forma directa a la comprensión matemática de los estudiantes y (b) el papel relevante que desempeña el uso del conocimiento matemático en la valoración de la comprensión de los alumnos. De entrada, estos dos supuestos demandan la necesidad de emplear estrategias de acercamiento indirecto a la comprensión centradas en las manifestaciones externas observables de los sujetos al enfrentarse a tareas matemáticas y en las particularidades del conocimiento matemático.

Precisamente, la dimensión fenómeno-epistemológica atiende este reclamo proponiendo unos referentes teórico-metodológicos operativos sobre el conocimiento matemático y sobre la comprensión en matemáticas y su valoración. De estos principios derivamos a su vez un procedimiento para la identificación y organización de tareas con las que registrar e interpretar la actividad matemática del estudiante, basado en el análisis fenomenológico y epistemológico del propio conocimiento matemático.

4.3.1.1 El conocimiento matemático como objeto de comprensión

El conocimiento matemático es considerado en nuestro enfoque como una entidad concreta de referencia con dos estructuras básicas específicas y exclusivas que delimitan su naturaleza y existencia. Estas estructuras surgen de las relaciones con otros conocimientos matemáticos (estructura epistemológica (EE_C)) y de las situaciones[2] que dan sentido al propio conocimiento (estructura fenomenológica (EF_C)), quedando de antemano constituidas con fines valorativos al margen del sujeto con pretensiones de comprensión. Ambas estructuras permiten la delimitación del campo situacional específico y son referencias objetivas para observar el progreso de la comprensión (*Figura 4.2*), que se valorará en términos de capacidad de afrontar con éxito situaciones-problema pertenecientes a las distintas categorías situacionales surgidas del cruce de EE_C con EF_C.

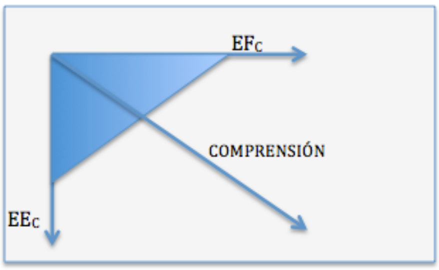


Figura 4.2 Representación del progreso en la comprensión de un conocimiento

[2] Las *situaciones* son contempladas en un sentido amplio, como tareas problemáticas relacionadas con la experiencia personal en contextos diversos. Entre todas, interesa considerar aquéllas en las que se hace legítimo emplear el conocimiento matemático objeto de estudio.

Veamos a continuación qué entendemos al referirnos a dichas estructuras.

I. Estructura epistemológica. Los conocimientos matemáticos son entidades representables, con significado y relacionadas entre sí según las particularidades de cada conocimiento. Por lo general suelen ser constituyentes de conocimientos más complejos y, al mismo tiempo, estar constituidos por otros más básicos a los que deben su existencia. Por ello, podemos considerar que cada conocimiento matemático posee una estructura epistemológica que incluye, entre otros componentes:

- representaciones externas o registros semióticos.
- conocimientos constituyentes.
- conocimientos a los que contribuyen
- estructuras matemáticas y propiedades
- relaciones con otros conocimientos.

Los conocimientos matemáticos no siempre se utilizan del mismo modo y son los componentes caracterizadores de su estructura epistemológica los que establecen en cada caso los requisitos condicionantes de su empleo intencionado por parte del individuo. Por este motivo, los diferentes tipos de uso requeridos componen el primero de los referentes interpretativos sobre los que se sustenta la propuesta de valoración.

II. Estructura fenomenológica. El conocimiento matemático puesto en acción permite considerar también las diferentes relaciones existentes con aquellas situaciones problemáticas en las que tiene sentido su uso. En esencia, podemos diferenciar dos tipos básicos de situaciones susceptibles de poder ser resueltas con un conocimiento matemático:

- *Situaciones de aplicación exclusiva.* Donde el empleo del conocimiento es único y exclusivo entre las posibilidades de uso derivadas de su estructura epistemológica, manifestándose además como la principal opción, evidente y necesaria, para la resolución de la situación.

- *Situaciones de aplicación no-exclusiva*. Admiten varias posibilidades de resolución mediante el empleo de distintos conocimientos matemáticos, entre los que se encuentra como opción el conocimiento dado en alguno de sus posibles modos de empleo.

El criterio fenomenológico por el que un conocimiento matemático interviene en una situación de forma necesaria, en una o varias formas de uso determinadas que dan lugar a clasificaciones fenomenológicas más amplias, o como alternativa entre otros conocimientos, constituye el segundo de los referentes interpretativos vinculado al objeto matemático de nuestra propuesta de valoración de la comprensión.

En clave topológica, la consideración conjunta de ambas estructuras nos permite percibir una red tridimensional de nodos, cada uno de ellos representando un conocimiento matemático o una situación problemática asociada, conectados entre sí mediante vínculos epistemológicos (conocimiento - naturaleza y existencia) y fenomenológicos (conocimiento - situación). Como se puede consultar en los restantes apartados de este capítulo, en el estudio desarrollado se establece una categorización fenomenológica exhaustiva centrando la atención en los diferentes tipos de situaciones de aplicación exclusiva de los sistemas de numeración.

4.3.1.2 La comprensión y su valoración en matemáticas

Consideramos que toda actividad matemática está propiciada por, y es consecuencia de, una actividad intelectual que demanda unas exigencias cognitivas necesariamente vinculadas a la esfera mental de quien la desarrolla. Situamos la comprensión del conocimiento matemático en este contexto y la concebimos como *fenómeno mental de carácter cognitivo; como actividad intelectual cognitiva específica que capacita o hace competente al individuo para elaborar respuestas observables, adaptadas y contextualizadas que involucran la utilización registrable e interpretable del conocimiento matemático en alguna de las categorías y formas posibles de su dimensión fenómeno-epistemológica*. Es, de este modo, como relacionamos la competencia matemática con el punto de vista funcional de la comprensión a través del uso del conocimiento matemático. Ser competente en matemáticas es consecuencia de la comprensión del conocimiento matemático en el sentido que aquí presentamos.

Desde el punto de vista de su formación o constitución, la comprensión de un conocimiento matemático está ligada a las experiencias matemáticas que se producen a través de las situaciones en las que interviene dicho conocimiento. En este sentido, desde el punto de vista de la observación, interpretación y valoración, los estudiantes manifiestan una cierta comprensión en relación con un conocimiento matemático concreto cuando, ante situaciones de desequilibrio cognitivo que deciden voluntariamente abordar y que se resuelven mediante el uso del mencionado conocimiento matemático, elaboran y emiten a su satisfacción respuestas adaptadas donde hacen un uso significativo (esto es, libre, consciente e intencional) de dicho conocimiento. Para ello es necesario analizar la situación, interpretar la información disponible, determinar la conveniencia de intervenir y actuar en consecuencia fabricando una respuesta donde tiene cabida el empleo del conocimiento matemático en cuestión, valorar la intervención en términos de efectividad y adecuación de la misma a la situación de interacción vivida y decidir finalizar la intervención o continuarla retomando algunos pasos del proceso. En definitiva, el uso intencional del conocimiento matemático por parte de un alumno, como forma de acción observable e interpretable, da cuenta de su comprensión. Es por ello que afirmamos que un individuo comprende un conocimiento matemático si es capaz de emplearlo, en alguna de sus formas posibles, en todas aquellas situaciones pertenecientes a su ámbito fenómeno-epistemológico. Por esta razón, nos apoyamos en el supuesto valorativo de que *lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende*. Según sea dicha utilización, en cuanto a disponibilidad, diversidad y efectividad, así será la comprensión manifestada en el momento de responder. También se admite la posibilidad de una mayor comprensión que la revelada a través de una acción observable, pero nunca menor si la implicación es importante y voluntariamente decidida y el rendimiento es alto en la elaboración y valoración de la respuesta.

El aprendizaje y la competencia matemática surgen como consecuencia de la comprensión ligada a la funcionalidad del conocimiento matemático, por lo que la idoneidad del aprendizaje y su valor como objetivo en educación matemática quedan estrechamente vinculados a la cuestión de la comprensión en toda su extensión (Llewellyn, 2012; Sierpinska, 2000).

4.3.1.3 Método para determinar situaciones problemáticas idóneas para interpretar y valorar la comprensión del conocimiento matemático

La visión adoptada sobre la comprensión y su valoración requiere procedimientos para la identificación y selección de tareas problemáticas generadoras de experiencias matemáticas observables. La estrategia radica en determinar un conjunto reducido de situaciones representativas de la parte de la estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento matemático cuya comprensión se desea valorar y con potencialidad para reflejar tal estructura a nivel cognitivo a través de los comportamientos y respuestas externas de los alumnos; ambas condiciones son necesarias para garantizar la utilidad del conjunto como instrumento operativo en la valoración de la comprensión. En ello se manifiesta un claro interés por profundizar en la complejidad del conocimiento matemático y por establecer dimensiones, categorías o componentes con las que controlar dicha complejidad de forma efectiva y operativa.

Al igual que ocurre con otros campos de conocimiento, el sujeto accede y comprende un conocimiento matemático a través de las experiencias significativas en situaciones en las que dicho conocimiento interviene de manera destacada; los usos que el sujeto da al conocimiento matemático como consecuencia de un proceso educativo no dependen sólo de las estructuras y propiedades previas del conocimiento, sino de las experiencias del sujeto con dicho conocimiento, las cuales, en toda su riqueza, exceden normalmente de las limitadas experiencias matemáticas que se pueden proporcionar dentro de un aula o en el seno de una institución. Todas las experiencias, internas o externas al aula, de matemáticas puras o aplicadas, en situaciones realistas, cotidianas, inventadas o formales, configuran la comprensión del conocimiento involucrado y contribuyen al desarrollo de la competencia matemática. Todas son experiencias en las que el conocimiento matemático funciona como conjunto de medios para disminuir la incertidumbre modélica o estructural ligada a las situaciones en las que actúa. El sujeto que participa activamente en dichas experiencias significativas construye, recuerda, incorpora, reorganiza, completa, comprende y mejora sus posibilidades de actuación, es decir, mejora su competencia matemática.

Esta opción demanda, de una parte, analizar la naturaleza del conocimiento matemático para identificar los componentes caracterizadores de su estructura epistemológica, y, de otra, considerar sus relaciones con los fenómenos y situaciones que lo hacen significativo para establecer la correspondiente estructura fenomenológica. Para la delimitación de tal conjunto de situaciones proponemos la aplicación del ***Análisis Didáctico*** (González, 1998, Gallardo y González, 2006a) como instrumento metodológico específico para la investigación en Educación Matemática, orientado en esta ocasión al estudio de la epistemología y fenomenología del conocimiento matemático. De forma específica, el método transcurre por las siguientes fases fundamentales:

Primera fase. Revisión primaria destinada a la identificación y delimitación del *conjunto genérico de situaciones* vinculado al conocimiento matemático. Aceptada la imposibilidad de conocer la infinitud de situaciones donde tiene sentido emplear un conocimiento matemático particular se trata de concretar al menos el conjunto más amplio posible de aquellas situaciones que tienen en común la posible intervención de dicho conocimiento en su resolución. Identificamos esta colección referencial como el conjunto genérico de situaciones asociado al conocimiento matemático, que proporciona una muestra extensa y representativa del que sería el inaccesible y único campo de problemas potencialmente infinito que le da sentido (Puig, 1998)[3]. El acceso a esta información queda garantizado mediante la consulta y revisión de las siguientes fuentes documentales:

- Antecedentes de investigación relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento matemático.
- Muestra representativa de libros de texto de matemáticas.
- Textos dirigidos a la formación didáctica del profesorado de matemáticas de distintos niveles educativos.
- Otras obras complementarias (manuales de matemáticas, textos de divulgación matemática, etc.).

La consulta y revisión de tales fuentes se centran exclusivamente en los aspectos concernientes a la fenomenología y epistemología del conocimiento matemático considerado. Los resultados primarios obtenidos en esta fase incluyen:

(a) una batería inicial de tareas y problemas de distinto tipo que componen provisionalmente el conjunto genérico de situaciones buscado y

(b) unos primeros elementos caracterizadores de la estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento.

En definitiva, interesa recopilar en lo posible los avances contrastados ya existentes relativos a la estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento matemático en estudio. Resulta evidente que los resultados primarios serán desiguales en cada caso en su extensión y precisión al depender de la naturaleza del conocimiento matemático examinado y de los logros alcanzados en la investigación previa realizada sobre tal conocimiento.

Segunda Fase. Estructuración fenómeno-epistemológica del conjunto genérico de situaciones. A partir de la reflexión realizada sobre el material recopilado se lleva a cabo, si fuese preciso por no haberse logrado en la fase anterior, un análisis relacional consistente en el intento teórico de ordenación del conjunto genérico de situaciones obtenido, con una propuesta inicial de categorización situacional que es sometida, a través de una consulta a expertos, a la consideración de una muestra de especialistas en Matemáticas y en Educación Matemática. De esta consulta interesa considerar, sobre todo, las sugerencias de modificación y las posibilidades de ampliación tanto del conjunto genérico de situaciones como de las propias categorías establecidas. Los resultados alcanzados en esta fase permiten la descripción teórica de la estructura fenómeno-epistemológica correspondiente al conocimiento matemático dado. Esta

[3] La noción de conjunto genérico de situaciones adoptada difiere de la de *campo conceptual* de Vergnaud (1997), por cuanto se aplica a conocimientos matemáticos específicos y se enuncia en términos de posibilidad y no de requerimiento de uso. Por otra parte, la relación de los conjuntos situacionales, personal y genérico, se aproxima a la sugerida por Freudenthal (1983) entre objeto mental y concepto o, en términos de Puig (1997), entre campo semántico personal y campo semántico del concepto. Por otra parte, de los análisis, semántico y estructural propuestos por Niemi (1996), el primero se puede identificar con el análisis epistemológico mientras que el segundo difiere notablemente del análisis fenomenológico. Finalmente, a diferencia de la propuesta de Díaz Godino y Batanero (1994), la reflexión fenómeno-epistemológica no va dirigida a determinar la génesis institucional y personal del conocimiento matemático ni su mutua interdependencia, sino a identificar conjuntos reducidos de situaciones pertinentes para ser empleados en labores de diagnóstico y valoración de la comprensión.

estructura, a su vez, es la referencia empleada para la selección del pretendido conjunto reducido de situaciones representativas y pertinentes.

En síntesis, los principales referentes teóricos y metodológicos que sustentan la dimensión fenómeno-epistemológica del modelo de interpretación son los siguientes (*Figura 4.3*):

- La distinción entre lo observable y lo inobservable.
- La conveniencia de reflexionar sobre la correspondencia existente entre las manifestaciones observables del estudiante y lo que realmente sucede en su mente.
- La importancia de la especificidad del conocimiento matemático en la valoración.
- La consideración de los análisis epistemológicos y fenomenológicos del conocimiento matemático como procedimientos operativos para seleccionar situaciones y tareas.
- La propuesta de valoración de la comprensión en términos de uso del conocimiento matemático.

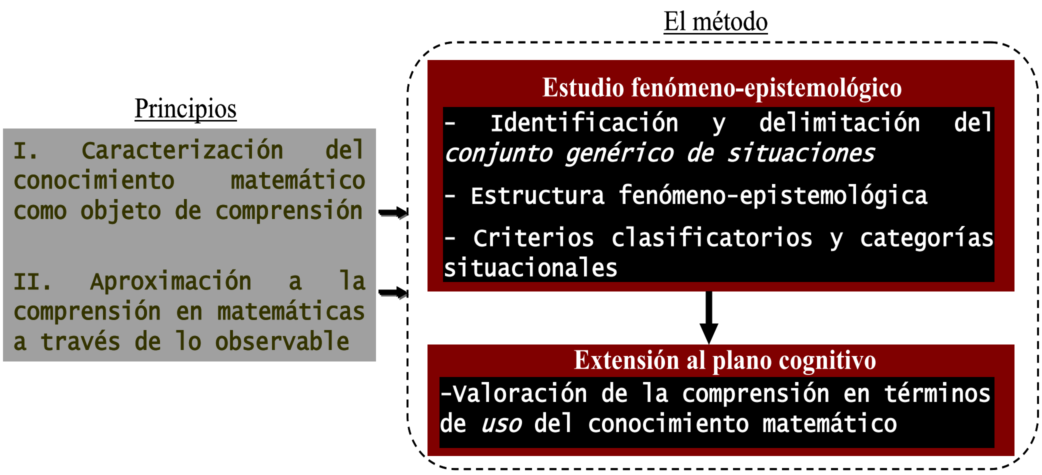


Figura 4.3 Componentes de la dimensión fenómeno-epistemológica para la interpretación de la comprensión en matemáticas

En Gallardo y González (2006b) se describe la aplicación de esta dimensión fenómeno-epistemológica sobre el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales en Educación Primaria (6-12 años).

4.3.2 Dimensión hermenéutica

La dimensión fenómeno-epistemológica no responde por sí sola a algunos temas relevantes relacionados con el propio fenómeno de la interpretación. Por una parte, aún permanecen abiertas cuestiones genéricas relativas al estatus y la orientación de la interpretación. Por ejemplo, ¿la interpretación es una limitación ineludible en el estudio de la comprensión o, por el contrario, se erige como la vía operativa necesaria para el acceso efectivo a la misma? ¿Hacia dónde apunta la interpretación: al alumno que se pronuncia, a la actividad registrada elaborada por él o a alguna referencia externa más allá del registro escrito? Por otra parte, también hemos de dar cuenta de otras cuestiones más específicas que atañen a nuestra propia propuesta interpretativa, como son las referentes a la identificación de rastros de comprensión matemática en el registro escrito y a la caracterización de los usos del conocimiento matemático a partir de esos rastros. ¿Cómo identificar y delimitar entre todo lo observado y registrado de la actividad matemática del estudiante los rastros de su comprensión que pueden considerarse indicadores de algún uso dado al conocimiento matemático?

En definitiva, problemáticas como éstas nos obligan a ampliar el modelo con nuevos supuestos y principios con los que reflejar nuestra propia visión de la interpretación en matemáticas, conformando de este modo una dimensión hermenéutica complementaria a la fenómeno-epistemológica y basada en un ciclo interpretativo básico en el que intervienen: comprensión matemática, registro escrito observable, rastros de comprensión y usos del conocimiento matemático.

4.3.2.1 Estrategias para la interpretación y valoración

La dualidad cognitivo-semiótica de la interpretación en matemáticas, origen de nuestro estudio, encuentra una conexión central con el debate, más general y en un plano diferente, sobre la relación entre comprensión, explicación e interpretación acontecido en la filosofía hermenéutica contemporánea durante el siglo XX. Como referencia específica, presentamos en el apartado A2.1 del Anexo II una breve síntesis de algunas de las contribuciones a esta discusión que influyen en nuestros planteamientos y nos guían en el esclarecimiento del dilema referido.

Las relaciones entre el dualismo cognitivo-semiótico de la interpretación de la comprensión en matemáticas y la discusión de la cuestión hermenéutica trazada a nivel general se manifiestan claramente en el ámbito de la Educación Matemática. Muestra de ello son las afinidades que llegamos a identificar entre:

(a) la *orientación cognitiva* y la interpretación psicológica característica de la dimensión metodológica de la comprensión y

(b) entre la *orientación semiótica* y la explicación estructural (*Figura 4.4*).

Por nuestro lado, optamos por una actitud integradora frente a tal dualismo introduciendo en nuestro modelo de valoración de la comprensión del conocimiento matemático una visión extendida de la interpretación, donde se aprecian las dos orientaciones interviniendo en fases diferentes de la misma propuesta interpretativa. De este modo aspiramos a dar una respuesta operativa a algunas de las fronteras ya señaladas para la interpretación en matemáticas, como las referidas a la problemática transición entre *lo interno* y *lo externo* o entre *lo hablado* y *lo escrito*.

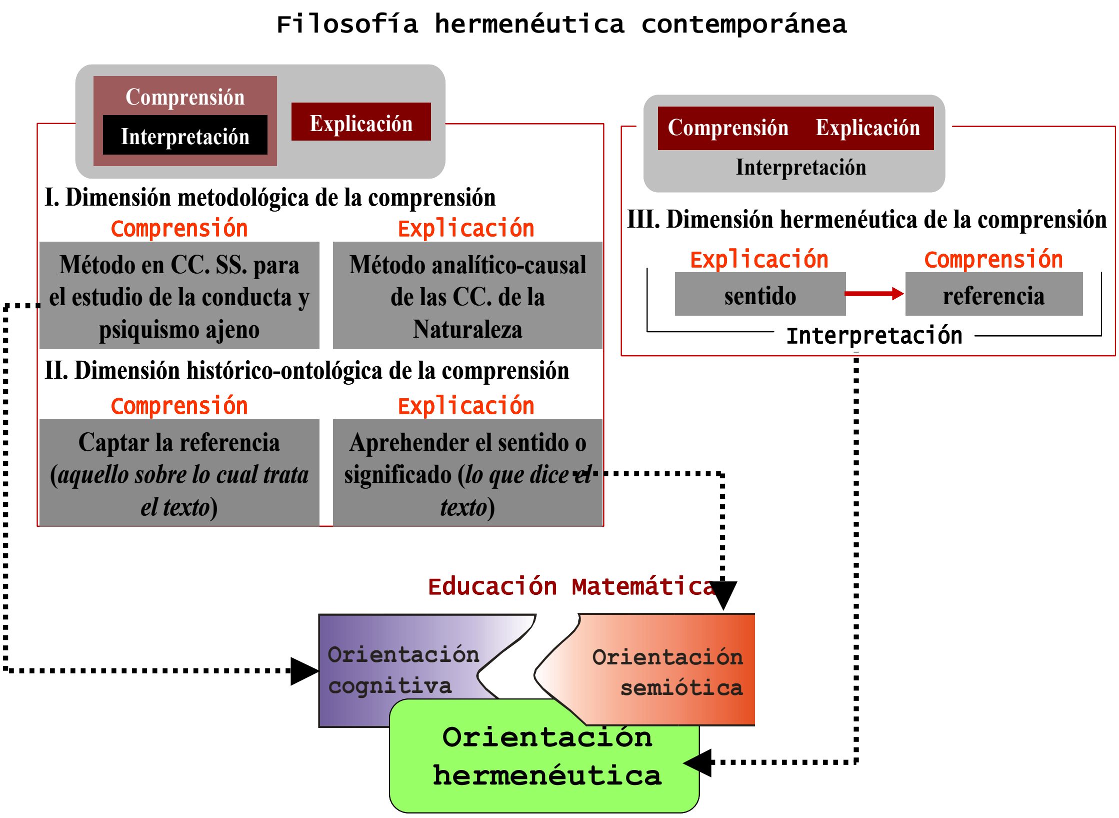


Figura 4.4. Referencias filosóficas para una superación hermenéutica de la dualidad cognitivo-semiótica en la interpretación en matemáticas

La visión integradora se manifiesta en un procedimiento de interpretación que conjuga la componente semiótica del registro escrito con las referencias fenómeno-epistemológicas del conocimiento matemático. En concreto, para esta etapa proponemos una estrategia combinada consistente en:

(a) identificar y validar los rastros de comprensión matemática diseminados a lo largo del registro escrito, y

(b) revelar en estos rastros los usos dados al conocimiento matemático.

Para la primera tarea consideramos que tienen cabida las modalidades metodológicas consolidadas de la orientación semiótica de la interpretación. Para la segunda, nuevamente interviene con eficacia la dimensión fenómeno-epistemológica del modelo, esta vez proporcionando la caracterización de referencia con la que certificar los usos dados al conocimiento matemático.

A partir de aquí, la interpretación ya no busca su norma de inteligibilidad en la comprensión del otro sino que el objeto de la hermenéutica se traslada de la vivencia expresada en el texto (*quien allí se pronuncia*) a su propio sentido (*lo que dice*) y a su referencia (*aquello sobre lo cual trata*) (Ricoeur, 2002).

4.3.2.2 Escenarios básicos de interpretación: componentes y relaciones

Orientamos nuestra propuesta hermenéutica hacia una interpretación flexible adaptada a la originalidad del escenario básico de valoración y de la actividad matemática a interpretar en él. La valoración de la comprensión del conocimiento matemático suele transcurrir en diferentes *escenarios básicos* que se originan cuando se pretende obtener información sobre la comprensión en fases distintas del proceso de enseñanza y aprendizaje. Escenarios básicos usuales son los generados por la resolución individual de una tarea matemática, la discusión generada en un grupo reducido de estudiantes o las intervenciones durante una explicación de clase. Aunque todos los escenarios comparten elementos comunes, cada uno es específico y diferente a los demás, razón por la cual resulta aconsejable delinear una interpretación que tenga en cuenta las particularidades de cada uno de ellos. Participando en tales escenarios identificamos como principales protagonistas a dos agentes intérpretes y a un objeto básico de interpretación:

(a) *El alumno que comprende el conocimiento matemático (primer intérprete).* El estudiante que se enfrenta a una situación problemática de naturaleza matemática se ve inmerso en una actividad interpretativa que exige, entre otros requerimientos:

- La identificación de aquellos conocimientos matemáticos susceptibles de poderse emplear, en alguna de sus formas posibles, como medio para la resolución de la tarea propuesta.

- La decisión sobre qué conocimiento matemático emplear, y de qué modo, entre las posibilidades identificadas previamente.

En nuestra propuesta, introducimos la noción de *conjunto personal de situaciones* asociado a un conocimiento matemático específico para referirnos al conjunto de todas las situaciones que son identificadas por el estudiante como susceptibles de poder ser resueltas con dicho conocimiento matemático. Se dice entonces que una situación particular pertenece a un conjunto personal de situaciones cuando el alumno poseedor de tal conjunto la identifica como propia para ser resuelta con el conocimiento dado[4]. Esta fenomenología subjetiva del conocimiento matemático, donde se reconoce que cada estudiante tiene asignado un grupo de situaciones de extensión variable de distinto tipo que considera aptas para emplear en ellas el conocimiento de forma consciente cada vez que surge la ocasión, constituye el principal referente interpretativo derivado de nuestra aproximación respecto al alumno que comprende. De hecho, desde el enfoque sugerido la compresión de un conocimiento matemático por parte de un alumno queda determinada precisamente por las características de su conjunto personal de situaciones vinculado al conocimiento en cuestión.

(b) *El agente externo observador que interpreta la comprensión del alumno (segundo intérprete).* El agente responsable de la valoración de la comprensión en matemáticas (profesor o investigador) necesita planteamientos teóricos y estrategias metodológicas operativas que contribuyan a la obtención de información objetiva, siempre entendida la objetividad en términos no absolutos, con la que garantizar unas descripciones e interpretaciones cercanas a la realidad de las distintas situaciones cognitivas existentes en los estudiantes. En este sentido, con nuestra propuesta para la gestión de la interpretación, articulada en sus dos dimensiones fenómeno-epistemológica y hermenéutica, pretendemos ofrecer un instrumento metodológico operativo para el desempeño del agente externo observador.

(c) *El objeto básico de interpretación*. La singularidad de la actividad matemática que pretendemos interpretar en cada escenario condiciona y determina desde el principio el resultado efectivo de la interpretación, de manera que apostamos

[4] La relación de los conjuntos situacionales, personal y genérico, se aproxima a la sugerida por Freudenthal (1983) entre objeto mental y concepto o, en términos de Puig (1997), entre campo semántico personal y campo semántico del concepto.

por una interpretación flexible adaptada también a los rasgos particulares de los registros tomados de la actividad matemática desplegada por los alumnos.

4.3.2.3 El ciclo interpretativo de la comprensión en matemáticas

El método interpretativo que propone el modelo arranca en el plano cognitivo, con el reconocimiento de la comprensión matemática como fenómeno mental, irrumpe en el ámbito semiótico, con el análisis de la actividad matemática del estudiante, y desemboca en una superación fenómeno-epistemológica que nos permite retornar de nuevo a la comprensión del alumno a través de los usos dados al conocimiento matemático. Los supuestos y principios generales que definen este ciclo interpretativo (*Figura 4.5*) son los siguientes:

1. La comprensión es una actividad intelectual cognitiva experimentada como tal exclusivamente por quien la desarrolla.

Consideramos que toda actividad matemática está propiciada por, y es consecuencia de, una actividad intelectual de carácter mental. Bajo este supuesto entendemos que la comprensión, tanto en su versión epistemológica, como modo de conocimiento, como en su variante ontológica, como capacidad esencial del sujeto, va a demandar unas exigencias intelectuales necesariamente vinculadas a la esfera cognitiva de quien la desarrolla. De otro modo no justificamos, por ejemplo, que su estudio resulte una tarea altamente compleja, generadora de múltiples problemas abiertos condicionantes de la investigación en Educación Matemática.

2. La comprensión es comunicable e incluye en su manifestación externa rastros interpretables.

Asumimos que los fenómenos cognitivos no son radicalmente incomunicables y que la exteriorización de la comprensión viene dada a través del lenguaje, medio privilegiado de transmisión de lo interno. En base a esto, el *registro* observable generado durante el quehacer matemático se erige como la principal fuente depositaria de las expresiones o *rastros* visibles derivados de la comprensión, constituyéndose por ello en el centro de interés de nuestra propuesta interpretativa.

3. La circunscripción al registro observable, más que limitación, es una condición necesaria para la interpretación.

Una interpretación dirigida a la faceta mental de la comprensión, como sucede con la orientación cognitiva, induce a que la transición entre lo externo y lo interno resulte inevitablemente problemática desde el principio y suponga una limitación metodológica importante para esta vía. Como alternativa operativa, proponemos una opción interpretativa distanciada provisionalmente del interés por lo mental y restringida al registro observable, lo cual permite justificar la interpretación como un requerimiento necesario para la detección y caracterización de rasgos genuinos de comprensión del conocimiento matemático en lugar de ser un condicionante limitador del acceso a la propia comprensión.

4. La interpretación demanda la textualización de todo registro observable.

Consideramos que el carácter contingente, temporal y dependiente de las acciones y las manifestaciones verbales constituye un serio obstáculo para la interpretación en sus distintas variantes. Por el contrario, la estabilidad, perdurabilidad e independencia del *registro escrito* lo hacen especialmente idóneo para desplegar en él nuestra propuesta. De este modo, el paso de lo hablado a lo escrito, lejos de ser una limitación metodológica, se presenta como otra de las condiciones necesarias para la tarea interpretativa. En definitiva, la inscripción de lo observable hace patente el progresivo distanciamiento entre lo mental, lo verbal y, finalmente, lo escrito, poniéndose de manifiesto la inaccesibilidad directa de los aspectos internos de la comprensión, la imposibilidad de una relación especular entre lo verbal y lo escrito y la exigencia ineludible de una interpretación dirigida al texto.

5. La interpretación persigue identificar los rastros de comprensión diseminados en el registro escrito y caracterizar a partir de ellos los usos del conocimiento matemático.

Aunque la comprensión y la interpretación se ejerzan sobre la mediación de un texto, rebasan el campo de lo meramente semiótico. El hecho de que la capacidad para utilizar el conocimiento matemático dependa en buena medida de su comprensión, nos obliga a situar la referencia última de la comprensión del estudiante, no ya en el registro escrito, sino en el uso del conocimiento matemático que deja entrever. Esto es, bajo la premisa de no poderse aplicar aquello que no se posee, encauzamos la búsqueda de la comprensión matemática en una dirección que parte de un texto pero prosigue más allá de él, hacia el empleo del conocimiento matemático. La interpretación se dirige entonces a la exteriorización y caracterización de los usos del conocimiento matemático que se desprenden de los rastros de comprensión emergentes de los registros escritos.

6. *Al carácter cognitivo de la comprensión matemática se retorna a través del consentimiento con el otro*.

Una vez caracterizados los usos del conocimiento matemático, la fase que cierra el círculo interpretativo (y, por tanto, resuelve la tricotomía cognitivo-semiótico-hermenéutica) exige retornar a la comprensión matemática del alumno a través del *consentimiento* del intérprete (investigador/profesor) con el mismo alumno. Se trata de presentar los resultados obtenidos sobre los usos del conocimiento matemático al propio alumno que los ha evidenciado, con objeto de alcanzar un acuerdo con él; de explicitar y reconocer las diferencias entre lo hecho por él y lo que debiera ser según lo marcado por el investigador en base al estudio fenómeno-epistemológico; de que el alumno tome conciencia de su propia comprensión y de que reconozca otra posibilidad además de la suya; de lograr un consenso entre el alumno y el investigador/profesor acerca del trabajo matemático desempeñado. Es en este punto donde la interpretación de la comprensión se hace más solidaria, más *inclusiva* y más justa, al desestimar toda pretensión de "dominación" sobre el estudiante. Sólo así:

(a) Podemos cerrar el ciclo interpretativo, retornando de nuevo a la comprensión matemática del alumno garantizando su naturaleza cognitiva. Es nuestro modo de resolver el problema ético generado por la interpretación semiótica que reduce/disminuye el carácter cognitivo del alumno que comprende. El cierre también trae como consecuencia el aumento o la mejora de la comprensión del estudiante. El investigador, al interpretar la comprensión matemática del estudiante, abre la posibilidad de un aprendizaje con comprensión por parte del propio estudiante de su propia comprensión.

(b) Podemos garantizar nuestra propia comprensión como investigadores/profesores de lo acontecido. Es decir, la interpretación de la comprensión del alumno exige la participación del propio alumno a modo de mediador entre lo que él previamente ha realizado (el registro de la acción matemática acontecida) y nosotros que somos los propios agentes obligados a concretar lo que el alumno comprende y cómo lo comprende.

En esencia, la relación desigual entre el alumno y el investigador tiende a igualarse en esta fase concreta. Ambos se necesitan: el alumno para mejorar su comprensión matemática y el investigador para comprender la comprensión del alumno.

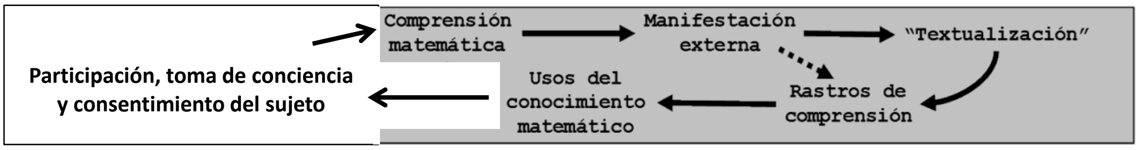


Figura 4.5 Ciclo interpretativo de la comprensión en matemáticas

4.3.3 Pautas metodológicas para la interpretación

En la práctica, el agente intérprete debe enfrentar distintos requerimientos metodológicos a la hora de aplicar el procedimiento para la interpretación de la comprensión que se desprende del modelo propuesto a través de sus dimensiones fenómeno-epistemológica y hermenéutica. De manera específica:

Previo al episodio de interpretación debe hacerse cargo de la selección de las tareas matemáticas y de la configuración del escenario básico de interpretación. Para lo primero, dispone del análisis situacional sugerido por la dimensión fenómeno-epistemológica del modelo. Para lo segundo, cuenta con los referentes metodológicos que inician la dimensión hermenéutica. En concreto, la dimensión fenómeno-epistemológica sugiere realizar las siguientes acciones: (a) realización de un análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático; (b) identificación de los elementos fenómeno-epistemológicos del mismo influyentes a nivel cognitivo, que son los responsables, entre otros aspectos, de la caracterización de los alumnos en términos de comprensión; (c) organización y selección de las situaciones y tareas matemáticas que dan sentido al conocimiento matemático, en base al resultado de los análisis previos; (d) garantía de que los estudiantes se enfrenten a situaciones pertenecientes a las distintas categorías surgidas del cruce de las estructuras epistemológica y fenomenológica del conocimiento matemático; y (e) configuración de los escenarios básicos donde dirigir la interpretación.

En el transcurso del episodio de interpretación la principal labor consiste en garantizar su textualización. Se trata de capturar la actividad matemática desplegada por los estudiantes en registros escritos de distinta índole (escritos matemáticos del alumno, trascripción de diálogos, etc.), empleando para ello instrumentos de recogida de datos adecuados (cuaderno del estudiante, cuestionarios, grabación de audio y video, etc.).

Tras el desarrollo del episodio de interpretación el procedimiento conjuga la componente semiótica del registro escrito con las referencias fenómeno-epistemológicas del conocimiento matemático. En concreto, para esta etapa proponemos una estrategia combinada consistente en (f) interpretar la comprensión de los escolares en términos de capacidad para enfrentar con éxito las situaciones planteadas; (g) identificar y validar los rastros de comprensión matemática diseminados a lo largo del registro escrito; y (h) revelar en estos rastros los usos dados al conocimiento matemático empleando para ello la propia estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento como referencia objetiva con la que certificar tales usos.

4.4 Estudio exploratorio sobre la comprensión de los sistemas de numeración

El marco teórico y el modelo descrito en el apartado anterior han servido de referencia para el desarrollo de la investigación objeto de la tesis doctoral. Pero además de esta referencia teórica, el estudio toma en consideración las experiencias, las reflexiones y los datos de un estudio exploratorio realizado en el mismo campo hace más de una década, a pesar de lo cual podemos considerarlo como precursor en algunos aspectos del que aquí se presenta. Veamos a continuación los aspectos fundamentales de dicho estudio.

En la memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, A. L., 1998) se realiza un estudio exploratorio sobre la comprensión del sistema de numeración decimal centrado en la coordinación entre los sistemas de representación escrito y hablado y su relación con la construcción significativa de los algoritmos de las operaciones aritméticas y el desarrollo del cálculo mental. Se trata de la primera aproximación al problema de la interpretación y valoración de la comprensión de los sistemas de numeración que se aborda en esta investigación. En ella se utilizan rudimentos de lo que más tarde se convertiría en un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas, comenzando por el análisis didáctico de los antecedentes, la reflexión sobre las dimensiones fenómeno-epistemológica del conocimiento, la organización y selección de las tareas que formarían parte de los instrumentos de recogida de datos, la construcción del modelo operativo inicial, etc. Sin embargo el estudio no utilizaba aún un modelo metodológico para la interpretación de la comprensión ni se tenía en cuenta la distinción metodológica entre las dimensiones cognitiva y semiótica ni lo que en el modelo operativo actual se ha denominado dimensión hermenéutica de la comprensión. A continuación describimos esta primera aproximación parcial al modelo local, la determinación de las tareas y la estructura y construcción de los cuestionarios correspondientes.

4.4.1 Modelo inicial para el estudio de la comprensión de los sistemas de representación numérica escrito y hablado

Del estudio previo de carácter teórico, que consistió en la aplicación del análisis didáctico (González, 1995) y la elección de un primer modelo de comprensión, se derivó hacia el diseño específico de un estudio empírico que culmina con la elaboración de una prueba exploratoria, tipo cuestionario, que se incluye en el apartado 3.1 del *Anexo III*.

Como se puede comprobar en los apartados que siguen, en este primer modelo local se consideraron, por una parte, las categorías epistemológicas que se tomaron para caracterizar los distintos niveles de comprensión, y, por otra, el tipo de lenguaje empleado y las referidas a la utilización de los dos sistemas de representación numérica, el escrito (con cifras) y el verbal (con palabras y frases del lenguaje ordinario).

4.4.1.1 Niveles de comprensión

El modelo previo utilizado para organizar las tareas de numeración es una adaptación del modelo de Jan de Lange (1.996) desarrollado por Mary C. Shafer y Sherian Foster en el trabajo, "The changing face of assesment" (1.997). Los autores describen los elementos necesarios para un adecuado programa de evaluación del desarrollo, comprensión y niveles de competencia curricular del alumno en relación con el conocimiento matemático (Larrubia, 2005). En el modelo se consideran tres niveles de comprensión que se adoptaron inicialmente para la estructura del cuestionario: reproducción, conexiones y análisis; categorías que han sido utilizadas, con algunas variantes, en las pruebas PISA que se han venido realizando desde el año 2000 (OCDE 2002b, 2005, 2008, 2010 y 2013). Veamos una descripción más detallada de dichos niveles, remitiéndonos a la memoria, al cuestionario, a los anexos I y III y al resto de apartados de este epígrafe para consultar los ejemplos concretos que se han utilizado en cada parte.

Nivel I. Reproducción: Corresponde a tareas básicas (ejercicios) en las que se aplican o se reproducen, entre otros, los algoritmos, las técnicas, la terminología e incluso hechos aprendidos cuyo dominio sólo supone la adquisición de una habilidad o destreza concreta. En nuestro caso, se sitúan en este nivel tareas tales como: traducciones entre ambos sistemas de representación, el nombre de los distintos agrupamientos: unidad, decena, centena, unidad de millar, etc., la aplicación mecánica de algoritmos, etc.

Nivel II. Conexiones. Corresponde a actividades no rutinarias en la que el alumno debe integrar informaciones, realizar conexiones dentro del dominio matemático correspondiente o entre dominios matemáticos diferentes y decidir que herramienta es la más apropiada para resolver la situación planteada. En el dominio de la numeración, son abundantes las situaciones que podemos situar en este segundo nivel. Un análisis cualitativo de la resolución de tareas a nivel individual, ya sea con pruebas clínicas o con experimentaciones didácticas constructivistas, permitiría diferenciar las actuaciones que realmente relacionan, seleccionan, indagan, etc., y al final resuelven, de los que lo hacen por tener una técnica aprendida sin reflexión ni construcción alguna.

Nivel III. Análisis. Situaciones en las que el alumno tiene que reconocer, analizar y "matematizar" la situación, interpretar, generalizar y desarrollar sus propias estrategias de resolución para obtener la solución. En este tipo de actividades no sólo se evalúa la respuesta final, sino que también deben ser evaluados los diferentes procesos de resolución seguidos, las estrategias empleadas y los argumentos utilizados. Las situaciones no familiares y algunas clasificadas como "enmascaradas", que se han descrito en las experimentaciones de Bednarz y Janvier, pertenecen a este grupo.

4.4.1.2 Tipos de lenguaje

Además de las funciones de objetivación y tratamiento, los sistemas de representación juegan un papel esencial como instrumentos de comunicación (Duval, 1995). Es evidente que en una investigación sobre la comprensión de los sistemas de representación, el tipo de lenguaje utilizado debería jugar un papel prioritario, tanto en la construcción y redacción de las tareas propuestas como en la forma en que se pretende que los alumnos respondan. Por ello, hemos considerado dos tipos de lenguaje: el verbal y el no-verbal o figurativo. En ellos, hemos tenido en cuenta los siguientes aspectos:

Lenguaje verbal: En la redacción se utiliza el lenguaje escrito cercano al niño. Las respuestas, en cambio se admiten en este mismo lenguaje, en un lenguaje de símbolos o incluso en un lenguaje de tipo figurativo de característica no verbal; todo ello en función del tipo de situación verbal planteada.

Lenguaje no-verbal o figurativo: No se utiliza el lenguaje escrito ordinario salvo palabras aisladas con un significado claro (completa, escribe, dibuja, etc.). Con carácter general intervienen figuras, dibujos, tablas, etc.

4.4.1.3. Tipos de sistemas de representación

Como resultado del análisis didáctico y, más concretamente, de los estudios histórico y epistemológico, se establecieron las principales características de los sistemas de numeración habituales y se determinaron sus diferencias. El análisis se centró en el sistema cifrado, de característica posicional, y en el hablado o representación numérica verbal, de tipo multiplicativo y con las irregularidades ya conocidas. Dadas las características del trabajo de investigación, la inclusión de esta variable nos permitía apreciar las diferencias en la utilización de estos dos tipos de representación numéricos y el dominio de las traducciones entre ellos. Veamos algunas precisiones sobre las dos modalidades de esta variable.

Representación numérica verbal (Situaciones con letras y palabras**)**: Son aquellas en las que se solicita al sujeto que exprese sus resultados con la representación numérica verbal pero en lenguaje escrito, con las dificultades que esta actividad conlleva. Esta es la razón por la que creíamos que las entrevistas clínicas nos permitirían obtener mayor información que las pruebas escritas.

Representación numérica cifrada (Situaciones con cifras**)**: Son aquéllas en las que se solicita al sujeto que exprese los resultados en el sistema de numeración posicional escrito y con las cifras conocidas.

4.4.1.4. Modelo local inicial

El cruce de las dos modalidades anteriores con las de las variables correspondientes a los niveles de comprensión y al tipo de sistema de numeración, proporciona el modelo que se representa en el cuadro de la *Figura 4.2*. Cada tarea estaría caracterizada por el nivel de comprensión (I, II o III), el tipo de lenguaje utilizado (V, F) y el tipo de sistema de representación (C, L).

	Lenguaje verbal (V)		**Lenguaje cifrado (C) o figurativo (F)**	
	Cifras (C)	Letras (L)	Cifras (C)	Letras (L)
Nivel I: Reproducción	I.V.C	I.V.L	I.F.C	I.F.L
Nivel II: Conexiones	II.V.C	II.V.L	II.F.C	II.F.L
Nivel III: Análisis	III.V.C	III.V.L	III.F.C	III.F.L

Figura 4.6 Modelo local previo (0)

4.4.2 Análisis fenomenológico y construcción de la prueba escrita

Una vez categorizadas las situaciones mediante las tres componentes descritas, se elaboró una relación de las habilidades y conocimientos básicos que se podía esperar que los alumnos y alumnas de 4º de primaria hubieran desarrollado como consecuencia del aprendizaje escolar, lo que incluyó un primer análisis fenomenológico (didáctico) de los sistemas de numeración en Primaria. Como consecuencia de dicho estudio se establecieron las tareas propicias para formar parte del cuestionario, que se agruparon en las siguientes categorías:

- Escritura y lectura de números de hasta 5 cifras.
- Traducciones entre los sistemas de numeración escrito-cifrado y verbal.
- Conocimientos de los distintos órdenes de agrupamientos: unidades, decenas, centenas, etc.
- Conocimiento del número de los distintos agrupamientos que una cantidad tiene.
- Comparaciones de números, encontrar un número entre otros dos.
- Construcciones del mayor y menor número con distintos dígitos.
- Uso de las ideas de agrupamientos en los algoritmos de las operaciones elementales.

Como se puede comprobar, todas las tareas son de reproducción o conexiones. A partir de dichas categorías se procedió a construir una primera relación de posibles ítems que se incluye en el apartado A3.1 del *Anexo III*. Las tareas propuestas han sido extraídas de actividades de libros de texto, han sido diseñadas por nosotros o construidas siguiendo directrices de experiencias realizadas anteriormente **(**Nadine Bednarz y Bernadette Dufour-Janvier (1982, 1988); Mieko Kamii (1980,81,82) y Constance Kamii (1984,85); Sellarès, R. y Bassedas, M. (1983); Aguilar, M.; Martinez, J., (1997); Lucie Deblois (1.993)**)**.

Para hacer que la prueba fuera viable, es decir, que el sujeto pudiera completarla en un tiempo estimado de 30 a 40 minutos, seleccionamos tres pruebas distintas, aunque con pretensiones de equivalencia, con la intención de pasar cada una de ellas a una muestra diferente de sujetos y estudiar las respuestas. Las pruebas resultantes se incluyen igualmente en el anexo III de la presente memoria.

4.5 Primeras modificaciones de los supuestos del estudio exploratorio. Modelo local 1 y prueba PCN1

Desde la primera incursión exploratoria teórica descrita brevemente en el apartado anterior, los trabajos de la línea de investigación han venido desarrollando sucesivas aproximaciones teóricas, cada vez más evolucionadas, al fenómeno de la interpretación y valoración de la comprensión del conocimiento matemático. Paralelamente, las distintas aproximaciones se han ido sometiendo a prueba en diversos estudios empíricos sobre diferentes conocimientos matemáticos (algoritmo de la multiplicación, concepto de fracción, la ecuación de segundo grado, sistemas de ecuaciones, etc. (apartado 3.2.4 del en capítulo 3)). Los planteamientos iniciales se fueron sometiendo a crítica y contrastando empíricamente en un proceso de perfeccionamiento de un modelo operativo para diagnosticar y valorar la situación de la comprensión; un proceso alimentado por los resultados obtenidos y por los consiguientes análisis y reflexiones teóricas.

A lo largo del desarrollo de la línea de estudio se han ido consolidando las dos ideas siguientes:

-La imposibilidad de acceder de forma directa a la comprensión matemática del sujeto y

-el papel relevante que desempeña el uso del conocimiento matemático en cualquier forma de aproximación a la valoración de la comprensión (Gallardo y González, 2011).

Las consecuencias inmediatas de ambas ideas son que el estudio de la comprensión de un conocimiento matemático tiene que partir del análisis epistemológico y fenomenológico del mismo y que es necesario acceder indirectamente al fenómeno de la comprensión a través de las manifestaciones externas observables del sujeto al realizar tareas matemáticas.

La aplicación del modelo a la comprensión de un conocimiento matemático concreto se inicia, por tanto, con el análisis fenómeno-epistemológico del mismo. El estudio de esta dimensión va a permitir, entre otras cosas, la identificación y organización de tareas, la elaboración de instrumentos propicios para registrar la actividad matemática y la garantía de poder disponer de una referencia objetiva para caracterizar el uso del conocimiento en la actividad matemática.

En el caso que nos ocupa, hemos realizado una nueva aproximación al análisis fenómeno-epistemológico de los sistemas de numeración, pero teniendo en cuenta las nuevas condiciones del estudio, las características de los sujetos y los propósitos que se pretenden alcanzar. No ha sido un análisis exhaustivo, sino global y provisional, orientado sólo a completar la información del estudio exploratorio y con pretensiones de alcanzar mayor profundidad en aproximaciones posteriores. En lo que sigue se presentan los resultados de esta primera aproximación para pasar a continuación a describir el primer modelo construido a partir de dichos resultados y la estructura de la primera prueba escrita que resulta de la aplicación de los datos anteriores.

4.5.1 Análisis Epistemológico y Fenomenológico de los Sistemas de Numeración: Fundamentos del modelo local 1

El análisis determina dos tipos de categorías que pasamos a describir brevemente a continuación.

4.5.1.1 Categorías epistemológicas (niveles de comprensión[5])

Las categorías epistemológicas resultan de agrupar características, facetas y niveles de profundidad y/o complejidad del conocimiento analizado buscando un cierto paralelismo con la ontogénesis del mismo, es decir, una relación coherente y plausible[6] entre la estructura epistemológica del conocimiento y la estructura de los procesos cognitivos involucrados en su desarrollo y aprendizaje, lo que determina de algún modo la fijación de un intervalo aproximado para los niveles de comprensión en función de las características cognitivas y formativas de los sujetos de referencia. Esperamos así que dichas categorías sirvan para diferenciar y representar situaciones cognitivas asociadas a distintos niveles de aprendizaje, dominio y comprensión del conocimiento a través de la construcción de instrumentos de diagnóstico y evaluación adecuados, válidos y fiables.

En principio, se afronta el cambio en las características de los sujetos sobre los que se va a desarrollar la investigación, lo que puede suponer tener en cuenta nuevas categorías epistemológicas a las establecidas en el modelo local previo. Para ello, junto al análisis epistemológico del conocimiento se examinan modelos cognitivos secuenciales definidos por niveles de comprensión, como el modelo de los niveles de comprensión geométrica de Van Hiele, la teoría dinámica de Pirie-Kieren (Kieren, Pirie y Calvert, 1999; Pirie y Kieren, 1989, 1994) o el modelo de proceso de dos ejes

5 En principio vamos a utilizar estas categorías para caracterizar los niveles de comprensión.

6 Somos conscientes de que esto no siempre va a ser posible a un nivel muy detallado, sobre todo en conocimientos cuyo desarrollo histórico y/o su estructura epistemológica no se ajustan fácilmente a un proceso o a un modelo simple, gradual o lineal.

desarrollado por Koyama (1993, 1997, 2000). Los resultados se adaptan a las nuevas condiciones del estudio, a las características generales de los sujetos y se revisan las categorías epistemológicas del modelo inicial, lo que nos conduce a definir los cuatro niveles o categorías epistemológicas de comprensión de los sistemas de numeración siguientes, que hemos formulado en términos de capacidades o competencias específicas:

Nivel técnico o de reproducción:

Decimos que una respuesta o conjunto de respuestas a unas tareas convenientemente seleccionadas son propias de este nivel de comprensión cuando el sujeto que las emite:

- Conoce el sistema de numeración como herramienta sin dominar los principios y las ideas que le dan significado.
- Utiliza el número para operar, comparar, ordenar o es capaz de realizar traducciones, pero no necesita de la descomposición en partes, ni el empleo de la estructura propia del sistema de numeración.
- Resuelve tareas relacionadas con el dominio técnico del instrumento y sus aplicaciones elementales en tareas rutinarias tales como:
    - Identificación de los diferentes órdenes.
    - Lectura y escritura de números.
    - Cuantificación en diferentes contextos.
    - Ordenación y comparaciones aditivas de cantidades.
- Posee un dominio meramente instrumental de los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales.

Nivel analítico:

Decimos que una respuesta o conjunto de respuestas a unas tareas convenientemente seleccionadas son propias de este nivel de comprensión cuando el sujeto que las emite:

- Utiliza inteligentemente el número y la estructura del sistema de numeración decimal, aunque no es competente o tiene dificultades al pasar a sistemas de numeración isomorfos pero en diferentes bases.
- Domina el instrumento con conocimiento significativo del mismo, es consciente de los principios que caracterizan al sistema de numeración y esto permite dar significación a otras entidades matemáticas.
- Puede resolver tareas como:
    - Traducciones entre diversos sistemas numéricos (icónicos, desarrollos polinómicos, expresiones numéricas organizadas por conglomerados de distintos órdenes, etc.).
    - Ordenaciones y comparaciones aditivas de cantidades.
    - Cálculo mental y estimado.
    - Dominio significativo de los algoritmos.
- Utiliza las herramientas anteriores para modelizar y resolver problemas en situaciones no rutinarias (nuevas), es decir, en verdaderos problemas.

Nivel sintético:

Decimos que una respuesta o conjunto de respuestas a unas tareas convenientemente seleccionadas son propias de este nivel de comprensión cuando el sujeto que las emite:

- Es capaz de considerar la representación numérica como objeto de reflexión y no sólo como útil o herramienta.
- Es capaz de generalizar las propiedades y principios de unos sistemas a otros equivalentes, lo que supone la generalización expansiva o extensional del modelo APOE (Dubinsky 2001) mediante el doble proceso de encapsulación-

desencapsulación. Esto le permitirá utilizar las propiedades inherentes a un objeto-esquema conceptual para realizar nuevas construcciones a partir de él.

- Puede resolver tareas como:
    - Traducciones entre diferentes sistemas posicionales.
    - Identificación/obtención de patrones y regularidades: criterios de divisibilidad, etc.
    - Cuantificación en sistemas de diferentes bases.
    - Algoritmos en distintas bases.

Dentro de este nivel distinguiremos dos subniveles:

- Sintético I : generalización a sistemas equivalentes en bases determinadas.
- Sintético II : generalización a sistemas equivalentes en bases indeterminadas.

Nivel formal:

Decimos que una respuesta o conjunto de respuestas a unas tareas convenientemente seleccionadas son propias de este nivel de comprensión cuando el sujeto que las emite:

- Se encuentra en el nivel más alto del proceso de construcción de la representación numérica. Es capaz de formalizar sus conocimientos generando teorías, proponiendo y demostrando teoremas, realizando construcciones formales, etc. Se encuentra en el nivel de experto.
- Es capaz de afrontar situaciones de máxima dificultad en el campo de conocimientos, pues posee la capacidad de realizar razonamientos formales, comprobaciones, demostraciones, etc.
- Es capaz de cuantificar, ordenar, comparar y operar sobre números expresados en sistemas de numeración en una base indeterminada.

4.5.1.2 Categorías fenomenológicas

La segunda dimensión para desmenuzar y caracterizar el conocimiento en estudio pretende organizar y describir los distintos contextos que agrupan las situaciones y los fenómenos en los que tiene sentido utilizar los conocimientos relacionados con los sistemas de representación del número natural. Aquí distinguimos los contextos o tipos de uso de los sistemas de numeración de las situaciones concretas en las que este conocimiento se emplea y tiene sentido, entendiendo, como hacen Castro-Rodríguez, Castro y Torralbo (2013), que hay múltiples situaciones en las que se puede observar el mismo uso. Así, Castro, Rico y Castro (1987) optan por caracterizar a los números naturales atendiendo a sus usos y utilidades y describen, como contextos fundamentales: el cardinal, el ordinal y el contexto de medida, además de considerar como contextos menores: la secuencia verbal, el recuento y el contexto código. Gómez (1989), por su parte, señala cuatro usos fundamentales que organizan las situaciones en las que se presentan los números, añadiendo a los anteriores el contexto operador. Teniendo en cuenta estos contextos y utilidades consideramos, en una primera aproximación que se completará más adelante, los siguientes tipos o bloques de situaciones de aplicación de la numeración:

- Situaciones específicas del conocimiento de la propia numeración (N).
- Situaciones de traducción entre distintos sistemas de representación (T).
- Situaciones de cuantificación y medida (C), que se corresponde con los contextos de cardinal y de medida de la clasificación de Castro (op. Cit.).
- Situaciones de comparación y orden (O), que se corresponde con el contexto ordinal en la clasificación de Castro.

- Situaciones relacionadas con los algoritmos de las operaciones elementales (A).

Las categorías descritas están sujetas a las modificaciones que resulten de los nuevos análisis que se realicen con posterioridad a la aplicación de la prueba que resulta de esta primera aproximación.

4.5.2 Modelo local 1

Teniendo en cuenta las variables epistemológicas y fenomenológicas consideradas, podemos construir un modelo en el que las situaciones de numeración se organizan en 25 grupos de tareas que reduciremos en un primer momento a 20 en función de las características de los alumnos y considerando el hecho previsible de que ningún sujeto se va a encontrar en el nivel de comprensión formal. El modelo operativo local 1 se esquematiza en el cuadro de la *Figura 4.7*, en el que se han representado en las filas las categorías epistemológicas y en las columnas las categorías fenomenológicas descritas en los apartados anteriores.

		CONOCIMIENTOS RELATIVOS AL S.N	APLICACIONES-USOS FENOMENOLOGÍA			
			TRADUCCIONES	CUANTIFICAR-MEDIR	ORDENAR COMPARAR	CALCULAR ALGORITMOS-OPERACIONES
NIVEL DE COMPRENSIÓN	I. TÉCNICO O DE REPRODUCCIÓN	I.N	I.T	I.C	I.O	I.A
	II.ANALÍTICO	II:N	II.T	II.C	II.O	II.A
	III.SINTÉTICO	III.I-N	III.I-T	III.I-C	III.I-O	III.I-A
		III.II-N	III.II-T	III.II-C	III.II-O	III.II-A
	IV. FORMAL	IV-N				

Figura 4.7 Modelo local 1

Cada categoría se simboliza con números romanos, correspondientes a los niveles y subniveles epistemológicos, y con letras mayúsculas que representan a cada una de las categorías fenomenológicas. Este primer modelo del estudio actual será modificado en sucesivas etapas de la investigación.

4.5.3 Primera prueba de comprensión numérica PCN1

El modelo anterior ha servido de base para diseñar una primera prueba de comprensión numérica (PCN1), que se incluye en el apartado A3.2 del Anexo III, para indagar sobre la situación de los futuros maestros que cursan el Grado de Primaria. Como se puede comprobar, se han elegido situaciones correspondientes a casi todas las categorías. De las categorías fenomenológicas se han considerado las relativas al conocimiento del propio sistema de numeración, las traducciones entre diferentes sistemas, la cuantificación y los algoritmos de las operaciones; de las categorías epistemológicas se ha prescindido de las tareas formales, en función de las características de los alumnos, y se han tenido en cuenta todas las demás categorías.

La prueba se ha estructurado situando los diferentes niveles de comprensión de menor a mayor complejidad, según el modelo, a partir de las actividades del nivel técnico. En la estructura de la prueba (*Figura 4.8*) se pueden distinguir cuatro partes diferenciadas: en la **primera**, formada por situaciones técnicas o de reproducción, se deben completar cuestiones relacionadas con aspectos de la propia numeración, como traducciones entre los sistemas de numeración hablado (con letras) y escrito (cifrado) o tareas sobre los elementos de la sintaxis del propio sistema (conocimiento de los diferentes órdenes de unidades), y aspectos relacionados con el orden numérico. En la **segunda**, correspondiente al nivel epistemológico de análisis y formada por situaciones de lectura y escritura no habituales de números con intervención de las propiedades del propio sistema, se deben completar cuestiones relacionadas con el orden y la comparación numérica (anterior y posterior a un número dado en ambos sistemas).

Figura 4.8 Estructura de la PCN1 y su relación con el modelo local 1.

En la **tercera** parte del cuestionario se incluyen cuestiones relacionadas con los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales, tareas que podemos considerar correspondientes al nivel de análisis del modelo. En la **cuarta** parte se propone resolver y explicar situaciones relacionadas con la cuantificación y el cálculo con cantidades en agrupamientos diferentes al decimal, las cuales se sitúan en el nivel sintético del modelo.

A continuación describiremos con más precisión las cuestiones incluidas en el cuestionario (incluido en el apartado A3.2 del Anexo III) divididas en las cuatro partes descritas anteriormente.

4.5.3.1 Primera parte (nivel técnico)

Está formada por 6 cuestiones divididas a su vez en 16 ítems. Con las 2 primeras cuestiones, compuestas por los ítems IT1.1, IT1.2, IT2.1 y IT2.2[7], se proponen

[7] Utilizamos como notación para simbolizar a los distintos ítems de la prueba una combinación de términos para representas en primer lugar la categoría epistemológica (I, II ó III), a continuación la

traducciones entre los sistemas de numeración “verbal” y “cifrado”, actividades situadas en la categoría fenomenológica de traducciones. En ellas, se han propuesto cantidades con una presencia destacada de ceros, lo que suele ser origen de dificultades y numerosos errores (Otálora y Orozco, 2006).

En las cuestiones 3 y 4, divididas a su vez en los ítems IO3.1, IO3.2, IO3.3, IO3.4, IO4.1 y IO4.2 correspondientes a la categoría fenomenológica de ordenar y comparar, se piden los números siguientes y anteriores a otros propuestos en las dos representaciones numéricas.

En las cuestiones 5 y 6, compuestas por los ítems del IN5.1 al IT5.4 y los IN6.1 y IN6.2, se propone la identificación de diferentes órdenes de unidades en cantidades escritas en ambos sistemas de representación; se trata de actividades correspondientes al conocimiento del propio sistema de numeración decimal.

En la *Tabla 4.1* se muestra la distribución de las tareas propuestas en esta primera parte de la PCN1.

Tabla 4.1 Distribución de los ítems del nivel de reproducción de la PCN1

<table>
<tr><td rowspan="16">I</td><td rowspan="2">IT1</td><td>IT1.1</td><td colspan="5" rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>IT1.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IT2</td><td>IT2.1</td></tr>
<tr><td>IT2.2</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4"></td><td rowspan="4">IO3</td><td>IO3.1</td><td colspan="3" rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>IO3.2</td></tr>
<tr><td>IO3.3</td></tr>
<tr><td>IO3.4</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2">IO4</td><td>IO4.1</td></tr>
<tr><td>IO4.2</td></tr>
<tr><td colspan="4" rowspan="4"></td><td rowspan="4">IN5</td><td>IN5.1</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>IN5.2</td></tr>
<tr><td>IN5.3</td></tr>
<tr><td>IN5.4</td></tr>
<tr><td colspan="4" rowspan="2"></td><td rowspan="2">IN6</td><td>IN6.1</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>IN6.2</td></tr>
</table>

4.5.3.2 Segunda parte (nivel de análisis)

En las cuestiones 7, 9, 12 y 16, compuestas por los ítems IIN7.1, IIN7.2, IIN9.1, IIN9.2, IIO12.1, IIO12.2 y IIC16, se presentan cantidades expresadas en la representación verbal y en formatos “no habituales” con el propósito de que la expresen en el sistema de numeración cifrado. En el caso concreto de los ítems que corresponden a la tarea 12 se les pide además que obtengan el anterior o el siguiente. Todas estas cuestiones las situamos en el nivel analítico de comprensión y corresponden a situaciones propias de traducciones, de conocimiento del propio sistema de numeración y de comparación y orden. La cuestión IIN7.1 se ha recogido de las actividades propuestas en Gómez, B. (1989) y las IIN9.1 y IIN9.2 del estudio realizado por Aguilar y Martínez (1997).

fenomenológica (N, T, C, O, A) y para terminar el orden numérico inicial para la PCN1; esta notación se mantendrá para cada ítem a lo largo de las pruebas en las que se incluye.

Con los ítems IIN8.1 y IIN8.2, correspondientes a situaciones relacionadas con el sistema de representación numérico recogidas en el estudio de Aguilar y Martínez (1997), se pretende conocer el dominio de los futuros docentes del tamaño de los diferentes ordenes de unidades que componen una determinada cantidad y la diferencia que existe con las cifras que la componen. Para incidir en esta diferencia se proponen las situaciones IIN10 y IIN11, que corresponden como en los anteriores al nivel de análisis y al conocimiento de la numeración.

La última cuestión que se propone en esta sección supone actuar sobre un sistema de numeración aditivo en el que se pretende encontrar el número de asteriscos presentes (unidades), incluyendo diferentes símbolos para distintos órdenes de agrupamiento. En esta tarea, más que valorar el resultado que se obtiene, nos interesa conocer el proceso seguido que reflejará la identificación de propiedades comunes con nuestro sistema de numeración.

4.5.3.3 Tercera parte (nivel de análisis / algoritmos)

Está compuesta por las cuestiones 13, 14 y 15 correspondientes al nivel analítico y a aplicaciones y usos relacionados con los significados de las diferentes acciones que realizamos en los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales, en particular de la suma, la resta y la multiplicación; acciones estrechamente relacionadas con las características del sistema de numeración. De hecho, la comprensión del sistema necesita del conocimiento de las operaciones implícitas y los algoritmos de las operaciones suponen una buena oportunidad para profundizar en la construcción del sistema de numeración (Tegiri, F. y Wolman, S, 2007, p.74).

Los ítems que integran esta parte inciden en la explicación del proceso seguido en su resolución y se han tomado de la investigación realizada por Salinas M. J. (2003a; 2003b; 2007) con estudiantes de Magisterio. Se han codificado mediante los símbolos IIA13.1, IIA13.2, IIA14.1, IIA14.2, IIA15.1, IIA15.2 y IIA15.3 después de eliminar las cuestiones correspondientes a la división por razones de extensión de la prueba.

Tabla 4.2 Distribución de los ítems del nivel de análisis de la PCN1

<table>
<tr><td rowspan="18">II</td><td rowspan="8">IIN</td><td rowspan="2">IIN7</td><td>IIN7.1</td><td colspan="3" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>IIN7.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IIN8</td><td>IIN8.1</td><td colspan="3" rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>IIN8.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IIN9</td><td>IIN9.1</td></tr>
<tr><td>IIN9.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">IIN10</td></tr>
<tr><td colspan="2">IIN11</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">IIO</td><td>IIO12.1</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>IIO12.2</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="7">IIA</td><td rowspan="2">IIA13</td><td>IIA13.1</td><td rowspan="7"></td></tr>
<tr><td>IIA13.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IIA14</td><td>IIA14.1</td></tr>
<tr><td>IIA14.2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">IIA15</td><td>IIA15.1</td></tr>
<tr><td>IIA15.2</td></tr>
<tr><td>IIA15.3</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td><td>IIC16</td></tr>
</table>

La distribución de ítems de la segunda y tercera parte de la PCN1 se muestran en la *Tabla 4.2*.

4.5.3.4 Cuarta parte (nivel de síntesis)

En esta parte se incluyen 8 cuestiones que suponen la extensión de las ideas, las estrategias y los principios que rigen nuestro sistema de numeración así como de la generalización a otros sistemas con agrupamientos indeterminados, a representaciones numéricas con agrupamientos distintos al decimal. Para ello, hemos considerado un contexto real, los agrupamientos de bombones, de 8 en 8, de 6 en 6 e incluso de **a** en **a,** en bolsas, paquetes y cajas.

Con el ítem IIIC.17 se pretende realizar un recuento para proponer el número de paquetes, bolsas y bombones sueltos que deben formar parte de un pedido. En los ítems correspondientes a los apartados 18, 19, 20, 21, 22 y 23 se introduce de forma contextualizada la notación numérica abreviada correspondiente a sistemas de numeración en distintas bases. Con ello se pretende conocer la capacidad de los alumnos para aplicar a diferentes sistemas de numeración los principios aditivo, multiplicativo y posicional característicos de nuestro sistema de numeración usual. En los ítems propuestos se pretende evaluar la forma en la que los sujetos realizan las operaciones aritméticas elementales necesarias para resolver las cuestiones planteadas. Situamos estas actividades en el nivel III o nivel sintético y por razones de extensión del cuestionario, las hemos limitado a situaciones de calculo (operaciones-algoritmos).

Los ítems III.IIA24.1 y III.IIA24.2 suponen un paso más en la generalización del sistema y una ocasión para valorar el nivel de comprensión de los principios que lo caracterizan, el dominio de las aplicaciones en situaciones operatorias y las estrategias para actuar en contextos algebraicos. Con todo ello, la estructura de la PCN1 en las cuestiones relativas al nivel de síntesis es la que se recoge en la *Tabla 4.3*.

Tabla 4.3 Distribución de los ítems del nivel de síntesis de la PCN1

<table>
<tr><td rowspan="12">III</td><td rowspan="10">III.I</td><td rowspan="2">III.IC</td><td>IIIC17</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>IIIC19</td></tr>
<tr><td rowspan="8">III.IA</td><td rowspan="2">III.IA18</td><td>IIIA18.1</td></tr>
<tr><td>IIIA18.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">III.IA22</td></tr>
<tr><td colspan="2">III.IA23</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III.IAO20</td><td>III.IAO20.1</td></tr>
<tr><td>III.IAO20.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III.IAT.21</td><td>III.IAT21.1</td></tr>
<tr><td>III.IAT21.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III.II</td><td rowspan="2">III.IIA</td><td rowspan="2">III.IIA.24</td><td>III.IIA24.1</td></tr>
<tr><td>III.IIA24.2</td></tr>
</table>

4.6 Modelo local 2 y prueba PCN2

Una vez aplicada la PCN1 a una muestra de alumnos que inician los estudios del grado de Educación primaria y tras realizar la valoración de la comprensión a partir de las respuestas de los sujetos, mediante un análisis cuantitativo global y un análisis semiótico más preciso y de naturaleza cualitativa (apartados 5.3 y 6.2) procedemos a evaluar el modelo local 1 y el propio instrumento diseñado.

El proceso seguido comienza con una revisión de los ítems de la prueba PCN1 y de los resultados obtenidos con su aplicación. A partir de esa información se realiza una reflexión sobre el modelo 1 y la prueba resultante que se concreta en un nuevo estudio teórico (estudio teórico 2) que trata de completar, modificar y extender los resultados anteriores. Veamos brevemente a continuación los principales resultados del proceso mencionado.

4.6.1 Estudio teórico 2: actualización de las categorías epistemológicas y fenomenológicas

Se completan los estudios epistemológicos definiendo con mayor precisión términos como: comprender, comprensión, competencia, nivel de comprensión, escenario y rastro de comprensión (Gallardo y González, 2012, 2014). Por otra parte se completa el estudio fenomenológico definiendo y matizando las categorías fenomenológicas utilizadas anteriormente, para lo que se han tenido en cuenta las consideraciones y resultados de Puig (1997), Rico, Marín, Lupiañez y Gómez (2008), Sánchez (2012) y Castro-Rodríguez, Castro y Torralbo (2013).

Del estudio realizado concluimos que los sistemas de numeración elementales organizan los siguientes fenómenos:

1.- *Estructurar/Organizar cantidades* para su representación mediante un sistema de numeración, para lo que se emplean: los conceptos de unidad, agrupamiento y orden de agrupamiento; los principios aditivo y multiplicativo, y los conceptos de posición y orden. Fenómeno asociado a la categoría/contexto "conocimiento de la numeración (N)".

2.- *Numerar y contar para cuantificar o medir* y representar el resultado mediante un sistema de numeración (cardinal de una colección), para lo que se emplea: la secuencia verbal; las estrategias de estructuración y disposición de la cantidad (fenómeno 1) para contar y cuantificar; el sentido acumulativo del conteo y el concepto de cardinal (número asociado a la última palabra utilizada (disposición lineal) o resultado de combinar aditivamente las partes. Fenómeno asociado a la categoría/contexto "cuantificación y medida. (C)".

3.- *Representar/traducir cantidades y números*, fenómeno central de los sistemas de numeración, para el que se emplea: contar cantidades de manera simple o estructurada (fenómeno 1) para averiguar el cardinal (fenómeno 2); distintos sistemas de representación: sistemas icónicos, sistema de "numeración hablado/verbal", sistemas de "numeración escrito/cifrado" decimales o no; un conjunto de reglas de traducción. Fenómeno asociado a la categoría/contexto "representación y traducción entre sistemas de representación numérica (T)".

4.- *Comparar y ordenar números y cantidades estructuradas*; involucrando: el concepto de comparación de "tamaños" o cardinales de cantidades (más o menos) (fenómeno 2);

los conceptos de anterior, posterior, primero, etc., entre cantidades estructuradas (fenómeno 1) y números (fenómenos 2 y 3); los procedimientos para comparar cantidades y números (fenómenos 1, 2 y 3); el concepto de orden y los procedimientos para ordenar cantidades y números. Fenómeno asociado a la categoría/contexto "Situaciones de comparación y orden (O)".

5.- *Componer / descomponer / combinar / transformar cantidades estructuradas y operar aritméticamente con números* mediante los algoritmos usuales, para lo que se emplean: los conceptos y procedimientos involucrados en las acciones de composición / descomposición / combinación / transformación de cantidades estructuradas (juntar, añadir, separar, etc.) (fenómenos 1, 2, 3 y 4); los conceptos de las operaciones aritméticas (fenómenos 1, 2, 3 y 4), de agrupamiento y transferencia entre unidades y los algoritmos de las operaciones aritméticas. Fenómeno asociado a la categoría/contexto "Operaciones y algoritmos (A)".

4.6.2 Modelo local 2

De las consideraciones anteriores y del análisis detallado de los resultados de la Prueba 1 (apartados 5.4 y 6.3) se sigue la conveniencia de eliminar el nivel formal y completar la estructura fenomenológica del modelo local 1. En consecuencia, el modelo local 2 queda configurado de acuerdo con el esquema de la *Figura 4.9*.

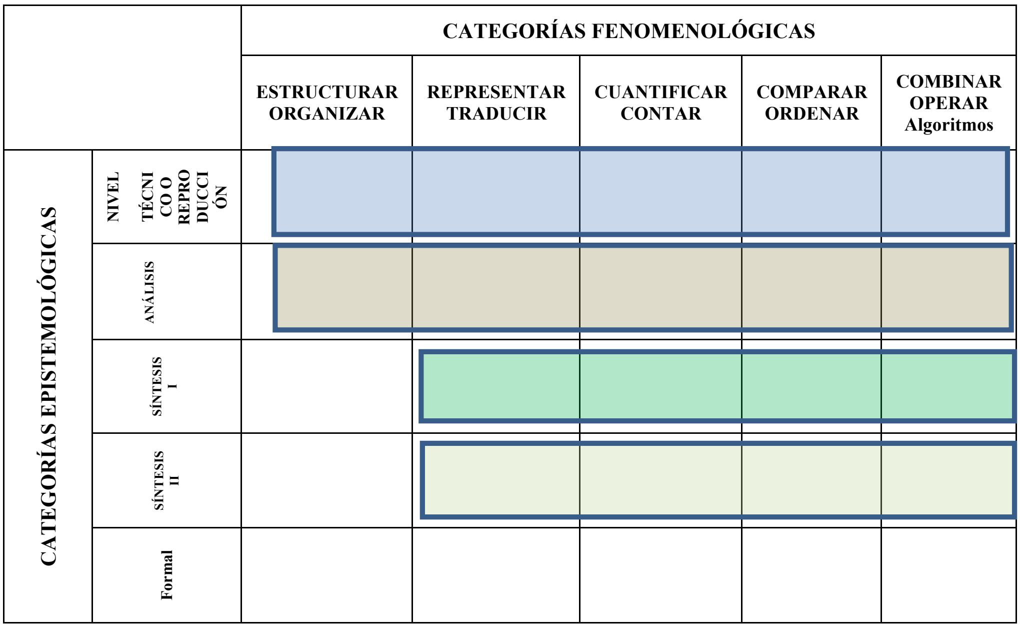


Figura 4.9 Modelo local 2

Hemos de hacer notar que los dos subniveles de análisis del modelo anterior, análisis general y análisis/algoritmos, han sido agrupados en el nuevo modelo en un solo nivel, aunque nos referiremos a sus componentes estructural y funcional para identificar los usos de la numeración en el análisis hermenéutico a realizar en los capítulos 6 y 7. Asimismo, se ha eliminado el nivel formal como nivel efectivo del modelo para la elaboración de nuevas pruebas en el ámbito de estudio de la tesis doctoral.

4.6.3 Segunda prueba de comprensión numérica PCN2

La segunda prueba de comprensión numérica (PCN2), incluida en el apartado A3.3 del Anexo III, se ha elaborado tomando como referencia el modelo local 2 de la *Figura 4.9*. En dicha prueba se han agrupado las tareas en cuatro partes y se ha reducido su número en relación a la prueba PCN1. De las 46 cuestiones, ítems o tareas planteadas en el primer cuestionario se ha pasado a 33 en el segundo. La selección se ha realizado utilizando los índices de dificultad (IF), discriminación (ID) y de homogeneidad (ρ) de las tareas así como el examen comparado de los ítems para eliminar aquellas tareas que podrían resultar redundantes o equivalentes. Los detalles de estas modificaciones se explican a propósito del análisis por separado de cada uno de los bloques del modelo.

4.6.3.1 Primera parte (nivel técnico)

En esta parte se ha reducido el número de tareas pasando de 16 de la primera prueba a 12 en esta segunda prueba. En particular se mantienen las dos primeras tareas clásicas de traducción del sistema verbal al cifrado y se elimina el primero de los dos ítems de traducción del sistema cifrado al verbal IT2.1; el motivo de esta modificación radica en el examen de los índices IF y de los coeficiente ρ de ambas tareas (*Tabla IV.7.1,* del Anexo IV). Por otra parte se han mantenido todas las tareas relativas a la categoría fenomenológica de orden y los ítems IN5.1, IN5.2 y IN5.3, eliminándose el IN5.4 por estimarse equivalente a los tres anteriores y con valores muy cercanos e inferiores a los de la tarea IN5.3. Igualmente, se han eliminado las tareas IN6.1 y IN6.2 por idénticas razones. Por último, queremos señalar que se ha mantenido la codificación de los ítems para poder comparar los resultados con los obtenidos en la primera, aunque en los cuestionarios que los alumnos realizan las tareas se ordenan numéricamente sin atender a estos códigos que consideramos propios de la investigación.

La *Tabla 4.4* ilustra la organización de las tareas propuestas para esta primera parte de la segunda prueba.

Tabla 4.4 Organización de los ítems del nivel técnico de la PCN2

<table>
<tr><td rowspan="12">I</td><td rowspan="2">IT1</td><td>IT1.1</td><td colspan="5" rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>IT1.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">IT2.1</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4"></td><td rowspan="4">IO3</td><td>IO3.1</td><td colspan="3" rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>IO3.2</td></tr>
<tr><td>IO3.3</td></tr>
<tr><td>IO3.4</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2">IO4</td><td>IO4.1</td></tr>
<tr><td>IO4.2</td></tr>
<tr><td colspan="4" rowspan="3"></td><td rowspan="3">IN5</td><td>IN5.1</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>IN5.2</td></tr>
<tr><td>IN5.3</td></tr>
</table>

4.6.3.2 Segunda parte (nivel de análisis general)

En la segunda y tercera parte de la PCN2, se han llevado a cabo el mayor número de modificaciones respecto de la primera prueba. Se han eliminado 8 de las 18 cuestiones iniciales (11 en la segunda parte y 7 en la tercera), quedando un total de 6 tareas en la segunda parte y 4 en la tercera.

Las tareas IIN7, IIN9 y IIO12 se pueden considerar equivalentes, puesto que en todas ellas se pretende traducir cantidades expresadas como conglomerados de unidades de distintos órdenes y con estructura multiplicativa al sistema posicional. De ellas se ha eliminado la IIN7, tanto por el número elevado de respuestas en blanco (SR), como por el número de respuestas en las que se consideran expresiones incorrectas, no sin cierta razón, las contenidas en el propio ítem. Asimismo, suprimimos la tarea IIO12, una vez analizados los índices y los coeficientes de discriminación contenidos en la *Tabla IV.7.2* del Anexo IV, y considerando que los errores detectados estaban relacionados con una lectura insuficiente del enunciado o que en muchos casos las respuestas estaban inducidas por el formato de las tareas anteriores. Por lo que de este grupo de tareas decidimos mantener únicamente los ítems IIN9.1 y IIN9.2.

Por último, de los ítems IIN10 y IIN11, que consideramos también equivalentes, mantenemos el segundo por entender que tiene una mayor riqueza de matices y por tanto es más útil para su inclusión en la entrevista a realizar en la última fase del estudio empírico, a pesar de los resultados que arroja el análisis de los índices y coeficientes estudiados *(Tabla IV.7.2* del Anexo IV).

4.6.3.3 Tercera parte (Nivel de análisis / algoritmos)

En esta parte se han reformulado las cuestiones relacionadas con la comprensión de los algoritmos de las operaciones elementales para detectar errores que en la versión anterior no se podían constatar. Por otra parte, teniendo en cuenta los índices de dificultad, el índice de discriminación y el coeficiente de homogeneidad que figuran en la *Tabla IV.7.2* del Anexo IV, se aprecian similitudes entre los pares de ítems IIA13.1 y IIA13.2, IIA14.1 y IIA14.2 y IIA15.1 y IIA15.2, por lo que hemos sintetizado las tareas IIA3.1 y IIA3.2 en una sola (IIA13), en la que la cifra de llevadas se encuentra en las centenas. Asimismo, y por la misma razón, los ítems IIA14.1 y IIA14.2 se han reducido también a uno (IIA14). Por último, se han mantenido dos de los tres ítems correspondientes al algoritmo de la multiplicación, de manera que el IIA15.1 sustituye a los IIA15.1 y IIA15.2 de la prueba anterior, mientras que el IIA15.3 se ha codificado en esta segunda prueba como IIA15.2.

La distribución de ítems de la segunda y tercera parte del segundo cuestionario se muestran en la *Tabla 4.5*.

Tabla 4.5 Organización de los ítems del nivel de análisis de la PCN2

<table>
<tr><td rowspan="10">II</td><td rowspan="5">IIN</td><td rowspan="2">IIN8</td><td>IIN8.1</td><td colspan="3" rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>IIN8.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IIN9</td><td>IIN9.1</td></tr>
<tr><td>IIN9.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">IIN11</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="4">IIA</td><td colspan="2">IIA13</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2">IIA14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IIA15</td><td>IIA15.1</td></tr>
<tr><td>IIA15.2</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td><td>IIC16</td></tr>
</table>

4.6.3.4 Cuarta parte (nivel de síntesis)

La cuarta parte de la PCN2, dedicada a analizar el nivel de síntesis, se ha mantenido invariante con respecto a la PCN1, con la salvedad de la eliminación de la cuestión III.IA23, por su coincidencia en cuanto a la estructura y los contenidos con la III.IA22. Con todo ello, la estructura de la cuarta parte de la prueba PCN2 es prácticamente la misma que la de la PCN1, como se puede apreciar en la *Tabla 4.6*.

Tabla 4.6 Organización de los ítems del nivel de síntesis de la PCN2

<table>
<tr><td rowspan="11">III</td><td rowspan="9">III.I</td><td rowspan="2">III.IC</td><td>IIIC17</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>IIIC19</td></tr>
<tr><td rowspan="7">III.IA</td><td rowspan="2">III.IA18</td><td>IIIA18.1</td></tr>
<tr><td>IIIA18.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">III.IA22</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III.IAO20</td><td>III.IAO20.1</td></tr>
<tr><td>III.IAO20.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III.IAT21</td><td>III.IAT21.1</td></tr>
<tr><td>III.IAT21.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III.II</td><td rowspan="2">III.IIA</td><td rowspan="2">III.IIA24</td><td>III.IIA24.1</td></tr>
<tr><td>III.IIA24.2</td></tr>
</table>

4.7 Construcción de la prueba PCN3

La prueba PCN2 fue cumplimentada por una muestra intencional formada por alumnos de características similares a los de la muestra de la primera prueba (apartado 5.2.2). Como se puede apreciar en los apartados 5.4 y 6.3, el análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados de esta segunda prueba confirma su equivalencia con los obtenidos mediante la aplicación de la primera prueba (apartados 5.3 y 6.2), lo que avala la fiabilidad del instrumento construido, la bondad del modelo y de las modificaciones introducidas y la consecución de los objetivos O1, O2 y O3 de la investigación.

En la siguiente etapa de nuestra investigación nos proponemos indagar la comprensión que manifiestan los alumnos que ya han cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética sobre los sistemas de representación del número natural y los posibles efectos del proceso didáctico seguido. Para este nuevo estudio se ha utilizado el modelo local construido (modelo local 2) y una nueva versión equivalente del instrumento PCN2, basada en los resultados obtenidos y en las características de los sujetos de la nueva muestra, a la que hemos denominado tercera prueba de comprensión numérica PCN3.

La estructura de esta nueva y última prueba escrita (PCN3), que se incluye en el apartado A3.4 del Anexo III, es similar a la de las dos pruebas anteriores con las siguientes modificaciones: reducción de las tareas correspondientes al nivel técnico o de reproducción; modificación del contexto utilizado para las situaciones del nivel de síntesis y reformulación e inclusión de algunas tareas en este nivel. De las 46 cuestiones planteadas en la PCN1 se ha pasado a 33 en la PCN2 y a 21 en la PCN3. Para la modificación y reducción de los ítems se han utilizado los mismos criterios que los empleados para la PCN2, esto es, por una parte los índices de dificultad/facilidad (IF), de discriminación (ID) y los coeficientes de homogeneidad (ρ) de las tareas y por otra, la racionalidad en la elección de las mejores cuestiones y la eliminación de aquellas que podrían resultar redundantes y equivalentes. Con dichos criterios se han mantenido 3 tareas del nivel técnico, se han reducido a 9 los ítems del nivel de análisis, y a 9 las tareas del nivel de síntesis, 6 del nivel síntesis I y 3 del nivel síntesis II. Veamos con más detalle lo realizado en cada parte.

4.7.1 Primera parte (Nivel técnico)

La reducción de las cuestiones correspondientes a este primer nivel de comprensión se justifica por los resultados obtenidos en las dos pruebas anteriores. Así, el 90% de los sujetos de las muestras utilizadas hasta aquí supera con éxito las cuestiones del nivel técnico, lo que implica que la primera componente de los vectores de comprensión de la mayoría de los alumnos presenta valores muy similares y constituye, por tanto, un dato con muy poco poder de discrimación, es decir, sabemos de antemano que las tareas de este bloque van a ser resueltas por la mayoría de los sujetos de las muestras equivalentes o de niveles superiores. Podemos decir que los sujetos de estos niveles formativos han superado el nivel técnico o de reproducción y se encuentran en el camino de superar los nivel de análisis y/o síntesis, por lo que la nueva prueba se orienta a indagar sobre la posible evolución en estos dos últimos niveles epistemológicos.

Las tres cuestiones que corresponden a este nivel de comprensión se centran en la tarea IN5 dividida en tres cuestiones (IN5.1, IN5.2 y IN5.3), y su inclusión pretende hacer emerger el posible conflicto con las respuestas a las IIN8.1 y IIN8.2 y posibilitar la reflexión para su adecuada resolución.

La *Tabla 4.7* muestra la organización de las tareas propuestas para la prueba PCN3 en el nivel de reproducción.

Tabla 4.7 Organización de los ítems del nivel de reproducción de la PCN3

I	IN5	IN5.1
		IN5.2
		IN5.3

4.7.2 Segunda y tercera partes (nivel de análisis)

En el nivel de análisis se han mantenido las tareas propuestas en la segunda prueba. La *Tabla 4.8* muestra la organización de las tareas propuestas en este nivel.

Tabla 4.8 Organización de los ítems del nivel de análisis de la PCN3

<table>
<tr><td rowspan="9">II</td><td rowspan="5">IIN</td><td rowspan="2">IIN8</td><td>IIN8.1</td></tr>
<tr><td>IIN8.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IIN9</td><td>IIN9.1</td></tr>
<tr><td>IIN9.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">IIN11</td></tr>
<tr><td rowspan="4">IIA</td><td colspan="2">IIA13</td></tr>
<tr><td colspan="2">IIA14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IIA15</td><td>IIA15.1</td></tr>
<tr><td>IIA15.2</td></tr>
</table>

4.7.3 Cuarta parte (nivel de síntesis)

La reformulación de las cuestiones IIIC17 y III.IA18 junto con la inclusión de IIIN25, incluidas todas ellas en el nivel de síntesis, ha permitido eliminar las tareas III.IAT21 y II.IA22. Se ha introducido la nueva III.IIA26 para ampliar las tareas de éste último nivel analizado por el previsible progreso de la comprensión del alumnado una vez cursada la asignatura de Didáctica de la Aritmética.

La *Tabla 4.9* muestra la organización de las tareas propuestas en esta tercera prueba.

Tabla 4.9 Organización de los ítems del nivel de síntesis de la PCN3

<table>
<tr><td rowspan="9">III</td><td rowspan="6">III.I</td><td rowspan="2">III.ICN</td><td>IIIC17(*)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>IIIN25(**)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">III.IA</td><td rowspan="2">III.IA18 (*)</td><td>IIIA18.1</td></tr>
<tr><td>IIIA18.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III.IA20</td><td>III.IA20.1</td></tr>
<tr><td>III.IA20.2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">III.II</td><td rowspan="3">III.IIA</td><td rowspan="2">III.IIA24</td><td>III.IIA24.1</td></tr>
<tr><td>III.IIA24.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">III.IIA26 (**)</td></tr>
</table>

(*) Reformulación de la tareas propuestas en la PCN1 y PCN2.
(**) Inclusión de nuevas tareas en la PCN3.

4.8 Instrumentos y métodos para el análisis de datos

Los análisis de las respuestas a las pruebas descritas se orientan a la confirmación de distintos aspectos de las hipótesis de la investigación (apartado 1.4.3, capítulo 1) y, con ello, al cumplimiento del objetivo O3 y los sub-objetivos O3.1, O3.2, O3.3 y O3.4. En concreto:

O3. Efectuar una aproximación al estado de la comprensión y el dominio de los sistemas de numeración de los alumnos futuros maestros del nuevo Grado de Primaria mediante:

O3.1 La construcción de instrumentos válidos para la recogida de datos ajustados al modelo local para la interpretación de la comprensión de los sistemas de representación de los números naturales.

O3.2 El análisis descriptivo de las respuestas de los sujetos a los instrumentos de recogida de datos y la valoración global absoluta y relativa de la situación en la que se encuentran los individuos de las muestras utilizadas.

O3.3 La determinación y el análisis de los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan.

O3.4 La delimitación de trazos y perfiles de comprensión atendiendo a la estructura del modelo local y a los niveles de comprensión definidos.

Para ello se realizan análisis descriptivos consistentes en la determinación de las frecuencias absolutas y relativas de respuestas correctas, incorrectas y sin respuestas (SR) y los índices de dificultad y discriminación en cada uno de los ítems de los cuestionarios aplicados. Por otra parte se desarrollan análisis descriptivos globales, mediante las gráficas de las frecuencias relativas de los tres tipos de respuestas consideradas, y análisis de consistencia de las pruebas mediante los coeficientes de homogeneidad ítem-totales.

Para las comparaciones entre los grupos se han utilizado las gráficas descritas y se han desarrollado estudios de correlaciones y contrastes de hipótesis para comparar los porcentajes de respuestas en las tres categorías entre las distintas pruebas utilizadas.

En la *Tabla 4.10* se incluye un resumen de los análisis realizados para cada una de las pruebas aplicadas.

Tabla 4.10 Análisis realizados en las pruebas PCN1, PCN2 y PCN3

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Análisis realizados</th></tr>
<tr><th></th><th>Descriptivos</th><th>Contrastes</th></tr>
<tr><td>PCN1</td><td rowspan="2">- Frecuencias absolutas y relativas de los tipos de respuestas a las pruebas.

- Índice de dificultad de cada uno de los ítems.

- Índice de discriminación de cada uno de los ítems.

- Tablas de frecuencias relativas de las respuestas correctas, erróneas y en blanco en los cuestionarios aplicados.</td><td>-Correlaciones de Pearson entre los tres grupos que componen la Muestra 1.
-Coeficientes de homogeneidad total y parciales.
-Coeficiente KR-20.</td></tr>
<tr><td>PCN2</td><td>-Correlaciones de Pearson entre los dos grupos que componen la Muestra 2.
-Coeficientes de homogeneidad total y parcial.
-Coeficiente KR-20.
-Comparaciones “cualitativas” entre las graficas de frecuencias relativas obtenidas en las PCN1 y PCN2.
-Contrastes de hipótesis para la igualdad de proporciones entre los tres tipos de respuestas en la</td></tr>
</table>

	- Gráficas de frecuencias relativas de las respuestas correctas, erróneas y en blanco recogidas en los cuestionarios aplicados.	PCN1 y PCN2.
PCN3		-Correlaciones de Pearson entre las dos grupos que componen la Muestra 3. -Coeficiente KR-20. -Coeficientes de homogeneidad total y parcial. -Comparaciones "cualitativas" entre las graficas de frecuencias relativas obtenidas en las PCN1, PCN2 y PCN3. -Contrastes de hipótesis para la igualdad de proporciones entre los tres tipos de respuestas en la PCN2 y PCN3.

4.8.1 Distribución de alumnos por niveles de comprensión

Una vez aplicados los cuestionarios y realizados los análisis de las respuestas indicados en el epígrafe anterior, procedemos a realizar la distribución de alumnos por niveles de comprensión. Para ello definimos los conceptos de vector de comprensión numérica, vector singular y la hipótesis sobre la monotonía de las componentes de los vectores de comprensión.

4.8.1.1 Vectores de comprensión numérica

Una vez corregidas las pruebas de comprensión numérica y calculados los porcentajes de respuestas correctas en cada una de las categorías epistemológicas, se determina para cada alumno un vector formado por los cuatro porcentajes; a esta cuaterna numérica denominaremos en adelante vector de comprensión de la representación numérica. El vector de comprensión posee las siguientes propiedades:

- A cada alumno se le adjudica su vector de comprensión que le situará dentro de las diferentes categorías epistemológicas en función de determinados criterios que se delimitan más adelante.

- Cada vector estará determinado por cuatro componentes asociadas, cada una de ellas, a cada uno de los niveles epistemológicos: reproducción, análisis, sintético I y sintético II. Por las características de los alumnos estudiados hemos determinado vectores con cuatro componentes, donde la cuarta componente determina el porcentaje de comprensión en el nivel sintético II. En otros estudios podríamos considerar vectores con cinco componentes o bien considerar como cuarta componente la referida a la categoría formal.

- La hipótesis de partida en relación con esta nueva herramienta es que los niveles de comprensión son secuenciales y, por ello, las componentes numéricas de los vectores forman una sucesión decreciente (hipótesis de monotonía).

- Hablaremos de vectores singulares en aquellos casos en los que las componentes no sigan este criterio de monotonía.

4.8.1.2 Distribución por niveles de comprensión (DNC)

Sea (c_1, c_2, c_3, c_4) el vector de comprensión asociado a un conjunto de respuestas, donde c_1 es la componente técnica y corresponde al porcentaje de respuestas correctas en las tareas consideradas de este nivel epistemológico, c_2 la componente analítica, c_3 la componente correspondiente al nivel de síntesis I y c_4 la componente de síntesis II. Para la distribución de los alumnos por niveles de comprensión utilizaremos como criterio una variante del utilizado en el estudio TEDS-M (12); indicaremos el nivel máximo que un alumno ha superado en función de las respuestas correctas con porcentajes superiores o iguales al 70% a los ítems de ese nivel y anteriores, y con porcentajes inferiores al 50% en el resto de niveles posteriores . De esta manera:

- Consideramos que el alumno ha superado el nivel técnico o de reproducción cuando $c_1 \geq 70$ y c_2, c_3 y $c_4 < 50$;
- Consideramos que un alumno ha superado el nivel de análisis cuando c_1 y $c_2 \geq 70$ y c_3 y $c_4 < 50$;
- Consideramos que un alumno ha superado el nivel sintético I cuando c_1, c_2 y $c_3 \geq 70$, y $c_4 < 50$;
- Consideramos que un alumno ha superado el nivel sintético II cuando $c_i \geq 70$ $\forall$ i.

4.8.1.3 Determinación de vectores singulares

Una vez obtenidos los vectores de comprensión de cada uno de los alumnos de la muestra, distribuimos cada una de las componentes en intervalos de amplitud 10, obteniendo de esta manera matrices 10x4 que reflejan la radiografía del estado de comprensión de la muestra estudiada. Aplicando los criterios definidos para la distribución de los vectores por niveles, admitiendo la hipótesis de monotonía y salvo la presencia de vectores singulares, obtendremos los porcentajes de sujetos de la muestra que han superado cada uno de los niveles de comprensión numérica.

Para completar la información sobre la distribución de sujetos de la muestra por niveles de comprensión sería conveniente estudiar la presencia de vectores singulares y la influencia que estos tendrían sobre ella. Así, para el vector de comprensión (c_1, c_2, c_3, c_4) correspondiente a un alumno de la muestra, los vectores singulares que pueden modificar la categorización de la muestra por niveles de comprensión son aquellos en los que se cumpla cualquiera de las siguientes condiciones:

- Condición 1ª: si $c_1 \leq 70$; c_2, c_3 ó $c_4 \geq 70$. En adelante utilizaremos la notación VSC1 para representar a los vectores singulares que cumplen la condición 1ª.
- Condición 2ª: si $c_1 \geq 70$ y $c_2 \leq 70$; c_3 ó $c_4 \geq 70$. Representaremos a estos vectores con la notación VSC2.
- Condición 3ª: si $c_1 \geq 70$, $c_2 \geq 70$ y $c_3 \leq 70$; $c_4 \geq 70$. A estos vectores lo representaremos con VSC3.

4.9 Estudio empírico de naturaleza cualitativa

Con la información y los estudios derivados del modelo local y las pruebas escritas descritas hasta aquí, disponemos de una parte del estudio completo que se propone en el modelo general para la interpretación de la comprensión de los sistemas de numeración; en concreto, tendremos información cuantitativa de carácter cognitivo global, datos sobre regularidades en muestras representativas (estudio realizado en el capítulo 5) y una parte de la información de carácter semiótico y hermenéutico que nos interesa para valorar la comprensión de los sujetos (estudio realizado en el capítulo 6). Pero para completar el modelo general de comprensión, en su componente hermenéutica, y superar algunas de las limitaciones de los estudios anteriores, sobre las dimensiones cognitiva y semiótica de las pruebas de comprensión numéricas escritas, hemos de realizar todavía aproximaciones cualitativas profundas al fenómeno en estudio; aproximaciones que incluyen fundamentalmente entrevistas a alumnos de características similares a las de las tres muestras estudiadas. Asimismo, la perspectiva se puede mejorar ampliando el estudio a un grupo de sujetos radicalmente diferentes a los estudiados hasta ahora, como son los alumnos de la especialidad de matemáticas del Master de Secundaria. La incorporación al estudio de esta nueva muestra mixta (alumnos del Grado de Primaria - alumnos del Máster de Profesorado) se puede justificar por los siguientes motivos:

- Necesidad de precisar algunas respuestas obtenidas en los cuestionarios escritos y valorar la determinación de los errores y estrategias analizadas.
- Confirmar que las SR o respuestas en blanco corresponden a la “no comprensión”, a la imposibilidad de su resolución y no a la dejadez, cansancio, etc.
- Incluir algunas cuestiones correspondientes al nivel de síntesis II para los alumnos que respondieron acertadamente a la totalidad del primer y segundo cuestionario.
- Analizar el tipo de respuestas de alumnos y alumnas que poseen “teóricamente” un nivel mayor de formación matemática.
- Observar la forma en que construyen sus respuestas y valorar los silencios, las dudas, las rectificaciones, los titubeos, etc., que se producen a lo largo del desarrollo de la entrevista.
- Llegar a acuerdos sobre sus dificultades, errores de comprensión y necesidades de formación para afrontar con garantías su futuro desarrollo profesional en el ámbito de la Educación Matemática.
- Validar el modelo local y la prueba de comprensión numérica construida.
- Dar voz a los estudiantes, compartir con ellos algunas de nuestras conclusiones y cerrar el ciclo interpretativo del modelo de referencia.

Como en el caso de las pruebas escritas, las entrevistas constan de cuatro partes diferenciadas: cuestiones del nivel técnico o de reproducción, cuestiones de análisis, del nivel de síntesis I y del nivel de síntesis II. Para su diseño se han tomado como referencia las tareas que componen el tercer cuestionario, añadiendo algunas del nivel técnico del segundo y dos tareas nuevas del nivel de síntesis II. Las entrevistas constan de un total de 17 cuestiones presentadas, cada una de ellas, en una página-diapositiva de Smart Notebook. Todas las tareas se describen en el apartado A3.5 del *Anexo III*, sus resultados se registran en video (apartado A5.3 del anexo V) y se guardan los resultados realizados en la PDI (apartado A5.4 del anexo V). A continuación describimos brevemente las tareas que componen la entrevista. Hemos de señalar que para facilitar la identificación y comparación, mantenemos de forma interna la codificación utilizada en las pruebas escritas, si bien en el desarrollo de las entrevistas utilizaremos la numeración natural para ordenarlas.

4.9.1 Tareas del nivel técnico

Se han propuesto 3 páginas Notebook del nivel técnico o de reproducción. La primera (IT2) corresponde a la categoría fenomenológica traducciones; en ella se leen 5 cantidades con distinto número de cifras y con ceros intercalados, tanto léxicos como sintácticos. La segunda tarea (IO3) corresponde a la categoría ordenar-comparar; en ella se tienen que escribir el anterior y posterior a dos cantidades expresadas verbalmente. La tercera (IN5) está asociada al conocimiento del propio sistema de numeración; en ella el alumno debe señalar las cifras que corresponden a determinados órdenes.

Las tres cuestiones señaladas se han extraído de la PCN1 y PCN2 y se han utilizado con el propósito de iniciar las entrevistas con cuestiones asequibles, que contextualizaran la herramienta y que relajaran a los entrevistados.

4.9.2 Tareas del nivel de análisis

Dentro de este nivel se han incluido 6 tareas, las tres primeras correspondientes a las categorías fenomenológicas “conocimiento del sistema de numeración” y traducciones y las otras tres a “calcular-algoritmos y operaciones”; todas ellas extraídas de la PCN3.

En la primera tarea de esta segunda parte, el ítem número 4 (IIN8) de la entrevista, se plantea la cuestión que en la pruebas aplicadas tiene porcentajes de aciertos bajos y en la que se pretende diferenciar entre la cifra correspondiente a un orden dado y el número de órdenes incluidos en una determinada cantidad.

Con la quinta (IIN11) y sexta (IIN9) tareas se pretende conocer el nivel de comprensión de la estructura interna de la numeración, o, lo que es lo mismo, las ideas de agrupamiento, el principio multiplicativo y el valor de posición presente en la forma en la que se expresan o se pueden expresar las cantidades. La quinta tarea (IIN11) es una situación-problema en la que se pretende encontrar un número que cumple ciertas condiciones que tienen que ver con las centenas que contiene y con el valor de las cifras que lo conforman. La sexta tarea (IIN9) pretende encontrar dos cantidades que están expresadas como reunión de diferentes agrupamientos.

Las tareas 7 (IIA13), 8 (IIA14) y 9 (IIA15) se centran en la comprensión de los pasos o estrategias presentes en los algoritmos de las operaciones elementales. Todas las cuestiones han sido extraídas de la PCN3 y su presencia en la entrevista esta justificada por la necesidad de profundizar en las explicaciones obtenidas en las pruebas escritas, que en algunos casos las consideramos insuficientes o confusas. A ellas les hemos dedicado una atención especial, insistiendo una y otra vez en que los alumnos explicaran el porqué de sus actuaciones.

4.9.3 Tareas del nivel de síntesis I

En esta tercera parte hemos considerado las tres tareas siguientes: 10 (IIIC17), 11 (IIIN25) y 12 (III.IA18), que corresponden a situaciones de agrupamientos distintos al decimal y pertenecientes a la PCN3. Las categorías fenomenológicas utilizadas son: cuantificar y traducir en el ítem 10, el conocimiento de sistemas de numeración isomorfos al decimal en el 11 y calcular-algoritmos y operaciones en la cuestión 12. El contexto utilizado en todas ellas corresponde a los diferentes agrupamientos de vasos que una fábrica realiza con distintos empaquetados de 8 en 8.

La cuestión recogida en la diapositiva Notebook 10 es la puerta de entrada al resto de la entrevista y por ello se le ha dedicado una atención especial y el tiempo necesario para que el alumno pudiera “visualizar” la situación y aceptara la representación numérica adoptada para responder a las tareas finales de la entrevista.

4.9.4 Tareas del nivel de síntesis II

Las tareas del nivel de síntesis II están compuesta por las cuestiones 13 (III.IIA24), 14 (III.IIC26) y 15 (III.IIC27). La 13 corresponde con el último ítem de las pruebas aplicadas, y correspondiente a la categoría fenomenológica de calcular-operar en sistemas con agrupamientos indeterminados. Las tareas 14 y 15 pertenecen a la categoría fenomenológica de cuantificar con agrupamientos indeterminados y se han incorporado a la entrevista para evaluar los aprendizajes que se hubieran producido en la asignatura que han cursado los alumnos de segundo curso y el mayor nivel de comprensión que pudieran tener los alumnos del master de secundaria que han participado en las entrevistas.

4.10 Conclusiones y resultados obtenidos de los estudios de naturaleza teórica.

A continuación destacaremos los principales resultados que hemos obtenidos a lo largo de este capitulo:

✓ El primer resultado lo constituye la propia organización del proceso metodológico de nuestra investigación que se contempla en la *Figura 4.1,* en la que se destacan las relaciones entre los campos científicos que intervienen, fundamentos del estudio y las fuentes de información, el modelo general de comprensión del conocimiento matemático y su interpretación, referencia metodológica central de nuestra investigación, el modelo local para la interpretación y valoración de la comprensión de los sistemas de numeración y los instrumentos de recogidas de datos generados a partir del modelo local.

En el apartado 4.3 se desarrollan las líneas fundamentales del modelo global para la interpretación y valoración de la comprensión del conocimiento matemático, eje central del marco teórico y metodológico de nuestra investigación, que pivota sobre las dos dimensiones: la primera fenómeno-epistemológica, que posibilita la identificación y la organización de tareas y la elaboración de instrumentos para registrar la actividad matemática del estudiante, y la segunda, la dimensión hermenéutica que aporta principios centrados en los escenarios básicos de interpretación y un ciclo interpretativo que posibilita acceder a la comprensión de los estudiantes, a través del uso que hacen del conocimiento matemático.

✓ Como consecuencia de ella y como principal resultado de este capítulo destacamos la construcción del *modelo local* de la investigación, obtenido en sucesivas etapas o aproximaciones teórico-empíricas, a partir del modelo global de referencia y del modelo inicial para el estudio de la comprensión de los sistemas de representación numérica escrito y hablado, de la memoria de tercer ciclo. En los epígrafes 5.5.1.1 y 4.5.1.2 se describen respectivamente las categorías epistemológicas y fenomenológicas del *modelo local 1,* cuya estructura se recoge en la *Figura 4.7* y en el epígrafe 4.6.1 se realiza la actualización de este primer modelo, que derivara en el *modelo local 2,* que constituye nuestro modelo “provisionalmente” definitivo (*Figura 4.9).* Modelo que, en su doble dimensión fenómeno-epistemológica, nos ha permitido organizar las tareas y las situaciones en las que los sistemas de numeración participan y por otra nos servirá de referencia objetiva para caracterizar los usos del conocimiento matemático empleado por los alumnos al resolver las tareas numéricas propuestas.

✓ Como resultados derivados de la obtención del *modelo local* de la investigación, destacamos los instrumentos construidos para recoger las respuestas de los alumnos a las tareas matemáticas propuestas, generados a partir del modelo local y que como éste, se han ido reformulando y adaptando en función de los resultados que ellos mismos han generado. Los instrumentos construidos son los siguientes:

- La primera prueba escrita de comprensión numérica (PCN1), descrita en el apartado 4.5.3 y compuesta por 46 ítems organizados en las 20 categorías definidas por en el modelo local 1 (*Figuras 4.7 y 4.8*), y distribuidas en las cuatro categorías epistemológicas señaladas en las *Tablas 4.1, 4.2 y 4.3*. Esta primera prueba de comprensión numérica se ha diseñado para ser realizada por la muestra elegida de la población de alumnos que inician sus estudios de Magisterio en el curso 2011-12.

- La segunda prueba escrita de comprensión numérica (PCN2), descrita en el epígrafe 4.6.3, y compuesta por 33 tareas seleccionadas de entre las que componían la primera prueba y para las que se han utilizado como criterios de selección: los índices de dificultad (IF), los índices de discriminación (ID) y los índices de homogeneidad (ρ), así como nuestros propios criterios para eliminar aquellas tareas que por los resultados obtenidos en su aplicación, entendíamos que podrían resultar redundantes o equivalentes. Estas tareas seleccionadas quedarán distribuidas entre las categorías definidas por el modelo local 2 (*Figura 4.9*), y organizadas como se recogen en las *Tablas 4.4, 4.5 y 4.6.* Esta prueba se ha diseñado, como en el caso de la anterior, para ser realizada por una muestra de alumnos de segundo curso al iniciar la primera asignatura de Didáctica de la Matemática que cursan en su proceso de formación, y equivalente a la seleccionada para realizar la primera prueba.
- La tercera prueba escrita de comprensión numérica (PCN3), se organiza para indagar la comprensión numérica que manifiestan los alumnos que ya han cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética sobre los sistemas de numeración del numero natural y los posibles efectos del proceso didáctico seguido. Para ello se vuelve a utilizar el *modelo local 2* (*Figura 4.9*) y una versión equivalente de la PCN2, basada en los resultados obtenidos y en las características de los sujetos de la nueva muestra. La estructura de los 21 ítems que la componen se recoge en las *Tablas 4.7, 4.8 y 4.9.*
- Las entrevistas a alumnos con las que pretendemos completar la dimensión hermenéutica del modelo de referencia y completar el ciclo interpretativo. El modelo de entrevista deriva del *modelo local 2* y de las pruebas escritas realizadas; su estructura descrita en el apartado 4.9, es totalmente equivalente a la de las pruebas escritas, con la inclusión de alguna tarea del nivel superior para ser aplicada a alumnos de características similares a las de las muestras estudiadas en las pruebas anteriores, con la inclusión de algunos alumnos del master de secundaria con mayor nivel de formación.

También destacamos como resultados de este capitulo los siguientes elementos metodológicos:

✓ Se han determinado los instrumentos y los métodos de análisis para organizar la información obtenida a partir de las pruebas de comprensión numérica escritas. El apartado 4.8 y la *Tabla 4.11* recogen los análisis realizados en las tres pruebas PCN1, PCN2 y PCN3.

✓ Para la primera aproximación al estudio de la comprensión y dominio de los sistemas de numeración, objetivo O3 de nuestra investigación, aproximación cognitiva global que llevaremos a cabo en el capítulo 5, y con el propósito de distribuir a los alumnos estudiados por niveles de comprensión, una vez realizado los estudios de carácter cuantitativo y relativos al estudio descriptivo de las frecuencias relativas de respuestas correctas, señalamos como aportación y resultados de este capitulo, la descripción de los siguientes instrumentos:

- Los vectores de comprensión numérica, definidos en el apartado 4.8.1.1, cuyas componentes responden a los porcentajes de respuesta correctas en las tareas correspondientes a las cuatro categorías epistemológicas definidas.
- La hipótesis de monotonía, por la que suponemos que las componentes de los vectores de comprensión forman una sucesión finita decreciente, al considerar que los alumnos que responden adecuadamente a las tareas de un nivel han completado satisfactoriamente las de los niveles de anteriores.
- Los vectores singulares, vectores de comprensión que no cumplen la hipótesis de monotonía.
- Los criterios para la distribución de los alumnos por niveles de comprensión (DNC), en los que se señalan las condiciones que impondremos a cada uno de los vectores de comprensión para indicar el máximo nivel que el alumno ha superado, en función de las respuestas correctas con porcentajes superiores o iguales al 70% a los ítems de ese nivel y anteriores, y con porcentajes inferiores al 50% en el resto de niveles posteriores. Los cuatro criterios para la distribución por niveles de comprensión de desarrollan en el apartado 4.8.1.2.
- Los criterios para la determinación de vectores singulares que pueden modificar la distribución de alumnos por niveles de comprensión. Hemos considerado tres tipologías de vectores singulares que afectan a la categorización realizada por niveles de comprensión, los vectores singulares por de primer orden o por condición1(VSC1) en los que la primera componente es inferior al 70% y algunas de las restantes supera este porcentaje, los VSC2 en los que la primera componente es superior al 70% y sucediendo que la segunda es inferior a este porcentaje, o bien la tercera o la cuarta es superior al 70% y los vectores singulares por la tercera condición (VSC3), en los la tercera componente es inferior al 70% y las demás superan este porcentaje.

CAPÍTULO 5

Comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria: aproximación cognitiva global

5.1 Introducción

Según se recoge en los apartados 1.4 y 1.5 del capítulo 1 de esta memoria de tesis, la investigación pretende, entre otros fines, averiguar la situación real de la comprensión y el dominio de los conocimientos, procedimientos y destrezas que poseen y manifiestan, los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan los estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria en distintos momentos del proceso formativo sobre los sistemas de numeración, en general, y, en particular, sobre el sistema de numeración usual para los números naturales. El propósito fundamental es extraer consecuencias fundadas para orientar el diseño de esa parte específica de la formación inicial en el sentido de su optimización y someter a prueba el marco teórico y la operatividad del modelo general de la línea de investigación. Para ello se espera:

1.- Comprobar la bondad del modelo operativo para el diagnóstico e interpretación de la comprensión del conocimiento matemático mediante la construcción de un modelo local que permita obtener la información necesaria para resolver satisfactoriamente el problema planteado y avanzar en las experiencias, los conocimientos y los planteamientos teóricos de la línea de investigación (Hipótesis H1);

2.- Confirmar, mediante la aplicación del modelo local mencionado:

a) Que los estudiantes de magisterio ingresan en la universidad con limitaciones, dificultades y errores que proceden de una formación previa mejorable y con un nivel de comprensión bajo sobre los conocimientos en estudio (Hipótesis H2).

b) Que los errores y las estrategias utilizadas al resolver tareas propias del campo analizado proporcionan información privilegiada sobre las limitaciones, dificultades y otras características de las capacidades, destrezas y maneras de razonar relacionadas con los sistemas de numeración (Hipótesis H3).

c) Que el desarrollo de una asignatura de Didáctica de la Aritmética en la que los contenidos sobre sistemas de numeración reciben un tratamiento matemático y didáctico especial, configurado al margen de la presente investigación, contribuye a mejorar el nivel de comprensión sobre el tema, lo que aporta indicios a favor de la posibilidad de mejorar el nivel de comprensión y superar los errores y las dificultades mediante un proceso de reeducación y reconstrucción asistida de los conocimientos teniendo en cuenta los resultados y conclusiones del estudio (Hipótesis H4).

La comprobación de la bondad de las conjeturas anteriores (enunciadas formalmente como hipótesis en el apartado 1.4.3) permitirá asegurar que se han alcanzado los objetivos (apartado 1.4.2) que sintetizamos brevemente a continuación:

- Asegurar la operatividad del modelo general para la interpretación y valoración de la comprensión del conocimiento matemático (objetivo O1).
- Efectuar una aproximación al estado de la comprensión y el dominio de los sistemas de numeración de los alumnos del Grado de Primaria mediante instrumentos válidos y fiables para la recogida de datos, el análisis descriptivo de las respuestas, la determinación y el análisis de los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan y la delimitación de trazos y perfiles de comprensión atendiendo a la estructura del modelo local y a los niveles de comprensión definidos (objetivos O2 y O3).
- Extraer consecuencias fundadas para orientar la formación específica sobre el contenido matemático en estudio y modificar el diseño de la asignatura "Didáctica de la Aritmética" aportando nuevos contenidos, metodología, recursos, material didáctico y tipos de actividades adecuados para optimizar dicha formación (objetivo O4).

La investigación se desarrolla mediante una metodología mixta integrada por estudios teóricos y métodos no empíricos (apartado 1.5.1), que han sido objeto de atención preferente en los capítulos 2, 3 y 4, y métodos empíricos cuantitativos y cualitativos, que constituyen el núcleo del presente capítulo y los dos siguientes y que pasamos a describir a continuación. Así, desde un punto de vista general, se han desarrollado los siguientes tipos de estudios:

I.- Estudios empíricos cuantitativos: Pruebas escritas y análisis descriptivo global, puntual y comparativo de respuestas.

En esta parte, cuyo desarrollo y resultados se describen en su totalidad en el presente capítulo, hemos considerado apropiado limitar la evaluación a las manifestaciones externas, en términos de "registros objetivos", y considerar las interpretaciones como conjeturas provisionales y aproximadas a la situación real que se completarán en los capítulos 6 y 7. Se han utilizado para ello los tres cuestionarios PCN1, PCN2 y PCN3, cuya construcción, estructura y contenidos se han tratado extensamente en el capítulo 4.

II.- Estudios empíricos cualitativos:

-Análisis cualitativo de las respuestas a las pruebas escritas (primera aproximación al análisis semiótico y hermenéutico del modelo): análisis de errores y estrategias, rastros de comprensión y usos del conocimiento.

-Análisis semióticos y hermenéuticos de las entrevistas semi-estructuradas: análisis de estrategias y errores, rastros de comprensión, usos del conocimiento matemático, intervención de los sujetos en el propio proceso de valoración y la búsqueda del consentimiento del sujeto.

El desarrollo y resultados de este bloque se presenta en los capítulos 6 y 7, incluyendo la ampliación a muestras de estudiantes con formación matemática superior a la de los sujetos de los estudios del apartado I. El análisis semiótico y una iniciación al análisis hermenéutico han permitido examinar en profundidad las respuestas, las estrategias y los errores así como registrar diferentes puntos de vista sobre las interpretaciones realizadas hasta entonces.

III.- Estudios de validez y fiabilidad de los instrumentos: Validez interna y validez de constructo; otros estudios estadísticos: homogeneidad de ítems y pruebas y comparación de medias.

Se distribuyen a lo largo de los capítulos 5 y 6 en función de la información obtenida en cada momento. La validez de constructo viene avalada por los análisis que fundamentan las sucesivas construcciones del modelo local así como los filtros utilizados en cada nueva aproximación a dicho modelo, mientras que la validez interna queda corroborada por los estudios de homogeneidad así como por los resultados coincidentes en la aplicación repetida en muestras equivalentes.

En los sucesivos apartados del presente capítulo se exponen las distintas partes que componen los estudios empíricos cuantitativos del bloque I descrito. Dichos estudios han sido desarrollados durante los cursos académicos 2010/2011 y 2011/2012, empleándose para ello muestras de estudiantes de 1º, 2º y 3º curso del Grado de Educación Primaria de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga. Al finalizar el curso 2010/2011 se procedió a aplicar la PCN1 (capítulo 4, apartado 4.5.3) en tres grupos del primer curso del grado de Educación Primaria. La PCN2 (capítulo 4, apartado 4.6.3) se aplicó al comenzar el curso 2011/2012 a una muestra procedente de la misma población que la considerada para la prueba anterior y compuesta por dos grupos distintos a los anteriores del segundo curso del Grado de Educación Primaria, mientras que la PCN3 (capítulo 4, apartado 4.7) y las entrevistas (capítulo 6) se desarrollaron al finalizar el curso académico 2011/2012 en muestras procedentes de poblaciones distintas[1] a la considerada para la aplicación de las dos primeras pruebas.

Para el análisis de resultados se procedió a la codificación de las respuestas, en correctas, no correctas y en blanco (SR), y al registro de las estrategias utilizadas y los errores habituales cometidos. Las tablas de datos se han procesado en hojas de cálculo Excel y se ha utilizado el paquete estadístico SPSS para realizar estudios descriptivos de las respuestas. Además de los estudios descriptivos se ha procedido a realizar correlaciones para comparar las respuestas globales en los distintos cuestionarios y los grupos que componen las distintas muestras. También se ha procedido a realizar un análisis de la dificultad, discriminación y homogeneidad de los ítems que componen los tres cuestionarios.

La exposición se desarrolla en el orden siguiente: en primer lugar procedemos a describir la población y las muestras a las que se les ha aplicado cada uno de los cuestionarios descritos en el capítulo 4; a continuación se realiza una primera aproximación a la comprensión que manifiestan los alumnos sobre los sistemas de numeración mediante la descripción global de las respuestas correctas, no correctas y en blanco ("sin respuesta" (SR)) en cada uno de los cuestionarios aplicados. Los porcentajes de respuestas agrupados en estas tres categorías nos permiten realizar a continuación un análisis descriptivo global que nos proporciona una visión del estado de comprensión del alumnado. Los vectores de comprensión, cuyas componentes se distribuyen en intervalos de amplitud 10 utilizando los criterios para asignación de niveles de comprensión y teniendo en cuenta la presencia de vectores singulares, nos permitirá realizar una descripción mas precisa de la distribución de la muestra por niveles de comprensión en cada una de las pruebas aplicadas. La exposición finalizará con algunas conclusiones parciales y algunas propuestas de mejora del modelo local y del instrumento utilizado.

[1] Nos remitimos al apartado 5.2 para una explicación más detallada de las muestras y poblaciones utilizadas en el estudio.

5.2 Población y muestras

La investigación se ha realizado sobre sujetos pertenecientes a dos poblaciones de estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria. Una primera, a la que denominaremos población P1, está compuesta por los alumnos que ingresan en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga y no han cursado ninguna asignatura de Matemáticas o Didáctica de la Matemática. La segunda población, a la que denominaremos población P2, está formada por alumnos de la misma carrera pero que han cursado en el primer cuatrimestre del segundo curso la asignatura Didáctica de la Aritmética. Esta distinción, como queda evidenciado en los resultados del estudio, se realiza teniendo en cuenta que los alumnos que cursan la asignatura pueden, como así se ha puesto de manifiesto, tener una formación más completa, o al menos distinta, que la de los alumnos que no la han cursado.

La primera población considerada corresponde al curso 2010-2011, en el que ingresan 420 alumnos para realizar sus estudios en el grado mencionado distribuidos en seis grupos de docencia, tres en el turno de mañana y tres en el turno de tarde. La distribución del alumnado en turnos de mañana y de tarde se realiza teniendo en cuenta las preferencias indicadas en el momento de la matrícula hasta completar las plazas ofertadas en cada turno, utilizando como único criterio en caso de discrepancia la calificación obtenida para el acceso a la titulación. A su vez, la distribución en grupos en cada uno de los turnos se realiza utilizando el orden alfabético como único criterio. La población P2 está formada por los 410 alumnos de tercer curso del Grado de Educación Primaria en el curso 2012/2013.

De la población P1 se eligen las muestras M1 y M2, mientras que de la población P2 se elige la muestra que denominaremos M3. En los apartados que siguen se describen las dos poblaciones (P1 y P2) y las tres muestras (M1, M2 y M3) utilizadas para la realización de las tres pruebas del estudio cuantitativo.

5.2.1 Primera muestra: alumnos de 1º curso sin formación universitaria en matemáticas ni en didáctica de la matemática (M1)

La primera prueba se realiza en el mes de mayo de 2011, al finalizar el primer curso de la primera promoción del grado de Educación Primaria. La formación recibida hasta ese momento por los alumnos se fundamenta en materias de los módulos de formación básica, asignaturas psicopedagógicas de carácter general, entre las que no figura ninguna asignatura que esté relacionada con la formación matemática.

Para aplicar la PCN1 se seleccionó una muestra, cuya composición se recoge en la *Tabla 5.1*, formada por 155 alumnos pertenecientes a tres de los seis grupos que cursan este grado, uno del turno de mañana, grupo A (registrado como grupo M1.3) y dos del turno de tarde, grupos D y E (registrados como grupos M1.1 y M1.2).

Tabla 5.1 Composición de la muestra M1(PCN1)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	M1.1	49	31,6	31,6	31,6
	M1.2	44	28,4	28,4	60,0
	M1.3	62	40,0	40,0	100,0
	Total	155	100,0	100,0	

A pesar de que era de esperar que la organización de los grupos de docencia no influiría en los resultados de la prueba, se ha realizado un contraste de hipótesis sobre las diferencias en los porcentajes de respuestas acertadas de los tres grupos, arrojando los resultados que se recogen en la *Tabla IV.1.1* del Anexo IV. Estos resultados ponen de manifiesto que no existen diferencias significativas entre los tres grupos que componen esta primera muestra y, por tanto, que los tres subgrupos son totalmente equivalentes desde el punto de vista de las variables analizadas.

5.2.2 Segunda muestra: alumnos de 2º curso sin formación universitaria en matemáticas ni en didáctica de la matemática (M2)

La segunda prueba (PCN2) se realiza en el mes de septiembre de 2011, al inicio del segundo curso del Grado y en el primer día de clase de la asignatura Didáctica de la Aritmética. Para la elección de esta segunda muestra se mantiene la misma población y la misma distribución por grupos que la establecida para el curso 2010-11. De la población anterior se eligió una segunda muestra, en principio intencional aunque se puede considerar aleatoria en función de los criterios mencionados para la distribución de los alumnos por turnos y grupos, de 95 alumnos de los grupos C (registrado como grupo M2.1) y F (registrado como grupo M2.2) que no habían realizado el cuestionario anterior en el mes de junio del mismo año. La tabla de la figura 5.2 refleja la composición de la muestra y las frecuencias correspondientes.

Tabla 5.2 Composición de la muestra M2 (PCN2)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	M2.1	43	45,3	45,3	45,3
	M2.2	52	54,7	54,7	100,0
	Total	95	100,0	100,0	

Al igual que en el caso de la muestra M1, en el momento en que se aplica la prueba PCN2 los alumnos de la muestra M2 no habían recibido ninguna formación específica en Matemáticas o en Didáctica de la Matemática, lo que induce a pensar que los dos grupos seleccionados para esta segunda muestra deben ser equivalentes entre sí y equivalentes también a los grupos que constituyeron la muestra M1. A pesar de todo, del mismo modo que en el caso de la muestra M1 y para asegurar esta circunstancia, se ha realizado un contraste de hipótesis sobre las diferencias de los porcentajes de las respuestas acertadas en la prueba PCN2 cuyos resultados se pueden examinar en la *Tabla IV.1.2* del Anexo IV. Los datos obtenidos aseguran que no hay diferencias entre ambos grupos salvo en algunas cuestiones puntuales del nivel de reproducción, en las que sí se registran diferencias con un nivel de significación de 0,01. Aunque no se ha indagado en los motivos de estas pequeñas diferencias parece que pueden ser debidas a las características especiales de algunos alumnos del turno de tarde.

5.2.3 Tercera muestra: alumnos de 2º curso con formación en la asignatura Didáctica de la Aritmética (M3)

El tercer cuestionario (PCN3) se realiza en el mes de junio de 2012, al finalizar el segundo curso del grado y una vez desarrollada la asignatura de Didáctica de la

Aritmética en el primer cuatrimestre del curso. De la población de alumnos que han cursado la asignatura mencionada (P2) se eligió una tercera muestra intencional de 77 alumnos, formada por 44 alumnos del grupo B (registrado con el número M3.1) que no habían realizado ninguna de las pruebas anteriores y por 34 alumnos del grupo F (registrado con el número M3.2) que habían realizado previamente la prueba PCN2. La tabla de la figura 5.3 refleja la composición de la muestra y las frecuencias correspondientes.

Tabla 5.3 Datos de la muestra de la PCN3

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	M3.1	44	56,41	56,41	56,41
	M3.2	34	43,59	43,59	100,0
	Total	78	100,0	100,0	

Al igual que en los casos anteriores se ha realizado un contraste de hipótesis sobre las diferencias en las proporciones de respuestas correctas en los dos subgrupos en los que se divide esta tercera muestra. Como se puede apreciar en la *Tabla IV.1.3* del Anexo IV, no existen diferencias significativas entre dichas proporciones con un nivel de significación del 0,01, salvo en algunos de los ítems del nivel de síntesis I.

5.3 Desarrollo y resultados de la prueba PCN1

La prueba PCN1 se pasó a cada uno de los grupos en sus aulas respectivas y en una hora compatible con el horario normal de clases. Las personas responsables, profesores del Área de Didáctica de la Matemática, hicieron previamente las aclaraciones oportunas y explicaron la finalidad de la prueba. Los alumnos accedieron a colaborar y tomaron el máximo interés en la cumplimentación del cuestionario sin que se produjeran incidencias dignas de mención.

Una vez aplicada la PCN1 a los 155 alumnos de la muestra M1, se codificaron las respuestas en correctas, incorrectas y en blanco (SR (sin respuesta)) y se procedió al recuento y tabulación de las mismas para su análisis descriptivo posterior. Al mismo tiempo se registraron los errores más frecuentes y se identificaron las principales estrategias para el análisis posterior de la prueba y su posible modificación.

En los párrafos que siguen se presentan, por este orden, un estudio descriptivo, incluyendo el análisis de frecuencias desde un punto de vista global y puntual de cada nivel o tipo de tarea, la distribución de las respuestas en vectores y en niveles de comprensión, el estudio de los vectores singulares y su incidencia en la distribución por niveles de comprensión y el análisis de la homogeneidad de los ítems y de la validez de constructo de la prueba.

5.3.1 Estudio descriptivo

En las *Tabla IV.2.1, IV.2.2, IV2.3 y IV.2.4* del Anexo IV se recogen las frecuencias absolutas y los porcentajes de las tres categorías de respuesta organizadas en las cuatro partes en que se ha dividido la categoría epistemológica de la prueba PCN1.

En la *Tabla IV2.1* se aprecia que las tareas correspondientes al nivel técnico son contestadas correctamente con porcentajes que superan el 95%. Por el contrario, en los ítems del nivel de análisis, *Tablas* IV.*2.2 y IV.2.3* del Anexo IV, los porcentajes bajan significativamente, apareciendo algunas tareas con altos porcentajes de respuestas incorrectas y con porcentajes considerables de respuestas en blanco (SR). En el capítulo 6 se realiza un análisis más preciso sobre cada uno de los ítems y una interpretación más amplia de estos resultados.

Igualmente, en la *Tabla IV.2.4* del Anexo IV, se recogen las frecuencias absolutas y relativas de las respuestas a las tareas del nivel de Síntesis. En dicha tabla se aprecia una clara tendencia decreciente en el caso de las respuestas correctas y creciente en las respuestas en blanco (SR) a medida que progresamos por las tareas correspondientes a este nivel.

En los tres apartados siguientes se realiza un análisis por separado de cada tipo de respuesta construyendo en cada caso los correspondientes polígonos de frecuencias a partir de los datos de las tablas de frecuencias anteriores recogidas en el Anexo IV.

5.3.1.1 Respuestas correctas

El gráfico de frecuencias de la *Figura 5.1* pone en evidencia la existencia de tres partes bien diferenciadas: la que corresponde a las actividades de la primera parte del cuestionario, tareas de tipo técnico, en las que existe un alto porcentaje de respuestas correctas; la correspondiente a la segunda y tercera partes de la prueba, tareas de tipo analítico, donde el porcentaje de respuestas correctas fluctúa entre cuestiones con porcentajes altos y cercanos al 50% y tareas con porcentajes muy bajos; la parte asociada a los ítems del nivel de síntesis con porcentajes muy bajos con una clara tendencia decreciente.

Figura 5.1 Frecuencias relativas de respuestas correctas (PCN1)

En el caso de los 16 ítems del nivel de análisis observamos que sólo en 5 de ellos hay porcentajes de respuestas correctas superiores al 50%, en los ítems IIN9.2 y IIA13.1 los porcentajes están comprendidos entre el 30% y 40% y en los 8 restantes los porcentajes se sitúan por debajo del 30%; es de destacar el bajo porcentaje (inferior al

10%) de los alumnos que han justificado las cuestiones planteadas sobre el algoritmo de la resta y la práctica inexistencia de respuestas correctas para el ítem IIN7.1, que será analizado con más detenimiento en el capítulo 6.

Si analizamos las respuestas correspondientes a las 11 cuestiones perteneciente al nivel de síntesis observamos que en tres de ellas los porcentajes están comprendidos entre el 20% y el 30% y en las 8 restantes este porcentaje es inferior al 10%.

5.3.1.2 Respuestas en blanco (SR)

El gráfico de la *Figura 5.2* representa el polígono de frecuencias relativas de las respuestas "en blanco" (SR). Como se aprecia en dicho gráfico, la tendencia de este tipo de respuesta es opuesta a la de las respuestas correctas; su incidencia es prácticamente inexistente en la primera parte del cuestionario, con porcentajes casi nulos; fluctúa, aunque en menor medida que en el caso de las respuestas correctas, en la segunda y tercera partes correspondiente al nivel de análisis y presenta una tendencia claramente ascendente en los ítems del nivel de síntesis.

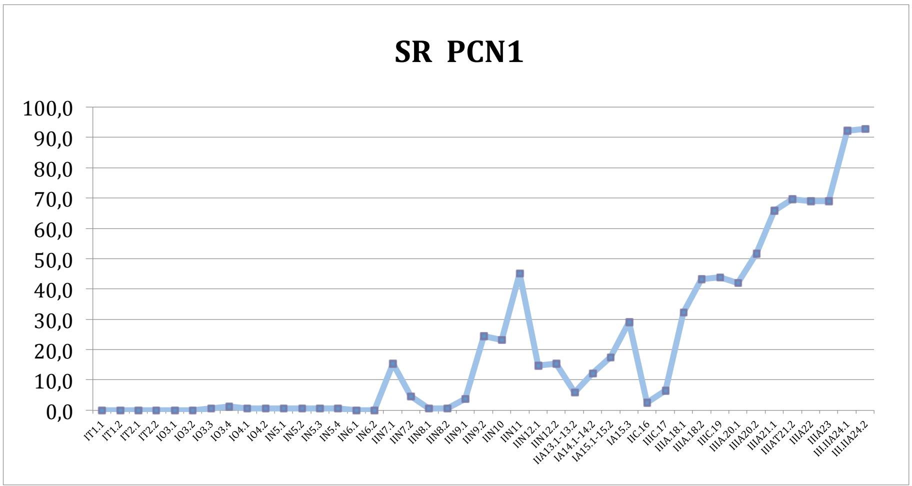


Figura 5.2 Frecuencias relativas de SR de la PCN1

5.3.1.3 Respuestas incorrectas

En el gráfico de la *Figura 5.3* se representan los porcentajes de respuestas incorrectas a las tareas de la PCN1. Al igual que en el caso de las respuestas correctas, se pueden distinguir tres partes diferenciadas: la primera, constituida por las respuestas incorrectas a los ítems del nivel técnico y en la que se registran bajos porcentajes de errores, salvo en los ítems IO3.2 y IO3.3 donde se acercan al 30%; la segunda, formada por las tareas del nivel de análisis en las que se aprecian grandes oscilaciones, destacando, con porcentajes de respuestas incorrectas superiores al 70%, los ítems IIN7.1, IIN8.1, IIN8.2 y IIA14.2, y con porcentajes inferiores y cercanos al 10% los ítems IIN7.2 y IIN9.1; el resto fluctúan entre el 20% y el 60%; por último, las respuestas incorrectas en los ítems del nivel de síntesis varían entre el 20% y el 50%, salvo en las tareas III.IIA24.1 y III.IIA24.2, en las que este porcentaje se sitúa claramente por debajo del 10%, correspondiendo al mayor índice de SR.

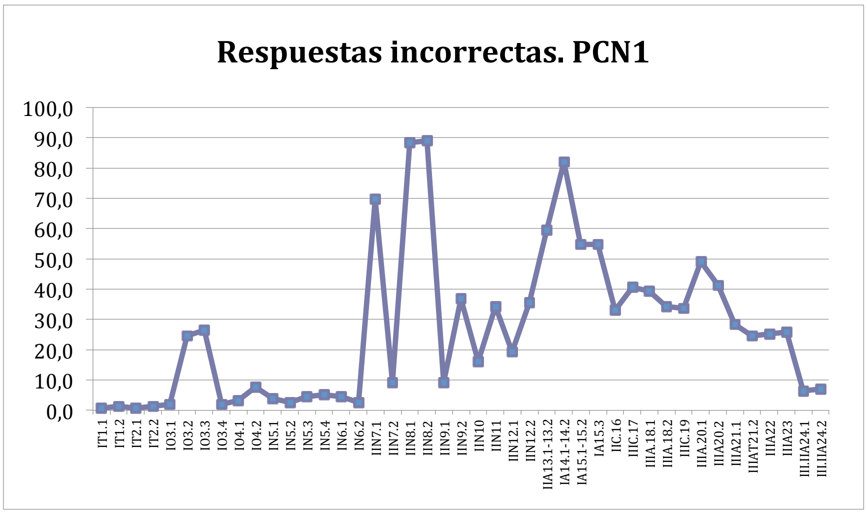


Figura 5.3 Frecuencias relativas de respuestas incorrectas de la PCN1

El análisis global realizado supone una primera aproximación a la valoración de la comprensión de los sistemas de numeración de los alumnos que inician los estudios del grado de Educación Primaria, indicando que las respuestas correctas se concentran fundamentalmente en el nivel técnico y en menor medida en el analítico. Para precisar algo más esta primera aproximación se incluye a continuación una distribución de los alumnos por niveles de comprensión mediante la consideración de los vectores de comprensión, los criterios de distribución por niveles y la determinación de vectores singulares.

5.3.2 Distribución de respuestas correctas por niveles de comprensión (PCN1)

Con la información recogida en las tablas de frecuencias se construyen los vectores de comprensión (apartado 4.8) de cada uno de los sujetos que componen la muestra. Dichos vectores, que se pueden consultar en la *Tabla IV.3.1* del Anexo IV**,** reflejan los porcentajes de respuestas correctas de cada sujeto a los ítems de la prueba en cada una de sus cuatro componentes**.** Agrupando por deciles obtenemos la matriz 10x4 que se presenta en la *Tabla 5.4*, cuyo examen a simple vista proporciona una radiografía de la situación general del estado de comprensión de los sujetos de la muestra estudiada.

Tabla 5.4 Distribución de porcentajes de respuestas correctas por niveles (PCN1)

%	Técnico	Análisis	Síntesis I	Síntesis II
[0-10)	0	12	57	98,7
[10-20)	0	22	16	0
[20-30)	0	15	12	0
[30-40)	0	13	5	0
[40-50)	0	8	2	0
[50-60)	1	12	4	1,3
[60-70)	4	8	2	0
[70-80)	2	9	1	0
[80-90)	17	1	1	0
[90-100]	76	1	0	0

Se han utilizado los datos de las *Tabla 5.4* para representar los diagramas de barras correspondientes a cada nivel. En la *Figura 5.4*, se observa que el 76 % de los sujetos de la muestra responden acertadamente a más del 90% de los 16 ítems del ***nivel técnico*** o de reproducción, mientras que el 19% responden correctamente con porcentajes entre el 70 y el 90%. Considerando la distribución por niveles de comprensión (DNC, ver capítulo 4, epígrafe 4.8.1.2), podemos asegurar que mas del 90% de los alumnos han superado el nivel técnico de la prueba.

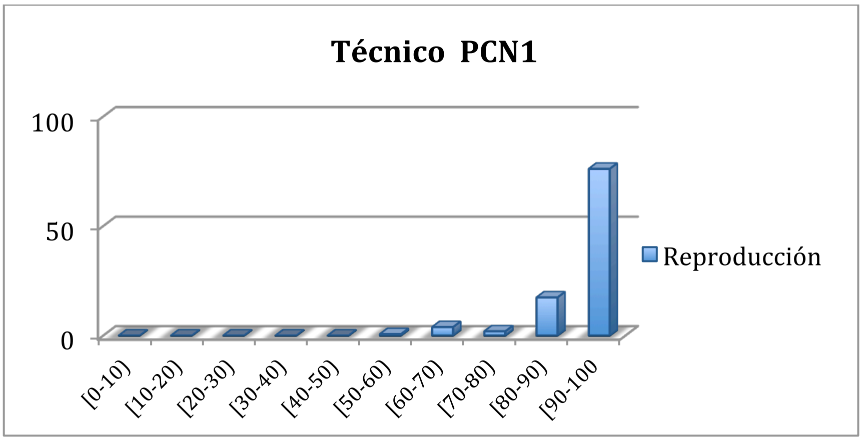


Figura 5.4 Distribución de respuestas correctas en el nivel técnico (PCN1)

De la misma forma, en la *Figura 5.5,* se observa que los porcentajes globales de respuestas correctas a los ítems del ***nivel de análisis***, a diferencia de lo que ocurre con el nivel de reproducción, están distribuidos a lo largo de los diferentes intervalos. También se puede comprobar que más del 70% de los sujetos de la muestra contestan con porcentajes inferiores al 50% al conjunto de los ítems de este nivel epistemológico.

Teniendo en cuenta los criterios definidos en el capítulo 4 sobre distribución de alumnos por niveles de comprensión y sin estimar el efecto que pudiera producir la presencia de vectores singulares, podríamos concluir que más del 70% de los alumnos han superado el nivel técnico pero no el de análisis, que sólo ha sido superado por algo más del 10% de sujetos.

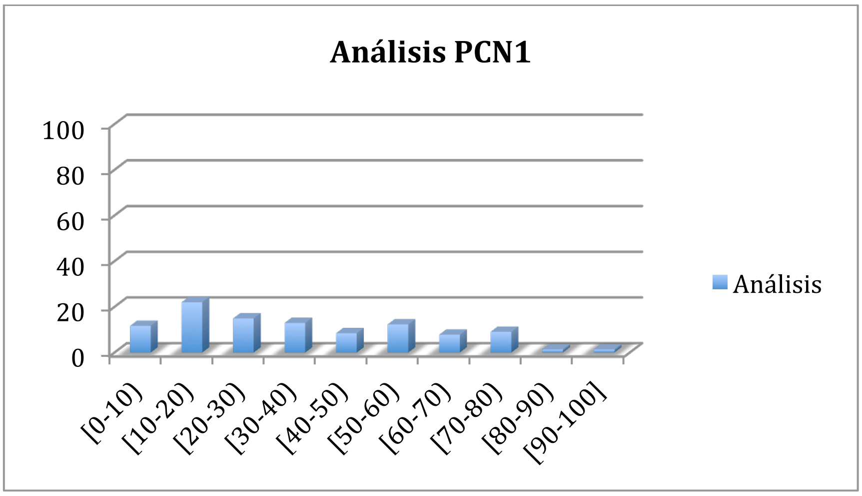


Figura 5.5 Distribución de respuestas correctas en el nivel de análisis (PCN1)

Por su parte, en el diagrama de barras de la Figura 5.6, correspondiente a las respuestas correctas a los ítems del ***nivel de síntesis I***, se aprecia que el 85% de alumnos responden correctamente en porcentajes inferiores al 30%, concentrándose la mayoría en el intervalo inferior (0%-10%). De la aplicación de los criterios sobre distribución de alumnos por niveles de comprensión, y sin estimar el efecto que pudiera producir la posible presencia de vectores singulares, se podría concluir que sólo un 2% de alumnos habrían superado el nivel de síntesis I.

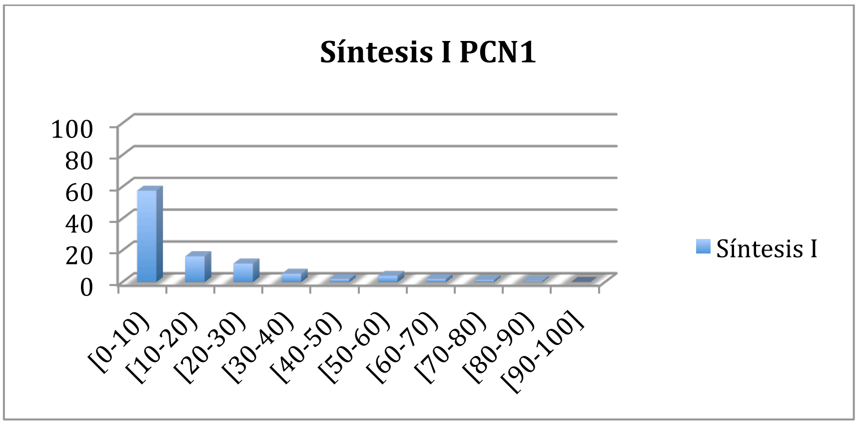


Figura 5.6 Distribución de respuestas correctas en el nivel de síntesis I (PCN1)

Por último, en la gráfica de la *Figura 5.7* se puede observar que las respuestas correctas se sitúan por debajo del percentil 10 y sólo dos alumnos (1,3% del total) responden a la mitad de los ítems de este nivel de comprensión. Deducimos que ningún alumno supera este nivel y tan sólo dos estarían cerca de conseguirlo.

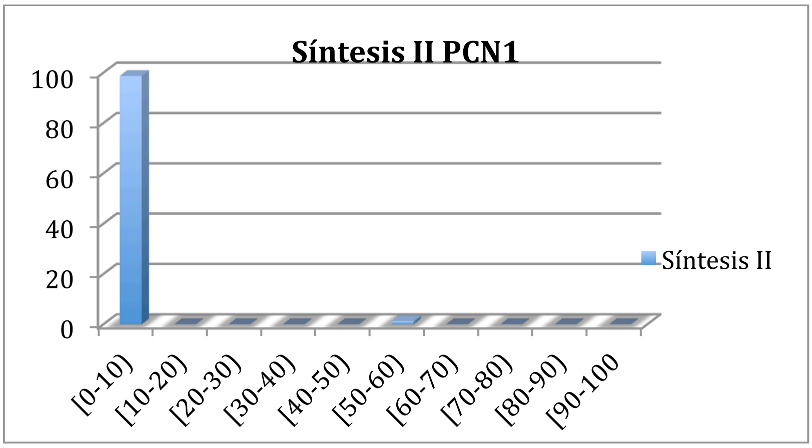


Figura 5.7 Distribución de respuestas correctas en el nivel de síntesis II (PCN1)

5.3.3 Análisis de vectores singulares (PCN1) y su incidencia en la distribución por niveles de comprensión

Para poder aceptar la distribución por niveles epistemológicos realizada en los apartados anteriores sería conveniente estudiar la presencia de vectores singulares VSC1, VSC2 y VSC3 y la influencia que estos tendrían sobre dicha distribución. Si consideramos los criterios definidos para la determinación de los vectores singulares por cualquiera de las tres causas establecidas, podemos afirmar lo siguiente:

I. La matriz numérica de la *Tabla IV.4.1* del Anexo IV representa, por filas, los vectores de comprensión cuya primera componente verifica: $c_1 \leq 70$. En ella se puede apreciar que todos los vectores cumplen la condición de monotonía y, por tanto, al no existir VSC1, podemos afirmar que los alumnos cuyas respuestas correctas corresponden a estos vectores no han conseguido completar el nivel de reproducción.

II. La matriz numérica de la *Tabla IV.4.2 del* Anexo IV representa, por filas, los vectores de comprensión que cumplen las condiciones: $c_1 \geq 70$ y $c_2 \leq 70$. En ella se observa que de los 48 vectores de comprensión, solo uno podemos considerarlo singular VSC2, dado que en todos los demás casos los valores c_3 ó c_4 son menores que 50. Esto indica que los alumnos cuyas respuestas correctas se corresponden con estos vectores han superado el nivel de reproducción. Sin embargo no podemos asegurar que tengan superado ninguno de los niveles posteriores.

Como adelanto al análisis semiótico del capítulo 6, se observa que el alumno correspondiente al mencionado vector VSC2 (84,6; 30; 77,8; 0) no ha respondido a las cuestiones de nivel analítico relativas a los algoritmos, razón por la que tiene una componente analítica baja, mientras que resuelve correctamente las cuestiones asociadas al nivel de síntesis utilizando la estrategia ASop.4 (ver apartado 6.3.3.3 del capítulo 6), lo que supone, como se describirá en el mencionado capítulo, un conocimiento de tipo técnico. Es por ello por lo que no "parece" que el sujeto sea capaz de trasladar a otros sistemas lo realizado en el sistema usual, lo que es una característica del nivel de comprensión sintética. Ampliaremos esta información en el capítulo 6.

III. En la *Tabla IV.4.3* del Anexo IV se registran los 8 vectores que cumplen las condiciones $c_1 \geq 70$, $c_2 \geq 70$, entre los que no se encuentra ningún VSC3, dado que:

- 6 de ellos tienen su componente c_3 con valores inferiores al 50% y $c_4 = 0$, por lo que podemos considerar que no son VSC3, cumplen la condición de monotonía y sólo han superado los niveles técnico y de análisis;
- Los 2 vectores restantes: (76,9; 100; 88,9; 0) y (100; 80; 100; 0) no son vectores singulares, y los alumnos a los que corresponden podemos aceptar que presentan características que nos permitirían concluir que han superado el nivel de síntesis I y también los dos anteriores.

Después del examen de los vectores singulares VSC1, VSC2 o de VSC3 y admitida la hipótesis de monotonía, podemos confirmar las conclusiones del estudio aislado por componentes y disponer de una visión general del estado de comprensión de los alumnos que componen la muestra estudiada. Dicha distribución es la siguiente:

- Aproximadamente un 5% de los alumnos no han superado el nivel técnico, instrumental o de reproducción.
- El 85% de los alumnos han superado el nivel técnico pero no el de análisis.
- El 8% han superado el nivel de análisis y no han consolidado ningún aspecto del nivel sintético.
- El 2% de los alumnos estudiados están situados en el nivel síntesis I.
- Ningún alumno estudiado supera el nivel de síntesis II.

La información considerada sobre los resultados de la prueba PCN1 es una primera aproximación que tendrá que ser contrastada y completada con la que resulte de la aplicación de las restantes pruebas (PCN2 y PCN3) y con los resultados de las entrevistas con análisis de tareas y del análisis semiótico y hermenéutico sobre las respuestas, estrategias y errores cometidos que se presentan en el capítulo 6.

5.3.4 Análisis de la homogeneidad de los ítems (PCN1)

Nos proponemos analizar la homogeneidad de las cuestiones planteadas en cada uno de los niveles epistemológicos definidos y establecer una aproximación al grado de fiabilidad y consistencia interna[2] del cuestionario PCN1. Para ello se han utilizado los coeficientes de homogeneidad (ρ_t, ρ_1, ρ_2 y ρ_3)[3] en cada una de las partes o niveles de la prueba según se explica a continuación y el coeficiente KR-20 (formula de Kuder-Richardson) variante del alpha de Cronbach, para pruebas dicotómicas.

Del análisis de los coeficientes de homogeneidad total y parciales de los ítems que componen el ***nivel técnico*** o de reproducción, que se recogen en la *Tabla IV.5.1* del Anexo IV, se aprecia que las mayores correlaciones corresponden al coeficiente ρ_1, que mide la correlación entre los resultados de los ítems considerados y los resultados parciales obtenidos en el nivel de reproducción, salvo en los ítems IT1.1 y IT2.1 donde no se aprecian diferencias significativas entre los distintos coeficientes.

Por otra parte, cuando se comparan los coeficientes de homogeneidad total y parciales se observa:

$\rho_t \geq \rho_i, \ \forall\, i \neq 1$

$\rho_t \leq \rho_i, \ i=1$

lo que evidencia el grado de homogeneidad de esta parte de la prueba y la pertinencia de la inclusión de estos ítems en el nivel técnico o de reproducción.

Asimismo, del examen de los coeficientes de homogeneidad total y parciales de los ítems que componen el ***nivel de análisis***, (*Tabla IV.5.2*, Anexo IV), se aprecia que las mayores correlaciones corresponden al coeficiente ρ_2, que mide la correlación entre los resultados de los ítems considerados y los resultados parciales obtenidos en el nivel de análisis, salvo en el ítem IIN9.1 en el que el coeficiente mayor corresponde al ρ_1 y en el ítem IIN7.2 en el que son prácticamente los mismos valores para ρ_1 y ρ_2.

Si comparamos los coeficientes de homogeneidad total y parciales se obtiene:

$\rho_t \geq \rho_i, \ \forall\, i \neq 2$, salvo en el ítem IIN9.1

$\rho_t \leq \rho_i, \ i=2$, salvo en los ítems IIN9.1 y IIN7.2

lo que evidencia el grado de homogeneidad de esta parte de la prueba y la pertinencia de la inclusión de estos ítems en el nivel de análisis. En el caso del ítem IIN9.1 se observa que, tanto por el porcentaje de respuestas correctas como por sus correspondientes coeficientes de homogeneidad, debería estar situado en el nivel técnico o de reproducción, pero debido a sus características epistemológicas creemos que se debe mantener en el nivel de análisis.

Por último, del análisis de los coeficientes de homogeneidad total y parciales de los ítems que componen el ***nivel de síntesis***, (*Tabla IV.5.3* del Anexo IV), se aprecia que las mayores correlaciones corresponden al coeficiente ρ_3, que mide la correlación entre los resultados de los ítems considerados y los resultados parciales obtenidos en el nivel de síntesis. Los ítems III.IIA24.1 y III.IIA24.2 que corresponden al nivel de

[2] Martinez R (1995).

[3] ρ_t = Coeficiente de correlación de Pearson entre el resultado obtenido en cada ítems y la puntuación global del cuestionario descontados los valores de éste.

ρ_i = Coeficiente de correlación de Pearson entre el resultado obtenido en cada ítems y la puntuación global del cuestionario en cada uno de los niveles estudiados descontados los valores de éste cuando el ítems corresponde al nivel i.

síntesis II, merecen una consideración especial en este análisis de homogeneidad, dados los nulos porcentajes de respuestas correctas, que han supuesto desviaciones típicas con valores cercanos a 0 y valores de los índices de homogeneidad, recogidos en la *Tabla IV.5.3* del Anexo IV, con pocas diferencias significativas o SV (sin valor) para el segundo ítem.

Como en los niveles anteriores, cuando se comparan los coeficientes de homogeneidad total y parciales, se observa:

$\rho_t \geq \rho_i, \ \forall\, i \neq 3$

$\rho_t \leq \rho_i, \ i=3$

lo que evidencia el grado relativo de homogeneidad de esta parte de la prueba y la pertinencia de la inclusión de estos ítems en el nivel de síntesis, con la excepción de los dos ítems señalados anteriormente.

Otro parámetro que nos da información sobre la consistencia interna, la fiabilidad de instrumento y por tanto un índice de la estabilidad y la consistencia de las observaciones realizadas, es la variante del coeficiente alpha de Cronbach para pruebas dicotómicas; se trata de la formula KR-20 de Kuder-Richardson; el valor de este parámetro obtenido mediante la varianza de los ítems es de KR-20=0.83, lo que sin duda supone un buen índice de consistencia interna.

5.4 Desarrollo y resultados de la prueba PCN2

Como se recordará, la prueba PCN2 resultó de la modificación del modelo 1 y del análisis de las tareas de la prueba PCN1 a la luz de los resultados obtenidos en ese primer estudio. Por otra parte, se trata de una segunda prueba con pretensiones de ser equivalente a la primera, lo que aconseja se utilice con una muestra equivalente en los aspectos fundamentales del estudio. En este sentido, la segunda muestra (M2) se ha elegido mediante los mismos criterios que la primera, es decir, alumnos del Grado de Maestro en Educación Primaria que cumplen las siguientes condiciones:

a) la misma formación matemática que poseen al inicio de los estudios universitarios, lo que implica que en el momento de realización de las pruebas no han cursado ninguna asignatura de matemáticas ni de didáctica de la matemática;

b) en el mismo nivel que los alumnos de la primera muestra, lo que obliga a elegir alumnos pertenecientes a la misma población del primer estudio;

c) que no hubieran realizado previamente ninguna prueba sobre sistemas de numeración, lo que obligó a elegir esta segunda muestra de entre los grupos que no formaron parte de la muestra M1.

La prueba PCN2 se pasó a cada uno de los grupos elegidos en sus aulas respectivas y en la primera hora de comienzo del curso en el horario normal de clases. Las personas responsables, profesores del Área de Didáctica de la Matemática, hicieron previamente las aclaraciones oportunas y explicaron la finalidad de la prueba. Los alumnos accedieron a colaborar y tomaron el máximo interés en la cumplimentación del cuestionario sin que se produjeran incidencias dignas de mención.

5.4.1 Análisis descriptivo global (PCN2)

En la *Tabla IV.2.5* del Anexo IV, se exponen las frecuencias absolutas y relativas de los tres tipos de respuestas a los ítems de los diferentes niveles de la prueba PCN2. Con dichos datos se han obtenido los gráficos de *las Figuras 5.8, 5.9 y 5.10*, en los que se representan, respectivamente, los porcentajes de las respuestas correctas, incorrectas y SR (sin respuesta) recogidas en este segundo cuestionario.

En el gráfico de la *Figura 5.8*, en el que se representan las ***respuestas correctas***, se pueden apreciar tres partes diferenciadas: en primer lugar, las actividades de la primera parte del cuestionario en las que existe un alto porcentaje de respuestas correctas; en segundo lugar, las tareas del nivel de análisis, donde dicho porcentaje fluctúa; por último, la parte asociada a los ítems del nivel de síntesis, que refleja la existencia de porcentajes muy bajos con una clara tendencia decreciente.

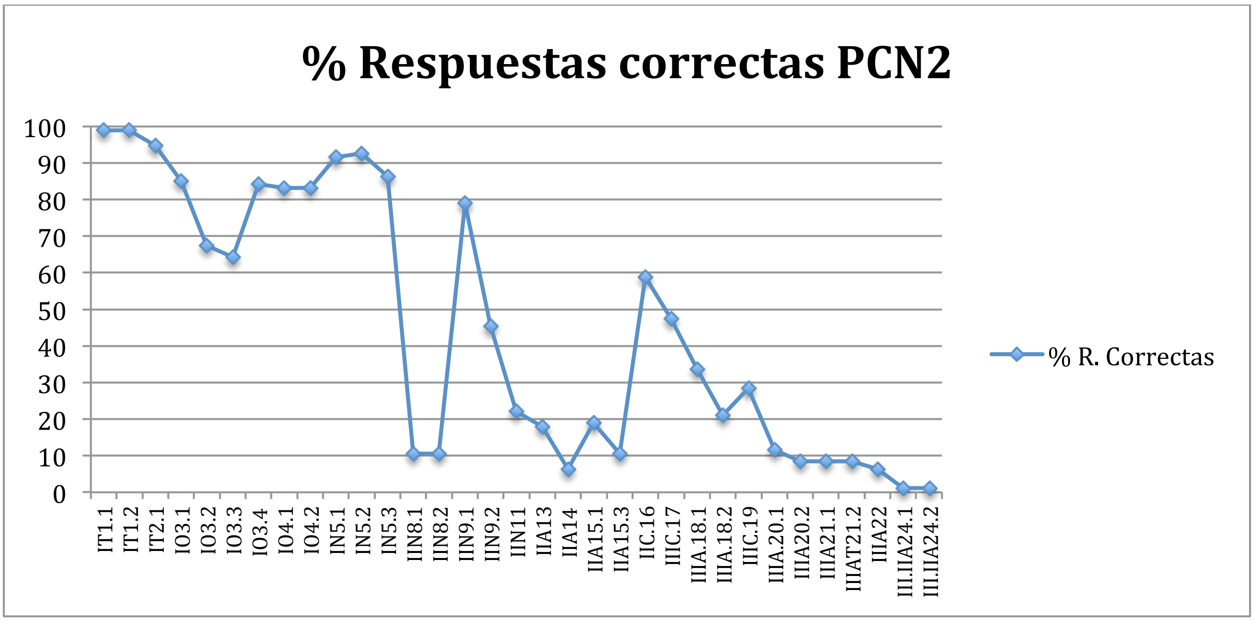


Figura 5.8 Porcentajes de respuestas correctas PCN2

En el caso de los 10 ítems del nivel de análisis observamos que sólo en 2 de ellos (IIN9.1 y IIC16) se dan porcentajes de respuestas correctas superiores al 60%; en la tarea IIN9.2 el porcentaje está cercano al 50% y en los IIC11, IIA13 y IIA15.1 los porcentajes se sitúan cerca del 20%. Por otra parte, es de destacar el bajo porcentaje (cercanos al 10%) de los ítems IIN8.1, IIN8.2, IIA14 y IIA15.3 correspondientes a la comprensión de los sistemas de numeración en su participación en los algoritmos de la resta y la multiplicación.

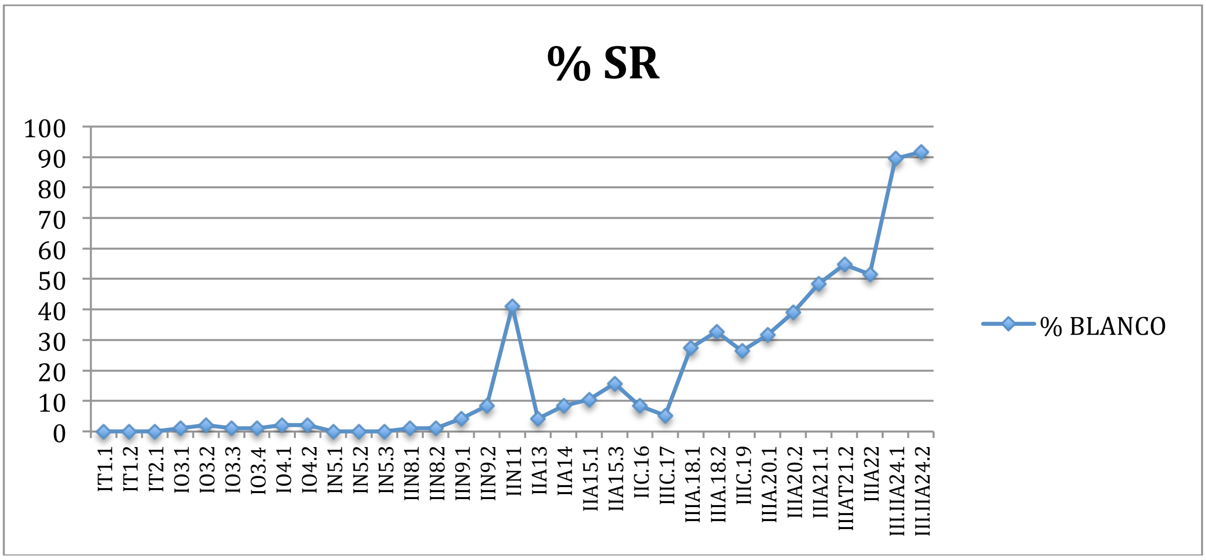


Figura 5.9 Porcentaje de SR en la PCN2

Por último, si analizamos las respuestas correctas correspondientes a las 11 cuestiones pertenecientes al nivel de síntesis observamos que en tres de ellas los porcentajes están comprendidos entre el 20% y el 30%, mientras que en las 7 últimas este porcentaje es inferior al 10%.

En lo que se refiere a las cuestiones no realizadas o sin respuesta o con ***respuestas en blanco***, que hemos catalogado como SR, se puede apreciar en la *Figura 5.9* que la tendencia es opuesta a la de las correctas. De hecho es prácticamente inexistente en la primera parte del cuestionario, con porcentajes bajos, salvo algunas cuestiones puntuales, en la segunda y tercera partes correspondientes al nivel de análisis y con una tendencia claramente ascendente en los ítems de síntesis.

Por último, las ***respuestas incorrectas*** se muestran en el gráfico de la *Figura 5.10*, donde se aprecian bajos porcentajes en las cuestiones del nivel técnico, salvo en los ítems IO3.2 y IO3.3 en las que la proporción es cercana al 30%. Igualmente se aprecian grandes oscilaciones en los ítems correspondientes al nivel de análisis, destacando los ítems IIN8.1, IIN8.2 y IIA14.1 con porcentajes superiores al 80%. Por otra parte, los ítems correspondientes a los algoritmos de la suma y la multiplicación IIA14.1, IIA15.1 y IIA15.3 aparecen con porcentajes intermedios comprendidos entre el 60% y el 75%, mientras que la tarea IIN9.1 presenta un porcentaje inferior al 10%.

Los porcentajes de respuestas no correctas en los ítems del nivel sintético varían entre el 30% y el 60%, salvo en los dos últimos ítems III.IIA24.1 y III.IIA24.2, que se sitúan claramente por debajo del 5% y se corresponden con los de mayor porcentaje de “sin respuesta”.

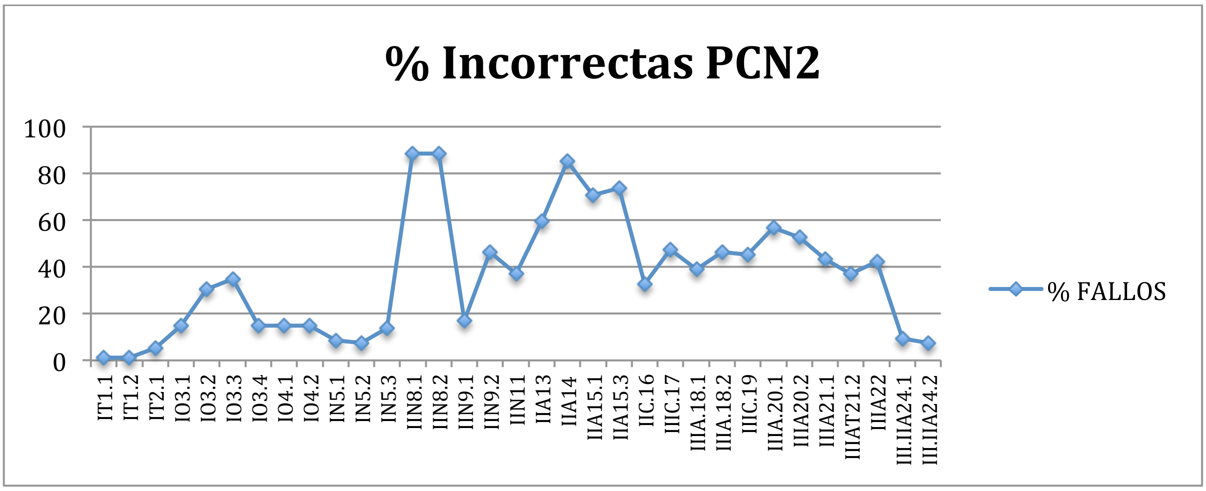


Figura 5.10 Porcentajes de respuestas incorrectas PCN2

5.4.2 Distribución de respuestas correctas por niveles de comprensión (PCN2)

Aunque los criterios definidos en el capítulo 4 para la determinación de los niveles de comprensión nos permiten categorizar las respuestas en función de las características de los vectores de comprensión, nuestro interés no se orienta en este momento al diagnóstico individual sino al del grupo de alumnos y a la visión global del nivel de comprensión del grupo.

Con los datos de las *Tablas IV.2.5 y IV.3.2* (Anexo IV), en las que se muestran respectivamente las frecuencias de respuestas a la PCN2 y los vectores de comprensión de los alumnos pertenecientes a la M2, se construyen los porcentajes de respuestas correctas distribuidos por componentes y agrupados según se indican en la *Tabla 5.5*. En esta matriz 10x4, se recogen los porcentaje de sujetos cuyas componentes vectoriales están incluidas en cada uno de los intervalos indicados.

Tabla 5.5 Distribución de porcentajes de respuestas correctas por niveles (PCN2)

%	**Reproducción**	**Análisis**	**Síntesis I**	**Síntesis II**
[0-10)	**0**	**12,8**	**33,8**	**98,9**
[10-20)	**0**	**17,9**	**33,7**	**0**
[20-30)	**0**	**20**	**9,4**	**0**
[30-40)	**3,1**	**22,1**	**5,2**	**0**
[40-50)	**10,5**	**8,4**	**10,5**	**0**
[50-60)	**3,1**	**6,3**	**0**	**0**
[60-70)	**1**	**3,1**	**1,1**	**0**
[70-80)	**15,5**	**4,2**	**2,1**	**0**
[80-90)	**15,8**	**2,1**	**2,1**	**0**
[90-100]	**50,5**	**3,1**	**2,1**	**1,1**
	Total: 100			

A continuación se realiza un análisis aislado de las diferentes componentes de los vectores de comprensión bajo la hipótesis de que estos vectores cumplen la condición de monotonía. Posteriormente tendremos en cuenta la posible presencia de vectores singulares para revisar el análisis anterior.

Con los datos de la *Tabla IV.3.2* (Anexo IV) y los de la *Tabla 5.5* anterior*,* se obtienen los diagramas de barras correspondientes a cada uno de los niveles en estudio. Así, en la *Figura 5.11* se representa el diagrama de barras de la distribución de respuestas correctas a las tareas de la componente o ***nivel técnico*** o de reproducción. En dicho gráfico observamos que el 83% obtienen porcentaje totales de respuestas correctas superiores al 70%. Podemos decir, por tanto, que el 80% de los alumnos de la muestra han superado el nivel de reproducción.

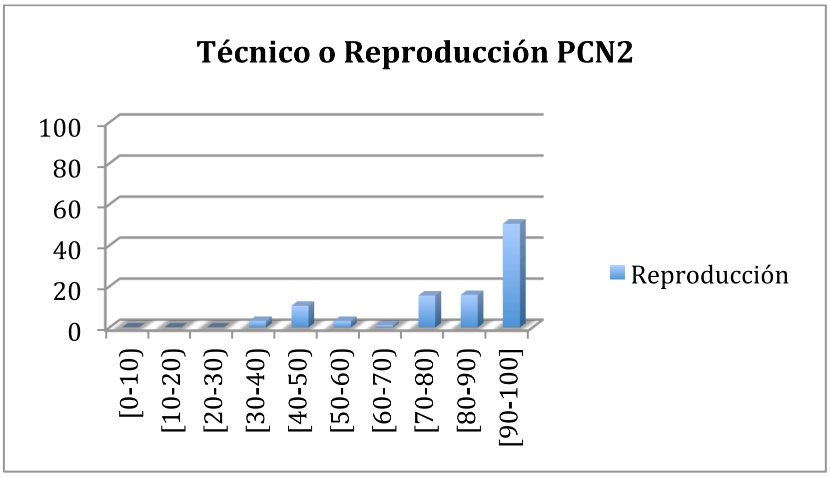


Figura 5.11 Distribución de respuestas correctas en el nivel de reproducción (PCN2)

Del mismo modo, a partir de los datos de la *Tabla 5.5,* se ha construido el diagrama de barras para la ***componente de análisis*** que se representa en la *Figura 5.12*, en la que se observa que, a diferencia de lo que ocurre en el nivel técnico o de reproducción, las respuestas correctas se distribuyen a lo largo de los diferentes intervalos, situándose el 70% de las mismas en los intervalos con valores inferiores al 40%.

Sin tener en cuenta la existencia de vectores singulares y atendiendo a los datos anteriores podríamos asegurar que aproximadamente el 10 % de los alumnos que han realizado este segundo cuestionario han superado el nivel de análisis.

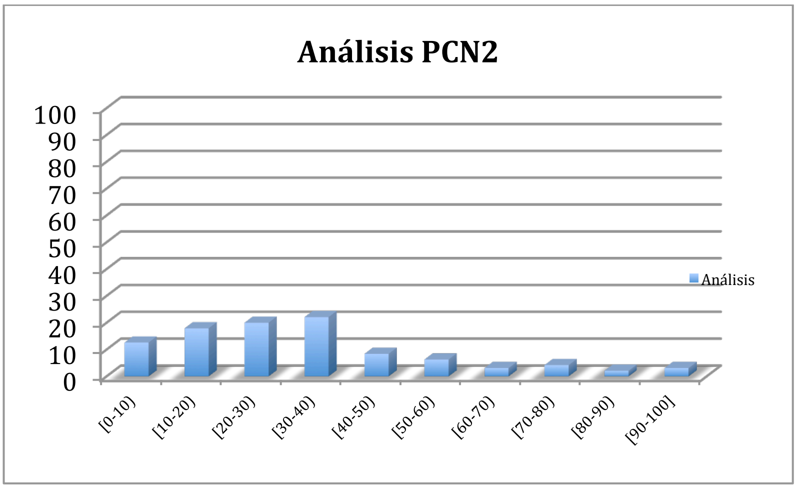


Figura 5.12 Distribución de respuestas correctas en el nivel de análisis (PCN2)

De la misma forma y a partir de los datos de la *Tabla 5.5* se ha construido el diagrama de barras de la *Figura 5.13* para el análisis de la componente síntesis I. En dicho diagrama se puede comprobar que el 70% de los alumnos responden correctamente a las tareas de este nivel en un porcentaje inferior al 30%, concentrándose la mayoría en valores inferiores al 20%.

Por otra parte, sólo el 6% de los vectores de comprensión responden correctamente a las tareas del nivel síntesis I con porcentajes superiores o iguales al 70%. Por ello y aislando la posible presencia de vectores singulares podemos considerar que sólo un 6% de los alumnos estudiados han superado el nivel síntesis I.

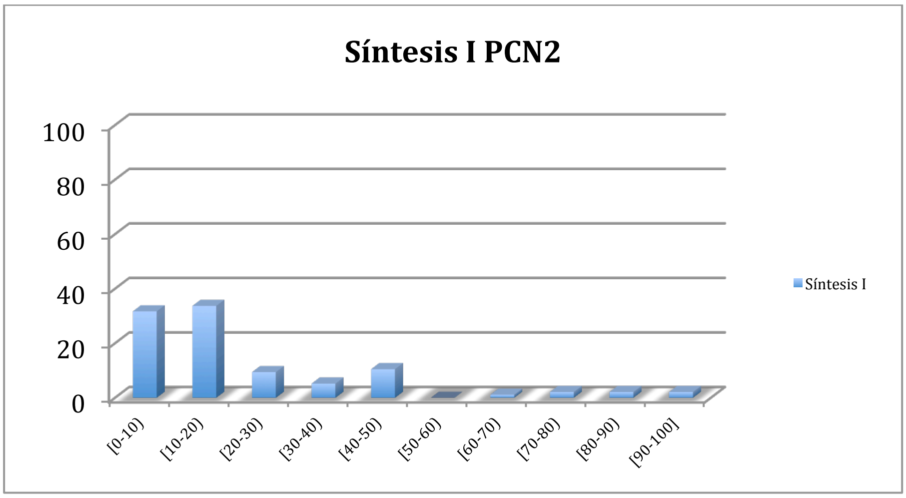


Figura 5.13 Distribución de respuestas correctas en el nivel de síntesis I (PCN2)

Por último, se observa en la *Figura 5.14* que la práctica totalidad de los vectores de comprensión tienen cuarta componente con valores inferiores a 10, siendo 0 en la mayoría de los casos. Además, solo un alumno tiene componente sintética II con valor superior a 70. Por todo ello, suponiendo la hipótesis de monotonía de las componentes de los vectores de comprensión, podemos aceptar que sólo un alumno de la muestra se encuentra en el nivel de síntesis II.

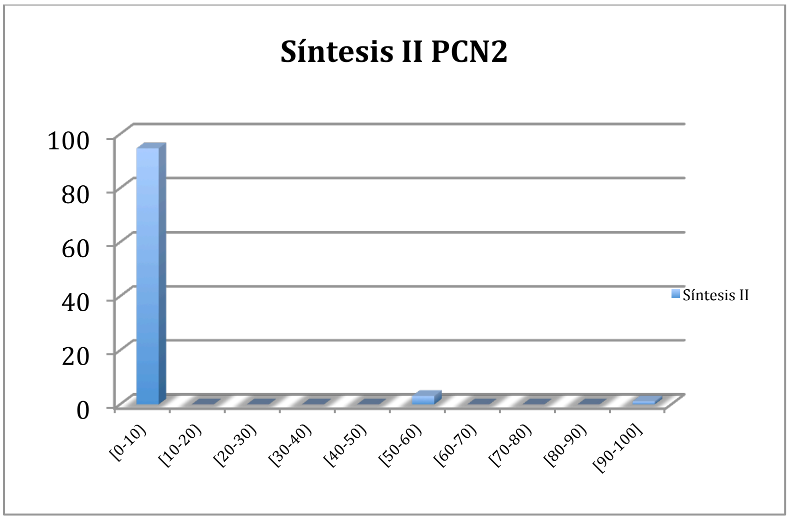


Figura 5.14 Distribución de respuestas correctas en el nivel de síntesis II (PCN2)

5.4.3 Análisis de vectores singulares (PCN2) y su incidencia en la distribución por niveles de comprensión

El análisis para identificar vectores singulares arroja los siguientes resultados:

I. La matriz numérica de la *Tabla IV.4.4 (*Anexo IV*)* representa, por filas, los 16 vectores de comprensión de los alumnos tales que: $c_1 < 70$. Ninguno de los vectores se puede considerar que sea VSC1, por lo que podemos afirmar que ningún alumno ha conseguido completar el nivel de reproducción. Únicamente podemos resaltar la existencia del vector (46,2; 0; 66,7; 0), cuya componente de síntesis I tienen un valor cercano a 70. De un análisis más profundo de las respuestas de este sujeto, análisis que se completará en el capítulo 6, observamos que comete el error ETr.1 (*no considera la presencia de ceros, tanto sintácticos como léxicos, para obtener el anterior o el siguiente en el sistema "verbal"*) y algunos errores de lectura de los enunciados en algunas de las tareas del nivel de reproducción. Por otra parte, responde a las cuestiones de nivel analítico relativas a los algoritmos con errores del tipo EAop.1 (*aplica mecánicamente los algoritmos)*, cometiendo el error EAe.1 (*confunde la cantidad de unidades de un orden contenidas en un número, con la cifra que ocupa el lugar de dicho orden en la expresión del número*) en los ítems IIN8 (I y II). Por otra parte, no resuelve las tareas IIN9 (I y II) y IIN11, (relativas a la traducción a nuestro sistema de expresiones numéricas organizadas en forma polinómica) y aunque resuelve las cuestiones del nivel de síntesis I, IIIA18 (I y II) y IIA12(I y II), utiliza la estrategia ASop.4 (*transforma las cantidades a base 10 y a continuación operan; supone obtener el total de bombones sueltos y operar con ellos*), lo que indica la existencia de un conocimiento de tipo técnico. En consecuencia, no "parece" que este alumno sea capaz de trasladar a otros sistemas lo realizado en el sistema usual, capacidad que caracteriza el nivel de comprensión sintética.

II. De los 53 vectores de comprensión recogidos en la *Tabla IV.4.5 (*Anexo IV*)* con $c_1 \geq 70$ y $c_2 \leq 70$, sólo encontramos tres vectores VSC2, lo que indica que casi todos los alumnos han superado el nivel de reproducción ($c_1 \geq 70$) pero no los niveles posteriores, dado que los valores c_3 ó c_4 son menores que 50. Los tres vectores VSC2 son: (84,6; 30; 77,8; 0), (100; 50; 100; 0) y (92,3; 50; 77,8; 0), de los que realizamos a continuación un primer análisis que se completará en el capítulo 6. Para empezar, en los ítems de síntesis I ($c_3 \geq 70$) se utiliza la estrategia ASop.4, que es característica de una comprensión técnica de la numeración, por lo que estos sujetos no "parecen" capaces de trasladar a otros sistemas lo realizado en el sistema usual y, por tanto, no manifiestan dicha capacidad específica del nivel de comprensión sintética.

III. Si analizamos los vectores de la *Tabla IV.4.6 (*Anexo IV*)* que cumplen $c1 \geq 70$ y $c2 \geq 70$, observamos que hay 9 vectores que cumplen estas condiciones, si bien ninguno se puede considerar VSC3. En particular, los tres vectores siguientes: (76,9; 100; 88,9 ; 0), (100; 80; 100; 0) y (100; 90; 100; 100) no cumplen la hipótesis de monotonía pero tampoco contradicen las observaciones realizadas en los estudios de componentes independientes. Se puede decir que los dos primeros presentan características que nos permitirían concluir que han superado el nivel de síntesis I y el tercero el nivel de síntesis II.

Del análisis realizado anteriormente, admitida la hipótesis de monotonía, concluimos que la distribución de alumnos por niveles de comprensión en la PCN2 es la siguiente:

- El 17% de los alumnos no ha superado el nivel técnico o instrumental.
- El 73% de los alumnos ha superado el nivel técnico pero no el de análisis.

- El 4% ha superado el nivel de análisis y no los de síntesis.
- El 6% ha superado el nivel sintético I y un sólo alumno el nivel de síntesis II.

Podemos decir que estos resultados son bastante similares a los obtenidos en el primer estudio. Globalmente podemos afirmar que en los dos estudios el 90% de los alumnos responde con una comprensión de tipo técnico o instrumental y un pequeño porcentaje cercano al 10% presentan características propias de los niveles superiores.

5.4.4 Análisis de la homogeneidad de los ítems de la prueba PCN2

Para analizar la homogeneidad de las cuestiones planteadas en cada uno de los niveles epistemológicos definidos y establecer un índice de la validez de construcción de la prueba PCN2, como se hizo con la prueba PCN1, se han utilizado los coeficientes de homogeneidad (ρ_t, ρ_1, ρ_2 y ρ_3)[4].

La obtención de dichos coeficientes para el ***nivel técnico o de reproducción*** arroja los resultados que se recogen en la *Tabla IV.5.4* del Anexo IV, de cuyo análisis se aprecia que las mayores correlaciones corresponden al coeficiente ρ_1, el cual mide la correlación entre los resultados de los ítems considerados y los resultados parciales obtenidos en el nivel de reproducción. La única singularidad ocurre en el caso de los ítems IT1.2 y IT2.1, que, al igual que en la prueba PCN1, no presentan diferencias significativas entre los distintos coeficientes.

Por otra parte, al comparar los coeficientes de homogeneidad total y parciales se observa que:

$\rho_t \geq \rho_i, \ \forall\, i \neq 1$

$\rho_t \leq \rho_i, \ i=1$, salvo en el caso del ítem IN5.3, donde se aprecia mayor correlación con los resultados totales que con los del nivel de reproducción. En general, al igual que en el caso de la prueba PCN1, podemos confirmar la homogeneidad de la prueba y la pertinencia de la inclusión de estos ítems en el nivel de reproducción.

Del análisis de los coeficientes de homogeneidad total y parciales para el ***nivel de análisis***, *Tabla IV.5.5(*Anexo IV*)*, se aprecia que las mayores correlaciones corresponden al coeficiente ρ_2, el cual mide la correlación entre los resultados de los ítems considerados y los resultados parciales obtenidos en el nivel de análisis. Asimismo, de la comparación de los coeficientes de homogeneidad total y parciales para este bloque de tareas se observa:

$\rho_t \geq \rho_i, \ \forall\, i \neq 2,$

$\rho_t \leq \rho_i, \ i=2$, salvo en el ítems IIA.16, donde se aprecia mayor correlación con los resultados totales que con los del nivel de análisis. A pesar de ello, al igual que ocurre en el caso de la PCN1, obtenemos una muestra relativa aceptable del grado de homogeneidad y de la pertinencia de la inclusión de estos ítems en el nivel de análisis.

Por otra parte, del análisis de los coeficientes de homogeneidad total y parciales correspondientes a las tareas del ***nivel de síntesis***, *Tabla IV.5.6 (*Anexo IV*)*, se aprecia que las mayores correlaciones corresponden al coeficiente ρ_3, el cual mide la correlación entre los resultados de los ítems considerados y los resultados parciales obtenidos en el nivel de síntesis.

---

[4] ρ_t = Coeficiente de correlación de Pearson entre el resultado obtenido en cada ítem y la puntuación global del cuestionario descontados los valores de éste.

ρ_i = Coeficiente de correlación de Pearson entre el resultado obtenido en cada ítem y la puntuación global del cuestionario en cada uno de los niveles estudiados descontados los valores de éste cuando el ítem corresponde al nivel i.

Como en los niveles anteriores, cuando se comparan los coeficientes de homogeneidad total y parciales se observa :

$\rho_t \geq \rho_i, \ \forall \ i \neq 3$

$\rho_t \leq \rho_i, \ i=3$, salvo en los ítems III.IIA24.1 y III.IIA24.2, tareas de traducción de cantidades expresadas en sistemas de base indeterminada, donde se aprecia una mayor correlación, aunque pequeña, con los resultados totales en lugar de ocurrir con los del nivel de síntesis. No obstante, obtenemos una muestra relativa aceptable del grado de homogeneidad y de la pertinencia de la inclusión de estos ítems en el nivel de síntesis.

El parámetro KR-20 de Kuder-Richardson**,** variante del coeficiente alpha de Cronbach para pruebas dicotómicas y con ítems con diferentes índices de discriminación, que nos da información sobre la consistencia interna, la fiabilidad de instrumento y por tanto un índice de la estabilidad y la consistencia de las observaciones realizadas, para los ítems de la PCN2 y obtenido mediante la varianza de los ítems, toma como valor KR-20=0,84, que supone de la misma forma que en el caso de la PCN1, un buen índice de consistencia interna.

5.5. Desarrollo y resultados de la prueba PCN3

Como se expone con detalle en el capítulo 4, la prueba PCN3 resultó del análisis de las tareas de la prueba PCN2 a la luz de los resultados obtenidos en los dos primeros estudios (capítulo 4, apartado 4.7). Por otra parte, como se deduce de los objetivos e hipótesis de la investigación (capítulo 1, apartado 1.4.2 y 1.4.3), se trata de una tercera prueba con pretensiones de ser equivalente a las dos anteriores en lo concerniente a indagar sobre la situación general de la comprensión de los sistemas de numeración; podemos decir que se trata de una prueba más depurada que las anteriores y equivalente a ellas. La diferencia con los dos estudios anteriores radica en que en este tercer estudio se va a utilizar una muestra no equivalente a priori a las dos anteriores y que se diferencia de ellas sólo en que sus integrantes han tenido una formación específica en la asignatura Didáctica de la Aritmética. Para todas las demás variables se han utilizado los mismos criterios que los empleados para la configuración de las muestras M1 y M2, es decir, alumnos del Grado de Maestro en Educación Primaria que cumplen las siguientes condiciones:

a) la misma formación matemática al inicio de los estudios universitarios;

b) en el mismo nivel general de los alumnos del Grado;

En lo relativo a la tercera condición que cumplían los alumnos que componían las muestras M1 y M2, estos es: c) no haber realizado previamente ninguna prueba del tipo de las que se vienen utilizando en el estudio, ya indicamos en el apartado 5.2.3 de este capítulo, que era satisfecha por el grupo M3.1, pero no por el M3.2; sin embargo, el contraste de hipótesis realizado sobre las diferencias de proporciones de los respuestas correctas en ambos grupos de la muestra M3 (ver *Tabla IV.1.3* del Anexo IV), manifiesta que no hay diferencias significativas, con un nivel de significación del 0,01, salvo en algunos de los ítems del nivel de síntesis I.

A las tres condiciones anteriores hemos de añadir la siguiente condición para configurar la muestra M3:

d) alumnos que han cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética de 2º curso del plan de estudios del Grado de Maestro en Educación Primaria.

La prueba PCN3 se pasó a cada uno de los grupos elegidos de la muestra M3 (ver capítulo 4, apartado 4.7 y apartado 5.2.3 de este capítulo) en sus aulas respectivas, en el horario normal de clases y una vez concluido el desarrollo del curso. Las personas responsables, profesores del Área de Didáctica de la Matemática, hicieron previamente las aclaraciones oportunas y explicaron la finalidad de la prueba. Los alumnos accedieron a colaborar y tomaron el máximo interés en la cumplimentación del cuestionario sin que se produjeran incidencias dignas de mención.

5.5.1 Análisis descriptivo global (PCN3)

En la *Tabla IV.2.6 (*Anexo IV*)* se exponen las frecuencias absolutas y relativas de las respuestas a los ítems que corresponden a los niveles del modelo 3. Con dichos datos se han obtenido los gráficos de las *Figuras 5.15, 5.16 y 5.17*, en los que se representan respectivamente los porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y en blanco o "SR" recogidas en esta prueba.

En el gráfico de la *Figura 5.15,* al igual que en las dos pruebas anteriores, se aprecian tres partes diferenciadas asociadas a los tres niveles del modelo: en primer lugar las correspondientes al nivel técnico o de reproducción, IN5.1, IN5.2 y IN5.3, y dos de las del nivel de análisis, IIN9.1 y IIN9.2, en las que existe un alto porcentaje (cercano al 100%) de respuestas correctas; en segundo lugar se encuentran las correspondientes al nivel de análisis y de síntesis I, donde el porcentaje de respuestas correctas fluctúa, con porcentajes cercanos al 60% en las tareas IIN8.1, IIN8.2, IIA13, IIA15.1, IIIC17, IIIN25, IIIA18.1 y IIIA20.1 y porcentajes más bajos cercanos al 45% en las cuestiones IIN11, IIA14, IIA15.2, IIIA18.2 y IIIA20.2. En el último tramo, asociado a los ítems del nivel de síntesis II y compuesto por las tareas III.IIA24.1, III.IIA24.2 y III.IIA26 los porcentajes se reducen drásticamente a valores muy bajos y prácticamente despreciables.

Del examen de la distribución de los porcentajes de respuestas correctas podemos deducir, en primer lugar, que los alumnos que han cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética han consolidado el nivel técnico o de reproducción y muchos de ellos se sitúan en los niveles de análisis y síntesis. En segundo lugar, llama la atención los buenos resultados de las cuestiones IIIC17, IIIN25, IIIA18.1 y IIIA20.1, superiores incluso a los ítems del nivel de análisis, lo que será motivo de reflexión a propósito de la distribución de la muestra por niveles de comprensión, del análisis de la presencia de vectores singulares que realizaremos más adelante así como en el capítulo 6.

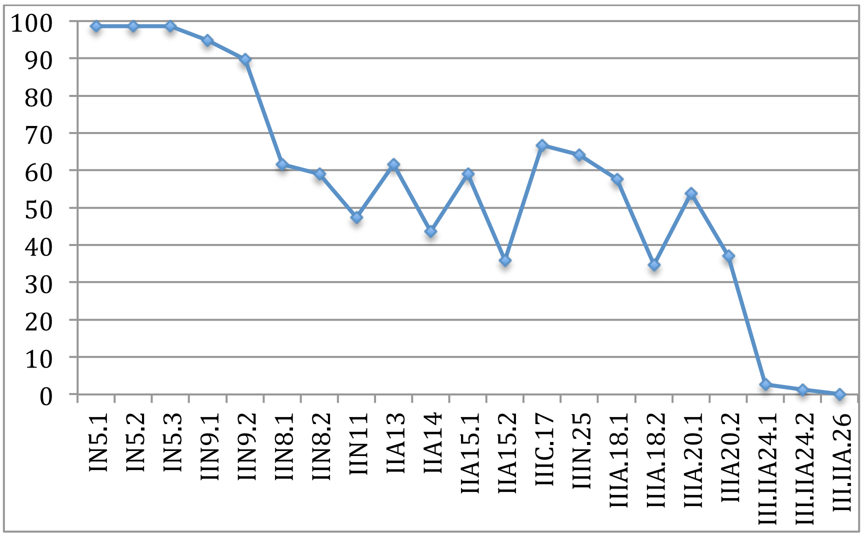


Figura 5.15 Porcentajes de respuestas correctas (PCN3)

Si realizamos un análisis de las ***tareas no completadas o sin respuestas (SR)***, cuyas frecuencias se recogen la *Tabla IV.2.6 (Anexo IV)* y se representan en el gráfico de la *Figura 5.16,* se puede apreciar que la tendencia es opuesta a la de las correctas, salvo algunas cuestiones puntuales como la IIN11, y claramente ascendente en los ítems de síntesis, llegando a porcentajes cercanos al 90% en las tres últimas tareas III.IIA24.1, III.IIA24.2 y III.IIA26 .

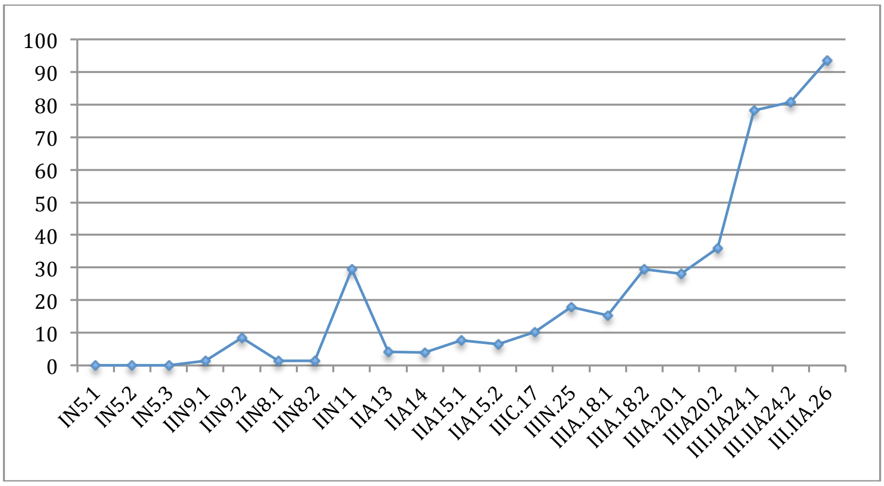


Figura 5.16 Porcentajes de SR (PCN3)

Dados los bajos porcentajes de respuestas en blanco, las gráficas de respuestas correctas e incorrectas son prácticamente complementarias, salvo en las tareas del nivel de síntesis II (*Figura 5.17*). Asimismo se detectan tres partes diferenciadas en las respuestas erróneas: la primera, formada por el nivel técnico o de reproducción y las tareas IIN9.1 y IIN9.2 con porcentajes muy reducidos, la segunda, formada por el resto de las tareas de análisis y las de síntesis I con porcentajes cercanos al 40%, y las tareas de síntesis II, donde el alto porcentaje de respuestas en blanco hace que se reduzcan los errores.

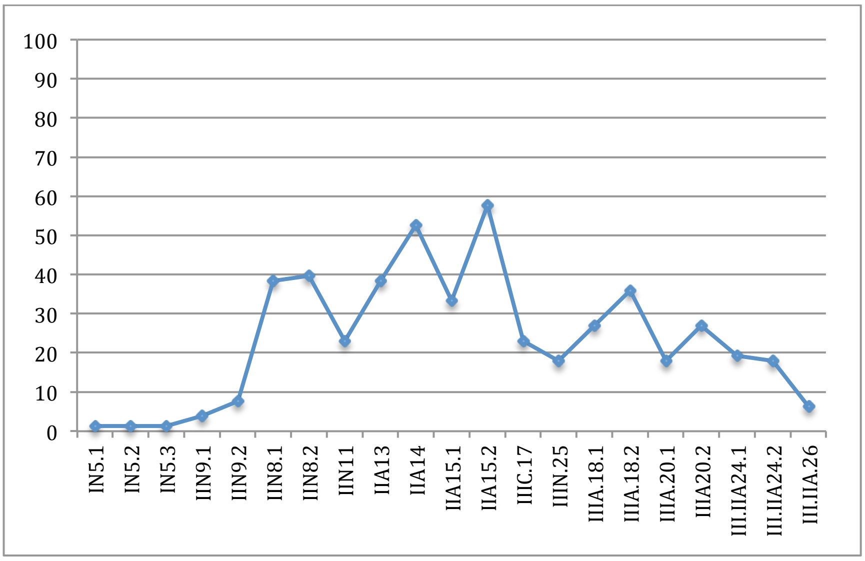


Figura 5.17 Porcentajes de respuestas incorrectas (PCN3)

5.5.2. Distribución de respuestas correctas por niveles de comprensión (PCN3)

En este apartado realizaremos un análisis de la distribución de los alumnos de la tercera muestra por niveles de comprensión en las distintas categorías epistemológicas, como lo hemos realizado para las PCN1 y PCN2, atendiendo a las características de los vectores de comprensión (c1,c2, c3, c4) asociados.

En la *Tabla 5.6* se distribuyen las respuestas teniendo en cuenta las cuatro componentes. En cada una de las celdas se muestra el porcentaje de alumnos cuya componente correspondiente del vector de comprensión (*Tabla IV.3.3* del Anexo IV*)* se encuentra dentro del intervalo que figura en la primera columna de la tabla.

Tabla 5.6 Distribución de porcentajes de respuestas correctas por niveles de comprensión (PCN3)

%	Técnico	Análisis	Síntesis I	Síntesis II
[0-10)	0	2	8	94,9
[10-20)	0	3	15	0
[20-30)	0	4	0	0
[30-40)	0	10	13	3,9
[40-50)	0	10	0	0
[50-60)	0	18	8	0
[60-70)	0	23	18	0
[70-80)	0	17	0	1,2
[80-90)	0	6	11	0
[90-100]	100	7	27	0
	Total: 100			

De los datos de la *Tabla 5.6* así como de la gráfica de la *Figura 5.18,* donde se representa la distribución de respuestas correctas a los ítems de la ***componente técnica*** o instrumental, observamos que la totalidad de los sujetos tienen superado este nivel de comprensión.

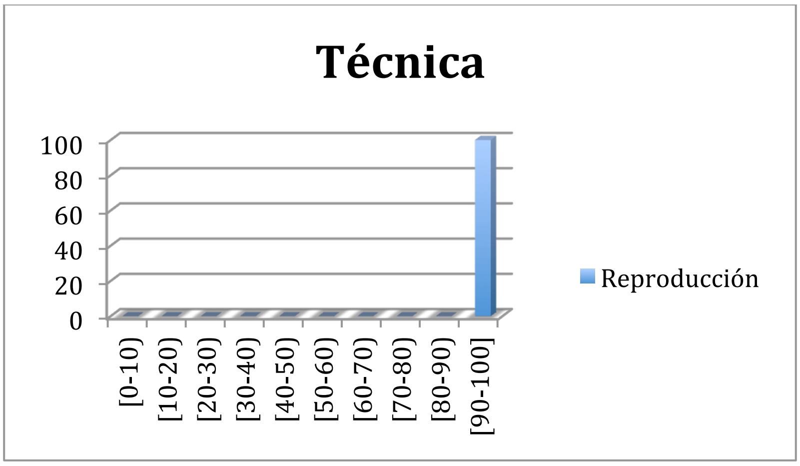


Figura 5.18 Distribución de frecuencias relativas de respuestas correctas en el nivel técnico (PCN3)

En la gráfica de la *Figura 5.19* se observa que las frecuencias relativas de las respuestas correctas a los ítems de la componente de análisis se distribuyen de forma relativamente homogénea a lo largo de los diferentes intervalos. No obstante, se puede comprobar que el 70 % de dichas respuestas están localizadas en los intervalos con valores superiores al 50%. Igualmente se observa que sólo el 30% de los sujetos superan el 70% de las tareas de este nivel, por lo que podemos decir que si aceptamos la hipótesis de monotonía y utilizamos la distribución por niveles de comprensión (ver capítulo 4, apartado 4.8.1.2), el porcentaje de alumnos de la muestra que han superado el nivel de análisis se encuentra en torno al 30% del total.

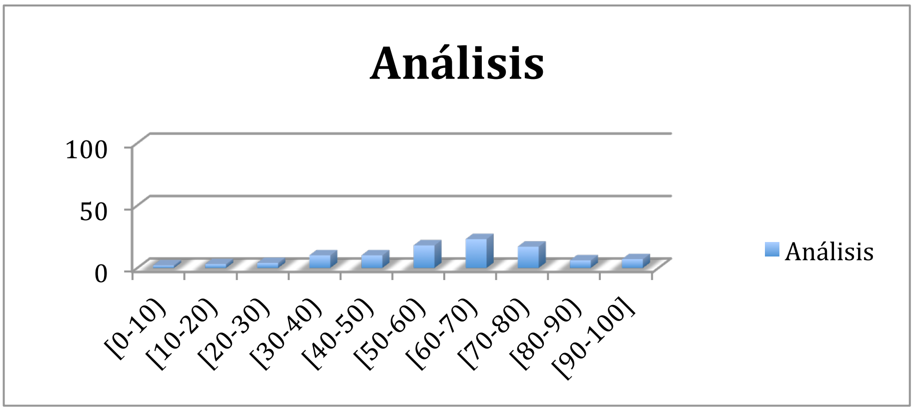


Figura 5.19 Distribución de frecuencias relativas de respuestas correctas en el nivel de análisis (PCN3)

En los datos de la *Tabla 5.20* y en la gráfica de la *Figura 5.20* se aprecia dispersión de respuestas correctas en los distintos intervalos en lo que se refiere a las componentes ***síntesis I***. Las respuestas correctas están distribuidas en las tres categorías siguientes:

a) aproximadamente 1/3 de alumnos de la muestra que responden correctamente al 30% de las tareas;

b) aproximadamente 1/3 de alumnos de la muestra cuyos porcentajes de respuestas correctas se encuentran entre el 30% y el 70%;

c) el 38% de alumnos de la muestra que han superado el nivel sintético I atendiendo a los criterios para la distribución por niveles señalados en el capítulo 4 y aislando la posible presencia de vectores singulares.

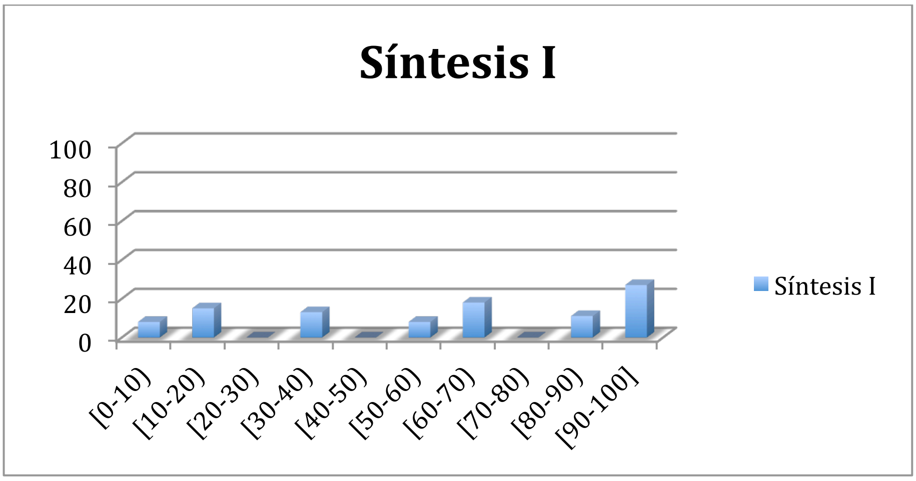


Figura 5.20 Distribución de frecuencias relativas de respuestas correctas en el nivel síntesis I (PCN3)

Por último, en los datos de la *Tabla 5.*20 y en la gráfica de la *Figura 5.21,* se puede apreciar que la práctica totalidad de los vectores de comprensión tienen valores inferiores a 10 en la cuarta componente con una mayoría de valores 0 y que sólo un alumno tiene la componente síntesis II con valor próximo a 70 y un vector de comprensión que cumple con la hipótesis de monotonía; en consecuencia podemos aceptar que un alumno de la muestra se encuentra en el nivel de síntesis II.

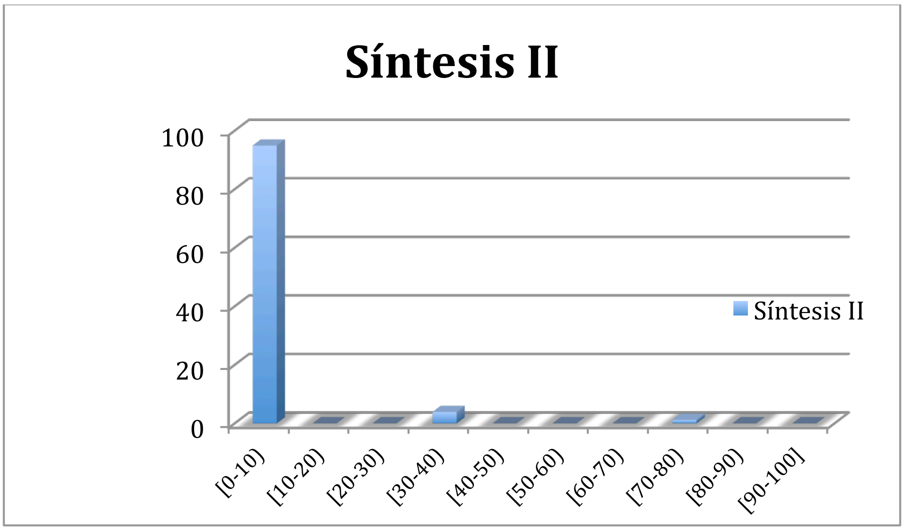


Figura 5.21 Distribución de frecuencias relativas de respuestas correctas en el nivel síntesis II (PCN3)

5.5.3 Análisis de vectores singulares (PCN3) y su incidencia en la distribución por niveles de comprensión

Como en el caso de las pruebas PCN1 y PCN2, hemos realizado un análisis de datos orientado al estudio de los vectores singulares VSC1, VSC2 y VSC3, a partir de los vectores de comprensión de la prueba PCN3 que se incluyen en la *Tabla IV.3.3* del Anexo IV**.** Del análisis realizado podemos destacar los siguientes aspectos:

I. El vector (0; 56; 0; 0) es el único con componente c_1<70; el resto de vectores tienen como primera componente el valor 100, lo que nos permite afirmar que todos ellos corresponden a sujetos que han superado al menos el nivel técnico.

II. De los 54 vectores singulares de la *Tabla IV.4.7* del Anexo IV, que se ajustan a las condiciones: $c_1 \geq 70$ y $c_2 < 70$, podemos distinguir los dos grupos siguientes: por una parte, los 25 vectores que cumplen el criterio de monotonía y los 4 VSC2 que no modifican las distribuciones ya realizadas, y por otra parte, los 24 VSC2 en los que $c_1 \geq 70$ y $c_2 <70$ y, sin embargo, c_3 toma valores superiores o muy cercanos a 70. Dentro de este último grupo se pueden distinguir aquellos en los que los valores de c_2 se encuentran próximos al 70%, como por ejemplo el vector (100; 67; 100; 0). Si eliminamos estos últimos en este segundo grupo, constatamos que el 16.6% de los alumnos de la muestra estudiada superan el nivel de síntesis I sin superar el nivel de análisis, contradiciendo la hipótesis de monotonía.

III. De los 24 vectores incluidos en la *Tabla IV.4.8* (Anexo IV*)* que cumplen $c_1 \geq 70$ y $c_2 \geq 70$, los 13 primeros tienen las componentes de síntesis inferiores a 70, cumplen la hipótesis de monotonía y no se pueden considerar como vectores VSC3; de los 11 restantes, a pesar de que 8 de ellos son VSC3 y no cumplen la hipótesis de monotonía, no contradicen las observaciones realizadas en los estudios de componentes independientes. Estos últimos vectores presentan características que nos permiten concluir que los alumnos correspondientes han superado el nivel de síntesis I y que uno de ellos, el vector (100; 78; 100; 67), está muy cerca de superar el nivel de síntesis II.

Mientras que en las PCN1 y PCN2 se cumple la hipótesis de monotonía con presencia de un porcentaje reducido de vectores singulares, fundamentalmente debido a la condición 2, en los resultados de la PCN3 se aprecia un aumento importante de la presencia de VSC2 con los valores que se indican en la *Tabla 5.7*.

Tabla 5.7 Tabla de porcentajes de vectores singulares de la muestra en PCN1,PCN2 y PCN3

	Vsc1	Vsc2	Vsc3
PCN1	-	4,48 %	-
PCN2	-	3,15%	-
PCN3	-	25,64% (16,6%)	-

Este aumento del porcentaje de VSC2 se debe en gran medida a la dispersión de los porcentajes de respuestas correctas en los niveles de análisis y síntesis I señalada en la distribución por niveles de comprensión. La razón última de la presencia de estos VSC2 y de la dispersión señalada se debe, sin duda, a que la mejora de la comprensión de los alumnos en la PCN3 se puede apreciar en las componentes de análisis y síntesis. Pero mientras que la comprensión analítica, esto es el conocer y dominar el funcionamiento de la numeración decimal, provoca mejora en la capacidad para trasladar estos conocimientos a otros sistemas isomorfos, el conocimiento de técnicas o procedimientos sobre sistemas de numeración posicionales en bases distintas a la decimal, que se han podido producir en el desarrollo de la asignatura de Didáctica de la Aritmética, no tiene por qué traducirse directamente en la mejora de la comprensión analítica de la numeración. Esta observación implicaría la necesidad de evitar en lo posible el trabajo didáctico sobre "estrategias y procedimientos" aislados que reproducen un aprendizaje fundamentalmente instrumental sin ninguna relación con significados o aplicaciones y que no suponen ninguna mejora del sentido numérico perseguido.

La presencia de vectores singulares tales como: (100, 22, 83, 0) ó (100, 33, 83, 0) confirman la sospecha de que la mejora en la aplicación de técnicas de cálculo en bases distintas a la decimal aumentan los porcentajes de la tercera componente de los vectores de comprensión numérica y sin embargo no mejoran necesariamente la comprensión analítica de la numeración. Por otra parte, la hipótesis de monotonía, que en los PCN1 y PCN2 se cumplía en la casi totalidad de las muestras analizadas, tiene importantes restricciones en el caso de la prueba PCN3, debido a la diversidad de rendimientos que los alumnos han podido obtener en la asignatura cursada. Por tanto, la distribución de alumnos por niveles de comprensión necesita ser matizada en el caso de los niveles analítico y sintético I por la presencia de los vectores VSC2.

Tomando en consideración los vectores de comprensión de la prueba PCN3 que figuran en la *Tabla IV.3.3* del Anexo IV se exponen en la *Tabla 5.8* los porcentajes de la muestra que pertenecen a los distintos niveles una vez descontados los VSC2. En dicha tabla se presenta una primera distribución (1), en la que se ha considerado de forma independiente el elevado porcentaje de alumnos con vectores VSC2, sin distribuir a estos alumnos en los niveles de comprensión, y una segunda (2), en la que se incluye en el nivel técnico a los VSC2 cuya segunda componente se aleja del porcentaje considerado frontera y en los niveles de análisis y síntesis I los porcentajes de alumnos cuyos vectores de comprensión tienen una segunda componente cercana al nivel frontera; en este grupo quedaría por determinar la pertenencia de cada uno a los niveles de análisis o de síntesis I.

Tabla 5.8 Distribución de alumnos por niveles de comprensión (PCN3)

<table>
<tr><th>Niveles</th><th></th><th>(1)</th><th colspan="2">(2)</th></tr>
<tr><td>Técnico o de Reproducción</td><td></td><td>40,25%</td><td colspan="2">54,36%</td></tr>
<tr><td>Análisis</td><td></td><td>18,18%</td><td>18,18%</td><td rowspan="2">11,53%</td></tr>
<tr><td>Síntesis I</td><td></td><td>14,28%</td><td>14,28%</td></tr>
<tr><td>Síntesis II</td><td></td><td>1,3%</td><td colspan="2">1,3%</td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td>72,71%</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td>VSC2</td><td>25,64% (14,11%+11,53%)</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

De todo lo anterior concluimos que:

- Todos los alumnos de la M3 han superado en nivel técnico.

- La mitad de los alumnos que han realizado la PCN3 y que, por tanto, habían cursado previamente la asignatura de Didáctica de la Aritmética, no han superado el nivel de análisis.

- La mitad de los alumnos han superado este nivel y prácticamente se distribuyen por igual entre este nivel y el de síntesis I.

- El porcentaje de alumnos que han superado el nivel de síntesis II es equivalente al de las otras dos pruebas, por lo que podemos asegurar que cursar la asignatura de Didáctica de la Aritmética, ha aumentado significativamente los porcentajes de alumnos de los niveles de análisis y de síntesis I.

5.5.4 Análisis de homogeneidad de los ítems de la prueba PCN3

Para analizar la homogeneidad de los ítems y establecer un índice de validez de constructo del cuestionario PCN3, se han utilizado los coeficientes de homogeneidad (ρ_t, ρ_1, ρ_2 y ρ_3)[5] cuyos datos por bloque se incluyen en las *Tabla IV.5.7*, *IV.5.8 y IV.5.9* del Anexo IV.

Del análisis de los coeficientes de homogeneidad en el ***nivel técnico o de reproducción*** (*Tabla IV.5.7,* Anexo IV*)* se aprecia una dependencia funcional directa entre los resultados de los ítems considerados y los resultados parciales obtenidos. Asimismo, la comparación de los coeficientes de homogeneidad para dicho nivel arroja los siguientes resultados:

$\rho_t \geq \rho_i, \ \forall\, i \neq 1$

$\rho_t \leq \rho_i, \ i = 1,$

lo que pone de manifiesto el grado de homogeneidad y la pertinencia de la inclusión de estos ítems en el nivel de comprensión técnica o de reproducción.

Del mismo modo, el análisis de los coeficientes de homogeneidad total y parcial para los ítems del ***nivel de análisis*** que se incluyen en la *Tabla IV.5.8,* Anexo IV*,* pone de manifiesto que las mayores correlaciones corresponden al coeficiente ρ_2, el cual mide la correlación entre los resultados de los ítems considerados y los resultados parciales obtenidos, con la excepción del ítem II.N.11, en el que se aprecia una mayor correlación con los resultados del nivel de síntesis. Este hecho, unido a la dificultad del ítem, induce a pensar que se encontraría mejor situado en el nivel de síntesis, lo que, a pesar de todo, no podemos aceptar si tenemos en cuenta que las características epistemológicas de la tarea son las propias del nivel de análisis.

Por otra parte, cuando se comparan los coeficientes de homogeneidad total y parciales se aprecia que:

$\rho_t \geq \rho_i, \ \forall\, i \neq 2,$

$\rho_t \leq \rho_i, \ i = 2,$ salvo en el ítem II.N.11, donde se aprecia también mayor correlación con los resultados totales que con los del nivel de análisis. A pesar de ello, al igual que ocurre en las pruebas PCN1 y PCN2, los datos proporcionan una medida aceptable del grado de homogeneidad y la pertinencia de la inclusión de estos ítems en el nivel de análisis.

Por último, del análisis de los coeficientes de homogeneidad total y parcial para los ***niveles de síntesis,*** que se incluyen en la *Tabla IV.5.9,* Anexo IV*,* se aprecia que las mayores correlaciones corresponden al coeficiente ρ_3, el cual mide la correlación entre los resultados de los ítems considerados y los resultados parciales obtenidos en los niveles de síntesis. No obstante, hemos de indicar que la correlación entre las respuestas totales y las respuestas correspondientes a los ítems IIIC.17 y IIIC.25 es ligeramente superior a la correlación con las tareas de síntesis. Por otra parte, no se aprecian diferencias significativas entre los distintos coeficientes en el caso de la tarea III.II.A24.1, mientras que en la tarea III.II.A24.2 no se obtienen los valores de los coeficientes de homogeneidad debido al valor nulo de la desviación típica de este ítem.

Cuando se comparan los coeficientes de homogeneidad total y parciales se verifica:

$\rho_t \geq \rho_i, \ \forall\, i \neq 3$

---

[5] ρ_t = Coeficiente de correlación de Pearson entre el resultado obtenido en cada ítems y la puntuación global del cuestionario descontados los valores de éste.

ρ_i = Coeficiente de correlación de Pearson entre el resultado obtenido en cada ítems y la puntuación global del cuestionario en cada uno de los niveles estudiados descontados los valores de éste cuando el ítems corresponde al nivel i.

$\rho_t \leq \rho_i$, $i = 3$, salvo en los ítems señalados anteriormente. A pesar de estas alteraciones, al igual que ocurre en el caso de la PCN1 y la PCN2, obtenemos una muestra relativa del grado de homogeneidad y de la pertinencia de la inclusión de estos ítems en el nivel de síntesis.

El parámetro KR-20 de Kuder-Richardson**,** variante del coeficiente alpha de Cronbach para pruebas dicotómicas, que nos da información sobre la consistencia interna, la fiabilidad de instrumento y por tanto un índice de la estabilidad y la consistencia de las observaciones realizadas, para los ítems de la PCN3 y obtenido mediante la varianza de los ítems, toma como valor KR-20=0,68 índice con un valor netamente inferior a los obtenidos en las pruebas PCN1 y PCN2 y que sin duda está determinado por la influencia que la asignatura de Didáctica de la Aritmética ha podido producir sobre la comprensión que manifiestan los alumnos.

5.6 Análisis comparativo de los resultados de las pruebas PCN1 y PCN2: equivalencia y validez de las pruebas

Como se recordará, las pruebas PCN1 y PCN2 se encuentran estrechamente relacionadas al haberse obtenido la segunda de la primera mediante un proceso de análisis de la estructura y tareas de la prueba PCN1, un reajuste de dichas tareas en función del análisis anterior y de los resultados de su aplicación a la primera muestra y un ajuste al segundo modelo construido de acuerdo con el esquema operativo para la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático. Es evidente que la prueba PCN2 es aparentemente diferente a la prueba PCN1, tanto por su estructura interna como por el número de ítems y su distribución. Sin embargo, esta segunda prueba se ha construido con la pretensión de ser una versión más simple y depurada que la primera pero sin perder la finalidad, lo que se pretende medir, ni la estructura y el contenido de la valoración e interpretación, es decir, se ha construido con la intención de que sea equivalente a la anterior a los efectos de la investigación.

Para comprobar la equivalencia teórica supuesta hemos elegido una muestra M2, equivalente a la primera (M1), a la que hemos propuesto cumplimentar la prueba PCN2. Recordamos que las muestras M1 y M2 son distintas, aunque equivalentes en la medida en que proceden de la misma población en cuanto a las variables esenciales de la investigación. En el presente apartado nos proponemos comparar los resultados obtenidos con ambas pruebas y comprobar que las dos son equivalentes desde el punto de vista de la finalidad del estudio. Para ello hemos representado en la *Figura 5.22* los porcentajes de ***respuestas correctas*** emitidas en ambos cuestionarios, con la salvedad de que en la prueba PCN1, por razones obvias, se han eliminado los ítems que ya no figuran en la prueba PCN2.

En un examen directo de las dos gráficas se comprueba la existencia de altas coincidencias en las respuestas correctas a ambas pruebas con pequeñas diferencias en algunos de las tareas correspondientes al nivel técnico y en dos tareas de las del nivel de análisis en el caso de los algoritmos de la adición y multiplicación.

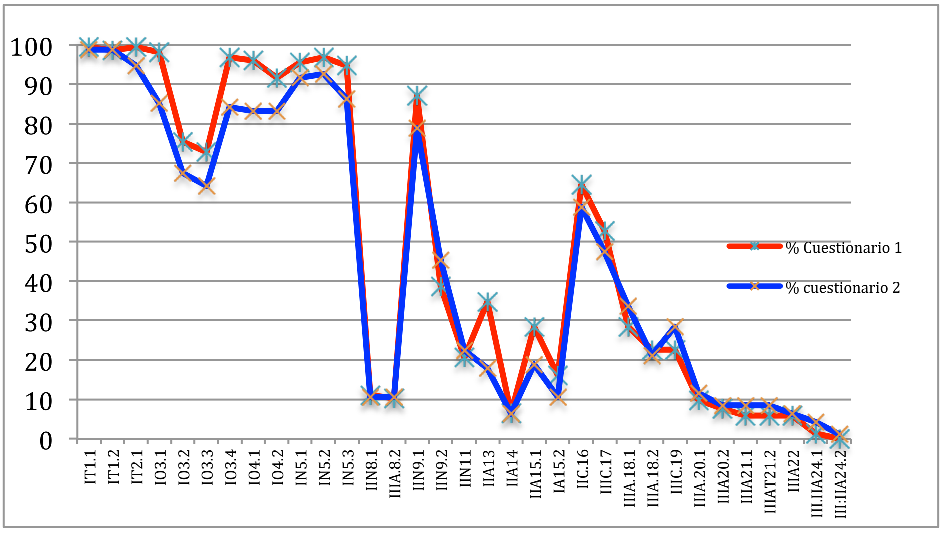


Figura 5.22 Porcentajes de respuestas correctas en PCN1 y PCN2

Para confirmar la coincidencia detectada gráficamente se ha realizado un contraste de hipótesis entre las diferencias de proporciones de respuestas correctas. Los resultado obtenidos se pueden consultar en la *Tabla IV.6.1* del Anexo IV, donde se aprecia, con un nivel de significación de 0,01, que no existen diferencias entre los porcentajes salvo en los cinco ítems siguientes: IO3.1, IO3.4, IO4.1 y IIA.13, en los que existen pequeñas diferencias.

Por otra parte, se han representado en la *Figura 5.23* los porcentajes de ***respuestas incorrectas*** en ambos cuestionarios previa eliminación de los ítems no repetidos. En dichas gráficas se aprecian asimismo coincidencias muy significativas, salvo pequeñas diferencias en algunas de las tareas correspondientes al nivel técnico, en dos de las del nivel de análisis, en el caso de los algoritmos de la adición y multiplicación, y en los ítems del nivel de síntesis I.

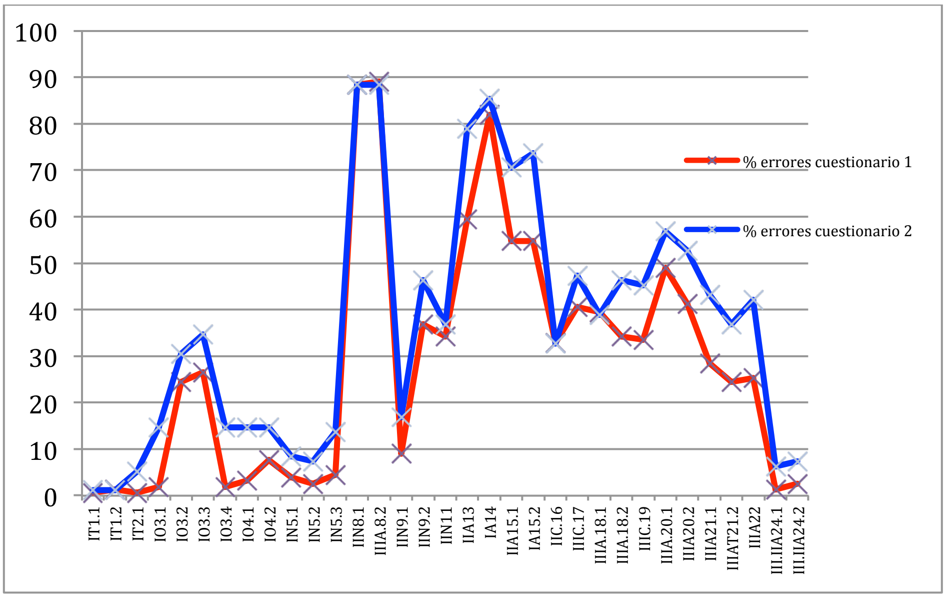


Figura 5.23 Porcentajes de respuestas incorrectas en PCN1 y PCN2

Para confirmar la buena coincidencia detectada gráficamente se ha realizado un contraste de hipótesis entre las diferencias de proporciones de respuestas incorrectas cuyos resultados se pueden consultar en la *Tabla IV.6.2* del Anexo IV. Como se puede observar en dicha tabla, los datos indican que, con un nivel de significación de 0,01, no existen diferencias entre los porcentajes de respuestas incorrectas salvo en las tareas IO3.1, IO3.4, IO4.1 y IIA.13 y en las cuestiones IIIC.17 y IIIA.22.

Del mismo modo se han representado en la *Figura 5.24* los porcentajes de ***respuestas en blanco o incompletas*** (SR) registradas en ambas pruebas, una vez descontados los ítems eliminados en la segunda prueba. De la simple comparación de dichas gráficas se deduce, al igual que en los casos anteriores, que se dan grandes coincidencias en los porcentajes correspondientes. Igualmente, como ocurre en las dos gráficas anteriores, se aprecian pequeñas diferencias en algunas tareas del nivel de análisis y en algunas tareas del nivel de síntesis I.

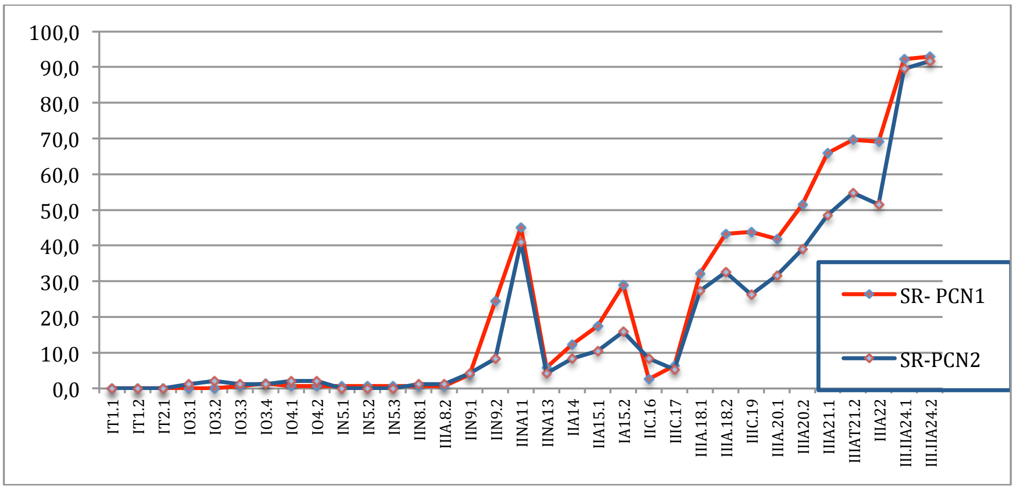


Figura 5.24 Gráficas de porcentajes SR en PCN1 y PCN2

Para confirmar las coincidencias detectadas gráficamente se ha realizado un contraste de hipótesis entre las diferencias de proporciones de respuestas en blanco cuyos resultados se pueden consultar en la *Tabla IV.6.3* del Anexo IV. Como se puede observar en dicha tabla, los datos indican que, con un nivel de significación de 0,01, no existen diferencias significativas en la mayoría de los ítems, salvo en los siguientes: IN9.2, IIC19 y IIIA21.1.

5.7 Análisis comparativo de los resultados de las tres pruebas: Efecto de la asignatura Didáctica de la Aritmética sobre la comprensión de los sistemas de numeración

Como se recordará, la tercera prueba (PCN3) se obtiene como resultado de un tercer nivel de revisión y profundización del modelo operativo y supone una nueva simplificación del instrumento de recogida de datos sin pérdida de detalles ni menoscabo de la potencialidad diagnóstica en el campo sometido a valoración. En este sentido, sostenemos la equivalencia de esta tercera prueba con las anteriores, si bien únicamente podemos asegurar la equivalencia de constructo (entre otros motivos se trata de una mayoría de tareas comunes con la prueba PCN2), dado que no se ha realizado la comprobación empírica que se ha llevado a cabo con las dos primeras pruebas para comprobar la validez concurrente de ambas.

En este caso hemos centrado la atención en la aplicación de la tercera prueba a una muestra nueva y distinta a las anteriores (M3) formada por sujetos que, además de reunir las condiciones de las muestras M1 y M2, han cursado una asignatura de Didáctica de la Aritmética. La suposición de partida o conjetura inicial es que estos sujetos deben haber adquirido una cierta formación adicional en los conocimientos y habilidades relacionados con el tema objeto de estudio que el resto de individuos de las otras muestras no tienen. Adicionalmente conjeturamos que esta formación específica ha mejorado el nivel de comprensión sobre el tema y que este mayor nivel de comprensión se debe poner de manifiesto ante la realización de las tareas que venimos considerando en las pruebas utilizadas en la investigación. Se completa así el trabajo descriptivo global propuesto comprobando que sujetos con una formación superior mejoran los resultados obtenidos en pruebas anteriores por sujetos que en las mismas condiciones no han accedido a dicha formación superior, lo que vendría a poner de manifiesto la validez y capacidad de discriminación del instrumento, proporcionaría información útil para averiguar el tamaño y potencialidad del efecto o proceso formativo y su incidencia sobre los diferentes aspectos de la comprensión y aportaría datos a favor de la pertinencia y efectividad del modelo operativo para interpretar y valorar la comprensión y dar pautas para mejorar el desarrollo didáctico orientado a su optimización.

Para realizar el análisis comparativo global de las tres categorías de respuestas consideradas en los tres cuestionarios PCN1, PCN2 y PCN3, una vez descontados los ítems que hemos eliminado de la primera y de la segunda pruebas y que no figuran en la tercera, se han representado gráficamente en las Figuras 5.25, 5.26 y 5.27 los polígonos de frecuencias relativas de los tres tipos de respuestas a cada una de dichas pruebas.

En las gráficas de la *Figura 5.21* se representan los polígonos de frecuencias de las ***respuestas correctas*** a las tres pruebas. En dicha figura se aprecian coincidencias en los niveles de reproducción y en los de síntesis II en las tres pruebas y diferencias importantes entre los resultados de las pruebas 1 y 2, por un lado, y los resultados de la prueba 3 por otro. En concreto, se puede observar una mejora importante en los niveles de análisis y de síntesis I en los resultados de la prueba PCN3 con respecto a los de las otras dos pruebas.

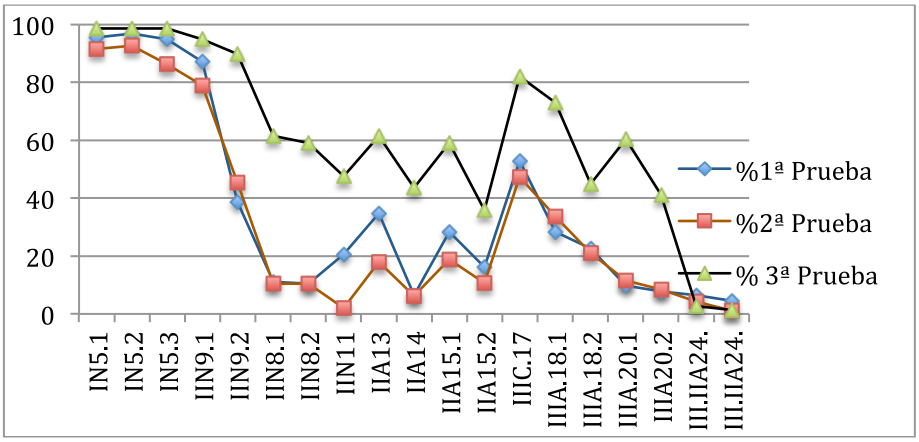


Figura 5.25 Porcentajes de respuestas correctas en PCN1, PCN2 y PCN3

Para confirmar las conclusiones anteriores, fruto de la mera observación de las gráficas, hemos realizado un contraste de hipótesis cuyos datos se presentan en la *Tabla IV.6.4* del Anexo IV. Como se puede apreciar examinando los datos, las Z empíricas obtenidas toman valores que nos permiten asegurar, con un nivel de significación del 0,01, que no existen diferencias estadísticamente significativas entre los porcentajes de respuestas correctas en las tareas de los niveles técnico (tareas IN) y de síntesis II (tareas III.II) mientras que las diferencias llegan a ser altamente significativas en los ítems correspondientes a los niveles de análisis (tareas IIN y IIA) y de síntesis I (tareas IIIA).

En las gráficas de la Figura 5.26 se representan los polígonos de frecuencias de las ***respuestas incorrectas*** de las tres pruebas realizadas. Un examen visual de dicha Figura muestra una disminución significativa de este tipo de respuestas en los tramos que corresponden a los niveles intermedios de análisis y síntesis I, una mejora pequeña en el primer tramo de comprensión técnica o de reproducción y, paradójicamente, un aumento importante en el último tramo de síntesis II. Este aumento puede estar relacionado con la disminución destacada de las respuestas en blanco (SR) y el consiguiente aumento de los intentos por responder a este tipo de cuestiones. Es evidente que el aumento de los intentos de respuestas se ha traducido en el aumento de errores y no en el aumento de los porcentajes de respuestas acertadas.

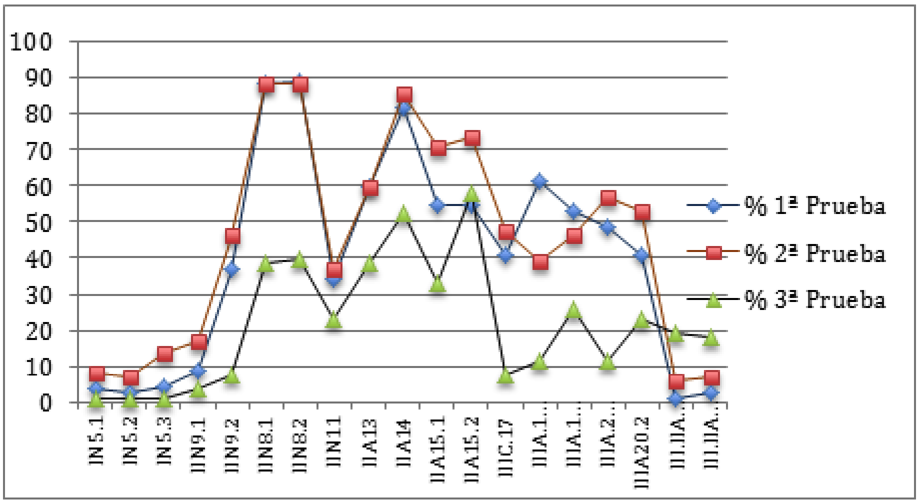


Figura 5.26 Porcentajes de respuestas incorrectas en PCN1, PCN2 y PCN3

Para confirmar las conclusiones anteriores, fruto de la mera observación de las gráficas, hemos realizado un contraste de hipótesis cuyos datos se presentan en la *Tabla IV.6.5* del Anexo IV**.** Los resultados evidencian que no existen diferencias significativas entre los niveles de reproducción y de síntesis II, mientras que se puede afirmar que sí existen diferencias entre los niveles de análisis y de síntesis I y que estas diferencias son significativas con un nivel de significación del 0,01.

Por último, en la Figura 5.27 se representan los polígonos de frecuencia relativas de las ***respuestas en blanco o SR*** en las tres pruebas analizadas. Como se observa en dichos gráficos, los porcentajes son similares en las tres pruebas, aunque los resultados de la PCN3 son levemente inferiores a los de las otras dos y atestiguan el aumento de errores en el nivel de síntesis II.

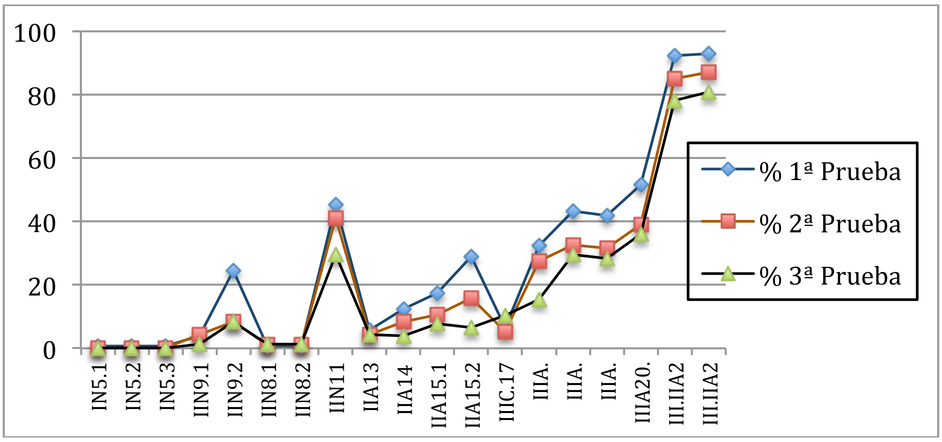


Figura 5.27 Porcentajes SR en PCN1, PCN2 y PCN3

Para confirmar las conclusiones anteriores hemos realizado un contraste de hipótesis sobre la diferencia de proporciones entre las SR de los cuestionarios PCN2 y PCN3 cuyos datos se presentan en la *Tabla IV.6.6* del Anexo IV. Los resultados confirman que no existen diferencias significativas entre los porcentajes de SR en todos los ítems de ambos cuestionarios con un nivel de significación de 0,01.

Por último, hemos realizado una correlación bilateral entre los resultados de las tres pruebas obteniéndose los datos que figuran en la *Tabla 5.9*. Del análisis de dichos datos se desprenden: 1) la elevada correlación entre las dos primeras pruebas, cercana a la dependencia funcional; 2) la menor correlación, aunque igualmente significativa, entre los resultados de la prueba PCN3 y los de las pruebas PCN1 y PCN2 por separado, lo que atestigua el efecto de la asignatura cursada sobre la comprensión de los sujetos.

Tabla 5.9 Correlaciones bilaterales entre las PCN1, PCN2 y PCN3

		PCN1	PCN2	PCN3
	Correlación de Pearson	1	0,981	0,821
PCN1	Sig. (bilateral)		0,000	0,000
	N	19	19	19
	Correlación de Pearson	0,981	1	0,842
PCN2	Sig. (bilateral)	0,000		0,000
	N	19	19	19
	Correlación de Pearson	0,821	0,842	1
PCN3	Sig. (bilateral)	0,000	0,000	
	N	19	19	19

5.8 Análisis comparativo por niveles de comprensión

En los apartados que siguen nos proponemos comparar los resultados obtenidos en las tres pruebas en términos de los niveles de comprensión alcanzados por los sujetos en cada prueba. Para ello utilizaremos los datos de las *Tablas 5.4, 5.5 y 5.6* obtenidas en los apartados 5.3.2, 5.4.2 y 5.5.2 de este capítulo, para representar gráficamente por intervalos los porcentajes de individuos que se sitúan en cada prueba en cada uno de los niveles de comprensión del modelo.

En lo que se refiere al nivel de ***comprensión técnica***, se aprecia en la *Figura 5.28* que en las pruebas PCN1 y PCN2 los alumnos se concentran en los intervalos superiores al 70%, mientras que en la PCN3 se concentran en el intervalo superior.

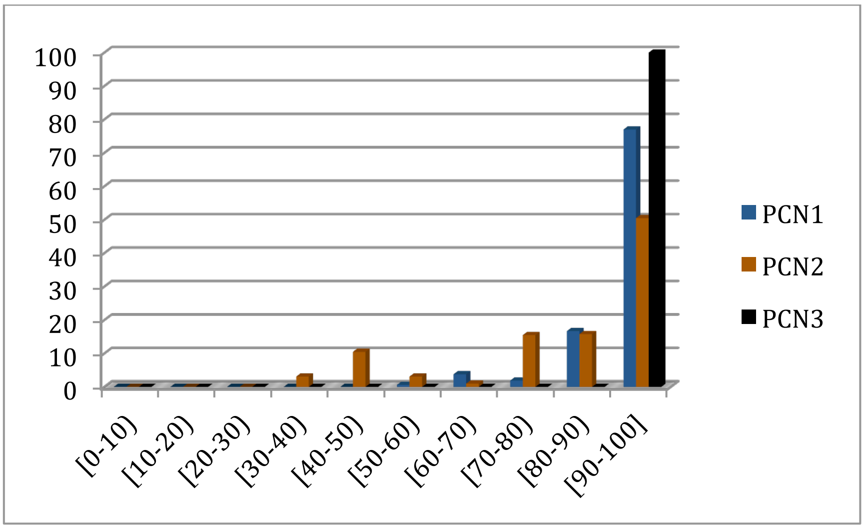


Figura 5.28 Distribución por intervalos de los porcentajes de sujetos en el nivel de comprensión técnica

Por otra parte, la *Tabla 5.10* registra los porcentajes de alumnos que sólo han superado el nivel técnico en las tres pruebas analizadas.

Tabla 5.10 Porcentaje de alumnos cuya comprensión no excede del nivel técnico

	PCN1	PCN2	PCN3
	84,1%	73 %	54,36%

En cuanto a la comprensión del ***nivel de análisis***, la *Figura 5.29* muestra un claro desplazamiento hacia los intervalos de mayores porcentaje en el caso de la prueba PCN3 respecto de las dos anteriores. Igualmente, mientras que en las dos primeras pruebas los resultados se concentran en los intervalos inferiores al 40%, en la PCN3 se concentran en los intervalos superiores al 50%.

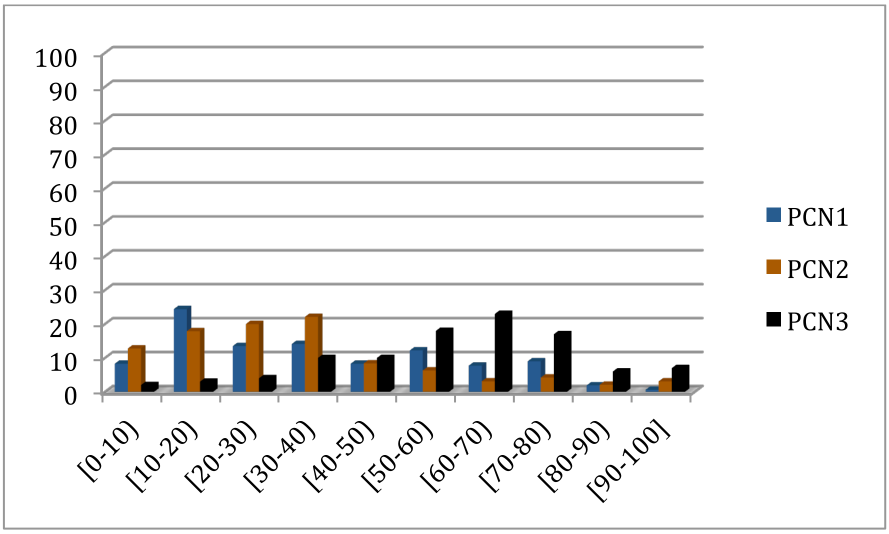


Figura 5.29 Distribución por intervalos de los porcentajes de sujetos en el nivel de comprensión de análisis

Igualmente, en la *Tabla 5.11* se señalan los porcentajes de alumnos que han superado el nivel de análisis en las tres pruebas.

Tabla 5.11 Porcentaje de alumnos que han superado el nivel de análisis

	PCN1	PCN2	PCN3
	7,2%	11%	18,18%([6])

En lo concerniente al nivel de síntesis I, la *Figura 5.30* pone en evidencia que mientras que en las PCN1 y PCN2 las muestras se encuentran situadas en los intervalos con porcentajes inferiores al 30%, en la PCN3 hay un claro desplazamiento hacia los intervalos superiores, aunque sin que se pueda hablar de concentración sino de dispersión entre los diferentes intervalos.

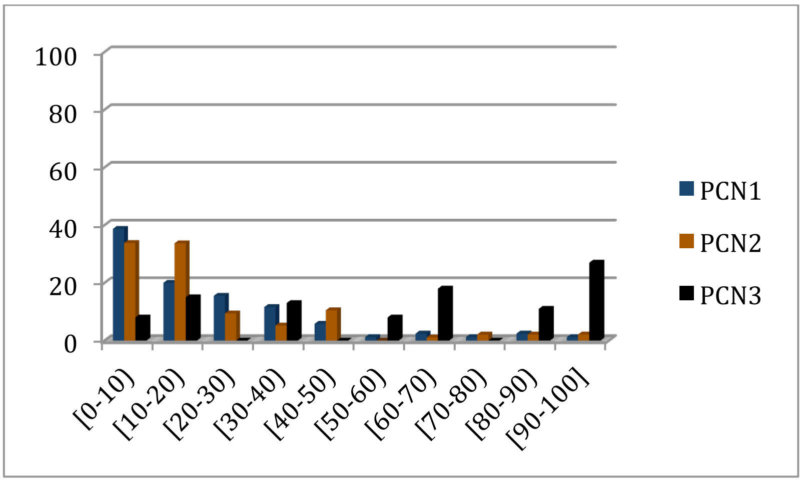


Figura 5.30 Distribución por intervalos de los porcentajes de sujetos en el nivel de comprensión síntesis I

Asimismo, se registran en la *Tabla 5.12* los porcentajes de alumnos que han superado el nivel de síntesis I en las tres pruebas analizadas, atendiendo a los CDN y una vez descontada la presencia de VSC2.

Tabla 5.12 Porcentaje de alumnos del nivel síntesis I en las tres pruebas

	PCN1	PCN2	PCN3
	2 %	6 %	14,28%([7])

Análogamente, el diagrama de barras de la *Figura 5.31* muestra que en todas las pruebas realizadas los alumnos se concentran en el intervalo con porcentajes inferiores al 10% con valores cercanos al 0, como se puede apreciar en el análisis puntual de los vectores de comprensión numérica de las tres pruebas realizadas.

[6] Habría que añadir los alumnos que con un porcentaje del 11,53% hemos considerado que se situarían entre los niveles de análisis y síntesis I, debido a las características de sus vectores singulares de comprensión.
[7] Habría que añadir los alumnos que con un porcentaje del 11,53% se sitúan entre los niveles de análisis y síntesis I debido a las características de sus vectores singulares de comprensión.

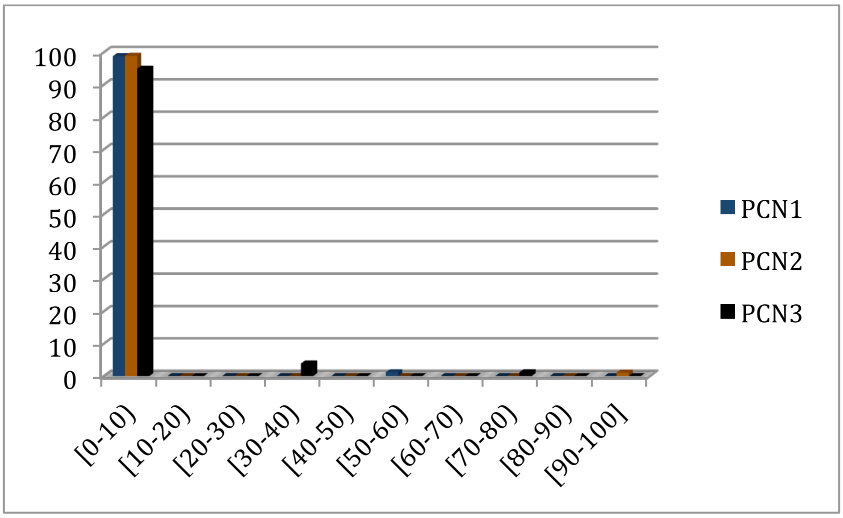


Figura 5.31 Distribución por intervalos de los porcentajes de sujetos en el nivel de comprensión de síntesis II

Por último, se recogen en la *Tabla 5.13* los porcentajes de alumnos que han superado los cuatro niveles epistemológicos estudiados en las tres pruebas analizadas.

Tabla 5.13 Porcentaje de alumnos del nivel de síntesis II

	PCN1	PCN2	PCN3
	0 %	1,1%	1,3 %

5.9 Conclusiones de la aproximación cognitiva global

Del estudio realizado sobre las respuestas a las pruebas escritas podemos destacar a modo de conclusión los siguientes resultados, que resumen lo analizado con mas extensión en los epígrafes de este capítulo.

5.9.1 Estudios descriptivos

Resultados de la prueba PCN1

✓ Tras un primer *análisis global* de las respuestas (ver apartado 5.3.1), concluimos que los alumnos que inician los estudios del grado de Educación Primaria:

- Obtienen buenos resultados en las tareas del nivel técnico (porcentajes de respuestas correctas cercanos al 90%) y porcentajes muy bajos en respuestas incorrectas y en blanco (SR).
- Los resultados son variables en los ítems de la categoría epistemológica de análisis: porcentajes bajos de respuestas correctas (inferiores al 30%), porcentajes intermedios (comprendidos entre el 30% y el 60%) y unos pocos ítems con mayoría de respuestas correctas (porcentajes superiores al 70%); paralelamente se aprecia un claro aumento de SR, sin constituir una categoría predominante, y se registran porcentajes de respuestas incorrectas que son complementarios a los respectivos de las respuestas correctas.
- En las tareas del nivel de síntesis se aprecian porcentajes muy bajos en la totalidad de los ítems y un aumento significativo y ascendente de SR y, por tanto, porcentajes también bajos de respuestas incorrectas.

✓ Teniendo en cuenta los *vectores de comprensión*, la distribución de sus cuatro componentes en deciles y la aplicación de los criterios sobre distribución de alumnos por niveles de comprensión, sin estimar el efecto que pudiera producir la posible presencia de vectores singulares, se observan los siguientes resultados (ver apartado 5.3.2):

- Más del 90% de los alumnos han superado el nivel técnico.
- Más del 70% han superado el nivel técnico pero no el de análisis.
- Algo más del 10% han superado los dos primeros niveles.
- Un 2% ha superado los primeros tres niveles (técnico, análisis y sintético I).
- Ningún alumno supera los cuatro niveles estudiados.

✓ El estudio de *vectores singulares* evidencia la ausencia de vectores VSC1 y VSC3 y la escasa presencia de vectores VSC2, por lo que se puede aceptar la hipótesis de monotonía y precisar las conclusiones anteriores en los siguientes términos (ver apartado 5.3.3):

- Aproximadamente un 5% de los alumnos no han superado el nivel técnico.
- El 85% de los alumnos ha superado el nivel técnico pero no el de análisis.
- El 8% ha superado el nivel técnico y el de análisis.
- El 2% de los alumnos de la muestra ha superado los niveles técnico, de análisis y el nivel síntesis I.
- Ningún alumno ha completado los cuatros primeros niveles epistemológicos.

✓ Los estudios sobre la *homogeneidad* de los ítems (ver epígrafe 5.3.4) señalan que, salvo excepciones, la mayores correlaciones se establecen entre cada uno de los ítems y los resultados parciales obtenidos en el nivel al que pertenecen, lo que avala, junto al valor del coeficiente KR-20, la consistencia interna del instrumento construido.

Resultados de la prueba PCN2

✓ Del *estudio global* de los resultados (ver apartado 5.4.1), concluimos:

- Las tareas del nivel técnico son resueltas correctamente de forma mayoritaria, de manera que los porcentajes de respuestas correctas superan el 80% en todos los ítems de este nivel, salvo para las cuestiones IO3.1 e IO3.2 en las que dichos porcentajes están comprendidos entre el 60% y el 70%. Por otra parte, las SR tienen valores inapreciables y las respuestas incorrectas tienen valores complementarios a las correctas.
- Los ítems de los niveles de análisis, salvo en las tareas IIN9.1 y IIC16 cuyos porcentajes en respuestas correctas superan el 50%, presentan porcentajes de respuestas correctas entre un 10% (comprensión de los algoritmos de la resta y la multiplicación) y un 20% (el resto). Así mismo, los porcentajes de SR en este nivel se sitúan cerca del 10% y las repuestas incorrectas (porcentajes cercanos al 70%) presentan valores complementarios a las correctas salvo en el caso de las tareas IIN9.1, IIN9.2, IIN11 7 IIC16 con valores inferiores al 50%;

- Las tareas de los niveles de síntesis tienen porcentajes de respuestas correctas cercanas al 10%, presentan un aumento significativo y ascendente de SR y porcentajes cercanos al 40% de respuestas incorrectas para el primer subnivel y casi inexistentes para el segundo.

✓ Teniendo en cuenta los *vectores de comprensión*, la distribución de sus cuatro componentes en deciles y la aplicación de los criterios sobre distribución de alumnos por niveles de comprensión, sin estimar el efecto que pudiera producir la posible presencia de vectores singulares, se obtienen los siguientes resultados (ver apartado 5.4.2):

- Más del 80% de los alumnos ha superado el nivel instrumental.
- Aproximadamente el 70% ha superado el nivel técnico o instrumental pero no los niveles de análisis.
- Ha superado ambos niveles algo más del 10% de los individuos.
- El 6% de los individuos ha superado los primeros tres niveles (técnico, análisis y sintético I).
- Un sólo alumno ha superado los cuatro niveles estudiados.

✓ El estudio de *vectores singulares* (ver apartado 5.4.3) evidencia la ausencia de vectores VSC1 y VSC3 y la presencia de tres vectores VSC2. En consecuencia se puede aceptar la hipótesis de monotonía y precisar las conclusiones del estudio anterior por componentes en los siguientes términos:

- Aproximadamente el 17% de los alumnos no ha superado el nivel técnico.
- El 73% de los alumnos ha superado el nivel técnico pero no el de análisis.
- El 4% ha superado el nivel técnico y de análisis.
- El 6% de los alumnos estudiados ha superado los niveles técnico, de análisis y de síntesis I.
- Un sólo alumno ha completado los cuatros primeros niveles epistemológicos del modelo.

✓ Los estudios sobre la *homogeneidad* de los ítems (ver apartado 5.4.4) señalan que, salvo excepciones, la mayores correlaciones se establecen entre cada uno de los ítems y los resultados parciales obtenidos en el nivel al que pertenecen, lo que junto al valor del coeficiente KR-20, avala la consistencia interna del instrumento construido.

Resultados de la prueba PCN3

✓ Del *estudio global* de los resultados (ver apartado 5.5.1), concluimos:

- Se aprecian porcentajes del 100% en las respuestas correctas a las tres tareas del nivel técnico y un porcentaje muy próximo al 100% en las tareas del primer bloque de análisis.
- En los restantes ítems de análisis los porcentajes de respuestas correctas fluctúan entre el 40% y el 60%, con valores muy reducidos de SR y un porcentaje de respuestas incorrectas complementario al de respuestas correctas.

- Las tareas del nivel de síntesis I tienen resultados semejantes a los obtenidos en el nivel de análisis, con la diferencia del mayor porcentaje de SR y por tanto menores porcentajes de respuestas incorrectas.
- Las dos tareas propuestas del nivel de síntesis II tienen porcentajes muy reducidos de respuestas correctas y altos porcentajes de SR.

✓ Del estudio de los *vectores de comprensión*, la distribución de sus cuatro componentes en deciles, la aplicación de los criterios sobre distribución de alumnos por niveles de comprensión y suponiendo la hipótesis de monotonía sin estimar el efecto que pudiera producir la posible presencia de vectores singulares, se obtienen los siguientes resultados (ver apartado 5.5.2):

- La totalidad de los alumnos de la muestra M3 ha superado el nivel técnico o instrumental;
- El 30% de los alumnos ha superado el nivel de análisis;
- Un 38% de los individuos ha superado el nivel de síntesis I y por tanto las dos anteriores.
- Un alumno supera el nivel de síntesis II y los cuatro anteriores.

✓ El estudio de *vectores singulares* (ver apartado 5.5.3) evidencia la ausencia de vectores VSC1. Sin embargo, en esta prueba se aprecia la existencia de un número importante de vectores VSC3 y sobre todo VSC2 (*Tabla 5.7*), lo que sin duda obliga a modificar la distribución de alumnos por niveles de comprensión efectuada en el apartado anterior. En la *Tabla 5.8* se presenta, asimismo, la distribución corregida por la presencia de vectores singulares, apreciándose los siguientes resultados:

- Todos los alumnos de la muestra han superado el nivel técnico o instrumental.
- La mitad de los alumnos que han realizado la PCN3 y que, por tanto, habían cursado previamente la asignatura Didáctica de la Aritmética, no han superado los niveles de análisis.
- La mitad de los alumnos han superado estos niveles y prácticamente se distribuyen por igual entre ellos y el nivel de síntesis I.
- El porcentaje de alumnos que han superado el nivel de síntesis II es equivalente al de las dos pruebas anteriores, por lo que podemos asegurar que cursar la asignatura de Didáctica de la Aritmética ha aumentado significativamente la comprensión correspondiente a los niveles de análisis y de síntesis I.

✓ Los estudios sobre la *homogeneidad* de los ítems (ver apartado 5.4.4) señalan que, salvo excepciones, la mayores correlaciones se establecen entre cada uno de los ítems y los resultados parciales obtenidos en el nivel al que pertenecen, lo que junto al valor del coeficiente KR-20, menor que el obtenido en las dos pruebas anteriores, avala la consistencia interna del instrumento construido.

5.9.2 Estudios comparativos

Equivalencia y validez de las pruebas PCN1 y PCN2.

✓ Las pruebas PCN1 y PCN2 son equivalentes tanto por construcción (se deducen de un mismo modelo y mantienen una mayoría de tareas básicas comunes) como por los resultados coincidentes al aplicarse sobre muestras equivalentes procedentes de la misma población. Dicha coincidencia se observa en los siguientes aspectos (ver apartado 5.6):

- En la comparación cualitativa de las gráficas obtenidas al representar los porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y SR (Figuras 5.22, 5.23 y 5.24) se comprueba la existencia de altas coincidencias.
- Los contrastes de hipótesis entre las diferencias de proporciones en las respuestas a las dos pruebas evidencian la inexistencia de diferencias significativas entre los resultados (*Tabla IV.6.3* del Anexo IV).
- La elevada correlación entre los resultados de las dos pruebas, cercana a la dependencia funcional (Tabla 5.9).
- En el estudio comparativo por niveles de comprensión (ver apartado 5.8, *Tablas 5.10, 5.11 y 5.12*), se aprecian mejores resultados para la PCN2 en cada uno de los niveles de comprensión pero las diferencias encontradas no son significativas.

Efecto de la asignatura Didáctica de la Aritmética.

✓ La aplicación de la Prueba PCN3, equivalente por construcción a las dos anteriores, pone de manifiesto la mejora en la comprensión de los sistemas de numeración en los alumnos que han cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética. Esta mejora se ha puesto de manifiesto en los niveles de análisis y síntesis I, no apreciándose diferencias para los niveles técnico y síntesis II; el primero ya saturado en las pruebas anteriores. A este respecto hemos de hacer las siguientes consideraciones:

- Las diferencias se aprecian visualmente en las gráficas de respuestas correctas, incorrectas y SR (*Figuras* 5.25, 5.26 y 5.27), en las que se observan porcentajes superiores de respuestas correctas en los niveles de análisis y síntesis I, porcentajes similares en las respuestas SR en las tres pruebas y porcentajes inferiores de respuestas incorrectas en la prueba PCN3 con respecto a las dos anteriores;
- Existen diferencias significativas en las respuestas a los ítems de los dos niveles intermedios de comprensión mencionados (*Tablas IV.6.4, IV.6.5 y IV.6.6* del Anexo IV);
- Existen diferencias significativas en las *correlaciones bilaterales* entre los resultados obtenidos en las tres pruebas, en las que se aprecia una menor correlación entre las dos primeras pruebas, y diferencias significativas entre los resultados de la PCN3 y los resultados de las dos primeras pruebas por separado (*Tabla 5.9*).
- En el estudio comparativo por *niveles de comprensión* (apartado 5.8, Tablas 5.10, 5.11 y 5.12), se aprecian mejores resultados en los porcentajes de alumnos incluidos en cada uno de los niveles de comprensión correspondientes a la prueba PCN3, sobre todo en los niveles de análisis y síntesis I.

5.9.3 Idoneidad del modelo local

✓ Se ha demostrado la potencialidad del modelo operativo global de referencia al posibilitar su concreción en el modelo local para la valoración de la comprensión de la numeración natural. La aplicación del análisis didáctico como método específico para la investigación en Educación Matemática y el análisis de las dimensiones fenómeno-epistemológicas del conocimiento en estudio, nos ha permitido categorizar las situaciones del campo de la numeración y justificar la elección de las tareas y cuestiones de los instrumentos de recogida de datos.

✓ El modelo operativo local, materializado en la categorización de las tareas y situaciones numéricas se ha demostrado idóneo para diseñar instrumentos adecuados para recabar información de los alumnos y acercarnos a la interpretación y valoración de la comprensión que tienen sobre los sistemas de representación del número natural.

✓ El análisis global de las respuestas a los cuestionarios aplicados, nos ha permitido conocer a modo de radiografía general, la situación de los alumnos que inician sus estudios de grado de educación Primaria.

5.9.4 Consistencia interna de los instrumentos

✓ La similitud en las respuestas de los dos primeros cuestionarios, que se manifiestan en los estudios gráficos, en los contrastes de hipótesis realizados y en el estudio de correlaciones, al producirse sobre muestras equivalentes, nos aseguran la fiabilidad del instrumento construido y la validez del modelo local en el que se apoya.

✓ Los coeficientes de homogeneidad muestran la consistencia interna de los cuestionarios al reflejar la mayor correlación existente entre los resultados obtenidos en cada uno de los ítems y los correspondientes a las categorías epistemológicas en que se sitúan.

✓ El concepto de vector de comprensión, los criterios para la determinación de niveles y los criterios para definir vectores singulares, han resultado adecuados para realizar una primera aproximación a la comprensión de los sistemas de numeración de los alumnos que inician sus estudios de grado.

5.9.5 Conclusiones generales

✓ Las distribuciones por niveles en las dos primeras pruebas aplicadas, aunque con algunos matices, podemos asegurar que presentan características similares. En ambos estudios el 90% de los alumnos responde con una comprensión de tipo técnico o instrumental y un pequeño porcentaje cercano al 10% presentan características propias de los niveles superiores.

✓ Del análisis conjunto de las respuestas de los alumnos que no han cursado ninguna asignatura de Matemáticas o de Didáctica de la Matemática, podemos concluir que la mayoría se encuentra entre los niveles de reproducción y en menor porcentaje en el de análisis. Muy pocos alumnos superan dichos niveles alcanzando el nivel de síntesis. Vale decir que los alumnos que inician los estudios del nuevo grado de Educación Primaria tienen un conocimiento reducido y eminentemente instrumental de la numeración natural, lo que nos lleva a considerar la necesidad de profundizar en la construcción y reconstrucción del conocimiento correspondiente para poder acometer con garantías la formación didáctica de los futuros docentes de esta carrera.

✓ El análisis global realizado en la PCN3 nos indica que la situación de los alumnos que han cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética se ha modificado significativamente en relación con la situación de los alumnos antes de cursar dicha asignatura. Así, se observa un aumento de los porcentaje de respuestas correctas en los niveles de análisis y síntesis I, manteniéndose los altos porcentajes en el nivel técnico y los porcentajes casi testimoniales en las tareas del nivel de síntesis II que se habían obtenidos en las dos anteriores. El análisis de la situación general muestra que la mitad de los alumnos se encuentra en los niveles de comprensión superiores, reduciéndose sustancialmente el porcentaje de alumnos que presentan un conocimiento meramente instrumental. Es obligado admitir que la asignatura consigue una de las competencias reflejadas en su programa, "Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas y aritméticas)". Y esto a pesar de que en la planificación de la asignatura no se manejaban los análisis y resultados del presente estudio. Esta será una línea que se abre para la continuación de nuestro trabajo de investigación.

✓ De acuerdo con los resultados obtenidos en la PCN3 y como consecuencia de los análisis realizados sobre la distribución de alumnos por niveles de comprensión así como sobre la presencia de vectores singulares, hemos observado un porcentaje significativo de alumnos que obtienen resultados satisfactorios en las tareas de síntesis I sin resolver las tareas del nivel de análisis. De aquí se puede concluir que mientras que la comprensión analítica, esto es el conocer el funcionamiento de la numeración decimal, provoca mejora en la capacidad para trasladar estos conocimientos a otros sistemas isomorfos, el conocimiento de técnicas o procedimientos sobre sistemas de numeración posicionales en bases distintas a la decimal, que se han podido producir en el desarrollo de la asignatura Didáctica de la Aritmética, no tiene por qué traducirse directamente en una mejora en la comprensión analítica de la numeración. Es evidente, por tanto, la necesidad de intentar evitar aprendizajes de "estrategias y procedimientos" aislados que reproducen un aprendizaje fundamentalmente instrumental sin ninguna relación y que no suponen ninguna mejora en la consecución del sentido numérico perseguido; una consecuencia que entendemos importante para mejorar el desarrollo futuro de la asignatura.

✓ De los análisis globales realizados se aprecia la necesidad de realizar un estudio puntual de naturaleza semiótica que nos permita interpretar y conocer los tipos de respuestas de los alumnos, conocer en profundidad los errores y las estrategias utilizadas en la resolución de las tareas propuestas y completar el conocimiento sobre el estado de comprensión de los alumnos; esto nos permitirá extraer consecuencias para la mejora del desarrollo de las asignaturas del Área de Didáctica de la Matemática.

CAPÍTULO 6

Primera aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria: análisis de respuestas, estrategias y errores en tareas escritas

6.1 Introducción

Entre los propósitos de la investigación, recogidos en los apartados 1.4 y 1.5 y resumidos en el apartado 5.1 de la memoria, se pretende averiguar la situación grupal real de la comprensión y el dominio de los conocimientos, procedimientos y destrezas que poseen y manifiestan, los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan los estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria sobre los sistemas de numeración. Con la investigación se pretende disponer de información contrastada que nos permita valorar y modificar de manera fundada el proceso formativo actual del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria en orden a su optimización.

La investigación consta de tres partes relacionadas: una primera basada en un estudio cognitivo global cuyos resultados se presentan en el capítulo 5, una segunda, consistente en la primera aproximación semiótica y hermenéutica al problema de investigación a través del análisis de las respuestas a las tareas escritas de los cuestionarios mencionados, que se describe en el presente capítulo, y una tercera, cualitativa y basada en entrevistas individuales, que se expone en el capítulo 7 de la memoria. La primera parte (capítulo 5) consiste en un estudio descriptivo de los resultados de la aplicación de tres pruebas escritas, PCN1, PCN2 y PCN3, construidas mediante un proceso reiterado de aplicación práctica del modelo que se describe en el capítulo 4 y de la revisión empírica y optimización de los instrumentos en un proceso en espiral con sucesivas aproximaciones. Como se puede comprobar en el capítulo 5, la atención se centra en el análisis puntual de las frecuencias absolutas y relativas de los tres tipos de respuestas (correctas, incorrectas y SR) en cada una de las tres pruebas mencionadas y en un estudio global, gráfico y correlacional de los resultados en cada una de las cuatro partes que corresponden a los niveles de comprensión del modelo local establecido. Así mismo, se ha realizado una comparación puntual y global entre las distintas pruebas y se ha establecido la distribución de los alumnos de la muestra por niveles de comprensión atendiendo a sus vectores de comprensión y a los criterios previamente definidos. Con todo ello se ha realizado una primera aproximación a la valoración del estado de la comprensión de los sistemas de numeración en las muestras analizadas y ha sido posible disponer de una visión global general de la situación cognitiva de este campo de conocimientos al iniciar el grado y de algunos indicios razonables sobre los avances que en este tema ha propiciado el desarrollo de la asignatura de Didáctica de la Aritmética, sin que ello haya sido el propósito de dicho estudio.

Pero la aproximación cognitiva global descrita sólo proporciona una información de patrones y comportamientos generales que, según el modelo utilizado (apartados 4.2 y 4.3), debe ser completada con información más fina resultante de análisis semióticos (significados de las respuestas, sintaxis, errores y estrategias, entre otros) y hermenéuticos (identificación de rastros de comprensión y usos del conocimiento, influencia de las características de los escenarios de valoración o la intervención de los sujetos en el propio proceso de valoración y la búsqueda del consentimiento del sujeto). Con ello, además de obtener nueva información sobre el problema y completar los datos cuantitativos con datos cualitativos, estaremos en condiciones de confirmar que los errores y las estrategias utilizadas al resolver tareas propias del campo analizado proporcionan información privilegiada sobre las limitaciones, dificultades y otras características de las capacidades, destrezas y maneras de razonar puntuales relacionadas con los sistemas de numeración (Hipótesis H3, apartado 1.4.3).

En consecuencia, con el propósito de atender las dimensiones semiótica y hermenéutica del modelo, procedemos a presentar en este capítulo el análisis puntual realizado sobre las respuestas escritas a los ítems de las tres pruebas, tratando de identificar y estudiar las estrategias utilizadas, los estilos de pensamiento y la tipología de errores cometidos, concluyendo con resultados específicos sobre la comprensión de los sistemas de numeración que se deducen del análisis realizado y que complementan los generales obtenidos en la fase anterior. Tratamos de efectuar una aproximación parcial y limitada que nos puede llevar en posteriores investigaciones a una visión más clara y completa del fenómeno en estudio. No obstante, podemos adelantar que el análisis que se expone en el presente capítulo proporciona información cualitativa que mejora sustancialmente la interpretación limitada del estudio cuantitativo que se expone en el capítulo 5. Al mismo tiempo, constituye una referencia para profundizar en la segunda aproximación semiótica y hermenéutica que se desarrolla en el capítulo 7.

En los apartados que siguen se incluye, por este orden, una descripción del marco teórico y metodológico que sustenta el estudio y justifica la necesidad y utilidad del mismo, incluyendo las categorías, conceptos y representaciones utilizadas, y el análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas a las pruebas escritas. Dicho análisis consta, a su vez, de tres partes que se exponen en el orden siguiente: la descripción ejemplificada extensa de los errores cometidos y las estrategias utilizadas en las tareas y grupos de tareas de las tres pruebas escritas, la revisión y categorización de los usos y rastros de comprensión identificados en dichas respuestas y las principales conclusiones que se deducen del estudio semiótico y hermenéutico puntual al conjunto de respuestas escritas analizadas. Por último, este análisis y sus conclusiones en términos de errores y estrategias encontradas constituye también una información básica para guiar el proceso de las entrevistas individuales que se presenta en el capítulo 7 y profundizar en la persistencia o no de los errores y en la solidez de las estrategias constatadas.

6.2 Primera aproximación al análisis semiótico y hermenéutico. Marco teórico y metodológico

Los resultados que se exponen en el capítulo 5 constituyen una primera aproximación global a la comprensión del grupo de sujetos que forman parte de las muestras utilizadas en el estudio. Pero la comprensión, como se refleja en el modelo que se expone en el capítulo 4, es un fenómeno complejo con numerosos matices que necesita de mucha más información que la que proporcionan las frecuencias de respuestas correctas y los datos muestrales de carácter global. Antes bien, reclama un proceso de acercamiento paulatino y cuidadoso en el que se ha de poner en juego la mayor cantidad de información posible que ha de ser estudiada desde múltiples puntos de vista y con todas las herramientas disponibles. Sólo mediante estudios cualitativos completos en los que se desmenucen los distintos aspectos del fenómeno y se empleen procedimientos diversos adecuados a la complejidad descrita, podremos matizar y completar los datos globales obtenidos hasta ahora y expresados en el capítulo 5.

En el presente apartado se establecen los principios, términos, fines y métodos que se van a utilizar para realizar la aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión implícita en las respuestas escritas a las tareas de las tres pruebas mencionadas. Después de la descripción de los propósitos del estudio, se amplía la noción de comprensión a los efectos de los análisis a realizar y se definen los distintos elementos a tener en cuenta para el desarrollo del estudio. El apartado concluye con la metodología utilizada y ciertas precisiones sobre la terminología y la presentación de resultados.

6.2.1 Interpretando la comprensión de un grupo de sujetos mediante el análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas a tareas escritas. Propósito del estudio

A lo largo del desarrollo de la investigación distinguimos tres niveles de información: cuantitativa de grupo, cualitativa de grupo y cualitativa individual. Los dos primeros, de los que se trata el segundo de ellos en el presente capítulo, se orientan a establecer, en general, los resultados muestrales o grupales de la investigación, mientras que el tercero, información obtenida mediante entrevistas individuales, se dirige a confirmar, rechazar o completar los resultados de los dos primeros niveles. Hablaremos, por tanto, de análisis de la compresión grupal o muestral para distinguir el enfoque de esta parte de la investigación del análisis de la compresión a nivel individual que se aborda, por medio de la entrevista dirigida, en el capítulo 7 de la memoria.

El propósito general del estudio en el segundo bloque es el de examinar a fondo las respuestas escritas a las tareas de las pruebas realizadas para obtener toda la información que nos permita mejorar/completar los resultados acerca de la comprensión de los sujetos de las muestras utilizadas sobre los sistemas de numeración. La finalidad última del estudio es la de establecer mecanismos que permitan conocer con detalle la situación de dicha comprensión en grupos de sujetos y poder intervenir con cierto fundamento en los procesos formativos correspondientes.

El centro de interés se desplaza ahora hacia los aspectos cualitativos comunes y mayoritarios, tanto desde el punto de vista cognitivo como semiótico y hermenéutico, que se pueden encontrar en las respuestas escritas mencionadas; es decir, lo que hay de común, en cuanto a respuestas, estrategias, errores, rastros de comprensión y usos del conocimiento, entre otros aspectos, a un grupo de sujetos con una formación similar, si bien esto no impide que se puedan detectar y estudiar casos singulares.

Desde un punto de vista más concreto se pretende:

1) Identificar las dificultades y limitaciones que se pueden deducir del examen de las respuestas escritas;
2) Delimitar los conocimientos, capacidades y destrezas responsables de los errores cometidos, bien en términos de carencias o limitaciones o bien en términos de conocimientos defectuosos o incompletos;
3) Encontrar rastros de comprensión comunes y singulares en las respuestas escritas;
4) Conocer los modos de razonamiento y clasificarlos para establecer tipos y estilos;
5) Identificar los tipos de usos mayoritarios y minoritarios del conocimiento;
6) Confirmar la situación de los individuos de la muestra en términos de niveles de comprensión;
7) Caracterizar con mayor precisión los niveles de comprensión y las categorías correspondientes;
8) Confirmar los efectos de la asignatura Didáctica de la Aritmética sobre la comprensión de los sistemas de numeración.

6.2.2 Elementos del análisis semiótico y hermenéutico de la comprensión en respuestas escritas

El concepto de comprensión que manifiesta o posee un sujeto sobre un conocimiento matemático en un momento determinado requiere de una aproximación que tenga en cuenta los diferentes aspectos implícitos en el fenómeno y que formulamos ahora en los siguientes términos:

> *Al hablar de la comprensión de un sujeto sobre un conocimiento matemático específico nos referimos a la situación o el estado (1) cognitivo, afectivo y ontogenético del sujeto en torno a dicho conocimiento que le capacita (2) para responder de manera competente (3) a tareas (4) cuya resolución matemática se manifiesta por medio de respuestas (5) errores y estrategias (6) que hacen posible la identificación de rastros de comprensión y usos (7) registrables e interpretables (8) del conocimiento matemático.*

Veamos con más detalle a lo que nos referimos con cada uno de los términos que se incluyen en la aproximación anterior.

(1) La situación o el **estado** del sujeto se refiere a los aspectos conceptuales (esquemas, conceptos, relaciones conceptuales, etc.), procedimentales o instrumentales (técnicas, destrezas, etc.) y afectivos y actitudinales (valores, emociones, etc.) así como a sus interrelaciones.

(2) La **capacidad de respuesta** se puede considerar como un tipo de potencialidad de actuación competente basada en el estado de los conocimientos, habilidades y destrezas del sujeto; es la posibilidad de que el sujeto actúe competentemente en una situación adecuada que requiera del uso de un conocimiento matemático. Esta capacidad de respuesta es la que se trata de “medir” con tareas específicas y mediante las categorías, niveles y tipos de análisis establecidos en el modelo local de comprensión construido a

partir de las características epistemológicas y fenomenológicas del conocimiento matemático; en nuestro caso, el modelo que se construye y se describe detalladamente en el capítulo 4 de la memoria.

(3) Los **niveles** de comprensión hacen referencia a los diferentes grados de evolución de las capacidades mencionadas en el apartado anterior. En el estudio vamos a considerar los siguientes niveles:

Reproducción / técnico
Análisis
Síntesis
Formal

(4) Las **tareas** que ponen a prueba la capacidad de respuesta del sujeto y, como consecuencia, el nivel o el estado de su comprensión, son diversas según:
- el escenario en el que se produce la interacción sujeto-tarea;
- la finalidad / intencionalidad de la interacción;
- el nivel establecido en el modelo en función de su contenido y dificultad. Una tarea de un nivel puede registrar la comprensión hasta ese nivel, es decir, en ese nivel de máxima dificultad de la tarea o en niveles anteriores. Las pruebas se han construido mediante tareas correspondientes a los distintos niveles como niveles de máxima dificultad. Las tareas serán exclusivas si sólo se pueden resolver empleando el conocimiento y las relaciones del nivel al que corresponda. En otros casos, las que se denominan tareas compartidas o no exclusivas, se podrán resolver con conocimientos e instrumentos de distintos niveles de comprensión.
- el tipo de respuesta.

(5) Las **respuestas** se pueden analizar en función de que sean directas o indirectas, observables o no observables, escritas o verbales, simples o elaboradas, en blanco o no, correctas e incorrectas, etc.

(6) El análisis de las respuestas a las distintas tareas permite identificar y registrar dos tipos de resultados elaborados observables: **errores**, que notaremos con la letra E, y **estrategias**, que notaremos con la letra A; en un apartado posterior se tratan extensamente ambos tipos de respuesta;

(7) El análisis de las respuestas, los errores y las estrategias permite identificar **rastros y niveles de comprensión** y **usos del conocimiento matemático** que hacen referencia a los tipos de contenido y a los grados de efectividad y oportunidad de las respuestas, entre otros aspectos. Vienen determinados por los niveles del modelo (3), las tareas (4), los tipos de respuesta (5) y los errores y las estrategias detectadas (6).

(8) Las respuestas de los sujetos a las tareas pueden ser **interpretables** desde los siguientes puntos de vista:

a) **cognitivo** general (tendencias, respuesta simple observable, niveles; comprensión macroscópica de grupo, limitaciones evidentes),

b) **semiótico** (análisis semántico y sintáctico de las respuestas, estrategias y errores, significados, destrezas, estilos);

c) **hermenéutico** (usos, rastros, acuerdos, convergencias y divergencias, etc.).

La interpretación de las respuestas es, por tanto, compleja. Sin embargo, la realización correcta de las tareas en cada caso se puede interpretar con las consideraciones generales de la tabla 6.1 matizadas teniendo en cuenta los cruces de las categorías epistemológicas y fenomenológicas que aparecen en las tablas 6.2 y 6.3.

Tabla 6.1 Tipos de tareas, usos del conocimiento y categorías epistemológicas de comprensión

Los usos del conocimiento se manifiestan en actividades de:	**que indican comprensión:**
Reproducción/utilización **técnica** o instrumental	técnica o instrumental
Análisis estructural y aplicado o funcional	analítica
Generalización y **Síntesis** estructural y funcional	sintética
Formalización/conceptualización	formal

6.2.3 Los errores y las estrategias en respuestas escritas

Una parte importante del estudio que configura la aproximación que se presenta se basa en los errores y las estrategias que subyacen en las respuestas escritas a las tareas de una prueba. Los primeros constituyen, como veremos, usos del conocimiento que dan como resultado respuestas incorrectas a la tarea. Las estrategias, por el contrario, tienen que ver con los procedimientos, tipos de razonamiento, estilos de resolución o métodos que emplea el sujeto para resolver correctamente la tarea. Veamos con más detalle las principales características de ambos tipos de respuesta que constituyen la principal fuente de información en la aproximación que nos ocupa en el presente capítulo.

6.2.3.1 Los errores

Los errores ponen de manifiesto las posibles limitaciones y dificultades (posibles rastros negativos de comprensión) o los conocimientos, capacidades y destrezas que tiene realmente el sujeto (rastros positivos de comprensión). En ambos casos, los errores serán interpretados, siempre que sea posible, en términos positivos como usos dados al conocimiento en alguna de las dos circunstancias siguientes:

a) un uso inadecuado / defectuoso / incorrecto de un conocimiento pertinente para resolver una situación; en estos casos se puede hablar de *intento de uso* de un conocimiento y en general no es posible asegurar nada sobre la comprensión del sujeto, que puede situarse en cualquiera de los niveles anteriores al que se corresponde con la situación analizada;

b) un uso correcto / adecuado de un conocimiento que es inadecuado / no pertinente para resolver una situación; en estos casos es posible identificar rastros de comprensión y utilizarlos para inferir alguna información acerca de la comprensión del sujeto;

En resumen, los errores son el resultado de un uso inadecuado del conocimiento o de la utilización de un conocimiento inadecuado y se pueden deber a influencias de situaciones cognitivas o a interferencias y relaciones de facetas previas. Su interpretación en términos de comprensión no siempre puede ser directa, siendo necesario utilizar un abanico de posibilidades para llegar a conclusiones plausibles. Para codificarlos utilizaremos la letra E seguida de la letras correspondientes en primer lugar al nivel epistemológico (T = técnico, A = analítico, S = sintético) y en segundo a la categoría fenomenológica (e = estructurar/organizar, r = representar/traducir, c = cuantificar/contar, o = ordenar/comparar y op = operar/algoritmo) (ver Tabla 6.3).

6.2.3.2 Las estrategias

Las estrategias constituyen procedimientos adecuados para resolver una situación. Son el resultado de un uso adecuado / correcto del conocimiento pertinente para resolver la situación y constituyen testigos de la comprensión y los tipos de pensamiento en juego por medio de piezas de información incluidas en las respuestas escritas a las que llamamos *rastros de comprensión*. Estos rastros de comprensión son indicadores de grados de dominio o de la calidad de la comprensión, a diferencia de los errores, que pueden indicar interferencias, predominio de estados inferiores al que corresponde a la resolución correcta o una situación inferior de la comprensión y dominio del conocimiento que el que corresponde a la tarea analizada. En algunos casos los errores también pueden proporcionar información sobre rastros de comprensión y usos del conocimiento.

Para codificar las estrategias correctas utilizaremos registros semejantes a los utilizados para los errores; así, utilizaremos la letra A seguida de la letras correspondientes en primer lugar al nivel epistemológico (T = técnico, A = analítico, S = sintético) y en segundo a la categoría fenomenológica (e = estructurar/organizar, r = representar/traducir, c = cuantificar/contar, o = ordenar/comparar y op = operar/algoritmo) (ver Tabla 6.2).

En esta fase de la investigación utilizaremos las siguientes categorías para los niveles y usos del conocimiento sobre los sistemas de numeración: reproducción o técnico, análisis, síntesis y formal, aunque esta última categoría se suprime del análisis por su práctica inexistencia en las respuestas y su nula influencia en los resultados. Estas categorías, matizadas con las categorías fenomenológicas, delimitan los niveles de comprensión que se utilizarán para caracterizar los resultados obtenidos (Tablas 6.2 y 6.3).

Tabla 6.2 Notación y distribución de los tipos de estrategias en relación con las categorías del modelo de comprensión

		CATEGORÍAS FENOMENOLÓGICAS				
		ESTRUCTURAR ORGANIZAR	REPRESENTAR TRADUCIR	CUANTIFICAR CONTAR	COMPARAR ORDENAR	COMBINAR OPERAR Algoritmos
CATEGORÍAS EPISTEMOLÓGICAS	TÉCNICA O REPRODUCCIÓN	**ATe**	**ATr**	**ATc**	**ATo**	**ATop**
	ANÁLISIS	**AAe**	**AAr**	**AAc**	**AAo**	**AAop**
	SÍNTESIS	**ASe**	**ASr**	**ASc**	**ASo**	**ASop**

Tabla 6.3 Notación y distribución de los tipos de errores en relación con las categorías del modelo de comprensión

		CATEGORÍAS FENOMENOLÓGICAS				
		ESTRUCTURAR ORGANIZAR	REPRESENTAR TRADUCIR	CUANTIFICAR CONTAR	COMPARAR ORDENAR	COMBINAR OPERAR Algoritmos
CATEGORÍAS EPISTEMOLÓGICAS	TÉCNICA O REPRODUCCIÓN	**ETe**	**ETr**	**ETc**	**ETo**	**ETop**
	ANÁLISIS	**EAe**	**EAr**	**EAc**	**EAo**	**EAop**
	SÍNTESIS	**ESe**	**ESr**	**ESc**	**ESo**	**ESop**

6.2.4 Metodología del análisis y presentación de resultados

El procedimiento general utilizado consiste en el examen directo y el registro de respuestas escritas, que se agrupan en las tres categorías descritas en los apartados 4.5.3, 4.6.3 y 4.7. El análisis de datos (cualitativo) se realiza estableciendo unos criterios de clasificación de respuestas y agrupando las respuestas similares bajo las categorías indicadas en las tablas 6.2 y 6.3. Las respuestas correctas se clasifican según la estrategia utilizada y las respuestas incorrectas se examinan detenidamente para identificar y categorizar el error o los errores cometidos.

La finalidad última del estudio es la de configurar una imagen más completa sobre los logros y limitaciones de los sujetos analizados, en términos de errores y estrategias mayoritarias en las respuestas a las tareas de las pruebas escritas, los usos dados al conocimiento sobre el campo estudiado y los rastros de comprensión encontrados. La culminación del análisis que se expone en los apartados que siguen consistirá en el resumen de los aspectos fundamentales detectados en cada una de las categorías que se indican en la tabla 6.4.

Tabla 6.4 Análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas a las pruebas escritas: Tabla de resultados

Prueba	Tarea	Nivel tarea	Respuestas	Error	Estrategia	Rastros de comprensión	Usos del conocimiento	Porcentajes

En lo que sigue nos proponemos, en primer lugar, exponer los principales resultados del análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas a las tareas comunes de las dos primeras pruebas. En este sentido, hemos tenido en cuenta que ambas pruebas se han aplicado a muestras equivalentes y arrojan resultados similares, por lo que creemos que tiene sentido que el análisis de las respuestas se haga conjuntamente. A continuación, realizamos el estudio de las respuestas a las tareas de la tercera prueba junto con un análisis de las semejanzas y diferencias encontradas en las respuestas a las tareas comunes a los dos bloques, el formado por las pruebas 1 y 2 y el correspondiente a la prueba 3. Para terminar el capítulo se presenta un resumen de los principales resultados y conclusiones del estudio realizado.

6.3 Análisis de las respuestas escritas a las tareas de las pruebas PCN1 y PCN2, errores y estrategias

Para organizar el análisis tendremos en cuenta las cuatro partes del modelo local inicial establecidas en el apartado 4.5 y 4.6 para la elaboración de las pruebas PCN1 y PCN2 pero agruparemos los resultados en los tres grandes bloques o categorías epistemológicas. Posteriormente organizaremos los resultados de acuerdo con los aspectos centrales del problema de investigación.

En primer lugar realizaremos una síntesis comentada de las principales estrategias utilizadas y los errores cometidos en ambas pruebas. Para ello, haremos un recorrido ordenado por cada uno de los bloques, grupos de pruebas y tareas individuales de cada bloque agrupadas en función de su estructura y finalidad. Con esta información, pasaremos, en segundo lugar, a indicar las principales conclusiones de este análisis e identificar, en su caso, los rastros de comprensión y los usos del conocimiento. Hemos de indicar que los análisis se realizan sobre todas las tareas, incluidas las que son suprimidas al realizar la configuración de las pruebas siguientes.

6.3.1 Respuestas, errores y estrategias en las tareas del nivel técnico o de reproducción (pruebas PCN1 y PCN2)

En las *Tablas 2.1.1* y *2.2* del anexo IV se incluyen las frecuencias absolutas y relativas de las respuestas a las tareas del nivel de reproducción de las pruebas PCN1 y PCN2. Como se aprecia en dichas tablas, se produce en ambas pruebas un alto porcentaje de aciertos y una ausencia notable de respuestas en blanco (SR), lo que nos conduce a afirmar que, salvo algún caso puntual, la mayoría de los alumnos encuestados responden de forma adecuada a las tareas de este primer bloque en ambas pruebas. De hecho, hay total coincidencia en los dos cuestionarios con un porcentaje cercano al 98% de respuestas correctas. Sólo en el caso de las tareas IO3.2 y IO3.3 los porcentajes de respuestas correctas son sensiblemente más bajos (cercanos al 70%). Así, en el caso de la tarea IO3.2, en la que se propone escribir "con letras" el siguiente al número ciento cuatro mil noventa y nueve, se identifica para la PCN1 la siguiente respuesta con la frecuencia que se indica:
- 35 alumnos contestan: "**ciento cinco mil**".

Así mismo, en la tarea IO3.3, en la que se pide el número anterior al ciento diez mil, encontramos las siguientes respuestas erróneas:
- 25 alumnos dan como respuesta: "**ciento once mil**"; sin duda responden al siguiente y no al anterior continuando con lo solicitado en el ítem previo.
- 5 alumnos responden: "**ciento nueve mil noventa y nueve**".
- 4 alumnos responden: "**ciento noventa y nueve mil**".

En todos estos casos, cuando para expresar el número anterior y/o el siguiente a un número dado es obligado modificar el estado de los distintos órdenes, aparece el error que codificamos:

ETr.1: *No considerar la presencia de ceros, tanto sintácticos como léxicos, para obtener el anterior o el siguiente en el sistema "verbal"*

También encontramos alumnos que contestan de forma adecuada a ambos ítems, aunque utilizando la siguiente estrategia que revela una cierta inseguridad en el dominio y comprensión del sistema verbal y una mayor confianza en el sistema cifrado:

ATr.1: *Traducir la expresión verbal a expresión con cifras para poder responder a las cuestiones planteadas*

Las características del modelo utilizado permiten asegurar que la mayoría de los sujetos hacen un uso técnico o de reproducción de los sistemas de numeración, habiendo respuestas que indican limitaciones para asegurar el dominio completo de este nivel básico en la comprensión del conocimiento analizado.

6.3.2 Errores y estrategias en las tareas del nivel Análisis (pruebas PCN1 y PCN2)

En las *Tablas 2.1.2 y 2.2* del Anexo IV se presentan los resultados de las respuestas a las tareas correspondientes al nivel de análisis, las cuales involucran conocimientos del sistema de numeración que van más allá del dominio y comprensión meramente técnico o de reproducción y que, a efectos de presentación de resultados, hemos situado en dos subcategorías epistemológicas complementarias: la que denominamos análisis 1 o estructural y análisis funcional o de aplicación a los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales. Dadas las diferencias existentes en las categorías consideradas en este bloque, realizaremos un análisis particular de cada una de ellas.

6.3.2.1 Respuestas, estrategias y errores en el nivel Análisis estructural (PCN1 y PCN2): Tipos, descripción y ejemplos

Analizaremos por separado los grupos de tareas de este bloque, las que corresponden a los números 7, 8, 9, 10, 11 y 12. Para el análisis agruparemos las que presentan similitud o conducen a errores similares, como es el caso de las tareas 7 y 9, por un lado, las tareas 8, 10 y 11, por otro, y las tareas 12.1 y 12.2 como tercer grupo.

Ítems 7.1 , 7.2, 9.1 y 9.2

A la cuestión planteada en la tarea IITN7.1 (Anexo III), orientada a comprobar el dominio del principio multiplicativo del sistema de numeración "hablado" y la necesidad de realizar transferencias de órdenes para poder traducir al cifrado de carácter posicional; hemos de señalar que en el PCN1, 22 alumnos han dado respuestas del tipo: "no se puede", "no existe", "son cantidades inventadas" o "está mal expresado", las cuales no se han contabilizado entre las respuestas erróneas debido a que la sintaxis utilizada no es la "usual" del sistema. Entre las respuestas consideradas erróneas destacamos:

- 78 alumnos(as) contestan: "**11.111"**, lo que supone más del 50% del total y un 66% de las respuestas consideradas erróneas. Codificamos este error como:

EAr.1: *Traducir del sistema verbal al cifrado escribiendo las cifras presentes en la expresión verbal sin tener en cuenta las necesarias trasformaciones de órdenes.*

- 30 alumnos(as), alrededor del 14%, responden: "**11000110011**" o "**11011011**", en la que se yuxtaponen las cantidades presentes. Codificamos a este error como:

EAr.2: *Construir el numero mediante la yuxtaposición de las cantidades expresadas en el sistema verbal.*

En relación con la tarea IITN7.2, aunque el porcentaje de aciertos es muy superior al de la tarea IITN7.1, existen respuestas semejantes que cuestionan la estructura sintáctica de las cantidades expresadas; así, por ejemplo, encontramos 9 respuestas con expresiones del tipo: "son cantidades inventadas", "no existen" o "está mal expresada".

En cuanto a las tareas IITN9.1 y IITN9.2 se registran resultados similares en ambas pruebas. Así, en la prueba PCN1, la primera es respondida correctamente por el 87,1% de sujetos y la segunda por el 38,7%, siendo también muy superior el número de alumnos que la dejan sin contestar. Entre las respuestas erróneas encontramos 22 alumnos que responden de forma similar cometiendo el mismo error de yuxtaposición ***EAr.2***.

Ítems 8.1, 8.2, 10 y 11

En las tareas IIN8.1 y IIN8.2 es muy reducido el porcentaje de sujetos que diferencian entre la cifra correspondiente a un determinado orden en un número de la cantidad de unidades de dicho orden contenidas en el número. En el otro extremo, algunos sujetos aseguran que, por ejemplo, en el número 8.234 existen 82,34 centenas y en el número 210.004 hay 21,0004 decenas de millar. Entre las respuestas consideradas erróneas destacamos la confusión entre el número de centenas o el de decenas de millar y las cifras de las centenas o la de las decenas de millar, respectivamente; se trata de un error que se presenta en 118 pruebas que corresponden al 76% del total y al 85% de las respuestas erróneas. Este tipo de error, que situamos en la categoría de error de análisis estructural (EAe), también es frecuente en la tarea IIN11 y con resultados similares en ambas pruebas, en las que grupos de alumnos de tamaño similar consideran como cifra de las centenas las 16 centenas que contiene el número, respondiendo que el número de lotería es el 1698 (ver tarea apartado A3.2 del Anexo III). Registramos este tipo de error de la siguiente forma:

EAe.1: *Confundir la cantidad de unidades de un orden contenidas en un número, con la cifra que ocupa el lugar de dicho orden en la expresión del número*.

Por su parte, la tarea IIN10 tiene un número considerable de respuestas erróneas, como por ejemplo confundir 10 decenas con 10 unidades o con 1 decena, que agrupamos bajo el tipo de error:

EAe.2: *Relacionar incorrectamente los órdenes de unidades entre sí.*

Por otra parte, en la prueba PCN2 aparece una nueva respuesta errónea variante de las anteriores:

EAe.3: *Confundir la cantidad de unidades de un orden contenidas en un número con la cantidad de unidades que resultan de la expresión* $c_n \cdot 10^n$*, donde* c_n *es la cifra del orden correspondiente*.

En esta última categoría encontramos sujetos que responden “200” cuando se les pregunta por el número de centenas del número 8.234 ó “10.000” para referirse al número de decenas de millar del número 210.004. La frecuencia de este error es significativa y supone un 25% del total de los sujetos.

ítems 12.1 y 12.2

Las tareas IIO12.1 y IIO12.2 presentan bajos porcentajes de respuestas correctas, aunque por los resultados podemos considerar más difícil la tarea 12.2 que la 12.1, quizás debido a que en la segunda aparecen órdenes más altos y cantidades de dos cifras para cada uno de ellos. Encontramos también 6 respuestas en el ítem 12.1 y 15 en el 12.2 yuxtaponiendo los diferentes órdenes para obtener resultados del tipo: 130.041 o 1341 para la primera y 10.000.024, 10.000.250 ó 10.000.249 para el ítem 12.2 (error EAr.2).

6.3.2.2 Respuestas, errores y estrategias en las tareas del nivel de análisis funcional o de aplicación en los algoritmos de las operaciones elementales (PCN1 y PCN2): Tipos, descripción y ejemplos.

En la *Tablas 2.1.3 y 2.2* del Anexo IV se detallan las frecuencias y porcentajes de respuestas a las tareas correspondientes a la subcategoría fenomenológica del modelo centrada en el empleo funcional de la estructura y propiedades de los sistemas de numeración en los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales. Como en el caso anterior procederemos a realizar un análisis detallado por cada una de las tareas y grupos de tareas.

Ítems 13.1, 13.2, 15.1, 15.2 (PCN1) y 13 y 15 (PCN2)

Hemos realizado un análisis conjunto de los ítems, encontrando que el porcentaje de respuestas correctas en estas tareas es netamente superior al presentado en la investigación de Salinas, M.J. (2007). Por otra parte, se han identificado los siguientes tipos de errores, que concuerdan con los detectados en el estudio de la mencionada autora:

EAop.1: *Aplicación mecánica del algoritmo*

Es un error que manifiesta una comprensión técnica y se detecta en respuestas como las siguientes a las tareas A13.1 y A13.2:
- *Como 8+7= son 15, el 1 de la suma del 15, me llevo 1 unidad* (C-2).
- *El uno que me he llevado anteriormente de haber sumado 8+7=15* (C-3)
- *Sumo 1 a la operación, porque el resultado de la anterior es 15(me llevo 1)* (C-10).

EAop.2: *Considera decenas en todas las llevadas*

Igualmente es un error que induce a asignar una comprensión técnica y que aparece en respuestas a las tareas A15.1 y A15.2 como las siguientes:
- *Nos llevamos una, puesto que 8+7 son 15, al ser un número de más de una cifra, nos llevamos el número de decenas y se lo sumamos a la siguiente* (Respuesta para el ítems IIA13.1). *Sucede lo mismo que en la situación anterior solo que el resultado en lugar de ser 15 es 11* (Respuesta para el ítems IIA13.2). (C-13)
- *Pues lo mismo que antes, hemos superado la decena por lo tanto ese número se pasa a la siguiente suma* (Respuesta para el ítems IIA13.2)(C-15).
- *El (1) en (b) constituye las decenas del número 12, obtenido anteriormente de la suma 6+5= 11+1 que me llevaba de haber sumado 8+7* (Repuesta a 13.2) (C-98)

La nueva redacción de las cuestiones relacionadas con la justificación de los algoritmos de las operaciones elementales ha modificado de forma significativa las respuestas en la prueba PCN2. Así, respuestas como: "*el 1 que me llevo son las decenas formadas*" ó "*son decenas*", que en la prueba PCN1 considerábamos válidas y que podrían encubrir un error indetectable imputable a la estructura de la pregunta, en ésta segunda prueba sí ha sido posible discriminar las respuestas al centrar la pregunta en las llevadas del orden de las centenas, lo que ha hecho posible identificar las respuestas que consideran que las llevadas en cualquier orden, suponen las decenas formadas.

Ítems 14.1,14.2 y 15.3

Al igual que en el caso anterior creemos que el análisis conjunto de ambos ítems nos permitirá apreciar mejor los errores, las limitaciones y el nivel de comprensión en el caso del algoritmo de la resta. Las respuestas correctas son, en este caso, sensiblemente inferiores a las del algoritmo de la adición, lo que confirma, por otra parte, los resultados de la investigación de Salinas, M.J. (2007) donde los porcentajes de respuestas correctas suponen una quinta parte de las incorrectas.

En cuanto a errores identificados volvemos a encontrar en estas tareas el error ***EAop.1*** en respuestas como las siguientes:

- *Porque el número de arriba es más pequeño que el de abajo (*Respuesta a 14.1). *Porque se lleva uno de la resta de los anteriores* (Respuesta a 14.2) (C-53)
- *Porque al añadirle valor adicional a ese 2 nos condiciona, en la siguiente debe sumarle 1* (Respuesta a 14.2) (C-155);

Encontramos también un nuevo error que definimos y codificamos de la siguiente forma:

EAop.3: *Intento de justificar la decena que se toma, pero sin entender el mecanismo asociado a la devolución de las decenas del sustraendo.*

Como máximo se puede asignar aquí una comprensión técnica, que se pone de manifiesto en respuestas como las siguientes:

- *Porque el número de arriba debe ser mayor, porque de lo contrario saldría negativo, entonces consideramos que el 2 es un 12 y que el 1 está en las decenas.* (Respuesta a

14.1) *Porque al llegar a 12, te llevas ese 1 que es una decena, que tienes que sumar en las decenas, pero en la fila de abajo*.(Respuesta a 14.2) (C-71)
- *Porque al ser más pequeño que el 6 le sumo 10 y me llevo 1* (Respuesta a 14.1). *Porque estás sumando la decena que se le puso al 2 para poder hacer la resta* (Respuesta a 14.2) (C-80)

El porcentaje de respuestas correctas para la tarea 14.1 en la prueba PCN2 (6,3%) es prácticamente el mismo que el encontrado en la primera prueba, manteniéndose la presencia de los errores ***EAop.1*** y ***EAop.3*** con porcentajes similares a los encontrados en la primera.

Por otra parte, en la tarea IIA15.3 hemos detectado dos justificaciones correctas o estrategias relacionadas con la aplicación a operaciones aritméticas (AAop) en la prueba PCN1:

AAop.1: *Referencia directa o indirecta a la propiedad distributiva*

Que constituyen indicios de comprensión analítica y se detecta en respuestas como las siguientes:

- *Porque estamos multiplicando por 26 (20+6) así que, por la propiedad distributiva, multiplicando por 6 y luego por 20 y sumamos resultados (el espacio vacío corresponde a un "0")*. (C-11)
- *Desplazamos una posición a la izquierda asumiendo que el 2 corresponde a las decenas, por lo que es como si multiplicáramos por 20*. (C-92)

Identificamos también un segundo tipo de respuesta que, aunque incompleta, demuestran cierta comprensión de nivel analítico funcional:

AAop.2: *"Al multiplicar por decenas el resultado son decenas"*

Se detecta en respuestas como las siguientes:

- *Porque estamos multiplicando unidades por decenas, entonces el resultado nos dará decenas*. (C-54)
- *Porque el segundo número con el que multiplicamos, es decir, el "2" corresponde a las decenas por lo tanto hay que colocar el resultado a partir de las decenas*. (C-126)

Entre las respuestas que hemos considerado incorrectas en esta tarea, vuelve a aparecer el error ***EAop.1*** ya indicado, que se manifiesta en respuestas como las siguientes:

- *Porque cuando son multiplicaciones de dos cifras, ejemplo: 26 cuando empiezo a multiplicar con el dos me muevo un espacio* (C-67)
- *Porque es el segundo numero que se multiplica, para que después en la suma es resultado sea correcto*.(C-122)
- *Porque el que se multiplica ahora son las decenas y se corre un lugar* (C-80)
- *Porque en la 1ª fila está el resultado del primer número por el que se ha multiplicado (6), en la segunda la del 2. El 6 va bajo el 4 porque ocupa el lugar de las decenas.* (C-34)

Y un nuevo error que codificamos:

EAop.4: *Aceptación del mecanismo*:

Que es un indicio de uso técnico puro y se detecta en respuestas como las siguientes:

- *Porque el método lo dice así*. (C-155)
- *No lo sé, me enseñaron eso cuando iba al colegio pero nunca supe el motivo* (C-66).

Por su parte, en la prueba PCN2 los errores cometidos en los ítems del algoritmo de la multiplicación son similares a los del algoritmo de la suma y se mantiene el bajo porcentaje de respuestas correctas con las tres estrategias observadas en la primera prueba. Por otra parte hemos constatado que 10 alumnos (10,5%) responden correctamente utilizando las estrategias AAop.1 y AAop.2. Aumenta al 15,8% los alumnos que no contestan y constituyen el 48,4 % los que comenten el error EAop.1. Por tanto siguen apareciendo los errores EAop.1 y EAop.2, aunque aumenta el porcentaje de este último por las razones expuestas anteriormente y vuelve a aparecer, aunque con menor frecuencia, el error EAop.4.

6.3.2.3 Conclusiones (nivel análisis, pruebas PCN1 y PCN2)

Las tareas de análisis relacionadas con la estructura y propiedades de los sistemas de numeración han puesto de manifiesto las numerosas lagunas y limitaciones existentes en este primer bloque en el que la comprensión se manifiesta claramente insuficiente y mayoritariamente reducida al nivel de comprensión técnica o de reproducción.

En el subnivel de análisis estructural se observan *errores* que podemos categorizar como:

- o Errores de comprensión analítica de representación o de traducción (tareas 7 y 9):
  - Traducción (EAr.1 y EAr.2) cometidos respectivamente por el 50% y el 14 % de los sujetos, de los que podemos decir que como máximo hacen un uso técnico del sistema de numeración.
- o Errores de comprensión analítica estructural (tareas 8, 10 y 11):
  - Unidades y relaciones entre ellas (EAe.1 (76%), EAe.2 y EAe.3 (25%)), que indican un uso técnico mayoritario

En el subnivel de análisis funcional o de aplicación funcional de los sistemas de numeración en los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales:

- o Errores de comprensión analítica funcional en las tareas 13, 14 y 15 de las pruebas 1 y 2:
  - EAop.1 (48,4%): "aplicación mecánica del algoritmo"
  - EAop.2 (menor 5%): "decenas en todas las llevadas"
  - EAop.3 (menor 5%): "transferencia de decenas minuendo-sustraendo";
  - EAop.4 (menor 5%): "aceptación acrítica del mecanismo de las llevadas";
  - En todos los casos se identifica un uso técnico del sistema de numeración.
- o Estrategias de análisis funcional:
  - AAop.1 (10,5%): identificación de la propiedad distributiva. Rastro de comprensión y uso analítico funcional;

- AAop.2 (menos 5%): “la multiplicación por decenas da decenas”. Uso analítico funcional

La *Tabla 6.5* sintetiza los resultados obtenidos en este bloque del estudio.

Tabla 6.5 Análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas a las pruebas escritas PCN1 y PCN2: Tabla de resultados del nivel de análisis

Prueba	Tareas	Nivel tarea	Error	Estrategia	Rastros de comprensión	Usos del conocimiento	Porcentajes
1 y 2	7 y 9	Análisis representación /traducción	EAr.1		-	Técnico/repr.	50%
			EAr.2		-	Técnico/repr.	14%
	8,10, 11	Análisis estructura	EAe.1			Técnico/repr.	76%
			EAe.2			Técnico/repr.	
			EAe.3			Técnico/repr.	25%
	13, 14 y 15	Análisis funcional	EAop.1			Técnico/repr.	48,4%
			EAop.2			Técnico/repr.	Menor 5%
			EAop.3			Técnico/repr.	Menor 5%
			EAop.4			Técnico/repr.	Menor 5%
				AAop.1	Analítica funcional	Analítico funcional	10,5%
				AAop.2	Analítica funcional	Analítico funcional	Menor 5%

6.3.3 Respuestas, errores y estrategias en el nivel de Síntesis (pruebas PCN1 y PCN2)

En las *Tablas 2.1.4 y 2.2* del Anexo IV, se incluyen las frecuencias y los porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y SR correspondientes a la cuarta parte del cuestionario. El propósito de las tareas de esta parte es valorar la posibilidad de ampliar las ideas y estrategias construidas en nuestro sistema de numeración a nuevas situaciones contextualizadas, lo que nos dará una prueba de la fortaleza con la que se han adquirido estos conocimientos numéricos. Dividiremos la exposición en dos bloques: las tareas que corresponden al grupo que hemos llamado “síntesis estructural”, en las que se trata de generalizar las propiedades, estructuras básicas y organización del sistema de base 10 a otros sistemas, y el grupo “síntesis funcional” o de generalización de la aplicación del sistema de base diez a los algoritmos elementales a la aplicación de otros sistemas en bases distintas a 10 a los algoritmos correspondientes.

Como veremos más adelante, la inclusión en el currículum de formación de maestros de los sistemas de numeración en bases distintas a 10, opera en algunos alumnos de forma negativa para resolver algunas de las cuestiones planteadas, ya que intentan recuperar-recordar estrategias memorizadas en dicho proceso didáctico sin comprensión, resultando técnicas totalmente desafortunadas.

6.3.3.1 Tipos, descripción y ejemplos (nivel síntesis I o estructural, pruebas PCN1 y PCN2)

Analizaremos las respuestas a las tareas de esta parte, números 16 y 17. Ambas tareas se han elegido para analizar las respuestas a la generalización de la estructura y propiedades de los sistemas de numeración conocidos a otros sistemas. En el caso de la tarea 16 se trata de traducir desde un sistema icónico, pero decimal como el nuestro, mientras que en la tarea 17 y siguientes se actúa en sistemas posicionales en bases o agrupamientos distintos al decimal.

Ítem 16

Con la primera cuestión planteada se pretende conocer las estrategias utilizadas para realizar un recuento o lo que es lo mismo la traducción a nuestro sistema desde un sistema de numeración icónico, decimal y aditivo. Para realizar dicho recuento, hemos observado dos estrategias diferentes que denotan diferentes grados de dominio de las propiedades que caracterizan nuestro sistema de numeración:

***ASr.1**: Operar utilizando el desarrollo polinómico o transformar progresivamente las unidades de mayor a menor orden*

En el primer caso se trata de una traducción adecuada para sistemas con base de agrupamientos diferentes a 10 (Como por ejemplo el sistema de numeración Babilonio):

$$5x10^3 + 4x10^2 + 5x10 + 9$$

En la *Figura 6.1* se registra una respuesta tipo de esta estrategia (sujeto C-108).

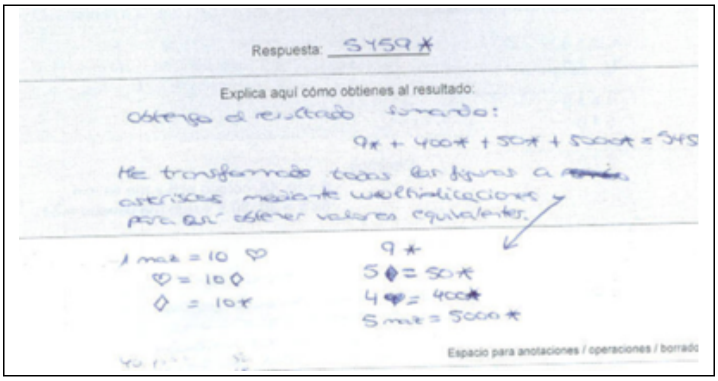


Figura 6.1 Respuesta del sujeto C-108 al ítem IIC16

La segunda variante de esta estrategia es una traducción adecuada para sistemas con base de agrupamiento diferente a 10 y además variable (Ejemplo el sistema de numeración Maya):

$$[(5 \text{ x } 10 + 4) \text{ x } 10) + 5] \text{ x } 10 + 9$$

En la *Figura 6.2* se registra una respuesta tipo de esta segunda forma de la estrategia (sujeto C109):

En ambos casos se detecta un uso analítico funcional del conocimiento.

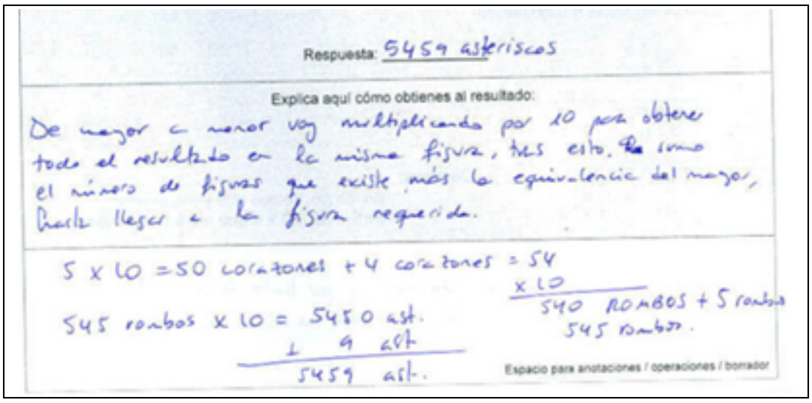


Figura 6.2 Respuesta del cuestionario C-109 al ítem IIC16

ASr.2: *Identificación del sistema y empleo directo de su estructura.*

En este caso los alumnos reconocen la coincidencia de la base de agrupamiento y dan una respuesta sin necesidad de realizar ninguna operación. Los sujetos hacen un uso sintético estructural del conocimiento. A continuación exponemos dos respuestas que se corresponden con esta estrategia:

-*Convierto el icono en las unidades matemáticas* (sujeto C-41; figura 6.3).

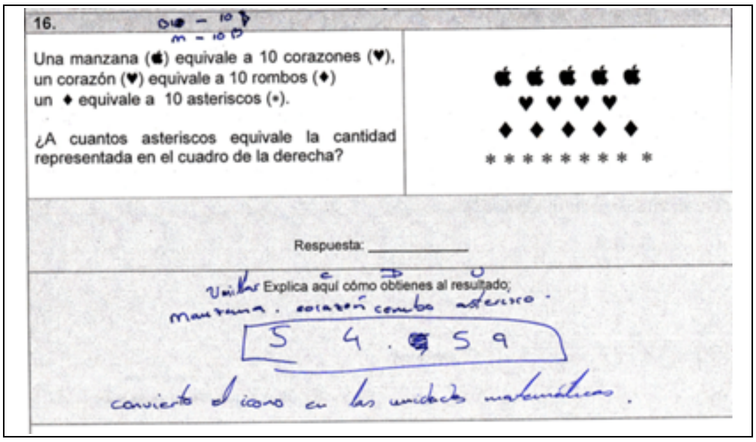


Figura 6.3 Respuesta del sujeto C-41 al ítem IIC16

- *He obtenido el resultado utilizando el mecanismo que con las unidades, decenas, centenas y unidades de millar, al igual que podía haber usado metro, decámetro, hectómetro y Kilómetro, por ejemplo, pues cada uno vale 10 veces más que el anterior y 10 veces menos que el posterior (si vamos de menor a mayor)* (C-100; figura 6.4).

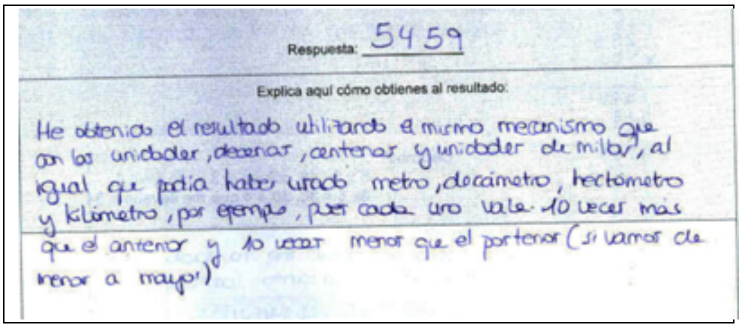


Figura 6.4 Respuesta del cuestionario C-100 al ítem IIC16

En la *Tabla 6.6.* se exponen las frecuencias y porcentajes de respuestas correctas que corresponden a cada una de las estrategias indicadas anteriormente en las dos primeras pruebas escritas.

Tabla 6.6 Porcentajes de estrategias ítem IIC16 (PCN1 y PCN2)

Estrategia		PCN1	PCN2
ASr.1	(1ª opción)	42,6%	55,5%
	(2ª opción)	14,8%	
ASr.2		7,1%	3,2%
Total:		64,5%	58,7%

Ítem 17

Tarea de síntesis estructural con la que se inicia una serie de cuestiones con la que se pretende conocer la capacidad para extrapolar los conocimientos y las estrategias desarrolladas en nuestro sistema de numeración a sistemas con otras bases. Para ello hemos considerado un contexto familiar de compras y ventas de bombones con diferentes tipos de empaquetados y diferentes sistemas de agrupamientos. Inicialmente se consideran los agrupamientos de 8 en 8, en bolsas y paquetes; más adelante se alterna con los agrupamientos de 6 en 6 y finalmente con agrupamientos indeterminados de **a** en **a**. Esta tarea hace las veces de puente entre el nivel de síntesis estructural y el de síntesis funcional que comienza con la tarea 18, siguiente a esta en las pruebas y cuyo análisis se desarrolla en las páginas que siguen.

En el ítem 17 la distribución de los bombones en la figura que ilustra la tarea en el cuestionario pretende facilitar los agrupamientos o simplemente el recuento de los mismos. Se han distribuido en 5 filas completas de 16 (8+8) bombones y una sexta fila de 5 bombones sueltos. Entre las estrategias utilizadas para su resolución hemos encontrado las siguientes:

ASc.1: *Realizar el recuento señalando sobre el dibujo los diferentes agrupamientos*

En un uso que consideramos de síntesis estructural, los sujetos utilizan los agrupamientos facilitadores propuestos para señalar 8 bolsas para obtener un paquete y dejar los bombones sueltos no agrupados (C-123; figura 6.5).

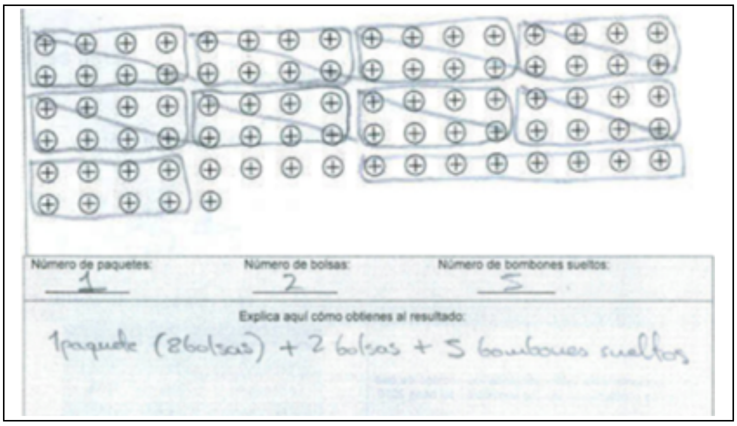


Figura 6.5 Respuesta del cuestionario C-123 al ítem IIIC.17

ASc.2: *Dividir sucesivamente por 8 (Estrategia aritmética 1).*

Estrategia que indica un uso sintético estructural del conocimiento y puede ser la estrategia aprendida para realizar los cambios de una base cualquiera a base 10 (C-128; figura 6.6).

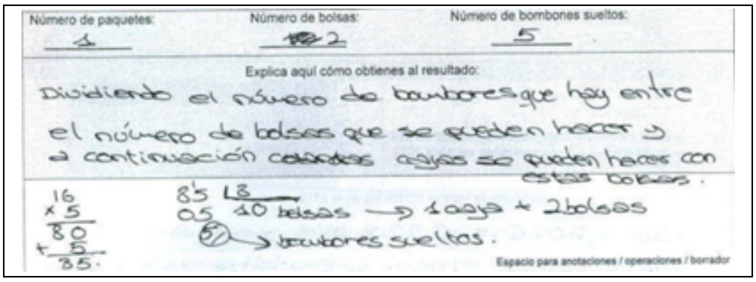


Figura 6.6 Respuesta del cuestionario C-128 al ítem IIIC.17

ASc.3: *Agotar las unidades de mayor a menor orden, realizando previamente la equivalencia entre cada uno de los distintos órdenes y las unidades (Estrategia aritmética 2).*

Estrategia que indica, igualmente, un uso sintético estructural del conocimiento, ya que aplica la estructura del sistema decimal al nuevo sistema (C-146; figura 6.7).

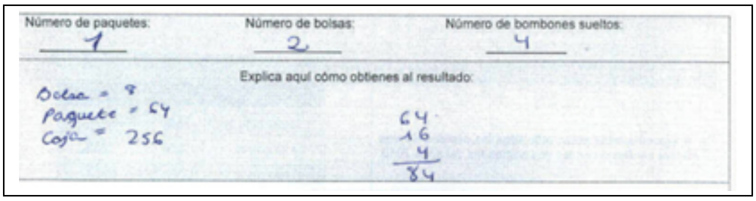


Figura 6.7 Respuesta del cuestionario C-146 al ítem IIIC.17

La distribución de frecuencias de las estrategias utilizadas se puede consultar en la *Tabla 6.7.*

Tabla 6.7 Frecuencias y Porcentajes de estrategias en el ítem IIC17 de la PCN1

Estrategia	Ni	%
ASc.1	42	27,1%
ASc.2	20	13%
ASc.3	20	13%
	Total: 82	53%

.

Entre las respuestas que hemos considerado incorrectas destacamos la siguiente tipología de errores:

ESc.1: *Contar el total de objetos, agruparlos en la base del sistema mediante divisiones, pero repetir órdenes de forma total o parcial.*

En este caso cuenta el total de bombones, los agrupa de 8 en 8 mediante divisiones, pero repite órdenes. En algunos casos supone una aplicación no adecuada del proceso que se enseña para pasar a base 10 y que no se ha aplicado adecuadamente. Ejemplos de este tipo de error lo constituyen las siguientes respuestas:

- *1 paquete, 10 bolsas y 85 bombones sueltos*; señala en la figura claramente 10 grupos de 8 (utiliza agrupamientos no coincidentes con las filas de la figura) y a continuación divide 85 entre 8, pero se equivoca pues obtiene de cociente 1 y de resto 5 (sujeto C-8, Figura 6.8). Se trata de una respuesta de la que no se puede asegurar nada; en todo caso, el sujeto ha intentado hacer un uso analítico estructural pero sin éxito.

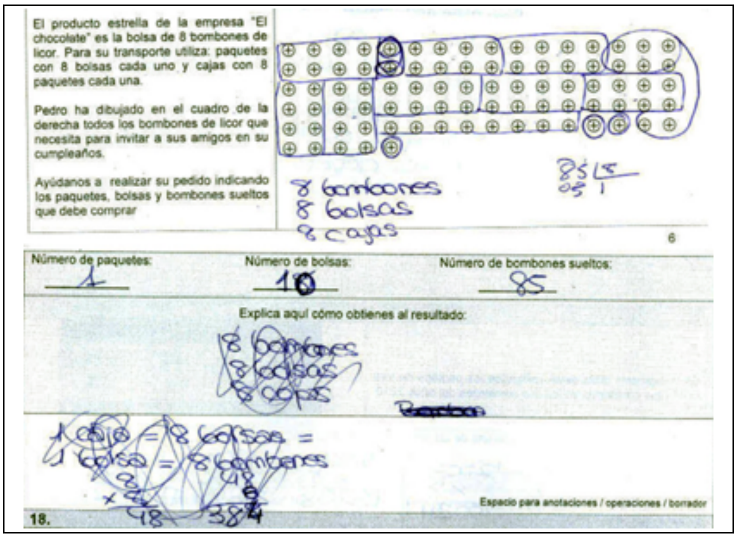


Figura 6.8 Respuesta del cuestionario C-8 al ítem IIIC.17

- *1 paquete, 10 bolsas y 5 bombones sueltos*. Primero calcula el total de bombones (no utiliza la figura para realizar los agrupamientos): 16x5 = 80+5 = 85. Después divide 80 entre 8 y obtiene 10 bolsas y añade a continuación 1 paquete. (sujeto C-31, Figura 6.9). Igualmente creemos que el sujeto tiene dificultades con el agrupamiento y la gestión de órdenes y realiza un intento sin éxito de empleo analítico de la estructura del sistema de base diez.

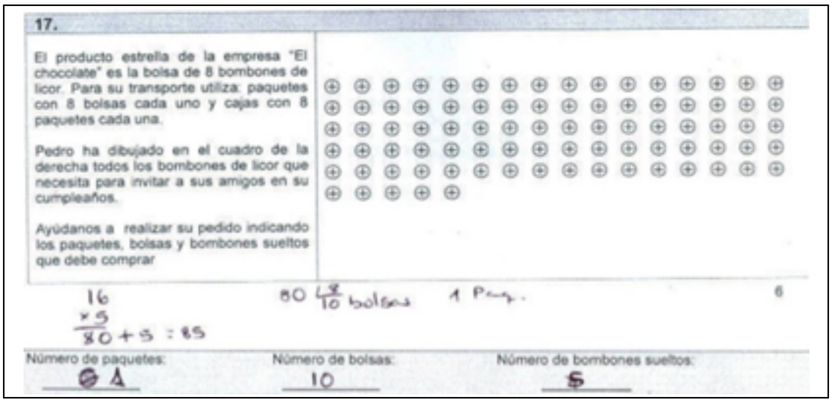


Figura 6.9 Respuesta del sujeto C-31 al ítem IIIC.17

El segundo de los errores identificados en esta tarea es el siguiente:

ESc.2: *Empleo de agrupamientos gráficos sin realizar operaciones (error idéntico al anterior en cuanto a resultados).*

El sujeto señala los 10 agrupamientos (ha tenido en cuenta de forma parcial la distribución gráfica facilitadora) y de ello deduce el resultado: 1 paquete, 10 bolsas y 5 bombones sueltos; realiza el siguiente comentario: *Agrupando los bombones en bolsas y colocando los paquetes que serían posible llenar a 8 bolsas cada paquete*. (C-10, Figura 6.10)

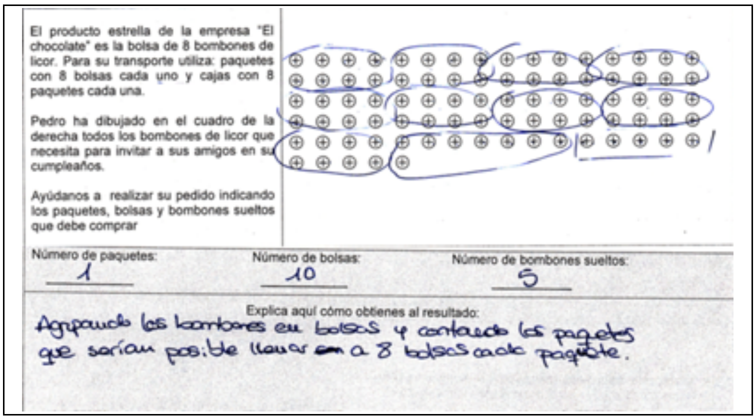


Figura 6.10 Respuesta del cuestionario C-10 al ítem17

La respuesta anterior creemos que se encuentra entre las que hemos denominado "intentos de uso analítico del conocimiento". Es evidente que estos errores se producen por defectos en el conocimiento básico del nivel anterior que dificulta la generalización de la estructura del sistema decimal y su aplicación a otras bases.

El tercer tipo de error indica que el sujeto no tiene en cuenta lo que se pregunta o no considera relevante el dato de la base del sistema. En cualquier caso no se puede decir nada sobre la comprensión sintética estructural.

ESc.3: *No tiene en cuenta la base utilizada y utiliza el conteo en nuestro sistema.*

De este error encontramos respuestas del tipo:

-Respuesta: 85 bombones (C-74).

-Una respuesta curiosa por lo complejo y lo rebuscado del proceso es la que da el sujeto C-106, *Figura 6.11*, que escribe: "2 paquetes, 11 bolsas y 3 bombones"; cuenta 10 como total de bolsas y 5 bombones sueltos, pero como parece que pretende realizar los pedidos con paquetes por una parte y bolsas por otra, dice que necesita 2 paquetes (con 1 paquete no tiene suficiente) y para las bolsas responde que necesita 11 (la última no estaría completa y por ello dice que pediría 3); quizás por ello responda también 3 bombones sueltos.

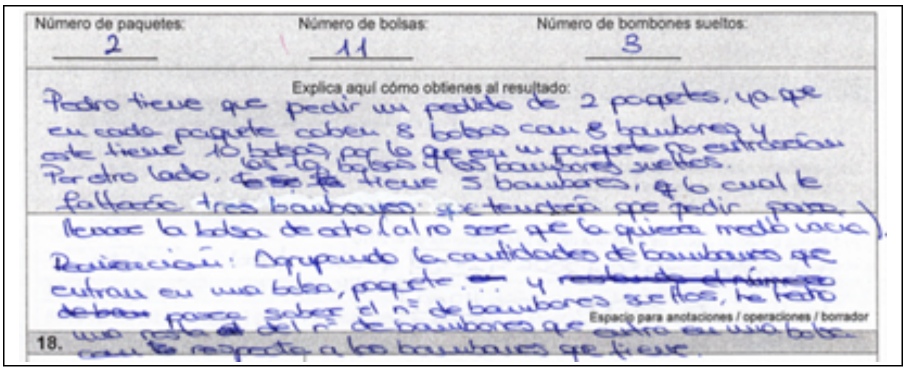


Figura 6.11 Respuesta del cuestionario C-106 al ítem 17

En la prueba PCN2 se aprecia una pequeña reducción de los porcentajes de respuestas correctas en esta tarea, pasando del 52,9% del primero al 47,4% en el segundo, pero se mantienen las tres estrategias (ASc.1, ASc.2 y ASc.3) observadas en el primer cuestionario.

En cuanto a errores cometidos aparece el ESc1 con un porcentaje del 35,8% y permanece casi invariable el número de SR (5,3%).

6.3.3.2 Respuestas de transición entre los niveles síntesis estructural y funcional en la tarea 19 (pruebas PCN1 y PCN2)

A partir de aquí haremos una revisión de las respuestas, estrategias y errores a las tareas 18, 19, 20, 21, 22 incluidas en las dos pruebas y construidas con las características apropiadas para ser resueltas mediante un uso sintético funcional del conocimiento; sin embargo, la tarea 19 presenta algunas características similares a la 17, pudiéndose situar como tarea frontera o puente entre los dos niveles de síntesis. Al mismo tiempo, las respuestas denotan una situación intermedia entre dichos niveles y los errores y estrategias observadas son los mismos que los registrados para la tarea 17. En consecuencia, pasamos a exponer los resultados de la tarea 19 en primer lugar para mantener la continuidad en la exposición.

Los resultados de las tareas 17 y 19 son muy diferentes en las dos pruebas. En el ítem 19 se propone una actividad semejante a la realizada en el 17, con la diferencia de que en ella se requiere expresar la cantidad resultante en la notación abreviada utilizada en las actividades 18.1 y 18.2 (ver apartado 6.3.3.3). Este requisito eleva el número de SR desde el 6,5% en el ítem 17 al 43,9 % en el 19 en la PCN1 y desde un 5,3% al 26,3% para la PCN2, cuando desde el punto de vista de la dificultad intrínseca de ambas podríamos considerar que son del mismo nivel; la diferente forma de representar el resultado añade una dificultad que justifica las diferencias en los porcentajes de respuestas correctas.

Las *estrategias* utilizadas para realizar esta cuestión son semejantes a las de la 17, pero en menor porcentaje debido al importante aumento de SR. En la *Tabla 6.8* se incluyen las frecuencias de las respuestas correctas encontradas en ambos cuestionarios.

Tabla 6.8 Porcentajes estrategias ítems 19 (PCN1 y PCN2)

Estrategia	PCN1	PCN2
ASc.1	11,6%	13,7%
ASc.2	7%	11,6%
ASc.3	3,3%	3,2 %
Total	21,9%	28,5%

Los *errores* encontrados son similares a los señalados para el ítem 17, salvo que aparece un nuevo error propiciado posiblemente por el formato de la pregunta, ya que no se señalan los lugares destinados a colocar los paquetes, bolsas y bombones sueltos, sino que se le ofrece un espacio para expresar el resultado en forma abreviada.

ESc.4: *Obtiene los distintos agrupamientos pero a la hora de expresar el resultado final no se realizan las transferencias de órdenes.*

Este error se observa en respuestas del tipo:

- Después de realizar agrupamientos de 8 bombones sobre la figura proporcionada en el cuestionario responde utilizando una notación abreviada "ad hoc" ($9_8 + 4_1$) para indicar, por una parte, los agrupamientos de 8 encontrados y, por otra, los elementos sueltos (C-85, *Figura 6.12*).

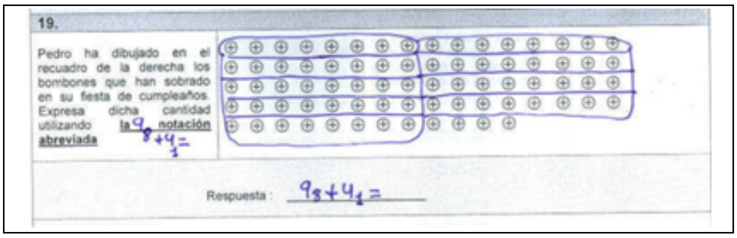


Figura 6.12 Respuesta del cuestionario C-85 al ítem 19

- Como en el caso anterior utiliza una estrategia gráfica para determinar los diferentes agrupamientos y responde utilizando la notación abreviada $94_{(8}$ sin realizar la transferencia entre los órdenes obtenidos (C-86, Figura 6.13).

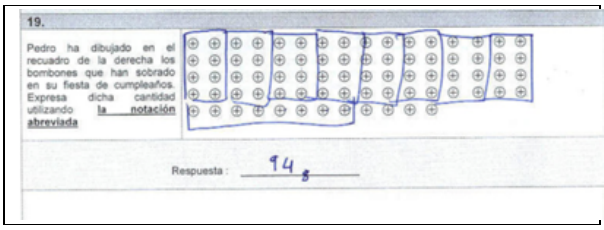


Figura 6.13 Respuesta del cuestionario C-86 al ítem 19

- Igual que los anteriores pero sin utilizar la notación abreviada, responde *9 bolsas y 4 bombones sueltos* (C-93, *Figura 6.14*).

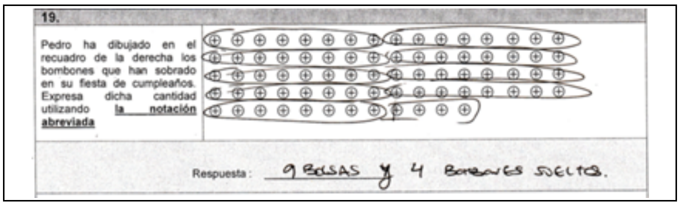


Figura 6.14 Respuesta del cuestionario C-93 al ítem 19

Los errores encontrados coinciden en las dos pruebas, aunque con diferentes porcentajes como se puede apreciar en la *Tabla 6.9*. El aumento en el porcentaje total de respuestas incorrectas y el mantenimiento de los porcentajes de respuestas correctas es consecuencia del menor porcentaje de SR.

Tabla 6.9 Porcentajes errores ítems 19 (PCN1 y PCN2*)*

Errores	PCN1	PCN2
ESc.1	8,4	5,3
ESc.2	2,5	-
ESc.3	9	16,8
ESc.4	4,5	11,6%
Otros	9	11,7
Total	33,5	45,4

6.3.3.3 Tareas del nivel síntesis II o funcional (pruebas PCN1 y PCN2)

En lo que sigue haremos una revisión de las respuestas, estrategias y errores a las tareas del bloque síntesis funcional números 18, 20, 21 y 22 incluidas en las dos pruebas. Como hemos mencionado, la tarea 19 pertenece por construcción a este grupo pero ha sido respondida con patrones similares a la 17, razón por la cual se ha incluido en el apartado anterior como tarea puente entre los dos niveles mencionados.

Ítems 18.1 y 18.2

Se trata de tareas de síntesis funcional o de generalización a otros sistemas de las aplicaciones a operaciones aritméticas en los sistemas usuales. En ellas se compaginan dos notaciones, una en la que están presentes los diferentes tipos de agrupamientos y otra de tipo posicional, a la que en el cuestionario hemos denominado abreviada. Para resolverla se tiene que realizar una suma o resta de las dos cantidades de bombones vendidas en los dos años. En el enunciado no se dice nada sobre el formato que deben utilizar para dar el resultado, por tanto no sería necesario obtener el total de bombones sueltos vendidos o los bombones sueltos que representen el incremento producido, sino que se podría operar con los agrupamientos y dar el resultado en los mismos o bien directamente en la notación abreviada.

Estrategias (tareas 18.1 y 18.2)

Se han registrado las siguientes estrategias, que notamos siguiendo la misma numeración utilizada en las estrategias de síntesis estructural y utilizando el sufijo “op” que corresponde a la categoría fenomenológica de aplicación a las operaciones aritméticas, y que pasamos a ejemplificar y analizar a continuación:

ASop.4: *Transforma las cantidades a base 10 y a continuación operan. Supone obtener el total de bombones sueltos y operar con ellos.*
ASop.5: *Opera en estos agrupamientos y posteriormente pasan a base 10.*
ASop.6:*Opera en los agrupamientos correspondientes ofreciendo los resultados sin realizar trasferencia entre los distintos ordenes y por tanto con cantidades en algunos de ellos superior a la base del agrupamiento.*
ASop.7: *Opera en los agrupamientos correspondientes ofreciendo los resultados con transferencias de órdenes, ofreciendo por tanto resultados canónicos.*

La primera (ASop.4) supone una relativa incapacidad para actuar en este nuevo sistema de numeración; en lugar de actuar en este nivel superior de abstracción, traduce a nuestro sistema decimal y opera en él. Se trata de una estrategia que hace un uso analítico funcional del conocimiento sobre el sistema decimal.

El uso de las estrategias ASop.5 y ASop.6 permite conjeturar la capacidad de operar en un nivel superior de abstracción y por tanto consideraremos la posibilidad de disponer de una comprensión propia del nivel de síntesis, aunque también se observa una generalización de síntesis estructural del conocimiento que también se podría incluir en la categoría de análisis funcional (en el apartado 6.3.3.4 se analiza la transición por estos niveles a propósito de las respuestas y la evolución del sujeto C-134, cuyas respuestas lo sitúan en una posición intermedia entre los niveles de análisis y síntesis, respondiendo indistintamente con estrategias propias de uno u otro).

Por último, la estrategia ASop.7, de síntesis funcional, es la más evolucionada en la medida en que generaliza directamente a otra base la operatoria del sistema de base 10. Las *Tablas 6.10 y 6.11* recogen las frecuencias de sujetos que utilizan cada una de las estrategias descritas en los dos ítems considerados.

Tabla 6.10 Porcentaje de estrategias ítem 18.1 (PCN1 y PCN2)

Estrategia	PCN1	PCN2
ASop.4	20%	27,4%
ASop.5	3,9%	-
ASop.6	1,9%	1,1%
ASop.7	2,6%	5,3 %
Total	28,5%	33,8%

Tabla 6.11 Porcentaje de estrategias ítem 18.2 (PCN1 y PCN2)

Estrategia	PCN1	PCN2
ASop.4	21,3%	20%
ASop.5	1,3%	-
ASop.6	-	-
ASop.7	-	1,1 %
Total	22,6%	21,1%

Del análisis de los datos de la *Tabla 6.10 y 6.11* se deduce, por una parte, que los porcentajes de respuestas correctas a estas dos tareas son muy reducidos, y por otra, que la estrategia ASop.4 es la más frecuente entre los que responden correctamente a estas cuestiones. Esta estrategia pone de manifiesto una relativa incapacidad para trasladar a los nuevos sistemas de numeración las estrategias del sistema usual. Por otra parte, los porcentajes de alumnos que han utilizado estrategias propias del nivel de síntesis (ASop.5, ASop.6 y ASop.7) son muy reducidos en el caso de la suma (ítem 18.1) y muy pequeño en el de la resta (ítem18.2).

De los alumnos que han utilizado estrategias adecuadas para el ítem 18.1 y no han completado con éxito el ítem 18.2 nos encontramos con la siguiente situación:

- De los 6 alumnos que utilizan la estrategia ASop.5, sólo 2 mantienen una estrategia semejante para la sustracción (C-100 y C-134), uno cambia a la estrategia errónea consistente en operar como si las cantidades estuvieran expresadas en agrupamientos de 10 (C-137), y los otros 3 simplemente no realizan el ítem 18.2 (C-19, C-22 y C-62).
- De los 3 alumnos que han optado por la estrategia ASop.6, uno no ha realizado el ítem 18.2 (C-47), otro ha operado como en base 10 (C-77) y el tercero (C-18) ha pretendido continuar con la estrategia pero ha restado el mayor del menor en los distintos órdenes sin atender a las cantidades de las que proceden, cometiendo el error que codificaremos posteriormente como ESop.6.
- De los 4 alumnos que utilizaron ASop.7, dos realizan la sustracción en base 10, (C-60 y C-79) y los otros dos no realizan el ítem 18.2 (C-5 y C-17).

Del análisis anterior y de los resultados expresados en las *Tablas 6.10* y *6.11*, se puede inferir la mayor dificultad para generalizar los procedimientos implicados en la sustracción, que sin duda están justificadas por las diferencias encontradas en la capacidad para justificar los procedimientos implícitos en los algoritmos de la adición y sustracción (ítems 13.1-2 y 14.1-2).

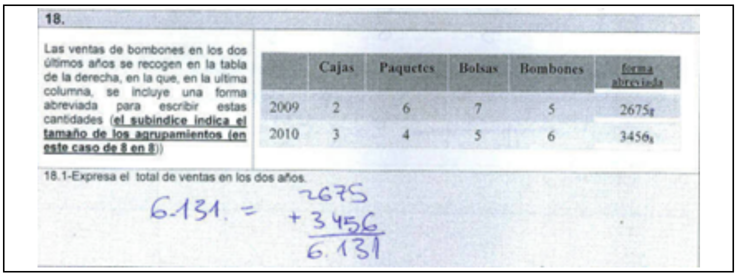
<u>Errores (tareas 18.1 y 18.2)</u>

Del análisis del tipo de respuestas de aquellos alumnos que contestan incorrectamente a estos dos ítems, observamos los siguientes errores:

ESop.5: *Operan sin tener en cuenta la base del sistema.*

Veamos un ejemplo:

- (C-53) realiza la operación que se puede examinar en la *Figura 6.15*.


18.

Las ventas de bombones en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha, en la que, en la ultima columna, se incluye una forma abreviada para escribir estas cantidades (**el subindice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8)**)

	Cajas	Paquetes	Bolsas	Bombones	forma abreviada
2009	2	6	7	5	2675_8
2010	3	4	5	6	3456_8

18.1-Expresa el total de ventas en los dos años.

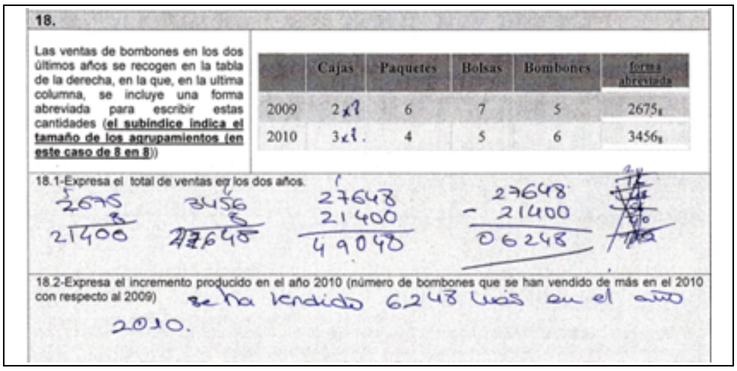
6.131 = 2675 + 3456 = 6.131

Figura 6.15 Respuesta del sujeto C-53 al ítem 18.1 y 18.2

El segundo error detectado está relacionado con una inadecuada traducción entre sistemas posicionales en distintas bases, aunque aquí optamos por categorizarlo dentro del bloque de síntesis estructural:

ESr.3: *Pretenden utilizar la estrategia ASop.4, pero al pasar a base 10 realizan transformaciones erróneas. Es frecuente en este caso multiplicar la cantidad por la base para obtener cantidades en nuestro sistema.*

- (C-16) realiza las operaciones que aparecen en la *Figura 6.16.*


18.

Las ventas de bombones en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha, en la que, en la ultima columna, se incluye una forma abreviada para escribir estas cantidades (**el subindice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8)**)

	Cajas	Paquetes	Bolsas	Bombones	forma abreviada
2009	2x8	6	7	5	2675_8
2010	3x8.	4	5	6	3456_8

18.1-Expresa el total de ventas en los dos años.

2675 × 8 = 21400 3456 × 8 = 27648 27648 + 21400 = 49048 27648 − 21400 = 06248

18.2-Expresa el incremento producido en el año 2010 (número de bombones que se han vendido de más en el 2010 con respecto al 2009)

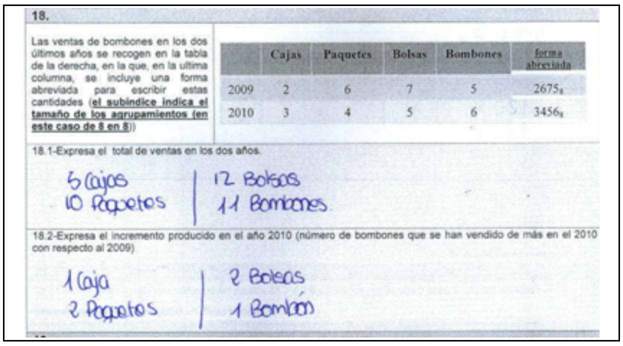
se ha vendido 6.248 más en el año 2010.

Figura 6.16 Respuesta del cuestionario C-16 al ítem 18.1 y 18.2

Se han registrado otros errores de los que mencionamos aquí el siguiente:

ESop.6: *Restar del orden mayor el menor sin atender al papel de minuendo o sustraendo de cada una de las cantidades que intervienen en cada caso.*

- (C-18) obtiene como resultado: 1 caja, 2 paquetes, 2 bolsas y 1 bombón (*Figura 6.17*).


18.

Las ventas de bombones en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha, en la que, en la ultima columna, se incluye una forma abreviada para escribir estas cantidades (**el subindice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8)**)

	Cajas	Paquetes	Bolsas	Bombones	forma abreviada
2009	2	6	7	5	2675_8
2010	3	4	5	6	3456_8

18.1-Expresa el total de ventas en los dos años.

5 Cajas | 12 Bolsas
10 Paquetes | 11 Bombones

18.2-Expresa el incremento producido en el año 2010 (número de bombones que se han vendido de más en el 2010 con respecto al 2009)

1 Caja | 2 Bolsas
2 Paquetes | 1 Bombón

Figura 6.17 Respuesta del cuestionario C-18 al ítem 18.1 y 18.2

Esto supone que ha restado 3-2 cajas, 6-4 paquetes, 7-5 bolsas y 6-5 bombones, sin tener en cuenta que en paquetes y bolsas las restas deberían ser 4-6 y 5-7 para ser coherente con las cantidades que se operan. En las *Tablas 6.12* y *6.13* se recogen los errores cometidos en ambos ítems en los dos cuestionarios.

Tabla 6.12. Porcentajes errores ítem 18.1 (PCN1 y PCN2)

Errores	PCN1	PCN2
ESop.5	24,5%	20%
ESr.3	10,3%	13,7%
Otros	7,6%	5,4
Total	42,4%	39,1

Tabla 6.13 Porcentajes errores ítem 18.2 (PCN1 y PCN2)

Errores	PCN1	PCN2
ESop.5	21,3%	21,1%
ESr.3	9,7%	12,6%
Otros	4,4%	12,7%
Total	35,4%	46,4%

Del análisis de ambas tablas se concluye que son mayoritarias y significativas las respuestas que presentan el ESop.5, que suponen un rastro negativo de comprensión, al aplicar de forma mecánica los algoritmos decimales sin reparar en los diferentes agrupamientos aplicados; también, aunque con menor porcentaje, es significativo el error ESr.3, que admitiendo la necesidad de contemplar los agrupamientos presentes actúan con estrategias que denotan rastros de comprensión técnica al aplicar de forma automática un procedimiento inadecuado, aunque "parecido" al utilizado en los cambios de base; también hemos recogido para el caso de la sustracción y dentro de la categoría "otros" el error ESop.6, que denota una comprensión sintética muy limitada al considerar de forma independiente los distintos agrupamientos sin diferenciar los papeles de minuendo y sustraendo que juegan en cada caso las cantidades presentes.

Ítems 20.1, 20.2, 21.1 y 21.2

Lo primero que observamos en estas tareas es el alto porcentaje de SR y el bajo porcentaje de respuestas correctas. Las estrategias utilizadas y los errores que se cometen son de la misma naturaleza que los de los ítems 18.1 y 18.2; en las *Tablas 6.14.* y *6.15.* se indican los porcentajes obtenidos.

Del análisis de las estrategias utilizadas se vuelve a repetir el mayor porcentaje de la ASop.4, que supone reducir a nuestro sistema de numeración las operaciones que resuelven la tarea; y por otra parte, se observa que es reducido el uso de estrategias propias de una comprensión sintética, sobre todo en las 20.2 y 21.2, para las que deberían realizar sustracciones en los agrupamientos indicados.

Tabla 6.14 Frecuencias y Porcentajes de estrategias en los ítems 20-21 de la PCN1

	20.1		20.2		21.1		21.2	
Estrategia	Ni	%	Ni	%	Ni	%	Ni	%
ASop.4	10	6,5	9	5,8	7	4,5	8	5,2
ASop.5	-	-	-	-	-	-	-	-
ASop.6	-	-	1	0,6	-	-	-	-
ASop.7	4	2,5	1	0,6	2	1,3	1	0,6
Total	14	9	11	7	9	5,8	9	5,8

Tabla 6.15 Frecuencias y Porcentajes de errores en los ítems 20-21 de la PCN1.

	20.1		20.2		21.1		21.2	
Errores	Ni	%	Ni	%	Ni	%	Ni	%
ESop.5	65	42	55	35,5	30	19,4	18	11,6
ESr.3	8	5	7	4,5	10	6,5	12	7,7
Otros	3	2	2	1,3	4	2,6	8	5,2
Total	76	49	64	41,3	44	28,5	38	24,5

El error ESop.5 (operar sin tener en cuenta el tipo de agrupamiento utilizado) es mayoritario, aumentando sus porcentajes respecto a los obtenidos en la tarea 18 y en la tarea 20 y disminuyendo en la tarea 21 por el considerable aumento de SR.

En la segunda prueba observamos que, a pesar del aumento progresivo de SR[1] a lo largo de estas cuatro cuestiones, los porcentajes son notablemente inferiores a los detectados en el primer cuestionario. En la *Tabla 6.16* podemos ver esta progresión en ambas pruebas.

Tabla 6.16 Porcentajes "sin respuestas" ítems 20-21 (PCN1 y PCN2).

	20.1		20.2		21.1		21.2	
SR	Ni	%	Ni	%	Ni	%	Ni	%
PCN2	30	31.6	37	38,9	46	48,4	52	54,7
PCN1	65	41,9	80	51,6	102	65,8	108	69,7

Esta reducción de los porcentajes de SR se ha trasladado fundamentalmente al aumento de los porcentajes de los errores cometidos y en menor medida a los de las respuestas correctas.

A los errores encontrados en la primera prueba se suma uno nuevo que hemos codificado como ESop.7:

ESop.7: Opera como en base 10 (***ESop.5***), pero una vez resueltas las operaciones correspondientes realiza un reagrupamiento para evitar que algunos de los órdenes aparezcan valores superiores a la base.

Se trata de una nueva estrategia que, aunque errónea, indica un mayor nivel de comprensión que las anteriores(C-49).

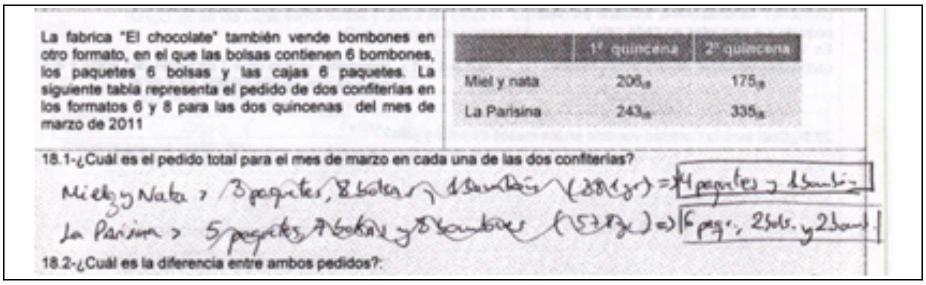


Figura 6.18 Respuesta del cuestionario C-49 al ítem 20.1-2

En la *Tabla 6.17* se observan los errores cometidos en estos ítems con las frecuencias y porcentajes correspondientes. Se observa que ESop.5 es el error cometido

[1] Sin Respuesta

con mayor frecuencia y también, como ocurría en PCN1, se constata la presencia del error ESr.3 en una cantidad apreciable de casos.

Tabla 6.17 Porcentajes errores ítems 20-21 (PCN2)

	20.1		20.2		21.1		21.2	
Errores	Ni	%	Ni	%	Ni	%	Ni	%
ESop.5	43	45,3	40	42,1	28	29,5	25	26,3
ESr.3	10	10,5	9	9,5	11	11,6	9	9,5
ESop.7	1	1,1	1	1,1	1	1,1	1	1,1
Otros	-	-	-	-	1	1,1	-	-
Total	54	56,9	50	52,7	41	43,3	35	36,9

En cuanto a las estrategias correctas utilizadas observamos que se mantiene con un mayor porcentaje la ASop.4 y que las otras tres, ASop.5, ASop.6 y ASop.7, no se utilizan o se hace de una forma residual, lo que confirma la tendencia y los resultados observados en el primer cuestionario, aunque con porcentajes ligeramente superiores. La *Tabla 6.18* describe las frecuencias y los porcentajes de uso.

Tabla 6.18 Porcentajes de estrategias utilizadas en los ítems 20-21 (PCN2*)*

	20.1		20.2		21.1		21.2	
Estrategia	Ni	%	Ni	%	Ni	%	Ni	%
ASop.4	8	8,4	6	6,3	7	7,4	8	8,4
ASop.5	1	1,1	1	1,1	-	-	-	-
ASop.6	1	1,1	-	-	-	-	-	-
ASop.7	1	1,1	1	1,1	1	1,1	-	-
Total	11	11,7	8	8,5	8	8,5	8	8,4

Ítem 22

En esta tarea se deben realizar operaciones con expresiones numéricas, notación abreviada, en agrupamientos distintos al decimal, razón por la que es muy significativo el número de SR, del orden del 69% de las respuestas totales en la PCN1 y del 51,6% en la PCN2. A pesar de ello, como ha ocurrido en los ítems anteriores, esta disminución de porcentaje de respuestas en blanco en la segunda prueba sólo ha hecho incrementar las respuestas erróneas, duplicándose el error ESr.3 en la segunda y prácticamente no ha influido sobre el porcentaje de respuestas correctas. En las *Tablas 6.19* se observa los porcentajes de las estrategias encontradas y los errores cometidos en este ítem en los dos cuestionarios. También son sensiblemente inferiores los porcentajes de las estrategias correctas utilizadas, que tienen características similares a las expuestas en los ítems anteriores.

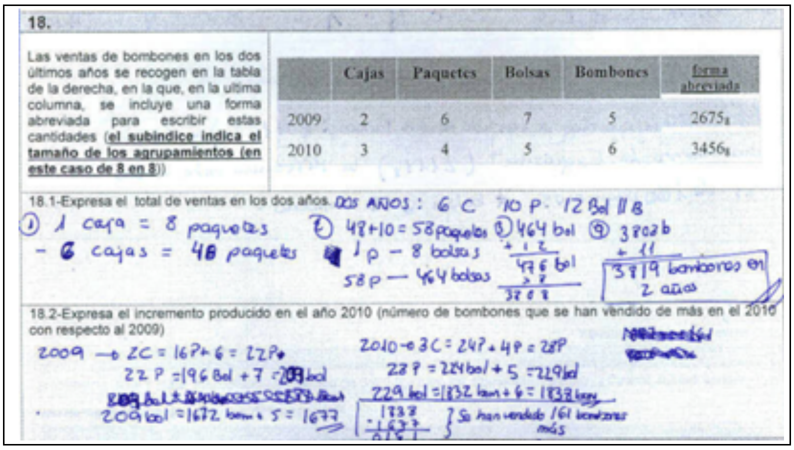
Tablas 6.19 Porcentajes de estrategias y errores en el ítem 22 en PCN1 y PCN2

Estrategias	PCN1		PCN2	
	Ni	%	Ni	%
ASop.4	7	4,5	5	5,3
ASop.5	-	-	-	
ASop.6	-	-	-	-
ASop.7	2	1,3	1	1,1
Total	9	5,8	6	6,8

Errores	PCN1		PCN2	
	Ni	%	Ni	%
ESop.5	30	29,2	27	28,4
ESr.3	8	5,2	10	10,5
ESop.7	-	-	1	1,1
Otros	1	0,6	2	2,2
Total	39	25	40	42,2

6.3.3.4 Transición entre estrategias de análisis funcional y síntesis funcional (pruebas PCN1 y PCN2). El caso C-134

El uso de las estrategias ASop.5 y ASop.6 denota un uso analítico funcional del conocimiento y permite conjeturar la capacidad de operar en un nivel superior de abstracción y categorizar a algunas respuestas en un nivel intermedio entre el nivel de análisis y el nivel de síntesis. Así, encontramos respuestas que están en una posición intermedia entre ambos niveles y utilizan indistintamente estrategias propias de uno o de otro. Un ejemplo de la estrategia ASop.5 es la respuesta de C-134 (*Figura 6.24*) que podemos considerar del nivel de síntesis I o estructural. Esta persona hace un uso analítico funcional del conocimiento pero puede avanzar a niveles superiores, pues es competente para operar en sistemas de numeración equivalentes adaptando las estrategias y los procedimientos característicos del sistema de numeración decimal. Veamos algunos ejemplos de dicha transición.


18.

Las ventas de bombones en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha, en la que, en la ultima columna, se incluye una forma abreviada para escribir estas cantidades (**el subíndice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8)**)

	Cajas	Paquetes	Bolsas	Bombones	forma abreviada
2009	2	6	7	5	2675_8
2010	3	4	5	6	3456_8

18.1-Expresa el total de ventas en los dos años.

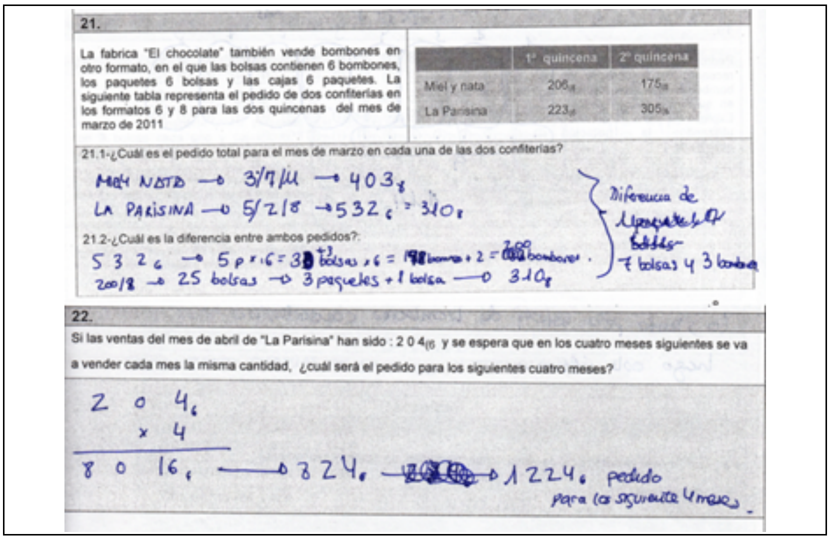
18.2-Expresa el incremento producido en el año 2010 (número de bombones que se han vendido de más en el 2010 con respecto al 2009)

Figura 6.19 Respuesta del cuestionario C-134 al ítem 18.1 y 18.2

En la tarea 18.1 la respuesta indica que se opera en el agrupamientos 8 sin efectuar trasferencias de órdenes; a continuación se traduce a base 10 para obtener el total de bombones sueltos. En cambio, en la tarea 18.2 no se utiliza el agrupamiento 8, posiblemente por la dificultades de la sustracción en agrupamientos distintos de 10; en su lugar se traducen las cantidades a base 10 y posteriormente se realiza la sustracción.

Es interesante comprobar que esta alumna, cuando resuelve los ítems 20.1, 20.2, 21 y 22, va depurando la estrategia y progresivamente realiza trasferencias entre diferentes órdenes para utilizar una notación abreviada óptima. En este progreso termina utilizando la estrategia ASop.7 en las dos últimas tareas, lo que corresponde a un nivel de síntesis funcional del conocimiento.

Por otra parte, en el ítem 20.1 opera cometiendo algún error, puesto que realiza llevadas con agrupamientos en base 10 (Ejemplo: en Miel y Nata hace: 7 5 $6_{(8}$ + 2 0 2 $6_{(8}$ = 2 7 8 $2_{(8}$; al sumar unidades (6 + 6 = 12) considera 1 decena que agrupa a las unidades de segundo orden) pero subsana este error en las dos últimas. Así, en la 21.1, opera en los agrupamientos con trasferencia de órdenes, tanto en base 8 como en base 6. Para resolver la 21.2 realiza una traducción adecuada para expresar los dos resultados en un mismo agrupamiento y a continuación modifica la estrategia ASop.4 utilizada en la 18.2 y opera directamente en la base 8 (ASop.7). También utiliza esta estrategia en la 22 (Figura 6.25).



21.

La fabrica "El chocolate" también vende bombones en otro formato, en el que las bolsas contienen 6 bombones, los paquetes 6 bolsas y las cajas 6 paquetes. La siguiente tabla representa el pedido de dos confiterías en los formatos 6 y 8 para las dos quincenas del mes de marzo de 2011

	1ª quincena	2ª quincena
Miel y nata	$206_{(8}$	$175_{(8}$
La Parisina	$223_{(6}$	$305_{(6}$

21.1-¿Cuál es el pedido total para el mes de marzo en cada una de las dos confiterías?

MIEL NATA → 3/7/11 → 403_8

LA PARISINA → 5/2/8 → 532_6 = 310_8

21.2-¿Cuál es la diferencia entre ambos pedidos?:

532_6 → ...

200/8 → 25 bolsas → 3 paquetes + 1 bolsa → 310_8

7 bolsas y 3 bombones

22.

Si las ventas del mes de abril de "La Parisina" han sido : $204_{(6}$ y se espera que en los cuatro meses siguientes se va a vender cada mes la misma cantidad, ¿cuál será el pedido para los siguientes cuatro meses?

$204_6 \times 4$

$80\,16_6$ → 324_6 → 1224_6 pedido para los siguientes 4 meses

Figura 6.20 Respuestas de C-134 a los ítems 21 y 22

6.3.3.5 Tareas y respuestas en la frontera entre los niveles síntesis y formal (pruebas PCN1 y PCN2)

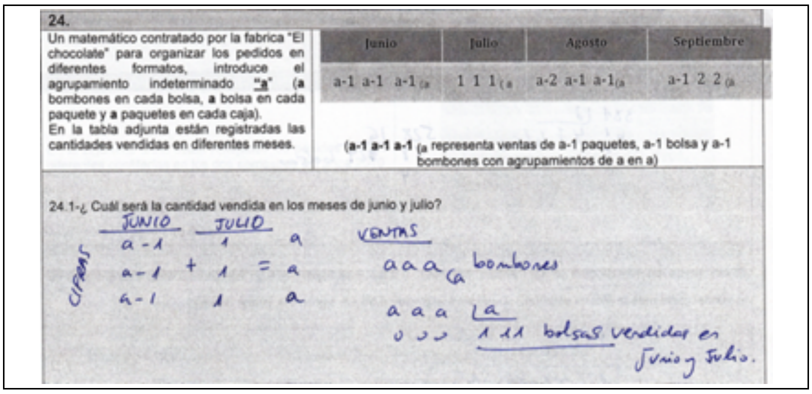
Nos referimos a las tareas 24.1 y 24.2, construidas para ser resueltas con conocimientos, estrategias y capacidades al menos del nivel de Síntesis del modelo. Son tareas que corresponden a un nivel que hemos considerado frontera entre el nivel sintético y formal, razón por la que posiblemente la mayoría de los alumnos no responden adecuadamente a las mismas. En la *Tabla 6.20* se pueden apreciar los datos correspondientes a las respuestas que hemos denominado SR en la aplicación de los dos cuestionarios.

Tabla 6.20 Porcentajes "sin respuestas" ítems 24.1-2 PCN1 y PCN2.

	24.1		24.2	
	Ni	%	Ni	%
PCN2	85	89,5	87	91,6
PCN1	143	92,3	144	92,9

En la PCN1, sólo 2 personas realizan la tarea 24.1 de forma adecuada, mientras que encontramos varios intentos de realizar los algoritmos en la base **a** pero cometiendo algún error algebraico. Igualmente, se registran intentos que no terminan de conectar con el sentido de las tareas propuestas y acaban en una resolución de ecuaciones o bien operando con expresiones polinómicas. Las siguientes respuestas son algunas de las analizadas en este sentido:

a) Opera con las cantidades sin realizar trasferencias de órdenes (ASop.6) y a continuación mantiene la estrategia errónea de dividir entre la base para obtener los resultados (C-109, Figura 6.21).


24.

Un matemático contratado por la fabrica "El chocolate" para organizar los pedidos en diferentes formatos, introduce el agrupamiento indeterminado "a" (a bombones en cada bolsa, a bolsa en cada paquete y a paquetes en cada caja).
En la tabla adjunta están registradas las cantidades vendidas en diferentes meses.

Junio	Julio	Agosto	Septiembre
a-1 a-1 a-1(a	1 1 1(a	a-2 a-1 a-1(a	a-1 2 2(a

(a-1 a-1 a-1 (a representa ventas de a-1 paquetes, a-1 bolsa y a-1 bombones con agrupamientos de a en a)

24.1-¿ Cuál será la cantidad vendida en los meses de junio y julio?

Figura 6.21 Respuesta del sujeto C-109 al ítem 24.1- 24.2

b) Continuar con su estrategia errónea de pasar a base 10 multiplicando por la base (ESr.3) y una vez desprendido del significado de los términos utilizados (incapacidad para compatibilizar el contexto con el nivel algebraico (pérdida de referencia)), suma las cifras de los distintos órdenes y termina planteando y resolviendo ecuaciones (C-108, *Figura 6.22*).

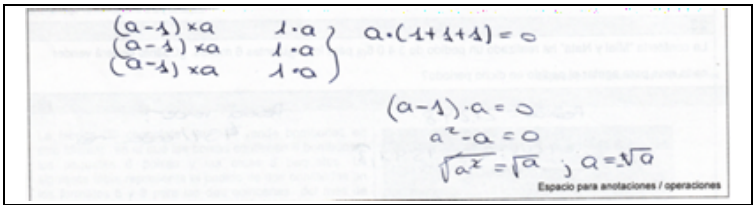
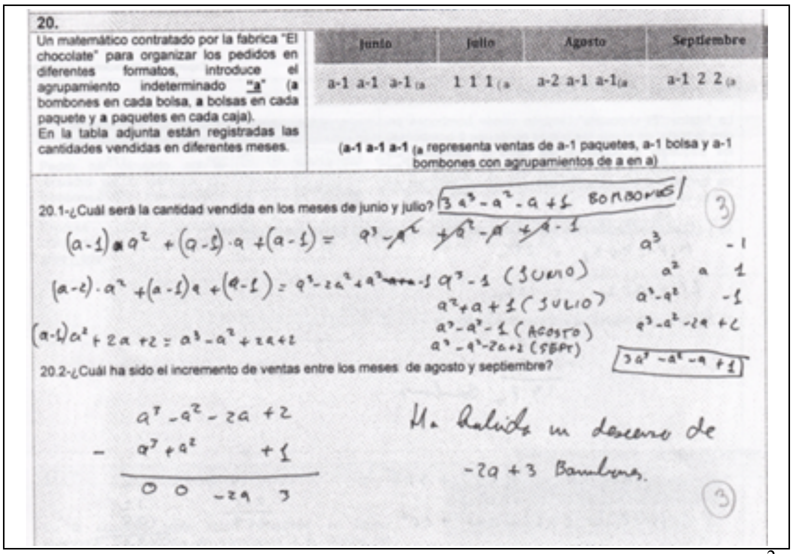


Figura 6.22 Respuesta del sujeto C-108 al ítem 24.1-24.2

En la PCN2, sólo encontramos 1 alumno (C-90) que realiza la tarea 24 de forma satisfactoria. Utiliza para ello la estrategia ASop.4 que ya utilizó para resolver las tareas 18.1 y 18.2 en lugar de la estrategia ASop.7 que el mismo sujeto utilizó en los ítems 20.1, 20.2, 21.1 y 21.2, mucho más económica que la anterior y que indica un alto nivel de comprensión.

Hemos considerado acertada su respuesta a la cuestión 24.2 a pesar del error en la trascripción del pedido de septiembre (obtiene como valor $\mathbf{a^3\text{-}a^2\text{+}2a\text{+}2}$ y en cambio traslada a la resta $\mathbf{a^3\text{-}a^2\text{-}2a\text{+}2)}$ *(Figura 6.23),* lo que ha supuesto que considere como descenso el incremento de ventas entre ambos meses. Nuestra interpretación es que al considerar **a** > 3 entonces: **- 2 a + 3** < 0 y, por tanto, existe un decremento entre ambos meses. Este alumno ha sido seleccionado para que realice la entrevista por el indudable interés de sus respuestas.


20.
Un matemático contratado por la fabrica "El chocolate" para organizar los pedidos en diferentes formatos, introduce el agrupamiento indeterminado "a" (a bombones en cada bolsa, a bolsas en cada paquete y a paquetes en cada caja).
En la tabla adjunta están registradas las cantidades vendidas en diferentes meses.

Junio	Julio	Agosto	Septiembre
a-1 a-1 a-1 (a	1 1 1 (a	a-2 a-1 a-1 (a	a-1 2 2 (a

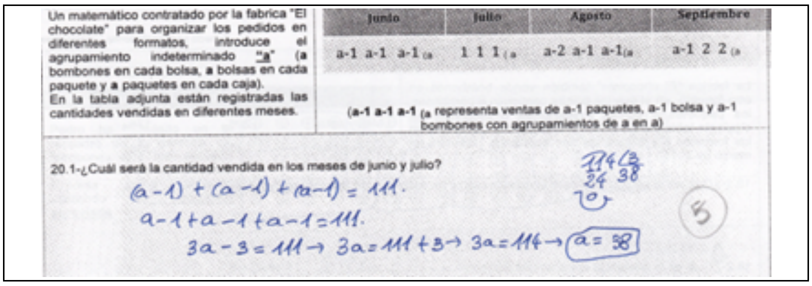
(a-1 a-1 a-1 (a representa ventas de a-1 paquetes, a-1 bolsa y a-1 bombones con agrupamientos de a en a)

20.1-¿Cuál será la cantidad vendida en los meses de junio y julio?

20.2-¿Cuál ha sido el incremento de ventas entre los meses de agosto y septiembre?

Figura 6.23 Respuesta del cuestionario C-90 al ítem 24.1- 24.2[2]

Por otra parte, cuatro personas en la PCN2 resuelven la situación operando directamente, pero sin considerar la base en la que se expresan las cantidades y ofreciendo como resultado **“a a a (a”** utilizando la estrategia ASop.6. Asimismo, tres alumnos transforman la cuestión planteada a una expresión con la que pretenden realizar algunas de las técnicas que han utilizado en sus experiencias algebraicas (*Figura 6.24*).


Un matemático contratado por la fabrica "El chocolate" para organizar los pedidos en diferentes formatos, introduce el agrupamiento indeterminado "a" (a bombones en cada bolsa, a bolsas en cada paquete y a paquetes en cada caja).
En la tabla adjunta están registradas las cantidades vendidas en diferentes meses.

Junio	Julio	Agosto	Septiembre
a-1 a-1 a-1 (a	1 1 1 (a	a-2 a-1 a-1 (a	a-1 2 2 (a

(a-1 a-1 a-1 (a representa ventas de a-1 paquetes, a-1 bolsa y a-1 bombones con agrupamientos de a en a)

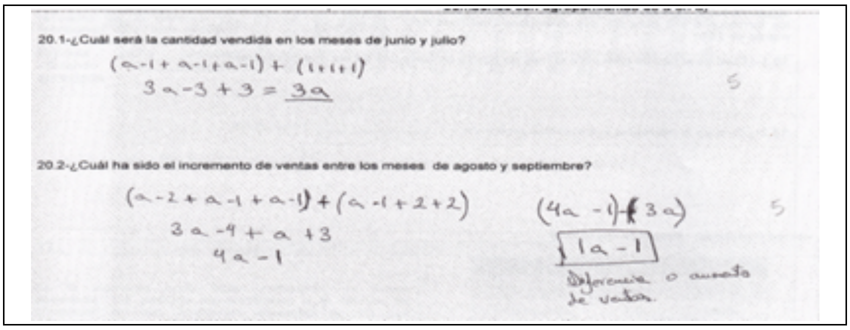
20.1-¿Cuál será la cantidad vendida en los meses de junio y julio?

$(a-1)+(a-1)+(a-1)=111.$

$a-1+a-1+a-1=111.$

$3a-3=111 \rightarrow 3a=111+3 \rightarrow 3a=114 \rightarrow \boxed{a=38}$

Figura 6.24 Respuesta del cuestionario C-56 al ítem 24.1- 24.2


20.1-¿Cuál será la cantidad vendida en los meses de junio y julio?

$(a-1+a-1+a-1)+(1+1+1)$

$3a-3+3=\underline{3a}$

20.2-¿Cuál ha sido el incremento de ventas entre los meses de agosto y septiembre?

$(a-2+a-1+a-1)+(a-1+2+2)$

$3a-4+a+3$

$4a-1$

$(4a-1)-(3a)$

$\boxed{1a-1}$

Diferencia o aumento de ventas.

Figura 6.25 Respuesta del cuestionario C-40 al ítem 24.1- 24.2

Un alumno, (C-6), toma para **a** el valor 8 y lo resuelve utilizando la estrategia ASop.4 (*Figura 6.26*).

[2] En la reproducción del cuadro aparece la tarea con el número 20 debido a que en los cuestionarios presentados a los alumnos, las tareas están numeradas por el orden de aparición y no coincide con la codificación uniforme utilizada para realizar el análisis de las tres pruebas.

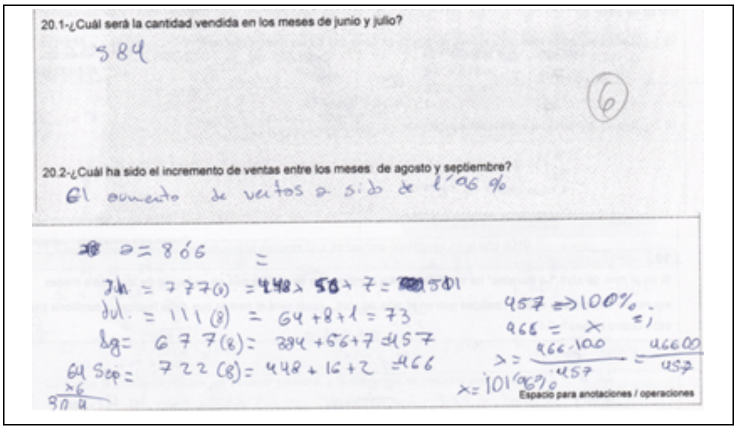


Figura 6.26 Respuesta del cuestionario C-6 al ítem 24.1-2

Por último, un sólo sujeto resuelve la tarea 24.2 y 4 lo intentan sin conseguirlo, equivocando los papeles del minuendo y sustraendo o mostrando dificultades para realizar una resta con llevadas en una base diferente a la decimal. Asimismo, 2 personas transforman la cuestión en expresiones algebraicas con las que realizan tareas que no tienen nada que ver con la cuestión planteada.

6.3.3.6 Conclusiones nivel Síntesis (PCN1 y PCN2)

En la progresión teórica desde el nivel de Análisis Funcional al nivel Formal encontramos cuatro bloques de tipos de respuestas y tipos de tareas y un estado especial entre el 3º y el 4º bloques que son dignos de estudio, establecen una cierta progresión en el sentido de menor a mayor complejidad y configuran el nivel que hemos denominado de Síntesis, de comprensión sintética o de generalización de los aspectos estructurales y funcionales de los sistemas de numeración:

- Síntesis I estructural
- Transición entre la Síntesis I estructural y la Síntesis I Funcional
- Progresión desde el Análisis Funcional a la Síntesis I Funcional
- Síntesis II o Funcional
- Frontera entre el nivel de Síntesis y el nivel Formal

Las tareas de síntesis se distribuyen a lo largo de los bloques mencionados según se indica en la *Tabla 6.24*. Los resultados ponen de manifiesto que los sujetos tienen muchas limitaciones para generalizar la estructura y propiedades de los sistemas de numeración a nuevas situaciones y sistemas distintos del usual. La comprensión en este nivel se reduce a un porcentaje muy reducido de sujetos de la muestra que se distribuye con características diferentes entre una amplia gama de tipos de dominio sintético del conocimiento. A pesar de dicha diversidad, son reducidos tanto el número de errores que cometen los sujetos como las estrategias que utilizan. Igualmente es aún menor el número de errores y estrategias utilizadas mayoritariamente.

En el subnivel de síntesis *estructural* y en el de tránsito entre el nivel de síntesis estructural y el de síntesis funcional se observan <u>*errores*</u> registrados en las respuestas a las tareas 17 y 19 y que hemos categorizado como:

- Errores de comprensión sintética estructural (intentos fallidos de uso sintético estructural del conocimiento):

    - ESc.1 (35,8% (17); 8,4% (19)) (repetir órdenes);
    - ESc.2 (menor 5%) (uso agrupamientos gráficos sin operar);

- ESc.3 (9%)) (no tener en cuenta la base y contar en base 10)

En el subnivel de síntesis *funcional* o de generalización de la aplicación funcional de los sistemas de numeración en los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales en bases distintas a la usual se han identificado los siguientes tipos de errores en las tareas 18, 20, 21, 22 y 23 de ambas pruebas:

- Errores de comprensión sintético estructural (intentos fallidos de uso sintético estructural del conocimiento):
  - ESr.3 (5-15%) "transformaciones erróneas entre bases"

- Errores de comprensión sintética funcional (intentos fallidos de uso sintético funcional del conocimiento):
  - ESop.5 (20-45,3%): "operar sin tener en cuenta la base"
  - ESop.6, 7 (menor 5%): "cambiar minuendo por sustraendo"; "error en transferencia de órdenes"
  - En todos los casos se identifica un uso técnico o analítico del sistema de numeración.

Las *estrategias* encontradas en el nivel de síntesis se distribuyen de la siguiente forma:

- Estrategias de síntesis estructural (tarea 16):
  - ASr.1 (57,4%): "aplicación del desarrollo polinómico". Uso analítico estructural del conocimiento.
  - ASr.2 (7,1%): "aplicación directa de la estructura y propiedades del sistema". Uso sintético estructural del conocimiento.
- Estrategias de transición entre el nivel de síntesis estructural y el nivel de síntesis funcional (tareas de síntesis estructural 17 y 19):
  - ASc.1 (13,7-27,1%): "agrupamientos sucesivos". Uso sintético estructural del conocimiento
  - ASc.2 (11,6-13%): "operar". Uso sintético estructural del conocimiento
  - ASc.3 (5-13%): "agrupar y operar". Uso sintético estructural del conocimiento.

- Estrategias en tareas de síntesis funcional (tareas 18, 20, 21, 22 y 23):
  - ASop.4 (20-25%): "transformar a base 10 y operar". Uso analítico funcional del conocimiento;
  - ASop.5 y ASop.6 (menor 5%): "operar en base y transformar a base 10". Uso analítico funcional – síntesis estructural (posición intermedia entre análisis y síntesis con incapacidad para generalizar);
  - ASop.7 (menor 5%): "operar en base con transferencias correctas". Uso síntesis funcional del conocimiento;

La Tabla 6.21 sintetiza los resultados obtenidos en este bloque del estudio.

Tabla 6.21 Análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas a las pruebas escritas: tabla de resultados del nivel de Síntesis (PC1 y PCN2)

Pruebas 1, 2 bloq	Tareas	Nivel tarea	Cat. Fenom	Error	Estrat	Rastros de comprensión	Usos del conocimiento	porcentajes	
Síntesis I Estructural	16	Síntesis estructural	Rep/Trad		ASr1	Aplicación desarrollo polinómico	Análisis estructural	57,4	
					ASr2	Aplicación directa	Síntesis estructural	7,1	
	17		Contar		ASc.1	Agrupamientos sucesivos	Síntesis estruct	Tar.17 **27,1**	Tar. 19 13,7
Transición Síntesis Estructural Síntesis Función.	19	Síntesis funcional			ASc.2 (arit. I)	Operar		13	11,6
					ASc.3 (arit.II	Agrupar y operar		13	≤ 5
				ESc1			Intentos fallidos uso anál. Estruc	35,8	8,4
				ESc2			Intentos fallidos uso anál. Estruc	≤ 5	≤ 5
				ESc3			Intentos fallidos uso anál. Estruc	≤ 5	9
				ESc4			Sin valoración	≤ 5	≤ 5
Evolución estrategias análisis funcional – síntesis funcional (C-134)	18.1				ASop4	Analítica Incapacidad para generalizar	Análisis funcional	20-25	
					ASop5			≤ 5	
					ASop6		Síntesis estructural (transición Análisis/Síntesis)	≤ 5	
Síntesis funcional	18.2				ASop7	Capacidad para generalizar	Síntesis funcional	≤ 5	
				ESop5				20-25	
				ESr3				5-15	
	20.1 20.2 21.1 21.2				ASop4	Analítica Incapacidad para generalizar	Análisis funcional	5-8	
					ASop5		Síntesis estructural (transición Análisis/Síntesis)	≤ 1	
					ASop6			≤ 1	
					ASop7	Capacidad para generalizar	Síntesis funcional	≤ 1	
				ESop5				35-40	
				ESr3				5-12	
				ESop7				≤ 1	
	22				ASop4	Analítica Incapacidad para generalizar	Análisis funcional	4-6	
					ASop7	Capacidad para generalizar	Síntesis funcional	≤ 2	
				ESop5				25-30	
				ESr3				5-10	
Síntesis II Frontera Síntesis / Formal	24.1 24.2				ASop4	Analítica Incapacidad para generalizar	Análisis funcional	≤ 1	
					ASop6			1-5	
				Diversos errores					

6.4 Análisis de las respuestas, estrategias y errores a las tareas de la prueba PCN3 y su comparación con los resultados de las dos primeras pruebas

La prueba PCN3 se construyó mediante una nueva revisión y actualización del modelo local de comprensión y su aplicación a la prueba PCN2 en función de sus resultados (capítulos 4 y 5). Esta tercera aproximación del instrumento escrito, equivalente en lo fundamental a las versiones anteriores, se aplicó a una tercera muestra de sujetos procedentes de la población P2 (apartado 5.2), con la diferencia respecto a la población P1, de haber cursado la nueva asignatura Didáctica de la Aritmética del Plan de Estudios del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria.

El interés del análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas escritas a las tareas de esta tercera prueba es múltiple; entre otros aspectos, permitirá comprobar de nuevo la validez y fiabilidad del instrumento y examinar los efectos de la nueva asignatura sobre las capacidades y la comprensión de los estudiantes para maestro en torno a los sistemas de numeración.

En esta última parte del capítulo nos centramos en aquéllos aspectos en los que se han producido cambios con respecto a los resultados anteriores o en los que se han detectado hechos singulares o especialmente interesantes. Veamos en los apartados que siguen el análisis de las respuestas en cada una de las partes de la prueba.

6.4.1 Respuestas, errores y estrategias en el nivel técnico o de reproducción (prueba PCN3)

Los porcentajes de respuestas correctas en la prueba 3 a las tareas 5.1, 5.2 y 5.3 son cercanos al 100%, al igual que ocurriera en las dos pruebas anteriores. Como se ha explicado anteriormente, la razón de su presencia se debe al deseo de producir conflicto con las 8.1 y 8.2 y por consiguiente provocar la reflexión sobre la diferencia entre ambas tareas y por tanto la reducción de errores provocados por la resolución espontánea e irreflexiva de la misma.

Dados los porcentajes de respuestas correctas no realizaremos un análisis de estrategias y errores cometidos en las tres primeras tareas de este nivel de comprensión.

6.4.2 Errores y estrategias en el nivel de análisis (prueba PCN3) y su comparación con las dos primeras pruebas

En lo que sigue distinguiremos entre los principales subniveles de este bloque.

6.4.2.1 Nivel análisis 1 (prueba PCN3 y comparación con los resultados de las dos primeras pruebas)

En la *Tabla 2.3 del anexo IV* se exponen los resultados de las respuestas a los ítems correspondientes al nivel de análisis de las cuestiones relacionadas con conocimientos de la propia numeración incluidas en las actividades 8, 9 y 11 de la prueba PCN3. A continuación se realiza un análisis puntual de los principales resultados de estas tareas y de los errores y estrategias utilizadas para su resolución.

Ítems 8.1 y 8.2: En comparación con las dos primeras pruebas el porcentaje de respuestas correctas ha registrado un aumento sustancial. Prácticamente dos de cada tres alumnos diferencian entre la cifra de un orden y el número de órdenes contenido en una cantidad, lo que supone un avance significativo en la comprensión analítica estructural de los sujetos. Esto hace que se reduzca de forma significativa el porcentaje de alumnos que cometen el error EAe.1, que se sitúa en esta prueba en torno al 32,1% frente a los porcentajes del 76% y del 55% en las dos pruebas anteriores.

Ítems 9.1 y 9.2: Se confirma la mejora en el porcentaje de respuestas correctas en ambas tareas respecto a las dos pruebas anteriores. Se mantiene la diferencia entre los porcentajes entre ambas cuestiones, aunque en esta tercera prueba el diferencial entre ellas es de 5 puntos porcentuales, cuando en las anteriores este valor se elevaba a los 30 puntos. También, como ocurría en las PCN1 y PCN2, el porcentaje de SR en 9.2 duplica al de 9.1, aunque con un porcentaje netamente inferior a los registrados anteriormente.

Se confirma la presencia del error EAr.2, por el que construyen el número pedido yuxtaponiendo los diferentes órdenes, aunque con porcentajes muy reducidos y cercanos al 4% en la 9.2 y del 1% en la 9.1.

Ítem 11: En esta tarea se aprecia igualmente un aumento del porcentaje de respuestas correctas, que suponen el 47,5%, frente al 20% y al 22% que se obtuvieron en las pruebas PCN1 y PCN2. Se reduce el porcentaje de SR en 17 puntos porcentuales respecto a los dos anteriores. Sin embargo se aprecia también la presencia del error EAe.1 con un porcentaje del 20% similar a lo encontrado en las dos pruebas anteriores.

6.4.2.2 nivel análisis 2 (prueba PCN3 y comparación con los resultados de las dos primeras pruebas)

Ítem 13: En esta tercera prueba se ha mantenido la redacción de la PCN2, que nos permitía discriminar las respuestas que suponen comprensión de las que consideran que las llevadas en cualquier orden, suponen las decenas formadas. A pesar de ello se aprecia un considerable aumento de respuestas correctas, con un diferencial de 44 puntos porcentuales respecto al segundo cuestionario.

En cuanto a los errores detectados se aprecia una importante reducción del porcentaje de los alumnos que cometen el EAop.1, situándose en el 6,4% frente al 52,6 % de la segunda prueba y un moderado aumento del diferencial de casi 7 puntos en el error EAop.2.

Ítem 14: También en esta tarea se aprecia un considerable aumento del porcentaje de respuestas correctas, que suponen el 34,6 % frente al 6,3% de aciertos en los dos cuestionarios anteriores. Se mantienen la presencia de los errores EAop.1 y EAop.3.

Ítem 15.1: Como ocurría en los dos tareas anteriores los porcentajes de respuestas correctas y los errores cometidos en los ítems del algoritmos de la multiplicación son similares a los del algoritmo de la suma. Si comparamos las dos pruebas que tienen una redacción similar se aprecia un considerable aumento del porcentaje de las respuestas correctas, suponiendo el 59% de la muestra en esta tercera prueba frente al 18,9% de la segunda y se mantienen la presencia de los errores EAop.1 y EAop.2.

Ítem 15.2: Aumenta hasta un 35,9% el porcentaje de respuestas correctas, manteniéndose las dos estrategias (AAop.1 y AAop.2) detectadas en las dos primeras. Disminuye al 6,4% los alumnos que no contestan y constituyen el 55,1 % los que comenten el EAop.1 y vuelve a aparecer, aunque con menor frecuencia, el EAop.4.

6.4.3 Errores y estrategias en el nivel de síntesis (prueba PCN3) y su comparación con los resultados de las dos primeras pruebas

Los alumnos que pertenecen a la población P2 y por tanto a la muestra seleccionada han cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética y esto condicionará sin duda, los resultados de sus respuestas en esta parte de la prueba, en la que se les plantean situaciones que tienen que ver con el desarrollo de la asignatura. Entre otros aspectos se pretende valorar el nivel de comprensión de la estructura de representación numérica a través de la capacidad de trasladar a nuevas situaciones contextualizadas, las ideas y estrategias construidas en nuestro sistema de numeración. Ello permitirá valorar la fortaleza y consistencia de la adquisición de estos conocimientos numéricos.

La inclusión de los sistemas de numeración y, en particular, de los sistemas posicionales con bases distintas a la decimal en el currículum de la nueva asignatura del grado de Educación Primaria, nos hace suponer que existirá una mejora significativa en el desarrollo de esta parte de la prueba, al igual que ha ocurrido en las dos componentes analíticas anteriores.

Ítem 17: Se aprecia un aumento considerable del porcentaje de respuestas correctas respecto de las dos pruebas anteriores con un porcentaje de respuestas en blanco cercano al 10%. El aumento supone más de 30 puntos porcentuales sobre la PCN2. También se aprecian grandes diferencias en lo que se refiere al tipo de estrategia utilizada para su resolución; así, utilizan la estrategia ASc.1 (consistente en rodear en el dibujo los sucesivos agrupamientos de 8) un porcentaje cercano al 90% de los que la han resuelto. También utilizan, aunque en menor medida, la estrategia ASc.2, semejante a la anterior pero realizada aritméticamente.

En cuanto a los errores cometidos aparece testimonialmente el ESc2 con un porcentaje reducido del 2,6%.

Ítems 18.1 y 18.2: También en estas tareas se registran porcentajes de respuestas correctas muy superiores a los encontrados en las dos pruebas anteriores. En la 18.1 el 73,07% de los alumnos resuelven la tarea, frente a porcentajes del orden del 28,4% y del 33,7% que se habían registrados en las dos pruebas anteriores. En la *Tabla 6.22* se muestran los porcentajes de las estrategias utilizadas en el desarrollo de las tres pruebas, observándose un desplazamiento evidente en la PCN3 hacia las estrategias más evolucionadas.

Tabla 6.22 Estrategias utilizadas en los ítems 18.1 de las PCN1, PCN2 y PCN3

Estrategia	PCN1	PCN2	PCN3
ASop.4	20%	27,4%	-
ASop.5	3,9%	-	-
ASop.6	1,9%	1,1%	-
ASop.7	3,6%	5,3 %	57,69%
Total	29,5%	33,8%	57,69%

En cuanto a los errores cometidos se aprecia igualmente una concentración sobre el ESop.5 (*Tabla 6.23)*, no apareciendo errores relacionados con intentos fallidos de traducir las cantidades dadas a nuestro sistema decimal (ESr.3).

En el caso de la tarea 18.2 el diferencial respecto a las dos pruebas anteriores se reduce situándose en los 23 puntos porcentuales, registrándose porcentajes de respuestas correctas netamente inferiores a los de la tarea anterior.

Tabla 6.23 Errores cometidos en los ítems 18.1 (PCN1, PCN2 y PCN3)

Errores	PCN1	PCN2	PCN3
ESop.5	24,5%	20%	9%
ESr.3	10,3%	13,7%	-
Otros	7,6%	5,4	-
Total	42,4%	39,1	9%

En las *Tablas 6.24 y 6.25* se muestran las estrategias utilizadas y los errores cometidos en las tres pruebas, con los porcentajes correspondientes.

La estructura de errores y de estrategias utilizadas se modifica sustancialmente en esta tercera prueba. Se abandonan las estrategias que suponían transformar las expresiones y operar en nuestro sistema, para realizar las acciones en estas representaciones no decimales y en cuanto a los errores cometidos, se reducen notablemente el ESop.5 y desaparece el error de traducción ESr.3.

Tabla 6.24 Estrategias utilizadas en los ítems 18.2 (PCN1, PCN2 y PCN3)

Estrategia	PCN1	PCN2	PCN3
ASop.4	21,3%	20%	-
ASop.5	1,3%	-	-
ASop.6	-	-	-
ASop.7	-	1,1 %	38,46
Total	22,6%	21,1%	38,46

Tabla 6.25 Errores cometidos en los ítems 18.2 (PCN1, PCN2 y PCN

Errores	PCN1	PCN2	PCN3
ESop.5	21,3%	21,1%	8,97%
ESop.6	-	-	1,28%
ESop.7	-	-	1,33%
ESr.3	9,7%	12,6%	-
Otros	4,4%	12,7%	11,49%
Total	35,4%	46,4%	23,07%

Ítems 20.1 y 20.2: Lo primero que observamos es que el número de SR sigue reduciéndose, pasando de un 41,9% en la tarea 20.1 de la primera prueba al 28,2% en la última y de un 51,6% en la tarea 20.2 de la primera prueba a un 35,89% en la tercera. Este descenso importante se ha traducido en un importante aumento de respuestas correctas en la tercera prueba (más de 40 y 30 puntos porcentuales respectivamente en las dos tareas analizadas). En la *Tabla 6.26* podemos ver esta progresión en las tres pruebas, mientras que en la *Tabla 6.27* se observan los errores cometidos en estos ítems con las frecuencias y porcentajes correspondientes.

Tabla 6.26 Porcentajes de SR en los ítems 20.1-2 en las tres pruebas.

	20.1		20.2	
	Ni	%	Ni	%
PCN1	65	41,9	80	51,6
PCN2	30	31.6	37	38,9
PCN3	22	28,2	28	35,89

En cuanto a las estrategias correctas utilizadas, observamos en la *Tabla 6.28* que aumenta de forma sustancial y casi como estrategia exclusiva las ASop.7 con porcentajes del 57,14 y 38,96 respectivamente.

Tabla 6.27 Porcentajes y tipología de errores en los ítems 20.1- 20.2 en las tres pruebas

	PCN1		PCN2		PCN3	
	20.1	20.2	20.1	20.2	20.1	20.2
ESop.5	42%	35,5%	45,3%	42,1%	5,12%	6,41%
ESr.3	5%	4,5%	10,5%	9,5%	-	-
ESop.6	-	-	-	-	-	-
ESop.7	-	-	1,1%	1,1%	1,3%	1,3%
Otros	3%	1,3%	-	-	-	-
Total	49%	41,3%	56,9%	52,7%	6,42%	7,71%

Tabla 6.28 Porcentajes y tipología de estrategias en los ítems 20.1- 20.2 en las tres pruebas

	PCN1		PCN2		PCN3	
	20.1	20.2	20.1	20.2	20.1	20.2
ASop.4	6,5%	5,8%	8,4%	6,3%	-	-
ASop.5	-	-	1,1%	1,1%	-	-
ASop.6	-	0,6%	1,1%	-	-	-
ASop.7	2,5%	0,6%	1,1%	1,1%	57,14%	38,96%
Total	9%	7%	11,7%	8,5%	60,25%	41,02%

Ítems 24.1 y 24.2: En estos dos ítems, se aprecia un leve descenso de los porcentajes de SR (*Tabla 6.29)*. Sin embargo, este porcentaje se incorpora a las respuestas incorrectas.

Tabla 6.29 Porcentajes de SR en los ítems 24.1-2 en las tres pruebas

	24.1		24.2	
	Ni	%	Ni	%
PCN1	143	92,3	144	92,9
PCN2	85	89,5	87	91,6
PCN3	61	78,2	63	80,0

En el ítem 24.1 encontramos 4 alumnos que han realizado la tarea de forma satisfactoria utilizando la estrategia ASop.7; realizan la suma en el agrupamiento dado y realizan la necesaria transposición de órdenes para que la cantidad resultante esté expresada en la base indeterminada **x**. Por otra parte, nueve alumnos resuelven la situación operando directamente, pero sin considerar la base en la que se expresan las cantidades y ofreciendo como resultado “**x x x** $_{(x}$“, estrategia ASop.6. Un alumno (C44) toma el valor x = 5 y lo resuelve utilizando la estrategia ASop.7.

En la tarea 24.2 sólo un alumno la resuelve y 9 alumnos lo intentan sin conseguirlo, pues o bien invierten los papeles del minuendo y el sustraendo o transforman la cuestión en expresiones algebraicas con las que realizan tareas que no tienen nada que ver con la cuestión planteada; el alumno (C44), como en la anterior, considera un valor particular para x (x=5) y opera en base 5 utilizando la estrategia ASop.7.

Ítem 25: Esta tarea se ha incorporado en la PCN3 con el fin de facilitar el tránsito al desarrollo de las siguientes cuestiones y de valorar también la propia comprensión de los principios de agrupamiento y del valor de posición en sistemas de numeración con bases distintas a la decimal.

El porcentaje de respuestas correctas es del 64,1%, con comentarios del tipo: para la expresión **284**: *"Ya hallo un grupo de 8, por tanto ha de descomponerse en 1 grupo de 8 que en el inmediatamente superior y 0 sueltos"* Para la expresión **109**: *"Lo mismo solo que queda 1 suelto"* Para **930:** *"El 9 ha de descomponerse en 1 grupo de 8 y uno suelto". Para* **119:** *"Se ha de descomponer en 1 grupo de 8 que va al superior y 1 suelto"* (C-44; Figura 6.27).

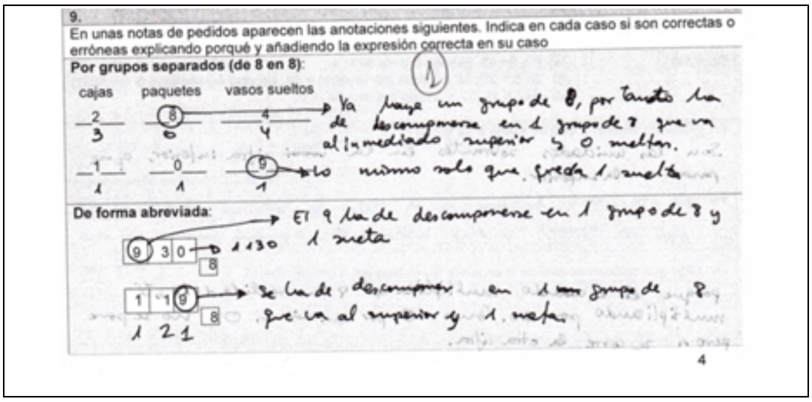


Figura 6.27 Respuesta del cuestionario C-44 al ítem IIIN.25

Encontramos un 17,9% de respuestas en blanco y un nuevo error (ESr.4), *por el que realizan de forma parcial las necesarias transferencias de órdenes para evitar expresiones incorrectas en el sistema utilizado*; así el 12,8% de la muestra realizan transferencias para evitar la presencia de la cifra 9 y, en cambio, aceptan como correctas las expresiones en la que aparecen la cifra 8 (Figura 6.28).

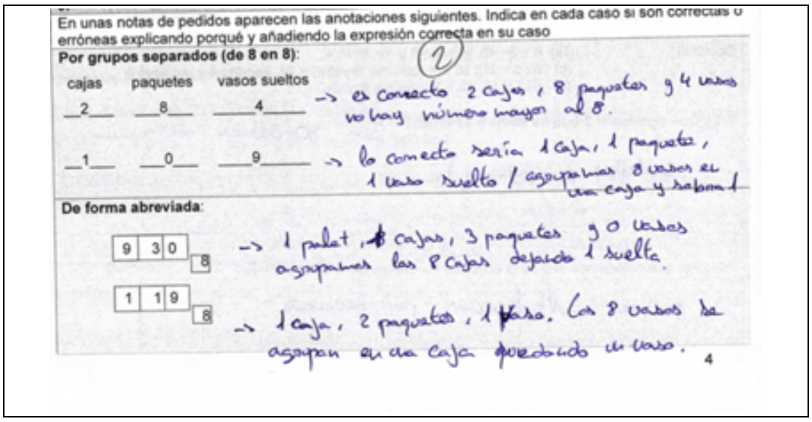


Figura 6.28 Respuesta del cuestionario C-31 al ítem 25

Este alumno C-31, considera correcta la expresión **284:** *"es correcto 2 cajas, 8 paquetes y 4 vasos, no hay número mayor que 8"*, para **109:** *" lo correcto sería 1 caja, 1 paquete, 1 vaso suelto/ agrupamos 8 vasos en una caja y sobra 1"*; **para 930(8 :** *"1 palé, 1 caja, 3 paquetes y 0 vaso, agrupamos las 8 cajas dejando 1 suelta",* **para 119(8 :** *"1 caja, 2 paquetes y 1 vaso, los 8 vasos se agrupan en una caja quedando un vaso".*

Ítem A26: Esta tarea se ha incorporado también para poder comprobar y valorar el avance en el nivel de síntesis. Sin embargo, puesto que la tipología de respuestas es similar a la de los dos ítems anteriores y del mismo orden que las encontradas en los dos primeros cuestionarios, creemos que no se han producido avances significativos en este subnivel epistemológico.

Ningún alumno resuelve correctamente la tarea, 3 alumnos intentan resolverla mediante los procedimientos *propios* de la división de polinomios sin encontrar sentido a los sucesivos restos obtenidos. También el alumno del cuestionario C-44 particulariza para x=9 e intenta la división en esta base sin conseguirlo.

6.5 Resultados y conclusiones del análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas a las tareas escritas

El estudio que se presenta en este capítulo es una primera aproximación al análisis semiótico y *hermenéutico* relacionado con los sistemas de numeración en los niveles de formación inicial de Maestros de Educación Primaria. Esta primera profundización se ha realizado sobre la producción de respuestas escritas a los ítems que componen las tres pruebas que se han aplicado a los alumnos del Grado de los estudios mencionados. Con las limitaciones propias de los estudios de este tipo, obtenemos los resultados y conclusiones que agrupamos en los siguientes epígrafes: estrategias utilizadas y usos del conocimiento que se deducen de las respuestas, errores detectados y su interpretación en su caso, comparación global de resultados en las tres pruebas y resultados y conclusiones generales del estudio realizado.

6.5.1 Estrategias y usos del conocimiento

✓ Se han detectado diferentes estrategias de resolución que se organizan, siguiendo el modelo local, tal y como aparecen en la Tabla 6.30.

Tabla 6.30 Organización de las estrategias observadas en los cuestionarios .

		CATEGORÍAS FENOMENOLÓGICAS				
		ESTRUCTURAR ORGANIZAR	REPRESENTAR TRADUCIR	CUANTIFICAR CONTAR	COMPARAR ORDENAR	COMBINAR OPERAR Algoritmos
CATEGORÍAS EPISTEMOLÓGICAS	NIVEL TÉCNICO O REPRODUCCIÓN		**ATr.1**			
	ANÁLISIS					**AAop.1** **AAop.2**
	SÍNTESIS		**ASr.1** **ASr.2**		**ASc.1** **ASc.2** **ASc.3**	**ASop.4** **ASop.5** **ASop.6** **ASop.7**

A. Estrategias relacionadas con las situaciones de representar/traducir.

Estrategias detectadas en los ítems: 4.1-2 y 12.1-2, correspondientes a los niveles epistemológico técnico y de análisis, y las categorías fenomenológica asociadas a las traducciones entre distintas representaciones numéricas.

ATr.1: Para encontrar el anterior o siguiente a un número en el sistema verbal y con ceros léxicos o semánticos necesitan traducir primero al sistema cifrado posicional.

Estrategias detectadas en los ítems: 7.1-2, 9.1-2 y 16, correspondientes al nivel epistemológico de síntesis y a las categorías fenomenológicas asociadas a las traducciones entre distintas representaciones numéricas.

ASr.1: Para expresar la cantidad de unidades en sistemas decimales, utilizan una estrategia polinómica, con dos variantes:

-Estrategia adecuada para realizar la traducción en sistemas adecuada con bases diferentes a la decimal:

$$5x10^3 +4x10^2 +5x\ 10 +9$$

-Estrategia variante de la anterior, en la que se transforma de forma progresiva las unidades de mayor a menor orden; traducción adecuada para sistemas con base diferente a 10 y además variable:

$$[(5x10 +4)x10) +5]x10 +9$$

ASr.2: Identificación entre sistemas decimales. Estrategia que denota el reconocimiento de la estructura decimal y por tanto la traducción automática entre ambos sistemas.

B. Estrategias relacionadas con las situaciones de cuantificar/contar.

Estrategias detectadas en los ítems: 17 y 19, correspondientes al nivel epistemológico de síntesis I y las categorías fenomenológicas asociadas a la determinación del cardinal de una colección en agrupamientos distintos al decimal.

ASc.1: Resolución gráfica mediante la identificación de los distintos órdenes.
ASc.2:Obtención de los órdenes que componen la cantidad mediante las sucesivas divisiones.
ASc.3: Estrategia que consiste en agotar las unidades de mayor a menor orden, realizando previamente la equivalencia entre cada uno de los distintos órdenes y las unidades.

C. *Estrategias* relacionadas con las situaciones de combinar/operar/algoritmos.

Estrategias detectadas en los ítems: 13.1-2, 14.1-2, 15.1-2-3, 18.1-2, 20.1-2 y 21.1-2, correspondientes a los niveles epistemológico de análisis y de síntesis, y a las categorías fenomenológicas asociadas a las operaciones y los algoritmos.

AAop.1: Para justificar la necesidad de "correr un lugar" al multiplicar por las decenas del multiplicador hacen referencia directa o indirecta a la propiedad distributiva.
AAop.2: Para justificar la necesidad de "correr un lugar" al multiplicar por las decenas del multiplicador, argumentan que como multiplican por decenas el resultado son decenas.
ASop.4: Para expresar el resultado de operaciones en bases distintas a la decimal, traducen a base 10 y operar a continuación.

ASop.5: Para expresar el resultado de operaciones en bases distintas a la decimal, en primer lugar operan en los distintos agrupamientos y posteriormente traducen o pasan a base 10.
ASop.6: Para expresar el resultado de operaciones en bases distintas a la decimal, operan en los agrupamientos correspondientes, ofreciendo los resultados sin realizar trasferencia entre los distintos órdenes y por tanto con cantidades en algunos de ellos superior a la base.
ASop.7: Para expresar el resultado de operaciones en bases distintas a la decimal, operan en los agrupamientos correspondientes ofreciendo los resultados con transferencias de órdenes y expresiones canónicas.

6.5.2 Errores detectados y su interpretación

✓ En el análisis de los errores que cometen los alumnos al realizar las pruebas escritas hemos detectado un total de 20 y que distribuimos siguiendo el modelo local construido según la Tabla 6.31.

Tabla 6.31 Distribución de los errores observados en las pruebas

		CATEGORÍAS FENOMENOLÓGICAS				
		ESTRUCTURAR ORGANIZAR	**REPRESENTAR TRADUCIR**	**CUANTIFICAR CONTAR**	**COMPARAR ORDENAR**	**COMBINAR OPERAR Algoritmos**
CATEGORÍAS EPISTEMOLÓGICAS	**NIVEL TÉCNICO O REPRODUCCIÓN**		**ETr.1**			
	ANÁLISIS	**EAe.1 EAe.2 EAe.3**	**EAr.1 EAr.2**			**EAop.1 EAop.2 EAop.3 EAop.4**
	SÍNTESIS I		**ESr.3**	**ESc.1 ESc.2 ESc.3 ESc.4**		**ESop.5 ESop.6 ESop.7**

A. Errores relacionados con las situaciones de estructurar/organizar.

Errores detectados en los ítems: 8.1-2, 10 y 11, correspondientes al nivel epistemológico de análisis y las categorías fenomenológicas asociadas a la estructura y la organización de los conocimientos del propio sistema de numeración.

EAe.1: Confundir el número de órdenes contenidos en un número, con las cifras de los órdenes que lo componen;
EAe.2: Problemas para relacionar los distintos órdenes;
EAe.3: Variante del En.1, por el que confunden el número de órdenes contenidos en un número con el número de unidades que resultan de la siguiente expresión: $c_n \cdot 10^n$, donde c_n es la cifra del orden correspondiente;

B. Errores relacionados con las situaciones de representar/traducir.

Errores detectados en los ítems: 4.1-2 y 12.1-2, correspondientes a los niveles epistemológico técnico y de análisis, y las categorías fenomenológicas asociadas a las traducciones entre distintas representaciones numéricas.

ETr.1: En el caso de cantidades expresadas en el sistema verbal, no considerar los ceros, tanto léxicos como sintácticos, para el anterior o posterior de un número.

Errores detectados en los ítems: 7.1-2, 9.1-2, 16, 18.1-2, 20.1-2 y 21.1-2, correspondientes a los niveles epistemológico de análisis y de síntesis y a las categorías fenomenológica asociadas a las traducciones entre distintas representaciones numéricas.

EAr.1: Traducir del verbal al cifrado escribiendo las cifras presentes en la expresión verbal, sin tener en cuenta las necesarias trasformaciones de órdenes. (Se observa aquí que el sistema cifrado es dominado-comprendido en mayor medida que el verbal).
EAr.2: Construir el numero mediante la yuxtaposición de las cantidades expresadas en el sistema verbal.
ESr.3: Pretenden pasar a base 10 realizando transformaciones erróneas. Es frecuente en este caso multiplicar la cantidad por la base para obtener cantidades en nuestro sistema.

C. Errores relacionados con las situaciones de cuantificar/contar.

Errores detectados en los ítems: 17 y 19, correspondientes al nivel epistemológico de síntesis I y las categorías fenomenológicas asociadas a la determinación del cardinal de una colección en agrupamientos distintos al decimal.

ESc.1: Cuenta el total de objetos, los agrupa en la base del sistema mediante divisiones, pero repite órdenes.
ESc.2: Error idéntico al anterior, en cuanto a resultados, pero donde se actúa sólo con agrupamiento gráficos, sin realizar operaciones.
ESc.3: No tiene en cuenta la base utilizada, simplemente los cuenta en nuestro sistema.
ESc.4: Obtiene los distintos agrupamientos pero a la hora de expresar el resultado final no se realizan las transferencias de órdenes.

D. Errores relacionados con las situaciones de combinar/operar/algoritmos.

Errores detectados en los ítems: 13.1-2, 14.1-2, 15.1-2-3, 18.1-2, 20.1-2 y 21.1-2, correspondientes a los niveles epistemológico de análisis y de síntesis, y a las categorías fenomenológicas asociadas a las operaciones y los algoritmos.

EAop.1: Aplicaciones mecánicas del algoritmo.
EAop.2: Considera decenas en todas las llevadas.
EAop.3: Intento de justificar la decena que se toma, pero sin entender cómo se devuelve a las decenas del sustraendo.
EAop.4: Aceptación del mecanismo aprendido.
ESop.5: Operan sin tener en cuenta la base del sistema.
ESop.6: Restar siempre del orden mayor el menor, sin atender al papel de minuendo o sustraendo de las cantidades a las que cada una pertenece.

ESop.7: Variante de ESop.5. El sujeto opera en base 10, pero una vez resuelta las operaciones correspondientes realiza un reagrupamiento para evitar que algunos de los órdenes aparezcan valores superiores a la base.

6.5.3 Análisis comparativo de algunos resultados en las tres pruebas

Las pruebas 1 y 2 presentan resultados similares, hasta el punto que se puede asegurar que se trata de pruebas equivalentes y que las muestras que han respondido proceden de la misma población, es decir, no existen diferencias significativas entre los resultados de dichas pruebas, de manera que los sujetos de las dos muestras inician sus estudios de Grado con niveles de comprensión similares medidos con dichas pruebas. Como consecuencia podemos afirmar lo siguiente:

Los resultados globales de ambas pruebas establecen el perfil general sobre la comprensión de los sistemas de numeración con el que los alumnos del Grado acceden a los estudios universitarios.

Los resultados de la tercera prueba no presentan grandes diferencias con los de la 1ª y 2ª en los niveles inferiores conformados por las tareas técnicas o de reproducción, siendo mejores que los de las dos primeras a partir del nivel de Análisis estructural. Esta diferencia positiva se observa en los datos de las *Tablas 6.22* a *6.29* (apartado 6.5.) que comentamos a continuación.

Se aprecia en las *Tablas 6.22, 6.24, 6.28*, que recogen las estrategias utilizadas en la realización de las tareas de síntesis, una mayor concentración y porcentajes muy superiores de las estrategias que denotan rastros de comprensión sintético funcional de los sistemas de numeración, como es el caso de la ASop.7, en detrimento de la estrategia Asop.4, estrategia de análisis funcional, mayoritaria en las dos primeras pruebas y que denotan "cierta" incapacidad para actuar en sistemas de numeración posicionales y con bases distintas a la decimal.

Del mismo modo las *Tablas 6.23, 6.25* y *6.27* muestran una considerable reducción de los porcentajes de los errores cometidos en estas tareas de síntesis; el error ESop.5 mayoritario y con porcentajes cercanos al 25% en la tarea 18 y al 45% en la 20, se reducen a cotas cercanas al 10% en la tarea 18 y al 5% en la 24. En el caso del error ESr.3 con porcentajes cercanos al 10% en los ítems de síntesis I en las dos primeras pruebas, desaparece para las tareas correspondientes en la PCN3.

6.5.4 Conclusiones generales

✓ Se encuentran importantes coincidencias en la estructura de las estrategias utilizadas en las dos primeras pruebas, tanto en la tipología como en las frecuencias con que se aplican (*Tablas 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.10, 6.11, 6.14, 6.18, 6.19 y 6.21*). Sin embargo, se aprecian diferencias importantes entre las estrategias utilizadas en las dos primeras y la tercera; sobre todo, entre las estrategias utilizadas por los alumnos al resolver los ítems del nivel de análisis y especialmente en los de síntesis I de las PCN1 y PCN2 y las utilizadas por los alumnos en las tareas de PCN3. Se abandonan las estrategias que suponían transformar las expresiones y operar en nuestro sistema, para realizar los procedimientos en estas representaciones no decimales Así, como se recoge en las *Tablas 6.22, 6.24 y 6.28*, se aprecia la desaparición de las estrategias ASop.4, ASop.5 y ASop.6 y el incremento sustancial en la ASop.7 en la PCN3.

✓ La estructura de errores cometidos en las dos primeras pruebas son coincidentes, tanto en la tipología como en la frecuencia con que se presentan (*Tablas 6.5, 6.9, 6.12, 6.13, 6.15, 6.17, 6.19 y 6.21*). Y como ocurría con las estrategias, en la tercera prueba y fundamentalmente en las tareas de los niveles de análisis y de síntesis I, se aprecia reducción de la frecuencia en algunos errores y en otros incluso llegan a desaparecer; así sucede con los errores ESop.1 y ESop.5, en los que según se desprende de los valores recogidos en las *Tablas 6.23, 6.25 y 6.27*, se produce una reducción importante en los porcentajes respecto a su presencia en las dos primeras y en cuanto al error ESr.3, cuya presencia era significativa en las dos primeras, en la PCN3 desaparece.

✓ La coincidencia de las estructuras de errores y de estrategias utilizadas por los alumnos en las dos primeras pruebas, junto con los resultados del análisis descriptivo global realizado, nos permite confirmar la fiabilidad de los instrumentos utilizados para configurar una aproximación aceptable a la valoración de la comprensión que tienen los alumnos sobre los sistemas de numeración.

✓ De los resultados se deduce que los alumnos que inician el grado de Maestro de Educación Primaria tienen un conocimiento reducido y eminentemente instrumental de la numeración natural.

✓ La conjunción de la reducción de errores y el aumento de los porcentajes de las estrategias correctas de resolución, nos permite reconocer una mejora de la comprensión de los alumnos que han cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética respecto a sus compañeros que no la han cursado; aunque solo en los niveles de análisis y de síntesis I, pues se mantienen de forma equivalente los niveles de respuestas en los niveles técnico y síntesis II.

✓ Los resultados obtenidos en la PCN3 animan a seguir trabajando en el diseño de la asignatura Didáctica de la Aritmética con la intención de optimizar el proceso de formación de los futuros maestros. Los resultados de nuestra investigación nos permitirán hacer propuestas fundamentadas para la formación matemática y didáctica, que mejoren los propios conocimientos matemáticos de los futuros maestros y para que, en su momento, estén en condiciones de presentar a sus alumnos situaciones adecuadas a su nivel y capacidad. Esta será una de las perspectivas que consideraremos en la continuación de nuestro trabajo.

✓ Nuestra investigación prueba que se produce mejora en la comprensión de la numeración; si bien, entendemos que un mayor conocimiento tanto del modelo local y de los instrumentos generados, como de los errores y las estrategias utilizadas en las respuestas producidas, ayudarán a plantear situaciones enfocadas a provocar conflictos y contradicciones, que permitan generar discusiones en las que se pongan de relieve distintos puntos de vista y se analicen y se comprendan los distintos modos de hacer y los errores cometidos.

✓ En este sentido, tanto el análisis del modelo local, de los instrumentos utilizados y los propios resultados obtenidos en su aplicación pueden ser un excelente medio para profundizar en el análisis didáctico de los sistemas de numeración desde sus dimensiones curricular (González y Gallardo, 2013) y para la formación del profesorado en formación (Gómez y González, 2013), pues al tratarse de elementos diseñados para el estudio de la comprensión de los estudiantes para maestro y considerar las respuestas recientes de alumnos de este grado, tienen la credibilidad y suponen un buen contexto para profundizar en los organizadores curriculares histórico, matemático, representacional, cognitivo y fenomenológico de los sistemas de numeración, entender las razones de las limitaciones, las dificultades y los errores encontrados, sí como para poder analizar las diferentes estrategias utilizadas en su resolución y diseñar tareas adecuadas en sus propuestas didácticas.

CAPÍTULO 7

Análisis semiótico y hermenéutico de la comprensión de los sistemas de numeración en entrevistas individuales

7.1 Introducción

De acuerdo con el objetivo O3 de la investigación: “Efectuar una aproximación al estado de la comprensión y el dominio de los sistemas de numeración de los alumnos futuros maestros del grado de Primaria”, y atendiendo al esquema metodológico desarrollado en los capítulos 1 y 4 (epígrafe 1.5, figura 1.4 y epígrafe 4.2, figura 4.1) hemos realizado (capítulo 5) el análisis puntual de las frecuencias absolutas y relativas de los tres tipos de respuestas (correctas, incorrectas y SR) en las tres pruebas escritas, un estudio global, gráfico y correlacional de los resultados en cada una de las cuatro partes que corresponden a los niveles de comprensión del modelo local establecido, una comparación puntual y global entre las distintas pruebas, y se ha establecido la distribución de los alumnos de la muestra por niveles de comprensión atendiendo a sus vectores de comprensión y a los criterios previamente definidos. Con todo ello hemos realizado la primera aproximación a la valoración del estado de la comprensión de los sistemas de numeración de las muestras analizadas y ha sido posible disponer de una visión global general de la situación cognitiva de los sujetos en este campo de conocimiento al iniciar el grado y de algunos indicios razonables sobre los avances que en este tema han propiciado el desarrollo de la asignatura Didáctica de la Aritmética, sin que ello haya sido el propósito central del presente estudio.

En una segunda aproximación se ha desarrollado en el capítulo 6 un análisis de carácter semiótico y hermenéutico, de carácter cualitativo y mas próximo al objetivo buscado, consistente en identificar los rastros de comprensión y los usos mayoritarios del conocimiento, en términos de errores y estrategias mayoritarias, en las respuestas escritas de las tres pruebas. Se trata de una segunda aproximación que, junto con la primera anteriormente descrita, constituyen el fundamento del proceso de entrevistas individuales del capitulo 7, ultima etapa en este proceso de acercamiento a la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes para el grado de Educación Primaria.

Con la información y los resultados obtenidos en las dos primeras aproximaciones, el presente capítulo se orienta al estudio de una tercera aproximación al fenómeno a través del análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas e interacciones observadas en entrevistas semi-estructuradas realizadas a una muestra reducida de sujetos con el propósito de profundizar en el estudio individualizado. Aquí se trata de reconocer los usos detectados en los estudios anteriores, identificar si fuera posible perfiles de alumnos contemplados en dichos estudios, profundizar en las facetas menos evidentes y más ocultas de la comprensión e involucrar a los sujetos en la interpretación de su propia comprensión. En este caso, siguiendo las pautas de investigaciones previas (Gallardo, González y Quintanilla, 2013), el estudio culmina con la identificación de rastros de comprensión y usos del conocimiento matemático de acuerdo con las categorías del modelo propuesto.

7.2 Entrevistas individuales: Marco teórico y metodológico

7.2.1 Finalidad del estudio

Para dar respuesta a la finalidad general de la investigación (epígrafe 1.4.1): "*Averiguar la comprensión que manifiestan, los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan los estudiantes del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria sobre los sistemas de numeración en general y, en particular, sobre el sistema de numeración usual para los números naturales, con el propósito de extraer consecuencias fundadas para orientar el diseño de esa parte específica de la formación inicial"* hemos desarrollado una tercera aproximación mediante entrevistas individuales que completa la información de las dos primeras aproximaciones en el sentido siguiente:

- Reconocer los usos detectados en los estudios anteriores en forma de errores y estrategias.
- Observar la forma en que construyen las respuestas y valorar los silencios, las dudas y los titubeos o las rectificaciones que se producen en su desarrollo.
- Reconocer perfiles identificados en los estudios cuantitativos globales, en los que, por ejemplo, se concluía que la mayoría de los alumnos de primer curso presentaban características cercanas a niveles de comprensión técnicos o de reproducción de los sistemas de numeración o que cursar la asignatura de Didáctica de la Aritmética producía una mejora relativa en la comprensión de los alumnos, sobre todo en los niveles de análisis y síntesis I.
- Precisar algunas respuestas obtenidas en los cuestionarios escritos y valorar la determinación de los errores y estrategias analizadas detectadas en dichos cuestionarios.
- Confirmar que las SR corresponden a la "no comprensión", a la imposibilidad de su resolución y no a la dejadez, cansancio, etc., que pudieran estar presente en la realización de los cuestionarios escritos.
- Incluir algunas cuestiones correspondientes al nivel de síntesis II, para los alumnos que respondieron acertadamente a la totalidad del primero y segundo cuestionarios.
- Analizar los tipos de respuestas de sujetos con un nivel formal mayor de formación matemática.
- Llegar a acuerdos sobre las dificultades, los errores de comprensión y las necesidades de formación para afrontar con garantías el futuro desarrollo profesional en el ámbito de la Educación Matemática.
- Validar el modelo local y la prueba de comprensión numérica construida.

7.2.2 Metodología

Las tareas que componen las entrevistas (epígrafe 4.9) atienden al modelo local desarrollado y constan de cuatro partes diferenciadas: cuestiones del nivel técnico o de reproducción, cuestiones del nivel de análisis, del nivel de síntesis I y del nivel de síntesis II. Las tareas concretas están recogidas en el apartado A3.5 del anexo III.

El desarrollo de las entrevistas ha seguido el siguiente protocolo en todos los casos:

1.- Explicación del objetivo de la investigación y de la propia entrevista.

2.- Proyección en la PDI de la cuestión a resolver.

3.- Lectura y aclaración del contenido de cada cuestión respondiendo a las dudas que pudieran tener y realizando preguntas "aclaratorias" en los casos en que se constatara, después de un tiempo razonable, la inactividad del alumno o que respondieran de forma incorrecta.

4.- Desarrollo de la entrevista hasta acabar o comprobar que el propio alumno reconocía su incapacidad para resolver la tarea propuesta.

5.- Intercambio de impresiones sobre las tareas, el contenido y su relación con la formación de docentes.

7.2.3 Codificación y registro de la información

Para la trascripción de las entrevistas utilizamos códigos para identificar al alumno entrevistado, indicando el curso al que pertenece (1 ó 2 para los alumnos del grado de Primaria y la letra "s" para el caso de los alumnos del master de secundaria). Así por ejemplo, A1-1º identifica la entrevista realizada al alumno A1 de primer curso, A3-2º sería la identificación del alumno A3 de 2º curso del grado y A2-s corresponde a la realizada por el alumno A2 del master de secundaria.

En cada una de las tareas propuestas utilizamos una R para registrar las respuestas de los alumnos y las letras E y E´ para las intervenciones del entrevistador y el director de tesis que participó en algunas de las entrevistas. En cada una de las tareas propuestas enumeramos tanto las preguntas como las respuestas para su identificación y localización. Reflejamos los comentarios de los participantes y entre paréntesis describiremos las acciones que realiza el entrevistado para resolver las tareas. En el apartado A5.1 del anexo V se encuentra la transcripción de las entrevistas realizadas.

7.2.4 Desarrollo del estudio

Se han realizado un total de 21 entrevistas a alumnos de primer y segundo curso del grado de Educación Primaria y alumnos del Master de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato. El alumnado participante ha sido seleccionado de forma intencional, dentro de cada categoría elegida para el estudio, y todos se han prestado voluntariamente a participar. En el primer curso se han realizado 9 entrevistas, 8 en segundo curso y 4 alumnos del Master de Secundaria.

Todas las entrevistas se han realizado durante los meses de mayo y junio del año 2012; el alumnado entrevistado de primer curso, como en el caso de la PCN1 aplicada en el curso 2010/11, no había recibido formación en materias de Matemática o de Didáctica de la Matemática. Del alumnado de segundo curso, que habían cursado en el primer cuatrimestre la asignatura Didáctica de la Aritmética, uno no había realizado ninguna de las tres pruebas escritas, 2 completaron en mayo de 2011 el cuestionario PCN1, 3 realizaron en octubre de 2011 la PCN2 y 2 alumnos del grupo F de segundo curso respondieron en mayo del 2012 la prueba PCN3; para estos 2 últimos, dada la proximidad entre la dos pruebas, la entrevista se limitó a cuestionarles los ítems en los que habían tenido problemas para responder o sus respuestas nos planteaban alguna dudas; los 4 alumnos del master de secundaria se presentaron voluntarios a la oferta que se les hizo en una de las asignaturas del módulo específico.

Las entrevistas se han grabado en video (apartado A5.3 del anexo V), se han realizado en el seminario de Didáctica de la Matemática, utilizando para su desarrollo la pizarra digital interactiva, de manera que también se tienen como evidencias las producciones que los entrevistados han realizado sobre dicha pizarra digital (apartado A5.4 del anexo V). Han tenido una duración variable que ha dependido en cada caso del nivel de las respuestas de los alumnos. Como indicaremos más adelante los alumnos que podemos considerar de niveles de comprensión más avanzados han completado todas las tareas de la entrevista llegando a los últimos ítems; sin embargo algunos de los alumnos de primer curso, con perfiles asociados al nivel técnico o de reproducción, han "admitido" su incapacidad para realizar las tareas incluidas en la categoría epistemológica de síntesis. Los primeros han respondido en una media de 70 minutos aproximadamente y los segundos han necesitado aproximadamente 40 minutos para desarrollar la parte de la entrevista completada.

En el apartado A5.2 del anexo V se ofrece un primer análisis de cada una de las entrevistas con la consideración de los errores y las estrategias detectadas en esta tercera aproximación. Para identificar y caracterizar los usos del conocimiento matemático hemos seleccionado las 10 tareas de los niveles de análisis y síntesis, tanto estructural como funcional, que muestran mayores rastros de comprensión en los análisis realizados en los capítulos 5 y 6; con ello pretendemos mejorar la interpretación y completar el ciclo interpretativo de la comprensión de los sistemas de numeración.

De los dos niveles epistemológicos señalados, seleccionamos los cuatro grupos de tareas siguientes, de los que los tres primeros han estado presentes en los cuestionarios aplicados y el cuarto recoge nuevas tareas del nivel sintético y fronterizo con el formal:

- Primer grupo: tareas 4 y 5 del nivel de análisis estructural que corresponden a los ítems IIN8 y IIN12 de los cuestionarios aplicados.
- Segundo grupo: tareas 7, 8 y 9 del nivel de análisis funcional asociadas a la categoría fenomenológica de calcular, algoritmos y operaciones, que corresponden, respectivamente, a los ítems IIA13, IIA14 y IIA15 de los cuestionarios aplicados.
- Tercer grupo: tareas 12 y 13 asociadas al nivel de síntesis funcional del sistema de numeración asociada a los algoritmos en agrupamientos distintos al decimal; correspondientes a los ítems III.IA18 y III.IIA24 de los cuestionarios aplicados.
- Cuarto grupo: tarea 14 (ítem III.IIC26) de síntesis funcional asociada a la obtención del cardinal de colecciones en agrupamientos indeterminados.

En cada una de estas tareas señalamos las unidades de análisis en las que detectamos rastros de comprensión asociados a algunos de los niveles epistemológicos definidos en el modelo; entre los más significativos hemos elegido las siguientes unidades de análisis que servirán para identificar los fragmentos que contienen los rastros de comprensión señalados en cada uno de ellos:

Unidad 1: Distinción entre el numero de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente: valor de posición, relación y transferencia entre los distintos órdenes.

Unidad 2: Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos ordenes (expresión polinómica no canónica): relaciones y transferencias entre los distintos ordenes.

Unidad 3: Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en el sistema decimal.

Unidad 4: Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en el sistema decimal.

Unidad 5: Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación: descomposición polinómica del multiplicador y aplicación de la propiedad distributiva.

Unidad 6: Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en sistemas posicionales distintos al decimal.

Unidad 7: Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en sistemas posicionales distintos al decimal.

Unidad 8: Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en sistemas posicionales indeterminados.

Unidad 9: Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos indeterminados: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en sistemas posicionales indeterminados.

Unidad 10: Cálculo del cardinal de colecciones en agrupamientos indeterminados: aplicación del principio aditivo o de agrupamientos múltiples y del principio posicional en sistemas de base indeterminada.

Con respecto a cada unidad de análisis se identifican los fragmentos que incluyen los rastros de comprensión, los rastros de complicidad/empatía entre entrevistador y entrevistado, los errores cometidos, las estrategias utilizadas, los usos del conocimiento y las relaciones/ interferencias entre niveles. Dicha información nos permitirá completar la siguiente tabla de doble entrada con la que resumir y poder relacionar la comprensión que manifiestan los participantes en la entrevistas.

Tabla 7.1 Cuadro resumen del análisis hermenéutico de las respuestas a las tareas seleccionadas

Tareas	*Unidades*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/ empatía.*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Unidad 1						
IIN12	Unidad 2						
IIA13	Unidad 3						
IIA14	Unidad 4						
IIA15	Unidad 5						
III.IA18.1	Unidad 6						
III.IA18.2	Unidad 7						
III.IIA24.1	Unidad 8						
III.IIA24.2	Unidad 9						
III.IIC26	Unidad10						

7.3 Análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas a las entrevistas individuales

Los resultados del primer análisis de las 21 entrevistas realizadas (apartado A5.2 del anexo V) se presentan resumidos en la Tabla 7.2, en la que se recogen los usos del conocimiento puesto en juego en cada una de las tareas. Hemos designado por T un uso técnico, por A un uso analítico, por S1 un uso sintético de nivel 1 y por S2 un uso sintético de nivel 2; mediante N/R1 nos referimos a una tarea no realizada en la entrevista, fundamentalmente por la incapacidad mostrada en los intentos de realización, y por N/R2 queremos indicar que se trata de una tarea realizada correctamente en la PCN3.

Tabla 7.2 Usos del conocimiento en las tareas seleccionadas para las entrevistas

Tarea / Alumno	IIN8	IIN12	IIA13	IIA14	IIA15	III.IA18.1	III.IA18.2	III.IIA24.1	III.IIA24.2	III.IIC26
A1-1º	-[1]	A	A	T	A	S1	T	S2	-	-
A2-1º	-	-	T	T	T	T	T	T	N/R_1 [2]	N/R_1
A3-1º	-	-	T	T	T	A-S	T	-	-	N/R_1
A4-1º	-	-	T	T	T	T-A	N/R_1	-	-	-
A5-1º	-	A	A	T	A	A-S	T-A	A/S	A-S	A-S
A6-1º	-	A	A	T	T	A-S1	T-A	N/R_1	N/R_1	N/R_1
A7-1º	-	-	T	T	T	T-A	T	-	N/R_1	N/R_1
A8-1º	-	-	T	T	T	T-A	-	-	N/R_1	N/R_1
A9-1º	-	-	T	T	N/R_1	A	-	N/R_1	N/R_1	N/R_1
A1-2º	A	N/R_2	A	A	T	S1	S1	S2	S2	N/R_1
A2-2º	-	A	A	A	A	S1	S1	-	N/R_1	N/R_1
A3-2º	A	A	A	A	A	S1	S1	S2	S2	S2
A4-2º	N/R_2	N/R_2	A	A	A	S1	S1	S2	S2	N/R_1
A5-2º	A	A	A	A	T-A	S1	S1	T-A	-	-
A6-2º	A	A	A	T-A	A	S1	S1	-	-	-
A7-2º	N/R_2	N/R_2	A	A	T-A	S1	S1	S2	S2	N/R_1
A8-2º	-	-	A	T	T-A	T	T	-	N/R_1	-
A1-s	A	A	A	A	A	S1	A	S2	S2	S2
A2-s	A	A	A	A	A	S1	S1	S2	S2	S2
A3-s	A	A	A	A	A	S1	S1	S2	S2	S2
A4-s	A	A	A	A	A	S1	S1	S2	S2	S2

De las 21 entrevistas realizadas hemos seleccionado las 9 que creemos que cumplen con la finalidad y las razones expuestas en el epígrafe anterior para realizar la tercera aproximación señalada. De los alumnos que inician los estudios de Magisterio hemos seleccionado tres de ellos: por una parte, la alumna A2-1º, con una comprensión eminentemente técnica del sistema de numeración, perfil mayoritario en la entrevista (de los 9 alumnos entrevistados 6 responden a este perfil (A2-1º, A4-1º, A7-1º, A8-1º y A9-1º)); por otra, los alumnos A3-1º y A5-1º, el primero con un perfil inicial eminentemente técnico pero que modifica algunas de sus estrategias a preguntas del entrevistador, y el segundo, que realiza la entrevista completa y puede representar a los alumnos con un mejor nivel de comprensión de los sistemas de numeración.

Hemos elegido 7 de los 8 alumnos de segundo curso que han realizado la entrevista por las siguientes razones:

- A1-2º y A4-2º son dos de los tres alumnos que habían realizado la PCN3 en fechas próximas a la entrevista. Se han elegido con el propósito de completar el estudio

[1] Sin valoración
[2] Tarea no realizada en la entrevista por distintas consideraciones del propio entrevistador, la causa fundamental es la incapacidad mostrada para realizarla

realizado, despejar algunas dudas sobre sus respuestas y encontrar rastros de comprensión no visibles en las pruebas escritas.

- A2-2º y A3-2º son dos alumnos que habían realizado cuatro meses antes la PCN2. Se han elegido para comprobar y comparar los resultados obtenidos en las dos pruebas y valorar el efecto producido por la asignatura Didáctica de la Aritmética.

- A5-2º y A6-2º habían realizado un año antes la PCN1. Pretendemos comparar los resultados obtenidos en las dos pruebas y valorar el efecto producido por la asignatura.

- El alumno A8-2º no había realizado ninguna de las pruebas escritas, por lo que dada su escasa participación en la asignatura y en el área podemos considerarlo como alumno con características similares a las de los alumnos de primer curso.

De los alumnos del master de secundaria que han realizado la entrevista, todos de características similares, hemos elegido al alumno A4-s por su formación superior en matemáticas.

7. 3. 1. Análisis de entrevistas a alumnos de primer curso

7. 3. 1. 1 Alumna A2-1º

La alumna que realiza esta entrevista pertenece al grupo E de primer curso del grado de Educación Primaria. Ha cursado un bachillerato de Humanidades y no ha cursado Matemáticas desde 4º de ESO. No ha participado en ninguna de las pruebas escritas y realiza la entrevista el 31 de mayo a las 18:15 horas.

Unidad 1. Distinción entre el número de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente (tarea IIN8).

De la entrevista a A2-1º seleccionamos para su análisis el siguiente fragmento relacionado con esta primera unidad:

E1. Pretendo que me digas, en ese número (8234), ¿cuántas centenas hay? , o lo que es lo mismo, ¿cuántas centenas contiene ese número?
R1. (Escribe 200)
E2. ¿Cuántas unidades contiene?
R2. (Escribe 4)
E3. ¿Y cuantas decenas contiene?
R3. (Escribe 30)
E4.Te pido las centenas que contiene el número.
R4. Si.
E5. ¿El número ocho mil doscientos treinta y cuatro contiene doscientas centenas?
R5. Solo el número. Que marque el número. Ah vale, que marque el número (borra y deja el 2)
E6. Te pregunto por las centenas que contiene ese número.
R6. Vale, vale (borra también el 0 del 30). (Piensa). Eso. (deja sólo las cifras que corresponden a los órdenes pedidos: 2, 3 y 4).

Como se puede observar responde inicialmente cometiendo el error EAe3; ante las preguntas realizadas, entendiendo que la respuesta dada no corresponde a lo pedido, modifica su respuesta y comete el error EAe1. Volvemos a constatar que la alumna responde a lo que ella entiende que se le pregunta, no diferenciando entre los conceptos implicados en las tareas 3 y 4 de la entrevista. No encontramos rastros de comprensión que nos permitan interpretar en esta unidad el uso analítico estructural de los sistemas de numeración.

Unidad 2. Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos órdenes (tarea IIN12).

En esta tarea se incluyen dos números con distintas estructuras, el primero permite su transcripción casi directa por estar formados por órdenes separados o disjuntos (trece decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades), con la única dificultad de las trece decenas de mil, mientras que en el segundo los órdenes están distribuidos entre las distintas expresiones y se necesita de las oportunas transferencias (siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas y diecisiete unidades).
De la entrevista a A2-1º seleccionamos para su análisis el siguiente fragmento relacionado con esta segunda unidad:

R1. (Escribe 13.405)
E2. Y ahora el de abajo.
R2. (Escribe 7.3) Ahí es donde ya digo, ¿donde pongo el 13?
E3. Trece centenas.
R3. (Borra lo anterior).Trece centenas. (Piensa y vuelve a escribir 7.). Estoy "superpegá" vaya.

Realiza la traducción al decimal de la expresión polinómica primera, componiendo el número sin reparar en las decenas de mil; en la segunda traducción, al necesitar descomponer los órdenes presentes y transferir entre ellos, se bloquea y admite su falta de comprensión analítica estructural.

Unidad 3. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma (368 + 457).

Se trata de una unidad extraída de la resolución de la tarea 7, en la que se pide que se realice una suma de dos sumandos y que se justifiquen las acciones que se van realizando. El siguiente fragmento contiene información útil para el análisis que venimos realizando:

R8. Pues lo que he dicho antes, cada cifra … cada lugar puede tener una cifra, y si no puedo poner 15, bueno de toda la vida, no se dar la explicación pues toda la vida lo hemos hecho así…y supongo yo que cada lugar, cada posición debe tener una cifra… entonces en las unidades, es como si me sobrara uno y se las sumo a las decenas.

En los resultados parciales obtenidos en el algoritmo de la suma la alumna no distingue suficientemente el orden sobre el que actúa y por ello comete el error EAop.2 al considerar unidades y decenas en todas las sumas parciales independientemente del orden implicado; manifiesta un conocimiento técnico del algoritmo al reconocer que hace lo que le han enseñado, sin justificar los procedimientos implícitos en el mismo.

Unidad 4. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta (tarea IIA14).

Extraído de la resolución de la tarea 8, en la que se pide que se realice una resta de dos sumandos y que se justifiquen las acciones que se van realizando. Las siguientes respuestas forman parte de la entrevista realizada a la alumna de referencia en torno a la tarea en la que se centra la presente unidad. El siguiente fragmento es suficientemente ilustrativo para extraer conclusiones acerca de los elementos que constituyen el núcleo del análisis que venimos realizando:

R1. De seis a doce, seis.
E2. ¿Por qué dices a doce?
R2. Porque no vamos a restarle un número…., claro a dos no le vas a quitar seis.
E3. Claro, entonces tu dices a doce, que haces entonces, le sumas…
R3. No, de seis a doce o doce menos seis. Pero, me llevo una.
E4. Y esa que te llevas, ¿por qué?
R4. (Ríe y pone un uno en las decenas del sustraendo) Eso ya no lo se. (Se vuelve a reír).
E5. Porque así te han dicho que se ponga, ¿no?
R5. Si, claro… tres y una cuatro, y de cuatro a seis dos (escribe un dos en las decenas) y suponemos que hay un cero y de cero a cinco, cinco (escribe un cinco en las centenas)

La alumna manifiesta un conocimiento técnico del algoritmo al no justificar el significado de las llevadas, no utilizando la transferencia inversa o los procedimientos de compensación necesarios; reconoce expresamente no saber las razones de los procedimientos implicados (R4) y los aplica sin más por la enseñanza recibida (EAop1).

Unidad 5. Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación (tarea IIA15).

Extraído de la resolución de la tarea 9, en la que se pide que se realice la multiplicación 258 x 26 y que se justifiquen las acciones que se van realizando. Extraemos para su análisis el siguiente fragmento:

R3 ... Ahora multiplico por 2 y esta cifra la tengo que posicionar aquí (señala el lugar de las decenas)
E4. ¿Por qué la colocas ahí?
R4. Porque ahora multiplico por las decenas y lo coloco debajo del 4 (piensa), ¿no?
E5. No parece que estés muy convencida.
R5. A ver, se lo que quiero decir, pero quizás no me estoy explicando bien. Dos por ocho dieciséis (escribe el 6 en el lugar de las decenas) y me llevo una, y ésta la coloco…. Dos por cinco diez y una once (pone un uno debajo del 5, en el lugar de las centenas del multiplicando y un uno sobre las centenas del multiplicando), dos por dos cuatro y una cinco (escribe el 5, y la raya para sumar los dos resultados, coloca un + a la izquierda) y sumo.

Intenta justificar los procedimientos implicados en la resolución reproduciendo las indicaciones recibidas en su aprendizaje: *"al multiplicar por las decenas se coloca debajo de la decena"*, argumento muy próximo a "*lo hago así porque así me lo han explicado*" sin utilizar argumentos que indiquen un conocimiento analítico, fruto de la descomposición polinómica y el uso de la propiedad distributiva.

Unidad 6. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal (tarea extraída del ítem III.IA18 en el que se solicita se obtenga el total de vasos en agrupamientos de 8 vendidos en los dos años que se mencionan).

El siguiente fragmento contiene la información necesaria para la interpretación que venimos realizando:

R2. El total de las ventas. La sumo (escribe 6131 y le coloca el ocho de subíndice. Ha sumado en base 10 sin tener en cuenta los agrupamientos implicados)
E3. ¿Eso significa que las ventas totales serían un vaso, tres paquetes, una caja y un palé?
R4. Eso, pero agrupado de ocho en ocho.

La herencia en el uso técnico de los algoritmos y en particular en el de la suma, hace que A2-1º no se plantee la necesidad de darle sentido a los agrupamiento distintos implícitos en estas nuevas tareas, operando como lo hacia en los agrupamientos decimales (ESop.5). Se queda en la estructura externa del algoritmo, incluso completa su resolución añadiendo el subíndice relativo al tipo de agrupamiento utilizado, sin que este detalle le sugiera la necesidad de realizar las modificaciones oportunas.

Unidad 7. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal (extraído del ítem III.IA18 en el que se solicita se obtenga el incremento de vasos del año 11 respecto al anterior, mediante agrupamientos de 8).

El siguiente fragmento, extraído de la entrevista a A2-1º tomando como base la tarea de referencia, contiene información útil para su análisis posterior:

R6. Ya lo entiendo, la resta. Ver la diferencia de uno a otro (hace la resta en base 10 y escribe 219 y borra porque ha restado el mayor del menor; escribe el minuendo y debajo el sustraendo, resta y pone de resultado 781). El incremento es de 781, y como agrupa de ocho en ocho, coloco el ocho aquí (escribe el 8 como subíndice). Pero entonces no ha habido palé. (Piensa). Es así. No ha habido palé.
E7. Según lo que has puesto el incremento sería un vaso, 8 paquetes y 7 cajas... (Silencio de la alumna)… Cuando has sumado y has restado, ¿has tenido en cuenta que estamos agrupando de ocho en ocho? ¿Has utilizado eso de alguna manera?
R7. No (me mira y sonríe). Si hemos agrupado de ocho en ocho, no lo he tenido en cuenta cuando he operado.
E8. ¿Crees que tendríamos que haberlo tenido en cuenta?
R8. (Piensa)… Supongo. Claro (Borra la resta) El incremento ha sido de 1 vaso, en los paquetes ha disminuido, y ¿como lo puedo hacer?...que ha disminuido en dos (y coloca un -2, me mira y continua, coloca otro -2 para

indicar el decremento de 2 cajas y 1 como palé). El incremento ha sido de 1 vaso menos dos paquetes menos dos cajas y un palé.

E9. Cuando nosotros expresamos una cantidad, las cifras son positivas ¿Cómo podríamos hacer para que esas cifras fueran positivas?

R9. (Piensa) Pues poniendo un cero en lugar de las negativas; en los menos dos y así decimos que no se han incrementado.

E10 ¿Cómo quedaría?

R10. (Escribe 1 0 0 1)

E11. Entonces diríamos que se ha incrementado en un vaso y en un palé. Pero, ¿crees que respondería a la situación?

R11. No.

E12. Claro, la otra expresión refleja mejor lo solicitado. Pero, ¿cómo podemos incorporar en un número cifras negativas?

R12. (Piensa) (Niega con la cabeza)

Vuelve a incurrir en el error ESop.5 sin tener en cuenta los agrupamientos utilizados. Cuando se le cuestiona el procedimiento utilizado, opera por órdenes aislados, sin la necesaria relación entre los distintos tipos de agrupamientos, llegando a expresar el estado de algunos órdenes con valores negativos sin recurrir a las transformaciones para resolver la situación (error ESop8 nuevo en las entrevistas).

Unidad 8. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados (extraído del ítem III.IIA24, en el que se pide obtener el total de ventas con cantidades expresadas en agrupamientos indeterminados).

De la parte de la entrevista centrada en la tarea mencionada extraemos para su análisis el siguiente fragmento:

R1. Ahora agrupa de x en x. Vale (escribe x-1 x-1 x-1 y debajo 1 1 1). Y sería …(borra y realiza una suma horizontal: (x-1 x-1 x-1) + (1 1 1). Pues…(escribe 1+(x-1) + 1(x-1) + 1(x-1)). Quedaría todo igual (escribe x-2 + x-1 + x-1). (Piensa). (Coloca un + entre los 1 y el paréntesis en las dos últimas expresiones, borra los -1, quedando en los tres casos x-2). Vamos a ver…(borra todo lo que ha hecho y se queda con la primera suma horizontal). Sería 1 mas x-1 (escribe (1+(x-1))+(1+(x-1))+(1+(x-1)). Vamos a ver…(escribe x-1). Salen todos igual todos quedan x-1.

E2. ¿Cómo haces eso?

R2. (Parece que no me hace caso) (Piensa, borra el x-1, y escribe x-) (Se vuelve y me pregunta). ¿Cómo era esto? ¿Lo mismo no? (Escribe x-1). Es lo mismo (escribe x-1 tres veces) ¿Esto está bien? Es que me sale lo mismo. Estoy sumando como si esto fuera la cifra… Estoy sumando por cifras (rodea las cifras correspondientes en ambas expresiones x-1 en el mes de junio y el 1 del mes de julio, y así para los tres órdenes).

………….

R6. Piensa y dice: pues 1+x (escribe 1+x).

E7. Y el -1, ¿qué haces con él?

R7. El menos 1 se ha ido con este (señala el primer 1) (está claro que ha aplicado una supuesta propiedad distributiva: 1+(x-1)=(1+x) + 1-1= 1+x). Claro ves 1-1 se van, que sí… que está bien (escribe x-1 en los tres órdenes). Bueno dime si está bien.

E8. Bueno ya hablaremos.
R8. No me dejes con la duda.
E9. Es que estas aplicando propiedades que no son (Y le indico que $1+(x-1)\neq(1+x)+(1-1)$; en cambio, sí es: $1+(x-1)= 1+x-1=x$).
R9.Está claro (pero sigue pensando).

Su conocimiento técnico del algoritmo de la adición y su incapacidad para compatibilizar el contexto y su traducción algebraica (pérdida de referencia), impiden el desarrollo de la tarea; por el contrario procede a realizar operaciones y cálculos vacíos de significados y alejados de la tarea propuesta. Su quehacer se traduce en una actividad puramente algebraica en la que se desenvuelve con mucha dificultad, aplicando supuestas propiedades y solicitando nuestra complicidad para corroborar sus resultados (R7); estos, al final, se reducen a resolver una tarea puramente algebraica y que no responde a la cuestión inicial planteada.

Este bloqueo final aconseja dar por concluida la entrevista para no incidir más en situaciones para las que entendemos que la alumna no tiene respuestas. El resumen de los resultados de la entrevista en el caso de la alumna A2-1ºse incluye en la tabla 7.3.

Tabla 7.3 Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista a la alumna A2-1º

Tareas	*Unidades y Fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/ empatía.*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Unidad 1	-			EAe1 EAe3	-	
IIN12	Unidad 2	[1] Traduce del polinómico al decimal en la expresión primera que no necesita descomposición y transferencia.				-	
IIA13	Unidad 3	[2] No justificación adecuada de las llevadas en la adición.			EAop.2	Técnico	
IIA14	Unidad 4	[3] No justificación de las llevadas en la adición.			EAop.1	Técnico	
IIA15	Unidad 5	[3] No justificación de la posición de los sumandos			EAop.1	Técnico	
III.IA18	Unidad 6	[4] Opera en base 10.			ESop.5	Técnico	Herencia del nivel técnico de nuestro sistema.
III.IA18	Unidad 7	[5] Opera en base 10.			ESop.5	Técnico	Herencia del nivel técnico de nuestro sistema.
III.IIA24	Unidad 8	[6] Realiza una traducción algebraica no adecuada y presenta dificultades para operar con ellas.	Solicita nuestra aprobación en las acciones realizadas.			Técnico	

7. 3. 1. 2 Alumna A3-1º

La alumna que realiza esta entrevista pertenece al grupo E de primer curso del grado de Educación Primaria. Ha cursado un bachillerato de Humanidades y no ha cursado Matemáticas desde 4º de ESO. La entrevista se realiza el 31 de mayo a las 19:15 horas.

Unidad 1. Distinción entre el número de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente (tarea IIA8).

En torno a la unidad y tarea planteada, extraemos el siguiente fragmento de la entrevista realizada a A3-1º:

R1. ¿Cuántas centenas? Dos.
E2. Esa es la cifra de las centenas. Yo te pregunto, ¿cuántas centenas contiene ese número?
R2. Pues 2 (Rodea el 2 en el número dado)
E3. Y, ¿cuántas unidades contiene?
R3. Cuatro (piensa). No, una. Bueno se supone que son éstas (subraya el 4)
E4 ¿Cuántas unidades contiene ese número?
R4. Bueno ese número. Ocho mil doscientos treinta y cuatro.
E5¿Y cuántas decenas contiene entonces ese número?
R5. Ah, entonces 234.
E6 ¿Y cuántas decenas contiene?
R6. Treinta y cuatro.

Responde inicialmente cometiendo el error EAe1 y ante las preguntas realizadas, entendiendo que la respuesta dada no corresponde a lo pedido, modifica su respuesta y ofrece una respuesta acertada para las unidades, que al adaptarla al resto de los órdenes elimina las cifras de los superiores y comete un error no registrado anteriormente y que codificaremos como EAe4. Nuestra interpretación es que automatiza un procedimiento, que es acertado y significativo para el caso de las unidades, pero que resulta incorrecto por su aplicación "técnica" mecánica al resto de los órdenes.

Unidad 2. Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos órdenes (tarea IIN12)

En esta tarea se incluyen dos números con distintas estructuras, el primero permite su transcripción casi directa por estar formados por órdenes separados o disjuntos (trece decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades), con la única dificultad de las trece decenas de mil, mientras que en el segundo los órdenes están distribuidos entre las distintas expresiones y se necesita de las oportunas transferencias (siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas y diecisiete unidades).

R1. Trece centenas de mil, madre mía, yo de esto no me acuerdo …Desde que yo lo vi de pequeña, ya no lo he visto; lo estoy recordando ahora mismo. Trece decenas de mil (escribe 13) pues será trece mil; pero todo esto es un número.
E2. Todo eso forma un número.
R2. Ah, vale… (añade al 13 escrito antes el 405, quedando 13.405). Supongo que será esto.
E3. ¿Y el de abajo?
R3. Siete unidades de millar, luego es un millón (escribe 7), (se le hace ver que son de millar y no de millón). Y ahora dice trece centenas, no vea lo que va

a salir (escribe 7.13) tiene que ser de millón; y 17 unidades, madre mía; si lo escribo entero sería (escribe 7.131617) 7 trece dieciséis y diecisiete, pero si este no puede ser el número, salvo que sean millones(y pone un punto entre el 1 y el 3 (queda por tanto 7.131.617).

E4. ¿Ese número tiene siete unidades de millar?

R4. (Señala el 7, que estaría en su número en el orden de las unidades de millón). Mira.

E5. Pero son unidades de millón.

R5. Y tienen que ser de millar, de mil. Entonces es más complicado. Pero después dice 13 centenas, dieciséis decenas y diecisiete unidades. Yo las unidades cuando me pones dos cifras, no doy para más…..

Realiza la traducción al decimal de la expresión polinómica primera, componiendo el numero sin reparar en las decenas de mil; en la segunda traducción, realiza un procedimiento semejante al anterior y compone de forma yuxtapuesta los órdenes presentes en la expresión propuesta y presenta una respuesta errónea que hemos codificado como EAr.2; no descompone los órdenes y no realiza transferencias entre ellos.

Unidad 3. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma (tarea IIA13; operación: 368 + 457).

Extraído de la resolución de la tarea 7, en la que se pide que se realice una suma de dos sumandos y que se justifiquen las acciones que se van realizando.

R1. Ocho y siete quince (coloca el 5), doce y una trece (coloca el 3)…

E2. A ver, ocho y siete son quince, ¿pero qué es lo que haces?

R2. Yo estoy con lo que yo pienso para mi; y digo ocho y ocho dieciséis, pero una menos son quince, pongo el cinco y me llevo una.

E3. ¿Y que es eso de llevarte una?

R3. Me llevo una decena, porque son quince. Y esto son doce y me vuelvo a llevar una.

E4. ¿Y esa que te llevas que es?

R4. Otra vez decenas.

E5. Porque son doce, y ¿doce son…? (Silencio) ¿Porque ahí estas sumando unidades?

R5. Si, bueno si te paras a pensar que el número es entero no, pero si lo haces como yo lo hago, individual si, son unidades. Y ahora tres y cuatro siete y una ocho.

En la justificación del algoritmo de la suma encontramos un rastro de comprensión asociado al error EAop2, al considerar en las sumas parciales de los distintos órdenes, unidades y decenas sin atender los órdenes implicados (R4). Este rastro de comprensión nos permite interpretar un uso técnico de la numeración en el algoritmo de la suma.

Unidad 4. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta (tarea IIA14; operación: 562-36)

Extraído de la resolución de la tarea 8, en la que se pide que se realice una resta de dos sumandos y que se justifiquen las acciones que se van realizando. El siguiente fragmento, extraído de la entrevista de la alumna de referencia, se utiliza para el análisis de esta unidad

R1. De seis hasta doce van seis.
E2. ¿Por qué dices hasta doce?
R2. Porque le añado al 2 un uno. Le añado una decena. Este uno se le pone aquí abajo (y señala el 3 en el sustraendo).
E3. ¿Por qué se lo añades ahí debajo?
R3. No se, porque a mi me lo enseñaron así. De trece a dieciséis…(le pregunto de trece…) Se dice de trece a dieciséis (le digo: así no lo haces normalmente). No, se le suma y es cuatro. Pero no se porqué lo hago así, así me lo enseñaron y cuando se lo he enseñado a mis primos también se lo he enseñado así.
E4. ¿Y tu no crees, que deberías entender porqué lo haces para poderlo enseñar mejor? ¿Tu crees que un maestro puede explicar de forma adecuada algo que no entiende?
R4. Yo creo que no, yo he tenido profesores que me han explicado algo y me han dicho: esto es así y esto es así; y cuando llegas a la práctica, como no entendía lo que hacía, pues no entiendes lo que te preguntan.
E5. ¿Y si hubiera alguna explicación, tu crees que deberías conocerla?
R5. Yo creo que debería conocerla, pues a la hora de enseñarla sería más fácil. Por ejemplo si yo estoy con un alumno de Primaria y me dice: ¿Seño por qué me llevo una? Y si no lo sé le tendría que decir, pues te llevas una porque es así, y el niño se queda… como yo me he quedado otros años. (Sigue con la resta) Bueno y ya terminaría diciendo de cero a cinco, cinco.

Manifiesta un conocimiento técnico del algoritmo y reconoce su desconocimiento de las razones de su forma de proceder en ellos, admitiendo que así es como se lo enseñaron (EAop.4). Admite la necesidad de conocer la justificación del procedimiento para incidir de forma adecuada en el proceso de su enseñanza.

Unidad 5. Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación (tarea IIA15).

Extraído de la resolución de la tarea 9, en la que se pide que se realice la multiplicación 258 x 26, y que se justifiquen las acciones que se van realizando.

R3. ... Dos por ocho son dieciséis…
E4. ¿Por qué lo pones ahí?
R4. Porque como es el segundo número se pone en segundo lugar. También te digo que es lo que me han enseñado. Dos por cinco diez y una once (pone un 1) y me llevo una ….. (Acaba)

Manifiesta, como en los otros algoritmos, un conocimiento técnico o de reproducción de las enseñanzas recibidas (EAop.4), quedándose en la estructura exterior del mismo sin entender los procesos implicados.

Unidades 6.1 y 6.2. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal (extraídos del ítem III.IA18, en el que se solicita se obtenga el total de vasos en agrupamientos de 8 vendidos en los dos años).

El siguiente fragmento de la entrevista realizada en torno a estas tareas proporciona la información pertinente para el análisis hermenéutico que se pretende:

R1. El total es aquel (señala las cantidades expresadas en forma reducida) Pues se suma (suma en base 10 y expresa como total 6 1 3 1) Y el número ocho también lo tengo que poner (escribe el subíndice 8).
E2. Eso significa que ha vendido en total…
R2. Seis mil ciento treinta y un vaso.
E3. ¿Vasos?
R3. Eso sería un vaso suelto, ahora habría uno más (y señala juntos el 61) estos irían juntos.
E4. Hablamos de vasos sueltos, paquetes, cajas y palé.
R4. Bueno no, espera, para llegar a este (señala al 1) primero se ha tenido que hacer esto.
E5. ¿Qué significa eso?
R5. Claro, en el ejercicio que hicimos la primera vez, para llegar a los vasos sueltos, primero creamos estos (señala el lugar de los paquetes) primero creamos los de ocho en ocho, después los paquetes grandes, y ahora lo que sabemos es que esto es un palé (señala al 6). Por lo que en los dos años se ha vendido: seis palés, una caja tres paquetes y un vaso suelto.

Encontramos rastros de comprensión que nos permiten interpretar que el alumno no realiza la generalización de los procedimientos utilizados en los algoritmos usuales, reproduciendo lo realizado con agrupamientos decimales y mostrando un conocimiento de tipo técnico (ESop.5). Sin embargo, posiblemente debido a la contextualización de las tareas a realizar y a las preguntas realizadas sobre los resultados obtenidos tanto en la obtención de las ventas totales como en el incremento entre los dos meses de ventas, modifica su estrategia como se pone de manifiesto en el siguiente fragmento de la misma entrevista:

E10. ¿Y cuando sumamos con estas cantidades, podemos hacerlo como lo hacemos habitualmente?
R10. Bueno yo creo que no, tendría que sumarlos por separado. Pues si sumamos por separado tendría que poner (escribe 11 vasos debajo de los vasos, 12 paquetes, 10 cajas y 5 palés).
E11. ¿Y podemos reorganizar eso de alguna manera?
R11. Si, lo ponemos igual que lo pones aquí (se refiere a la forma reducida y expresa de forma yuxtapuesta: 5 10 12 11 y le coloca el subíndice 8) sería así, ¿no?
E12. Pero así puesto parece, si empiezas por la derecha 1 vaso, 1 paquete, …
R12. No porque si tiene en cuenta que son dos años tiene que ir agrupando en decenas.
E13. Pero el criterio era que la primera cifra eran vasos…..¿podemos transformarlo para que no ocurra este problema?
R13. ¿Y cómo lo transforma? No se de que otra forma lo puedo poner.

E14. (Se le insiste una y otra vez en que esta forma de expresar el resultado total, no cumple el criterio adoptado y que por tanto supone una expresión no adecuada, la alumna reconoce esta circunstancia y termina modificándola mediante la transferencia entre los distintos órdenes)

R14. Para eso habría que organizar los vasos de 8 en 8; esto son los vasos sueltos (señala los 11 que había obtenido en la suma parcial) y tu puedes sacar de aquí un paquete y te quedan 3 sueltos (escribe 3) y ahora tendría un paquete más doce mas uno, tienes trece, pero de estos puedes hacer una caja más y te quedan, trece menos ocho, cinco (escribe un 5 debajo de los paquetes), y ahora aquí habría 11 cajas y te quedarían 3 y así habría 6 palé (escribe un 3 y un 6 debajo de las cajas y los palé). Entonces el resultado total sería (escribe aparte 6 3 5 3 y escribe el subíndice 8).

Este nuevo procedimiento (ASop.7) nos indica la posibilidad de existencia de un conocimiento analítico de los sistemas de numeración no utilizado en las tarea 7 cuando se le pedía que justificara el algoritmo de la suma en nuestro sistema, lo que nos induce a pensar en la necesidad de materializar los conocimientos de los sistemas de numeración y de los algoritmos mediante recursos y materiales didácticos o mediante situaciones de agrupamientos diversos para darle significado a los procedimientos construidos.

Unidades 7.1 y 7.2. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal (extraídos del ítem III.IA18 en el que se solicita se obtenga el incremento de vasos del año 11 respecto al anterior, con agrupamientos de 8).

Realizamos el análisis a partir de la información contenida en el siguiente fragmento de la entrevista:

E6. ¿Y cuál será el incremento producido en el 2011?

R6. Pues ha vendido más en unidades, o sea, en los vasos sueltos, menos…

E7. Pero ¿cuál sería el incremento?, expresa el incremento, expresa cuánto es lo que ha vendido de más.

R7. ¿Cuánto ha ganado? Pues la resta, pero tengo que restar este (el pedido del año 2011) menos este (el del año 2010) porque tú quieres saber la diferencia que hay. Resta éste (escribe 3456) menos éste (2675) que es la diferencia que hay. (Resta de nuevo en base 10 y coloca como resultado 781) Pues setecientos ochenta y uno.

Encontramos una respuesta inicial que se corresponde con la dada al comenzar a realizar la tarea 7, recogida en el fragmento de la unidad 4, en la que encontramos rastros de comprensión técnica del algoritmo de la resta (ESop.5). Esta respuesta es herencia de la comprensión técnica de nuestro sistema decimal, que incapacita al sujeto para generalizar a esta nueva situación los procedimientos utilizados en el sistema decimal y le limita a realizar los cálculos en nuestro sistema (R7). No obstante, una vez reconsiderada sus respuestas en el caso del cálculo del total de ventas, volvemos y construye el siguiente procedimiento ante nuestro cuestionamiento de la respuesta inicial:

E15. ¿Y con la resta, podemos hacer algo parecido?

R15. (Piensa) Bueno algo parecido, en la resta si lo haces por los diferentes…Habría que restar igual que antes (borra la resta realizada en base 10). Habría que hacerlo por separado (escribe un 5 y un 6 debajo, borra y los escribe 6 y el 5 debajo). Primero los vasos, uno (resta a 6, 5 en forma vertical y coloca un 1 debajo de la raya). Después sería los paquetes (coloca 5 y debajo 7)…En vasos si ha incrementado, pero en paquetes ha tenido pérdidas.

E16. Pero lo que queremos conocer es el cómputo total del incremento que se ha producido.

R16. Pero entonces te lo tengo que decir por separado. En vasos ha ganado uno, en paquetes ha perdido dos, en cajas ha ganado dos también, bueno ha perdido también dos y en palés ha ganado uno.

E17. Y en el cómputo total, ¿qué podríamos decir?

R17. Puedo poner mil uno (piensa); bueno que ha ganado uno, cero, cero y uno. Claro en el 2011 pierde de un lado y gana de otro.

A3-1º propone una nueva estrategia para resolver la situación que adolece de las transformaciones inversas y, por ello, obtiene soluciones en la que se detecta un nuevo tipo de error al reducir a cero los valores negativos obtenidos en el cálculo de incrementos (ESop.8).

Unidad 8. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados (extraída del ítem III.IIA24, en el que se pide obtener el total de ventas con cantidades expresadas en agrupamientos indeterminados).

El siguiente fragmento ilustra el tratamiento que da A3-1º a la tarea analizada:

R3. Supongo que las ecuaciones son estas (señala el pedido de junio) pero esta no (los pedidos de julio son cantidades numéricas); esta no sabe a lo que iguala (la de junio) (piensa). En esta si sabe la cantidad vendida uno, uno y uno, pero en esta no.

E4. Bueno en junio han vendido x menos uno, x menos uno y x menos uno. Pero lo que queremos saber es lo que han vendido entre ambos meses.

R4. Restando no se puede saber; con la suma se pierden todos los unos, daría x, x, x; y con x ¿qué haces?.

E5. ¿Qué significa x x x?

R5. Que no sabes el número, serían incógnitas… (se ríe), que no tiene número.

E6. Si seguimos con el mismo criterio que aplicábamos antes, vasos, paquetes y cajas, la primera de las x, ¿qué sería?

R6. Pues x vasos, x paquetes y x cajas.

E7. ¿Y esa expresión la podríamos reagrupar de alguna manera?

E7. Si conociéramos el valor de x, si supiéramos si hay dos x, tres x o un número de x, sí. Pero si te queda (dibuja x x x); ¿aquí como agrupas?

E8. Pues siguiendo las mismas reglas que hemos aplicado en las tareas anteriores. ¿Podemos hacerlo?

R8. No sabemos cuanto vas a sumar, porque como tiene una, una y una no puedes sumar.

E9. ¿De cuánto en cuánto agruparíamos aquí?

R9. De una x en una x. Entonces si entraría de esta crearía una de esta (señala las unidades de primer y segundo orden) y de esta crearía otra de esta (señala segundo y tercer orden).
E10. ¿A ver, como?
R10. Como hay una x aquí (señala el tipo de agrupamiento) esto significa que agrupa de una x en una x, entonces esto sería una (rodea la x de vasos) y se le puede incrementar en una y serían dos x, entonces no tendría vasos sueltos, y si de esta (señala los paquetes) podemos incrementar, nos quedarían dos x, sólo nos quedarían dos paquetes enteros, perdón, dos cajas enteras.

Los valores indeterminados presentes en la tarea suponen un obstáculo inicial al asociarlos con ecuaciones (R3) y, por tanto, perder la referencia del contexto utilizado. Aunque las preguntas formuladas intentan recuperar el sentido y la referencia perdida, las dificultades para realizar las oportunas transferencias y sus limitaciones en los cálculos algebraicos impiden completar la tarea.

Unidad 9. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos indeterminados (unidad extraída del ítem III.IIA24, en el que se pide que se obtenga el incremento de ventas en el ultimo mes con cantidades expresadas en agrupamientos indeterminados).

El análisis que realizamos en este caso se basa en el siguiente fragmento de la entrevista realizada:

E13. ¿Y cómo lo restaríamos?
R13. Pues en orden, como está. Hay tres números pues los resta uno con el otro; este resta con este (señala los vasos), aquí te quedaría un x, pero aquí un uno, pero como lo hace en paquetes de x, ese número suelto no lo puedes hacer; aquí te quedaría una x y aquí te sigue quedando un uno…Si lo haces con las cuentas matemáticas, eso no se puede hacer, si lo hicieras como un polinomio no lo puedes hacer, pues se ponen las x independientes a un lado y esto es un número, sería un número independiente y esto no lo podría hacer (escribe x-1 y lo relaciona con una flecha al 2).
E14. Pero cuando escribes el x menos uno, ¿tú no puedes operar el menos uno con el dos?
R14. Depende, si esto es un polinomio entero no. Por ejemplo si tienes que operar el polinomio (escribe $x^2 + x + 2$ debajo $x^3 + x$), tú no puedes sumar la x con el 2 (señala la x del segundo polinomio y el 2 del primero).

Los rastros de comprensión encontrados en R13 nos permiten interpretar que el sujeto identifica los distintos órdenes presentes en las cantidades de la tarea, pero manifiesta su incapacidad para realizar transferencias inversas con agrupamientos indeterminados y sus dificultades para realizar sustracciones polinómicas (R14).

Se mantienen las dificultades evidenciadas en el desarrollo algebraico de las tareas anteriores y damos por concluida la entrevista al comprobar las dificultades para responder adecuadamente; en consecuencia no se le propone la tarea 14. La tabla 7.4 recoge los aspectos fundamentales de los resultados de la entrevista a esta alumna.

Tabla 7.4 Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista a la alumna A3-1º

Tareas	*Unidades y Fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/empatía.*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Unidad 1	-			EAe1 EAe4	-	
IIN12	Unidad 2	[1] Traduce del polinómico al decimal en la expresión primera que no necesita descomposición y transferencia.			EAr2	-	
IIA13	Unidad 3	[1] Justificación inadecuada de las llevadas en la adición.			EAop2	Técnico	
IIA14	Unidad	[2] No justificación de las llevadas en la sustraccion.	Reconoce su desconocimiento y la necesidad del maestro de disponer de su justificación.		EAop4	Técnico	
IIA15	Unidad 5	[3] No justificación de la posición de los sumandos	Reconoce su desconocimiento.		EAop4	Técnico	
III.IA18	Unidad 6.1	[4] Opera en base 10.			***ESop.5***	Técnico	Herencia del nivel técnico de nuestro sistema.
	Unidad 6.2	[5] Opera en los agrupamientos de 8.		***ASop.7***		Analítico/Sintético	
III.IA18	Unidad 7.1	[6] Opera en base 10.			ESop.5	Técnico	
	Unidad 7.2	[7] Opera en los agrupamientos de 8, pero sin realizar transferencias inversas.			ESop.8	Técnico	Herencia del nivel técnico de nuestro sistema.
III.II.24	Unidad 8	[8] Identifica los distintos ordenes y las expresiones indeterminadas se establecen como obstáculos.				-	
	Unidad 9						

7. 3. 1. 3 Alumna A5-1º

La alumna que realiza esta entrevista pertenece al grupo E de primer curso del grado de Educación Primaria. Ha cursado un bachillerato de CCSS y ha cursado Matemáticas aplicadas a las CCSS. No ha participado en ninguna de las tres pruebas escritas y realiza la entrevista el 4 de junio a las 19:50 horas.

Unidad 1. Distinción entre el número de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente (tarea IIN8).

Las respuestas en torno a esta primera cuestión se concentran en el siguiente fragmento de la entrevista:

E1. En ese número que tienes ahí, el 8.234, pretendo que me digas, ¿cuántas centenas contiene?, o lo que es lo mismo, ¿cuántas centenas caben en ese número?

R1. (Escribe 234)
E2. ¿Y cuantas unidades contiene?
R2. (Escribe 4)
E3. ¿Cuántas decenas contiene?
R3. (Escribe 34, me mira y se ríe)
E4. ¿Ese número tiene 234 centenas?
R4. Es que ya no me acuerdo si era sólo la parte entera. Ah no, (borra) no centenas tiene 2, porque tiene 2 centenas; (borra las 34 y escribe 3).
E5. Pero esa la cifra de las centenas, ¿no?; pero yo te he preguntado ¿cuántas centenas contiene?
R5. (Deja el rotulador y se queda pensativa) Tiene 2 centenas porque son doscientos…

Las respuestas de la alumna manifiestan sus dudas sobre la cuestión planteada, con variaciones entre el error EAe.4 y EAe.1.

Unidad 2. Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos órdenes (tarea IIN12)

En la tarea se incluyen dos números con distintas estructuras: el primero permite su transcripción directa por estar formado por órdenes separados o disjuntos (trece decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades); en el segundo los órdenes están distribuidos entre las distintas expresiones y se necesita de las oportunas transferencias (siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas diecisiete unidades). De las respuestas a esta tarea extraemos el siguiente fragmento que centra el análisis de esta unidad:

R1. Bueno lo voy a intentar (escribe: 5, 400 y 13.000, borra el 13.000 y escribe en otro lugar 405; a continuación y delante de esas cifras, 130. Por lo que el número resultante es 130.405).
E2. Entonces, ¿ese número tiene trece decenas de mil? Pregunto.
R2. Si.
E3. ¿Y cuál es la cifra de las decenas de mil?
R3. Tres
E4. Y has dicho que tiene trece decenas de mil.
R4. Las decenas de mil es lo mismo que las decenas de millar.
E5. Si ¿Y el de abajo?
R5. (Escribe 7000, 1300, 160 y 17, sobre el enunciado y en otro lugar, sumando mentalmente 8477).
E6. (Como parece que ha captado la diferencia, quiero ver si es capaz de hacerla explícita). Ese número de abajo (8477). ¿Cuántas centenas contiene?
R6. Tiene 84.
E7. Tiene 84 centenas.
R7. (Se ríe) Ahora sí, creo que antes estaba liada.
E8. (Regreso a la tarea 4 y le vuelvo a plantear que me conteste el número de centenas, decenas y unidades que contiene el número 8234).
R8. Me contesta 82, porque pensaba que contaba la del final y son las del principio.

E9. Preguntarme cuantas centenas contiene el número es lo mismo que…(no dice nada, piensa). Sería lo mismo que decir los cientos que contiene ese número.
R9. Claro, 82 por cien 8.200.
E10. ¿Y cuántas unidades contiene?
R10. 8.234 (Escribe a la derecha de las señaladas anteriormente, 82, 8234 y 823)
E11. ¿Porqué 823?
R11. Porque son los diez que contiene ese número; 823 por 10 son 8230.

La alumna identifica los distintos órdenes en las expresiones polinómicas, realiza las transferencias entre ellos y traduce al decimal sin dificultad; los rastros de comprensión encontrados (R1 y R5) nos inducen a interpretar que tiene una comprensión analítica estructural que nos da pie para volver a plantearle la tarea anterior, en la que resuelve y argumenta las diferencias entre la cifra de cada orden y el numero de órdenes presentes en los números (R6, R8, R9, R10 y R11).

Unidad 3. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma (368 + 457)

De la resolución de la tarea 7, en la que se pide que realice una suma de dos sumandos y que justifique las acciones que va realizando, extraemos el siguiente fragmento que nos aporta información sobre la comprensión de la alumna:

R1. A ver, ocho más siete, puedo contar con los dedos (se ríe y efectivamente cuenta con los dedos), quince (pone el 5), a ver, una, seis y cinco…
E2. ¿Esa una que significa?
R2. Que como es quince y esta son las unidades (señala el 5 que ha escrito en las unidades del resultado) pues la una corresponde a las decenas.
E3. ¿Por qué corresponden a las decenas?
R3. Porque aquí no se puede poner 15 (señala de nuevo al lugar de las unidades en el resultado), si lo pusiéramos habría que sumarlo después y así se suma directamente.
E4. ¿Y por qué se suma con el 5 y el 6?
R4. Ocho mas siete son quince, entonces el quince son quince unidades, pero como solo se puede poner uno, el resto corresponde a estos que son las decenas. ¿No me explico?
E5. Si te explicas, lo que no se es si te convences a ti misma.
R5. Yo sí, yo me entiendo, lo que no se es explicarme bien. Seis más seis doce (escribe un 2 en el lugar de las decenas), le sumo otra…
E6. ¿Y esa qué es? ¿Es igual que la que sumábamos antes o hay diferencia?
R6. No, es lo mismo.
E7. ¿Esa una que pasa que es?
R7. Pues lo mismo que antes, como no se puede poner aquí, pues se suma. Es como poner aquí el doce (y coloca un 1 a la izquierda del 2 que había escrito en las decenas) y ahora tendríamos que sumarlo.
E8. ¿Ese uno que sería?
R8. No sé como explicarlo. Ese uno sería una centena que habría que sumarlo a las centenas.
E9. ¿Y por qué son centenas?

R9. Porque…(se ríe) porque están en el lugar de las centenas. Las diez decenas es una centena y entonces digamos que el uno está en el lugar de las centenas y por tanto quedaría (acaba la suma).

Interpretamos que la alumna manifiesta una comprensión analítica funcional del sistema de numeración al justificar los procedimientos implicados en el algoritmo de la suma realizando las transferencia entre los distintos órdenes de unidades (R5 y R8) y reconociendo que las unidades de llevadas están relacionadas con los órdenes correspondientes.

Unidad 4. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta (562-36).

Extraído de la resolución de la tarea 8, en la que se le pide que realice una resta de dos sumandos y que justifique las acciones que va realizando.

R1. Bueno, esto es más complicado de explicarlo. Como tenemos el 2 y el 2 es mas chico que el 6, pues es como si se lo restara a doce. Quedaría 6 y ahora… es como si cogiera una decena del 6 y entonces…como se la has quitado al 6 ahora se la pones al 3.
E2. Como se la he quitado al 6 se la pone ahora al tres; ¿eso cómo es?
R2. Esto para explicárselo a un niño de primaria es muy complicado.
E3. ¿Pero tu lo tienes claro?
R3. Bueno en realidad se hacerlo, pero de tanto aplicarlo se me ha olvidado el porqué.
E4. ¿Te explicaron alguna vez el porqué?
R4. Sí, la primera vez que lo hice me lo explicaron.
E5. ¿No te acuerdas de la justificación que te dieron?
R5. No me acuerdo
E6. ¿Y te convencieron las explicaciones que te dieron?
R6. No mucho. Si no me acuerdo será porque no me convencieron muy bien. Yo me he quedado con el procedimiento.

Los registros R1 y R3 nos permiten interpretar un uso técnico del sistema de numeración en la justificación de los procedimientos realizados en el desarrollo del algoritmo de la sustracción; sin embargo la alumna reconoce expresamente no saber las razones de los procedimientos aplicados (R5 y R6).

Unidad 5. Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación (tarea IIA15).

Extraído de la resolución de la tarea 9, en la que se pide que se realice la multiplicación 258 x 26 y que se justifique las acciones que se van realizando. De la entrevista a la alumna seleccionada extraemos el siguiente fragmento que nos sirve de referencia para interpretar algunos aspectos sobre su comprensión de los sistemas de numeración:

R3. ... Ahora no sé por qué se coloca debajo del 4. Bueno en verdad sí, porque como multiplico decenas se pone en lugar de las decenas; ¿puede que sea por eso? Dos por cinco …
E4. Pero cuando el dos multiplica al cinco también son decenas, ¿no?

R4. Sería como si estuviéramos multiplicando por 20, al multiplicar por 20 sería por ejemplo por 8, 160 y este cero es el lugar que corremos.
E5. Vale, vale.

Sin llegar a mencionar la propiedad distributiva para justificar la disposición de los sumandos, apreciamos en este fragmento rastros de comprensión (R4) que nos permiten interpretar que la alumna hace un uso analítico funcional del sistema de numeración al descomponer el multiplicador en forma polinómica, estrategia AAop.1.

Unidades 6.1 y 6.2. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal (extraído de la tarea III.IA18.1).

Se trata de una actividad en la que se solicita el total de vasos vendidos en los dos años en base 8. El siguiente fragmento contiene información que interpretamos en cada caso en términos de comprensión de la alumna.

R1. (Se pone a sumar las dos cantidades pero lo hace en base 10, aunque coloca en el resultado el subíndice 8 y escribe 6131 $_{(8)}$).

Se aprecia aquí un rastro de comprensión técnica, aunque cometiendo el error ESop.5 al operar sin tener en cuenta que estamos agrupando en un sistema distinto al decimal. Después de realizar el incremento que figura en el siguiente fragmento de la Unidad 7.1 y responder con el mismo error, a preguntas nuestras modifica sus respuestas en el sentido que exponemos a continuación en el fragmento de la Unidad 6.2:

R9. *Si…. (Silencio intencionado) Pero el de arriba está mal.*
E9. ¿Cómo sería?
R9. (Escribe: Pal 5, Caj 10, Paq 12, V 11) y ahora serían (realiza transferencia de ordenes), 8 vasos serían un paquete (escribe 3 en los vasos y 13 en paquetes; escribe 5 a la derecha de los paquetes y 11 en cajas; a la derecha del 11 coloca un 3 y un 6 en los palé) El resultado sería (escribe 6353 $_{(8)}$).
E10. Esto sería más adecuado que el resultado primero.
R10. Sí. Yo creo que así esta bien. Bueno esto no (señala lo que hizo en primer lugar).

En estas respuestas aparecen rastros de comprensión analítica, puesto que sin generalizar las estrategias de nuestro sistema, la contextualización de los órdenes utilizados en este sistema de agrupamiento 8 permite realizar las composiciones aisladas de órdenes y las transferencias oportunas, llegando a utilizar la estrategia ASop7.

Unidades 7.1 y 7.2. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal (ítem III.IA18.2).

En la tarea indicada se solicita el incremento de vasos del año 2011 respecto al año anterior expresado en agrupamientos de 8. De estas unidades extraemos los siguientes fragmentos y las interpretaciones que siguen:

E2. ¿Y el incremento?

R2. (Escribe las dos cantidades a restar 3 4 5 6 y debajo 2 6 7 5, pone el signo menos y la raya para el resultado; resta en base 10 y obtiene como resultado 7 8 1).
E3. Eso significa que la venta en los dos años sería 1 vaso, 8 paquetes…
R3. Si, 1 vaso, 8 cajas, no espera, esto que eran…8 paquetes de 8 vasos y 7 cajas de 8 paquetes. ¿No?

La alumna manifiesta un rastro de comprensión técnica al proceder como en base 10 (R2), error catalogado como ESop.5 y herencia del uso del conocimiento manifestado en las acciones realizadas en el algoritmo de la resta en nuestro sistema. Nuestros silencios y el cuestionamiento de sus respuestas le hacen reflexionar y modificar sus respuestas, lo que así se recoge en el siguiente fragmento de la Unidad 7.2:

E5. ¿Pero son 2675 y 3456 vasos? Te pregunto, ¿los vasos vendidos en estos dos años son 2675 y 3456?
R5. Ah, claro que no, a ver serían…Esto tiene truco, pues yo lo he sumado como si fueran números enteros y no lo son. Sería, en el 2011 se ha incrementado un vaso, no se ha incrementado paquetes, aquí tampoco (se refiere a cajas) y aquí sí.
E6. Y eso como se podría expresar.
R6. A ver, lo pondríamos (Escribe: Pal 1, Ca 0, Pa 0) bueno cero no sería, sino negativo (escribe Ca -2, Pa -2, V 1).
E7. ¿Y si nos pidieran que escribamos el incremento en forma reducida?
R7. Sería un poquillo más complicado sería (escribe $1001_{(8)}$)
E8. Eso significaría que se ha incrementado 1 vaso y un palé; ¿esa sería la expresión del incremento?

La alumna A5-1º modifica sus respuestas, pero la herencia de lo aprendido y practicado exhaustivamente sobre el algoritmo de la sustracción, en el que no realiza las transferencias inversas necesarias, impide encontrar soluciones adecuadas a las dudas planteadas. Propone una solución del tipo ESop.8, que supone un rastro de comprensión del conocimiento de mayor nivel pero que no podemos considerarlo como un uso sintético funcional del sistema de numeración.

Unidad 8. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados (extraído de la tarea III.IIA24).

En la tarea de referencia se pide obtener el total de ventas expresado con agrupamientos indeterminados. De la entrevista a la alumna cuya comprensión estamos analizando a propósito de sus respuestas a la tarea indicada hemos seleccionado el siguiente fragmento que interpretamos a continuación:

R1. Esto si que es mucho más complicado. (Escribe: x-1 +1, x y lo borra, después escribe: x x $x_{(x)}$). Lo he ido sumando por partes, porque es un número que está distribuido no en diez, para evitar lo que hice antes.

Manifiesta una comprensión que podemos considerar de transición entre el nivel analítico y sintético del algoritmo de la adición; la alumna identifica los valores posicionales de las distintas componentes en la expresión de las cantidades, a pesar de no realizar las necesarias transferencias entre los distintos órdenes, mostrando así la estrategia que hemos denominado ASop.6.

Unidad 9. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos indeterminados (incluida en la tarea III.IIA24).

En la actividad de referencia se pide obtener el incremento de ventas en el último mes expresado en cantidades basadas en agrupamientos indeterminados. El siguiente fragmento proporciona información sobre la comprensión de la alumna ante este tipo de situaciones:

E2. ¿Y el incremento entre los meses de agosto y septiembre?
R2. (Escribe: (x-1)-(x-2) 2-(x-1) 2-(x-1)) ¿Lo resuelvo? (le indico que siga) (Escribe: 1 3-x 3-x). Sería el número 1 3-x 3-x (x
E3. Si la x fuera mayor que 3, ¿qué pasaría?
R3. Si la x es mayor que tres tendría dos cifras negativas, en esas dos cifras no habría incremento.

Los rastros de comprensión encontrados en R2, nos permiten interpretar que identifica los distintos órdenes presentes en las cantidades de la tarea, pero la alumna manifiesta su incapacidad para realizar transferencias inversas con agrupamientos indeterminados. La herencia de su comprensión técnica del algoritmo de la resta, que hemos señalado en el fragmentos 4, justifica esta limitación, a pesar de la capacidad manifiesta para realizar sustracciones polinómicas (R2).

Unidad 10. Cálculo del cardinal de colecciones en agrupamientos indeterminados (tarea 14, ítem III.IIC26).

Dada la capacidad de la alumna para trasladar a estas nuevas situaciones sus estrategias personales, se le plantea la tarea 14 consistente en contar los vasos que aparecen en la nueva página notebook agrupados en filas y columnas de x+1 vasos. De la entrevista extraemos el siguiente fragmento:

R1. Eso es muy complicado; no me he enterado ¿Qué son los puntos esos?
E2. Son como puntos suspensivos, para indicarnos que entre ellos hay muchos vasos, de manera que en toda la fila hay x+1 vasos, e igual en las columnas.
R2. Vale, no se qué hacer… tengo que agruparlos...Es que no se cómo empezar. Primero voy a ver como obtener el total haciendo x-1 por x-1 (escribe (x-1). (x-1)). Lo resuelvo (opera y obtiene x^2 +x+x+1) Esto sería el total de los vasos (Piensa) (escribe x^2+2x+1 y lo parte por x, con una raya a modo de fracción)… esto es muy complicado. No se cómo hacerlo, pretendo agruparlo en x… ya no se seguir. (¿Qué tendrías que hacer? Le pregunto). Tendría que agruparlo aquí (señala la división indicada anterior) y lo que sobre serían los vasos sueltos; después…los otros serían los palés, los que me sobre de los palés serían . . ., lo que me sobre de las cajas serían. . . los paquetes …Yo lo dividiría entre x, pero ahora mismo no se como se hacía esto, el resultado serían los palés… no serían los palés… es que si fueran números reales lo sabría… estoy perdida… lo que me da sería los vasos e iría agrupando.

E3. ¿Y con la figura?
R3. Es que no se puede saber, pues como no se sabe el número de vasos que es.
E4. Hay x-1 y x-1.
R4. Si pero como no se sabe el número que es x, no sabemos los vasos que son.

Encontramos rastros de comprensión sobre el proceso a seguir, utilizando una estrategia puramente algebraica (ASc.2), dividiendo sucesivamente por el valor del agrupamiento y considerando los distintos restos como las cifras que componen el número de vasos total escritos en la base indeterminada x. Su problema es llevar a cabo el procedimiento descrito por ella misma. A nuestra propuesta de desarrollar un procedimiento grafico (ASc.1), manifiesta su dificultad para hacerlo con bases indeterminadas. De todo lo cual podemos interpretar que la alumna manifiesta un uso analítico-sintético de los sistemas de numeración en la aplicación de contar con cantidades en bases indeterminada.

La tabla 7.5 recoge, de forma resumida, todos los resultados que hemos deducido de la información de la entrevista a la alumna A5-1º.

Tabla 7.5 Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista a la alumna A5-1º

Tareas	*Fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/ empatía.*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Fragmento 1	-			Eae1 Eae4	Técnico	
IIN12	Fragmento 2	[1] Traduce del polinómico al decimal.				Analítico	Resuelve la tarea IIN8, como consecuencia de la resolución de la IIN12.
IIA13	Fragmento 3	[2]Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA14	Fragmento 4	[3] No justificación de las llevadas en la adición.	Reconoce la necesidad de conocer las justificación.			Técnico	
IIA15	Fragmento 5	[4] Justificación de la posición de los sumandos		AAop.1		Analítico	
III.IA18	Fragmento 6.1	Opera en base 10.			ESop.5	Técnico	
	Fragmento 6.2	[5] Opera parcialmente en base 10 y realiza transferencia de ordenes.		ASop.7		Analítico-Sintético	
III.IA18	Fragmento 7.1	[6] Opera en base 10.			ESop.5	Técnico	Herencia del nivel técnico de nuestro sistema.
	Fragmento 7.2				ESop.8	Analítico	
III.IIA24	Fragmento 8	[7] Opera en los distintos ordenes y realiza transferencias para obtener la expresión canónica.		ASop.6		Analítico/ Sintético	
III.IIA24	Fragmento 9	[8] Realiza sin ninguna dificultad la resta con expresiones algebraicas				Analítico/ Sintético	Herencia del nivel técnico de nuestro sistema.
III.IIC26	Fragmento 10	[9] El carácter indeterminado de la cantidad presentado y caracterizada por los puntos suspensivos supone un obstáculo insalvable.		ASc.2		Analítico/ Sintético	

7.3.2 Análisis de entrevistas a alumnos de segundo curso

7.3.2.1 Alumna A1-2º

Alumna de 2º curso grupo F del grado de Educación Primaria que ha cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética. Dado que había realizado días antes la PCN3, se han reducido el número de tareas, manteniéndose aquellas en las que cometía algún tipo de error o aquellas en las que sus respuestas necesitan de una mayor profundización. Entrevista realizada el 28 de mayo de 2012 a las 19:14.

Unidad 1. Distinción entre el número de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente (tarea IIN8).

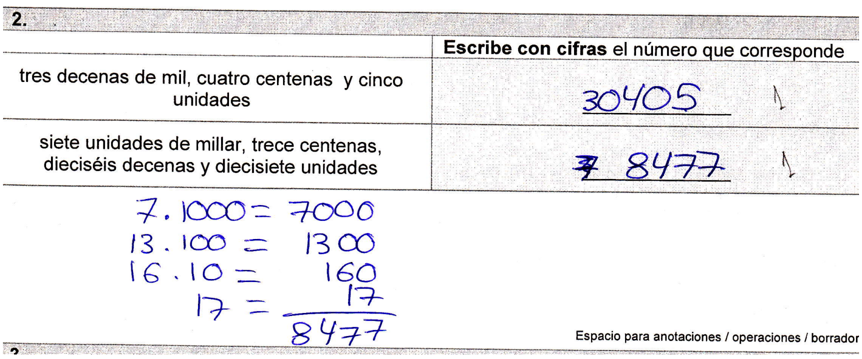
La alumna resuelve esta cuestión en la prueba PCN3 cometiendo el error EAe.3. Sin embargo modifica su respuesta en la entrevista en el sentido que se recoge en el siguiente fragmento y que interpretamos a continuación:

E1. Pretendo que me digas, ¿cuántas centenas contiene ese número?, o lo que es lo mismo, ¿cuántas centenas caben en ese número?
R1. (Piensa)
E2. Es lo mismo las cifras de las centenas que el número de centenas que contiene el número.
R2. No, la cifra de las centenas es 2 y para saber cuántas centenas contiene habría que dividirlo entre cien.
E3. Entonces, ¿cuántas centenas contiene?
R3. Ochenta y dos (escribe 82)
E4. ¿Cuántas unidades contiene ese número?
R4. Habría que dividir…Ocho mil doscientas treinta y cuatro (escribe 8234)
E5. ¿Y cuántas decenas contiene?
R5. Ochocientas veintitrés.

Responde adecuadamente a las cuestiones planteadas haciendo un uso analítico estructural de los sistemas de numeración.

Unidad 2. Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos órdenes (tarea IIN12).

La alumna responde adecuadamente a la tarea en la prueba PCN3, por lo que no realiza esta tarea en la entrevista. En la *Figura 7.1* observamos la respuesta dada en el cuestionario escrito.


2.

	Escribe con cifras el número que corresponde
tres decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades	30405
siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas y diecisiete unidades	~~7~~ 8477

7 . 1000 = 7000
13 . 100 = 1300
16 . 10 = 160
17 = 17
8477

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

Figura 7.1 Respuesta a la tarea IIN12 de la PCN3 de la alumna A1-2º

Unidad 3. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma (tarea IIA13; suma: 368 + 457)

En la prueba escrita la respuesta resulta insuficiente para poder extraer rastros de comprensión. A la pregunta sobre el significado de las llevadas en el orden de las decenas, la alumna respondía: *“Porque la suma se realiza en base 10 y se llegaría al 9 como máximo, por lo que el 1 sería el numero que faltaría”,* una respuesta un tanto enigmática que necesitaría de una explicación complementaria que no es posible obtener en la prueba escrita. Dicha explicación justifica la realización de la entrevista a esta alumna, de la que extraemos el siguiente fragmento en torno a la misma tarea que interpretamos a continuación:

R1. Ocho y siete son quince (escribe un 5) , me llevo una…
E2. ¿Qué significa esa que te llevas?
R2. Un grupo de decenas sería, son quince unidades, dejo 5 unidades sueltas y formo un grupo de diez (¿qué serían?, le pregunto) una decena, ahora sería seis y cinco once más una que me llevo doce, quedan dos unidades sueltas y formo un grupo de centenas…
E3. ¿Quedan dos unidades sueltas?
R3. No, dos grupos de diez, dos decenas y quedaría un grupo de centenas; y ya sumo y resultaría ocho.

En las respuestas R2 y R3 identificamos rastros de comprensión que nos permiten interpretar que la alumna hace un uso analítico funcional del sistema de numeración al justificar las llevadas del algoritmo de la suma, reconocer en cada caso el orden operado y realizar las oportunas transferencias entre ellos.

Unidad 4. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta (Tarea IIA14; operación: 562-36).

Al igual que en la justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma, la siguiente respuesta escrita a la pregunta sobre las llevadas en el algoritmo de la resta también resulta insuficiente para extraer alguna interpretación sobre su comprensión: “*En la resta por transferencia de base se suma el 1 de la decena a la cifra de orden superior*”. Está justificada, por tanto, la realización de la entrevista a esta alumna, de cuyas respuestas extraemos el siguiente fragmento en torno a la misma tarea y cuyo contenido interpretamos a continuación:

R1. Como a dos no se le pueden quitar seis, a doce le resto seis y quedan seis unidades y me llevo un grupo de diez (escribe un 1 sobre las decenas del minuendo) seis y una siete, menos tres cuatro, y cinco.
E2. ¿Si? ¿Estaría bien?
R2. (Piensa y se ríe, tacha el 1 que había escrito sobre las decenas) estaba operando como si estuviera sumando; el uno que me llevo se lo sumo al 3…
E3. ¿Y por qué se lo sumamos al tres?
R3. Porque…es que no se justificar este método, me parece más fácil de justificar el otro.
E4. Tú lo puedes hacer como quieras; se trata de realizar esa resta y justificar lo que haces.

R4. (Piensa) ¿Lo hago por el otro método? (Como quieras). Como a dos no le puedo restar seis, de seis transfiero una decena (escribe 10 y una flecha entre las decenas y las unidades), el seis se convierte en un cinco y el dos en doce, doce menos seis son seis (escribe el 6); a cinco le puedo restar tres, quedan dos (escribe el 2) y quedan cinco (escribe el 5); este es el de transferencia y del otro no me acuerdo su justificación. Yo sé que se suma abajo, pero no me acuerdo del porqué.
E5. En éste método restamos en las decenas, cinco menos tres y en cambio en el otro restaría…
R5. Seis menos cuatro, se le suma a la cifra de abajo…
E6. Da lo mismo restar arriba…
R6. Que sumar abajo, si eso era la propiedad... (no se acuerda)

Inicialmente la alumna pretende justificar el método austríaco de la resta y no lo consigue, por lo que propone realizarla por el de transferencia posicional justificando adecuadamente los procesos implicados, lo que nos permite interpretar un uso analítico funcional del sistema de numeración decimal en este caso. Una vez terminada la resta y su explicación, retoma el primer método y con cierta ayuda termina encontrando la propiedad que lo justifica.

Unidad 5. Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación (tarea IIA15).

La tarea que se ha tomado como referencia de esta unidad pide que se efectúe la multiplicación 258 x 26 y que se justifiquen las acciones que se van realizando. La alumna considerada responde por escrito a esta tarea en la prueba PCN3 aplicando mecánicamente el algoritmo (estrategia EAop.1) y respondiendo: "*Porque estás multiplicando la cifra de las decenas, dejando libre el orden de las unidades";* respuesta que vuelve a reproducir en la tarea de la entrevista como se pone de manifiesto en el siguiente fragmento:

R1. Seis por ocho cuarenta y ocho (escribe el 8) y me llevo cuatro (escribe 4 sobre las decenas del multiplicando), seis por cinco treinta y cuatro treinta y cuatro (escribe el 4 y el 3 sobre las centenas del multiplicador) me llevo tres, seis por dos doce y tres quince (escribe 15). Ahora multiplico las cifras de las decenas, dejo un hueco porque estoy multiplicando por decenas y no por unidades, dos por ocho dieciséis (escribe un 6) me llevo una…
E2. ¿Esa que te llevas qué significa?
R2. (Piensa) ¿Centenas?
E3. Dos por ocho son dieciséis, ¿dieciséis qué serían?
R3. Unidades sueltas…No dieciséis decenas y el uno que me llevo es una decena…no, una centena (se ríe y acaba de realizar la multiplicación).

Tanto en su respuesta a la tarea en la prueba escrita como en las respuestas del fragmento anterior, encontramos rastros de comprensión que nos hacen interpretar un uso técnico del algoritmo de la multiplicación, aunque en su respuesta R3 encontramos rastros de comprensión que podrían interpretarse diciendo que la alumna es capaz de hacer un uso analítico estructural de los sistemas de numeración y que podría disponer de una comprensión de este nivel; sin embargo aplica mecánicamente el algoritmo y no utiliza para la justificación del procedimiento, ni la distribución de los sumandos ni la propiedad distributiva o la descomposición de los elementos de la multiplicación.

Unidad 6. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal (tarea III.IA18.1).

Tarea en la que se pide el total de vasos en base 8 vendidos en los dos años y que la alumna resuelve correctamente en la prueba escrita utilizando la estrategia ASop.7. A pesar de ello, nos parece conveniente repetirla en la entrevista para servir de entrada a las últimas tareas en la que la alumna no ha respondido adecuadamente. Extraemos el siguiente fragmento para analizar la comprensión en torno a los aspectos implícitos en esta tarea:

R1. (Escribe las dos cantidades de vasos). Tengo que sumarlas en base 8, sería seis mas cinco es once, se formaría un grupo de ocho y quedarían tres unidades sueltas (escribe un 3 en el primer orden y un 1 sobre el segundo orden); ahora tendríamos siete y cinco doce, y una son trece; se forma un grupo de ocho y sobran cuatro (escribe el 4 y un 1 sobre la cifra que corresponde al tercer orden). (Hemos dicho que eran trece y sobran…), ah, no sobran cinco (borra el 4 y pone en su lugar un 5); seis y cuatro son diez y una once, monto un grupo de 8 y me quedan tres (escribe el 3 y un uno en el orden siguiente), dos y tres cinco y una seis (escribe 6).
E2. Eso significaría que en los dos años se han vendido…
R2. Tres vasos, cinco paquetes de ocho vasos, tres cajas de ocho paquetes de ocho vasos y seis palé de ocho …

Como en su respuesta en la prueba PCN3, la alumna reconoce la necesidad de operar en base 8 y a continuación realiza la suma generalizando los procedimientos utilizados en el decimal (estrategia ASop.7).

Unidad 7. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal (tarea III.IA18.2).

La respuesta dada en la prueba escrita se complementa, a efectos de la interpretación de las respuestas en términos de comprensión, con el análisis del siguiente fragmento de la entrevista realizada a la alumna en torno a esta unidad:

R3. (Escribe las dos cantidades una sobre otra) Ahora restamos en base 8. A seis le quitamos cinco (escribe 1). A cinco no le puedo quitar siete por lo que transferimos (escribe 8 sobre el 5, tacha el 4 y sobre él escribe un tres) y entonces nos quedaría trece menos siete que serían seis (escribe el 6). A tres no le puedo quitar seis por lo que hacemos la misma operación (tacha el 3 del cuarto orden y escribe sobre él un 2) y aquí transfiero ocho y el tres se convierte en once; once menos seis, cinco y aquí ponemos un cero.
E4. El incremento producido sería…
R4. Un vaso, seis paquetes de ocho vaso y cinco cajas de ocho paquetes de ocho vasos…

Tanto en la PCN3 como en el fragmento anterior encontramos rastros de comprensión (generalización del procedimiento) que nos permiten interpretar que la alumna es capaz de realizar un uso sintético funcional de los sistemas de numeración al generalizar los procedimientos utilizados en el algoritmo de la sustracción (estrategia ASop.7).

Unidad 8. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados (tarea III.IIA24. 1).

En la *Figura 7.2* se recoge la respuesta escrita de la alumna a la tarea de la PCN3 relacionada con el algoritmo de la suma en la base indeterminada. En dicha respuesta se ha identificado como principal dificultad la realización de transferencias de órdenes en bases indeterminadas. En primer lugar, la alumna resuelve considerando que ha realizado 3 transferencias (3 0 0 $_{(x)}$); corrige a continuación esta primera respuesta y propone la siguiente solución: (1 0 1 1 0$_{(x)}$), que denota correctamente a pesar del error de incluir alguna cifra de más. Sin embargo, a pesar de la existencia de algún rastro de comprensión, vemos la conveniencia de utilizar la entrevista para aclarar definitivamente la situación.

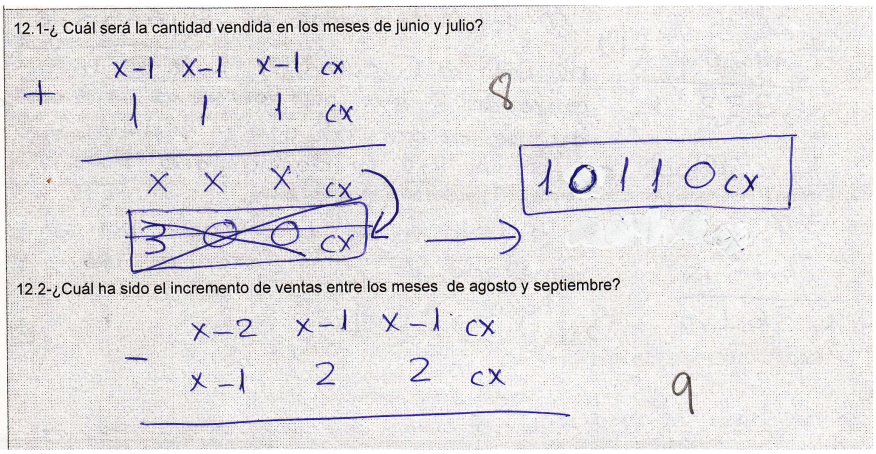


Figura 7.2 Respuesta a la tarea III.IIA24.1 y 24.2 de la PCN3 de la alumna A1-2º

Las respuestas a esta tarea en la entrevista se recogen en la *Figura 7.3* (producción escrita durante la entrevista sobre la pizarra digital) y en el fragmento que se incluye a continuación.

Junio	Julio	Agosto	Septiembre
x-1 x-1 x-1 (x	1 1 1 (x	x-2 x-1 x-1(x	x-1 2 2 (x

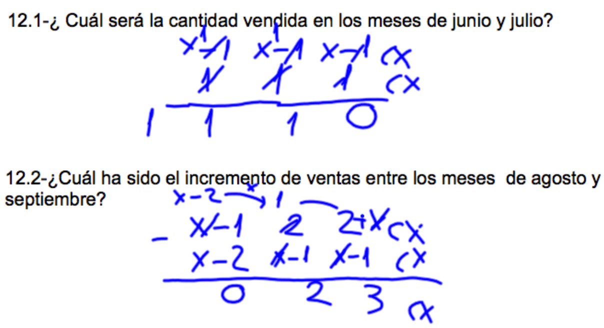


Figura 7.3 Respuesta a la tarea III.IIA24.1 y 24.2 en la entrevista de la alumna A1-2º

R1. (Escribe x-1 x-1 x-1 y debajo 1 1 1, indicando el tipo de agrupamiento) Como tenemos x-1, el 1 y el -1 se nos van, en todos los lugares y nos *quedaría x x x. Ahora x significa, como estamos haciendo agrupaciones en x, se forma un grupo de x y no queda ninguna unidad suelta (pone un cero en el primer orden del resultado y añade un 1 al segundo orden) y aquí se forma un grupo; tenemos x+1 por tanto queda una unidad suelta y aquí formamos un grupo (escribe un 1 y un 1 en el tercer orden) y aquí queda una unidad y un grupo de x, cero y una…(duda)*

E2. (Para recuperar el contexto en el que nos encontramos y darle significado a los distintos órdenes). Estás sumando, primero vasos, después has sumado paquetes y después cajas, ¿verdad? (Ella asiente) ¿Y cuántas cajas has obtenido?

R2. X+1, el 1 queda libre y x cajas, que no se puede poner.

E3. Esas x cajas ¿qué serían?

R3. Un grupo. Que pasaría al orden superior (escribe un 1 en el cuarto orden)

En la entrevista resuelve el problema de realizar las transferencias entre los órdenes, aunque en el tercer orden vuelve a tener alguna duda que resuelve con nuestras preguntas E2 y E3. De aquí podemos interpretar una comprensión sintética funcional del segundo subnivel de los sistemas de numeración al generalizar los procedimientos implicados en el algoritmo de la adición en bases indeterminadas, identificando el valor posicional de las distintas componentes, operando algebraicamente cada una de ellas y realizando de forma adecuada las necesarias transferencias entre los distintos órdenes (R1, R3), estrategia codificada como ESop.7.

Unidad 9. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos indeterminados (tarea III.IIA24. 2).

En la prueba escrita, la alumna se limitó a colocar los elementos de la sustracción sin llegar a realizar ninguna acción. En el siguiente fragmento se recoge las respuestas a la misma tarea en la entrevista:

R4. No se, no se…A ver; se supone que septiembre es mayor (escribe primero septiembre y debajo agosto, x-1 2 2 y debajo x-2 x-1 x-1, la raya para restar y el signo de resta a la izquierda). Lo mismo que antes podía sumar una mas uno, ahora puedo restar 2 menos una, una (se queda pensando). No sabemos si es mayor o menor…pero ¿podemos transferir?; transfiero x, este se convierte en un 1 y este se convierte en 2+x (tacha el 2 y coloca encima un 1, y una flecha hacia el primer orden, donde escribe 2 + x) y ahora resto, se van las x y quedaría 2 menos, menos uno, que serían tres (escribe un tres en el primer orden);(se ríe) con este igual, transfiero una x, me quedaría (piensa)… x-2 y aquí me quedaría x+1, x+1 menos x-1, quedarían 2 (escribe el 2) y la x se me van, y aquí se van cero.

E5. El incremento, ¿sería?

R5. Tres vasos y dos paquetes de x vasos. Bueno he sido capaz de hacerlo, (¿porqué no fuiste capaz de hacerlo?, le pregunto sobre su respuesta en la PCN3), porque yo no me había dado cuenta, yo no sabía si el 2 era o no superior al x-1, y claro sin saber si era o no más pequeño podía transferir de un orden a otro y lo dejé.

E6. ¿Y podemos transferir siempre?

R6. Si tienes la certeza que es mayor sí.

E8. Y si no sabemos si es mayor o menor, el hecho de transferir ¿modifica la cantidad?
R7. No, la cantidad total no varía, porque lo que le quitas se lo das igualmente. (O sea, ante la duda, le pregunto, ¿se puede transferir?). Y no es tan difícil hacerlo pero si no te das cuenta de ese detalle no lo haces; yo no fui capaz de realizar la resta…

Tanto en este registro como en el anterior encontramos rastros de comprensión suficientes para poder asegurar que la alumna manifiesta una comprensión sintética del segundo subnivel del sistema de numeración al haber generalizado para bases indeterminadas los procedimientos implicados en los algoritmos de nuestro sistema; la alumna ha identificado las cantidades que determinan los distintos órdenes implicados y ha operado algebraicamente cada una de ellos, realizando de forma adecuada las necesarias transferencias entre los distintos órdenes (R4), estrategia codificada como ESop.7. En su respuesta R5 reconoce la limitación que le impidió resolver la tarea en la prueba escrita y en la respuesta R7 acepta la posibilidad de realizar las transferencias independientemente de los valores de los órdenes a operar.

En la tabla 7.6 se sintetizan los resultados obtenidos en la entrevista de la alumna A1-2º.

Tabla 7.6 Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista a la alumna A1-2º

Tareas	*Unidades y Fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/empatía.*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Fragmento 1	Diferencia los conceptos implicados.				Analítico	
IIN12	Realizada en la PCN3	[1] Traduce del polinómico al decimal.				Analítico	
IIA13	Fragmento 3	[2] Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA14	Fragmento 4	[3] Justificación de las llevadas en la sustracción para el método de transferencia y en menor medida para el austriaco.				Analítico	
IIA15	Fragmento 5	[4] Justificación de la posición de los sumandos		EAsop.1		Técnico/Analitico	
III.IA18	Fragmento 6	[5] Opera en base 8.			ASop.7	Analítico	
	Fragmento 7	[6] Opera en base 8.			ASop.7	Analítico	
III.IIA24	Fragmento 8	Opera en la base x			ASop.7	Sintético	
	Fragmento 9	Opera en la base x	La transferencia entre órdenes limitación en la PCN3 y clave en el desarrollo de la tarea en la entrevista.		ASop.7	Sintético	

7.3.2.2 Alumna A2-2º

Alumna de 2º curso grupo F del grado de Educación Primaria que ha cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética. Realizó la PCN2 en septiembre de 2011 al comenzar a cursar la asignatura y dado el tiempo transcurrido realiza la entrevista completa el 28 de mayo de 2012 a las 18:40. Veamos a continuación el análisis de las respuestas a cada una de las unidades en que hemos dividido la entrevista.

Unidad 1. Distinción entre el número de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente (tarea IIN8).

En la PCN2 la alumna respondió a esta tarea cometiendo el error EAe.1, confundiendo la cifra de un orden con el número de órdenes que contiene el número. En el siguiente fragmento de la entrevista se aprecia como mantiene su respuesta:

E1. En esta tarea quiero que me digas las centenas que contiene ese número, o lo que es lo mismo, cuantas centenas caben en ese número.
R1. (Piensa y dice) Doscientas treinta y cuatro.
E2. Y, ¿cuántas unidades contiene?
R2. Cuatro
E3¿Cuántas decenas contiene?
R3. Treinta y cuatro, (silencio)…es, ¿cuántas centenas contiene? O ¿Qué cifra …?
E4. No, te pregunto ¿cuántas decenas contiene ese número?
R4. ¿Cuántas decenas contiene? Treinta y cuatro, no, no, no (piensa), doscientas decenas, cuatro unidades y treinta decena.

Las respuestas de la alumna manifiestan sus dudas sobre la cuestión planteada, con variaciones entre los errores EAe.1**,** EAe.3 y EAe.4. No podemos asegurar que la alumna haga un uso analítico estructural de los sistemas de numeración.

Unidad 2. Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos órdenes (tarea IIN12)

En la prueba escrita la alumna resolvió la tarea traduciendo directamente la primera de las expresiones (tres decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades) y transformando a unidades las cantidades de los distintos órdenes en la segunda de las expresiones (siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas y diecisiete unidades).

En la entrevista se vuelven a incluir dos números con distintas estructuras, el primero, con una modificación respecto al presentado en el cuestionario, permite su transcripción casi directa por estar formados por órdenes separados o disjuntos (trece decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades), mientras que en el segundo, que se mantiene el del cuestionario, los órdenes están distribuidos entre las distintas expresiones y se necesita de las oportunas transferencias. Hemos seleccionado el siguiente fragmento de las respuestas de la alumna:

R1. (Escribe 5 y 40 a su izquierda, 405 y a continuación 130 a su izquierda; resulta por tanto 130.405)
E2. En ese número, ¿cuál es la cifra de las decenas de mil?
R2. La cifra de las decenas de mil es 3.
E3. Y ¿cuántas decenas de mil contiene?
R3. Trece.
E4. ¿Cuál es la cifra de las centenas?
R4. Cuatro
E5. Y ¿cuántas centenas contiene ese número?
R5. Cuatrocientas cinco.
E6. Escríbeme el número de abajo, el que está formado por siete unidades de mil, trece centenas…
R6. (Escribe de derecha a izquierda 8.487)
E7. ¿Cómo lo has hecho?

R7. He empezado a contar desde las unidades y en el sistema decimal como habla de diecisiete unidades, a partir de diez cuenta unidades del orden superior y por eso se las he añadido a las decenas y así en todas.

Las respuestas nos inducen a identificar un uso analítico estructural del sistema de numeración decimal al identificar los distintos órdenes, descomponerlos y realizar las transferencias oportunas para realizar la traducción al sistema decimal. Hemos querido insistir en la diferenciación de los dos conceptos implicados en el fragmento anterior, pero la alumna mantiene el tipo de respuesta.

Unidad 3. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma (tarea IIA13; 368 + 457).

En la prueba escrita la alumna respondía a esta tarea cometiendo el error EAop.2, considerando decenas en todas las llevadas independientemente del orden operado. Así, al operar las decenas, respondía por escrito: *"Significa que la suma anterior (11+1) es igual a 12, por tanto en la suma que hay que efectuar seguidamente tenemos que tener en cuenta que son 12 unidades, pero el lugar de las decenas lo ocupa un 1 que hay que sumar en la próxima suma"*. En el siguiente fragmento de la entrevista se recoge su explicación del algoritmo de la suma:

R1. Ocho unidades más siete unidades son quince unidades, en nuestro sistema diez unidades pasan a las del orden superior (escribe un cinco) que es la decena, (escribe un 1 en las decenas), seis decenas mas cinco, mas una de antes son doce decenas, como nos pasamos de diez, pasamos diez al orden superior (escribe un 2 en el lugar de las decenas del resultado y 1 en la parte superior de las centenas), cuatro centenas mas tres centenas mas una de antes son ocho centenas (escribe un 8 en el lugar de las centenas).

Encontramos aquí rastros de comprensión que nos permiten interpretar que la alumna hace un uso analítico del sistema de numeración al justificar las llevadas en el algoritmo de la suma, reconociendo los órdenes implicados y realizando las oportunas transferencias entre los distintos órdenes. La diferencia entre las dos justificaciones nos hace pensar en la influencia que ha podido tener la asignatura cursada.

Unidad 4. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta (Tarea IIA14; operación: 562 – 36).

La siguiente es la justificación que la alumna daba en la prueba escrita y que catalogamos entonces como error EAop.1, aplicación mecánica del algoritmo: *"El número 12 que en la resta está representado con el "2" tiene 1 decena y 2 unidades. La decena se ha de sumar al número tres para efectuar de forma correcta la resta, ya que solo se opera entre unidades en esta operación"*. En la entrevista ofrece una explicación del proceso seguido de la que extraemos el siguiente fragmento:

R1. Aquí tenemos en realidad doce unidades arriba y seis abajo, de seis a doce son seis (escribe 6) y me llevo una porque antes se las he quitado al orden superior, entonces de cuatro a seis (escribe 2)…
E2. ¿Y por qué se las sumamos abajo?

R2. Podemos sumarlo abajo o quitársela al de arriba (señala el seis), podemos poner un cinco, pues en realidad hemos quitado una decena y la hemos pasado a las unidades. Lo podemos hacer… nosotros en el algoritmo que utilizamos se la añadimos al de abajo, pero podemos hacerlo de esta otra manera que sería quitársela al de arriba. Y ahora sería de cero a cinco son cinco (escribe 5 y acaba).

Las respuestas R1 y R2 nos inducen a interpretar un uso analítico funcional del sistema de numeración, al justificar las llevadas mediante las dos opciones posibles en el algoritmo de la resta.

Como en la justificación del algoritmo de la suma, la alumna demuestra una mejora en el uso analítico funcional de los sistemas de numeración que tenemos que adjudicárselo al desarrollo de la asignatura Didáctica de la Aritmética.

Unidad 5. Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación (tarea IIA15; operación: 258 x 26).

En la prueba escrita realizada antes de cursar la asignatura Didáctica de la Aritmética, la alumna respondía *"Porque lo que multiplico son las decenas, por tanto deben colocarse en el lugar de las decenas"*. En la entrevista realizada cuatro meses después de cursar la asignatura, realiza una nueva explicación del proceso seguido de la que extraemos para su análisis el siguiente fragmento:

R1. (Comienza a realizar la multiplicación justificando las llevadas como lo ha hecho antes y va completando la multiplicación por las unidades; cuando comienza a multiplicar por las decenas del multiplicador deja el espacio en blanco y le pregunto por este paso) porque ahora estamos multiplicando por la cifra de las decenas y empezamos en las decenas…pero es que en realidad multiplicamos por 20 y por eso lo colocamos directamente un lugar a la izquierda. Ahora me llevo 10 unidades que son una decena (cuando ha hecho 2 por ocho dieciséis).
E2. ¿Te llevas una decena?
R2. Me llevo diez decenas y lo sumo con las centenas… (Acaba justificando todo lo que hace).

A la justificación dada en el cuestionario escrito la alumna añade la estrategia AAop.1, que denota un conocimiento analítico funcional del sistema de numeración al justificar la posición de los sumandos parciales haciendo referencia implícita a la propiedad distributiva.

Unidad 6. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal (tarea III.IA18.1).

La respuesta a la tarea en la prueba PCN2 utilizaba la estrategia ASop.4, por la que se transforman las cantidades a base 10 y a continuación se opera con ellas. En la entrevista, sin embargo, utiliza otra estrategia que figura en el siguiente fragmento seleccionado:

E1. …Tienes que expresar el total de ventas en los dos años.

R1. ¿En el decimal? Hago la cuenta aquí (escribe 2675 y 3456 y suma en base 8, quedándole 6 3 5 3 en base ocho).

Aquí, la alumna reconoce la necesidad de operar en base 8, operación que realiza a continuación generalizando los procedimientos utilizados en el sistema decimal (estrategia ASop.7).

Unidad 7. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal (tarea III.IA18.2).

La respuesta a esta tarea en la prueba escrita está asociada al error ESop.5, que se manifiesta al operar sin tener en cuenta el agrupamiento utilizado. Sin embargo, la respuesta dada por la alumna en la entrevista a esta misma tarea adquiere matices diferentes que se deducen del análisis del siguiente fragmento extraido de dicha entrevista:

E2. Y ahora quiero que me expreses el incremento producido en el 2011.
R2. (Resta en base ocho, escribe 3456 y debajo 2675) (Le comento si restar y sumar podríamos hacerlo en base 10, y me dice que no es posible pues son agrupamientos de ocho). Aquí tenemos que pasar una unidad (le comento si es necesario) ah no, sí se puede (y resta 6 menos 5 una, y coloca un 1 en el primer orden, y en los demás casos hace transferencia de ordenes llegando al resultado 0 5 6 1) El incremento es un vaso suelto, seis paquetes y cinco cajas.

Aquí, al igual que en la unidad anterior, la alumna reconoce la necesidad de operar en base 8, operación que realiza a continuación generalizando los procedimientos utilizados en el sistema decimal (estrategia ASop.7). Del mismo modo se aprecia un mayor nivel de comprensión de los sistemas de numeración, lo que puede haber sido debido al desarrollo de la asignatura.

Unidad 8. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados (tarea III.IIA24. 1).

En la respuesta a esta tarea en la prueba PCN2, la alumna pretende utilizar la misma estrategia que la utilizada para la suma en base ocho, traduciendo a base 10 las cantidades que aparecen, pero la expresión algebraica la iguala a cero y pretende resolver la ecuación resultante. Al final tacha lo realizado, como se puede ver en la *Figura 7.4,* en la que se recoge la respuesta dada en dicha prueba escrita.

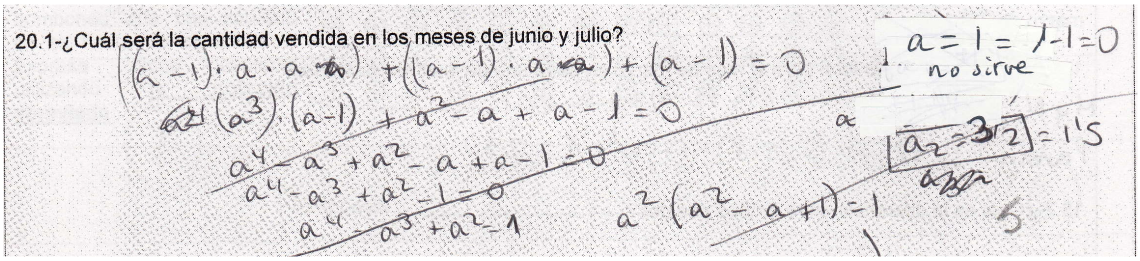


Figura 7.4 Respuesta a la tarea III.IIA24.1 en la prueba PCN2 de la alumna A2-2º

En la entrevista individual se vuelve a plantear la misma tarea, de cuya respuesta hemos seleccionado el siguiente fragmento para su análisis:

R1. (Escribe x-1 x-1 x-1 y debajo 1 1 1). El resultado sería x x x.
E2. ¿Y no puedes utilizar el mismo procedimiento que antes, sabiendo que ahora agrupamos de x en x?
R2. Es que me pierdo con las x.
E3. Escribe el resultado que me has comentado.
R3. (Escribe x x x en el resultado) Me pierdo.

Hemos comprobado que los valores indeterminados suponen un obstáculo para realizar las tareas propuestas. La alumna llega a realizar la suma en cada uno de los órdenes, pero se "pierde" a la hora de realizar las transferencias.

La tabla 7.7 ilustra los diferentes resultados obtenidos en el análisis hermenéutico de las distintas partes de la entrevista a la alumna A2-2º.

Tabla 7.7 Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista a la alumna A2-2º

Tareas	*Unidades y Fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/empatía.*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Fragmento 1	No diferencia los conceptos implicados.			EAe.1 EAe.3 EAe.4	-	El lenguaje puede ser un obstáculo para resolver la tarea.
IIN12	Fragmento 2	[1] Traduce del polinómico al decimal.				Analítico	
IIA13	Fragmento 3	[2] Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA14	Fragmento 4	[3] Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA15	Fragmento 5	[4] Justificación de la posición de los sumandos		AAop.1		Analítico	
III.IA18	Fragmento 6	[5] Opera en base 8.		ASop.7		Sintético I	
	Fragmento 7	[6] Opera en base 8.		ASop.7		Sintético I	
III.IIA24	Fragmento 8	Opera en la base x, pero no puede realizar las transferencias entre ordenes.	Reconoce que se pierde con las "x"	ASop.6		-	

7.3.2.3 Alumno A3-2º

Alumno de 2º curso, grupo C, del grado de Educación Primaria que ha cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética. Realizó la prueba escrita PCN2 en septiembre de 2011 al comenzar a cursar la asignatura y dado el tiempo transcurrido realiza la entrevista completa el 31 de mayo de 2012 a las 12:39.

Unidad 1. Distinción entre el número de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente (tarea IIN8).

En la PCN2 responde correctamente de forma escueta a lo solicitado. En la entrevista, A3-2º emite una respuesta más larga de la que extraemos para su análisis el siguiente fragmento:

R1. Puedo decir que hay o 2 centenas o 82 centenas, entendiendo que si contamos la centena habría que contar las que hay por este lado (señala las 8 de las unidades de millar, parece que en un principio no tiene claro o no entiende la pregunta).
E2. ¿Es lo mismo la cifra de las centenas que las centenas que contiene el número?
R2. Si preguntas cuántas centenas contiene son 82, si haces el típico ejercicio de libro donde te preguntas la cifra de las unidades, las decenas, etc., del número son 2 , pero centenas contenidas 82 (escribe 82)
E3. ¿Cuántas unidades contiene?
R3. Pues ocho mil cuatrocientas treinta y cuatro (escribe 8.234)
E4. ¿Y cuántas decenas contiene?
R4. Ochocientas veinte (escribe 820).

Como se puede deducir de la información recogida, tanto en la respuesta escrita a la tarea en la prueba PCN2 como en la entrevista, el alumno responde a las cuestiones planteadas haciendo un uso analítico estructural de los sistemas de numeración, diferenciando entre los dos conceptos implicados en la tarea.

Unidad 2. Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos órdenes (tarea IIN12).

En el cuestionario escrito realiza las traducciones de forma directa para la primera de las cantidades presentadas y realizando transformaciones a unidades en la segunda. De forma similar se pronuncia en el siguiente registro de la entrevista:

R1. Trece decenas de mil son ciento treinta mil (escribe 130.000) cuatro centenas son cuatrocientos (escribe 400 debajo de lo anterior) y 5 unidades son cinco (escribe cinco debajo y suma las tres cantidades obteniendo el número 130.405). Siete unidades de millar son siete mil (escribe 7.000), trece centenas que son mil trescientos (escribe debajo 1300), dieciséis decenas que son ciento sesenta (escribe 160) y diecisiete unidades (escribe 17 debajo y suma todo obteniendo 8.477).

El alumno manifiesta una comprensión analítica estructural de los sistemas de numeración al identificar los órdenes implícitos, expresarlos en términos de unidades y proceder a realizar la suma de todos los resultados.

Unidad 3. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma (368 + 475).

En la PCN2 responde a la pregunta sobre el significado de las llevadas en la posición de las decenas: "1 son las centenas que sobran al sumar las decenas", y de la misma forma en la entrevista responde:

R1. Siete y ocho son quince, quince me llevo una y la pongo aquí (coloca el 1 sobre las decenas, escribe el 5)
E2. ¿Y esa que te llevas?
R2. Cuando digo quince tengo una decena y cinco unidades, las unidades las coloco aquí (señala el lugar de las unidades) y las decenas la sumo con las decenas. Me es más fácil poner el uno aquí (señala el 1 que escribió sobre

el 6 en las decenas) porque seis y seis son doce; doce (escribe el 2) y me llevo una que va a ser una centena y la escribo aquí (sobre las centenas) y uno y tres cuatro y cuatro ocho (escribe el 8 en las centenas).

Los rastros de comprensión encontrados en ambas pruebas nos permiten asegurar que el alumno hace un uso analítico funcional del sistema de numeración al justificar las llevadas del algoritmo de la suma mediante las oportunas transferencias entre los distintos órdenes.

Unidad 4. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta (562-36).

En la justificación que el alumno aporta en la respuesta escrita a esta tarea, queda en el aire la duda de que comprenda el significado de los procesos realizados, dado que su respuesta no deja clara la razón de que devolvamos al sustraendo la decena "quitada" al minuendo: *"Porque para restar las cifras de unidades hemos necesitado quitar una decena al numero de arriba. Esta resta se representa añadiendo una decena al número de abajo"*. En el siguiente fragmento de la entrevista se recoge la explicación al proceso realizado en el algoritmo de la resta:

R1. Dos menos seis, yo diría directamente hasta doce, sabiendo que le estoy quitando una decena que la quito de aquí (señala las decenas del minuendo y pone un -1 sobre el 6), doce menos seis son seis (escribe el 6) seis menos una son cinco menos tres son dos (escribe el 2), cinco menos cero son cinco (escribe el 5).
E2. Habitualmente se le suma al de abajo; ¿por qué sería eso?
R2. No lo sé, siempre lo he hecho de cabeza y esto (el colocar el -1 sobre el minuendo) hace tiempo que no lo hago, pero el hecho de sumar abajo será porque la suma es más sencilla que la resta, si hubiera un cero sería mas complejo de quitar uno.
E3. ¿Y por qué se le quita abajo?
R3. Porque es lo mismo, estas aumentando una decena en la extracción, luego el efecto es el mismo, da igual sumar abajo que restarlo arriba.

Las respuestas R1 y R2 nos inducen a interpretar que el sujeto hace un uso analítico funcional del sistema de numeración, justificando las llevadas del algoritmo de la resta mediante las dos opciones posibles.

Unidad 5. Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación (tarea IIA15).

En la respuesta a esta tarea en el cuestionario el alumno utiliza la estrategia AAop.1 para justificar la disposición de los sumandos en la multiplicación, haciendo referencia implícita a la propiedad distributiva de la multiplicación: *"Estamos omitiendo el 0 que iría a su derecha, pues en realidad la multiplicación se puede dividir en: 258 x 6 + 258 x 20, así todo lo multiplicado por el 2 en realidad lleva un cero a la derecha"*.

Su respuesta a la misma cuestión en la entrevista tiene características similares a la ofrecida en el cuestionario:

R1. Seis por ocho cuarenta y ocho (escribe el 8) nos llevamos cuatro (completa la multiplicación por las unidades, le pregunto por las llevadas y me dice que es igual a lo que antes explico en la suma). Cuando multiplicas las decenas dejamos un espacio libre, porque estamos multiplicando por 20 y por esto habría que poner el cero (pone el cero en el lugar de las unidades), pero se usa el algoritmo usual que deja el hueco. (Acaba de realizarla justificando la suma por el hecho de que multiplicar por 26 es multiplicar primero por 6 y por 20, y para obtener el resultado suma ambos resultados).

Utiliza para justificar la posición de los sumandos parciales la estrategia AAop.1, que denota un conocimiento analítico funcional del sistema de numeración. El alumno justifica la posición de los sumandos parciales en el algoritmo de la multiplicación haciendo referencia implícita a la propiedad distributiva.

Unidad 6. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal (extraída del ítem III.IA18 en el que se solicita se obtenga el total de vasos vendidos, en agrupamientos de 8, en los dos años que se mencionan).

En la respuesta escrita a esta tarea en la prueba PCN2 el alumno utiliza la estrategia ASop.4, transformando las cantidades de vasos a la base 10 y posteriormente realizando las operaciones. Sin embargo, en la entrevista resuelve la tarea con las explicaciones siguientes:

R1. Cuánto suman. A mi se me ocurre transformar estas cantidades a base diez y después sumarlas. Para ello hay que multiplicar cada cifra por la base elevada a tanta veces como su posición (escribe n_0, n_1, n_2, ...)…
E2. Tu lo que vas a hacer es…
R2. Un cambio de base para sumar los dos números en base diez y después…
E3. ¿Y no podrías trabajar directamente con esas expresiones abreviadas?
R3. Podemos hacerlo directamente aquí (va a sumar en la expresión desarrollada, de forma aislada cada orden); seis y cinco once, le quitamos ocho, que serían un paquete y nos quedan tres (escribe un 3), siete y cinco son doce y un paquete trece, quitamos ocho y nos quedan cinco (escribe un 5) y nos llevamos una hacia aquí (señala las cajas), seis y cuatro son diez y una que nos llevamos son once; once menos ocho son tres (escribe un 3) y me llevo una, tres y dos son cinco, y una que me llevo son seis (escribe un 6 en los palés) por tanto la cantidad total son seis palés, 3 cajas, cinco paquetes y tres vasos. Sí, me parece mucho más fácil que el otro procedimiento.

El alumno propone inicialmente traducir las cantidades a base 10 y después realizar la suma (estrategia ASop.4), lo que es coherente con la forma de resolver que utilizó en el cuestionario escrito. Ante nuestro requerimiento de trabajar directamente con las expresiones abreviadas, opera en el agrupamiento 8 realizando las transferencias oportunas (estrategia ASop.7), generalizando las estrategias utilizadas en nuestro sistema y aceptando que este procedimiento es más fácil que el que inicialmente había propuesto, lo que nos induce a interpretar el uso sintético funcional de los sistemas de numeración.

Unidad 7. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal (extraído del ítem III.IA18 en el que se solicita se obtenga el incremento de vasos del año 11 respecto al anterior, mediante agrupamientos de 8).

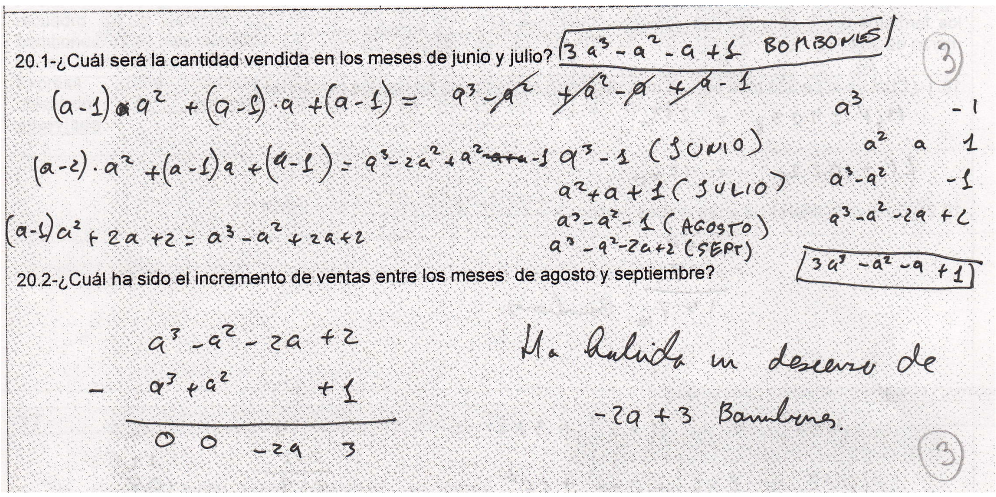
En la prueba escrita, como en el caso de la adición, el sujeto realiza la traducción a base 10 y después opera en dicho sistema (estrategia ASop.4). En la entrevista, continúa con el nuevo procedimiento:

R4. La diferencia que ha habido de ganancias es la resta. Esto es más complicado (le sugiero que escriba las cantidades en el orden adecuado en la parte inferior). Si, mejor, y así evito el error que iba a cometer al restar de la menor la mayor (escribe 3456 y debajo 2675, pone la raya para restar). Esta es sencilla, seis menos cinco son una (escribe 1) aquí no pasa nada, cinco menos siete si es un problema, tenemos que darle ocho, no diez, ocho y cinco trece, trece menos siete son seis (escribe un 6) aquí hemos quitado uno (señala las cajas) y hacemos lo mismo trece; no, no tenemos trece son tres mas ocho, once menos seis son cinco (escribe un 5), aquí le hemos quitado uno, por tanto dos menos dos son cero (escribe un cero). El incremento es cinco seis uno en base ocho. O sea, de cinco cajas seis paquetes y un vaso.

En esta tarea ya no menciona la posibilidad de utilizar la estrategia ASop.4 y directamente opera en el agrupamiento 8 realizando las transferencias oportunas (ASop.7) y generalizando las estrategias utilizadas en el sistema decimal, lo que nos induce a interpretar el uso sintético funcional de los sistemas de numeración.

Unidad 8. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados (tarea III.IIA24.1).

En la respuesta escrita a la misma tarea en la prueba PCN2 utiliza la estrategia ASop.4 para realizar una traducción adecuada de las cantidades al sistema decimal (con algún error menor) y sumar posteriormente las dos expresiones obtenidas. En la *Figura 7.5* se presentan las respuestas a las tareas de síntesis II de dicha prueba escrita.


20.1-¿Cuál será la cantidad vendida en los meses de junio y julio? $\boxed{3a^3 - a^2 - a + 1}$ BOMBONES

$(a-1)a^2 + (a-1)\cdot a + (a-1) = a^3 - \cancel{a^2} + \cancel{a^2} - \cancel{a} + \cancel{a} - 1$

$(a-2)\cdot a^2 + (a-1)a + (a-1) = a^3 - 2a^2 + a^2 - 1$ $\quad a^3 - 1$ (JUNIO)

$a^2 + a + 1$ (JULIO)

$(a-1)a^2 + 2a + 2 = a^3 - a^2 + 2a + 2$ $\quad a^3 - a^2 - 1$ (AGOSTO)

$a^3 - a^2 - 2a + 2$ (SEPT)

$a^3 \quad -1$

$a^2 \quad a \quad 1$

$a^3 - a^2 \quad -1$

$a^3 - a^2 - 2a + 2$

$\boxed{3a^3 - a^2 - a + 1}$

3

20.2-¿Cuál ha sido el incremento de ventas entre los meses de agosto y septiembre?

$$\begin{array}{r} a^3 - a^2 - 2a + 2 \\ -\quad a^3 + a^2 \quad\quad + 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2a \quad 3 \end{array}$$

Ha habido un descenso de $-2a + 3$ Bombones.

3

Figura 7.5 Respuesta a la tarea III.IIA24.1 y 24.2 en la PCN2 del alumno A3-2º

En la *Figura 7.6,* que recoge una parte de la actividad desplegada en la pizarra digital durante el transcurso de la entrevista, así como en el fragmento de la misma entrevista que se incluye a continuación, se recogen las respuestas de este alumno a esta misma tarea.

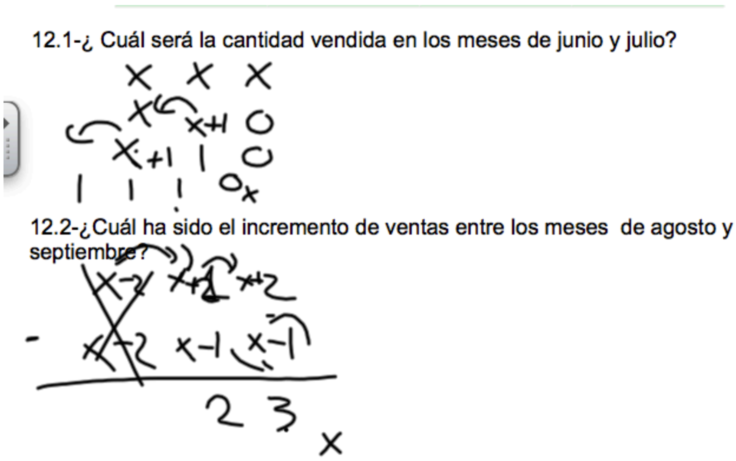


Figura 7.6 Respuesta a la tarea III.IIA24.1 y 24.2 en la entrevista del alumno A3-2º

R1. La suma total de junio y julio. Tenemos en julio 1 1 1 en base x, y en junio x-1 x-1 x-1 en base x, o sea, uno menos que la base. Justo como aquí falta un uno en cada uno, falta un vaso, un paquete y una caja, que es lo que tenemos en julio, pues quedarían equis, equis y equis (escribe x x x). ¿Está bien?

E2. Si, el problema es, ¿tiene sentido? O mejor ¿Se puede expresar de forma más reducida?

R2. Esta x iría aquí realiza transferencia entre vasos y paquetes y entre paquetes y cajas) y quedarían dos equis (escribe 2x).

E3. ¿Dos equis?

R3. Vamos a hacerlo por orden. Si aquí hay equis (señala vasos) que es el máximo me lo llevo para allá (para paquetes dibuja un vector de vasos a paquetes) sumando uno, quedaría (x x+1 0). Esta x (de los paquetes dibuja un vector entre paquetes y cajas) pasa para allá y queda (x+1 1 0) y de nuevo (dibuja un vector entre cajas y palés) y quedan (1 1 1 0) un palé , una caja, un paquete y cero vasos.

Resulta evidente que el alumno manifiesta una comprensión sintética del segundo subnivel de los sistemas de numeración al identificar el valor posicional de las distintas componentes en la expresión de las cantidades, operar algebraicamente cada una de ellas y realizar de forma adecuada las necesarias transferencias entre los distintos órdenes (R2 y R3), estrategia codificada como ESop.7.

Unidad 9. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos indeterminados (incluida en la tarea III.IIA24).

En la prueba escrita, una vez realizadas las traducciones al sistema decimal, el alumno realiza adecuadamente la sustracción de las expresiones algebraicas obtenidas con algunos errores menores con los signos *"un descenso de -2 a +3 bombones"*. En la entrevista se dedica una atención especial a esta tarea, de cuya intervención hemos seleccionado para su análisis el siguiente fragmento:

R4. Esto es una resta, entre agosto y septiembre, ¿en cuál de los dos se vendió más?, parece ser que en septiembre. Tenemos que restar (x-1 2 2) menos (x-2 x-1 x-1). Evidentemente equis menos uno… ¡ah!, no tiene porqué… si la base fuese dos, que no lo sabemos…la base no puede ser dos, luego la base va a ser por fuerza mayor que dos. Si la base es mayor que dos, este número es menor que éste (se refiere a las unidades de sustraendo respecto de las del minuendo), en cualquier caso habría que llevar una de aquí (de los paquetes del minuendo), le quitamos uno y aquí tendríamos x+2, las equis se van y como tenemos una resta este sería más (señala el -1 del sustraendo) y por tanto dos y uno son tres (escribe 3 en vasos); si esto es tres ya no sabemos si puede ser tres la base. Aquí nos quedaría uno (señala los paquetes del minuendo), equis menos uno es mayor que uno y tenemos que pasar una caja y nos van a quedar equis menos dos cajas y equis más dos paquetes, (le pregunto ¿x+2?), no, equis más uno; equis más uno, menos equis menos uno, equis con equis se van a ir y uno y uno son dos (escribe 2 en los paquetes) y equis menos dos, menos equis menos dos, cero; por tanto queda dos y tres en base equis. No estoy muy convencido de ello, porque ha sido un poco cuenta de la vieja pero…
E5. ¿Cuenta de la vieja?
R5. Sí, ¿está bien?
E6. Yo creo que has seguido el mismo procedimiento que antes, cuando el orden del minuendo es inferior al del sustraendo transfieres del orden superior…
R6. La verdad es que me resulta mucho más difícil trabajar con…incógnitas, con ecuaciones…
E7. No son ecuaciones.
R7. Con polinomios, me es mucho más difícil que trabajar con números.
E8. Pero si sigues las mismas pautas que antes…
R8. Parece que se cumple.
E9. Pero además de seguir con las mismas pautas nos encontramos con el problema…
R9. De la incógnita,
E10. Tenemos que tener un dominio del trabajo con expresiones algebraicas.
R19. Por ejemplo tengo dudas porque no sé qué ocurre con el procedimiento respecto al tres y al dos de la base (señala la resta de 2 y del x-1 para dar 3).
E11. Quizás en el enunciado habría que incluir que la base sea superior a tres. De cualquier manera como la transferencia es posible el resultado sería correcto para valores superiores a tres. ¿Y si fuera tres?
R11. Pues habría que transferir de vasos a paquetes y así.

El alumno manifiesta una comprensión sintética del segundo subnivel de los sistemas de numeración al identificar, en el algoritmo de la resta, el valor posicional de las distintas componentes en la expresión de las cantidades, operar algebraicamente cada una de ellas y realizar de forma adecuada las necesarias transferencias entre los distintos órdenes (R4), estrategia codificada como ESop.7. Son interesantes los planteamientos que realiza sobre el posible valor de la indeterminada x que expresa el tipo de agrupamiento utilizado; en primer lugar deduce que este valor debe ser superior a 2 (R4) y posteriormente cuando obtiene que el número de unidades es 3, se plantea: "*si esto es tres ya no sabemos si puede ser tres la base"* y después, en R19, vuelve a preguntarse sobre esta cuestión, lo que sin duda revela un uso sintético-formal de los sistemas de numeración. Acordamos modificar el enunciado para salvar este problema.

Unidad 10. Cálculo del cardinal de colecciones en agrupamientos indeterminados (tarea 14, ítem III.IIC26).

Para poner a prueba la capacidad de este alumno para trasladar a estas nuevas situaciones sus estrategias personales, se le plantea la tarea 14: contar los vasos que aparecen en la nueva página notebook agrupados en filas y columnas de x+1 vasos; una tarea que no estaba incluida en ninguna de las pruebas escritas y cuya finalidad es la de ampliar las tareas de síntesis II para los alumnos que demostraran un nivel elevado de comprensión de los sistemas de numeración. En la *Figura 7.7* y en el siguiente fragmento de la entrevista se recogen los aspectos fundamentales de las respuestas del alumno a esta tarea:

R1. (Lee de nuevo el enunciado y lo corrige poniendo una tilde en el nombre del Hotel Aristóteles). O sea, que la base está llena más uno, es decir que aquí hay equis por equis (agrupa x filas y x columnas), o sea, equis por equis, son equis cuadrado que sería el siguiente orden… ¿el siguiente orden en agrupación? (le pregunto qué sería equis al cuadrado), serían x veces x, claro serían el siguiente al que tenemos, si aquí tenemos vasos pues serían paquetes… no, porque aquí tenemos paquetes (señala un grupo de x vasos en la primera fila) por x paquetes serían una caja; y que nos sobra equis más uno y equis más uno, estos x (señala en la última columna los primeros x vasos) serían un paquete y estos (señala en la última fila los primeros x vasos) sería otro paquete y quedaría un vaso suelto (señala el vaso situado en la posición x+1, x+1). Por tanto habría una caja …

E2. Exprésalo en los recuadros inferiores

R2. (Escribe 0 1 2 1 en forma reducida)

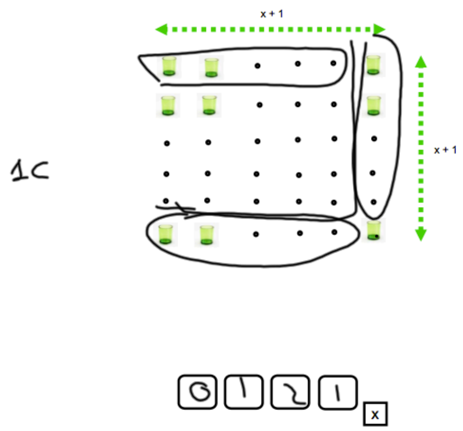


Figura 7.7 Respuesta a la tarea III.IIC26 en la entrevista del alumno A3-2º

Como se aprecia en el gráfico de la figura el alumno realiza los recuentos de forma gráfica (ASc.1), dotando de sentido a los puntos suspensivos que representan el valor indeterminado del agrupamiento, identificando los distintos órdenes, asignando el valor relativo en la representación posicional (abreviada) y manifestando por todo ello un uso sintético de segundo orden de los sistemas de numeración.

Las nuevas estrategias utilizadas en la entrevista no podemos asegurar que, en este caso, sean el resultado de haber cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética, pero sus apreciaciones finales nos permiten suponer que existe una relación directa con los nuevos rastros de comprensión encontrados. Destacamos algunos de sus argumentos finales que coinciden con los objetivos de la asignatura y con elementos utilizados en la descripción de los niveles epistemológicos de nuestro modelo local;

> *"…he utilizado los algoritmos sencillos y me han salido, en el momento que tienes claro lo que tienes que hacer, sabes conectar los algoritmos, los puedes extrapolar a estas otras situaciones, una vez que entiendes es mucho más fácil"* (R1, en aportaciones de la asignatura).
> *"Y además un descubrimiento fantástico, pues me ayuda con los niños, yo tengo clases con niños por las tardes, y me ayuda porque entiendo lo que estás haciendo, …entender el algoritmo es la clave. En la asignatura hemos analizado el porqué de los algoritmos, en el caso de la multiplicación por ejemplo de donde sale lo del hueco, el cero está ahí; o sea, cuando las cosas las entiendes…"* (R3).

La tabla 7.8 presenta un resumen de los resultados del análisis hermenéutico de las respuestas del alumno A3-2º a la entrevista individual.

Tabla 7.8 Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista al alumno A3-2º

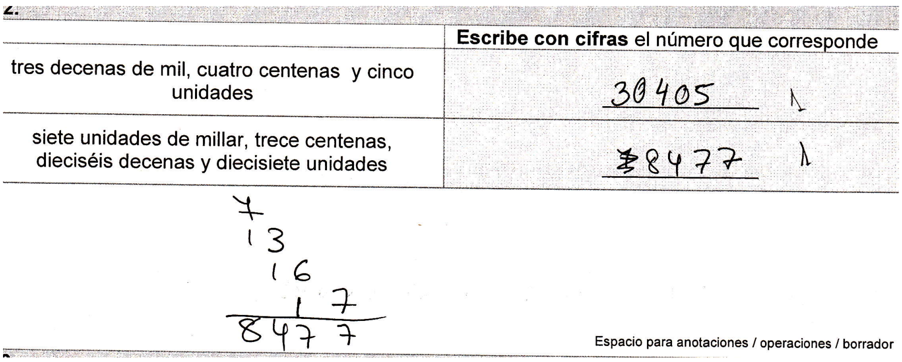
Tareas	*Unidades y Fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/empatía.*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Fragmento 1	Diferencia los conceptos implicados.				Analítico	
IIN12	Fragmento 2	[1] Traduce del polinómico al decimal.				Analítico	
IIA13	Fragmento 3	[2] Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA14	Fragmento 4	[3] Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA15	Fragmento 5	[4] Justificación de la posición de los sumandos		AAop.1		Analítico	
III.IA18	Fragmento 6	[5] Opera en los agrupamientos y realiza las transferencias.	Realiza el cambio de ASop.4 a ASop.7, reconociendo la facilidad de la segunda.	ASop.4 ASop.7		Sintético I	
	Fragmento 7	[6] Opera en los agrupamientos y realiza las transferencias.		ASop.7		Sintético I	
III.IIA24	Fragmento 8	Opera en la base x		ASop.7		Sintético II	
	Fragmento 9	Opera en la base x	Se plantea el problema del posible valor de x, a la hora de realizar las transferencias. Llegamos a acuerdos sobre las modificaciones en el enunciado.	ASop.7		Sintético II-Formal	
III.IIC25	Fragmento 10	Realiza agrupamientos gráficos.		ASc.1		Sintético II	

7.3.2.4 Alumno A4-2º

Alumno de 2º curso grupo F del grado de Educación Primaria que ha cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética. Dado que había realizado días antes la prueba PCN3, se han reducido el número de tareas utilizadas como base de la entrevista, manteniéndose aquéllas en las que cometía algún tipo de error o en las que sus respuestas necesitan de una mayor profundización. La entrevista fue realizada el 28 de mayo de 2012 a las a las 19:30.

Unidad 1. Distinción entre el número de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente (tarea IIN8).

En la respuesta escrita a la tarea realizada en la PCN3 detectamos rastros de comprensión que nos inducen a interpretar que el alumno hace en esta tarea un uso analítico estructural de los sistemas de numeración. Para la primera expresión realiza una traducción directa sin necesidad de ayudarse de cálculos complementarios, mientras que para la segunda organiza ordenadamente las cantidades de cada uno de los órdenes para realizar la suma y obtener el resultado. La *Figura 7.8* recoge la solución que propone el alumno en esta tarea.



	Escribe con cifras el número que corresponde
tres decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades	30405
siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas y diecisiete unidades	~~7~~8477

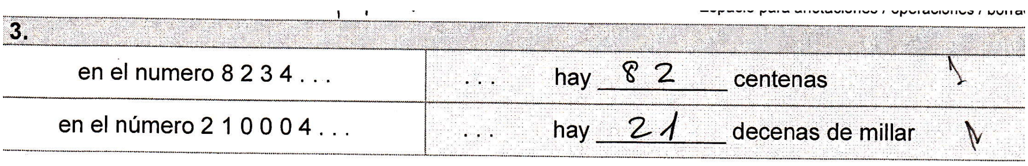
7
13
16
17
8477

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

Figura 7.8 Respuesta a la tarea IIN8 en la entrevista del alumno A4-2º

Unidad 2. Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos órdenes (tarea IIN12).

El alumno realizó correctamente esta tarea en la prueba PCN3 y podemos decir que hizo en la misma un uso analítico estructural de los sistemas de numeración. En la *Figura 7.9* se recoge la respuesta dada por el alumno.



3.

en el numero 8 2 3 4 . . .	. . . hay 82 centenas
en el número 2 1 0 0 0 4 . . .	. . . hay 21 decenas de millar

Figura 7.9 Respuesta a la tarea IIN8 del alumno A4-2º

Unidad 3. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma (368 + 457).

En la respuesta a esta tarea en la prueba escrita PCN3 el alumno justifica el significado de la unidad que se "*lleva*" del orden de las decenas explicando "*que son 10 decenas y 2 unidades*", rastro de comprensión del que no podemos extraer conclusiones definitivas sobre el uso analítico del sistema de numeración. En consecuencia, volvemos a plantear en la entrevista la necesidad de justificar los procedimientos que se realizan en el algoritmo, a lo que el alumno responde según se recoge en el siguiente fragmento:

R1. Ocho y siete (cuenta con los dedos) quince (escribe un cinco) y me llevo una…
E2. ¿Y esa que te llevas, qué significa?
R2. Pues una decena, se crea un grupo de diez unidades que forman una decena. Siete (cuenta con los dedos 5 sobre siete, seis mas uno)… doce, (escribe un 2) y me llevo una…
E3. ¿Y esa que te llevas, qué significa?
R3. Una centena, que serían diez decenas y cien unidades.…

Los rastros de comprensión encontrados en R2 y R3, nos permiten interpretar que el alumno hace un uso analítico funcional del sistema de numeración decimal en esta tarea, al justificar las llevadas del algoritmo de la suma mediante las oportunas transferencias entre los distintos órdenes.

Unidad 4. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta (562-36).

La respuesta escrita obtenida en esta tarea en la prueba PCN3 fue la siguiente: *"Porque estás restando 12 unidades, y lo máximo es 9, pues 10 ya serian un grupo de 10, por tanto, 1 decena, y la sumas a ellas"*, de la que no podemos extraer ninguna conclusión definitiva. Por tanto, volvemos a plantear la misma cuestión en la entrevista, de cuyo desarrollo extraemos el siguiente fragmento para su análisis:

R1. Seis, siete…(cuenta hacía arriba con los dedos de seis a doce) son seis (escribe 6) y me llevo una, de cuatro a seis dos y de cero a cinco (escribe un 2 en las decenas y un 5 en las centenas del resultado).
E2. Ahora me explicas por qué dices de seis a doce y por qué sumas una a tres.
R2. (Se ríe) Estos son doce unidades porque es como si una decena de aquí (señala las decenas del minuendo) se las añadimos aquí, entonces es doce.
E3. ¿Y por qué se las sumas abajo?
R3. Del bloque de las decenas (señala las decenas, pero tanto las del minuendo como las del sustraendo), si lo haces para allá (indica de decenas a unidades) se la quitas al de arriba y si lo haces para acá (indica de unidades a decenas) se la sumas al de abajo.
E4. Da lo mismo, o sea, se la quitas al de arriba y sin embargo se la devuelves al de abajo.
R4. Bueno yo se la quito al de arriba y podría decir de tres a cinco, o sumársela al de abajo y decir de cuatro a seis; es lo mismo hacer una cosa o la otra.

Las respuestas R2, R3 y R4 nos inducen a interpretar que el alumno realiza un uso analítico funcional del sistema de numeración decimal, justificando las llevadas del algoritmo de la resta mediante las dos opciones posibles.

Unidad 5. Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación (tarea IIA15; operación a justificar las posiciones de los resultados parciales: 258x26).

A pesar de que en la PCN3 la respuesta induce a interpretar un uso analítico funcional de los sistemas de numeración, pues se justifica la posición de los sumandos haciendo referencia implícita a la propiedad distributiva: *"Porque realmente pondrías un 0, pues serian 60 unidades, pues multiplicamos 20 x 258"*, decidimos volver a plantear la tarea en la entrevista, con el resultado que aparece en el siguiente fragmento:

R1. (Realiza la multiplicación por las unidades) Ahora empezamos a multiplicar por 2 y ahora me preguntas, ¿por qué dejas un hueco? (nos reímos los dos, por lo oportuno de su pregunta), porque en verdad estamos multiplicando por 20, y aquí iría un cero pero no se pone y se deja un hueco. Claro primero he multiplicado por 6 y después por 20 y para acabar sumo los dos resultados ¿Sigo haciéndolo? (le indico que no es necesario).

Según lo respondido se utiliza la estrategia AAop.1 para justificar la posición de los sumandos parciales, lo que denota un conocimiento analítico funcional del sistema de numeración en la medida en que justifica la posición de los sumandos parciales del algoritmo de la multiplicación haciendo referencia implícita a la propiedad distributiva.

Unidad 6. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal (tarea III.IA18.1).

En la prueba escrita PCN3, el alumno resuelve la tarea y la del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal, traduciendo las cantidades a base 10 y realizando las oportunas operaciones en esta base (estrategia ASop.5). En la entrevista, sin embargo, utiliza la estrategia ASop.7, como se puede apreciar en el siguiente fragmento extraído de la entrevista:

R1. ¿En que agrupamiento estamos trabajando? (se acerca para mirar el subíndice de las cantidades expresadas en forma abreviada)
E2. Estamos trabajando con cantidades expresadas en agrupamientos ocho (le repito los distintos órdenes creados, vasos, paquetes, cajas y palé).
R2. ¡Ah!, es el mismo que hicimos en la prueba. (Escribe la suma en forma vertical de las dos cantidades de vasos en forma abreviada). Seis, siete, diez, once doce y trece (para sumar utiliza la secuencia numérica en base ocho; escribe un tres) y me llevo una; (hace lo mismo para sumar paquetes , cajas y en palé dice seis , siete diez , y escribe como resultado final 1 0 3 5 $3_{(8}$)
E3. ¿Seis, siete y diez? A ver, repite lo último que has hecho.
R3. ¡Ah! no, me lo he inventado; cuatro, cinco y seis (borra el resultado anterior y escribe en su lugar 6 3 5 $3_{(8}$)
E4. ¿Cómo has sumado?
R4. Pues contando, en base ocho, el ocho y los números por encima del ocho no existen, entonces cuento hasta el siete y después iría el diez, y después quince, dieciséis, diecisiete, veinte, veintiuno, y así sucesivamente.

El sujeto opera en base 8, utilizando la secuencia numérica en dicha base para realizar los cálculos (estrategia ASop.7), generalizando las estrategias utilizadas en el sistema decimal, lo que nos induce a concluir que se está haciendo un uso sintético funcional del sistema de numeración decimal.

Unidad 7. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal (tarea III.IA18.2).

Como hemos indicado anteriormente el alumno utiliza la estrategia ASop.5 en la PCN3, mientras que en la entrevista, como se puede apreciar en el fragmento que se incluye a continuación, modifica la estrategia:

> *R5. (Escribe $3456_{(8}$ y debajo $2675_{(8}$, la raya y el signo de restar). De cinco a seis una (escribe el 1 y a la derecha escribe $_{(8}$), siete, diez, once…(resta en base ocho contando hacia arriba en la secuencia numérica de base ocho desde el 7 hasta el 15), seis y me llevo una (escribe el 6 a la derecha del 1) seis y una siete hasta catorce (cuenta hacia arriba de siete a catorce) cinco, una y dos tres a tres cero(escribe 5 y 0).*

Opera en el agrupamiento 8 utilizando la secuencia numérica en base 8 para realizar los cálculos (estrategia ASop.7) y generalizando las estrategias utilizadas en el sistema decimal, lo que interpretamos en el sentido de que se hace un uso sintético funcional del sistema de numeración decimal.

Unidad 8. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados (tarea III.IIA24.1).

El alumno resuelve la tarea en la prueba escrita sin completar las transferencias entre órdenes, lo que da lugar a una expresión no adecuada en este sistema de numeración indeterminado. En la *Figura 7.10* se pueden examinar las respuestas a los dos ítems que forman parte de la tarea.

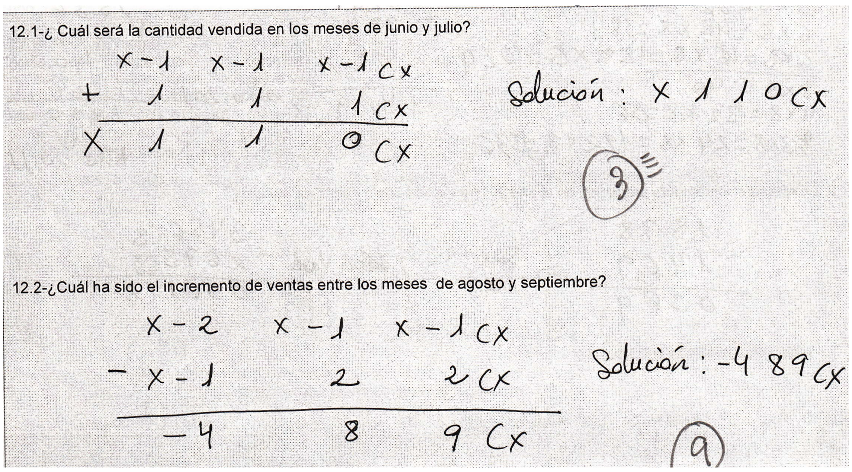


Figura 7.10 Respuesta a las tareas III.IIA24.1 y 24.2 en la entrevista al alumno A4-2º

Con la intención de comprobar si el alumno es capaz de completar la respuesta, volvemos a plantear la misma tarea en la entrevista. El siguiente fragmento recoge el proceso seguido en su resolución.

> *R1. Esto es ya más complicado (escribe x-1 x-1 x-1 $_{(x}$ y debajo 1 1 1$_{(x}$, con la raya y el signo +), menos uno más uno se van y queda x, pero como no se puede colocar se forma un grupo, no queda nada (escribe 0) y me llevo una;*

se va, queda lo mismo y una que me llevaba… queda una y me llevo una (escribe 1 a la izquierda del cero), lo mismo… se va y me llevo una (escribe 1 0 1 a la izquierda de lo ya escrito).

E2. Espera, creo que has ido muy rápido.

R2. (Borra las últimas cifras escritas) No, tengo que escribir once, una y el grupo que me llevo (escribe 11 a la izquierda resultando $1\ 1\ 1\ 0_{(x)}$*)*

Manifiesta una comprensión sintética funcional del segundo subnivel al identificar en el algoritmo de la adición, el valor posicional de las distintas componentes en la expresión reducida de las cantidades para ambos meses, operar algebraicamente dichas cantidades y realizar de forma adecuada las necesarias transferencias entre los distintos órdenes (R1 y R2), estrategia codificada como ASop.7.

Unidad 9. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos indeterminados (tarea III.IIA24).

Al no obtener una respuesta escrita clara de la que poder concluir algún dato sobre el uso del conocimiento y la comprensión implícita en el desarrollo de la tarea mencionada, procedemos a centrar la atención en el análisis hermenéutico del siguiente fragmento extraído de la entrevista individual en torno a la realización de la misma tarea:

E3. ¿Y el incremento entre los meses de agosto y septiembre?

R3. Otra suma.

E4. ¿Otra suma? ¿El incremento es una suma?

R4. El incremento es la diferencia que ha habido entre agosto y septiembre (escribe el menor arriba y el mayor debajo; le señalo que me diga en cual de esos meses vende más) en agosto… no en septiembre el equis menos uno es mayor que el equis menos dos (borra y los escribe bien). Empiezo desde aquí (señala la izquierda) menos uno, menos, menos dos… uno (escribe 1 a la izquierda), a dos le quito equis menos uno, me estoy liando… y si empiezo por la derecha (borra y comienza de nuevo). Dos menos, menos uno tres, y de x a… en verdad no se porque existe la equis, pues si estamos en base equis, no debería estar.

E5. Es que no es equis sino equis menos uno. Es como en nuestra base, que sí tiene sentido el diez menos uno.

R5. Si existiera sería como el nueve. Entonces sería de nueve a doce…

E6. ¿Cómo que de 9 a doce?

R6. (Como con su forma de restar contando por la secuencia numérica no resuelve la situación, pues no acierta a reconstruir la secuencia en base x; cambia y realiza transferencia de unidades y con ayuda acierta a pasar una unidad de segundo orden a las unidades, resultando x+2) las equis se van y dos mas una (menos y menos es mas) son tres (escribe el 3); quitamos una de aquí (señala el tercer orden) y queda equis menos dos; equis más uno, menos ,equis menos uno, quedan dos (escribe el 2) y equis menos dos, menos equis menos dos, da como resultado cero. El incremento sería 2 paquetes y 3 vasos.

El alumno manifiesta una comprensión sintética del segundo subnivel de los sistemas de numeración al identificar el valor posicional de las distintas componentes en el algoritmo de la sustracción, operar algebraicamente con ellas y realizar de forma adecuada las necesarias transferencias entre los distintos órdenes (R6), estrategia codificada como ASop.7; todo ello a pesar de haber intentado inicialmente generalizar la estrategia utilizada en base 8 y reconstruir sin éxito la secuencia numérica en base x. La tabla 7.9 resume los resultados del análisis hermenéutico realizado sobre las respuestas del alumno A4-2º.

Tabla 7.9 Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista al alumno A4-2º

Tareas	*Fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/empatía.*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Realizada en la PCN3	Diferencia los conceptos implicados.				Analítico	
IIN12	Realizada en la PCN3	[1] Traduce del polinómico al decimal.				Analítico	
IIA13	Fragmento 3	[2] Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA14	Fragmento 4	[3] Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA15	Fragmento 5	[4] Justificación de la posición de los sumandos		AAop.1		Analítico	
III.IA18	Fragmento 6	[5] Opera en los agrupamientos y realiza las transferencias.		ASop.7		Sintético I	
	Fragmento 7	[6] Opera en los agrupamientos y realiza las transferencias.		ASop.7		Sintético I	
III.IIA24	Fragmento 8	Opera en la base x		ASop.7		Sintético II	
	Fragmento 9	Opera en la base x		ASop.7		Sintético II	

7.3.2.5 Alumna A5-2º

Alumna de 2º curso grupo A del grado de Educación Primaria que ha cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética en el primer cuatrimestre del curso 2011/12. Realizó la PCN1 en mayo de 2011 cuando cursaba el primer curso y dado el tiempo transcurrido realiza la entrevista completa el 18 de junio de 2012 a las 11:20.

Unidad 1. Distinción entre el numero de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente (tarea IIN8).

En la PNC1 la alumna responde cometiendo el error EAe.1, confundiendo la cantidad de unidades de un orden contenidas en un número con la cifra que ocupa el lugar de dicho orden en la expresión del número. En la entrevista, sin embargo, responde según se recoge en el siguiente fragmento:

R1. Centenas completas dos (le repito que son las decenas completas que contiene ese número);¡ah!, vale… centenas completas ochenta y dos. La cifra de las decenas es el dos, pero las centenas incluidas son ochenta y dos (escribe 82)
E2. ¿Cuántas unidades contiene?
R2. Unidades contiene ocho mil doscientos treinta y cuatro (escribe 8234).
E3. ¿Cuántas decenas contiene?
R3. Contiene ochocientas veintitrés (escribe 823).

Como se aprecia en el fragmento anterior, responde adecuadamente a las cuestiones planteadas haciendo un uso analítico estructural de los sistemas de numeración y diferenciando entre los dos conceptos implicados en la tarea.

Unidad 2. Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos órdenes (tarea IIN12).

En la prueba escrita responde correctamente a la cuestión planteada, pero no encontramos rastros de comprensión al no registrar en la tarea los procedimientos implicados. En el siguiente fragmento se recoge sus respuestas a esta tarea en la entrevista:

R1. Cinco unidades (escribe un 5), 4 centenas (escribe 4__, dejando un hueco entre el 4 y el cinco escrito a su derecha) y trece decenas de mil (escribe 13__). Los huecos los relleno con ceros (el número escrito es el 130.405).
E2. Completa el de abajo.
R2. Diecisiete unidades (escribe 17), dieciséis decenas (escribe un 1 a la izquierda y sobre el 1 escribe un 7, resultando el 177), trece centenas (escribe un 1 a la izquierda y modifica escribe un 4 sobre el 1 de las centenas, resulta 1477), y siete unidades de millar (sobre el 1 de las unidades de millar escribe un 8, el número final es el 8477).

Los procedimientos recogidos en R1 y R2 son rastros de comprensión que nos inducen a interpretar un uso analítico estructural de los sistemas de numeración al identificar los órdenes implícitos, expresarlos en términos de unidades y proceder a realizar la suma de todos los resultados.

Unidad 3. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma (368 +457).

En la prueba PCN1, realizada al finalizar el primer curso y antes de cursar la asignatura Didáctica de la Aritmética, responde a la justificación de las llevadas en la suma parcial de las decenas con el siguiente comentario: *" Al igual que antes hemos guardado el "1" de las decenas para sumarlo ahora"*. Se trata de una respuesta que, aunque incompleta, entendemos que representa un rastro de comprensión suficiente sobre el proceso de llevadas a causa del uso analítico funcional del sistema de numeración. En la entrevista, realizada un año después y una vez cursada la asignatura, responde con los argumentos recogidos en el siguiente fragmento:

R1. Ocho y siete son quince (escribe el 5) y me llevaría una…
E2. Esa que te llevas, ¿qué es?
R2. Como suman quince las decenas me las llevo para sumarlas en su lugar correspondiente. Seis y cinco once y una doce (escribe el 2) y se repite la misma operación, vuelvo a poner un uno (coloca un 1 sobre las centenas)
E3. ¿Y esa que te llevas qué significa?
R3. En este caso las centenas; cuatro y tres siete y una ocho (escribe el 8 en las centenas del resultado).

Los rastros de comprensión nos permiten interpretar que el alumno hace aquí un uso analítico funcional del sistema de numeración al justificar en el algoritmo de la suma las llevadas mediante las oportunas transferencias entre los distintos órdenes.

Unidad 4. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta (562-36).

Su respuesta a esta tarea en la prueba escrita fue la siguiente: *"Al haberse quitado una decena al sustraendo superior para realizar la resta de las unidades, al pasar a las decenas debemos restar uno al superior o sumar uno al inferior"*. Identificamos en dicha respuesta rastros de comprensión que nos permiten interpretar un uso analítico funcional de los sistemas de numeración. En la entrevista respondió de la forma que se expone en el siguiente fragmento:

R1. Como a dos no le puedo quitar seis, cojo una decena del seis de las decenas y se la paso a las unidades (tacha el 6 y pone en su lugar un cinco), con lo cual las unidades se convierten en doce , doce menos seis son seis, cinco menos tres son dos y cinco menos cero son cinco (escribe en este proceso 5 2 6).

La respuesta R1 nos induce a interpretar un uso analítico funcional del sistema de numeración decimal, coherente con las justificaciones de las llevadas en el algoritmo de la resta mediante el método de las transferencia de órdenes.

Unidad 5. Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación (258 x 26).

En la prueba escrita realizada responde con el siguiente argumento: *"Porque estamos multiplicando por el numero de las decenas"*, insuficiente para poder realizar una interpretación sobre el uso analítico o técnico del sistema de numeración. En el siguiente fragmento de la entrevista se recoge el procedimiento justificado del algoritmo de la multiplicación:

R1. (Se ríe) (Multiplica por las unidades justificando las llevadas y comienza a multiplicar las decenas del multiplicador) Dos por ocho dieciséis ...
E2. ¿Porqué colocas el resultado ahí?
R2. Porque al estar el dos un orden más para acá, pues el resultado también lo desplazo; (y no parece que le convenza la explicación que me ha dado, y por los gestos que hace parece que quiere decir "así me la han enseñado"). Dos por ocho dieciséis (coloca el 6 del dieciséis) y me llevo una…
E3. Esa una que te llevas ¿ qué es?
R3. Del orden siguiente; al ser dos por ocho dieciséis el uno suma al orden siguiente. Este sería el orden cero (señala unidades) este el orden uno (señala decenas) y este el orden dos (señala centenas), pues sería segundo orden (de nuevo las señales que emite con sus gestos, me hacen pensar que no entiende lo que dice; acaba la multiplicación sumando los dos resultados parciales)

La alumna no justifica de forma suficiente la situación de los sumandos parciales, lo que interpretamos como respuesta del tipo: "*así me lo han enseñado*" (estrategia EAop.4), considerando que hace un uso técnico/analítico del sistema de numeración en el desarrollo del algoritmo de la multiplicación.

Unidad 6. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal (tarea III.IA18.1).

En la prueba PCN1 responde a esta tarea operando en base 10 (error ESop.5), mientras que en la entrevista modifica esta estrategia errónea y responde de la siguiente forma:

R1. (Escribe las dos cantidades y la suma en base 8; le pregunto cómo lo hace y me dice que cuenta desde el seis hasta el trece; pasando de siete a diez, lo que supone contar en la secuencia numérica en base ocho, las llevadas corresponden a las unidades de segundo orden que forma) (completa la suma y obtiene como resultado 6 3 5 3).
E2. El total de ventas sería…
R2. Seis mil trescientos cincuenta y tres en base ocho.

Opera en el agrupamiento 8 utilizando la secuencia numérica en base 8 para realizar los cálculos (estrategia ASop.7), generalizando así las estrategias utilizadas en nuestro sistema. Esto es motivo suficiente para interpretar el uso sintético funcional de los sistema de numeración.

Unidad 7. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal (tarea III.IA18.2).

En la prueba PCN1, responde a esta tarea operando en base 10 (error ESop.5), mientras que en la entrevista modifica esta estrategia errónea y responde de la siguiente forma:

R3. El incremento es una resta (escribe una encima de otra las dos cantidades). La resta tiene otro método para hacerla pero ahora no me acuerdo. Seis menos cinco es una, (realiza transferencias inversas de unidades para los paquetes y las cajas, e incorpora las unidades obtenidas de manera que puede realizar las sustracciones parciales y obtiene como resultado 0 5 6 1).

Opera en el agrupamiento 8 utilizando la secuencia numérica en base 8 para realizar los cálculos (estrategia ASop.7), generalizando así las estrategias utilizadas en el algoritmo de la sustracción en el sistema decimal, lo que nos induce a interpretar que se ha efectuado en esta respuesta un uso sintético funcional de los sistemas de numeración.

Unidad 8. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados (tarea III.IIA24.1).

En la PCN1 la respuesta se limita a colocar los dos términos a sumar, pero sin entrar a realizar ninguna acción. En la entrevista, sin embargo, realiza la tarea de la siguiente manera:

R1. (Escribe x-1 x-1 x-1 y debajo 1 1 1). Esta es más difícil que los anteriores. Y yo tengo que decir cuanto es la equis.
E2. No, tienes que decir el total de ventas.
R2. ¿Me quedaría equis, equis y equis? (escribe debajo en el resultado x x x). No estoy segura. En este no estoy segura.
E3. ¿Esa expresión sería correcta?

R3. En base equis, entonces tiene que ser en base equis (escribe como subíndice x). (Le pregunto de nuevo si es correcta) Yo creo que no. Creo que no es correcta pero no se resolverlo. Porque dependiendo del valor que le de a equis, el menos uno es una cosa u otra; y no es lo mismo que yo tenga siete, porque si a la equis lo doy el valor ocho, ocho menos uno sería siete y uno sería ocho. Si está bien (Le vuelvo a preguntar si se puede mejorar esa expresión). Yo creo que si, que es correcta, pero no lo sé.

Reconoce los distintos órdenes y los opera adecuadamente, aunque no realiza las transferencias correspondientes por la presencia del valor indeterminado de la base (estrategia ASop.6). No encontramos rastros de comprensión que nos permitan interpretar un uso sintético funcional de segundo orden. Realiza una generalización del procedimiento utilizado en nuestro sistema a bases distintas a la decimal mediante la reconstrucción de la secuencia numérica en estas otras bases; quizás la incapacidad para realizar esta generalización de la secuencia numérica a bases indeterminadas esté en el origen de la incapacidad para resolver esta tarea.

Unidad 9. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos indeterminados (tarea III.IIA24).

Tarea sin resolver (SR) en la PCN1. En el siguiente fragmento se recoge el desarrollo de esta tarea en la entrevista:

R4. (Escribe x-1 2 2 y debajo x-2 x-1 x-1 y la raya para restar, escribe x-2 y lo borra; en otro lugar de la pizarra escribe 2-(x-1)=) al ser el incremento será septiembre menos agosto…
E5. ¿Qué mes tiene mayor venta?
R5. Se supone que septiembre vende más, al menos en vasos y en paquetes, tiene dos… no equis menos uno, con lo cual debería ser mas.
E6. ¿Por qué tiene más vasos y paquetes?
R6. Pero claro, uno es equis menos uno y el otro equis menos dos, por lo cual las cajas es lo grande y vende más en septiembre. Sería septiembre menos agosto; pero ahora a la hora de restarlo, nunca me han gustado las incógnitas.
E7. Pero es lo mismo que cuando trabajas con agrupamiento ocho.
R7. Claro realmente…(intenta restar 2 – (x-1)) y no puede ser.
E8. Y si no puedes quitarle a dos equis menos uno, ¿qué se podría hacer?
R8. Con lo cual podría decir…(está intentando restar y no le sale). Este no soy capaz de resolverlo.

No generaliza el procedimiento que utiliza para operar en el sistema decimal o en base 8, caracterizado por el uso de la secuencia numérica correspondiente. La presencia del valor indeterminado de la base supone un obstáculo que le impide realizar esta generalización.

Unidad 10. Calculo del cardinal de colecciones en agrupamientos indeterminados (tarea 14, ítem III.IIC26).

Como ya hemos mencionado se trata de una tarea incorporada a la entrevista y que no formaba parte de las que componían la PCN1. En el siguiente fragmento se recoge el proceso seguido por la alumna para responder a la misma:

R1. Pero hay equis más una, con lo cual yo no sé cuantos hay y no puedo hacer los agrupamientos como antes, pero no se cuántos hay. Realmente lo que se ve da lo mismo porque hay equis mas una (escribe x+1). (Dibuja un cuadro con seis por seis puntos, agrupa en la primera fila salvo el ultimo) con lo cual me sobrarían los del más uno de aquí (rodea la última columna) y los que me sobrarían de aquí (rodea la última fila) (Piensa) Habría vasos sueltos… El caso es que sí resolví el de los bombones, con lo cual me molesta el no hacerlo.

E2. Pero el de los bombones es semejante al que has resuelto de los vasos en agrupamientos de ocho en ocho. Este es distinto, este es nuevo pues se trata de expresar esa cantidad de vasos en agrupamientos de equis vasos, etc.

R2. Claro, la clave está en el mas uno, porque como todos son equis más uno, está claro que el agrupamiento equis te va a salir pero te sobra el más uno, y la cosa es que si te sobra más uno en este sentido (señala las columnas) y más uno en este otro sentido(señala las filas), ¿cómo se puede contar?…No estoy yo muy inspirada hoy.

De nuevo, el valor indeterminado representado por la presencia de los puntos suspensivos le impide realizar los distintos agrupamientos, aunque se ha quedado cerca de su resolución al identificar el grupo de x paquetes e intuir la presencia de los paquetes y los vasos sueltos. La *Tabla 7.10* recoge los datos de la entrevista con esta alumna.

Tabla 7.10 Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista a la alumna A5-2º

Tareas	*Fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/empatía.*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Fragmento 1	Diferencia los conceptos implicados.				Analítico	
IIN12	Fragmento 2	[1] Traduce del polinómico al decimal.				Analítico	
IIA13	Fragmento 3	[2] Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA14	Fragmento 4	[3] Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA15	Fragmento 5	[4] No Justificación suficientemente la posición de los sumandos			EAop.4	Tecnico/Analítico	
III.IA18	Fragmento 6	[5] Opera en los agrupamientos y realiza las transferencias.		ASop.7		Sintético I	Generalización a través de la secuencia numérica en estas bases.
	Fragmento 7	[6] Opera en los agrupamientos y realiza las transferencias.		ASop.7		Sintético I	
III.IIA24	Fragmento 8	Opera independientemente los ordenes y no realiza transferencias		ASop.6		-	La herencia del proceso seguido en bases determinadas le impida resolver esta tarea.
	Fragmento 9	Opera en la base x				-	
III.IIC25	Fragmento 10	No realiza agrupamientos gráficos por la presencia del valor indeterminado “x”.				-	

7.3.2.6 Alumno A6-2º

Alumno de 2º curso grupo A del grado de Educación Primaria que ha cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética en el primer cuatrimestre del curso 2011/12. Cursó un bachillerato con Matemáticas aplicadas a las CCSS y realizó la prueba PCN1 en mayo de 2011 cuando cursaba el primer curso. Realiza la entrevista completa el 18 de junio de 2012 a las 12:46.

Unidad 1. Distinción entre el número de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente (tarea IIN8).

En la prueba PCN1 responde a ésta tarea cometiendo el error EAe.1, sin diferenciar los dos conceptos implicados, es decir, la cifra de un determinado orden y el número de órdenes presentes en el número. En la entrevista responde de la siguiente forma:

R1. (Piensa, señala los distintos órdenes) Unidades son ocho mil doscientas treinta y cuatro, decenas son ochocientas veintitrés y centenas creo que son, ochenta y dos. Lo que pasa es que no me acuerdo muy bien.
E2. ¿Por qué contiene ochenta y dos centenas?
R2. (Duda por lo que parece que sus respuestas pueden estar inducida por tareas similares realizadas con anterioridad a esta entrevista; hay un problema con los términos utilizados para denominar a los distintos órdenes, mientras en el enunciado de la tarea y en mis preguntas aparecen los términos de unidades, decenas y centenas, él utiliza el de orden cero, uno y dos para designarlos, términos adecuados para cuando se trabaja en bases distintas a la decimal y equivalentes cuando se opera en esta última, y no siempre realiza una traducción correcta e inmediata entre las dos denominaciones). Son ochenta y dos unidades de orden dos. (Se dedica tiempo a clarificar las ideas y los conceptos implicados en esta tarea, detectándose cierta dudas posiblemente relacionadas con este problema de designación).

Responde adecuadamente a las cuestiones planteadas haciendo un uso analítico estructural del sistema de numeración decimal, diferenciando entre los dos conceptos implicados en la tarea, aunque se detecta un problema con la equivalencia en el uso de las dos terminologías utilizadas (la propia del sistema decimal: unidad, decena, centena, … y las utilizadas en agrupamientos distintos al decimal: unidad de orden cero, de orden uno, de orden dos,…)

Unidad 2. Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos órdenes (tarea IIN12).

En la tarea correspondiente realizada en la prueba escrita el alumno comete errores que tienen que ver con una inadecuada traducción entre las cantidades de órdenes presentes en las dos expresiones presentadas. En la entrevista responde tal y como se recoge en el siguiente fragmento:

R1. (Escribe 13 y lo borra; escribe a continuación o_4 o_3 o_2 o_1 o_0, para organizar los cifras del número). Trece decenas de mil (escribe primero un 1 debajo de o_4 y después borra; amplía los órdenes añadiendo el o_5 y después identifica unidades, decenas, etc. con lo anterior). Trece decenas de mil (escribe 13 debajo de o_5 y o_4); cuatro centenas (escribe 4 debajo de o_2) y cinco unidades (escribe 5 debajo de o_0); creo que es éste (escribe 130405).
E2. Y ahora construye el número de abajo.
R2. (Vuelve a escribir en primer lugar los espacios para los distintos órdenes o_3 o_2 o_1 o_0 y a continuación 7 debajo de o_3 , 1 3 debajo de o_3 o_2 , 16 en o_2 o_1 y 17 en o_1 o_0; dibuja rayas verticales para separar las cifras escritas en cada uno de los distintos órdenes y suma por columnas resultando el número 8477)

Interpretamos que el alumno manifiesta una comprensión analítica estructural del sistema de numeración decimal al identificar los órdenes implícitos, agruparlos convenientemente y proceder a realizar la suma de todos los resultados.

Unidad 3. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma (368 + 457).

En la prueba escrita realizada antes de cursar la asignatura de Didáctica de la Aritmética, A6-2º contestaba lo siguiente: *"Significa que antes por pasar de diez te llevas una",* respuesta que hemos catalogado con el error EAop.1, aplicación mecánica del algoritmo. Después de cursar la asignatura responde según figura en el siguiente registro:

R1. Pero en base…
E2. No, es una suma habitual.
R2. Por el método…
E3. Por el método que tu quieras.
R3. Ocho y siete quince (escribe el 5 y un 1 sobre las cifras de las decenas) y me llevo una…
E4. Esa que te llevas, ¿qué significa?
R4. Que es una unidad de orden superior; porque ocho unidades han pasado de la decena y…(piensa) si, y la he convertido en una unidad de orden superior.
E5. ¿Cómo es eso de que te has pasado de la decena?
R5. Porque al sumar siete y ocho unidades sobrepasan la decena y es una unidad; ese uno es una decena que son diez unidades. Seis y cinco once y una que me llevaba son doce (escribe 2 y un 1 sobre la cifra de las centenas) y me llevo una…
E6. Esa que te acabas de llevar, ¿qué significa?
R6.Pues igual, he sobrepasado la decena, al sumar seis y cinco (piensa), esto son decenas (señala el 2 que ha escrito en el lugar de las decenas) y este uno que me llevo son las decenas formadas.
E7. Entonces, ¿ese uno son decenas?
R7. Aquí son unidades (señala la columna de las unidades) y aquí la sumo son unidades, aquí son decenas (señala la columna de las decenas), entonces este uno son centenas, las he obtenido al sumar las decenas, eran doce, y

como he superado las diez, esa sería una centena (acaba de realizar el algoritmo de la suma).

Los rastros de comprensión nos permiten interpretar que el alumno hace un uso analítico funcional del sistema de numeración decimal al justificar las llevadas en el algoritmo de la suma mediante las oportunas transferencias entre los distintos órdenes.

Unidad 4. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta (562 – 36).

En la prueba escrita realizada antes de cursar la asignatura Didáctica de la Aritmética, A6-2º contestaba: *"Porque antes al llegar a doce te has pasado de diez y se cuenta con un uno",* respuesta que hemos catalogado con el error EAop.1, aplicación mecánica del algoritmo. Después de cursar la asignatura responde según se indica en el siguiente fragmento:

R1. Por el de transferencia no me acuerdo muy bien. De seis a doce, siete (escribe 7)…
E2. ¿Por qué dices a doce?
R2. Porque, ya me estoy liando con …Este doce, al ver la imposibilidad física de restar dos menos seis, pues aquí le pongo diez unidades y se la agrego al dos, entonces doce unidades menos seis son (borra el 7 anterior y pone un 6), seis menos tres (escribe un 3)…
E3. Y esas diez que le has dado al dos, ¿qué pasa con ellas?
R3. Si, ahora tengo que compensar (borra el 3) aquí le he transferido diez unidades (escribe una flecha y un 10 de las decenas a las unidades) y ahora tengo que compensar poniendo una unidad más aquí (señala las decenas del sustraendo) tengo que tachar el tres y poner un cuatro, si aquí transfiero una aquí la tengo como que recuperar.
E4. ¿Y por qué se la compensas al tres? Tu has transferido una decena del seis del minuendo al dos y ahora, ¿cómo es que compensas devolviéndosela al tres del sustraendo?
R4. Eso…eso no sabría yo el porqué ahora mismo (se ríe)… no caigo ahora mismo.
E5. Lo que has hecho es transferir de las decenas a las unidades en el minuendo y con esto podemos restar las unidades, el tema es …
R5. Por qué se la sumo al tres…
E6. Realmente lo que habría que hacer es, si somos coherentes con lo que estamos haciendo, más que darle una al tres, que no sabemos justificar, sería más fácil de actuar sobre el seis…
R6. Al seis le sumo una, siete… no, quitarle una, eso quitarle una y en lugar de hacer lo que he hecho, dejo el tres pero arriba pongo un cinco (tacha el 6 y pone sobre él un 5).
E7. ¿Seríamos capaces de justificar por qué se puede hacer sumándosela al tres? Porque de hecho se suele hacer así, así no lo enseñaron en la escuela, ¿no?
R7. No sé, porque…
E8. Al de arriba, al minuendo se le han sumado diez unidades, y al de abajo…
R8. Y al de abajo otras diez (pero no parece que lo relacione con el método austríaco).

A6-2º intenta realizar el algoritmo por el método austríaco y no consigue justificar las llevadas en las decenas; modifica el método de resta y comienza a realizar el de transferencia y se encuentra con el mismo problema; aunque termina justificando las llevadas modificando las acciones realizadas: restar de las decenas del minuendo y no sumar a las del sustraendo. No consigue justificar el primer procedimiento utilizado y manifiesta un uso del conocimiento técnico/ analítico del sistema de numeración.

Unidad 5. Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación (258 x 26).

En la prueba escrita no realiza esta tarea (SR). Después de cursar la asignatura responde tal y como figura en el siguiente fragmento que pasamos a analizar a continuación:

R1. Seis por ocho cuarenta y ocho (escribe el 8) y me llevo cuatro, y me dirás, ¿qué son esas cuatro? (se ríe), son cuarenta y ocho unidades de orden cero, unidades y esas son las decenas que te llevas, se vuelve a operar y se tienen en cuenta las decenas anteriores, seis por cinco treinta y cuatro de antes treinta y cuatro (escribe un 4) y me llevo tres, que serían unidades de orden…unidades de orden cero por unidades de orden uno, no…son unidades de orden dos, no de orden…
E2. Has dicho seis por cinco treinta, treinta serían…
R2. Unidades de orden uno, son decenas y entonces me llevo tres, tres unidades de orden…tres decenas…no tres centenas, dos por seis doce y tres son quince (escribe el 15 a la izquierda y acaba la multiplicación por las unidades del multiplicador). Ahora dos por ocho dieciséis…
E3. ¿Por qué colocas el seis ahí?
R3. Ya sabía que me lo preguntarías (se ríe), lo estaba pensando, claro son unidades de orden dos… no, unidades de orden uno por unidades de orden cero y me dan unidades de orden uno, si me dan decenas las tengo que poner en las decenas (acaba la multiplicación).

Interpretamos un uso analítico funcional del sistema de numeración decimal al considerar en el desarrollo del algoritmo de la multiplicación los rastros de comprensión R2 y R3, a pesar de que a veces le cuesta relacionar las dos nomenclaturas utilizadas.

Unidad 6. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal (tarea III.IA18.1).

En la misma tarea incluida en la prueba PCN1, A6-2º responde operando en base 10 (error ESop.5). En la entrevista, sin embargo, modifica esta estrategia errónea y responde de la siguiente forma:

R1. La suma en base ocho de estas dos cantidades. (Escribe las dos cantidades y las suma en base 8; utiliza la secuencia numérica de base ocho y obtiene como resultado $6353_{(8}$)

A6-2º opera aquí en la base 8 utilizando la secuencia numérica en dicha base para realizar los cálculos (estrategia ASop.7) y generalizando las estrategias utilizadas en el algoritmo de la suma de nuestro sistema. Todo ello se puede interpretar en términos de que se realiza una reconstrucción de la secuencia numérica en base 8 y se hace un uso sintético funcional del sistema de numeración.

Unidad 7. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal (Extraído del ítem III.IA18 en el que se solicita se obtenga el incremento de vasos del año 11 respecto al anterior, mediante agrupamientos de 8).

En la misma tarea incluida en la prueba PCN1, A6-2º responde operando en base 10 (error ESop.5). En la entrevista, sin embargo, modifica esta estrategia errónea y responde de la siguiente forma:

E2. ¿Y el incremento producido en el año 2011?
R2. (Resta las dos cantidades en base 8, utilizando como en la suma la secuencia numérica en base ocho y contando hacia arriba desde hasta).

A6-2º opera aquí en la base 8 utilizando la secuencia numérica en dicha base para realizar los cálculos (estrategia ASop.7) y generalizando las estrategias utilizadas en el algoritmo de la suma de nuestro sistema. Todo ello se puede interpretar en términos de que se realiza una reconstrucción de la secuencia numérica en base 8 y se hace un uso sintético funcional del sistema de numeración.

Unidad 8. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados (extraído de la tarea III.IIA24).

En la prueba escrita no realiza esta tarea (SR). En el siguiente fragmento se recoge la trascripción de las respuestas a la tarea en la entrevista:

R1. O sea, esto más esto (señala las ventas de junio y julio). Los sumo (escribe x-1 x-1 x-1 y debajo 1 1 1, y la raya para sumar y el signo +). El uno y menos uno se van, no se si estoy haciendo una barbaridad, entonces me queda ***x x x****, y ¿cómo se yo la base y el número?*
E2. La base es x.
R2. Me va a dar en función de x todo, o tengo que saber el número…
E3. Me tienes que expresar el resultado; estamos trabajando con las cantidades de vasos vendidos expresado de esa forma, en vasos sueltos, paquetes y cajas; y tienes que calcular el total de ventas en esos dos años.
R3. (Escribe de nuevo (x-1) +1) Y hago una barbaridad. (le pregunto que cuál es la barbaridad y me señala la eliminación del -1 y el +1). Esto es un número (señala x-1) y este otro (1), si tacho este con este… si estuvieran multiplicando, tampoco…Yo creo que se debería expresar (1+(x-1), pues no puedes tachar y son iguales todas las operaciones (escribe lo mismo en los tres órdenes).
E4. Tu problema es tachar, ¿por qué?
R4. Para reducir, pero yo creo que no se puede, porque…o sea, si esto a lo mejor estuviera, esto es como si tuviera un paréntesis (escribe un paréntesis al x-1 que había escrito en la suma inicial), porque esto es un número entero, si estuviera separado si se podría ir; si el paréntesis estuviera aquí (y en lugar de 1+(1-x), escribe 1+(x)-(1)) este uno y este si se van, pero esto es una unidad completa y no puedes tacharla. (Se juntan los problemas propios de la tarea, razonar en una base indeterminada, con las dificultades para operar con expresiones algebraicas). (Lo deja como 1+(x-1) 1+(x-1) 1+(x-1)).
E5. Pero expresado así quedaría un poco complejo, ¿no se podría reducir?

R5. Hombre si saco factor común…
E6. ¿Y cómo sacas factor común?
R6. Bueno sacaría el factor que se repite, pero se repite todo…es como si lo pusiera por tres veces, tres por este número me saldría… me está gustando esto, me está haciendo pensar, me está gustando. Entonces lo podría expresar como (3.[1+(x-1)] esa sería la cantidad de vasos en los dos años. Quedaría (3 + (3x-3)…
E7. Pero, ¿se puede sumar todo eso?
R7. Si está en la misma unidad todo, si todo estuviera en unidades o en decenas o en centenas, si se podría sumar; pero la cosa es que tampoco se el número…

A6-2º reconoce los distintos órdenes, aunque al final (R6) pierde la referencia y realiza una suma entre ellos. A las propias dificultades de la tarea, razonar en una base indeterminada y generalizar los procedimientos utilizados tanto en el sistema decimal como en el de base 8, se suman las dificultades para operar con expresiones algebraicas (R4, R5 y R6). No podemos concluir nada sobre el uso del conocimiento ni sobre el nivel de comprensión que se deduce de la actividad.

Unidad 9. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos indeterminados (tarea III.IIA24. 2).

En la prueba escrita A6-2º no realiza esta tarea (SR). En la entrevista responde de acuerdo con el siguiente fragmento:

R4. (Escribe x-1 2 2 y debajo x-2 x-1 x-1 y la raya para restar, escribe x-2 y lo borra; en otro lugar de la pizarra escribe 2-(x-1)=) al ser el incremento será septiembre menos agosto…
E5. ¿Qué mes tiene mayor venta?
R5. Se supone que en septiembre vende más, al menos en vasos y en paquetes, tiene dos… no equis menos uno, con lo cual debería ser más.
E6. ¿Por qué tiene más vasos y paquetes?
R6. Pero claro, uno es equis menos uno y el otro equis menos dos, por lo cual las cajas es lo grande y vende más en septiembre. Sería septiembre menos agosto; pero ahora a la hora de restarlo, nunca me han gustado las incógnitas.
E7. Pero es lo mismo que cuando trabajas con agrupamiento ocho.
R7. Claro realmente…(intenta restar 2 – (x-1)) y no puede ser.
E8. Y si no puedes quitarle a dos equis menos uno, ¿qué se podría hacer?
R8. Con lo cual podría decir…(está intentando restar y no le sale). Este no soy capaz de resolverlo.

A6-2º no generaliza el procedimiento que utiliza para operar en el sistema decimal o en base 8, caracterizado por el uso de la secuencia numérica correspondiente. La presencia del valor indeterminado de la base supone un obstáculo que le impide llevar a buen término esta generalización.

Unidad 10. Cálculo del cardinal de colecciones en agrupamientos indeterminados. Tarea incorporada como novedad a la entrevista (tarea 14, ítem III.IIC26).

Del desarrollo de la entrevista extraemos el siguiente fragmento que utilizaremos para analizar los factores en estudio mencionados al principio del capítulo:

R1. Espera que no me he enterado muy bien (relee de nuevo la tarea y volvemos a comentar las características de la tarea). Pues este yo…Pero es igual que el que hice antes…

E2. Pero antes agrupábamos de ocho en ocho y ahora de x en x.

R2. Y esto (señala uno de los puntos) representaría una x.

E3. No, esos son puntos suspensivos para indicar que en cada fila hay x+1 vaso.

R3. El total de lo que habría aquí, sería… si multiplico x+1 por x+1 serían las unidades totales…(multiplica (x+1)(x+1) y escribe debajo, $x^2 + x + x + 1$, *y debajo* $x^2 + 2x + 1$ *); estos serían los vasos totales…y ahora que hago, se que estos son unidades, pero…(escribe* $o_2 \quad o_1 \quad o_0$ *), multiplicar por diez (y dibuja flechas entre cada una de ellas con un 19 debajo, como si quisiera realizar transferencias pero considerando a 10 como la base) y si multiplico 1000 por todas las unidades…*

E4. ¿Y mil por qué, estamos en base 10?

R4. ¡Ah!, es verdad estamos en base x. Entonces sería x^3*, y si multiplico* x^3 *por este resultado (por* $x^2 + 2x + 1$). *Las* x^3 *son unidades de millar… (escribe* x^3 $(x^2 + 2x + 1)$, *esto va bien…(Por probar coloca en los casilleros del resultado* $0 \quad x^2 \quad 2x \quad 1$)…

A6-2º obtiene el número total de vasos multiplicando acertadamente el producto de filas por columnas y a continuación se pierde en una serie de intentos para obtener el resultado pedido. No podemos concluir nada definitivo del análisis del fragmento anterior.

La tabla 7.11 recoge un resumen de los resultados de la entrevista en este caso.

Tabla 7.11 Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista al alumno A6-2º

Tareas	*Unidades y fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/empatía.*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Fragmento 1	Diferencia los conceptos implicados.				Analítico	
IIN12	Unidad y Fragmento 2	[1] Traduce del polinómico al decimal.				Analítico	
IIA13	Unidad y Fragmento 3	[2] Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA14	Unidad y Fragmento 4	[3] Justificación de las llevadas en la adición.				Tecnico/Analítico	
IIA15	Unidad y Fragmento 5	[4] Justificación suficientemente la posición de los sumandos		AAop.2		Analítico	
III.IA18	Unidad y Fragmento 6	[5] Opera en los agrupamientos y realiza las transferencias.		ASop.7		Sintético I	
	Unidad y Fragmento 7	[6] Opera en los agrupamientos y realiza las transferencias.		ASop.7		Sintético I	
III.IIA24	Unidad y Fragmento 8	Tiene dificultades para operar independientemente los ordenes y no realiza transferencias.				-	
	Unidad y Fragmento 9	-				-	
III.IIC25	Unidad y Fragmento 10	Utiliza una estrategia algebraica, pero no identifica los distintos ordenes presentes.				-	

7.3.2.7 Alumno A8-2º

Alumno de 2º curso grupo F del grado de Educación Primaria que ha cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética, aunque como alumno no asistente al compaginar los estudios con el trabajo; da clases en un colegio privado a niños de 4º de Primaria (tiene la titulación de Pedagogía) e hizo el bachillerato tecnológico; habría que añadir que no ha superado la asignatura en la primera convocatoria ordinaria. No ha participado en ninguna de las pruebas escritas. La entrevista se realizó el 8 de junio de 2012 a las 15:30. Veamos los resultados de la misma.

Unidad 1. Distinción entre el número de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente (tarea IIN8).

R1. Será posible, esto lo he trabajado en clase con los niños de 4º, se lo expliqué divinamente y ahora no hay forma. (Le pido que se relaje y haga las tareas sin presionarse). (Piensa). Las centenas serían…(escribe 200 c, 4 u , 30 d).

Responde cometiendo el error EAe3 y no podemos concluir nada salvo que no pasa de un uso técnico.

Unidad 2. Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos órdenes (tarea IIN12).

En esta tarea se incluyen dos números con distintas estructuras, el primero permite su transcripción directa por estar formados por órdenes separados o disjuntos (trece decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades), mientras que en el segundo los órdenes están distribuidos entre las distintas expresiones y se necesita de las oportunas transferencias (siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas diecisiete unidades). En la entrevista responde tal y como se refleja en el siguiente fragmento:

R1. (Escribe 13.405)
E2. Y el de abajo que esta formado por siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis centenas y diecisiete unidades.
R2. (Se ríe y escribe 7.013.017)
E3. Son unidades de millar o unidades de mil, que no unidades de millón.
R3. Ah, vale (borra el primer número y escribe 130.405).
E4. ¿Cuántas decenas de mil tiene ese número?
R4. Se supone que trece, pero no estoy muy convencido pues yo creo que son tres.

A8-2º realiza ambas traducciones componiendo de forma yuxtapuesta los órdenes presentes en la expresiones propuestas y presenta una respuesta errónea que hemos codificado como EAr.2, es decir, no descompone los órdenes y no realiza transferencias entre ellos. Únicamente podemos asegurar que se utiliza el conocimiento en sus niveles inferiores, es decir, un uso técnico o de reproducción.

Unidad 3. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma (368 + 475).

Extraído de la tarea 7, en la que se pide que realice la suma de dos sumandos que figura en el enunciado y que justifique las acciones que va realizando. El siguiente fragmento refleja las intervenciones de A8-2º ante esta tarea:

R1. Yo lo que haría sería siete y siete catorce y una quince (escribe el 5) y me llevaría una, mentalmente,
E2. ¿Y esa una que te llevas?
R2. Una decena, como estamos en base diez y este diez no lo podemos colocar en las unidades lo pasamos a las decenas; se lo sumariamos al cinco y, seis y seis serían doce (escribe un 2) y nos volvería a sobrar una decena que se la sumaríamos al cuatro o al tres…
E3. ¿Sobraría una decena?
R3. En este caso sobraría una centena, porque ya estaríamos en las centenas
E15. Analicemos las decenas, ¿cuántas decenas obtengo?
….
R15. Doce decenas
E16. ¿Y qué haces?
R16. Sitúo el dos, porque hemos hecho los dos bloques de diez, por así decirlo tenemos dos bloques de diez unidades y como sobraría uno lo tendríamos que pasar a las centenas

Los rastros de comprensión identificados, como el que se puede subrayar de la respuesta R2, nos permiten interpretar que el alumno hace un uso analítico funcional del sistema de numeración al justificar las llevadas del algoritmo de la suma mediante las oportunas transferencias entre los distintos órdenes.

Unidad 4. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta (562-36).

Extraído de la resolución de la tarea 8, en la que se le pide que realice una resta de dos sumandos y que justifique las acciones que va realizando. El alumno responde en la entrevista tal y como se indica en el fragmento siguiente:

R1. La resta la hago un poco a mi manera; como a dos no le puedo quitar seis tenemos que imaginarnos que el dos es un doce, si el de arriba es menor que el de abajo hay que decirle a los niños que el de arriba es como si llevase un uno (escribe un 1 al lado del 2), que sería como la decena para que se pueda restar; a doce se le quitarían seis y nos quedarían seis (escribe un 6), pero como nos ha sobrado una unidad (señala el 1 que había escrito) este uno se lo tendría que sumar al tres (dibuja una flecha entre ese 1 y el tres); yo se hacerlo de forma mecánica pero no se transmitirlo, que es el problema (yo creo que quiere decir no se justificarlo).
E2. ¿Por qué dices le pongo un uno al de arriba?; eso de ponerle un uno es un tanto extraño. Cuando dices: "le pongo un uno delante", ¿qué significa?
R2. Si es menor que el de abajo, no le puedes restar esa cantidad, daría un número negativo y eso los niños de primero no lo han visto, entonces hay que decirle que hay que coger una decena, hay que llegar hasta la decena para poder restarle ese número y después ese número se lo tenemos que devolver…
E3.Y se lo tenemos que devolver al de abajo.

R3. Si, (se vuelve a reír) Se hacerlo pero no sabría explicarlo.
E4. Sabes hacerlo, pero no sabes por qué lo haces.
R4. Es que lo hago mecánico. A mi me lo enseñaron en su momento y así lo enseño yo. Yo utilizo la idea del ascensor, como de seis a dos no se puede, entonces tenemos que subir el dos en el ascensor y subirlo al doce y a continuación como hemos subido al dos, se lo tenemos que devolver al tres (y acaba de realizar la resta).

Las respuestas R3 y R4 nos inducen a interpretar un uso técnico del sistema de numeración, al no justificar los procedimientos implicados en el algoritmo de la resta y confirmar el uso mecánico del algoritmo; esta respuesta la hemos catalogado como error EAop1, con argumentos "extraños" (R4) que no tienen nada que ver con los principios implicados en el algoritmo.

Unidad 5. Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación (tarea IIA15).

Tarea extraída de la tarea 9, en la que se pide que realice la multiplicación 258 x 26 y que justifique las acciones que va realizando. Las respuestas de A8-2º aparecen en el siguiente fragmento que se analiza brevemente a continuación:

R1. Partimos de la base que nos sabemos las tablas de multiplicar, partimos de esa base. Seis por ocho cuarenta y ocho (escribe el 8) y me sobrarían cuatro…
E2. ¿Qué serían…?
R2. Ya empezamos, serían cuatro decenas porque ya hemos hecho un grupo de ocho unidades completos y sobrarían cuatro decenas (lo dice al revés), se pondría de forma mental aquí (señala el 5 del multiplicando) y que habría que sumarlas, seis por cinco treinta y se le suman las cuatro y tenemos treinta y cuatro, (escribe el 4) y sobrarían ahora mismo trescientas centenas…
E3. Trescientas centenas
R3. Claro treinta y cuatro, y el tres se lo pasaríamos al dos, y entonces serían trescientas…trescientas unidades.
E4. Trescientas unidades que son…
R4. Son tres centenas (acaba el producto por el seis del multiplicador). Ahora, dos por ocho dieciséis (escribe el 6)…
E5. ¿Por qué colocas el seis en ese lugar?
R5. Porque estamos multiplicando por decenas y por eso se pone debajo de las decenas.

Utiliza la estrategia AAop.2 para justificar la posición de los sumandos parciales, lo que denota un conocimiento técnico/analítico del algoritmo. En la estrategia se justifica la posición haciendo referencia al hecho de multiplicar por decenas y no recurrir explicita o implícitamente a la propiedad distributiva de la multiplicación o a la descomposición del multiplicador en su desarrollo polinómico.

Unidad 6. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal (extraído de la tarea III.IA18).

En la tarea de referencia se solicita obtener el total de vasos, en agrupamientos de 8, vendidos en los dos años. El alumno responde de acuerdo con el siguiente registro:

R1. Hay que sumar en base ocho. A ver si me acuerdo de eso. (escribe un número debajo de otro) Yo en la suma y eso estoy fatal…esto era fácil, pero ahora no me acuerdo…No se podía superar a ocho y si se superaba se pasaba a una superior (comienza a sumar y escribe un 2 en las unidades), el ocho era el tope, cuando se llega al ocho era como el diez…No me acuerdo, y mira que esto lo estudié y me lo sabía, pero ahora…

Intenta recordar sin éxito el procedimiento del algoritmo de la suma en bases distintas a la decimal, su forma de proceder nos da pie para realizar una interpretación del uso técnico del sistema de numeración decimal, dado que en ningún momento pretende generalizar el proceso seguido en el algoritmo usual del algoritmo de la adición en bases distintas a la decimal.

Unidad 7. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal (Extraído del ítem III.IA18 en el que se le solicita obtenga el incremento de vasos del año 11 respecto al anterior, con agrupamientos de 8).

El siguiente fragmento de la entrevista sobre esta tarea servirá para el análisis de los factores que venimos estudiando:

E2. ¿Y el incremento?
R2. Sería una resta, (escribe las dos cantidades) comienza a restar, aquí no habría problema (pone un 1 en las unidades del resto) y aquí…(escribe un 6 en las decenas) hay que ir del siete al quince… y yo lo hacía poniendo grupos (escribe 15 palitos en la suma) ponía un grupo completo, y pongo un tres (debajo de las unidades en la suma, borra los palitos y escribe ahora 16, señala dos grupos …
R3. …Yo ya no me acuerdo de esto (borra los palitos anteriores y ahora vuelve a pintar 15)…(Con los palitos se acerca un poco al procedimiento, pero con lagunas).

Al igual que en el algoritmo de la suma, el alumno intenta recordar sin éxito el procedimiento del algoritmo de la resta en bases distintas a la decimal; en ningún momento pretende generalizar el proceso seguido en el algoritmo usual y, por ello, su forma de proceder nos da pie a una interpretación del uso técnico del sistema de numeración decimal.

Unidad 8. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados (extraído del ítem III.IIA24 en el que se le pide obtener el total de ventas, con cantidades expresadas en agrupamientos indeterminados).

De la intervención del alumno ante esta tarea seleccionamos el siguiente fragmento para su análisis:

R1. (Escribe palés, paquetes y cajas debajo de las tres cifras de las ventas de junio; le hago ver los distintos agrupamientos, borra y vuelve a escribir lo mismo) (escribe x-1 x-1 x-1 y debajo 1 1 1, coloca la raya y el signo +).

Lo que no se es como meterle mano a esto…yo sabría plantearlo, pero ahí me quedo…operar no sabría operar…como si le pusiera uno equis, uno equis y uno equis, y esto lo di en bachillerato, porque yo hice bachillerato tecnológico, pero no me acuerdo de nada…

Los valores indeterminados suponen un obstáculo que le impide desarrollar cualquier procedimiento.

Unidad 10. Cálculo del cardinal de colecciones en agrupamientos indeterminados (tarea 14, ítem III.IIC26).

A8-2º aborda la tarea en el sentido que se incluye en el siguiente fragmento:

R1. ¿Ésto que se supone que representa? (señala los puntos)
E2. Son puntos suspensivos que pretenden indicarnos que hay x+1 vaso tanto en cada columna como en cada una de las filas ¿Entiendes el significado?
R2. Si (sin poner mucho entusiasmo en esa afirmación). Lo único que se es que hay seis filas y seis columnas, que lo que yo no se es si se podría poner (escribe 6(x+1) en la parte superior y (x+1)6 en la lateral). Porque estamos indicando que hay seis filas y seis columnas.
E3. Pero las flechas y los puntos suspensivos te indican que hay x+1 filas y x+1 columnas.
R3. Entonces serían siete,… esto no caerá en el examen, si esto yo lo trabajé en el bachillerato.
E4. Estas diciendo continuamente no me acuerdo,
R4. Si esto yo lo vi en bachillerato, incluso en la selectividad vi cosas raras como esta…
E5. Pero echas mano continuamente de la memoria,
R5. Si es que estas cosas yo sabía hacerlas, pero como he dejado de hacerlas ahora no me acuerdo.
E6. ¿Y no será que aprendiste muchas de estas cuestiones como técnicas aisladas y sin entender lo que hacías?
R6. Ésto te lo aprendes porque te va a caer en el examen, tu apréndetelo aunque sea de memoria, quítatelo del medio y a otra cosa (¿Así has aprendido?). No te lo sepas de memoria, porque de esa manera después no te va servir para nada; yo me lo aprendí de memoria, lo solté y después se ha borrado y me da coraje porque si esto lo sabía hacer en su momento…

Como ocurría en los fragmentos anteriores la presencia del valor indeterminado para la base le impide realizar cualquier procedimiento; considera los puntos como vasos sueltos y se preocupa de la posibilidad de que este tipo de tareas pudieran “caer en el examen” que tiene pendiente para superar la asignatura.

Le planteo directamente que su aprendizaje se ha podido orientar a la memorización de técnicas aisladas sin comprensión y me contesta que de lo que se trataba era de ir superando los exámenes y una vez aprobados pasar a otra cosa (R6). Ahora acepta la necesidad de una comprensión significativa para evitar el “borrado” de lo aprendido. La *Tabla 7.12* resume las interpretaciones y conclusiones que se han deducido de la intervención de A8-2º en la entrevista.

Tabla 7.12 Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista al alumno A8-2º

Tareas	*Unidades y Fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/empatía.*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Unidad y fragmento 1	No diferencia los conceptos implicados.			EAe3	Técnico	
IIN12	Unidad y fragmento 2	[1] Traduce del polinómico al decimal mediante la yuxtaposición de los ordenes implicados.			EAr.2	Técnico	
IIA13	Unidad y fragmento 3	[2] Justificación de las llevadas en la adición.		AAop.1		Analítico	
IIA14	Unidad y fragmento 4	[3] Justificaciones mecánicas y “extrañas” de las llevadas en la sustracción.			EAop1	Técnico	
IIA15	Unidad y fragmento 5	[4] Justificación de la posición de los sumandos		AAop.1		Analítico	
III.IA18	Unidad y fragmento 6	[5] No encuentra el procedimiento aprendido.	Reconocimiento expreso de su aprendizaje memorístico			Técnico	
	Unidad y fragmento 7						
III.IIA24	Unidad y fragmento 8	El valor indeterminado de la base supone un obstáculo para resolver la tarea				-	
	Unidad y fragmento 9						
III.IIC25	Unidad y fragmento 10					-	

7.3.3 Análisis de las entrevistas a alumnos del master de secundaria

7.3.3.1 Alumno A4-s

Alumno del Master de Secundaria en la especialidad de Matemáticas con la titulación de Licenciado en Matemáticas. No ha participado en ninguno de los cuestionarios aplicados. Realiza la entrevista el 30 de mayo de 2012 a las 11:30 horas.

Unidad 1. Distinción entre el número de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente (tarea IIN8).

Ante el planteamiento de la tarea, A4-s interviene de la forma en la que aparece en el siguiente fragmento:

R1. Dos, no… cuántas centenas contiene, ochenta y dos (escribe 82).
E2. ¿Cuántas unidades contiene?
R2. (Escribe 8.234)
E3. ¿Y cuántas decenas contiene?
R3. (Escribe 823)

Responde adecuadamente diferenciando los dos conceptos implicados en la tarea. Deducimos que el alumno hace un uso analítico estructural del sistema decimal de numeración al identificar los distintos órdenes y las transferencias oportunas.

Unidad 2. Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos órdenes (tarea IIN12).

En esta tarea se incluyen dos números con distintas estructuras, el primero permite su transcripción directa por estar formados por órdenes separados o disjuntos (trece decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades), mientras que en el segundo los órdenes están distribuidos entre las distintas expresiones y se necesita de las oportunas transferencias (siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas diecisiete unidades). El alumno responde a esta tarea de acuerdo con el siguiente registro

R1. (Escribe 130.000+400 +5= 130.405)
E2. ¿Y el de abajo?
E2. (Escribe 7.000+1300+160+17= 8477)

A4-s manifiesta una comprensión analítica estructural de los sistemas de numeración al identificar los órdenes implícitos, transformar cada una de las cantidades de órdenes presentes a unidades y procede a realizar la suma de los resultados.

Unidad 3. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma (368 + 457).

Tarea extraída de la tarea 7, en la que se le pide que se realice una suma de dos sumandos y que se justifiquen las acciones realizadas. A4-s responde de acuerdo con el siguiente fragmento:

R1. Ocho y siete quince (pone el 5) y me llevo una.
E2¿Qué es esa que te llevas?
R2. Esa es una decena que he formado al juntar diez unidades, seis y seis son doce (escribe el 2) y me llevo una, que es una centena, y se la sumo a las centenas…

Los rastros de comprensión nos permiten interpretar que la alumna hace un uso analítico funcional del sistema de numeración al justificar las llevadas mediante las oportunas transferencias entre los distintos órdenes.

Unidad 4. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta (562 – 36).

Extraído de la resolución de la tarea 8, en la que se le pide que realice una resta de dos sumandos y que justifique las acciones que va realizando. Las respuestas de A4-s quedan representadas en el siguiente fragmento:

R1. Busco el número que hay que sumar a seis para llegar a doce que es seis, me llevo una
E2. ¿Y esa que te llevas?
R2. Pues esa es…igual que antes, ahora he sumado diez en el minuendo y para compensar…la verdad que no me convenzo a mí mismo. Yo he quitado una decena del seis del minuendo y para restar las decenas, habría que restarle al seis y considerarlo un cinco, o lo que es lo mismo decir de cuatro a seis.

Las respuestas nos inducen a interpretar un uso analítico funcional del sistema de numeración, justificando adecuadamente las llevadas del método austriaco utilizado mediante la compensación entre los órdenes.

Unidad 5. Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación (Extraído de la resolución de la tarea 9, en la que se le pide que realice la multiplicación 258 x 26, y que justifique las acciones que va realizando).

El siguiente registro se ha seleccionado de las respuestas de A4-s ante esta tarea:

R2. (Realiza la multiplicación por las unidades del multiplicador) Porque cuando multiplicamos 258 por 2 , lo hacemos realmente por 20, por eso iría un cero o bien un hueco.

A4-s utiliza la estrategia AAop.1 para justificar la posición de los sumandos parciales, lo que denota un conocimiento analítico funcional del algoritmo, al justificar la posición de los sumandos parciales en el algoritmo de la multiplicación haciendo referencia a la descomposición del multiplicador en su desarrollo polinómico, lo que implícitamente implica la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación.

Unidad 6. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal (extraído del ítem III.IA18 en el que se le solicita obtenga el total de vasos vendidos en los dos años en agrupamientos de 8).

El siguiente registro se ha seleccionado de las respuestas de A4-s ante esta tarea:

R1. Suma (suma por órdenes y realizando transferencia directa, obtiene como resultado 6 3 5 3 $_{(8}$)

A4-s opera en la base 8, realizando las transferencias oportunas (estrategia ASop.7) y generalizando las estrategias utilizadas en el algoritmo de la suma en nuestro sistema, lo que nos induce a interpretar el uso sintético funcional del sistema de numeración.

Unidad 7. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal (extraído del ítem III.IA18, en el que se le solicita obtener el incremento de vasos del año 11 respecto al anterior, con agrupamientos de 8).

El siguiente registro se ha seleccionado de las respuestas de A4-s ante esta tarea:

R2. Sería la diferencia también en base 8. (resta y utiliza cifras negativas obteniéndose 1 -2 -2 1)
E3. ¿Y podríamos realizar algo para que no aparezcan esas cantidades negativos?
R3. Si ha vendido un palé, ha vendido 8 cajas mas, luego ha vendido 6 cajas más, quitamos una caja y ponemos ocho paquetes, por lo tanto ha vendido seis paquetes más (luego el incremento es 5 6 1).

A4-s opera en base 8, realizando las transferencias oportunas (estrategia ASop.7) y generalizando las estrategias utilizadas en el algoritmo de sustracción de nuestro sistema, lo que nos induce a interpretar el uso sintético funcional del sistema de numeración.

Unidad 8. Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados (extraído del ítem III.IIA24, en el que se le pide obtener el total de ventas con cantidades expresadas en agrupamientos indeterminados).

El siguiente fragmento y el registro que recoge la *Figura 7.11,* resumen lo fundamental de las respuestas de A4-s a esta tarea:

R1. Seria (escribe x-1 x-1 x-1 y debajo 1 1 1) al sumar aquí obtenemos x, pero como agrupamos de x en x, obtenemos (realiza transferencias directas de ordenes y da como resultado 1 1 1 0).

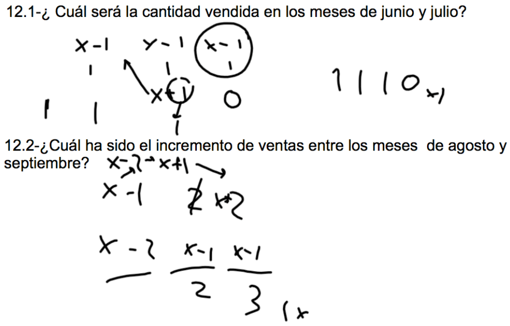


Figura 7.11 Respuesta a las tareas III.IIA24.1 y 24.2 en la entrevista al alumno A4-s

Manifiesta una comprensión sintética del segundo subnivel del sistema de numeración decimal al generalizar los procedimientos del algoritmo de la adición en sistemas con bases indeterminados, identificando el valor posicional de las distintas componentes, operando algebraicamente con ellas y realizando de forma adecuada las necesarias transferencias entre los distintos órdenes; estrategia codificada como ASop.7.

Unidad 9. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos indeterminados (Extraído del ítem III.IIA24 en el que se le pide obtener el incremento de ventas, con cantidades expresadas en agrupamientos indeterminados).

A4-s responde de acuerdo con el siguiente fragmento y el registro que se recoge en la *Figura 7.11*:

R2. (Escribe x-1   2   2 y debajo x-2 x-1 x-1, realiza transferencias inversas de ordenes entre paquetes y vasos, x+2 menos x-1 son 3, y entre cajas y paquetes, son x+1 menos x-1 y quedan 2 paquetes, le quedan x-2 cajas y se van).

Manifiesta una comprensión sintética del segundo subnivel del sistema de numeración al identificar el valor posicional de las distintas componentes, operar algebraicamente con ellas y realizar de forma adecuada las necesarias transferencias entre los distintos órdenes, lo que supone generalizar los procedimientos del algoritmo de la sustracción de nuestro sistema; estrategia codificada como ASop.7.

Unidad 10. Cálculo del cardinal de colecciones en agrupamientos indeterminados.

Dada su capacidad para trasladar a estas nuevas situaciones sus estrategias personales, le planteo la tarea 14: contar los vasos que aparecen en la nueva página notebook agrupados en filas y columnas de x+1 vasos. La respuesta se condensa en el siguiente fragmento y en la *Figura 7.12*:

R1. Esto haría un paquete (señala la matriz x por x que queda al prescindir de la primera fila y la ultima columna) no, una caja; aquí y aquí habría dos paquetes (ha señalado los primeros x elementos de la primera fila y los últimos x elementos de la ultima columna) y un vaso suelto (el vaso (1,x+1)) (Escribe en los recuadros inferiores 1 2 1$_{(x}$)

E2. ¿Si lo hiciéramos algebraicamente, como quedaría?
R2. Habría $(x+1)^2 = x^2 + 2x+1$, x^2 *sería la caja, 2x serian los dos paquetes y 1 sería el vaso suelto.*

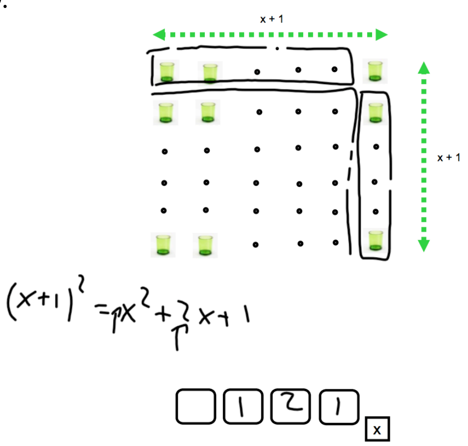


Figura 7.12 Respuesta a la tarea III.IIC26 en la entrevista al alumno A4-s

Realiza los recuentos de forma gráfica (ASc.1) identificando los distintos órdenes y manifestando un uso sintético de segundo orden. Ante nuestra petición de realizar el recuento de forma algebraica, calcula el total de vasos relacionando los resultados obtenidos e identificando los coeficientes del trinomio con la expresión en base x del total de vasos, lo que supone una variante de la estrategia aritmética ASc.3. La tabla 7.13 resume los resultados de esta entrevista.

Tabla 7.13 Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista al alumno A4-s

Tareas	*Unidades y Fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/empatía.*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Fragmento 1	Diferencia los conceptos implicados.				Analítico	
IIN12	Fragmento 2	[1] Traduce del polinómico al decimal.				Analítico	
IIA13	Fragmento 3	[2] Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA14	Fragmento 4	[3] Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA15	Fragmento 5	[4] Justificación de la posición de los sumandos		AAop.1		Analítico	
III.IA18	Fragmento 6	[5] Opera en los agrupamientos y realiza las transferencias.		ASop.7		Sintético I	
	Fragmento 7	[6] Opera en los agrupamientos y realiza las transferencias.		ASop.7		Sintético I	
III.IIA24	Fragmento 8	Opera en la base x		ASop.7		Sintético II	
III.IIA24	Fragmento 9	Opera en la base x		ASop.7		Sintético II	
III.IIC25	Fragmento 10	Realiza agrupamientos gráficos y los relaciona con la expresión algebraica del total de unidades.		ASc.1 ASc.3		Sintético II	

7.4 Resultados y conclusiones de las entrevistas

Del análisis de las entrevistas podemos afirmar que se han cumplido las expectativas por las que estas fueron diseñadas y realizadas. Su carácter cualitativo y mas personal nos ha permitido profundizar en la componente hermenéutica de nuestro modelo, confirmando los resultados obtenidos en el análisis de los cuestionarios aplicados y compartiendo con los alumnos algunas de nuestras reflexiones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la numeración natural.

7.4.1 Resultados y conclusiones de carácter general

✓ Las entrevistas nos permiten analizar el proceso de resolución de las tareas propuestas con mucha mayor información que la aportada por las respuestas escritas a las tareas de la pruebas. La riqueza de matices que se obtienen en las entrevistas supera el análisis del resultado final que se puede analizar en los cuestionarios.

Sin llegar a ser el protocolo de la resolución de problemas que propone Guzmán (1.995), la entrevista se acerca bastante a esta idea y mejora sustancialmente la información que se obtiene de los registros escritos obtenidos en los cuestionarios, pues supone la implicación del propio entrevistador en el proceso de resolución y por tanto permite hacer emerger rastros de comprensión insuficientes que permiten detectar el uso del conocimiento matemático que estos dejan entrever, profundizar en respuestas incompletas, alentar la continuación de estrategias desechadas, etc.

✓ La formación matemática con la que se inician los estudios de grado es insuficiente para abordar con garantías la enseñanza y aprendizaje en la Educación Primaria. Se aprecia en las entrevistas realizadas, que confirman los resultados obtenidos de los cuestionarios aplicados, que la mayoría de los alumnos que inician sus estudios de grado tienen un conocimiento de tipo instrumental; la mayoría desconocen la organización interna de los sistemas de numeración, no son conscientes de los principios que lo caracterizan, ni tampoco de las razones que están implícitas en los algoritmos de las operaciones elementales y por tanto son incapaces de resolver tareas equivalentes en sistemas con agrupamientos distintos. Muchos de estos alumnos conciben que el aprendizaje matemático se realiza en forma memorística, mediante el aprendizaje a secas de técnicas y procedimientos. Desmontar estas concepciones es una tarea prioritaria para evitar que este curriculum oculto emerja en sus futuras prácticas escolares. Afirmaciones como: *"esto es así de toda la vida"* del alumno A2-1º, "*Las matemáticas yo no las entiendo, yo las hago*" del alumno A8-1º, o "*es así como se lo enseñaron*"… "*es pura mecánica que te enseñaron en el colegio y no nos paramos a cuestionarnos el porqué de eso*" del alumno A9-º1º, o también y desde nuestro punto de vista mas preocupante la afirmación obtenida en la entrevista A8-2º, por tratarse de un alumno que ha cursado, aunque no superado, la asignatura de Didáctica de la Aritmética "*esto te lo aprendes porque te va a caer en el examen, tu apréndetelo aunque sea de memoria, quítatelo del medio y a otra cosa"* confirman las reflexiones realizadas anteriormente.

Sin embargo, por una parte los deseos y las necesidades que los propios alumnos de primero comparten con nosotros en las entrevistas: …"*yo creo que si hubiera, me hubieran explicado el porqué de algunas cuestiones, me habría sido más fácil entenderlas*" del alumno A9-1º, o "*Yo creo que debería conocerla, pues a la hora de* *ensenarla sería más fácil"* como respuesta de A3-1º a la necesidad de conocer las razones ocultas en los procedimientos; y por otra las aportaciones y los aprendizajes que los alumnos de segundo reconocen haber conseguido con su paso por la asignatura: "*Yo creo que ha mejorado (su comprensión respecto de los sistemas de numeración), pues te abre tu mente y percibes aspectos que antes no conocía al igual que nos ha pasado con los algoritmos*" del alumno A2-2º, o en respuesta a lo conseguido con la asignatura: "*Sobre todo para entender que a los niños les cuesta hacer esas cosas que nos parecen tan fáciles y sobre todo cuando nos plantean estas situaciones que son tan novedosas para nosotros como lo son para ellos las que consideramos básicas*", del alumno A4-2º, o *"...yo sabía la forma automática de restar, pero nunca me habían explicado el porqué y ahora al hacerlo en distintas bases acabo de entenderlo",* del alumno A1-2º, o por ultimo la afirmación de la entrevista A4-s "*las dificultades están en explicar cómo uno piensa, saber cómo lo haces, entender lo que hay detrás de lo que hacemos",* nos permiten asegurar que la orientación dada a la asignatura y las previsibles mejoras que se producirán por la incorporación de los resultados de nuestros trabajos, compensarán la formación insuficiente con la que los alumnos acceden a esta titulación.

✓ Del primer análisis realizado al total de las 21 entrevistas (ver *Tabla 7.2*) podemos concluir que hemos obtenido una tipología de respuestas coincidentes con las obtenidas en las pruebas escritas. Si dividimos a los alumnos entrevistados por el carácter de haber cursado o no la asignatura de Didáctica de la Aritmética encontramos:

- De los 9 alumnos entrevistados que no habían cursado la asignatura, 6 presentan un perfil de comprensión técnico de los sistemas de numeración, coincidente en gran medida con los resultados obtenidos en las pruebas escritas.
- De los 8 alumnos entrevistados que habían cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética, 6 presentan mejoras en la comprensión de las tareas relacionadas con los niveles de análisis y síntesis I, tanto estructural como funcional.

✓ Las entrevistas permiten encontrar rastros de comprensión que en las pruebas escritas se obtienen con mayor dificultad.

✓ Encontramos algunas tareas en las que inicialmente los alumnos responden con errores catalogados en el capitulo 6, y que han modificado por estrategias adecuadas en el trascurso de la entrevista, motu proprio o bien por las preguntas del entrevistador, por sus silencios o por cuestionarles sus propias respuestas.

✓ Los resultados de los análisis de las entrevistas nos indican la necesidad de completar los niveles epistemológicos del modelo local.

Nuestro modelo local nos ha permitido categorizar las situaciones de numeración, mediante la doble dimensión fenómeno-epistemológica, a partir del cual hemos diseñado instrumentos que nos han dado información sobre la comprensión que los alumnos del grado de primaria tienen de los sistemas de numeración; en esta información obtenida mediante sucesivas aproximaciones, hemos destacado en primer lugar la distribución de los alumnos por niveles de comprensión; distribución de carácter global que nos da una radiografía de la situación en la que se encuentra los alumnos cuando comienzan sus estudios y una vez han cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética. El análisis semiótico de los registros escritos y sobre todo la tercera aproximación que ha supuesto el análisis de las entrevistas realizadas, nos ha permitido comprobar la dificultad para categorizar a cada uno de los alumnos en los niveles concretos de comprensión definidos, dado que sus respuestas, en algunos casos, presentan características asociadas a distintos niveles. A pesar de lo cual hemos encontrado alumnos, que por los rastros de comprensión detectados en las estrategias utilizadas y los errores cometidos, constituyen modelos tipos de algunos de los niveles epistemológicos establecidos. Este es el caso de la alumna A7-1º, que representa con bastante exactitud a un alumno tipo del nivel técnico de comprensión; también y en el otro extremo del espectro podríamos situar al alumno A4-s, como representante de los alumnos con un dominio del nivel formal. Por todo lo cual, parece que sería posible y deseable establecer dentro de cada uno de los niveles establecidos, subniveles que permitieran afinar más esta categorización.

7.4.2 Comparación con los resultados y conclusiones obtenidos en los cuestionarios

✓ Como se puede observar en las tablas resúmenes de los análisis semióticos y hermenéutico de las entrevistas realizadas (*Tablas 7.3* a *7.13*), hemos podido constatar la presencia de los errores y las estrategias ya detectados en la aplicación de los cuestionarios; su estudio previo nos ha facilitado la organización del protocolo de las entrevistas. Sin embargo, la posibilidad de profundizar en ellos, mediante preguntas, observaciones, etc., nos ha permitido superar algunas de las dudas que los registros escritos no habían desvelado. En particular:

- Algunos alumnos que en los cuestionarios cometían el error EAe.1 y que hemos supuesto que no diferenciaban la cifra de un determinado orden del número de este orden contenidos en un número, hemos podido comprobar que en algunos casos se debe a un problema de comunicación, y que en este caso es el propio lenguaje utilizado el que produce confusión. Después de algunas aclaraciones, algunos alumnos resuelven las tareas sin más dificultad (A5-1º, A6-1º). Y aunque podemos aceptar que la modificación en las respuestas de los entrevistados, en esta y en otras de las tareas incluidas en la entrevista, se deba al efecto de aprendizaje que la misma pudiera producir (A9-1º (R3 tarea 12), A6-2º (R2 final entrevista)), también es cierto que en otros alumnos, por muchas explicaciones, preguntas y orientaciones que se les ofrecen, responden de forma invariable, cometiendo el mismo tipo de error o modificándolo pero sin posibilidad de contestar de forma adecuada y razonada o en muchos casos sin entrar ni siquiera a resolver la tarea planteada, constatando su incapacidad para responder, lo que nos lleva a justificar los altos porcentajes de SR producidos en los tres cuestionarios escritos y fundamentalmente en los ítems pertenecientes a los niveles de síntesis.

- Algunos alumnos que contestaban inicialmente a las cuestiones planteadas sobre los algoritmos de las operaciones elementales, con respuestas que suponían errores del tipo EAop.1 o EAop.4, han conseguido finalmente explicar el proceso de las llevadas sobre todo en el caso de la adición o de la multiplicación. Sin embargo, no se ha conseguido modificar en la mayoría de los casos las respuestas para el caso de la sustracción y tampoco para justificar la colocación de las sumas parciales en el algoritmo de la multiplicación; lo que sin duda supone reconocer el mayor nivel de dificultad del aprendizaje significativo de la multiplicación y la sustracción frente a la adición.

- Para algunos alumnos que han cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética y también en algunos del master de secundaria, que tenían problemas para resolver algunas de las tareas del nivel de síntesis I, las relativas a las sustracciones en base distintas a la decimal, y a las del nivel II que suponían operar en bases indeterminadas, también consiguieron resolverlas a pesar que en un principio cometían errores o reconocían su incapacidad para realizarlas.

✓ También en el desarrollo de las entrevistas hemos detectado dos nuevos errores no detectados en el análisis realizado en el capítulo 6 de los cuestionarios escritos, productos sin duda de la reconsideración de sus primeras respuestas ante las dudas o las preguntas del entrevistador. Se trata de los errores EAe4 y ESop8, que se caracterizan por:

- EAe4: confundir el numero órdenes contenido en una cantidad con la cifra del orden correspondiente y todas las cifras de los ordenes mayores a éste.
- ESop8: realizar un análisis aislado de los incrementos en cada uno de los agrupamientos en la tarea III.IA18.2, obteniendo cantidades negativas que terminan por anular para expresar de forma global el resultado obtenido.

✓ Se aprecian diferencias en las respuestas entre los alumnos de primer curso y los de segundo que han cursado la asignatura.

- Los alumnos de primero que no han recibido ninguna formación en matemática o en didáctica de la matemática en sus estudios de grado, responden como sus compañeros en los cuestionarios, a pesar de la mejora que en el desarrollo de la entrevista se produce por las aclaraciones de las tareas, las preguntas formuladas y la reconsideración de algunas de las respuestas ofrecidas. De las nueve entrevistas realizadas a alumnos de características similares a los de los dos primeros cuestionarios escritos, se vuelven a encontrar errores en algunas de las tareas técnicas, algunas dudas en la lectura de números y sobre todo en la tarea IO.3, donde tienen dificultades para obtener el anterior y el posterior en el caso de números con ceros léxicos y sintácticos; pero sobre todo muestran y reconocen sus limitaciones en las justificaciones de los procesos realizados en los algoritmos de las operaciones elementales y las dudas y los errores para considerar expresiones numéricas en formatos no habituales; estas consideraciones que caracterizarían la comprensión analítica funcional de la numeración natural, les impiden trasladarlas y generalizarlas a las tareas con agrupamientos distintos al decimal, donde las expresiones con valores indeterminados suponen un serio obstáculo para resolverlas. De los nueve alumnos de primero entrevistados, siete responden de forma que podemos situarlos en el nivel técnico, uno en el nivel de síntesis I y también encontramos a una alumna que ha superado el nivel de síntesis II.

- Por el contrario, los alumnos de 2º demuestran un conocimiento analítico mayoritario y se aprecia en las respuestas ofrecidas la soltura y claridad con la que justifican los pasos que se dan para resolver los algoritmos de las operaciones elementales y su capacidad para considerar y traducir a nuestro sistema expresiones numéricas no habituales de tipo multiplicativa; lo que nos lleva a concluir que la asignatura de Didáctica de la Aritmética ha conseguido este objetivo, que aunque entendemos mínimo, muestra la diferencia que existe entre estas y sus respuestas a los cuestionarios escritos realizados y a las respuestas ofrecidas por los alumnos de primer curso. En las tareas con agrupamientos distintos al decimal, muestran las estrategias conseguidas en el desarrollo de la asignatura, y se aprecian mejoras sustanciales en los indeterminados, con respecto a los resultados obtenidos en los cuestionarios, provocadas con toda seguridad, por las continuas demandas para que aplicaran en ellos las mismas estrategias utilizadas en las tareas anteriores. Por lo que los resultados obtenidos son sensiblemente mejores que los obtenidos en los cuestionarios, así, encontramos a un alumno que se mantiene en el nivel de reproducción, una alumna que podemos situarla en el nivel de análisis, 3 en el de síntesis I y 4 en de síntesis II.

✓ Se constatan las dificultades que tienen los alumnos que inician sus estudios de Maestro para operar con expresiones algebraicas, lo que denota un conocimiento muy limitado de las matemáticas estudiadas en secundaria y bachillerato. También se aprecia que tienen dificultades para utilizar las expresiones algebraicas como instrumentos para resolver situaciones-problemas; los alumnos están habituados, en el mejor de los casos, a realizar ecuaciones, operar con polinomios, etc., lo que confirma nuestra hipótesis sobre el tipo de conocimiento eminentemente instrumental de los alumnos que inician los estudios del grado de Educación Primaria.

7.4.3 Sobre las entrevistas de los alumnos del master de secundaria.

✓ El desarrollo de las entrevistas realizadas a los alumnos del master de secundaria nos permite afirmar que tanto el modelo local adoptado y el instrumento desarrollado a partir de él, son válidos para conocer el nivel de comprensión en personas que tienen una mayor formación matemática; permitiendo completar el instrumento con cuestiones de los niveles de síntesis II y formales, que por la naturaleza de los alumnos objeto de nuestra investigación fueron desechadas.

✓ Se aprecian diferencias entre las respuestas de los alumnos del grado de Educación Primaria y la de los alumnos del master de secundaria; los cuatro alumnos del master de secundaria resuelven las tareas de manera que podemos considerar que se encuentran al menos en el nivel de síntesis II; a pesar de ello, en algunas de las entrevistas aparecen errores detectados en los cuestionarios, pero ante las dudas o preguntas realizadas por el entrevistador son inmediatamente subsanadas.

✓ También entre ellos, se aprecian diferencias tanto en el tipo de respuestas, como en los argumentos que ofrecen; pero sobre todo sorprende la reacción de algunos ante la solicitud de explicar algunas de las tareas propuestas; la formación "técnica" que reciben los ingenieros, entendemos que condiciona su visión funcional e instrumental de la matemática.

7.4.4 Sobre algunas tareas puntuales de la entrevista

✓ Se aprecian diferencias significativas entre la comprensión analítica del algoritmo de la adición y el de la sustracción, diferencias que se manifiesta en las respuestas que dan los alumnos a las tareas IIIA.18 y III.II.24, en las que reconstruyen las estrategias utilizadas para resolver las situaciones de sumar y en cambio tienen dificultades para resolver los incrementos solicitados en ellas. Esta diferencia constituye una herencia que se vuelve a repetir en las diferencias en como se resuelven las tareas de síntesis funcional en los algoritmos en bases distintas a la decimal.

✓ Las dificultades que los alumnos tienen para justificar el algoritmo de la sustracción, añadida a los problemas para realizar transferencias entre distintos ordenes, sobre todo lo que hemos llamado transferencias inversas, ponen de manifiesto la necesidad de atender e insistir en la visualización de las propiedades que caracterizan a los sistemas de numeración posicionales y por tanto considerar que los futuros docentes tengan al menos un conocimiento analítico de los sistemas de numeración. En este sentido se constata la necesidad de profundizar en una enseñanza que atienda a los aspectos formativos y no exclusivamente a los instrumentales.

✓ La tarea IIIC.26 permite discriminar a los alumnos que podemos decir tienen superado el nivel de síntesis II, de aquellos que están transitando por él o están en niveles inferiores. Hemos observado que con distintas estrategias todos los alumnos del master de secundaria y un alumno de segundo curso del grado de educación Primaria la han resuelto y en cambio el resto de alumnos encuentran dificultades para ponerse en situación de resolverla al suponer como obstáculo casi insalvable la consideración de los puntos suspensivos como elementos a contabilizar. Entre las estrategias utilizadas hemos encontrado por una parte la gráfica, adaptación de la ASc.1 y la algebraica que también se puede considerar como una ampliación de la ASc.3.

CAPÍTULO 8

Conclusiones y perspectivas futuras

8.1 Introducción

En esta memoria se presenta una aproximación al diagnóstico y la interpretación de la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria. Sin ánimo de establecer conclusiones válidas universales para toda la población de estudiantes, se han utilizado varias muestras intencionales y un procedimiento complejo de acercamiento al fenómeno en estudio. A pesar de las limitaciones que se analizan en el apartado 8.6 del presente capítulo, conjeturamos que los resultados obtenidos pueden ser similares en estudios con muestras equivalentes más amplias y en otros Centros y Universidades, lo que aportaría, además, indicios de validez concurrente. Con independencia de la eficacia y fiabilidad del procedimiento, el estudio aporta un marco teórico y metodológico riguroso que puede ser desarrollado para otros conocimientos y en otras condiciones con una eficacia similar a la que se pone de manifiesto en el presente estudio. Dejamos pues abierta esta conjetura plausible para su comprobación en estudios posteriores.

Como se pone de manifiesto a lo largo de la memoria, el proceso seguido presenta sucesivas etapas desarrolladas en dos fases, teórica y empírica. La fase teórica ha requerido de la elaboración de un modelo local específico para el contenido matemático analizado. La elaboración de este modelo local no es caprichosa ni arbitraria, sino que sigue unas pautas bien fundadas en consideraciones epistemológicas y fenomenológicas sobre el conocimiento matemático objeto central de las indagaciones. La fase empírica, de acuerdo con el modelo operativo general, se ha desarrollado en tres partes o aproximaciones tomando como punto de partida el modelo local construido para el estudio de la comprensión de los sistemas de numeración: una primera, de análisis cuantitativo global de respuestas a cuestionarios escritos, una segunda, en la que se realiza una aproximación semiótica tomando como punto de partida las respuestas anteriores, y una tercera, de profundización, en la que se desarrolla un programa de entrevistas con análisis de tareas. Cada una de las tres etapas descritas constituye una aproximación necesaria para completar la información sobre el problema en estudio.

En el presente capítulo nos disponemos a presentar una breve y completa revisión del estudio realizado, en la que dedicaremos atención a los siguientes aspectos:

* Un resumen global de la investigación, situando convenientemente los elementos fundamentales como son: el objetivo general, los objetivos específicos, las hipótesis, la metodología utilizada y las conclusiones dentro de un marco global.

* Una síntesis de los resultados y conclusiones más relevantes que se han obtenido en los estudios teóricos y empíricos realizados en las diferentes partes del trabajo.

* Una revisión sobre la verificación de las hipótesis y su incidencia sobre la consecución de los objetivos marcados en la investigación.

* Un breve análisis de las consecuencias del estudio con especial atención a las implicaciones de la investigación para el diseño y desarrollo de la asignatura Didáctica de la Aritmética.

* Unas indicaciones acerca de las principales limitaciones del estudio realizado.

* Algunas consideraciones sobre los principales temas que han quedado abiertos así como sobre las perspectivas futuras.

* Algunos propósitos sobre la continuación de la investigación presentada y las líneas de investigación abiertas para el futuro.

8.2 Descripción general del proceso de la investigación

La investigación se puede situar en el campo de los estudios del grupo de investigación en Didáctica de la Matemática conocido como Pensamiento Numérico y más concretamente, en el ámbito de la línea de investigación Diagnóstico e Interpretación de la Comprensión del Conocimiento Matemático. La meta principal del estudio ha consistido en diagnosticar, interpretar y valorar la comprensión sobre los sistemas de numeración que manifiestan los alumnos que inician el grado de Maestro en Educación Primaria, para lo que hemos construido un modelo local, concreción del modelo operativo global de la línea de investigación, que ha permitido construir e implementar instrumentos de recogida de datos que se han utilizado en sucesivas aproximaciones al fenómeno para mejorar la interpretación y valoración de la comprensión de este conocimiento.

En los capítulos 2 y 3 se presentan los resultados de un estudio de antecedentes sobre los sistemas de numeración así como del análisis didáctico de dichos antecedentes (González, 1998, Gallardo y González, 2006) como instrumento metodológico específico para la investigación en Educación Matemática. En dicho análisis se han tenido en cuenta las dimensiones histórica, epistemológica, matemática y curricular del conocimiento matemático en estudio, con lo que ha sido posible orientar la categorización en la dimensión fenómeno-epistemológica de nuestro modelo local y la selección de las situaciones y tareas que se han tenido en cuenta para la construcción de los instrumentos utilizados. Al mismo tiempo, se ha realizado un estudio de antecedentes sobre la comprensión del conocimiento matemático, tanto de los que se tuvieron en cuenta para la configuración del modelo general (Gallardo J. y González J. L., 2012), como de los que han surgido con posterioridad como consecuencia de la aplicación del propio modelo y que hemos adoptado como referente para nuestro estudio.

Son de destacar, entre otros, los estudios sobre la comprensión de conocimientos matemáticos específicos (apartado 3.2.4), en particular los correspondientes a la comprensión de los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales en estudiantes de magisterio (Salinas, M. J. 2003a), los estudios sobre comprensión del concepto de variable y sus diferentes usos (Ursini, S. y Trigueros, M., 1996, 1997), los relativos a la comprensión del concepto de fracción (Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. 2007, 2008a) y, sobre todo, las investigaciones sobre el algoritmo escrito para la multiplicación de números naturales (Gallardo, J. y González, J. L., 2002, 2004, 2005b, 2007b), por constituir el referente fundamental del que surge el modelo operativo inicial para la interpretación de la comprensión en matemáticas. Desde un enfoque más específico, se han tenido en cuenta los estudios sobre la comprensión de los sistemas de numeración (Salinas, M. J., 2003b, 2007) y la memoria de tercer ciclo del autor de la tesis doctoral (Ortiz, A. L., 1998).

Con las referencias anteriores y con las conclusiones obtenidas del análisis didáctico, hemos definido nuestro modelo local para la comprensión de los sistemas de numeración, cuyo proceso de construcción así como el de los instrumentos generados a partir del mismo se presentan con detalle en el capítulo 4 de la memoria. El modelo se caracteriza por una doble dimensión fenomenológica y epistemológica que ha permitido delimitar 24 categorías de situaciones, identificar y organizar las tareas idóneas para caracterizar el uso que hacen los estudiantes del conocimiento en su actividad matemática y elaborar instrumentos propicios para registrar dicha actividad matemática (tres cuestionarios (PCN1, PCN2 y PCN3) y un protocolo de entrevistas).

A partir del modelo local y la construcción del primero de los instrumentos de recogida de datos se procedió al desarrollo de las fases empíricas de la investigación que se describen en el capítulo 5. El primer estudio empírico ha constituido una primera aproximación de la que se ha obtenido una distribución de respuestas en niveles de comprensión. En dicho estudio se han apreciado coincidencias en los resultados de la aplicación de los dos primeros cuestionarios a dos muestras equivalentes, constatándose que la mayoría de los alumnos responden dentro del nivel técnico de comprensión, caracterizado por una *formación técnica, memorística, basada en fórmulas y procedimientos aprendidos y una comprensión limitada y de bajo nivel sobre la representación usual para los números naturales y sus aplicaciones en los ámbitos fenomenológicos correspondientes*. Asimismo, se han observado diferencias significativas entre las respuestas a los dos primeros cuestionarios mencionados anteriormente y las correspondientes a un tercer cuestionario aplicado a una muestra de alumnos que previamente habían cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética. Las respuestas de los alumnos que han cursado dicha asignatura se sitúan mayoritariamente entre los niveles de análisis y síntesis I, lo que nos permite asegurar la existencia del efecto positivo que esta asignatura ha provocado sobre la comprensión de los sistemas de numeración.

Con la primera aproximación se obtiene una información de patrones y comportamientos generales que se completan con una información más fina resultante de los análisis semiótico y hermenéutico que se describen en los capítulos 6 y 7 de la memoria. Así, en el capítulo 6 se presenta un análisis puntual realizado sobre las respuestas escritas a las tareas de los tres cuestionarios, realizando una descripción ejemplificada extensa de los errores cometidos y las estrategias utilizadas en las tareas y grupos de tareas de las tres pruebas escritas (segunda aproximación). En dicho análisis se revisan y categorizan los usos y rastros de comprensión identificados en las respuestas y se presentan las principales conclusiones que se deducen del estudio cualitativo realizado. Los errores y las estrategias encontradas constituyen una información básica para guiar el proceso de las entrevistas individuales que se presenta en el capítulo 7 (tercera aproximación), en el que se completa el análisis semiótico y hermenéutico con el estudio de las respuestas a entrevistas semiestructuradas con interacción entre el entrevistado y el entrevistador. Las entrevistas se realizan a una muestra reducida de sujetos con el propósito de profundizar en el estudio individualizado de cada uno de ellos, reconocer los usos detectados en los estudios anteriores, identificar perfiles de alumnos contemplados en los estudios anteriores, profundizar en las facetas menos evidentes y más ocultas de la comprensión e involucrar a los sujetos en la interpretación de su propia comprensión.

8.3 Elementos básicos

*1.- **El objetivo general***, a cuya consecución se ha dedicado toda la investigación, está definido a través de los fines establecidos en el apartado 1.4.1 del capítulo 1 de esta memoria, que son:

- Completar y someter a prueba el modelo operativo para el diagnóstico e interpretación de la comprensión del conocimiento matemático con el propósito de avanzar en las experiencias, los conocimientos y los planteamientos teóricos de la línea de investigación.
- Averiguar la comprensión que manifiestan, los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan los estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria sobre los sistemas de numeración en general y, en particular, sobre el sistema de numeración usual para los números naturales, con el propósito de extraer consecuencias fundadas para orientar el diseño de esa parte específica de la formación inicial.

Para la consecución de este propósito central, se han establecido los siguientes:

*2.- **Objetivos específicos*** (aptdo. 1.4.2, cap. 1):

O1. Ampliar los conocimientos sobre la línea de investigación "diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático" confirmando la operatividad del modelo general, actualizando sus planteamientos teóricos y empíricos y aportando nuevos elementos al modelo.

O2. Utilizar el nuevo marco teórico y el nuevo modelo operativo sobre la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático para su aplicación al estudio de la comprensión de los sistemas de numeración usuales para la representación del número natural y construir para ello un modelo local coherente y operativo. En particular se pretende:

O2.1. Revisar y estudiar el campo y las áreas de conocimiento en torno a la comprensión de los sistemas de numeración del número natural.

O2.2. Describir y organizar los fenómenos y las situaciones en las que los sistemas de numeración participan y los hacen significativos, proponiendo un modelo local que describa la estructura fenomenológica del campo en estudio.

O2.3. Utilizar la estructura epistemológica general de los sistemas de numeración para definir niveles epistemológicos adecuados para describir la comprensión que manifiestan los sujetos sobre dichos conocimientos.

O3. Efectuar una aproximación al estado de la comprensión y el dominio de los sistemas de numeración de los alumnos futuros maestros del nuevo Grado de Primaria mediante:

O3.1 La construcción de instrumentos válidos para la recogida de datos ajustados al modelo local para la interpretación de la comprensión de los sistemas de representación de los números naturales.

O3.2 El análisis descriptivo de las respuestas de los sujetos a los instrumentos de recogida de datos y la valoración global absoluta y relativa de la situación en la que se encuentran los individuos de las muestras utilizadas.

O3.3 La determinación y el análisis de los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan.

O3.4 La delimitación de trazos y perfiles de comprensión atendiendo a la estructura del modelo local y a los niveles de comprensión definidos.

Y se ha señalado, de manera adicional, el siguiente:

*3.- **Objetivo complementario*** (aptdo. 1.4.1, cap. 1):

O4. Extraer consecuencias fundadas para orientar algunos aspectos de la formación específica sobre el contenido matemático en estudio y modificar el diseño de la asignatura "Didáctica de la Aritmética" en términos de contenidos, metodología, recursos, material didáctico y tipos de actividades adecuados para optimizar dicha formación.

Para la consecución de los objetivos mencionados se han sometido a prueba las siguientes:

*4.- **Hipótesis/conjeturas*** (aptdo. 1.4.3, cap. 1)

H1. El modelo general para el estudio e interpretación de la comprensión del conocimiento matemático resulta útil y operativo para el caso de la comprensión del sistema de numeración usual para los números naturales en estudiantes de los nuevos estudios del Grado de maestro en Educación Primaria.

H1.1. A partir del modelo operativo general, es posible construir un modelo local que permite valorar la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes que inician los estudios del grado de Maestro en Educación Primaria.

H1.2. Es posible construir instrumentos válidos y fiables para averiguar, al amparo de dicho modelo local, la situación relativa de la comprensión en los sujetos de la población indicada.

H2. Los estudiantes de Magisterio comienzan sus estudios profesionales con una formación técnica, memorística, basada en fórmulas y procedimientos aprendidos y una comprensión limitada y de bajo nivel sobre el sistema de representación usual de los números naturales y sus aplicaciones en los ámbitos fenomenológicos correspondientes.

H3. Los alumnos futuros maestros de Primaria manifiestan dificultades, cometen errores y utilizan estrategias cuyo origen se encuentra en la formación preuniversitaria recibida y que son indicadores de los bajos niveles de comprensión sobre el tema.

H4. Es posible mejorar la comprensión que manifiestan al comenzar sus estudios los estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria sobre el sistema de representación usual de los números naturales mediante procesos de reeducación y reconstrucción caracterizados por nuevas formas de ver y tratar los conocimientos.

Para contrastar las hipótesis anteriores se han utilizado las siguientes:

*5.- **Técnicas metodológicas*** (aptdo. 1.5, cap. 1)

5.1. Estudios teóricos y metodologías no empíricas descritos en el apartado 1.5.1 del capítulo 1 y desarrollados en los capítulos 2, 3 y 4, con las siguientes fases:

- Análisis Didáctico de los antecedentes (capítulos 2 y 3).

- Revisión y estructuración matemática elemental de los Sistemas de Numeración (capítulo 2).
- Análisis Didáctico Curricular del contenido matemático elemental en Educación Primaria y en la formación de los futuros maestros (capítulo 2).
- Análisis estructural y conceptual del modelo general de interpretación de la comprensión del conocimiento matemático. Delimitación de las dimensiones cognitiva, semiótica y hermenéutica y adaptación al caso específico (capítulo 3 y 4).
- Estudio Fenomenológico y Epistemológico de los sistemas de representación de los números naturales. Determinación de las categorías de tareas y situaciones y del universo de tareas y situaciones (capítulo 4).
- Reflexión epistemológica y análisis semiótico de respuestas. Actualización de la estructura y componentes del modelo general; concepto de comprensión y de vector de comprensión (capítulos 4).
- Adaptación al problema específico. Construcción de un modelo local (capítulo 4).
- Construcción de los instrumentos de observación y recogida de datos (tareas, pruebas, situaciones y protocolos) (capítulo 4).

5.2. Estudios y metodologías empíricas descritos en el apartado 1.5.2 del primer capítulo y desarrollados en los capítulos 5, 6 y 7 de la memoria, con las siguientes componentes fundamentales:

- Estudios empíricos cuantitativos: análisis descriptivo global, puntual y comparativo de respuestas de las tres pruebas escritas (Capítulo 5).
- Estudios empíricos cualitativos:
  - Análisis cualitativo de las respuestas a las pruebas escritas (primera aproximación al análisis semiótico y hermenéutico): análisis de errores y estrategias, rastros de comprensión y usos del conocimiento (Capitulo 6).
  - Análisis semióticos y hermenéuticos de las entrevistas semiestructuradas: análisis de estrategias y errores, rastros de comprensión, usos del conocimiento matemático, intervención de los sujetos en el propio proceso de valoración y la búsqueda del consentimiento del sujeto (Capítulo 7).

5.3. Estudios de validez y fiabilidad de los instrumentos (Validez interna y externa y validez de constructo): índices de facilidad/dificultad, índices de discriminación, coeficientes de homogeneidad total y parcial ítems-total. Otros estudios estadísticos: correlaciones entre muestras, contrates de hipótesis (Capítulo 5).

Y la investigación se ha desarrollado de acuerdo con:

*6.- **El proceso*** cuyas fases se describen en el apartado 1.5.3 y en la *Tabla 1.1* del capitulo1 mediante la combinación de estudios de naturaleza teóricos (T1, T2 y T3, desarrollados en los capítulos 2, 3 y 4) y estudios de naturaleza empírico (E1, E2, E3, E4 y E5, desarrollados en los capítulos 5, 6 y 7).

Para alcanzar los siguientes

7.- Logros y hallazgos:

7.1.-Contrastar las hipótesis y alcanzar los objetivos marcados, aspectos fundamentales de los logros alcanzados que se describen con detalle en el apartado 8.5 del presente capítulo al que nos remitimos.

7.2.-Comprobar la eficacia del análisis didáctico como marco metodológico útil para fundamentar la investigación en Educación Matemática.

7.3.-Aportar datos relevantes en favor del marco teórico elegido y poner en evidencia la eficacia y utilidad del modelo operativo general para el diagnóstico y la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático.

7.4.-Delimitar con precisión un modelo local general y su adaptación al caso particular analizado y construir unos instrumentos para el estudio de la comprensión de los sistemas de numeración.

7.5.-Abrir nuevas perspectivas en torno a las relaciones entre los estudios sobre la formación de Maestros y Profesores de Matemáticas y las investigaciones sobre comprensión del conocimiento matemático.

8.4 Principales resultados y conclusiones

La confirmación de las hipótesis para alcanzar los objetivos propuestos ha requerido de un largo proceso que ha tenido lugar en varias etapas y que se ha materializado en las consideraciones que se exponen en los capítulos 3, 4, 5, 6 y 7 de la tesis. Los principales resultados y conclusiones que se han obtenido en cada una de dichas etapas se exponen a continuación.

8.4.1 Análisis Didáctico de antecedentes

Se incluyen a continuación, en varios apartados, algunos de los principales resultados y conclusiones constatados en la revisión y análisis didáctico de los antecedentes.

8.4.1.1 Análisis histórico y epistemológico de los sistemas de numeración

✓ Se han constatado las semejanzas y diferencias entre los distintos sistemas de numeración para los números naturales utilizados por las civilizaciones más avanzadas en la historia de la humanidad y se ha aceptado como útil y pertinente su organización en tres grandes categorías: sistemas aditivos, sistemas híbridos o multiplicativos y sistemas posicionales.

✓ Se han descrito diferencias dentro de cada una de las categorías anteriores, lo que supone distinguir subcategorías dentro de ellas y diferenciar las propiedades que caracterizan a cada uno de nuestros sistemas de numeración.

✓ Los diferentes principios y propiedades que caracterizan a los sistemas de numeración usuales, fundamentalmente el decimal, el sexagesimal y el sistema verbal, nos ha permitido "comprender" las dificultades de las traducciones entre ellos.

✓ Estas dificultades y las situaciones habituales de traducción que se realizan entre estos sistemas nos han inducido a incluir entre las categorías fenomenológicas de nuestro modelo local las situaciones de traducción entre distintos sistemas de numeración.

De los análisis sobre los sistemas de representación resaltamos los siguientes resultados y conclusiones:

✓ La importancia de los sistemas de representación en el aprendizaje de los conocimientos matemáticos y afirmaciones como las de Peirce (citado en Bravari, 2006) ratifican que la realidad, el pensamiento y el entendimiento no ocurren sin mediación de los signos. Es más, no hay acción si no ha sido mediada por signos ni, en consecuencia, por el pensamiento.

✓ No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Es por tanto prioritario, el uso de distintas representaciones que resalten las diferentes facetas del conocimiento matemático y permitan el necesario distanciamiento entre el propio objeto y sus distintas representaciones.

✓ Como consecuencia de lo anterior se ha puesto de manifiesto en el estudio la necesidad de integración de las funciones de trasformación y traducción entre todas las posibles representaciones simbólicas, graficas e icónicas de los números naturales.

8.4.1.2 Análisis curricular del contenido

De los análisis curriculares y de libros de texto realizados sobre los sistemas de numeración como contenidos nucleares en los currículos de las enseñanzas de Primaria, Secundaria y en la formación de los futuros maestros, podemos destacar:

✓ La orientación fundamentalmente técnica e instrumental en la Educación Primaria.

✓ La ausencia de los sistemas de numeración en los currículos de Educación Secundaria y Bachillerato, salvo alguna presencia puntual entre los contenidos de primero de la ESO.

✓ Presencia mínima de los sistemas de representación distintos al decimal.

✓ La incertidumbre y las imprecisiones existentes en torno al nivel de conocimientos matemáticos que los alumnos futuros Maestros de Primaria deben poseer para abordar una enseñanza de calidad y que se han disipado con el estudio que se presenta.

✓ La incertidumbre y las imprecisiones existentes en torno a las actividades y situaciones relacionadas con los sistemas de numeración adecuadas para comprobar el nivel mencionado en el apartado anterior. La consistencia del modelo local construido en el estudio y la validez de los instrumentos que a partir de él se han diseñado, ponen de manifiesto la robustez y pertinencia de la investigación realizada.

8.4.1.3 Comprensión del conocimiento matemático

De los antecedentes sobre la comprensión del conocimiento matemático, aspecto central en la investigación, asumimos y hacemos nuestros algunos de los resultados y conclusiones que Gallardo (2004) presenta y que exponemos a continuación:

✓ Sobre las manifestaciones externas:

- La comprensión de un individuo sobre un conocimiento matemático puede ser inferida indirectamente a través del análisis de las acciones que lleva a cabo en su intento por resolver tareas problemáticas que requieren el uso de ese conocimiento.

- La formación matemática que posee un sujeto sólo puede ser exhibida mediante las acciones que realiza al tratar con tareas problemáticas.

- Las manifestaciones observables (acciones externas, producción escrita, afirmaciones y explicaciones) se erigen como un medio adecuado, e incluso único, del cual el observador puede extraer información relevante y objetiva sobre el estado de comprensión de los sujetos.

- Las producciones escritas y las explicaciones dadas por los alumnos ante situaciones problemáticas son criterios interpretados por el investigador como indicios de la presencia de comprensión. Existe, sin embargo, una cierta controversia en torno a la relación entre acción y explicación en el proceso de evaluación de los sujetos.

- La capacidad de los alumnos para expresar y explicar los procedimientos empleados en un problema es un criterio importante para evaluar su comprensión, aunque no necesariamente es el más relevante y tampoco debe ser el único a tener en cuenta.

✓ Sobre la elección de situaciones-problema

- La mayoría de los trabajos revisados no justifican adecuadamente la selección de los problemas y tareas a los que se enfrentan los alumnos.

✓ Sobre la necesidad de la fundamentación epistemológica y fenomenológica

- Se echa en falta un mayor número de estudios que establezcan y muestren con detalle las pautas a seguir para la elaboración precisa de análisis de corte epistemológico y fenomenológico como vía de acceso adecuada con la que afrontar la valoración objetiva de la comprensión del conocimiento matemático.

- La determinación del campo de acción del análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático, en sus distintas acepciones, constituye una cuestión abierta no resuelta en investigaciones precedentes.

✓ Sobre la investigación en torno al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático

- En el ámbito concreto de la Educación Matemática, tal vez resulte más apropiado desarrollar marcos teóricos de carácter general sobre la comprensión que sirvan de referencia y guía para el posterior diseño de modelos locales más específicos y operativos desde los que afrontar problemas puntuales de investigación centrados en tópicos matemáticos concretos.

- Creemos necesario que toda aproximación al fenómeno de la comprensión preste atención a los posibles condicionantes externos y los tenga en cuenta de cara a la valoración de la misma. Entre todos ellos, cobran especial importancia las experiencias vividas por el sujeto, constituyéndose de este modo en el principal condicionante de la comprensión.

- La comprensión que un sujeto puede tener de un conocimiento matemático siempre va a estar ligada desde el inicio a las situaciones en las que ese conocimiento interviene.

- En el ámbito de la comprensión resultan especialmente relevantes: la distinción entre lo observable y lo inobservable; la conveniencia de reflexionar sobre la correspondencia existente entre las manifestaciones empíricas mostradas por el sujeto y lo que realmente sucede en el interior de su mente; la importancia del conocimiento matemático y de su uso por parte del individuo en la evaluación; la consideración del análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático como elemento que posibilita la elección de situaciones para la elaboración de instrumentos de observación adecuados.

8.4.2 Estudios y reflexiones de naturaleza teórica

En el capitulo 4 se expone el marco teórico y metodológico de la investigación. Se exponen a continuación los principales resultados y conclusiones de los estudios y reflexiones teóricas desarrolladas, remitiéndonos al mencionado capítulo 4 para una información más detallada:

✓ La propia organización del proceso metodológico (*Figura 4.1*, capítulo 4) constituye, en sí misma, una aportación relevante. En el esquema de la *Figura 4.1*se destacan las relaciones entre los campos científicos que intervienen y las fuentes de información, el modelo general (apartado 4.3, capítulo 4), referencia metodológica central de la investigación, el modelo local para la interpretación y valoración de la comprensión de los sistemas de numeración y los instrumentos de recogidos de datos generados a partir de dicho modelo local.

✓ Del modelo general son de destacar las dos dimensiones sobre las que se sustenta: la primera, fenómeno-epistemológica, que posibilita la identificación y la organización de tareas y la elaboración de instrumentos para registrar la actividad matemática del estudiante, y la segunda, la dimensión hermenéutica que aporta principios centrados en los escenarios básicos de interpretación y un ciclo interpretativo que posibilita acceder a la comprensión de los estudiantes, a través del uso que hacen del conocimiento matemático.

✓ El *modelo local* de la investigación se obtiene mediante un proceso complejo en sucesivas etapas o aproximaciones teórico-empíricas a partir del modelo global de referencia y del modelo inicial de la memoria de tercer ciclo para el estudio de la comprensión de los sistemas de representación numérica escrito y hablado. En los epígrafes 4.5.1.1 y 4.5.1.2 se describen, respectivamente, las categorías epistemológicas y fenomenológicas del *modelo local 1,* cuya estructura se recoge en la *Figura 4.7;* en el epígrafe 4.6.1 se presenta la actualización de este primer modelo que derivará en el *modelo local 2* utilizado como definitivo en la investigación (*Figura 4.9).*

✓ El modelo local de la investigación proporciona la estructura para la selección y organización de las tareas matemáticas y la elaboración de los *instrumentos de recogida de datos* del estudio que se detallan a continuación:

- La *primera prueba escrita de comprensión numérica (PCN1),* descrita en el apartado 4.5.3, está compuesta por 46 ítems organizados y distribuidos en las cuatro categorías epistemológicas señaladas en las *Tablas 4.1, 4.2 y 4.3 y* en las 20 subcategorías definidas en el esquema del modelo local 1 (*Figuras 4.7 y 4.8*). Esta primera prueba se aplicó a la muestra elegida de la población de alumnos que iniciaban sus estudios del Grado de Magisterio en el curso 2011-12.

- La *segunda prueba escrita de comprensión numérica (PCN2),* descrita en el epígrafe 4.6.3, está compuesta por 33 tareas seleccionadas de entre las que componían la primera prueba y para las que se han utilizado como criterios de selección: los índices de dificultad (IF), los índices de discriminación (ID) y los índices de homogeneidad (ρ) así como criterios de optimización (por ejemplo, eliminación de tareas confusas, redundantes o equivalentes). Las tareas seleccionadas se distribuyen entre las categorías definidas por el modelo local 2 (*Figura 4.9*) y se organizan tal y como se recoge en las *Tablas 4.4, 4.5 y 4.6.* Esta segunda prueba se aplicó a una segunda muestra de alumnos, equivalente a la primera, al inicio del segundo curso (aún no habían cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética).

- La *tercera prueba escrita de comprensión numérica (PCN3)* se obtiene mediante un nuevo proceso de selección de tareas a partir de la prueba PCN2 y empleando los mismos criterios utilizados en el proceso anterior. Para ello se vuelve a utilizar el *modelo local 2* (*Figura 4.9*) y una versión equivalente a la PCN2 con 21 ítems cuya estructura se recoge en las *Tablas 4.7, 4.8 y 4.9.* Esta tercera y última prueba escrita se destina a analizar la comprensión que manifiestan los alumnos que ya han cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética sobre los sistemas de representación del número natural y los posibles efectos del proceso didáctico seguido.

- La entrevista al alumnado constituye el último instrumento con el que pretendemos completar la dimensión hermenéutica del modelo de referencia y cerrar el ciclo interpretativo. El modelo de entrevista deriva del *modelo local 2* y de las pruebas escritas realizadas; su estructura (apartado 4.9) es totalmente equivalente a la de las pruebas escritas, con la inclusión de alguna tarea del nivel superior para ser resuelta por alumnado de características similares a los de las muestras de las pruebas escritas y la inclusión en la muestra elegida de algunos alumnos del máster de secundaria con mayor nivel de formación.

8.4.3 Consideraciones metodológicas

Destacamos los siguientes elementos metodológicos:

✓ Se han determinado los instrumentos y los métodos de análisis para organizar la información obtenida a partir de las pruebas de comprensión numérica escritas. El apartado 4.8 y la *Tabla 4.11* recogen los análisis realizados en las tres pruebas PCN1, PCN2 y PCN3.

✓ Para la primera aproximación cognitiva al estudio de la comprensión y dominio de los sistemas de numeración (capítulo 5), objetivo O3 de nuestra investigación, y con el propósito de distribuir las respuestas por niveles de comprensión, podemos señalar las siguientes aportaciones e instrumentos:

- Los vectores de comprensión numérica, definidos en el apartado 4.8.1.1, cuyas componentes responden a los porcentajes de respuesta correctas en las tareas correspondientes a las cuatro categorías epistemológicas definidas.

- La hipótesis de monotonía, por la que suponemos que las componentes de los vectores de comprensión forman una sucesión finita decreciente, al considerar que los alumnos que responden adecuadamente a las tareas de un nivel han completado satisfactoriamente las tareas de los niveles anteriores.

- Los vectores singulares o vectores de comprensión que no cumplen la hipótesis de monotonía.

- Los criterios para la distribución de los alumnos por niveles de comprensión (DNC), en los que se señalan las condiciones de cada uno de los vectores de comprensión para indicar el máximo nivel que el alumno ha superado. Estas condiciones están en función de las respuestas correctas con porcentajes superiores o iguales al 70% a los ítems de ese nivel y anteriores y con porcentajes inferiores al 50% en el resto de niveles. Los cuatro criterios para la distribución por niveles de comprensión se desarrollan en el apartado 4.8.1.2.

- Los criterios para la determinación de vectores singulares que pueden modificar la distribución de alumnos por niveles de comprensión. Hemos considerado tres tipologías de vectores singulares que afectan a la categorización realizada, los vectores singulares de primer orden o por condición1(VSC1), en los que la primera componente es inferior al 70% y algunas de las restantes supera este porcentaje, los VSC2, en los que la primera componente es superior al 70%, la segunda es inferior a este porcentaje y, o bien la tercera o la cuarta es superior al 70%, y los vectores singulares por la tercera condición (VSC3), en los que la tercera componente es inferior al 70% y las demás superan este porcentaje.

8.4.4 Estudio empírico cuantitativo

Del análisis global de las respuestas a los cuestionarios (capítulo 5), podemos destacar los siguientes resultados y conclusiones:

8.4.4.1 Idoneidad del modelo local establecido

✓ Se ha puesto de manifiesto la potencialidad del modelo operativo global de referencia al posibilitar su concreción en el modelo local para la valoración de la comprensión de los sistemas de numeración natural.

✓ El modelo operativo local y la categorización de las tareas y situaciones numéricas se ha demostrado idóneo para diseñar instrumentos adecuados que permiten obtener las respuestas de los alumnos y con ellas acercarnos a la interpretación y valoración de la comprensión que tienen sobre los sistemas de representación del número natural.

✓ Una primera aproximación a la comprensión de los alumnos, mediante un análisis global de las respuestas a los cuestionarios aplicados nos ha permitido conocer, a modo de radiografía general, la situación de los alumnos que inician sus estudios en el Grado de Maestro en Educación Primaria.

8.4.4.2 Consideraciones sobre la aplicación de los cuestionarios

✓ La distribución por niveles de las respuestas a las dos primeras pruebas, aunque con algunos matices de menor entidad, podemos asegurar que presentan características muy similares. Prácticamente, en ambos estudios, el 90% de los alumnos estudiados responde con una comprensión de tipo técnico o instrumental y un pequeño porcentaje cercano al 10% presenta características propias de los niveles superiores;

✓ Del análisis conjunto de las respuestas de los alumnos de primer curso o de segundo curso que no han cursado ninguna asignatura de Matemáticas o Didáctica de la Matemática, podemos concluir que la mayoría de ellos se encuentran entre los niveles de reproducción y en menor porcentaje en el de análisis. Los alumnos que superan dichos niveles, alcanzando el nivel de síntesis, son muy pocos. En consecuencia, los alumnos que inician los estudios del grado de Educación Primaria tienen un conocimiento limitado y eminentemente instrumental de la numeración natural, lo que nos lleva a considerar la necesidad de profundizar en la reconstrucción de estos conocimientos para poder acometer con garantías la formación didáctica de los futuros docentes.

✓ El análisis global realizado de las respuestas a la prueba PCN3 nos indica que la situación de los alumnos que han cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética es significativamente mejor que la de los alumnos de las dos primeras muestras en lo que se refiere al dominio y comprensión de los sistemas de numeración; observamos un aumento de los porcentajes de respuestas correctas en los niveles de análisis y síntesis I, manteniéndose los altos porcentajes en el nivel técnico y los porcentajes casi testimoniales en las tareas del nivel de síntesis II. La mitad de los alumnos se encuentran en los niveles de comprensión superiores, reduciéndose sustancialmente el porcentaje de alumnos que presentaban un conocimiento meramente instrumental. En consecuencia, podemos asegurar que el desarrollo de la asignatura consigue una de las competencias reflejadas en su programa, "Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas y aritméticas)", a pesar de que en la planificación de la asignatura no se tuvieron en cuenta, por razones obvias, los análisis y los resultados que se han ido obteniendo en el desarrollo de este estudio. Esta será una línea que se abre para la continuación de nuestro trabajo de investigación.

✓ En las respuestas a la prueba PCN3 se observa un porcentaje significativo de alumnos que sin resolver las tareas del nivel de análisis, obtienen resultados satisfactorios en las de síntesis I. Interpretamos este hallazgo de la siguiente forma: mientras que la comprensión analítica, esto es el conocer el funcionamiento de la numeración decimal, provoca mejora en la capacidad para trasladar estos conocimientos a otros sistemas isomorfos, el conocimiento directo de técnicas o procedimientos sobre sistemas de numeración posicionales en bases distintas a la decimal, que se han podido producir en el desarrollo de la asignatura de Didáctica de la Aritmética, no tienen por qué traducirse directamente en una mejora de la comprensión analítica de la numeración. Es necesario, por tanto, intentar evitar en el desarrollo futuro de la asignatura que se produzcan aprendizajes de “estrategias y procedimientos” aislados que reproducen un aprendizaje fundamentalmente instrumental sin ninguna relación y que no suponen mejoras en la consecución del sentido numérico perseguido.

8.4.4.3 Consistencia interna de los instrumentos construidos

✓ La similitud entre las respuestas de los alumnos a los dos primeros cuestionarios, que se puede constatar gráficamente, en los contrastes de hipótesis realizados y en el estudio de correlaciones, nos aseguran la fiabilidad y validez del instrumento construido y la robustez del modelo local en el que se apoya, al producirse sobre muestras equivalentes.

✓ Igualmente, los coeficientes de homogeneidad nos muestran la consistencia interna de las pruebas utilizadas, al reflejar la mayor correlación existente entre los resultados obtenidos en cada uno de los ítems y los correspondientes a las categorías epistemológicas en las que los hemos situado.

✓ Los conceptos de vector de comprensión, los criterios para determinación de niveles y los criterios para definir vectores singulares, han resultado adecuados y nos han permitido realizar una primera aproximación a la comprensión de los sistemas de numeración.

8.4.5 Estudio semiótico y hermenéutico I: estrategias y errores en las pruebas escritas

Del estudio semiótico de los ítems que componen las pruebas (capítulo 6), destacamos los siguientes resultados y conclusiones:

8.4.5.1 Estrategias aplicadas

✓ Se han identificado diferentes estrategias de resolución, que hemos organizado siguiendo el modelo local y cuyo resumen se puede contemplar en la *Tabla 6.30*. Las estrategias encontradas son las siguientes:

A. Estrategias relacionadas con las situaciones de representar/traducir.

Estrategias detectadas en los ítems 4.1-2 y 12.1-2 correspondientes a los niveles epistemológico técnico y de análisis y a la categoría fenomenológica asociada a las traducciones entre distintas representaciones numéricas.

ATr.1: Para encontrar el anterior o siguiente a un número en el sistema verbal y con ceros léxicos o semánticos necesitan traducir primero al sistema cifrado posicional.

Estrategias detectadas en los ítems 7.1-2, 9.1-2 y 16 correspondientes al nivel epistemológico de síntesis y a las categorías fenomenológicas asociadas a las traducciones entre distintas representaciones numéricas.

ASr.1: Para expresar la cantidad de unidades en sistemas decimales, se utiliza una expresión polinómica con dos variantes:

- Estrategia adecuada para realizar la traducción en sistemas con bases diferentes a la decimal:

$$5x10^3 +4x10^2 +5x\ 10 +9$$

- Estrategia variante de la anterior en la que se transforma de forma progresiva las unidades de mayor a menor orden; traducción adecuada para sistemas con base diferente a 10 y además variable:

[(5x10 +4)x10) +5]x10 +9

ASr.2: Identificación entre sistemas decimales. Estrategia que denota el reconocimiento de la estructura decimal y por tanto la traducción automática entre ambos sistemas.

B. Estrategias relacionados con las situaciones de cuantificar/contar.

Estrategias detectadas en los ítems 17 y 19 correspondientes al nivel epistemológico de síntesis I y la categoría fenomenológica asociada a la determinación del cardinal de una colección en agrupamientos distintos al decimal.

ASc.1: Resolución gráfica mediante la identificación de los distintos órdenes.

ASc.2: Obtención de los órdenes que componen la cantidad mediante las sucesivas divisiones.

ASc.3: Estrategia que consiste en agotar las unidades de mayor a menor orden, realizando previamente la equivalencia entre cada uno de los distintos órdenes y las unidades.

C. *Estrategias* relacionados con las situaciones de combinar/operar/algoritmos.

Estrategias detectadas en los ítems 13.1-2, 14.1-2, 15.1-2-3, 18.1-2, 20.1-2 y 21.1-2 correspondientes a los niveles epistemológico de análisis y de síntesis, y a la categoría fenomenológica asociada a las operaciones y los algoritmos.

AAop.1: Para justificar la necesidad de "correr un lugar" al multiplicar por las decenas del multiplicador se hace referencia directa o indirecta a la propiedad distributiva.

AAop.2: Para justificar la necesidad de "correr un lugar" al multiplicar por las decenas del multiplicador, se argumenta que como multiplican por decenas el resultado son decenas.

ASop.4: Para expresar el resultado de operaciones en bases distintas a la decimal, se traduce a base 10 y se opera a continuación.

ASop.5: Para expresar el resultado de operaciones en bases distintas a la decimal, en primer lugar se opera en los distintos agrupamientos y posteriormente se traduce o se pasa a base 10.

ASop.6: Para expresar el resultado de operaciones en bases distintas a la decimal se opera en los agrupamientos correspondientes ofreciendo los resultados sin realizar trasferencia entre los distintos órdenes y, por tanto, con cantidades, en algunos de ellos, superiores a la base.

ASop.7: Para expresar el resultado de operaciones en bases distintas a la decimal se opera en los agrupamientos correspondientes ofreciendo los resultados con transferencias de órdenes y expresiones canónicas.

✓ Existen importantes coincidencias en la estructura de las estrategias utilizadas en las dos primeras pruebas, tanto en la tipología como en las frecuencias con que se aplican (*Tablas 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.10, 6.11, 6.14, 6.18, 6.19 y 6.21*). Por el contrario, se aprecian diferencias importantes entre las estrategias utilizadas en las dos primeras y la tercera pruebas, sobre todo entre las estrategias utilizadas por los alumnos al resolver los ítems del nivel de análisis y especialmente en los de síntesis I de las pruebas PCN1 y PCN2 y las utilizadas por los alumnos en las tareas de la prueba PCN3. Se abandonan las estrategias que suponían transformar las expresiones y operar en nuestro sistema para realizar los procedimientos en estas representaciones no decimales Así, como se recoge en las *Tablas 6.22, 6.24 y 6.28*, se aprecia la desaparición de las estrategias ASop.4, ASop.5 y ASop.6 y el incremento sustancial en la ASop.7 en la PCN3.

8.4.5.2 Errores detectados

✓ Hemos detectado un total de 20 errores en las respuestas a las pruebas escritas que hemos distribuido siguiendo el modelo local construido (*Tabla 6.31)*. Se agrupan en los siguientes tipos:

A. Errores relacionados con las situaciones de estructurar/organizar.

Errores detectados en los ítems 8.1-2, 10 y 11 correspondientes al nivel epistemológico de análisis y las categorías fenomenológicas asociadas a la estructura y organización de los conocimientos del propio sistema de numeración.

EAe.1: Confundir el número de órdenes contenidos en un número con las cifras de los órdenes que lo componen.

EAe.2: Problemas para relacionar los distintos órdenes.

EAe.3: Confusión entre el número de órdenes contenidos en un número con el número de unidades que resultan de la siguiente expresión: $c_n \cdot 10^n$, donde c_n es la cifra del orden correspondiente.

B. Errores relacionados con las situaciones de representar/traducir

Errores detectados en los ítems 4.1 - 2 y 12.1 - 2 correspondientes a los niveles epistemológico técnico y de análisis y a la categoría fenomenológica asociada a las traducciones entre distintas representaciones numéricas.

ETr.1: En el caso de cantidades expresadas en el sistema verbal, no se consideran los ceros, tanto léxicos como sintácticos, para el anterior o posterior de un número.

Errores detectados en los ítems 7.1-2, 9.1-2, 16, 18.1-2, 20.1-2 y 21.1-2 correspondientes a los niveles epistemológico de análisis y de síntesis y a la categoría fenomenológica asociada a las traducciones entre distintas representaciones numéricas.

EAr.1: Traducir del verbal al cifrado escribiendo las cifras presentes en la expresión verbal, sin tener en cuenta las necesarias trasformaciones de órdenes. (Se observa aquí que el sistema cifrado es dominado-comprendido en mayor medida que el verbal).

EAr.2: Construir el número mediante la yuxtaposición de las cantidades expresadas en el sistema verbal.

ESr.3: Pretender pasar a base 10 realizando transformaciones erróneas. Es frecuente en este caso multiplicar la cantidad por la base para obtener cantidades en nuestro sistema.

C. Errores relacionados con las situaciones de cuantificar/contar.

Errores detectados en los ítems 17 y 19 correspondientes al nivel epistemológico de síntesis I y a la categoría fenomenológica asociada a la determinación del cardinal de una colección en agrupamientos distintos al decimal.

ESc.1: Cuenta el total de objetos, los agrupa en la base del sistema mediante divisiones, pero repite órdenes.

ESc.2: Error idéntico al anterior, en cuanto a resultados, pero donde se actúa sólo con agrupamientos gráficos, sin realizar operaciones.

ESc.3: No tiene en cuenta la base utilizada, simplemente los cuenta en nuestro sistema.

ESc.4: Obtiene los distintos agrupamientos pero a la hora de expresar el resultado final no se realizan las transferencias de órdenes.

D. Errores relacionados con las situaciones de combinar/operar/algoritmos

Errores detectados en los ítems 13.1-2, 14.1-2, 15.1-2-3, 18.1-2, 20.1-2 y 21.1-2 correspondientes a los niveles epistemológico de análisis y de síntesis y a las categorías fenomenológicas asociadas a los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales.

EAop.1: Aplicaciones mecánicas del algoritmo.

EAop.2: Considera decenas en todas las llevadas.

EAop.3: Intento de justificar la decena que se toma, pero sin entender cómo se devuelve a las decenas del sustraendo.

EAop.4: Aceptación del mecanismo aprendido.

ESop.5: Operan sin tener en cuenta la base del sistema.

ESop.6: Restar siempre del orden mayor el menor, sin atender al papel de minuendo o sustraendo de las cantidades a las que cada una pertenece:

ESop.7: Variante de ESop.5. El sujeto opera en base 10, pero una vez resueltas las operaciones correspondientes realiza un reagrupamiento para evitar que en algunos de los órdenes aparezcan valores superiores a la base.

✓ Hemos constatado que la estructura de errores cometidos en las dos primeras pruebas son coincidentes, tanto en la tipología como en la frecuencia con que se presentan (*Tablas 6.5, 6.9, 6.12, 6.13, 6.15, 6.17, 6.19 y 6.21*). Como ocurría con las estrategias, en la tercera prueba y, fundamentalmente, en las tareas de los niveles de análisis y de síntesis I, se aprecia una sensible reducción de la frecuencia en algunos errores, mientras que otros, incluso, llegan a desaparecer; así sucede con los errores ESop.1 y ESop.5, en los que, según se desprende de los valores recogidos en las *Tablas 6.23, 6.25 y 6.27,* se produce una reducción importante en los porcentajes respecto a su presencia en las dos primeras pruebas. En cuanto al error ESr.3, cuya presencia era significativa en las dos primeras pruebas, desaparece en la prueba PCN3.

8.4.5.3 Análisis conjunto errores-estrategias

✓ La coincidencia de las estructuras de errores y estrategias en las dos primeras pruebas, junto con los resultados del análisis descriptivo realizado, nos permite confirmar, teniendo en cuenta la equivalencia de las muestras correspondientes, la fiabilidad de los instrumentos utilizados para valorar la comprensión sobre los sistemas de numeración.

✓ De los resultados obtenidos podemos considerar que los alumnos que inician los estudios del grado de Maestro en Educación Primaria tienen un conocimiento limitado y eminentemente instrumental de la numeración natural.

✓ La reducción de errores y el aumento de los porcentajes de las estrategias correctas de resolución nos permiten reconocer una mejora sustancial de la comprensión de los alumnos que han cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética respecto a sus compañeros que no la han cursado; dicha mejora se produce en los niveles de análisis y de síntesis I, manteniéndose los niveles de respuestas correctas en el nivel técnico (en un alto porcentaje) y en el de síntesis II.

✓ Los resultados obtenidos en la PCN3 nos animan a seguir trabajando en el diseño de la asignatura Didáctica de la Aritmética con la intención de optimizar el proceso de formación de los futuros maestros. Los resultados de la investigación nos permiten hacer propuestas fundamentadas para la formación matemática y didáctica en este tema, lo que constituye una de las perspectivas que consideraremos en la continuación de nuestro trabajo.

8.4.6 Estudio semiótico y hermenéutico II: entrevistas semiestructuradas

Del análisis de las entrevistas podemos afirmar que se han cumplido las expectativas con las que estas fueron diseñadas. Su carácter cualitativo y más personal nos ha permitido profundizar en la componente hermenéutica del modelo, confirmando los resultados obtenidos en el análisis de los cuestionarios aplicados, discutiendo con los alumnos los usos del conocimiento matemático y compartiendo con ellos algunas de nuestras reflexiones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la numeración natural. Además, podemos añadir las siguientes observaciones:

8.4.6.1 Conclusiones generales

✓ Se ha podido analizar con cierto detalle el proceso de resolución de las tareas propuestas. La riqueza de matices que se obtienen supera con creces el análisis del resultado final de las respuestas escritas a los cuestionarios.

✓ Sin llegar a ser el protocolo de la resolución de problemas que propone Guzmán (1.995), la entrevista se acerca bastante a esta idea y mejora sustancialmente la información que se obtiene de los registros escritos obtenidos en los cuestionarios, pues supone la implicación del propio entrevistador en el proceso de resolución, la emergencia e identificación de rastros de comprensión difusos o insuficientes y de los usos correspondientes del conocimiento matemático con mayor facilidad y nitidez que en las pruebas escritas, profundizar en respuestas incompletas, alentar la continuación de estrategias desechadas, etc.

✓ Las entrevistas han puesto de manifiesto que la formación matemática con la que se inician los estudios de grado es insuficiente para abordar con garantías la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria. La mayoría de los alumnos que inician sus estudios de grado tienen un conocimiento de tipo instrumental, desconocen la organización interna de los sistemas de numeración, no son conscientes de los principios que lo caracterizan ni de las justificaciones de los algoritmos de las operaciones elementales y, por tanto, son incapaces de resolver tareas equivalentes en sistemas con agrupamientos distintos.

✓ Muchos de los alumnos que inician sus estudios universitarios conciben que el aprendizaje matemático se realiza de forma memorística mediante el mero aprendizaje de técnicas y procedimientos. Desmontar estas concepciones es una tarea prioritaria para evitar que este curriculum oculto emerja en sus futuras prácticas escolares. Afirmaciones como: *"esto es así de toda la vida"* del alumno A2-1º, "*Las matemáticas yo no las entiendo, yo las hago*" del alumno A8-1º, o "*es así como se lo enseñaron*"… "*es pura mecánica que te enseñaron en el colegio y no nos paramos a cuestionarnos el porqué de eso*" del alumno A9-º1º, o también, desde nuestro punto de vista más preocupante, la afirmación obtenida en la entrevista A8-2º de un alumno que no ha superado la asignatura Didáctica de la Aritmética "*esto te lo aprendes porque te va a caer en el examen, tu apréndetelo aunque sea de memoria, quítatelo del medio y a otra cosa"*.

✓ Del primer análisis realizado al total de las 21 entrevistas (*Tabla 7.2)* podemos concluir que hemos obtenido una tipología de respuestas coincidentes con las obtenidas en las pruebas escritas. Si dividimos a los alumnos entrevistados en función de si han cursado o no la asignatura Didáctica de la Aritmética encontramos:

- De los 9 alumnos entrevistados que no habían cursado la asignatura, 6 presentan un perfil de comprensión técnico, coincidente en gran medida con los resultados obtenidos en las pruebas escritas.

- De los 8 alumnos entrevistados que habían cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética, 6 presentan mejoras en la comprensión de las tareas relacionadas con los niveles de análisis y síntesis I, tanto estructural como funcional.

✓ Encontramos algunas tareas en las que inicialmente los alumnos responden con errores ya registrados en el capítulo 6 y que modifican posteriormente a lo largo del desarrollo de la entrevista empleando estrategias adecuadas, bien motu proprio o bien por las preguntas del entrevistador, por sus silencios o por cuestionarles sus propias respuestas.

8.4.6.2 Análisis comparativo de algunos resultados

✓ Como se observa en las *Tablas 7.3 a la 7.13*, en las entrevistas hemos constatado la presencia de los mismos errores y las mismas estrategias ya detectados en las pruebas escritas; de hecho, su estudio previo nos ha facilitado la organización del protocolo de las entrevistas. Sin embargo, la posibilidad de profundizar mediante preguntas, observaciones, etc., nos ha permitido superar algunas de las dudas que los registros escritos no habían desvelado. En particular:

- Algunos alumnos que en los cuestionarios cometían el error EAe.1 y que hemos supuesto que no diferenciaban la cifra de un determinado orden de la cantidad de unidades de este orden contenida en el número, hemos podido comprobar que, en algunos casos, se debe a un problema de comunicación, siendo el propio lenguaje utilizado el que produce la confusión. Después de algunas aclaraciones, algunos alumnos resuelven las tareas sin más dificultad (A5-1º, A6-1º).

- En algunos casos, la modificación en las respuestas se ha tenido que atribuir al efecto de aprendizaje (A9-1º (R3 tarea 12), A6-2º (R2 final entrevista)); sin embargo, ha habido un número importante de alumnos que han respondido de forma invariable cometiendo el mismo tipo de error o modificándolo pero sin posibilidad de contestar de forma adecuada o sin entrar ni siquiera a resolver la tarea planteada, a pesar de las explicaciones, las preguntas y las orientaciones que se les ofrecían. De ello se deduce una cierta incapacidad para responder y se explican los altos porcentajes de SR observados en los tres cuestionarios escritos, en particular en los ítems pertenecientes a los niveles de síntesis.

- Algunos alumnos, que contestaban inicialmente a las cuestiones planteadas sobre los algoritmos de las operaciones elementales con respuestas que suponían errores del tipo EAop.1 o EAop.4, han conseguido finalmente explicar el proceso de las llevadas, sobre todo en el caso de la adición o de la multiplicación. Por el contrario, esto no ha ocurrido en el caso de la sustracción y tampoco para justificar la colocación de las sumas parciales en el algoritmo de la multiplicación, lo que sin duda supone reconocer el mayor nivel de dificultad del aprendizaje significativo de la multiplicación y la sustracción frente a la adición.

- Algunos alumnos que han cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética y algunos alumnos del Máster de Secundaria, que tenían problemas para resolver algunas de las tareas del nivel de síntesis I, en concreto las relativas a las sustracciones en base distintas a la decimal, y del nivel síntesis II, como en las que hay que operar en bases indeterminadas, también consiguieron resolverlas a pesar de que en un principio cometían errores o reconocían su incapacidad para realizarlas.

✓ Se aprecian diferencias entre las respuestas de los alumnos de primer curso y las de los que han cursado la asignatura. Así:

- Los alumnos de primero que no han recibido ninguna formación en Matemáticas o en Didáctica de la Matemática en sus estudios de grado, responden siguiendo las pautas generales de las respuestas a los cuestionarios, a pesar de las aclaraciones, las preguntas del entrevistador y la reconsideración de algunas de las respuestas ofrecidas. De las nueve entrevistas realizadas en este sentido, se vuelven a encontrar errores en algunas de las tareas técnicas, dudas en la lectura de números y, sobre todo, en la tarea IO.3, donde tienen dificultades para obtener el anterior y el posterior en el caso de números con ceros léxicos y sintácticos. Estos alumnos muestran y reconocen sus limitaciones en las justificaciones de los procesos realizados en el caso de los algoritmos de las operaciones elementales y tienen dudas y cometen errores relacionados con expresiones numéricas en formatos no habituales; estas consideraciones, que caracterizarían la comprensión analítica funcional de la numeración natural, les impiden trasladarlas y generalizarlas a las tareas con agrupamientos distintos al decimal, donde las expresiones con valores indeterminados suponen un serio obstáculo para resolverlas. De los nueve alumnos de primero entrevistados, siete responden de forma que podemos situarlos en el nivel técnico, uno en el nivel de síntesis I y tan sólo una alumna que supera el nivel de síntesis II.

- Los alumnos de 2º demuestran un conocimiento analítico mayoritario y se aprecia en las respuestas ofrecidas la soltura y claridad con la que justifican los pasos que se dan para resolver los algoritmos de las operaciones elementales y su capacidad para considerar y traducir a nuestro sistema expresiones numéricas no habituales de tipo multiplicativo. Es evidente que el desarrollo de la asignatura Didáctica de la Aritmética ha contribuido a ello de forma significativa. En particular, se observan avances en las tareas con agrupamientos distintos al decimal y se aprecian mejoras sustanciales en las tareas con agrupamientos indeterminados, por lo que los resultados obtenidos son sensiblemente mejores que los de las pruebas escritas, así, encontramos a un alumno que se mantiene en el nivel de reproducción, una alumna que podemos situar en el nivel de análisis, 3 en el de síntesis I y 4 en el de síntesis II; como es evidente, se trata de situaciones más avanzadas que en los casos del punto anterior.

✓ Se constatan las dificultades que tienen los alumnos que inician sus estudios de Maestro para operar con expresiones algebraicas y utilizarlas como instrumentos para resolver problemas, lo que denota un conocimiento muy limitado de las matemáticas estudiadas en Secundaria y Bachillerato. Los alumnos están habituados, en el mejor de los casos, a resolver ecuaciones, operar con polinomios, etc., lo que confirma que poseen un conocimiento eminentemente instrumental.

8.4.6.3 Entrevistas a alumnos del Máster de Profesorado de Secundaria y Bachillerato

✓ Podemos afirmar que el modelo local adoptado y los instrumentos desarrollados a partir de él son válidos para conocer el nivel de comprensión de los sistemas de numeración en personas que tienen una mayor formación matemática. En este caso, hemos completado el instrumento con cuestiones de los niveles síntesis II y formal que no han sido consideradas previamente debido a la presumible situación limitada de los conocimientos y capacidades de los alumnos que han sido el objeto central de la investigación.

✓ Se aprecian diferencias entre las respuestas de los alumnos del grado de Educación Primaria y la de los alumnos del Máster de Secundaria; los cuatro alumnos del Máster de Secundaria resuelven las tareas de manera que podemos asegurar que se encuentran al menos en el nivel síntesis II, a pesar de lo cual aparecen algunos errores que son inmediatamente subsanados ante las preguntas realizadas por el entrevistador.

✓ También se aprecian diferencias entre las respuestas del alumnado de este grupo, tanto en el tipo de respuestas como en los argumentos que ofrecen. Sorprende la reacción de algunos ante la solicitud de justificación de respuesta; la formación "técnica" que reciben los ingenieros, entendemos que condiciona su visión funcional e instrumental de la Matemática.

8.4.6.4 Conclusiones sobre algunas tareas puntuales

✓ Se aprecian diferencias significativas entre la comprensión analítica del algoritmo de la adición y el de la sustracción; diferencias que se manifiestan en las respuestas a las tareas IIIA.18 y III.II.24, en las que reconstruyen las estrategias utilizadas para resolver las situaciones de sumar y en cambio tienen dificultades para resolver los incrementos solicitados en ellas.

✓ Las dificultades que los alumnos tienen para justificar el algoritmo de la sustracción, añadida a los problemas para realizar transferencias inversas entre distintos órdenes, ponen de manifiesto la necesidad de atender e insistir en la visualización de las propiedades que caracterizan a los sistemas de numeración posicionales y, por tanto, procurar que los futuros docentes tengan al menos un conocimiento analítico de los sistemas de numeración a través de tareas funcionales y no sólo instrumentales.

✓ La tarea IIIC.26 permite discriminar a los alumnos que tienen superado el nivel de síntesis II de aquéllos que están transitando por él o están en niveles inferiores. Todos los alumnos del Máster de Secundaria y un alumno de segundo curso del grado de Educación Primaria han resuelto esta tarea, mientras que el resto de alumnos encuentran dificultades al confundir los puntos suspensivos como elementos a contabilizar. Entre las estrategias utilizadas hemos encontrado por una parte la gráfica, adaptación de la ASc.1, y la algebraica, que también se puede considerar como una ampliación de la ASc.3.

8.5 Logros y hallazgos. Validación/verificación de hipótesis/conjeturas y consecución de fines y objetivos

Como se pone de manifiesto a lo largo del presente apartado, en esta investigación se han conseguido logros y aportado argumentos en favor de la bondad de las hipótesis sometidas a prueba, de lo que se deduce la consecución de los objetivos planteados. Veamos en lo que sigue una revisión del proceso seguido en términos de los logros y hallazgos mencionados.

8.5.1 Validación/verificación de hipótesis/conjeturas

En lo relativo a nuestras primeras hipótesis (H1, H1.1 y H1.2), las dimensiones fenómeno-epistemológica del modelo operativo general (Gallardo, J. (2004); Gallardo y González, 2005, 2006a, 2006b, 2006c, 2007a, 2007b, 2011; Gallardo, González, y Quispe, 2007, 2008a, 2008b; Gallardo, González y Quintanilla, 2013, 2014), descritas en el capítulo 3, junto con las conclusiones del análisis didáctico de los sistemas de numeración, realizada en el capitulo 2, han permitido generar un modelo local que ha servido para:

- Identificar y organizar las tareas y situaciones relacionadas con los sistemas de numeración; fundamentalmente con los sistemas de numeración decimales usuales.
- Establecer referencias objetivas sobre el uso del conocimiento en la actividad matemática.

Por lo tanto, podemos asegurar la veracidad de la hipótesis **H1**: *El modelo general para el estudio e interpretación de la comprensión del conocimiento matemático resulta útil y operativo para el caso de la comprensión del Sistema de Numeración usual en estudiantes de los nuevos estudios del Grado de maestro en Educación Primaria*, así como la de la hipótesis **H1.1**: *A partir del modelo operativo general, es posible construir un modelo local que nos permite valorar la comprensión de los sistemas de numeración del número natural y aplicarlo al caso de los alumnos que inician los estudios del grado de Maestro en educación Primaria.*

El modelo local descrito en el capitulo 4, resultado tanto de la aplicación de las dimensiones del modelo de referencia como de las conclusiones obtenidas del análisis didáctico realizado en el capítulo 2, nos ha permitido elaborar los instrumentos PCN1, PCN2, PCN3 y un protocolo de entrevista, descritos todos ellos también en el capítulo 4, que aplicados a los alumnos del Grado de Maestro en Educación Primaria, nos ha permitido valorar la comprensión que tienen sobre los sistemas de numeración. La dimensión hermenéutica del modelo de referencia nos ha permitido, a través de las sucesivas aproximaciones que caracterizan al ciclo interpretativo, localizar los rastros de comprensión en las respuestas de los alumnos, tanto en los cuestionarios como en las entrevistas, e interpretar la comprensión que manifiestan a partir de los usos dados a los conocimientos matemáticos, tomando como referencia objetiva el análisis fenómeno-epistemológico del modelo local generado.

Por lo tanto podemos asegurar también que se ha cumplido la hipótesis **H1.2**: *Es posible construir un instrumento válido y fiable para averiguar, al amparo de dicho modelo, la situación relativa de la comprensión en los sujetos de la población indicada*.

En la primera aproximación realizada para describir la comprensión de los alumnos sobre los sistemas de numeración, mediante la descripción de las respuestas a las tareas que componían las pruebas PCN1 y PCN2, se confirma que la mayoría de los estudiantes que inician sus estudios del grado de Educación Primaria se sitúan en el nivel técnico, caracterizado por un conocimiento de naturaleza instrumental, sin la posibilidad de poder justificar las acciones y los procedimientos utilizados y, por tanto, sin la capacidad para trasladar las propiedades y estructura de nuestro sistema de numeración a otros de características equivalentes. La tabla 8.1 recoge los porcentajes por niveles de comprensión que confirman esta hipótesis.

Tabla 8.1. Distribución de alumnos por niveles de comprensión

Nivel	PCN1	PCN2	PCN3
Técnico	84,1%	73 %	40,25%
Análisis	7,2%	11%	18,18%

Síntesis I	2 %	6 %	14,28%
Síntesis II	0 %	1,1%	1,3 %

Estos resultados nos permiten asegurar que se ha cumplido la hipótesis **H2**: *los estudiantes para maestro comienzan sus estudios profesionales con una formación técnica, memorística, basada en fórmulas y procedimientos aprendidos y una comprensión limitada y de bajo nivel sobre la representación usual para los números naturales y sus aplicaciones en los ámbitos fenomenológicos correspondientes.*

Del análisis cualitativo de carácter semiótico realizado en el capítulo 6 se pone de manifiesto la gran variedad de estrategias, situaciones cognitivas y estilos de pensamiento que se dan en torno a un tema tan específico como el de los sistemas de numeración. Esta variedad hace especialmente compleja la interpretación de los comportamientos de cara a la delimitación de la situación específica de la comprensión que manifiesta un sujeto en un momento dado y ante unas tareas determinadas. A pesar de esta compleja labor, los errores detectados, las estrategias utilizadas (en el capítulo 6 se describen hasta un total de 20 errores y hasta 15 estrategias distintas detectadas en el análisis semiótico puntual realizado) y los rastros de comprensión encontrados nos han permitido aproximarnos a los usos del conocimiento que realizan los alumnos y que configuran la comprensión que manifiestan sobre los sistemas de numeración.

Los errores y las estrategias de resolución encontradas, confirman la hipótesis **H3**: *Los alumnos futuros maestros de Primaria manifiestan dificultades, cometen errores y utilizan estrategias cuyo origen se encuentra en dicha formación y que son indicadores de los bajos niveles de comprensión sobre el tema.*

En nuestra tercera aproximación a la valoración del conocimiento sobre los sistemas de numeración, realizada mediante el análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas en las entrevistas (capítulo 7):

- Hemos detectado respuestas coincidentes con las encontradas en el análisis de los cuestionarios.
- Se han aislado estrategias y errores similares a los señalados anteriormente.
- Hemos identificado perfiles de alumnos descritos en el primer análisis global realizado.
- Se ha compartido con los alumnos la reflexión y toma de conciencia de las limitaciones en torno al conocimiento de los sistemas de numeración; son significativas, por una parte, respuestas como: *"así me lo han enseñado o yo hago lo que me dicen que haga* (alumnos A2-1º, A3-1º, A4-1º, A6-1º, A7-1º o A9-1º), y, por otra, aquellas en las que se determinan actitudes hacia el aprendizaje matemático: "*yo estudio para aprobar y una vez aprobado me olvido… (* alumno A8-2º), o "*Las matemáticas yo no las entiendo, yo las hago*" (alumna A8-1º), o también una implicación positiva hacia su proceso de aprendizaje y enseñanza: …"*yo creo que si me hubieran explicado el porqué de algunas cuestiones, me habría sido más fácil entenderlas*" (alumna A9-1º).
- Hemos profundizado y superado algunas de las dudas que los registros escritos no habían desvelado. Así:
    - Algunos de los errores cometidos se deben a una insuficiente comprensión del enunciado de las tareas propuestas; esta circunstancia la hemos detectado fundamentalmente en la tarea IIN8 y IIN11, consideradas equivalentes por muchos alumnos a la IN5. En algunos casos han modificado la respuesta al entender la diferencia entre las dos cuestiones (alumnos A1-s, A2-s y A3-s).

- Algunos alumnos han conseguido resolver las tareas propuestas después de cometer alguno de los errores señalados; por ejemplo, las alumnas A5-1º y A6-1º, que inicialmente resuelven el total de vasos en el agrupamiento 8 operando como en base 10 (error ESop.5), modifican sus respuestas ante nuestras preguntas adoptando la estrategia ASop7. Sin embargo, estas alumnas no consiguieron modificar la estrategia errónea inicial en la tarea correspondiente a la sustracción en agrupamientos distintos al decimal.

- En la *tabla 7.1,* en la que se distribuyen los alumnos por niveles de comprensión, y en las *Tablas 6.22, 6.23, 6.24 y 6.25,* donde se analizan los porcentajes de las estrategias utilizadas y los errores cometidos en las tres pruebas, se observan las diferencias significativas ya mencionadas entre las respuestas de sujetos que han cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética y las de los que no lo han hecho.

Los resultados obtenidos, tanto el modelo local como el diseño de los cuestionarios y los modos de hacer y de actuar de los alumnos, las justificaciones y los argumentos utilizados así como las estrategias y los errores detectados, serán incorporarlos como aspectos novedosos de la componente cognitivo/formativa del análisis didáctico curricular (González y Gallardo, 2013); un análisis que será fundamental para el diseño y desarrollo de la asignatura así como para la programación de las unidades didácticas que deben realizar los alumnos. Es evidente que esto supone una nueva aproximación a la consecución de la componente hermenéutica del modelo, al hacer partícipe a los propios alumnos de los resultados obtenidos y por tanto a la posibilidad de compartir con ellos las hipótesis, conclusiones y dudas sobre sus modos de comprender, contribuyendo con ello a mejorar las relaciones profesor/alumno.

Por lo tanto también podemos asegurar el cumplimiento de la hipótesis **H4**: *Es posible mejorar la comprensión que manifiestan los estudiantes del Grado de Maestro de Primaria al comenzar sus estudios sobre el contenido matemático mencionado mediante una formación básica en Didáctica de la Aritmética en la que se utilizan procesos de reeducación y reconstrucción "ad hoc" caracterizados por nuevas formas de ver y tratar los conocimientos.*

8.5.2 Consecución de objetivos y fines

La comprobación de la plausibilidad o certeza de las hipótesis/conjeturas nos permite asegurar que se han alcanzado los objetivos planteados y los fines de la investigación:

- Se ha confirmado la operatividad del modelo general y ampliado los conocimientos sobre la línea de investigación “diagnóstico, interpretación y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático”, actualizando sus planteamientos teóricos y proponiendo un modelo local operativo para la comprensión de la numeración natural que ha generado a su vez herramientas para llevar a cabo los estudios empíricos. Por todo ello, podemos considerar que hemos cumplido satisfactoriamente tanto el objetivo O1 como el objetivo O2 y los sub-objetivos O2.1, O2.2 y O2.3.

- Los estudios empíricos se han aplicado en los primeros cursos del Grado de Primaria y nos han permitido indagar sobre el estado relativo de la comprensión que manifiestan los alumnos mediante la implementación de los cuestionarios y las entrevistas. Se han obtenido resultados descriptivos globales de las muestras estudiadas y también se han detectado errores y estrategias en la realización de las tareas que nos acercan a la interpretación de la comprensión. Por ello podemos considerar también cumplido el objetivo O3 y los sub-objetivos O3.1, O3.2, O3.3 y O3.4.

- Los resultados obtenidos y el cuerpo de conocimientos generados permitirán optimizar el diseño y desarrollo de la asignatura Didáctica de la Aritmética, con lo que podemos asegurar cumplido de forma suficiente el objetivo O4.

La demostración de las hipótesis y el logro de los objetivos planteados en la investigación nos permite asegurar haber alcanzado los fines que se marcaron al comienzo del proyecto de investigación; en primer lugar hemos completado y sometido a prueba el modelo operativo para el diagnóstico e interpretación de la comprensión del conocimiento matemático, aportando experiencias, conocimientos y planteamientos teóricos de la línea de investigación; en segundo lugar, hemos realizado sucesivas aproximaciones a la comprensión que manifiestan los estudiantes del Grado de Maestro sobre los sistemas de numeración, destacando los errores que comenten y las estrategias y los razonamientos que utilizan, hasta llegar a un nivel de información que consideramos aceptable para una primera indagación que se podrá completar en estudios posteriores.

8.6 Limitaciones de la investigación

Se exponen a continuación algunas de las razones que pueden poner en duda la certeza absoluta de los resultados y conclusiones del estudio y que se pueden considerar como temas de estudio para el futuro. En este sentido, tanto lo que se expone en este apartado como en el siguiente puede ser considerado como limitaciones de la investigación.

✓ Sobre las valoraciones y las interpretaciones:

- La valoración, entendida como interpretación de acciones observables realizadas por otros sujetos, ha de ser necesariamente abierta e incompleta. Abierta porque ninguna cantidad de evidencia podría aportar la certeza suficiente para admitir que no existe otra interpretación distinta e igualmente correcta (Dancy, 1993). Incompleta porque resultaría imposible alcanzar una empatía completa con el otro, según se desprende de la concepción de comprensión de Schank (1988) o de Abel (1964) sobre la operación de la Verstehen.
- La valoración depende, además, del propósito del investigador, del modelo de comprensión adoptado como referencia teórica y de la metodología empleada en las fases empíricas de las investigaciones.
- El enfoque representacionalista plantea el problema fundamental de la viabilidad a la hora de evaluar representaciones privadas que los sujetos construyen en su mente.
- Es más factible y apropiado limitar la evaluación a las manifestaciones externas de la comprensión, dejando a un lado las afirmaciones de carácter interno y las conclusiones referentes a los esquemas utilizados, las relaciones, etc.

✓ Sobre las tareas y los escenarios

- Las tareas utilizadas, aunque elegidas cuidadosamente al amparo de un modelo teórico fundamentado, son una representación del universo de tareas posibles y constituyen un condicionante de primer orden para la interpretación y la valoración, de manera que es aconsejable adoptar una posición prudente y relativa en relación con este aspecto.

- Los escenarios empleados para recabar información de los sujetos son algunos de los posibles escenarios en los que pueden aparecer o se puede suscitar la resolución de tareas y problemas relacionados con los sistemas de numeración. Los utilizados en la investigación que se presenta son escenarios académicos y formales que conceden un status especial a los conocimientos y una motivación extrínseca a las tareas, características un tanto alejadas del carácter funcional del mismo conocimiento en otros escenarios.

✓ Los resultados de los análisis de las entrevistas nos indican la necesidad de completar los niveles epistemológicos del modelo local.

- Es posible realizar una clasificación más fina de las categorías del modelo local y de los tipos de tareas que daría lugar a nuevos cuestionarios y protocolos de entrevistas y a nuevos resultados que habría que contrastar con los obtenidos en el presente estudio. Parece lógico pensar que este nuevo modelo permitiría una aproximación más fina y ajustada al problema de investigación.

✓ El alcance de la investigación es necesariamente limitado. Aunque parece que los resultados pueden ser similares en otros Centros y en otras Universidades, no está claro que el modelo local sea igualmente útil para sujetos con otros niveles de conocimiento o de otras culturas.

✓ El contenido matemático estudiado está relacionado con otros contenidos matemáticos más allá de las operaciones aritméticas elementales, como por ejemplo, la medida de magnitudes o el enfoque algebraico de los patrones y regularidades numéricas y aritméticas. Estas relaciones de carácter secundario con otros conocimientos y campos de la actividad matemática no se ha tenido en cuenta en el estudio y pudiera ser que la comprensión de los sistemas de numeración se viera afectada también por las experiencias y conocimientos en dichos campos.

✓ Es de resaltar la ausencia de estudios experimentales rigurosos sobre el campo específico de la investigación, lo que supone una limitación para el alcance y la relevancia de trabajo. El diseño y la implementación de un programa formativo concreto que tuviera en cuenta y al mismo tiempo pusiera a prueba los resultados obtenidos en el estudio, aportaría mayor validez y credibilidad a la investigación.

8.7 Algunas consecuencias y perspectivas futuras

Además de las consideraciones que se incluyen en el apartado anterior y que orientan posibles estudios de ampliación o mejora del que aquí presentamos, podemos señalar las siguientes consecuencias y perspectivas futuras:

8.7.1 Consecuencias generales

✓ Nuestro modelo local nos ha permitido categorizar las situaciones de numeración mediante la doble dimensión fenómeno-epistemológica, a partir del cual hemos diseñado instrumentos que nos han dado información sobre la comprensión que los alumnos del grado de Primaria tienen de los sistemas de numeración; en esta información obtenida mediante sucesivas aproximaciones, hemos destacado en primer lugar la distribución de los alumnos por niveles de comprensión; distribución de carácter global que nos da una radiografía de la situación en la que se encuentra el alumnado cuando comienzan sus estudios y una vez han cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética. El análisis semiótico de los registros escritos y sobre todo la tercera aproximación que ha supuesto el análisis de las entrevistas realizadas, nos ha permitido comprobar la dificultad para categorizar a cada uno de los alumnos en los niveles concretos de comprensión definidos, dado que sus respuestas, en algunos casos, presentan características asociadas a distintos niveles. A pesar de lo cual hemos encontrado alumnos, que por los rastros de comprensión detectados, las estrategias utilizadas y los errores cometidos, constituyen modelos tipo de algunos de los niveles epistemológicos establecidos. Este es el caso de la alumna A7-1º, que representa con bastante exactitud a un alumno tipo del nivel técnico de comprensión; también, en el otro extremo, podemos situar al alumno A4-s como representante de los alumnos con un dominio de nivel formal. Por todo lo cual, parece que sería posible y deseable establecer dentro de cada uno de los niveles establecidos, subniveles que permitieran afinar más esta categorización.

8.7.2 Implicaciones para el diseño y desarrollo de la asignatura Didáctica de la Aritmética

A pesar de que entre los objetivos de nuestra investigación no se encontraba el de realizar un diseño de la asignatura o de analizar el resultado de su desarrollo práctico, entendemos que un valor fundamental de las investigaciones en Didáctica de la Matemática, debe ser el de tender puentes de forma que los resultados obtenidos trasciendan del ámbito de la investigación y puedan ser aprovechados en la aulas; en el caso de nuestra investigación, las siguientes observaciones aportan indicios para una revisión de la planificación y la docencia en los cursos de formación de Maestros.

- Se aporta un cuerpo teórico alrededor de conceptos fundamentales para las didácticas específicas, su diseño y desarrollo en el aula: conocimiento, representación y comprensión, comprensión y aprendizaje-enseñanza, comprensión y cognición, comprensión y competencias, etc.

- Se aporta un modelo local para la organización de las tareas y situaciones numéricas en su doble dimensión fenomenológica y epistemológica, a la vez que un referente objetivo sobre los usos de los conocimientos numéricos implicados. En cualquier caso se trata de una estructura conceptual y procedimental de primer orden a tener en cuenta en la formación inicial de Maestros.

- Se ofrece un conjunto extenso de tareas y situaciones adecuadas para su incorporación, con las adaptaciones y modificaciones oportunas, a los diseños a realizar en las aulas.

- Se señalan los errores y las estrategias utilizadas en la resolución de tareas usuales, lo que sin duda aportará información relevante para elegir las metodologías didácticas más adecuadas y diseñar los procesos de enseñanza.

- El conocimiento de este cuerpo teórico: modelo, niveles epistemológicos, categorías fenomenológicas, diferentes tareas numéricas, errores y estrategias, distribución en niveles de comprensión, etc., y su tratamiento compartido, total o parcialmente, con los futuros maestros, supone de *forma indirecta* poder realizar lo que en el modelo hemos denominado el "consentimiento con el otro", al compartir con los alumnos los usos dados a los sistemas de numeración y su comparación con la referencia objetiva que el propio modelo aporta.

- Se han obtenido suficientes evidencias de los alumnos de segundo curso que han cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética sobre la necesidad de recoger en su programa y tratar en el aula los análisis tanto de los sistemas de numeración como de las aplicaciones de estos en los distintos fenómenos en los que se presentan. Así por ejemplo:

- A1-2º reconoce que el trabajo realizado en la asignatura con sistemas de numeración en distintas bases le ha permitido entender los procedimientos realizados en los algoritmos de las operaciones elementales (R2, reflexiones asignatura).

- A2-2º considera que la asignatura le ha aportado una mayor comprensión de la numeración que se ha traducido en la adquisición de las claves de los algoritmos de las operaciones elementales. "*Yo creo que ha mejorado (su comprensión respecto de los sistemas de numeración), pues te abre tu mente y percibes aspectos que antes no conocía al igual que nos ha pasado con los algoritmos*" (R2, aportaciones asignatura).

- A3-2º valora lo conseguido en el desarrollo de la asignatura y resalta como muy importante entender todos los procedimientos de los algoritmos y la posibilidad de extrapolar estas ideas a otras situaciones. Destacamos algunos de sus argumentos finales que coinciden con los objetivos de la asignatura y con elementos utilizados en la descripción de los niveles epistemológicos de nuestro modelo local; *"…he utilizado los algoritmos sencillos y me han salido, en el momento que tienes claro lo que tienes que hacer, sabes conectar los algoritmos, <u>los puede extrapolar</u> a estas otras situaciones, una vez que entiendes es mucho más fácil"*(R1, aportaciones asignatura). Y también :*"Y además un descubrimiento fantástico, pues me ayuda con los niños, yo tengo clases con niños por las tardes, y me ayuda porque entiendo lo que estas haciendo, … entender el algoritmo es la clave. En la asignatura hemos analizado el porqué de los algoritmos, en el caso de la multiplicación por ejemplo de donde sale lo del hueco, el cero está ahí; o sea, cuando las cosas las entiendes…"* (R3, aportaciones asignatura).

- A5-2º asegura que la asignatura le ha permitido empezar de cero en la numeración y plantearse que todas las técnicas utilizadas tenían una justificación (R3, aportaciones asignatura).

- A6-2º considera que la asignatura le ha enseñado a pensar y sobre todo a saber el porqué de muchas de las técnicas que aplicaba. Reconoce igualmente el sentido constructivo de la entrevista realizada (R1, R2 aportaciones asignatura).

- Hemos comprobado también la necesidad de contextualizar o materializar las ideas numéricas para posibilitar su reconstrucción y comprensión.

8.7.3 Perspectivas de futuro

Entre las perspectivas de futuro destacamos:

- De los análisis globales realizados se aprecia la necesidad de realizar un estudio puntual y de naturaleza semiótica más profundo que el llevado a cabo que nos permita interpretar y conocer con detalle los tipos de respuestas y los errores y las estrategias utilizadas, lo que sin duda nos conducirá a completar el estado de comprensión de nuestros alumnos y nos permitirá extraer consecuencias para la mejora de del desarrollo de las asignaturas del área de didáctica de la matemática.

- Profundizar en las categorías epistemológicas señaladas y encontrar subcategorías que permitan describir la evolución de unas a otras; lo que nos permitirá avanzar en la elaboración de instrumentos de evaluación más precisos.

- Ampliar el estudio a aspectos de los sistemas de numeración que han quedado al margen de nuestro estudio, como es el caso de la divisibilidad y todos los conceptos relacionados con ella: divisor y múltiplo, números primos y compuestos, descomposición de números compuestos, criterios de divisibilidad, etc.

- Aplicar el modelo de referencia a otros conocimientos matemáticos básicos en la formación de Maestros.

- Comprobar la efectividad de los nuevos tratamientos didácticos que resultan de las conclusiones de los estudios realizados.

- Comprobar la persistencia de los niveles de comprensión a lo largo del desarrollo profesional de los maestros.

Desde el punto de vista de la comprensión, creemos necesario:

- Analizar la estabilidad de las situaciones individuales.
- Indagar en los factores que influyen en el fenómeno de la comprensión.
- Estudiar la evolución mediante casos longitudinales.

Desde el punto de vista de la interpretación de la comprensión

- Indagar en la relevancia del punto de vista del sujeto sobre su propia comprensión, en lo que se conoce como “conformidad con el otro”.

Desde el punto de vista de la investigación en Didáctica de la Matemática parece conveniente:

- La continuación inmediata directa de réplicas del estudio desarrollado sobre otros contenidos matemáticos y didácticos de la formación inicial de Maestros.

- El desarrollo en paralelo de estudios relacionados, como son los estudios experimentales que pongan en cuestión los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Con respecto a la metodología de investigación cabría comprobar en nuevos trabajos si:

- Otras técnicas de recogida de datos, como triangulación, observación participante, . . . aportan información relevante a la ya obtenida.

- Las Pruebas son realmente equivalentes.

- Los resultados son diferentes en muestras distintas no equivalentes y cuál es el tamaño del efecto en cada caso.

- Las tareas y cuestionarios utilizados se pueden mejorar en aras de optimizar la eficacia, validez y fiabilidad de los instrumentos.

Desde el punto de vista didáctico y curricular si:

- Un mayor conocimiento de los distintos aspectos tratados en la investigación, ayudarán a plantear situaciones enfocadas a provocar conflictos y contradicciones que permitan generar discusiones y aprendizajes significativos.

- El análisis didáctico de los sistemas de numeración desde sus dimensiones curricular y para la investigación en Educación Matemática (Gallardo y González, 2013), contribuirán a actualizar los conocimientos, profundizar en los organizadores curriculares, entender las razones de las dificultades y los errores encontrados, analizar las diferentes estrategias utilizadas y diseñar tareas adecuadas para las propuestas didácticas.

- Las orientaciones que se pueden deducir de los comentarios de las entrevistas: …”*yo creo que si hubiera, me hubieran explicado el porqué de algunas cuestiones, me habría sido más fácil entenderlas*” (A9-1º), o “*Yo creo que debería conocerla, pues a la hora de ensenarla sería más fácil”* (A3-1º) o “*las dificultades están en explicar como uno piensa, saber cómo lo haces, entender lo que hay detrás de lo que hacemos” (*A4-s), o de los alumnos de segundo que han cursado la asignatura: “*Yo creo que ha mejorado (su comprensión respecto de los sistemas de numeración), pues te abre tu mente y percibes aspectos que antes no conocía al igual que nos ha pasado con los algoritmos*” (A2-2º), o “*Sobre todo para entender que a los niños les cuesta hacer esas cosas que nos parecen tan fáciles y sobre todo cuando nos plantean estas situaciones que son tan novedosas para nosotros como lo son para ellos las que consideramos básicas*” (A4-2º), o *“… yo sabía la forma automática de restar, pero nunca me habían explicado el porqué y ahora al hacerlo en distintas bases acabo de entenderlo”* (A1-2º)*,* convenientemente tratadas, creemos que pueden compensar la formación insuficiente con la que los alumnos acceden a esta titulación, lo que habría que comprobar en un estudio de tipo experimental que se puede situar en la línea Investigación para la innovación curricular en la acción en el aula de Matemáticas (González y otros, 2014).

¿Comprender?
¿Para qué comprender?
Comprender para ser ciudadanos críticos.
Comprender para ser ciudadanos libres.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABEL, T. (1964). La operación llamada "Verstehen". En I. L. Horowitz (Coord.) *Historia y elementos de la sociología del conocimiento* (pp. 185-196). Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

ABRAIRA, C.F. Y GONZALEZ, M.F. (1995). Reflexiones sobre la formación matemática de los futuros maestros. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado,* num.24, pp.143-160.

AGUILAR, M. y MARTINEZ, J. (1996). Las dificultades del aperendizaje de la numeración en la educación primaria. *Epsilón,* 35, 179-192.

AGUILAR, M. y MARTINEZ, J. **(**1.997)**.** El dominio de la numeración al terminar cada uno de los ciclos de la Educación Primaria. *Números*, 31, 15-31.

ALCALDE, M. (2010). *Importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la Didáctica de la Matemática en las titulaciones de Maestro en la Universitat Jaume I.* Tesis doctoral. Universidad Jaume I.

AINLEY, J. y LOWE, A. (1999). Can written questions differentiate between degrees of understanding? *Mathematics Teacher*, 168, 32-35.

ALFELD, P. (2013). Understanding Mathematics. Recuperado de la página del autor del sitio web The University of Utah : http://www.math.utah.edu/~pa/index.html (Consultado el 8/12/ 2013).

ANTHONY, G. Y KNIGHT, G. (1999). Basic facts: the role of memory and understanding. *The New Zealand Mathematics Magazine*, 36, 3, 28-40.

ARNOLD, W., EYSENCK, H. J. Y MEILI, R. (1979). *Diccionario de Psicología*. Madrid: Ediciones Rioduero.

ALVERMAN, D. (1989). Teacher-student mediation of content area text. *Theory into Practice*. Nº 27, pp. 142-1447.

ANECA (2004). *Libro Blanco. Titulo de Grado en Magisterio*. Volumen 1 y 2. Madrid

AREA, M. (1994) Los medios y materiales impresos en el currículum Cap. 4: *Para una tecnología educativa*. Barcelona: Horsori.

BALL, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers understanding of división. *Jounal for Research in Mathematics Education*, 21(2), pp.132-144.

BALL, D., THAMES, M. H. Y PHELPS, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, vol. 59, núm. 5, pp. 389-407.

BARMBY, P., HARRIES, T., HIGGINS, S., y SUGGATE, J. (2007). How can we assess mathematical understanding? In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 41-48). Seoul, South Korea: PME.

BATURO, A. Y NASON, R. (1996). Student teachers´ subjet matter knowledge within the domain of área measurement. *Educationa Studies in Mathematic*, 31 (3). Pp,235-268.

BEHR, M., LESH, R., POST, T. Y SILVER, E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 92-126). New York: Academic Press.

BENDER, P. (1996). Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concepts. En C. Alsina, J. M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde, y A. Pérez. *8º Congreso*

Internacional de Educación Matemática (ICME). Selección de Conferencias. (pp. 57-74). SAEM Thales: Sevilla, 14-21 julio.

BLANCO, L. (2002). Educación matemática y formación inicial del profesorado de Primaria, Secundaria y Bachillerato. *Revista interuniversitaria de Formación de Profesorado.* Abril, nº 043. Pp. 173-179. Zaragoza, Latinoamericanistas.

BRAVARI, V. (2006) *Abducción colectiva*. II Jornadas Peirce en Argentina. Recuperado del Sitio web del Departamento de Filosofía de la Universidad de Navarra: http://www.unav.es/gep/ArticulosOnLineEspanol.html (Consultado el 2/2/ 2013)

BROMME, R. (1988). Conocimientos profesionales de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, 6(1), pp. 19-29.

BROMME, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topoly of teachers professional knowledge. En R. Biehler, R.W. Sholz, R.Straber y B. Winkelman (Eds.) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Kluver: Dordrecht.

BROWN, T. (1996). Towards a hermeneutical understanding of mathematics and mathematical learning. En P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge: Epistemology mathematical education* (pp. 141-150). London: Routledge Falmer.

BROWN, T. (2001). Mathematics education and language. *Interpreting hermeneutics and post-structuralism*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

BROWN, T. (2008). Making mathematics inclusive: interpreting the meaning of classroom activity. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 23*. Recuperado de http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome23/index.htm

BYERS, V. Y ERLWANGER, S. (1985). Memory in Mathematical Understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 16, pp.259-281.

BYRNES, J. P Y WASIK B. A. (1991). Role of Conceptual Knowledge in Mathematical Procedural Learning. *Developmental Psychology*, 27, 5, 777-786.

CAPELO, A., FERRARI, M. Y PADOVAN G. (1990). *Il Sistemi di Numerazione*. Porgetto strategico del C.N.R. Tecnologie e innovazioni didactiche. Formazione e aggiornamiento in mathematica degli insegnati. Quaderno nº 7.

CARAMUEL, J. (1.989) . *Filosofía de la Matemática (Meditatio Proemialis)*. Ed. Alta Fulla. Barcelona.

CARPENTER, T., FENNEMA, E. Y ROMBERG, T. (1993). *Rational numbers. An integration of research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

CARPENTER, T. Y LEHRER, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.) *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

CARRILLO, J. Y CONTRERAS, L.C. (1993). La identificación de las concepciones del Profesor sobre la matemática y la educación matemática como claves para el diseño de strategies de formación del profesorado. *Actas VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática*. Sevilla.

CARRILLO, J., CLIMENT, N. Y CONTRERAS, L.C. (1.999). The role of profesional knowledge in the gap beyween wishes and practice. *CIEAEM*, 51.

CARVALHO, J.B. (1999). La formación matemática de los futuros profesores: un obstáculo a superar. *Adaxe (Revista de Estudos e Experiencias Educativas)*, 14-15, pp.313-326.

CASTRO, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12- 14 años)* . Tesis doctoral. Universidad de Granada.

CASTRO, E, RICO, L. y CASTRO, E. (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar.* Madrid: Síntesis

CASTRO, E, RICO, L. Y ROMERO, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 1997,15(3), 361-371.

CASTRO, E. Y CASTRO, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

CASTRO-RODRIGUEZ, E., CASTRO, E y TORRALBO, M (2013). El análisis fenomenológico en la formación inicial de maestros. En L. Rico, J.L. Lupiañez y M. Molina (Eds), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular (pp.142-160).* Granada, España: Editorial Comares.

CAVEY, L. O., y BERENSON, S. B. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), pp.171-190.

CIFARELLI (1998). The Development of Mental Representations as a Problem Solving Activity. *Journal of Mathematical Behavior* , 17 (1), pp. 239–263.

CLAROS, F. J., SÁNCHEZ, M. T. Y CORIAT, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA*, 1(3), 125-137.

CLAUSEN-MAY, T. (2000). Understanding Assessment- The Assessment of Understanding. *Mathematics Teacher*, 171, 32-35.

CONRADIE, J. Y FRITH, J. (2000). Comprehension Tests in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 225-235.

CONTRERAS, L.C. Y BLANCO, L. J. (2001). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. *Revista de Educación*, 3, (pp. 211-220). Universidad de Huelva.

CONTRERAS, L. C.; CARRILLO, J.; ZAKARIAN, D.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C.; CLIMENT, N. (2012). Un Estudio Exploratorio sobre las Competencias Numéricas de los Estudiantes para Maestro. *Bolema, Rio Claro (SP)*, v. 26, n. 42B, p. 433-457.

CORIAT, M. Y SCAGLIA, S. (2000). Representación de los números en la recta. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(1), (pp.25-34).

DANCY, J. (1993). Introducción a la epistemología contemporánea. Madrid: Tecnos.

DAVIS, R. B. (1992). Understanding “Understanding”. *Journal of Mathematical Behavior,* 11, pp. 225-241.

DEMAROIS, P. Y TALL, D. (1996). Facets and Layers of the Function Concept. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.) *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 297-304). Valencia, Spain, julio.

DÍAZ-GODINO, J. y BATANERO, C. (1994). Significado Personal e Institucional de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14, 3, pp. 325-355.

DÍAZ GODINO, J. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, 25, 77-87.

DÍAZ GODINO, J. D. (2002a). Competencia y comprensión en matemáticas: ¿qué son y cómo se consiguen? *UNO*, 29, pp.9-19.

DÍAZ GODINO, J. D. (2002b). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), pp. 237-284.

DIAZ GODINO, J. D., BATANERO, C., y FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in Mathematics Education. *The International Journal on Mathematics Education ZDM*, 39(1/2), pp.127-135.

DIRECCIÓN GENERAL DE EVALUACIÓN EDUCATIVA Y FORMACIÓN DEL PROFESORADO (1992). *Orientaciones para la secuenciación de contenidos*. Junta de Andalucía.

DÖRFLER, W. (2006). Inscriptions as objects of mathematical activities. In J. Maasz & W. Schoeglmann (Eds.), *New Mathematics Education research and practice* (pp. 97-111). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

DORSCH, F. (1978). *Diccionario de Psicología*. Barcelona: Herder.

DORSCH, F. (1985). *Diccionario de Psicología*. Barcelona: Herder.

DUBINSKY, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.). *Advance Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Fluwer Academic Publishers.

DUBINSKY, E. y HAREL, G.(1991). The Nature of the Process Conception of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* MAA Notes, 25, Mathematical Association of America, pp. 85-106.

DUBINSKY, E., y MCDONALD, M.A. (2001). APOS: a constructivist theory of learnig in undegraduate mathematics education research. En D. Holton, M. Artigye, U.Kirchgraber, J. Hillel, M. Niss y A. Shoenfeld (Eds.). *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp.275-282). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

DUFFIN, J. y SIMPSON, A. (1997). Towards a new theory of understanding. En E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp.166-173). Lhati, Finland, 14-19 julio.

DUFFIN, J., y SIMPSON, A. (2000). A search for understanding. Journal of Mathematical Behavior, 18(4), pp.415-427.

DUVAL, R. (1993). Semiosis y noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa* (pp. 118-144). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1/2), 103-131.

ECO, U. (1974). *La estructura ausente. Introducción a la semiótic*. Edit. Lumen. Barcelona.

ELL, F. (2006). Can moderate hermeneutics help us to understand learning and teaching in the mathematics classroom? In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 33-40). Prague, Czech Republic: PME.

ENDERSON, M.C. (1995). Assessment practices of three prospective secondary mathematics teachears. Tesis doctoral inédita. Universidad de Georgia, Atenas.

ENGLISH, L. D., y HALFORD, G. S. (1995). *Mathematics Education: models and processes*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

ESCAMILLA, A. Y LAGARES, A. (2006). *La LOE : perspectivas pedagógicas e históricas : glosario de términos esenciales.* Edit. Graó. Barcelona.

ESTEPA, SOCAS, MARTIN, CARRILLO (2011). Seminario “La formación inicial del profesorado de matemáticas ante la implantación de los nuevos grados en Infantil, Primaria y Master de Secundaria”. Disponible en sitio web de la SEIEM: www.seiem.es/congresos/.../ConclusionesPrimaria.pdf (Consultado el 3/2/2013)

FARNHAM-DIGGORY, S. (1994). Paradigms of Knowledge and Instruction. *Review of Educational Research*, 64, 463-477.

FENNEMA, E. Y LOEF, M. (1992). Teacher’ Knowledge and its impact, en Grows D.A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematicis Teaching and Learning*, pp. 147-163. Nueva York: MacMillan.

FERNÁNDEZ, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada, España.

FERNÁNDEZ-CANO, NORTES, GÓMEZ, FONSECA, SÁENZ, CHAMORRO (2005). Conclusiones de la reunión sobre la situación actual y las necesidades en el currículo y en la formación del profesor de matemáticas. En el anexo del Boletin SEIEM-internet. Nº 18. Salamanca/Granada, julio 2005. Disponible en sitio web de la SEIEM: www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/.../Boletin18.pdf. (Consultado el 2/2/2013)

FLORES, P. (1997).- El profesor de matemáticas, un profesional reflexivo. En: Berenguer y otros.- *Investigación en el aula de matemáticas. La tarea docente*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Sociedad Thales. pp. 13-27.

FLORES, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *Actas del VIII Simposio de la SEIEM*. La Laguna (Tenerife).

FLOURNOY, F., BRANDT, D. y MCGREGOR, J. (1963). Pupil understanding of the numeration system. *Aritmetic Teacher*, 10, 88-92.

FONT, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, (pp.1-35).

FONT, V., DIAZ GODINO, J. D. Y D'AMORE, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2): 2-7.

FONT, V., GODINO, J. D. y GALLARDO, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124.

FORNER, A (1993). “Los maestros que vienen” *Cuadernos de pedagogía, 220*.

FORNER, A (1993). “Los futuros maestros” *Cuadernos de pedagogía, 247*

FREEMAN, D. J. y COL. (1983): *Consecuences of Different Styles of Textbook Use in Preparing Students for Standarized Tests.* (Res. Series nº 107). Inst. Res. Teacching Michigan St. Univ.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

FUSON, K.C., y MIERKIEWICZ, D. (1980). *A detailed analysis of the act of counting.* Paper presented at the Annual meeting of the American Educational Research Association. Boston.

FUSON, K.C., RICHARDS, J. y BRIARS, D. (1982). The acquisition and elaboration of the number Word sequence.In C. Brainerd (Ed.), *Progress in cognitive development; children´s logical and mathematical cognition* (Vol.1). New York: Springer-Verlag.

FUSON, K.C. y Hall, J.W. (1983). The acquisition of early number Word meanings: A conceptual analysis and review. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The developement of mathematical thinking*. New York: Academic Press.

FUSON, K.C. (1988). *Children´s counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.

GALLARDO, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Tesis doctoral. Universidad de Málaga.

GALLARDO, J.; GONZÁLEZ, J. L. (2001)). Una aproximación operativa a la comprensión del conocimiento matemático. *Proyecto PB97-1066 "Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático"* subvencionado por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología durante el trienio 1998-2001.

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2002). Multiplicaciones con cifras desconocidas: problemas para practicar y comprender el algoritmo estándar de la multiplicación. *Epsilon*, 54, 469-478. [ISSN: 1131-9321]

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2004). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales [Resumen Tesis Doctoral]. *Boletín de la SEIEM*, 17, 32-33. [ISSN: 1576-5911]

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2005a). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.) *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 197-204). Córdoba: Universidad de Córdoba. [ISBN: 84-7801-782-8]

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2005b). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales [Resumen Tesis Doctoral]. *Enseñanza de las Ciencias*, 23, 2, 294-295. [ISSN: 0212-4521]

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2006a). El Análisis Didáctico como metodología de investigación en Educación Matemática. En P. Bolea, Mª. J. González y M. Moreno, (Eds.) *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 57-77). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses- Universidad de Zaragoza. [ISBN: 84-8127-156-X]

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2006b). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, 26, 2, 10-15. [ISSN: 0228-0671]

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2006c). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA*, 1(1), 21-31. [ISSN: 1886-1350]

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2007a). Fronteras en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática. *Números*, 66. [ISSN: 0212-3096]

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2007b). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: el caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. En E. Castro y J. L. Lupiañez (Eds.) *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico* (pp. 157-184). Granada: Editorial Universidad de Granada. [ISBN: 8433845429]

GALLARDO, J. Y GONZÁLEZ, J. L. (2011). On understanding and interpretation in mathematics: An integrative overview. Philosophy of Mathematics Education Journal.26[ISSN:1465-2978]. Disponible en (http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome26/index.html). [ISSN:1465-2978] (Consultado el 16/10/2014)

GALLARDO, J. Y GONZÁLEZ, J. L. (2011). Comprensión del conocimiento matemático y competencia matemática (En proceso de publicación).

GALLARDO, J., GONZÁLEZ, J. L. y QUISPE, W. (2007). Comprensión del concepto de fracción. Análisis de las interferencias entre significados. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y Mª. T. González (Eds.) *Actas del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Comunicaciones de los Grupos de Investigación* (pp. 207-222). Tenerife: CajaCanarias- SEIEM. [ISBN: 978-84-612-5856-7]

GALLARDO, J., GONZÁLEZ, J. L. y QUISPE, W. (2008a). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 11(3), pp. 355-382.México. [ISSN: 1665-2436]

GALLARDO, J., GONZÁLEZ, J. L. y QUISPE, W. (2008b). Rastros de comprensión en la acción matemática. La dimensión hermenéutica de un modelo operativo para la interpretación en matemáticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.) *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 283-293). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática- SEIEM. [ISBN: 978-84-934488-9-9; ISSN: 1888-0762]

GALLARDO, J., GONZÁLEZ, J. L. y QUINTANILLA, V. A. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matematico: aportes a la interpretacion de la comprension desde el cálculo aritmetico elemental. *Educación Matematica*. Vol. 25, num.2, agosto 2013, pp.61-88. Grupo Santillana México. Distrito Federal, México.

GALLARDO, J., GONZÁLEZ, J. L. y QUINTANILLA, V. A. (2014). Sobre la valoración de la competencia matemática: claves para transitar hacia un enfoque interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias*. [ISSN: 0212-4521(papel); 2174-6486 (en linea)]

GARCÍA, M., ESCUDERO, I., LLINARES, S. Y SÁNCHEZ, V. (1994). Aprender a enseñar matemáticas. Una experiencia en la formación matemática de los profesores de Primaria. *Epsilon*. Nº 30, pp.11-26.

GENOVARD ROSSELLÓ, C. (1980). *Diccionario de Psicología*. Barcelona: Elicien.

GLASERSFELD, E. (1995). *Radical constructivism.* London: Falmer Press.

GIMENO, J.; PÉREZ, A. (1983). *La enseñanza: su teoría y su práctica*. Akal Universitaria. Madrid.

GIMENO SACRISTÁN, J. (1994). Los materiales: Cultura, pedagogía y control. Contradicciones de la democracia cultura. Ponencia presentada en las *IV Jornadas sobre la L.O.G.S.E*. Departamento de Pedagogía: Universidad de Granada.

GOLDIN, G. (1998). Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior* , 17 (1), pp. 137-163.

GOLDIN, G. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. En L. D. English (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

GOLDIN, G. Y KAPUT, J. (1996). A join perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffen, P. Nessher, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* , pp. 397- 430. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Asociates.

GÓMEZ, B. (1989). *Numeración y calculo*. Madrid: Síntesis

GÓMEZ, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra. *UNO*. Julio, 5, 91-101.

GÓMEZ, B. (1996). Desarrollo histórico de la enseñanza de la aritmética. El caso de los algoritmos de cálculo. *Aula*. 50, 11-16.

GÓMEZ, B. (2011). La evolución histórica del calculo aritmético y su enseñanza. *Perspectiva Escolar*, 355, pp. 14-23.

GOMEZ, P y GONZALEZ, M.T (2013). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En L. Rico, J.L. Lupiañez y M. Molina (Eds), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular (pp.122-139).* Granada, España: Editorial Comares.

GONZALEZ, M.T. Y SIERRA, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias,2004, 22(3), 389-408.*

GONZÁLEZ MARÍ, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis doctoral, Universidad de Granada.

GONZÁLEZ, J. L. (1998). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education*, *Vol. 1I* (pp. 245-256). Osnabrück, Germany.

GONZÁLEZ,J.L.(2008).*Competencias básicas y competencias matemáticas específicas*. Cursos CEP's Competencias. Recuperado de http://www.gonzalezmari.es.

GONZALEZ, J.L, RICO, L. y GALLARDO, J. (2009). Diversidad estructural y semiótica en el proceso didáctico de ampliación de los números naturales a los enteros: un estudio sobre comprensión en el campo de la relatividad aditiva. *Revista de Investigación Psicoeducativa*. Vol. 7(1), pp. 21-44. Madrid.

GONZÁLEZ, J.L., ORTIZ, A.L. y GALLARDO, J. (2012). Avances en el estudio de la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria. En A. Estepa y N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XVI Simposio de la SEIEM* (pp.303-316). Baeza, España: SEIEM.

GONZÁLEZ, J.L., ORTIZ, A.L. y GALLARDO, J. (2013). Limitaciones en la comprensión de los sistemas de numeración al inicio de los estudios del grado de Maestro de Educación Primaria. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro (pp. 67-75*). Granada, España: Editorial Comares.

GONZÁLEZ, J.L., ORTIZ, A.L. y GALLARDO, J. (2014). Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los Sistemas de Numeración. *Investigación en Educación Matemática. Pensamiento Numérico y Algebraico. XVII Simposio de la SEIEM Salamanca*. (En proceso de publicación).

GONZÁLEZ, J.L. y GALLARDO, J. (2013). Análisis didáctico curricular: un procedimiento para fundamentar el diseño, el desarrollo y la evaluación de unidades didácticas de matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular (pp.161-189).* Granada, España: Editorial Comares.

GONZÁLEZ, J.L., GALÁN, J.L, RODRIGUEZ, P., PADILLA,Y. y LARRUBIA, J.J. (2014). Investigación para la innovación curricular en la acción en el aula de matemáticas. (En proceso de publicación).

GRAY, E., TALL, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2),

pp.116-140.
GRESALFI, M., MARTIN, T., HAND, V. y GREENO, J. (2009). Constructing competence: an analysis of student participation in the activity systems of mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), pp. 49-70.
GÜEMES, R. (1994). *Libros de texto y desarrollo del currículo en el aula. Un estudio de casos*. Tesis doctoral. Universidad de la Laguna. España.
GUSEV, V. A. Y SAFUANOV, I. S. (2000). Some theoretical problems of the development of mathematical thinking. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3 (pp. 17-24). Hiroshima, Japan, 23-27 julio.
GUITEL, G. (1975). Histoire comparée des numérations écrites. Ed. Flammarion. Paris.
GUTIERREZ, A. y JAIME, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez ; S. Llinares y Mª.V. Sánchez (Eds.), El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática. Granada:Comares.
GUSEV, V. A. Y SAFUANOV, I. S. (2000). Some theoretical problems of the development of mathematical thinking. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 17-24). Hiroshima, Japan, 23-27 julio.
GUZMÁN DE, M. (1995). *Para pensar mejor*. Pirámide. Madrid.
HERSCOVICS, N. y BERGERON, J. (1988). An extended model of understanding. *Proceeding of PME-NA 10* (pp. 15-22). Dekalb, IL: Norhern Illinois University.
HIEBERT, J. y CARPENTER, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.
HIEBERT, J., y LEFEVRE, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
HILL, H.C., BALL, D.L. y SCHILLING, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers topic-specific knowledge of student. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), pp.372-400.
HITT, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemáticas. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática*, pp. 165–178. Universidad de Granada.
IFRAH, G. (1987). *Las cifras. Historia de una gran invención*. Alianza. Madrid
INECSE (2004). *Aprender para el mundo de mañana. Resumen de resultados PISA2003*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
JANVIER, C. (1987). Representation and Understanding: The Notion of Function as an Example. En: Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. (pp. 67-71).
KAPUT, J.J. (1987). Representation systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
KAPUT, J.J. (1989). Linking representation in the symbol system of algebra. En S. Wagner y C. Kieran. (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* , pp. 167- 194. Reston, VA.: NCTM.- Lawrence Erlbaum.
KAPUT, J.J. (1992). Technology and mathematics Education. En D.Grows (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning*. New York: Mac

Millan.
KAPUT, J.J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), 266-281.
KIERAN, C. (1994). Doing and seeing things differently: a 25-year retrospective of mathematics education research on learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 6, pp. 583-607.
KIEREN, T., PIRIE, S., y CALVERT, L. G. (1999). Growing minds, growing mathematical understanding: mathematical understanding, abstraction and interaction. In L. Burton (Ed.), *Learning mathematics: from hierarchies to networks* (pp. 209-231). London: Routledge.
KOYAMA, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, 63-73.
KOYAMA, M. (1997). Research on the complementarity of intuition and logical thinking in the process of understanding mathematics: an examination of the two-axes process model by analyzing an elementary school mathematics class. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 5, 21-33.
KOYAMA, M. (2000). A research on the validity and efectiveness of “two-axes process model” of understanding mathematics at elementary school level. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 159-166). Hiroshima, Japan, 23-27 julio.
LAPAN, G. y S. THEULE-LUBIENSKI (1994). Training Teachers or Educating Professionals? What are the Issues and How Are they deing resolved. En D. Robitaile, D. Wheller y C. Kieran (Eds.) *Selected Lectures fron the 7th International Congress on Mathematical Education*. Sainte.Foy: Les Presses de L´Universite Laval.
LARRUBIA, J.J. (2005). *Modelo didáctico inclusivo para atender a la diversidad sordo-oyentes en el aula ordinaria de matemáticas*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.
LESH, R., POST, T., y BEHR, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier, (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
LESH, R. (1987). The Evolution of Problem Representations in the Presence of Powerful Conceptual Amplifiers In C. Janvier, (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 197-206). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
LLEWELLYN, A. (2012). Unpacking understanding: the (re)search for the Holy Grail of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), pp.385-399.
LLINARES, S. y SÁNCHEZ, V. (1988). *Fracciones*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Síntesis. Madrid.
LLINARES, S. y SÁNCHEZ, V. (1990). Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las Matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor. *Enseñanza. Anuario interuniversitario de Didáctica*, Nº 8, 165-180.
LLINARES, S. y SÁNCHEZ, V. (1991). The knowledge about unity in fraction task of prospective elementary teachers. Furnghetti (Ed.), *Proceedins of 15th PME (vol 2) (pp.181-189). Assisi (Italia).*PME.
LLINARES, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Nº 51, pp. 92-101, abril 2009.

LUPIÁÑEZ, J. L. y RICO, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, Mª. J. González y M. Moreno (Eds.) *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 225-236). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses- Universidad de Zaragoza.

MARTINEZ, R. (1995). *Psicometría: teoría de los tests psicológicos y educativos*. Madrid, España: Síntesis.

MASON, D. E. (1998). Capsule Lessons in Alternative Algorithms for the Classroom. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 91-98). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

MERINO, R. (2005). De la LOGSE a la LOCE. Discursos y estrategias de alumnos y profesores ante la reforma educativa. *Revista de Educación*, núm. 336 (2005), pp. 475-503.

MEC,(2006a). Ley Orgánica de Educación (LOE) (LO 2/2006, de 3 de mayo).

MEC, (2006b). Real Decreto de enseñanzas mínimas de la educación Primaria. (RD 1513/2006 , 7 de diciembre).

MEEL, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 6(3), pp.221-278.

MORGAN, C. (1996). Language and Assessment Issues in Mathematics Education. En A. Gutierrez et al. (Eds.) *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, Valencia, Spain, pp. 19-26.

MORGAN, C. y WATSON, A. (2002). The interpretative nature of teacher's assessment of students' mathematics: Issues for equity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), pp. 78-111.

MORIN, E. (1994). *El Método. El conocimiento del conocimiento*. Madrid: Cátedra. CAPITULO VII: Los dobles juegos del conocimiento (pp.152-166).

NAKAHARA, T. (1994). Study of the representational system in mathematics education. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 59-67.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2001). *The Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NESHER, P. (1986). Are Mathematical Understanding and Algorithmic PerformanceRelated? *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational ResearchAssociation* (67th, San Francisco, CA, April pp.16-20).

NIEMI, D. (1996). Assessing Conceptual Understanding in Mathematics: Representations, Problem Solutions, Justifications, and Explications. *The Journal of Educational Research*, 89, 6, 351-363.

NISS, M. (1999). Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp.1-24.

NISS, M. (Ed.) (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project*. Roskilde, Denmark: Roskilde University.

NISS M. y HØJGAARD, T. (Eds.) (2011).*Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde, Denmark: IMFUFA.

NORTES, A. y MARTINEZ, R. (1992). Actitud, aptitud y rendimiento en Matemáticas:

un estudio en Primero de Magisterio. *Suma*. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de ls Matemáticas, núm.10, pp 36-40.

NUNES, T.; BRYANT, P. (1997). Learning and Teaching Mathematics. *Psychology Press.*

OCDE (2002a): Definition y selection of key competencies (DeSeCo): Executive Summary. Disponible en el sitio web de la OCDE: http://www.oecd.org/fr/edu/apprendre-au-dela-de-lecole/definitionandselectionofcompetenciesdeseco.htm (Consultado 3/10/13)

OCDE (2002b). *Conocimientos y aptitudes para la vida. Primeros resultados PISA 2000.* Madrid. Santillana.

OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: Author.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana*. Madrid. Santillana.

OCDE (2008). *Competencias científicas para el mundo de mañana. PISA 2006.* Madrid. Santillana.

OCDE (2010). *PISA 2009.Programa para la evaluación internacional de los alumnos.* Secretaría General Técnica. Ministerio de Educación. Madrid.

OCDE (2013). *PISA 2012.Programa para la evaluación internacional de los alumnos.* Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Madrid.

ORTIZ, A.L., GONZÁLEZ, J.L. y GALLARDO, J. (2011). Comprensión del sistema de numeración en estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria. En M. Marín, y N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 309-378). Ciudad Real, España: SEIEM.

ORTIZ, A.L.(1999). *Comprensión del Sistema de Numeración Decimal: un análisis de la coordinación entre los sistemas de representación escrito y hablado*. Memoria de Tercer Ciclo. Programa de Doctorado 1996-1998. Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga.

OTALORA, Y y OROZCO, M. (2006). ¿Por qué 7345 se lee como "setenta y tres cuarenta y cinco"? *RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 9(3), pp. 407-433. [ISSN: 1665-2436]

OTTE, M. (2006). Proof and explanation from a semiotic point of view. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 9(4), pp.23-43.

PALAREA, M., HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M. (2001). Análisis del nivel de conocimientos de Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestros. En Socas, Camacho y Morales (Eds.) *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática III.* pp.213-226. "CAMPUS". La Laguna.

PEIRCE, C.S. (1897). En "*Collected Papers of Charles Sanders Peirce" (*CP 2.228)

PEIRCE, C.S. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus.

PEREZ, A. (2007). La naturaleza de las competencias básicas y sus aplicaciones pedagógicas. *Cuadernos de educación de Cantabria.* Consejería de Educación de Cantabria.

PHILIPP, R. A. (1996). Multicultural Mathematics and alternative algorithms. *Teaching Children Mathematics,* 3, noviembre, pp.128-133.

PIRIE, S. (1988). Understanding: Instrumental, Relational, Intuitive, Constructed, Formalised...? How Can We Know? *For the Learning of Mathematics*, 8, 3, 2-6.

PIRIE, S. y KIEREN, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding.

For the Learning of Mathematics, 9, 3, 7-11.

PIRIE, S. y KIEREN, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it ? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.

POPPER, K. (2005). *El mito del marco común*. Barcelona: Paidós.

POST, T.R., ET AL. (1991). Intermediate teachers´ knowledge of rational number concepts. En E. Fennema; T.P. Campenter y S.J. Lamon (Eds.), *Integrating reserch on teaching and learning mathematics.* Albany: State University of New York Press.

PUIG, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 61-94). Barcelona: Horsori.

PUIG, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos. En P. Bolea, Mª. J. González y M. Moreno (Eds.) *Actas del X Simposio.*

QUISPE, W., GALLARDO, J. Y GONZÁLEZ, J. L. (2010) ¿Qué comprensión de la fracción fomentan los libros de texto de matemáticas peruanos? *PNA*, 4(3), 111-131.

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES (1999). Conclusiones de la reunión monográfica sobre “Problemas actuales de nuestra educación matemática primaria y secundaria”. Disponible en el sitio web de la RSME: www.rsme.es/comis/educ/acadcien.pdf. (Consultado el 9/2/2013)

RICO, L. (1991). La Comunidad de Educadores Matemáticos. En: Gutiérrez, A. (ed.) *Área de conocimientos Didáctica de la Matemática*. Síntesis. Madrid.

RICO, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: Horsori.

RICO, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática*. IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva (paper).

RICO, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, 4(1), 1-14

RICO, L., CASTRO, E. y ROMERO, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. En A. Gutiérrez y L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 87-102). Valencia, España: PME.

RICO, L. y SIERRA, M. (1996), Contexto y evolución histórica de la formación en matemáticas y su didáctica de los profesores de primaria. Giménez, J.; Llinares, S.; Sánchez, V. (Ed.). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria: cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Comares, 1996. p. 39-62.

RICO, L., MARÍN, A., LUPIAÑEZ, J.L. y GÓMEZ, P. (2008) Planificación de las Matemáticas Escolares en Secundaria. El caso de los Números Naturales. *Suma*. 58, pp.7-23.

RICO, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

RICO, L., DIEZ. A., CASTRO. E. y LUPIAÑEZ. J.L. (2010). Currículo de matemáticas para la educación obligatoria en España durante el periodo 1945-2010. *Educatio Siglo XXI*, Vol. 29 nº 2, pp. 139-172.

RICŒUR, P. (2002). *Del texto a la acción*. México: Fondo de Cultura Económica.

RITTLE-JOHNSON, B. Y SIEGLER, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: a review. En J.W. Adams, M.H. Ashcraft et al., *The Development of Mathematical Skills* (pp. 75-110). East Sussex, U.K.: Psycology Press, Ltd.

RODRIGUEZ DIÉGUEZ, J.L. ET AL. (1998): *Elementos para un diagnostico del Sistema Educativo Español. El sistema educativo en el ultimo tramo de la escolaridad obligatoria. Diagnóstico del Sistema Educativo. 1997.* INCE. Ministerio de Educación y Cultura. Madrid.

ROMBERG, T.A. (1991). Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas. *Revista de Educación*. 294, pp. 323-406.

ROMERO, I. (2000). Representación y comprensión en Pensamiento Numérico. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 35-46). Huelva: Universidad de Huelva.

ROTH, W.M. (2004). What is the meaning of “meaning”? A case study from graphing. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(1), pp.75-92.

RUIZ, F. (2000). *La tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada, España.

SALINAS Mª.J. (2003a). Comprensión de los algoritmos de las operaciones aritméticas en estudiantes de Magisterio. En Castro, E. (Ed.). *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación Matemática* (pp.339-348). Granada: Universidad de Granada.

SALINAS Mª.J. (2003b). *Competencia matemática al finalizar los estudios de Magisterio. Explicación mediante un modelo casual*. Tesis doctoral. Universidad de Santiago de Compostela.

SALINAS Mª.J. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de Magisterio. En M. Camacho et al. (Eds), *Investigación en Educación Matematica XI*, pp 381-390. SEIEM 2007.

SANCHEZ, M.T (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

SASSURE, F. (1915)(1973). *Cours de linguistique générale*. Paris: Payot.

SCHANK, R. C. (1988). Una explicación de la inteligencia. En R. J. Sternberg y D. K. Detterman (Eds.) *¿Qué es la inteligencia? Enfoque actual de su naturaleza y definición* (pp. 147-158). Madrid: Pirámide.

SCHOENFELD, A. H. y KILPATRICK, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

SCHUBRING, G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the learning of mathematics*, 7(3), pp. 41-51.

SKEMP, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

SEGOVIA, I. (1997a). Proyecto Docente. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Granada.

SEGOVIA, I. (1997b). *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos*. Granada: Comares.

SEGOVIA, I. y RICO, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro(RD.), *Didáctica de la Matemática en la educación Primaria* (pp.83-149). Madrid. España: Síntesis.

SELLARES, R. y BASSEDAS, M. (1983). La construcción de sistemas de numeración en la historia y en los niños” En : Moreno, M. y Sastre, G. *La Pedagogía*

Operatoria.. Ed. Gedisa.

SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1, 1-36.

SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4 - 14.

SHULMAN, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

SIEGFRIED, J.M. (2012). *The Hidden Strand of Mathematical Proficiency: Defining and Assessing for Productive Disposition in Elementary School Teachers‘ Mathematical Content Knowledge*. Tesis doctoral, University of California, San Diego.

SIERPINSKA, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, 24-36.

SIERPINSKA, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer Press.

SIERPINSKA, A. (2000). Mathematics classrooms that promote understanding [*Review of the book Mathematics classrooms that promote understanding*]. *ZDM*, 2, pp. 45-50.

SIERRA DELGADO, TOMÁS A. y GASCÓN, J. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en la educación infantil y primaria. En Marín, Margarita; Fernández, Gabriel; Blanco, Lorenzo J.; Palarea, María Mercedes (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 125-164). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

SIMON, M.A. (1993). Propective elementary teachers´ knowledge of división. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), pp.233-254.

SOCAS, M.M.(2003). Naturaleza del conocimiento matemático y sus implicaciones en la Enseñanza de las Matemáticas en la educación Secundaria. *Curso Universitario Interdisciplinar "Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matematicas"*. Recuperado el 12 de febrero de 2013, desde el sitio web http//imarrero.webs.ull.es/sctm03.v2/modulo1/MSocas.pdf

STODOLSKY, S. (1989) Is teaching really by the book? En: Jackson, Ph. *From Socrates to software*. NSSE. University of Chicago Press, pp. 159-184.

TAHTA, D. (1996). On interpretation. In P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge: Epistemology mathematical education* (pp. 125-133). London: RoutledgeFalmer.

TEDS-M (2012). Informe español. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los Maestros. IEA. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Madrid.

TIGIRI, F y WOLMAN, S (2007). Sistemas de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista iberoamericana de educación.* Nº 43, pp.59-83.

TIROSH, D. y GRAEBER, A.O. (1989). Preservice elementary teachers explicit beliefs about multiplication and división. *Educational Studies in Mathematics*, 20(1), pp.79-96.

URSINI, S.; TRIGUEROS, M. (1996). Diseño de un Cuestionario de Diagnóstico acerca del manejo del Concepto de Variable en el Algebra. *Enseñanza de las Ciencias*.14(3), 351-363.

URSINI, S. y TRIGUEROS, M. (1997). Understanding of different uses of variable: A study with starting college students. *Proceedings of the XXI PME International Conference*, 254-261. Lahti, Finlandia.

URSINI, S. y TRIGUEROS, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*. 18(3), pp 5-38. Mexico.

VAN HIELE, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press.

VERGNAUD, G. (1983). Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example: les structures additives. Atelier International d'Eté: *Récherche en Didactique de la Physique.* La Londe les Maures, Francia, 26 de junio a 13 de julio.

VERGNAUD, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates – NCTM.

VERGNAUD, G. (1990). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge, GB: Cambridge University Press.

VERGNAUD, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts. En T. Nunes y P. E. Bryant (Eds.) *Learning and Teaching Mathematics* (pp. 5-28). London: Psycology Press, Ltd.

VILLELLA, J. A. y CONTRERAS, L.C. (2005). El conocimiento profesional de los docentes de matemáticas en relación con la selección y uso de libros de texto. *Revista de Educación*, 340. Mayo-agosto 2006, pp. 973-992.

VON GLASERSFELD, E. (1987). Learning as a Constructive Activity. En: Janvier, C. (Ed.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* (pp. 3- 17).

VON WRIGHT, G. H. (1987). *Explicación y comprensión*. Madrid: Alianza Universidad.

WARNER, L. B., ALCOCK, L. J., COPPOLO, J., y DAVIS, G. E. (2003). How does flexible mathematical thinking contribute to the growth of understanding? In N. A. Paterman, J. B. Dougherty, y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 371-378). Honolulu, HI: PME.

WHITE, R. Y GUNSTONE, R. (1992). Probing Understanding. London, GB: The Falmer Press. [Capítulo 1: *The Nature of Understanding*].

WITTGENSTEIN, L. (1988). *Investigaciones filosóficas*. México: Crítica.

ZABALA, A. (1995). *La practica educativa. Cómo enseñar*. Barcelona, Grao.

ZAHORIK, J. (1991). Teaching style and textbook. *Teaching and Teacher Education*. Vol.7.Nº 2, pp. 185-196.

ANEXO I

Clasificación de G. Ifrah

Curriculum Matemática en Educación Primaria LOGSE y LOE.

Curriculum Matemática ESO en LOGSE y LOE.

Análisis libros de textos de Matemáticas Primaria y ESO

A1.1 Clasificación de G. Ifrah

1.1.1 Las numeraciones de tipo aditivo.

Los sistemas de numeración de tipo aditivo son aquellos que se basan en el principio de adición, donde cada cifra posee un valor propio, independiente de su posición en las representaciones. Las numeraciones de este tipo se dividen en tres categorías:

Numeraciones aditivas de primera especie.

Ejemplo de esta categoría lo constituiría el sistema Egipcio; en él , se atribuye una cifra especial a la unidad y a cada potencia de la base, en este caso es 10, y procede por repetición de estos símbolos para la representación de los demás números.
Los sistemas aditivos de primera especie , se caracterizan porque sus notaciones están basadas en descomposiciones aritméticas del tipo:

1.er orden	2º orden	3.er orden	4º. orden
1 1+1 1+1+1 ……	m m+m m+m+m …….	m^2 $m^2+ m^2$ $m^2+m^2+m^2$ ……..	m^3 m^3+m^3 $m^3+m^3+m^3$ …….

Por tanto en estos sistema existe una notación particular para 1, m, m^2, m^3 , etc. Y una notación aditiva para todos los demás números.

Numeración aditiva de segunda especie.

A diferencia de los sistemas anteriores coexisten una base **m**, y una auxiliar **k,** divisor de la base; y se caracterizan porque sus descomposiciones aritméticas son de la forma:

1^{er} orden	2º orden	3^{er} orden	4º orden
1 1+1 1+1+1 …… k k+1 k+1+1 ……..	m m+m m+m+m ……… km km+m km+m+m ………..	m^2 m^2+m^2 $m^2+m^2+m^2$ ……… km^2 $km^2 + m^2$ $km^2 + m^2+ m^2$ ……………..	m^3 $m^3+ m^3$ $m^3+m^3+m^3$ .... km^3 km^3+m^3 $km^3+m^3+m^3$ ………

Donde se observa una notación particular para 1, k, m, kxm, m^2 , kx m^2 , etc; y una notación aditiva para todos los demás números.

Un sistema de numeración representativo de este grupo lo constituye el sistema Griego acrofónico, que como en el caso de los egipcios es de base decimal.

La numeración aditiva de tercera especie.

Correspondería al último nivel de progresión de los sistemas aditivos. Se caracteriza por asignar distintos símbolos a los números inferiores a la base y a las distintas potencias y múltiplos de la base. El resto de números se compondría mediante el principio aditivo.

1er orden	2º orden	3er orden	4º orden
1	m	m^2	m^3
2	2m	$2m^2$	$2m^3$
3	3m	$3m^2$	$3m^3$
4	4m	$4m^2$	$4m^3$
………	……..	…….	……….
m-1	(m-1)m	$(m-1)\ m^2$	$(m-1)\ m^3$

1.1.2 Las numeraciones de tipo Híbrido.

Son aquellas que están basadas sobre un principio mixto que hace referencia a la adición y a la multiplicación. Según este principio, los múltiplos de las potencias de la base vienen expresados, a partir de un cierto orden, mediante la regla multiplicativa. Estos sistemas se dividen esencialmente en cinco categorías.

Las numeraciones híbridas de primera especie.

El sistema común asirio-babilonio y el de los pueblos semitas occidentales (arameos, fenícios, etc.) constituyen los ejemplos característicos: fundados sobre una base decimal, atribuyen una cifra particular a cada uno de los números 1,10, 100, 1000, etc., y proporcionan una notación multiplicativa a los múltiplos consecutivos de cada una de las potencias de 10; sin embargo, las unidades simples y las decenas aún están representadas por medio de la vieja regla de yuxtaposición aditiva.

Los sistemas híbridos de la primera especie, todos de base 10, se caracterizan por una notación que reposa sobre unas descomposiciones aritméticas similares a las siguientes:

1er Orden (unidades)	2º Orden (decenas)	3er Orden (centenas)	4º Orden (millares)
1 1+1 1+1+1	10 10+10 10+10+10	$1x10^2$ $(1+1)x\ 10^2$ $(1+1+1)x10^2$ ………………..	$1x\ 10^3$ $(1+1)x\ 10^3$ $(1+1+1)x10^3$ …………

Notación particular para $1,10,10^2$, 10^3 etc.
Notación aditiva para los números del 1 al 99.
Notación multiplicativa para los múltiplos de las potencias de 10, a partir de 100.
Notación que hace intervenir a la vez la adición y la multiplicación para los demás.

Las numeraciones híbridas de segunda especie.

El sistema cingalés nos proporciona el modelo de este tipo de numeración. Se trata de un sistema de base 10, que posee una cifra particular para cada unidad simple, cada decena y cada potencia de 10, y donde la notación de las centenas, los millares, etc., se hace siguiendo la regla multiplicativa.

1er Orden (unidades)	2º Orden (decenas)	3er Orden (centenas)	4º Orden (millares)
1	10	$1x10^2$	$1x10^3$
2	20	$2x10^2$	$2x10^3$
3	30	$3x10^2$	$3x10^3$
4	40	$4x10^2$	$4x10^3$
....	......	....	....
9	90	$9x10^2$	$9x10^3$

Notación particular para cada unidad, cada decena y cada uno de los números 10^2,10^3, etc.
Notación aditiva para los números del 1 al 99.
Notación multiplicativa para los múltiplos de las potencias de 10, a partir de 100.
Notación que hace intervenir a la vez la adición y la multiplicación para los demás números.

Las numeraciones híbridas de tercera especie.

El modelo nos lo proporciona el sistema mariota: numeración de base 100, que da una cifra particular a la unidad y a la decena, así como a cada potencia de 100, y donde la notación de las centenas de millar, etc., se hace siguiendo la regla multiplicativa aplicada a estas cifras. Se caracteriza por tener una notación que reposa sobre descomposiciones aritméticas del tipo:

1er Orden centesimal		2º orden centesimal	
unidades	decenas	centenas	millares
1	10	$1x10^2$	$10x10^2$
1+1	10+10	$(1+1)x10^2$	$(10+10)x10^2$
1+1+1	10+10+10	$(1+1+1)x10^2$	$(10+10+10)x10^2$
....	....	....	....

Notación particular para 1, 10,10^2, 10^3 etc.
Notación aditiva para los números del 1 al 99
Notación multiplicativa para los múltiplos de las potencias de 10^2 ,a partir de la primera (100).
Notación que hace intervenir a la vez la adición y la multiplicación para los demás números.

Las numeraciones híbridas de cuarta especie.

El modelo que se ajusta a estos sistemas nos lo proporciona el sistema etíope: numeración fundada sobre la base 100, proporciona una cifra particular a cada unidad simple y a cada decena, así como a cada potencia de 100, y la notación de las centenas, de las decenas de millar, etc., se hace siguiendo la regla multiplicativa aplicada a estas cifras. Se trata de un sistema caracterizado por una notación que reposa sobre unas descomposiciones aritméticas del tipo:

1^er^ Orden centesimal		2º orden centesimal	
Unidades	Decenas	Centenas	Millares
1	10	$1x10^2$	$10x10^2$
2	20	$2x10^2$	$20x10^2$
3	30	$3x10^2$	$30x10^2$
....	....	....	....
9	90	$9x10^2$	$90x10^2$

Notación particular para cada unidad, decena y cada uno de los números 10^2 , 10^4, etc.
Notación aditiva para los números del 1 al 99.
Notación multiplicativa para los múltiplos de las potencias de 10^2 , a partir de la primera (100).
Notación que hace intervenir a la vez la adición y la multiplicación para los demás números.

Las numeraciones híbridas de la quinta especie.

El sistema común chino constituyen un buen ejemplo de este tipo de numeración. Se trata de sistemas de base 10, que propone cifras particulares para cada unidad simple y para cada potencia de 10, y donde la notación de los múltiplos de las decenas, de las centenas, de los millares, etc., se organizan según el principio multiplicativo.

1^{er} Orden (unidades)	2º Orden (decenas)	3^{er} Orden (centenas)	4º Orden (millares)
1	1x10	$1x10^2$	$1x10^3$
2	2x10	$2x10^2$	$2x10^3$
3	3x10	$3x10^2$	$3x10^3$
....	....	....	....
9	9x10	$9x10^2$	$9x10^3$

Notación particular para cada unidad de primer orden y cada uno de los números $10, 10^2$, 10^3 etc.

Notación multiplicativa para los múltiplos de las potencias de la base, a partir de 10.

Notación que hace intervenir a la vez la adición y la multiplicación para los demás números.

A diferencia de las numeraciones híbridas de las dos primeras especies, que sólo utilizan parcialmente la regla multiplicativa, las de las especies tercera, cuarta y quinta hacen intervenir dicha regla en la notación de todos los órdenes de unidad superior o iguales a la base. También la representación de los demás números se hace siguiendo la expresión de los diversos valores numéricos de un polinomio que tiene por variable la base correspondiente. Por esta razón también se las llama numeración de tipo "híbrido completo".

1.1.3 Las numeraciones de posición.

La característica fundamental de los sistemas posicionales es el valor relativo de las cifras que compondrán los números. Históricamente sólo tenemos constancia de cuatro numeraciones posicionales:

- La de los especialistas babilonios.
- La de los especialistas chinos.
- La de los astrónomos mayas.
- La numeración moderna, heredada de la numeración hindú.

Estas numeraciones que necesitan el uso del cero, tal como lo conocemos o como un espacio vacío, se pueden subdividir a su vez en dos categorías.

Las numeraciones posicionales de primera especie.

Se trata de sistemas de numeración posicionales de base m, que sólo poseen dos cifras : una para representar la unidad, y otra para representar un divisor privilegiado de la base K; y en los que las primeras m-1 cifras significativas son representadas según un principio aditivo.

En esta clase podemos situar las numeraciones babilonias (de base 60 y donde K=10), el sistema de numeración erudito chino (de base 10 y K=5) y la numeración maya (de base 20 y K=5).

Las numeraciones posicionales de la segunda especie.

En esta categoría podemos situar nuestra numeración decimal actual y todas las que modificando la base podamos imaginar con una estructura isomorfa; actualmente reciben el nombre de sistemas de numeración de base m, siendo el número entero m al menos igual a 2 (m>1). Todos dotados de un cero y en los que aparecen m-1 cifras significativas.

En estos sistemas cualquier número **x** se puede escribir de una sola manera

$$\mathbf{x = u_k\, u_{k-1} \ldots\ldots u_3\, u_2\, u_1}$$

Donde las cifras $\mathbf{u_k}$, $\mathbf{u_{k-1}}$, $\mathbf{\ldots\ldots u_3}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_1}$ son inferiores a la base m.

La potencialidad de estos sistemas radica, entre otras ventajas, en la facilidad para realizar las operaciones aritméticas elementales y la posibilidad de extender sin dificultad este tipo representación a otros tipos de números , los decimales y por tanto a los racionales e irracionales.

A1.2 Tablas de contenidos del área de Matemáticas para Primaria en la LOGSE

Tabla I.2.1 Contenidos del Bloque 1: Números y operaciones: significado y estrategias. LOGSE.

Hechos, conceptos y principio	Procedimientos	Actitudes, valores y normas
1. Números naturales, enteros, fraccionarios y decimales. • Necesidad y funciones: contar, medir, ordenar, expresar cantidades o particiones, codificar informaciones, distinguir objetos y elementos, etc. • Relaciones entre números (mayor que, menor que, igual a, diferente de, mayor o igual que, menor o igual que, aproximadamente igual) y símbolos para expresarlas. • Correspondencias entre fracciones sencillas y sus equivalentes decimales. • El tanto por ciento de una cantidad (%). 2. *Sistemas de numeración: decimal, romano, monetario, para medir ángulos, para medir el tiempo.* • *Grafía de los números en los distintos sistemas.* • *Base, valor de posición y reglas de formación de los números en los diferentes sistemas.* • Números positivos y negativos. Números cardinales y ordinales. • *Relaciones entre sistemas de numeración.* 3. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. • Situaciones en las que intervienen estas operaciones: la suma como unión, incremento; la resta como disminución, comparación, complemento; la multiplicación como suma abreviada, proporcionalidad (doble, triple, etc.); la división como reparto, proporcionalidad (la mitad, la tercera parte, etc.). • Cuadrados y cubos. • La identificación de las operaciones inversas (suma y resta; multiplicación y división). • Símbolos de las operaciones 4. *Correspondencias entre*	1. Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada. 2. Comparación entre números naturales, decimales (de dos cifras decimales) y fracciones sencillas mediante ordenación, representación gráfica y transformación de unos en otros. 3. Interpretación de tablas numéricas y alfanuméricas (de operaciones, horarios, precios, facturas, etc.) presentes en el entorno habitual. *4. Elaboración y utilización de códigos numéricos y alfanuméricos para representar objetos, situaciones, acontecimientos y acciones.* 5. *Utilización del Sistema de Numeración Decimal.* • *Lectura y escritura de números en diferentes contextos.* • *Composición y descomposición de números.* 6. *Utilización del Sistema Monetario aplicando las equivalencias y operaciones correspondientes.* 7. Interpretación, cálculo y comparación de tantos por ciento. 8. Formulación y comprobación de conjeturas sobre la regla que sigue una serie o clasificación de números y construcción de series y clasificaciones de acuerdo con una regla establecida. 9. Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos y operatorios (reducir una situación a otra con números más sencillos, aproximación mediante ensayo y error, considerar un mismo proceso en dos sentidos -hacia adelante y hacia atrás- alternativamente, etc.). 10. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en las resolución de problemas numéricos u operatorios. 11. *Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.* 12. Decisión sobre la conveniencia o no de hacer cálculos exactos o aproximados en determinadas situaciones valorando el grado de error admisible. 13. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable. 14. Automatización de los algoritmos para efectuar las cuatro operaciones con números naturales. 15. Automatización de los algoritmos para efectuar las operaciones de suma y resta con números decimales de hasta dos cifras y con fracciones de igual denominador. 16. Elaboración de estrategias personales de cálculo	1. *Curiosidad por indagar y explorar sobre el significado de los códigos numéricos y alfanuméricos y las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números.* 2. *Sensibilidad e interés por las informaciones y mensajes de naturaleza numérica apreciando la utilidad de los números en la vida cotidiana.* 3. *Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración, e interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente.* 4. Tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema. 5. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental. 6. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados. 7. Confianza y actitud crítica en el uso de la calculadora.

lenguaje verbal, representación gráfica y notación numérica. 5. Algoritmos de las operaciones. • Algoritmos para efectuar las cuatro operaciones con números natural es. • Jerarquía de las cuatro operaciones y función de los paréntesis. • Algoritmos para aplicar la suma y resta al cálculo del tiempo y de ángulos. • Reglas de uso de la calculadora.	mental •Suma, resta, multiplicación y división con números de dos cifras en casos sencillos. •Porcentajes sencillos •*Utilización de la composición y descomposición de números, de la asociatividad y de la conmutatividad para elaborar estrategias de cálculo mental.* 17. Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen una o varias de las cuatro operaciones, distinguiendo la posible pertinencia y aplicabilidad de cada una de ellas. 18. utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla atendiendo a la complejidad de los cálculos a realizar y a la exigencia de exactitud de los resultados.	

A1.3. Contenidos mínimos relacionados con los sistemas de representación.

Tabla I.3.1 Contenidos mínimos relacionados con los sistemas de numeración. LOGSE.

Hechos, conceptos y principio	Procedimientos	Actitudes, valores y normas
2. *Sistemas de numeración: decimal, romano, monetario, para medir ángulos, para medir el tiempo.* • *Grafía de los números en los distintos sistemas.* • *Base, valor de posición y reglas de formación de los números en los diferentes sistemas.* • *Relaciones entre sistemas de numeración.* 4. *Correspondencias entre lenguaje verbal, representación gráfica y notación numérica.*	4. *Elaboración y utilización de códigos numéricos y alfanuméricos para representar objetos, situaciones, acontecimientos y acciones.* 5. *Utilización del Sistema de Numeración Decimal.* • *Lectura y escritura de números en diferentes contextos.* • *Composición y descomposición de números.* 6. *Utilización del Sistema Monetario aplicando las equivalencias y operaciones correspondientes.* 11. *Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.* 16. Elaboración de estrategias personales de cálculo mental: •*Utilización de la composición y descomposición de números, de la asociatividad y de la conmutatividad para elaborar estrategias de cálculo mental.*	1. *Curiosidad por indagar y explorar sobre el significado de los códigos numéricos y alfanuméricos y las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números.* 2. *Sensibilidad e interés por las informaciones y mensajes de naturaleza numérica apreciando la utilidad de los números en la vida cotidiana.* 3. *Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración, e interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente.*

A1.4. Tablas de objetivos y contenidos propuestos para el área de matemáticas para Primaria en la LOE.

1.4.1. Objetivos para el área de Matemáticas para Primaria. LOE.

Tabla I. 4.1 Objetivos del área de matemática en Primaria de la LOE.

En el RD 1007/1991 se proponen los siguientes objetivos:

La enseñanza de las Matemáticas en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria tendrá como objetivo contribuir a desarrollar en los alumnos y alumnas, las capacidades siguientes:

1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica, probabilística) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.

2. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, utilizando técnicas de recogida de datos, procedimientos de medida, las distintas clases de números y mediante la realización de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos, y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados.

5. Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas, y para representar esa información de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

6. Reconocer la realidad como diversa y susceptible de ser explicada desde puntos de vista contrapuestos y complementarios: determinista/aleatorio, finito/infinito, exacto/aproximado, etcétera.

7. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan.

8. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, etc., analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.

9. Actuar, en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas, de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

10. Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar las situaciones que requieran su empleo o que permitan disfrutar con los aspectos creativos, manipulativos, estéticos o utilitarios de las matemáticas.

1.4.2. Tablas de contenidos para el área de Matemáticas para Primaria LOE

Tabla I.4.2 Contenidos del Bloque 1. Primer ciclo: Números y operaciones. LOE.

Números naturales	Operaciones	Estrategias de cálculo
-Recuento, medida, ordenación y expresión de cantidades en situaciones de la vida cotidiana. *-Lectura y escritura de números. Grafía, nombre y valor de posición de números hasta tres cifras.* -Utilización de los números ordinales. -Orden y relaciones entre números. Comparación de números en contextos familiares.	-Utilización en situaciones familiares de la suma para juntar o añadir; de la resta para separar o quitar; y de la multiplicación para calcular número de veces. -Expresión oral de las operaciones y el cálculo. -Disposición para utilizar los números, sus relaciones y operaciones para obtener y expresar información, para la interpretación de mensajes y para resolver problemas en situaciones reales.	-Cálculo de sumas y restas utilizando algoritmos estándar. -Construcción de las tablas de multiplicar del 2, 5 y 10 apoyándose en número de veces, suma repetida, disposición en cuadrículas... *-Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental para la búsqueda del complemento de un número a la decena inmediatamente superior,* para el cálculo de dobles y mitades de cantidades y para resolver problemas de sumas y restas. *-Cálculo aproximado. Estimación y redondeo del resultado de un cálculo hasta la decena más cercana escogiendo entre varias soluciones y valorando las respuestas razonables.* -Familiarización con el uso de la calculadora para la generación de series y composición y descomposición de números. -Resolución de problemas que impliquen la realización de cálculos, explicando oralmente el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas. -Confianza en las propias posibilidades, y curiosidad, interés y constancia en la búsqueda de soluciones. -Gusto por la presentación ordenada y limpia de los cálculos y sus resultados.

Tabla I.4.3 Contenidos del Bloque 1. Segundo ciclo: Números y operaciones. LOE.

Números naturales y fracciones	Operaciones	Estrategias de cálculo
-Sistema de numeración decimal. Valor de posición de las cifras. Su uso en situaciones reales. -Orden y relación entre los números. Notación. -Números fraccionarios para expresar particiones y relaciones en contextos reales, utilización del vocabulario apropiado. -Comparación entre fracciones	-Utilización en situaciones familiares de la multiplicación como suma abreviada, en disposiciones rectangulares y problemas combinatorios. -Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar. -Interés para la utilización de los números y el cálculo numérico para resolver problemas en	*-Descomposición aditiva y multiplicativa de los números.* Construcción y memorización de las tablas de multiplicar. -Utilización de los algoritmos estándar, en contextos de resolución de problemas, de suma, resta, multiplicación y división por una cifra. -Utilización de estrategias personales de cálculo mental. -Estimación del resultado de una operación entre dos números, valorando si la respuesta

sencillas: mediante ordenación y representación gráfica.	situaciones reales, explicando oralmente y por escrito los procesos de resolución y los resultados obtenidos.	es razonable. -Utilización de la calculadora en la resolución de problemas de la vida cotidiana, decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos. -Confianza en las propias posibilidades y constancia para utilizar los números, sus relaciones y operaciones para obtener y expresar informaciones, manifestando iniciativa personal en los procesos de resolución de problemas de la vida cotidiana. -Interés por la presentación limpia, ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados. -Disposición para desarrollar aprendizajes autónomos en relación con los números, sus relaciones y operaciones.

Tabla I.4.4 Contenidos del Bloque 1. Tercer ciclo: Números y operaciones. LOE.

Números enteros, decimales y fracciones	Operaciones	Estrategias de cálculo
-*Uso en situaciones reales del nombre y grafía de los números de más de seis cifras.* -Múltiplos y divisores. -Números positivos y negativos. Utilización en contextos reales. -Números fraccionarios. Obtención de fracciones equivalentes. -*Números decimales. Valor de posición y equivalencias*. Uso de los números decimales en la vida cotidiana. -Ordenación de números enteros, de decimales y de fracciones por comparación y representación gráfica. -Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. -*Sistemas de numeración en culturas anteriores e influencias en la actualidad.*	-Potencia como producto de factores iguales. Cuadrados y cubos. -Jerarquía de las operaciones y usos del paréntesis.	-Utilización de operaciones de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas. -Utilización de la tabla de multiplicar para identificar múltiplos y divisores. -Calculo de tantos por ciento básicos en situaciones reales. -Estimación del resultado de un cálculo y valoración de respuestas numéricas razonables. -Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias personales de cálculo mental y relaciones entre los números, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas. -Utilización de la calculadora en la resolución de problemas, decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos. -Capacidad para formular razonamientos y para argumentar sobre la validez de una solución identificando, en su caso, los errores. -Colaboración activa y responsable en el trabajo en equipo, manifestando iniciativa para resolver problemas que implican la aplicación de los contenidos estudiados.

Tabla I.4.5 Contenidos relacionados con los sistemas de numeración. LOE.

	Números enteros, decimales y fracciones	Operaciones	Estrategias de cálculo
Primer ciclo	*-Recuento, medida, ordenación y expresión de cantidades en situaciones de la vida cotidiana.* *-Lectura y escritura de números. Grafía, nombre y valor de posición de números hasta tres cifras.*		*-Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental para la búsqueda del complemento de un número a la decena inmediatamente superior,* para el cálculo de dobles y mitades de cantidades y para resolver problemas de sumas y restas. *-Cálculo aproximado. Estimación y redondeo del resultado de un cálculo hasta la decena más cercana escogiendo entre varias soluciones y valorando las respuestas razonables.*
Segundo ciclo	*-Sistema de numeración decimal. Valor de posición de las cifras. Su uso en situaciones reales.*		*-Descomposición aditiva y multiplicativa de los números.*
Tercer ciclo	*-Uso en situaciones reales del nombre y grafía de los números de más de seis cifras.* *-Números decimales. Valor de posición y equivalencias.* *-Sistemas de numeración en culturas anteriores e influencias en la actualidad.*		

A1.5 Tablas de objetivos y contenidos del área de Matemáticas de la ESO en la LOGSE.

Tabla I.5.1 Objetivos del área de matemáticos en la ESO. LOGSE

En el RD 1007/1991 se proponen los siguientes objetivos:

La enseñanza de las Matemáticas en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria tendrá como objetivo contribuir a desarrollar en los alumnos y alumnas, las capacidades siguientes:

1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica, probabilística) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.

2. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, *utilizando técnicas de recogida de datos, procedimientos de medida, las distintas clases de números y mediante la realización de los cálculos apropiados a cada situación.*

4. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos, y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados.

5. Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas, y para representar esa información de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

6. Reconocer la realidad como diversa y susceptible de ser explicada desde puntos de vista contrapuestos y complementarios: determinista/aleatorio, finito/infinito, exacto/aproximado, etcétera.

7. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan.

8. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, etc., analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.

9. Actuar, en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas, de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

10. Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar las situaciones que requieran su empleo o que permitan disfrutar con los aspectos creativos, manipulativos, estéticos o utilitarios de las matemáticas.

Tabla I.5.2 Contenidos matemáticos en la Eso: "Números y operaciones: significados, estrategias y simbolización". LOGSE.

Conceptos	Procedimientos	Actitudes
1. Significado, uso y notación de los números naturales, enteros, decimales y fraccionarios. 2. Significado y uso de las operaciones con los diferentes tipos de números. 3. Proporcionalidad de magnitudes. Porcentajes. 4. Margen de error en la aproximación de cantidades. 5. Significado y uso de las letras para representar números. Fórmulas y ecuaciones.	1. Interpretación y utilización de los números, las operaciones y el lenguaje algebraico en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso. 2. Transformación y aproximación de números de acuerdo con las necesidades impuestas por su uso. 3. Elaboración y utilización de estrategias personales de estimación de cantidades y cálculo mental. 4. Utilización de los algoritmos tradicionales de suma, resta, multiplicación y división con números enteros, decimales y fracciones sencillas. 5. Utilización de diferentes procedimientos para efectuar cálculos de proporcionalidad. 6. Utilización de la calculadora para la	1. Incorporación del lenguaje numérico, del cálculo y de la estimación a la forma de proceder habitual. 2. Reconocimiento y valoración crítica de la utilidad de la calculadora y otros instrumentos para la realización de cálculos e investigaciones numéricas. 3. Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones. 4. Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier conteo, cálculo o problema numérico. 5. Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del

	realización de cálculos numéricos y decisión sobre la conveniencia de su uso. 7. Resolución de ecuaciones de primer grado por transformación algebraica y de otras ecuaciones por métodos numéricos y gráficos. 8. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en conjuntos de números. 9. Formulación y comprobación de conjeturas sobre situaciones y problemas. 10. Utilización del método de análisis-síntesis para resolver problemas numéricos.	proceso seguido y de los resultados obtenidos en problemas y cálculos.

A1.6. Tablas de objetivos y contenidos del área de Matemáticas de la ESO en la LOE.

Tabla I.6.1 Objetivos del área de matemáticos de la ESO en la LOE.

Los objetivos a conseguir los considera directamente relacionados con las competencias a desarrollar y los redacta en término de capacidades. Considera los siguientes objetivos:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la *identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.*

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

Tabla I.6.2 Contenidos matemáticos en 1º, 2º y 3º de la ESO. "Números y operaciones". LOE.

Primer curso ESO	Segundo curso ESO	Tercer curso ESO
-Divisibilidad de números naturales. Múltiplos y divisores comunes a varios números. Aplicaciones de la divisibilidad en la resolución de problemas asociados a situaciones cotidianas. - Necesidad de los números negativos para expresar estados y cambios. Reconocimiento y conceptualización en contextos reales. - Significado y usos de las operaciones con números enteros. Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de los paréntesis en cálculos sencillos. - Fracciones y decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente. -Números decimales. Relaciones entre fracciones y decimales. -Elaboración y utilización de estrategias personales para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y con calculadoras. - Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa. -Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Cálculo mental y escrito con porcentajes habituales.	-Potencias de números enteros con exponente natural. Operaciones con potencias. Utilización de la notación científica para representar números grandes. -Cuadrados perfectos. Raíces cuadradas. Estimación y obtención de raíces aproximadas. - Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes. - Utilización de la forma de cálculo mental, escrito o con calculadora, y de la estrategia para contar o estimar cantidades más apropiadas a la precisión exigida en el resultado y la naturaleza de los datos. - Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas. Razón de proporcionalidad. -Aumentos y disminuciones porcentuales. -Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa.	-Números decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz. -Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo. Utilización de aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana con la precisión requerida por la situación planteada. -Potencias de exponente entero. Significado y uso. Su aplicación para la expresión de números muy grandes y muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica. Uso de la calculadora. -Representación en la recta numérica. Comparación de números racionales.

Tabla I.6.3 Contenidos matemáticos en 4º de la ESO. "Números y operaciones". LOE.

Cuarto curso ESO opción A	Cuarto curso ESO opción B
-Interpretación y utilización de los números y las operaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación y precisión más adecuadas en cada caso.	-Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales. -Representación de números en la recta real. Intervalos. Significado y diferentes formas de expresar un intervalo.

-Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana. - Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos. Interés simple y compuesto. - Uso de la hoja de cálculo para la organización de cálculos asociados a la resolución de problemas cotidianos y financieros. -Intervalos. Significado y diferentes formas de expresar un intervalo. -Representación de números en la recta numérica.	-Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso. contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso. -Expresión de raíces en forma de potencia. Radicales equivalentes. Comparación y simplificación de radicales. -Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones para realizar cálculos con potencias de exponente entero y fraccionario y radicales sencillos. - Utilización de la calculadora para realizar operaciones con cualquier tipo de expresión numérica. Cálculos aproximados. Reconocimiento de situaciones que requieran la expresión de resultados en forma radical.

A1.7 Distribución de los contenidos del número y las operaciones en libros de textos de la LOGSE.

Tabla I.7.1 Distribución de los contenidos del número y las operaciones en libros de textos de Santillana (1995).

Curso	Trimestre	Contenido
1º	1º	Se trabajan los primeros nueve números. Se introduce la idea de decena y se llega hasta el 19. Inicio de las operaciones de suma y resta, problemas aritméticos escolares de suma y resta de una etapa con cantidades inferiores a 20 (cambio y combinación).
	2º	Se trabaja el 20, como 2 decenas y los números del 20 al 29. Se trabaja el 30, como 3 decenas y los números del 30 al 39….Se trabaja el 90, como 9 decenas y los números del 90 al 99. Operaciones de suma y restas con números de dos cifras, confección de tablas de sumar y restar. Algoritmo de la suma con llevadas.
2º	1º	Recuerdos de las ideas trabajadas en 1º. Unidades: del 1 al 9. Decenas: números de dos cifras. Algoritmo de sumas y restas con dos cifras con y sin llevadas. Problemas aritméticos escolares de una etapa con cantidades de dos cifras (cambio y combinación).
	2º	Idea de centena: los números 100, 200,..., 900. Descomposición de números en unidades, decenas y centenas. Los números de tres cifras. Algoritmo de sumas y restas con tres cifras, con y sin llevadas. Problemas aritméticos escolares de una etapa con cantidades de dos cifras (cambio y combinación).

		Inicio de la multiplicación, construcción de las tablas multiplicativas.
3º	1º	Recuerdos de lo trabajado en 2º curso: números hasta el 999. Números ordinales Idea de millar. Los números de cuatro cifras, hasta 9.999. Idea de las decenas de millar: números de cinco cifras, hasta el 99.999. Algoritmos de suma y resta con cantidades de tres y cuatro cifras. Problemas aritméticos escolares de una y dos etapas aditivas (cambio y combinación).
	2º	La multiplicación como suma de sumandos iguales, construcción de tablas e inicio del algoritmo de la multiplicación con multiplicador unidígito, con y sin llevadas. Problemas aritméticos escolares de una etapa multiplicativos (isomorfismo de medida)
	3º	Algoritmo Ideas de repartos y división. Práctica de la división: algoritmos con divisor unidígito y dividendo de dos y tres cifras.
4º	1º 2º	Recuerdos de lo trabajado en 3er Curso: -números hasta el 9.999. -números hasta el 99.999. Algoritmos de la suma, resta y multiplicación con multiplicador de mas de una cifra, problemas aritméticos escolares con varias etapas de suma y resta, y problemas multiplicativos (isomorfismos de medida de multiplicar).-
		Algoritmo de la división con dividendo de un y dos dígitos. Problemas aritméticos multiplicativos(isomorfismos de medida de división). Se introducen las ideas de fracción y los conceptos de décimas y centésimas.
5º	1º	Repaso de números hasta cinco cifras: hasta el 99.999. Inicio de números de seis cifras: centena de millar. Idea de la unidad de millón: números de siete cifras. Otros sistemas de numeración: números romanos. Algoritmos de las operaciones básicas, propiedades de las operaciones aritméticas, problemas aritméticos escolares de varias etapas aditivas y multiplicativas.
	2º	Fracciones, decimales y porcentajes, operaciones con fracciones y porcentajes

6º		Repaso de las ideas numéricas trabajadas en 5º Curso. Concepto de billón. Trabajo con sistemas posicionales y no posicionales. Fracciones y decimales. Operaciones Múltiplos y divisores. Conceptos, mcm y MCD, criterios de divisibilidad. Descomposición en factores primos. Potencias y raíces. Números enteros: representación en la recta numérica, orden, sumas y restas.

Tabla I.7.2 Distribución de los contenidos del número y las operaciones en libros de textos de Editorial SM (2006).

Curso	Trimestre	Contenido
1º	1º	Se trabajan los primeros nueve números. Se introduce la idea de decena y se llega hasta el 19. Inicio de las operaciones de suma y resta, problemas aritméticos escolares de suma y resta con una componente gráfica muy importante de una etapa con cantidades inferiores a la decena (cambio y combinación).
	2º	Se trabaja el 20, como 2 decenas y los números del 20 al 29. Se trabaja el 30, como 3 decenas y los números del 30 al 39….Se trabaja el 50, como 5 decenas y los números del 50 al 59. Operaciones de suma con tres números y con números de dos cifras. Resta de números de dos cifras sin llevadas. Propiedad conmutativa de la suma.
	3º	Números hasta el 99. Suma con llevadas de dos y tres sumando. Números pares e impares. Ordinales hasta el 10º

2º	1º	Recuerdos de las ideas trabajadas en 1º. La centena, números hasta el 299. Algoritmo de sumas y restas con dos y tres cifras con y sin llevadas. Problemas aritméticos escolares de enunciado verbal, con apoyo visual, de una etapa con cantidades de dos cifras (cambio y combinación).
	2º	Continuación con la idea de centena, números hasta el 799 Descomposición de números en unidades, decenas y centenas. Algoritmo de sumas y restas con tres cifras, con y sin llevadas. Problemas aritméticos escolares de una etapa con cantidades de dos cifras (cambio y combinación). Inicio de la multiplicación, construcción de las tablas multiplicativas: 2, 4 , 5 y 10.
	3º	Repaso de los números Números hasta el 999 Continuación con la construcción de tablas: 3, 6, 7,8 y 9 Multiplicación sin llevadas. Reparto en partes iguales, inicio de la división. Problemas aritméticos escolares aditivos.
3º	1º	Recuerdos de lo trabajado en 2º curso: números hasta el 999. Números ordinales Idea del millar. Los números de cuatro cifras, hasta 9.999. Idea de las decenas de millar: números de cinco cifras, hasta el 99.999. Algoritmos de suma y resta con cantidades de tres y cuatro cifras. Problemas aritméticos escolares de una y dos etapas aditivas (cambio y combinación). Repaso de tablas y multiplicación con y sin llevadas.
	2º	Multiplicaciones por 10, 100. Multiplicaciones con y sin llevadas. Reparto en partes iguales, algoritmo de la división con dos, tres y cuatro cifras en el dividendo. Problemas aritméticos escolares con dos y tres etapas,
	3º	Medidas y Geometría

4º	1º	Números de seis y siete cifras. Algoritmos de la suma, resta y multiplicación con multiplicador de mas de una cifra, problemas aritméticos escolares con varias etapas de suma y resta, y problemas multiplicativos (isomorfismos de medida de multiplicar). Números ordinales. Números romanos
	2º	Algoritmo de la división con divisor de una, dos y tres cifras. Se introducen las ideas de fracción y los conceptos de décimas y centésimas; escritura de números decimales. El tiempo, adición y sustracción de horas y minutos.
	3º	Magnitudes y geometría
5º	1º	Valor de posición de números de mas de seis cifras. Otros sistemas de numeración: números romanos. Algoritmos de las operaciones básicas, propiedades de las operaciones aritméticas, problemas aritméticos escolares de varias etapas aditivas y multiplicativas. Fracciones, comparación de fracciones. Adición y sustracción con el mismo denominador.
	2º	Decimales y operaciones con decimales. Resolución de problemas Medida del tiempo, sistema monetario y medidas de ángulos. Operaciones en estos sistemas.
	3º	Geometría
6º	1º	Sistema de numeración decimal: repaso. Practica de la multiplicación y la división. Propiedades de las operaciones. Divisores y múltiplos. Números primos y compuestos. Criterios de divisibilidad. Potencias y raices.
		Fracciones y decimales. Operaciones Múltiplos y divisores. Conceptos, mcm y MCD, criterios

	2º	de divisibilidad. Primos y compuestos. Descomposición en factores primos. Potencias y raíces. Números enteros: representación en la recta numérica, orden, sumas y restas.
	3º	Sistema medida de ángulos. Geometría.

Tabla I.7.3 Distribución de los contenidos del número y las operaciones en libros de textos de Edelvives 2011 (LOE)

Curso	Trimestre	Contenido
1º	1º	Se trabajan los primeros nueve números. Se introduce la idea de decena y se llega hasta el 29. Inicio de las operaciones de suma y resta, problemas aritméticos escolares de suma y resta con una componente gráfica muy importante de una etapa con cantidades inferiores a la decena (cambio y combinación).
	2º	Se trabaja el 30, como 3 decenas y los números del 30 al 39. Se trabaja el 40, como 4 decenas y los números del 40 al 49….Se trabaja el 90, como 9 decenas y los números del 90 al 99. Operaciones de suma con tres números y con números de dos cifras. Resta de números de dos cifras sin llevadas. Propiedad conmutativa de la suma.
	3º	Repaso de números al 99. Suma con llevadas de dos y tres sumando. Números pares e impares.

		Ordinales hasta el 10
2º	1º	Recuerdos de las ideas trabajadas en 1º. La centena, números hasta el 399. Algoritmo de sumas y restas con dos y tres cifras con y sin llevadas. Problemas aritméticos escolares de enunciado verbal, con apoyo visual, de una etapa con cantidades de dos cifras (cambio y combinación).
	2º	Continuación con la idea de centena, números hasta el 799 Descomposición de números en unidades, decenas y centenas. Los números de tres cifras. Algoritmo de sumas y restas con tres cifras, con y sin llevadas. Problemas aritméticos escolares de una etapa con cantidades de dos cifras (cambio y combinación). Inicio de la multiplicación, construcción de las tablas multiplicativas: 0, 1, 2, 4 , 5 y 10.
	3º	Repaso de los números Números hasta el 999 Continuación con la construcción de tablas: 3, 6, 7,8 y 9 Multiplicación sin llevadas. Reparto en partes iguales, inicio de la división. Problemas aritméticos escolares aditivos.
3º	1º	Recuerdos de lo trabajado en 2º curso: números hasta el 999. Números ordinales Idea del millar. Los números de cuatro cifras, hasta 9.999. Idea de las decenas de millar: números de cinco cifras, hasta el 99.999. Algoritmos de suma y resta con cantidades de tres y cuatro cifras. Problemas aritméticos escolares de una y dos etapas aditivas (cambio y combinación). Inicio del calculo mental: sumar 9,10 ,11; multiplicar por 10,100 y 1000. Repaso de tablas y multiplicación con y sin llevadas.
	2º	Reparto en partes iguales, algoritmo de la división con dos, tres y cuatro cifras en el dividendo. Problemas aritméticos escolares con dos y tres etapas, Calculo mental de sumas y resta; multiplicar números por

	3º	2 y 3; dividir entre 2 números acabados en cero, decenas o centenas pares. Resolución e invención de problemas aritméticos escolares.
4º	1º 2º	Recuerdos de lo trabajado en 3er Curso: -números hasta el 9.999. -números hasta el 99.999. Algoritmos de la suma, resta y multiplicación con multiplicador de mas de una cifra, problemas aritméticos escolares con varias etapas de suma y resta, y problemas multiplicativos (isomorfismos de medida de multiplicar). Algoritmo de la división con divisor de una y dos cifras. Continuación calculo mental. Se introducen las ideas de fracción y los conceptos de décimas y centésimas; escritura de números decimales.
	3º	El tiempo, adición y sustracción de horas y minutos. Resolución de problemas.
5º	1º 2º	Repaso de números hasta cinco cifras: hasta el 99.999. Inicio de números de seis cifras: centena de millar. Idea de la unidad de millón: números de siete cifras. Otros sistemas de numeración: números romanos. Algoritmos de las operaciones básicas, propiedades de las operaciones aritméticas, problemas aritméticos escolares de varias etapas aditivas y multiplicativas. Fracciones, comparación de fracciones. Adición y sustracción con el mismo denominador. Decimales y operaciones con decimales. Calculo mental. Resolución de problemas
	3º	Medida del tiempo, sistema monetario y medidas de ángulos. Operaciones en estos sistemas. Resolución de problemas.
6º		Fracciones y decimales. Operaciones Múltiplos y divisores. Conceptos, mcm y MCD, criterios de divisibilidad. Primos y compuestos. Descomposición en factores primos.

		Potencias y raíces. Números enteros: representación en la recta numérica, orden, sumas y restas.

Tabla I.7.4 Distribución de los contenidos del número y las operaciones en libros de textos de Editorial Bruño. Proyecto Lapiceros. 2008

Curso	Trimestre	Contenido
1º	1º	Se trabajan los primeros nueve números. Se introduce la idea de decena. Inicio de las operaciones de suma y resta, problemas aritméticos escolares de suma y resta con una componente gráfica muy importante de una etapa con cantidades inferiores a la decena (cambio y combinación).
	2º	Números de dos cifras. Serie numérica hasta el 40. Representación de los números sobre la recta numérica. Problemas con más de una operación
	3º	Repaso de números al 99. Suma con llevadas de dos y tres sumando. Resta sin llevadas.
2º	1º	Recuerdos de las ideas trabajadas en 1º. La centena, números hasta el 299. Algoritmo de sumas y restas con dos y tres cifras con y sin llevadas. Problemas aritméticos escolares de enunciado verbal, con apoyo visual, de una etapa con cantidades de dos cifras (cambio y combinación).
	2º	Continuación con la idea de centena, números hasta el 1000 Descomposición de números en unidades, decenas y centenas. Algoritmo de sumas (con y sin llevads) y restas (sin llevadas) con dos cifras. Problemas aritméticos escolares de una etapa con cantidades de dos cifras (cambio y combinación). Inicio de la multiplicación como suma de sumandos iguales; construcción de tablas: 2
	3º	Repaso de los números

		Números hasta el 999 Resta con llevadas. Sumas con tres sumandos. Continuación con la construcción de tablas: 4, 5 y 10 Problemas aritméticos escolares aditivos.
3º	1º	Recuerdos de lo trabajado en 2º curso: números hasta el 999. Números ordinales Idea del millar. Los números de cuatro cifras, hasta 9.999. Algoritmos de suma y resta con cantidades de tres y cuatro cifras. Problemas aritméticos escolares de una y dos etapas aditivas (cambio y combinación). Repaso de tablas y multiplicación con y sin llevadas.
	2º	Reparto en partes iguales, algoritmo de la división con dos y tres cifras en el dividendo. Problemas aritméticos escolares con dos y tres etapas, Calculo mental de sumas y resta; multiplicar números por 2 y 3; dividir entre 2 números acabados en cero, decenas o centenas pares.
	3º	Idea de las decenas de millar: números de cinco cifras, hasta el 99.999. Representación de números en la recta numérica. Práctica de la división; división de números de cuatro cifras. Resolución e invención de problemas aritméticos escolares.
4º	1º	Recuerdos de lo trabajado en 3er Curso: -números hasta el 9.999. -números hasta el 99.999. Algoritmos de la suma, resta y multiplicación con multiplicador de mas de una cifra, problemas aritméticos escolares con varias etapas de suma y resta, y problemas multiplicativos (isomorfismos de medida de multiplicar). Algoritmo de la división con divisor de una cifra. Continuación calculo mental. Números romanos
	2º	Se introducen las ideas de fracción y los conceptos de décimas y centésimas; escritura de números decimales.
	3º	Algoritmo de la división con divisor de dos cifra. Resolución de problemas.

5º	1º	Repaso de números hasta cinco cifras: hasta el 99.999. Inicio de números de seis cifras: centena de millar. Idea de la unidad de millón: números de siete cifras. Otros sistemas de numeración: números romanos. Algoritmos de las operaciones básicas, propiedades de las operaciones aritméticas, problemas aritméticos escolares de varias etapas aditivas y multiplicativas. Fracciones, comparación de fracciones. Adición y sustracción con el mismo denominador.
	2º	Decimales y operaciones con decimales. Calculo mental. Resolución de problemas
	3º	Medida del tiempo, sistema monetario y medidas de ángulos. Operaciones en estos sistemas. Resolución de problemas.
6º		Fracciones y decimales. Operaciones Múltiplos y divisores. Conceptos, mcm y MCD, criterios de divisibilidad. Primos y compuestos. Descomposición en factores primos. Potencias y raíces. Números enteros: representación en la recta numérica, orden, sumas y restas.

A1.8. Modelos de representación del numero natural en los libros de textos de Primaria

Tabla I.8.1 Modelos de representación del numero natural en los libros de textos de Primaria de la editorial Santillana (1995).

Editorial Santillana (1995)	Modelos físicos (Bloques, ábacos, sistema monetario)	Representación decimal	Cantidades estructuradas	Representación grafica: recta numérica	Configuraciones puntuales	Sistemas antiguos no posicionales	Otros sistemas posicionales
1º	X	X	X	X			
2º	X	X	X	X			

3º	X (Sistema monetario)	X		X			
4º	X (Sistema monetario)	X		X			
5º	X	X		X		X(Romano)	
6º	X	X		X		X(Romano)	

Tabla I.8.2 Modelos de representación del numero natural en los libros de textos de la Primaria de la editorial SM (2006)

Editorial SM(2006)	Modelos físicos (Bloques, ábacos, sistema monetario)	Representación decimal	Cantidades estructuradas	Representación grafica: recta numérica	Configuraciones puntuales	Sistemas antiguos no posicionales	Otros sistemas posicionales
1º	X (Bloques unifix,)	X	X	X			
2º	X (Bloques unifix,)	X	X				
3º	X (Abaco) (Sistema monetario)	X		X		Romano	Medida del tiempo
4º		X		X			Medida del tiempo
5º		X		X			
6º		X		X			Medidas de ángulos

Tabla I.8.3 Modelos de representación del numero natural en los libros de textos de Primaria de la editorial Edelvives (2011)

Editorial Edelvives (2011)	Modelos físicos (Bloques, ábacos, sistema monetario)	Representación decimal	Cantidades estructuradas	Representación grafica: recta numérica	Configuraciones puntuales	Sistemas antiguos no posicionales	Otros sistemas posicionales

1º	X (Abacos, bloques)	X	X	X			
2º	X (Abacos, bloques)	X	X	X			
3º	X (Abaco) (Sistema monetario)	X		X			
4º	(Sistema monetario)	X		X		Romano	
5º	X(Abaco)	X		X		X(Romano)	
6º		X		X			

Tabla I.8.4 Modelos de representación del numero natural en los libros de textos de Primaria de la editorial Bruño (2008)

Editorial Bruño(2008)	Modelos físicos (Bloques, ábacos, sistema monetario)	Representación decimal	Cantidades estructuradas	Representación grafica: recta numérica	Configuraciones puntuales	Sistemas antiguos no posicionales	Otros sistemas posicionales
1º	X (Sistema monetario) Vasos y bolas sueltas. Hileras de bolas ensartadas.	X	X				
2º	X (Bloques) (Sistema monetario) Grupos de vasos, Vasos y bolas sueltas. Hileras de bolas ensartadas.	X	X	X		Una actividad con el sistema chino(El rincón del sabio)	
3º	X	X		X			

4º	X (Sistema monetario)	X		X			
5º	X	X		X		X(Romano)	
6º	X	X		X		X(Romano)	

A1.9 Modelos de representación de los números naturales en los libros de textos de Primer curso de la ESO

Tabla I.9.1 Modelos de representación del numero natural en los libros de textos de 1º de la ESO.

Editorial	Sistemas antiguos no posicionales	Representación decimal	Otros sistemas posicionales	Representación grafica: recta numérica	Configuraciones puntuales
Bruño (2011)		X		X	
Oxford Educación (2011)	X (Egipcio y romano)	X		X	
Edelvives (2010)		X		X	X (Propone una actividad con números triangulares)
Guadiel (2010)	X (Egipcio y romano)	X	X (Babilónico)	X	

A1.10 Competencias del módulo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el grado de Maestro en educación Primaria

Tabla I.10.1 Competencias del módulo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

1. Competencias básicas de grado relacionadas con las competencias mínimas del Real Decreto 1393/2007, Anexo I, apartado 3	2.Competencias específicas del Grado de Educación Primara, Orden ECI/3854/2007, apartado 3.	4. Competencias específicas de los Módulos didáctico-disciplinares. Orden ECI/3854/2007, apartado 5. 4.3.Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas

1.01 Conocimiento comprensivo y significativo de un campo del saber disciplinar e interdisciplinar. 1.02 Aplicación eficaz, crítica y creativa del conocimiento comprensivo . 1.03 Elaboración de juicios informados y responsables así como propuestas de alternativas. 1.04 Comunicación ágil, clara, oral y escrita, utilizando los recursos de las TICs. 1.05 Colaboración, trabajo en grupo y respeto a la diversidad y a la discrepancia. 1.06 Autorregulación del propio aprendizaje y capacidad de aprender a lo largo de la vida con autonomía	2.01 Conocer las áreas curriculares de la educación primara, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje respectivos. 2.02 Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje, tanto individualmente como en colaboración con otros/as docentes y profesionales del centro. 2.04 Diseñar y regular espacios de aprendizaje en contextos de diversidad y que atiendan a la igualdad de género, a la equidad y al respeto a los derechos humanos que conformen los valores de la formación ciudadana. 2.05 Fomentar la convivencia en el aula y fuera de ella, resolver problemas de disciplina y contribuir a la resolución pacífica de conflictos. Estimular y valorar el esfuerzo, la constancia y la disciplina personal en el alumnado. 2.07 Colaborar con los distintos sectores de la comunidad educativa y del entorno social. Asumir la dimensión educadora de la función docente y fomentar la educación democrática para una ciudadanía activa. 2.08 Mantener una relación crítica y autónoma respecto de los saberes, los valores y las instituciones sociales públicas y privadas. 2.09 Valorar la responsabilidad individual y colectiva en la consecución de un futuro sostenible. 2.10 Reflexionar sobre las prácticas de aula para innovar y mejorar la labor docente. Adquirir hábitos y destrezas para el aprendizaje autónomo y cooperativo y promoverlo entre los/las estudiantes. 2.11 Conocer y aplicar en las aulas las tecnologías de la información y de la comunicación. Discernir selectivamente la información audiovisual que contribuya a los aprendizajes, a la formación cívica y a la riqueza cultural.	4.3.01 Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, geométricas, representaciones espaciales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.). 4.3.02 Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas en el ámbito de la Educación Primaria. 4.3.03 Plantear y resolver problemas de matemáticas, con especial atención a los vinculados con las situaciones reales y con la funcionalidad del pensamiento matemático. 4.3.04 Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico. 4.3.05 Fomentar actitudes y conductas positivas hacia la matemática y su didáctica, estimulando el esfuerzo, la disciplina, la convivencia, la igualdad y la diversidad en la educación matemática.

ANEXO II

Dualidades entre las orientaciones cognitiva, semiótica y hermenéutica de la interpretación en matemáticas

Comprender, explicar e interpretar en la tradición hermenéutica

A2.1 Dualidades entre las orientaciones cognitiva, semiótica y hermenéutica de la interpretación en matemáticas

Tabla II.2.1 Dualidades entre las orientaciones cognitiva, semiótica y hermenéutica de la interpretación en matemáticas

Rasgos tríadicos	Orientación Cognitiva	Orientación semiótica	Orientación hermenéutica
Estatus de la comprensión	*Epistemológico*: fenómeno cognitivo, proceso mental, modo de conocer	*Ontológico:* cualidad intrínseca, capacidad esencial del individuo.	*Metodológico:* Fase de la interpretación; movimiento del sentido a la referencia.
Espacio de interpretación	Traslado a las realidades cognitivas internas del sujeto.	Traslado a los entornos semióticos generados por la actividad matemática.	Traslado a referencias externas como el uso del conocimiento matemático.
Vía de acceso interpretativo	Observación de realizaciones externas objetivadas en registros verbales y escritos.	Práctica matemática visible y uso en ella de los sistemas de signos matemáticos.	Uso del conocimiento matemático (textualizado) durante la actividad matemática
Propósito de la interpretación	Estrechar progresivamente la distancia entre las realidades interna y externa.	Captar la complejidad de las relaciones semióticas desplegadas en la producción matemática.	Aproximar la experiencia matemática con sus formas de describirla y sus expectativas sobre ellas
Método	Círculo interpretativo en base a modelos de comprensión conjeturados a priori.	Modelo de *análisis estructural* de inspiración lingüística	Círculo hermenéutico
Fuente de objetividad interpretativa	Autonomía de las producciones matemáticas dada por la fijación y conservación en registros.	Estructura interna de las producciones semióticas.	Estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento matemático
Fronteras	Transición entre lo *interno* y lo *externo*; los propios rasgos mentales de la comprensión.	Suspensión de la referencia externa de los registros semióticos; omisión del texto como unidad de reflexión semiótica; transición *hablado-escrito.*	La cuestión ontológica de la existencia de los objetos matemáticos.

A2.2 Comprender, explicar e interpretar en la tradición hermenéutica

La crisis de la racionalidad surgida a finales del siglo XIX como consecuencia del reduccionismo positivista de las ciencias de la naturaleza promueve la búsqueda de un nuevo modelo científico, con objetivos y métodos propios, con el que extender los límites del conocimiento a la esfera de lo humano. De esta manera, teniendo como máximo exponente a Dilthey, se recuperan las ciencias del espíritu y en ellas se presenta la comprensión (*verstehen*) como método específico para la interpretación de la conducta humana y de las realidades culturales, en contraposición con la explicación (*erklären*) como método analítico-causal característico de las ciencias de la naturaleza (Abel, 1964). Comprensión y explicación se exhiben entonces en situación dicotómica como métodos distintos. En particular, a la comprensión se le confiere un carácter psicológico del que carece la explicación: *"[...] la comprensión, como método característico de las humanidades, es una forma de empatía (en alemán Einfühlung) o recreación en la mente del estudioso de la atmósfera espiritual, pensamientos, sentimientos y motivos, de sus objetos de estudio"* (Von Wright, 1987, p. 24). Es así como la comprensión se presenta como un traslado hacia el interior del psiquismo ajeno tomando como vía de acceso la interpretación de las configuraciones estables y de los signos objetivados exteriorizados por la subjetividad oculta. En esta etapa de la discusión la interpretación apunta a la reproducción (*Nachbildung*) de las experiencias vividas por otros, promocionando una objetividad que se sustenta en la fijación y conservación que la escritura confiere a las manifestaciones externas. A pesar de los intentos por dar consistencia a este enfoque interpretativo, la tensión generada por la exigencia de cientificidad para esta interpretación conduce no obstante a su progresiva despsicologización[1].

Uno de los esfuerzos de fundamentación más significativo para superar el problema del psiquismo y su objetividad lo encontramos por aquel entonces en el respaldo proporcionado por la noción husserliana de *intencionalidad*. El argumento principal se basa en que la intención de los actos del individuo, si bien es específica de la propia subjetividad por cuanto se experimenta como tal exclusivamente en ella, también es comunicable y por ello proporciona uno de los rastros visibles de la comprensión. Una segunda justificación más actual también la proporciona Habermas (1981) al discutir cómo las experiencias comunicativas se transforman en datos y la participación del intérprete en los procedimientos de interpretación. En este caso se sostiene que el intérprete accede a lo que quiere decir el sujeto ajeno sólo cuando penetra en las razones por las que sus emisiones o manifestaciones aparecen como racionales. Y la compatibilidad de la objetividad de la comprensión con la participación en un proceso de entendimiento se resuelve mediante las denominadas 'estructuras generales de los procesos de entendimiento', compartidas por el intérprete y por los implicados directos en la acción comunicativa. Estas estructuras son las que suministran al científico social los medios críticos con los que poder garantizar la objetividad de los conocimientos adquiridos (Habermas, 1981, p. 173). En definitiva, es a través de estas

[1] Ahora se sabe que este enfoque se ve afectado por el conocido *problema de las otras mentes* presente en la epistemología contemporánea. En dicho problema se discute la posibilidad de aceptar algún tipo de vínculo entre el estado mental de un sujeto ajeno y el de nosotros mismos como sus intérpretes así como de acceder a proposiciones sobre mentes distintas a la nuestra (Dancy, 1993).

estructuras como el observador puede controlar su influencia en el proceso de comunicación cuando interviene en él con la intención de comprenderlo, garantizando de este modo una transparencia en la relación entre los procesos de comprensión y de producción de datos.

La comprensión, dotada ahora de dimensión histórico-ontológica, desvía su atención hacia la referencia del texto (aquello sobre lo cual trata). Las hermenéuticas de Heidegger, primero, y de Gadamer, después, son las principales artífices de este desplazamiento que deslegitima tanto el acceso a la actividad psicológica como el traslado exclusivo al ámbito lingüístico. Como alternativa proponen desvincular la realidad del lenguaje del texto de la experiencia humana que subyace a él para captar únicamente la pretensión de aquello que se transmite. Es el círculo hermenéutico el que proporciona la justificación y el procedimiento para ello a través de la interpretación reiterada (Gadamer, 2000).

Finalmente, una solución dialéctica sólida para esta última polaridad la encontramos en Ricœur (2002), quien propone contemplar la interpretación del texto como un proceso complejo donde participan la explicación y la comprensión como fases complementarias del mismo arco hermenéutico. En concreto, la explicación aparece como la mediación entre dos etapas de comprensión. Así, el movimiento interpretativo se inicia con una comprensión superficial a modo de conjetura, consistente en la captación ingenua del sentido del texto en su totalidad; prosigue con la validación de este sentido mediante procedimientos considerados equivalentes en su carácter a la explicación estructural y desemboca en una comprensión crítica compleja que tiene como resultado la apropiación de la semántica profunda del texto, a saber, sus referencias no ostensivas o aquello sobre lo cual trata el texto .

"Comprender un texto es seguir su movimiento del sentido hacia la referencia, de lo que dice a aquello a lo cual se refiere. En este proceso, el papel mediador desempeñado por el análisis estructural constituye a la vez la justificación del enfoque objetivo y la rectificación del enfoque subjetivo" (Ricœur, 2002, p.192).

A partir de aquí, la interpretación ya no busca su norma de inteligibilidad en la comprensión del otro sino que el objeto de la hermenéutica se traslada de la vivencia expresada en el texto (*quien allí se pronuncia*) a su propio sentido (*lo que dice*) y a su referencia (*aquello sobre lo cual trata*) (Ricoeur, 2002). En este contexto, la hermenéutica gadameriana puede considerarse un ejemplo de tal giro.

En principio, la línea ontológica es iniciada por Heidegger, al considerar la comprensión como uno de los existenciarios de la Existencia (*Dasein*), es decir, el carácter existencial original de la vida humana es comprender, o de otro modo, comprender es un modo de ser distintivo de la persona, un modo privilegiado de experiencia de los integrantes del mundo (Ferrater, 1994). Ricoeur tomará de la ontología heideggeriana la mundanización de la comprensión, esto es, el desplazamiento de la pregunta por el otro (el *ser con*) a la pregunta por el mundo (el *ser en*), de la que derivará su atención a la *referencia* del texto. *"La primera función del comprender es orientarnos en una situación. El comprender no se dirige pues a la captación de un hecho, sino a la aprehensión de una posibilidad de ser. No deberemos perder de vista este punto cuando extraigamos las consecuencias metodológicas de este análisis: comprender un texto, diremos, no es encontrar un sentido inerte que allí estaría contenido; es desarrollar la posibilidad de ser indicada por el texto. Así* *seremos fieles al comprender heideggeriano que es esencialmente un proyectar…”* (Ricoeur, 2002, p.86)

Y siguiendo la línea ontológica heideggeriana, Gadamer (2000) separa la comprensión de su sentido metodológico para dotarla de una dimensión histórico-ontológica. No se trata ya de un método para el acceso a las ciencias del espíritu que compite con la explicación, sino de una estructura ontológica del ser humano como ser histórico. En sus planteamientos la comprensión aparece de nuevo estrechamente vinculada con la interpretación (*Auslegung*) pero esta vez a raíz de la preocupación central por esclarecer porqué la comprensión del texto es necesariamente el resultado de un esfuerzo hermenéutico o de interpretación reiterada de lo que se transmite. La respuesta atiende al siguiente argumento: “*[...] En la medida en que sólo percibimos lingüísticamente el mundo, y en la medida en que la palabra, el documento escrito, el texto en definitiva, no puede absorber en sí al sujeto que habla ni aquello de lo que se habla, resulta entonces que el objeto y sujetos del lenguaje no llegan a superar su alteridad. Por eso un mensaje, y por supuesto aquel que nos llega en la tradición, no puede ser inmediatamente entendido: es siempre ese texto extraño que hemos de esforzarnos en comprender por la vía de su constante reinterpretación”* (Hernández-Pacheco, 1996, pp. 252-253). Desde esta perspectiva, la justificación de cómo se llega a comprender un texto, en el sentido de captar su *cosa*, viene dada a través del conocido ‘círculo hermenéutico’. Éste es el espacio en el que se forma el sentido histórico-ontológico de la comprensión por ser un movimiento que se origina entre la tradición y el intérprete. Básicamente, la comprensión de un texto queda completada cuando se alcanza un total acuerdo entre el sentido de la totalidad del texto anticipado por el intérprete (*precomprensión*) y el análisis subsiguiente de todas sus particularidades. Si alguna de ellas no encajara en el sentido total sería necesaria la corrección y ampliación de éste. *“El movimiento de la comprensión discurre así del todo a la parte y de nuevo al todo. La tarea es ampliar en círculos concéntricos la unidad del sentido comprendido. La confluencia de todos los detalles en el todo es el criterio para la rectitud de la comprensión. La falta de tal confluencia significa el fracaso de la comprensión”* (Gadamer, 2000, p.63). Más allá de sus limitaciones, el círculo hermenéutico evidencia la posibilidad de una interpretación del texto contemplado como un todo, es decir, la consideración del texto en su totalidad como unidad interpretativa.

La discusión de principios del siglo XX en torno a la dicotomía entre explicación, como método propio de las ciencias de la naturaleza que procede de acuerdo a la identificación de secuencias regulares entre acontecimientos, fases o estadios de un proceso, y la comprensión, como método particular de las ciencias del espíritu que tiene por objeto la captación de subjetividades ajenas, evoluciona a lo largo de la primera mitad de siglo hacia una nueva dicotomía entre explicar y comprender hecha presente en el ámbito del texto. Ahora la explicación aparece como método perteneciente al campo de la lingüística (explicación estructural como aprehensión del sentido o significado del texto basada en la identificación de correlaciones estables entre unidades discretas de un mismo tipo) y la comprensión ha desviado su atención de toda apropiación subjetiva a la referencia del texto.

Ante tal situación, Ricoeur (2002) sugiere, primeramente para el ámbito del texto, una solución dialéctica para la dicotomía consistente en contemplar la explicación y la comprensión como momentos complementarios del mismo arco hermenéutico del texto. Esto es, propone un concepto más amplio de interpretación con un único arco hermenéutico que tiene a la explicación y la comprensión en dos etapas o sectores diferentes. *"Por dialéctica entiendo la consideración según la cual explicar y comprender no constituirían los polos de una relación de exclusión sino los momentos relativos de un proceso complejo que se puede llamar interpretación*" (Ricoeur, 2002, p. 150). Así, el movimiento interpretativo se inicia con una comprensión superficial a modo de conjetura, consistente en la captación ingenua del sentido del texto en su totalidad; prosigue con la validación de este sentido mediante procedimientos considerados equivalentes en su carácter a la explicación estructural y desemboca en una comprensión crítica compleja que tiene como resultado la apropiación de la semántica profunda del texto, a saber, sus referencias no ostensivas o aquello sobre lo cual trata el texto.

"Comprender un texto es seguir su movimiento del sentido hacia la referencia, de lo que dice a aquello a lo cual se refiere. En este proceso, el papel mediador desempeñado por el análisis estructural constituye a la vez la justificación del enfoque objetivo y la rectificación del enfoque subjetivo" (Ricœur, 2002, p.192).

ANEXO III

Cuestionarios correspondientes al modelo local previo. PCN0

Primera prueba de comprensión numérica PCN1

Primera prueba de comprensión numérica PCN2

Primera prueba de comprensión numérica PCN3

Tareas que componen la entrevista

A3.1. Cuestionarios correspondientes al modelo local previo. PCN0

PRUEBA EXPLORATORIA A. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

1.(I.V.C).

Escribir con letras los números siguientes:

4 3 7 5 8 ....

2 5 0 0 7 ....

1 0 0 4 3 ....

2. (I.V.L). Escribir con cifras los números siguientes:

Quincemil trescientos cuarenta y ocho. ....

Sesenta y ocho mil cuarenta y siete. ....

Cuarenta y cinco mil trescientos cuarenta. ....

3. II. V. C.

Escribir con letras tres números comprendidos entre el cincuenta y dos mil ocho y el cincuenta y tres mil uno.

....

....

....

4.II.V.L. **Escribe con letras el mayor número posible con las cifras 3 , 2, 0, 5.**

....

5. II.V.L. ¿ Cuántas decenas hay en el número doscientos cuarenta y cinco?

....

6. I.V.L. **¿ Cual es la** cifra de las **decenas en el** número trecemil cuatrocientos treinta y cinco?

....

7. II.V.L. **Escribe con letras el número que está formado** por cinco **decenas de millar** y siete centenas.

....

8.II.V.C.

Escribe con cifras el número que está formado por dos decenas de millar y tres centenas.

....

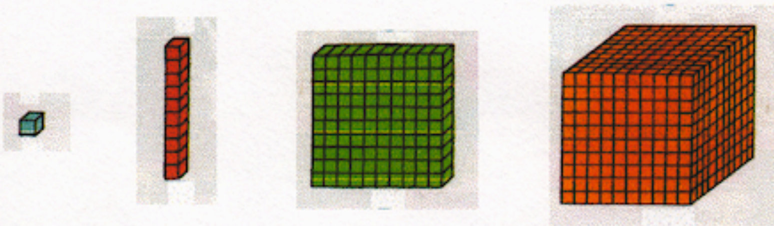
9.III.V.C.

Los padres de Antonio le han comprado caramelos para su cumpleaños. Los han comprado sueltos, en paquetes de diez caramelos y en bolsas de diez paquetes. Indica cuántos caramelos compraron entre los dos si su padre les llevó : 2 bolsas , 3 paquetes y 5 caramelos; y su madre 5 bolsas , 14 paquetes y 12 caramelos.

10.III.C

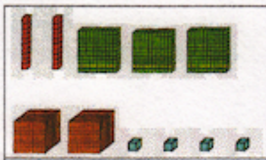
Después del cumpleaños le sobraron a Antonio 428 caramelos, y los quiere devolver a la tienda. ¿ Cuántas bolsas, paquetes y caramelos formará ?

11.III.L.

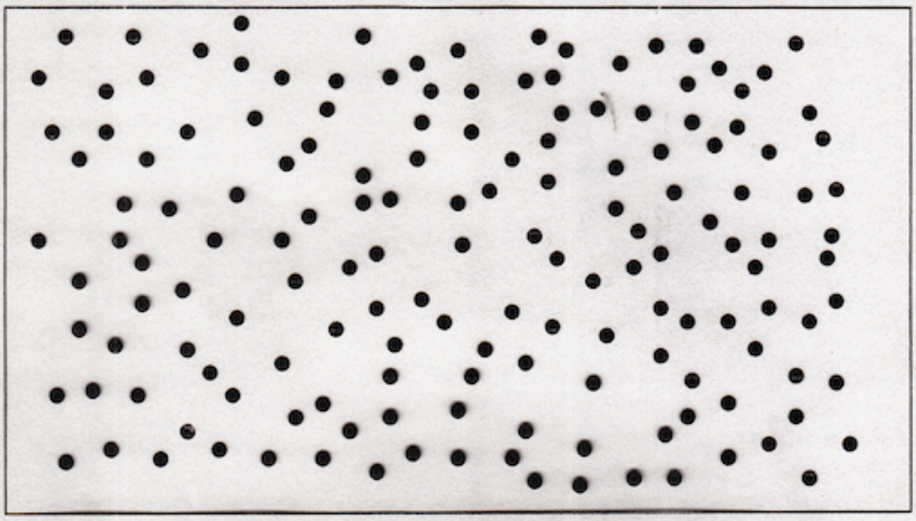


Unidad Barra: 10 unidades Placa: 10 barras Cubo: 10 placas

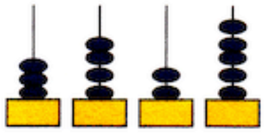
Completar la siguiente tabla

	Con cifras	Con letras
	2 3 2 4 unidades	
		
		
	2 1 4 3 unidades	

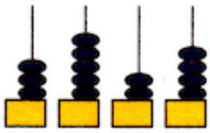
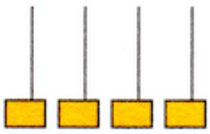
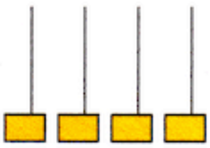
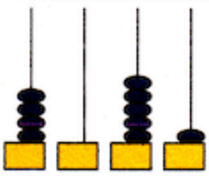
12. III. F.C ¿ Cuántos puntos hay ?



11.III.F. En el ábaco se pueden representar números. El número 3 4 2 5 se representa así:



Completa la siguiente tabla:

	Con cifras	Con letras
		
	5 2 3 1	
		Seis mil trescientos uno.
		

11.(III.F.) Los habitantes de un planeta muy lejano para representa el número tres mil cuatrocientos veinticuatro , utilizan la siguiente expresión:

Nos han mandado un mensaje para que completemos la siguiente tabla. Nos puedes ayudar.

	Con cifras	Con letras
		
	2 4 6 1	
		Tres mil doscientos cuarenta y uno
		Cuatro mil ocho.

A3.2 Primera prueba de comprensión numérica PCN1

Cuestionario

Comprensión y dominio del Sistema de Numeración Decimal

Apellidos:		Nombre:
Curso:	Grupo:	Fecha:

Completa	
IT1.1 y IT1.2	
Quince mil trescientos cuarenta y ocho	1 5 3 4 8
Doscientos cuarenta y cinco mil siete	
Cincuenta mil trece	
IT2.1 y IT2.1	
9 7 0 2 9	noventa y siete mil veintinueve
2 1 0 2 0 0 4	
3 1 0 0 3 0 0	
IO3.1, IO3.2, IO3.3 y IO3.4	
	el número siguiente es (con letras):
dos mil cuatrocientos ocho	
ciento cuatro mil noventa y nueve	
	el número anterior es (con letras):
ciento diez mil	
Tres mil veinte	
IO4.1 y IO4.2	
	el número siguiente es (con cifras):
2 0 3 0 9 9	
	el número anterior es (con cifras):
3 0 4 0 0 0	
IN5.1, IN5.2, IN5.3 y IN5.4	
	Subraya o rodea con un círculo
La cifra de las centenas	4 5 6 2
La cifra de las decenas	3 8 9 1
La cifra de las centenas de millar	2 3 4 4 0 0 9

La cifra de las unidades de millar	1 0 3 0 2
IN6.1 y IN6.2	
	La cifra señalada es la cifra de las:
2 **7** 0 3 2	unidades de millar
3 0 **0** 0 0	
8 0 1 2 0	
Espacio para anotaciones / operaciones / borrador	

IIN7.1 y IIN7.2	
	Escribe el número (con cifras):
once mil once cientos once	
Doscientos dos miles doscientos siete	
Espacio para anotaciones / operaciones / borrador	
IIN8.1 y IIN8.2	
en el numero 8 2 3 4 . . .	hay __________ centenas
en el número 2 1 0 0 0 4 . . .	hay __________ decenas de millar
Espacio para anotaciones / operaciones / borrador	
IIN9.1 y IIN9.2	
	Escribe (con cifras) el número que corresponde a…
tres decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades	__________
siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas y diecisiete unidades	__________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIN10	
	Escribe el número (con cifras):
Un número de cuatro cifras tal que al aumentarlo en 10 decenas se modifican las cifras de las unidades de millar y la de las decenas de millar	Respuesta: ________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIN11	Escribe el número (con cifras):
Mi amigo Roberto juega conmigo un décimo de un número de la lotería del niño. Para adivinarlo me da las siguientes pistas: - La cifra de las centenas es el doble de la cifra de las unidades. - El número contiene 16 centenas. - La cifra de las decenas es la suma de las cifras de las unidades y las de las unidades de millar	Respuesta: ________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIO12.1 y IIO12.2	
	el número siguiente (con cifras) es:
El número formado por 13 centenas y 4 decenas	____________

	el número anterior (con cifras) es:
El número formado por 10 unidades de millar y 25 decenas	______________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

Explica

IIA13.1 y IIA13.2

En la resolución de la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} 368 \\ +\ 457 \\ \hline 825 \end{array}$$

Hacemos los siguientes cálculos:

- 8 + 7 = 15 (escribo 5) y me llevo 1
- 6 + 5 = 11, (a) 11 + **1** que llevo = 12, escribo 2, me llevo 1
- 3 + 4 = 7, (b) 7 + **1** que llevo = 8, escribo 8

13.1-¿Qué significa el uno (**1**) en (a) ?

13.2-¿Qué significa el uno (**1**) en (b) ?

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIA14.1 y IIA14.2

En la siguiente resta:

```
   5 6 2
-    3 6
________

 5  2  6
```

Operamos así:

- De 6 a 12 van 6 y me llevo 1
- (a): 3 + **1** = 4, de 4 a 6 van 2
- De 0 a 5 = 5

14.1-¿Por qué digo de "6 a 12" si sólo hay un 2?

14.2-¿Por qué sumo **1** en (a)?

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIA15.1, IIA15.2 y IIA15.3

Al realizar la siguiente multiplicación:

```
    2 5 8
x     2 6
__________
  1 5 4 8
  5 1 6
__________
  6 7 0 8
```

Decimos:

- 6 x 8= 48, coloco el 8 y me llevo 4.
- 6x 5 = 30, 30 + 4 que me llevaba = 34 .....

15.1-¿Qué significan las 4 que me llevo?

15.2-¿Por qué se las sumo a las 30 en el segundo cálculo?

15.3-¿Por qué colocamos el 6 de la segunda fila debajo de 4 de la primera?

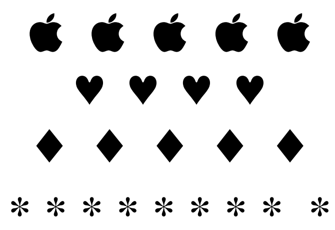
Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

Resuelve y explica

IIC16.

Una manzana () equivale a 10 corazones (♥), un corazón (♥) equivale a 10 rombos (♦)
un ♦ equivale a 10 asteriscos (∗).

¿A cuantos asteriscos equivale la cantidad representada en el cuadro de la derecha?



Respuesta: ______________

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIIC17

El producto estrella de la empresa “El chocolate” es la bolsa de 8 bombones de licor. Para su transporte utiliza: paquetes con 8 bolsas cada uno y cajas con 8 paquetes cada una.

Pedro ha dibujado en el cuadro de la derecha todos los bombones de licor que necesita para invitar a sus amigos en su cumpleaños.

Ayúdanos a realizar su pedido indicando los paquetes, bolsas y bombones sueltos que debe comprar

⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕

Número de paquetes: Número de bolsas: Número de bombones sueltos:

____________ ____________ ____________

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIIA18.1 y IIIA18.2

Las ventas de		Cajas	Paquetes	Bolsas	Bombones	forma

bombones en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha, en la que, en la ultima columna, se incluye una forma abreviada para escribir estas cantidades (**<u>el subíndice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8</u>**))

					<u>abreviada</u>
2009	2	6	7	5	2675_8
2010	3	4	5	6	3456_8

18.1-Expresa el total de ventas en los dos años.

18.2-Expresa el incremento producido en el año 2010 (número de bombones que se han vendido de más en el 2010 con respecto al 2009)

IIIC19

Pedro ha dibujado en el recuadro de la derecha los bombones que han sobrado en su fiesta de cumpleaños. Expresa dicha cantidad utilizando **<u>la notación abreviada</u>**

⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕

Respuesta : _______________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIIA20.1 y IIIAO20.2

En la siguiente tabla están reflejados los

	1ª	2º

pedidos de tres diferentes confiterías en los dos semestres del años 2010			
	Miel y nata	756_8	2026_8
	La Exquisita	706_8	1203_8
	La Parisina	2503_8	1404_8

20.1-Indica el pedido global de cada una de las tres confiterías en el 2010

20.2-Indica la confitería con mayor y menor pedidos, y la diferencia de pedidos entre ambas

Espacio para anotaciones / operaciones

IIIA21.1 y IIIA21.2

La fabrica "El chocolate" también vende bombones en otro formato, en el que las bolsas contienen 6 bombones, los paquetes 6 bolsas y las cajas 6 paquetes. La siguiente tabla representa el pedido de dos confiterías en los formatos 6 y 8 para las dos quincenas del mes de marzo de 2011

	1ª quincena	2º quincena
Miel y nata	$206_{(8}$	$175_{(8}$
La Parisina	$223_{(6}$	$305_{(6}$

21.1-¿Cuál es el pedido total para el mes de marzo en cada una de las dos confiterías?

21.2-¿Cuál es la diferencia entre ambos pedidos?:

Espacio para anotaciones / operaciones

IIIA22

Si las ventas del mes de abril de "La Parisina" han sido : 2 0 $4_{(6}$ y se espera que en los cuatro meses siguientes se va a vender cada mes la misma cantidad, ¿cuál será el pedido para los siguientes cuatro meses?

Espacio para anotaciones / operaciones

IIIA23

La confitería “Miel y Nata” ha realizado un pedido de 3 4 0 6$_{(8}$ para los siguientes 6 meses.

¿Cuánto deberá vender cada mes para agotar el pedido en dicho periodo?

Espacio para anotaciones / operaciones

III.IIA24.1 y III.IIA24.2

Un matemático contratado por la fabrica “El chocolate” para organizar los pedidos en diferentes formatos, introduce el agrupamiento indeterminado **“a”** (**a** bombones en cada bolsa, **a** bolsa en cada paquete y **a** paquetes en cada caja).
En la tabla adjunta están registradas las cantidades vendidas en diferentes meses.

Junio	Julio	Agosto	Septiembre
a-1 a-1 a-1 $_{(a}$	1 1 1 $_{(a}$	a-2 a-1 a-1$_{(a}$	a-1 2 2 $_{(a}$

(**a-1 a-1 a-1** $_{(a}$ representa ventas de a-1 paquetes, a-1 bolsa y a-1 bombones con agrupamientos de a en a)

24.1-¿ Cuál será la cantidad vendida en los meses de junio y julio?

24.2-¿Cuál ha sido el incremento de ventas entre los meses de agosto y septiembre?

Espacio para anotaciones / operaciones

A3.3 Segunda prueba de comprensión numérica PCN2

Cuestionario

Apellidos:		Nombre:
Curso: Grupo:	Fecha:	

Estudios realizados :

Completa	
IT1.1 y IT1.2	
Quince mil trescientos cuarenta y ocho	1 5 3 4 8
Doscientos cuarenta y cinco mil siete	
Cincuenta mil trece	
IT2.1	
9 7 0 2 9	noventa y siete mil veintinueve
3 1 0 0 3 0 0	
IO3.1, IO3.2, IO3.3 y IO3.4	
	el número siguiente es (con letras):
dos mil cuatrocientos ocho	
ciento cuatro mil noventa y nueve	
	el número anterior es (con letras):
ciento diez mil	
Tres mil veinte	
IO4.1 y IO4.2	
	el número siguiente es (con cifras):
2 0 3 0 9 9	
	el número anterior es (con cifras):
3 0 4 0 0 0	
IN5.1, IN5.2 y IN5.3	
	Subraya o rodea con un círculo
La cifra de las centenas	4 5 6 2
La cifra de las decenas	3 8 9 1
La cifra de las centenas de millar	2 3 4 4 0 0 9

IIN8.1 y IIN8.2	
en el numero 8 2 3 4 . . .	hay ___________ centenas
en el número 2 1 0 0 0 4 . . .	hay ___________ decenas de millar

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIN9.1 y IIN9.2	
	Escribe (con cifras) el número que corresponde a…
tres decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades	___________
siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas y diecisiete unidades	___________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIN11	Escribe el número (con cifras):
Mi amigo Roberto juega conmigo un décimo de un número de la lotería del niño. Para adivinarlo me da las siguientes pistas: - La cifra de las centenas es el doble de la cifra de las unidades. - El número contiene 16 centenas. - La cifra de las decenas es la suma de las cifras de las unidades y las de las unidades de millar	Respuesta: __________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

Explica

IIA13

En la resolución de la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} 368 \\ +\ 457 \\ \hline 825 \end{array}$$

Hacemos los siguientes cálculos:

- 8 + 7 = 15 (escribo 5) y me llevo 1
- 6 + 5 = 11, (a) 11 + **1** que llevo = 12, escribo 2, me llevo 1
- 3 + 4 = 7, (b) 7 + **1** que llevo = 8, escribo 8

13.1-¿Qué significa el uno (1) en (b) ?

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIA14

En la siguiente resta:

```
  5 6 2
-   3 6
_______
  5 2 6
```

Operamos así:

- De 6 a 12 van 6 y me llevo 1
- (a): 3 + **1** = 4, de 4 a 6 van 2
- De 0 a 5 = 5

14.1-¿Por qué sumo **1** en (a)?

IIA15.1 y IIA15.2

Al realizar la siguiente multiplicación:

```
    2 5 8
x     2 6
_________
  1 5 4 8
  5 1 6
_________
  6 7 0 8
```

Decimos:

- 6 x 8= 48, coloco el 8 y me llevo 4.
- (a) 6x 5 = 30, 30 + 4 que me llevaba = 34, coloco el 4 y me llevo 3
- (b) 6x2 = 12, 12 + 3 que me llevaba =15….

15.1-¿Qué significan las 3 que me llevo en (b)?

15.2-¿Por qué colocamos el 6 de la segunda fila debajo del 4 de la primera?

Resuelve y explica

IIC16

Una manzana () equivale a 10 corazones (♥), un corazón (♥) equivale a 10 rombos (♦)
un ♦ equivale a 10 asteriscos (∗).

¿A cuantos asteriscos equivale la cantidad representada en el cuadro de la derecha?

♥ ♥ ♥ ♥

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

Respuesta: ______________

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIIC17

El producto estrella de la empresa “El chocolate” es la bolsa de 8 bombones de licor. Para su transporte utiliza: paquetes con 8 bolsas cada uno y cajas con 8 paquetes cada una.

Pedro ha dibujado en el cuadro de la derecha todos los bombones de licor que necesita para invitar a sus amigos en su cumpleaños.

Ayúdanos a realizar su pedido

⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕

indicando los paquetes, bolsas y bombones sueltos que debe comprar	

Número de paquetes: Número de bolsas: Número de bombones sueltos:

____________ ____________ ___________

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIIA18.1 y IIIA18.2

Las ventas de bombones en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha, en la que, en la ultima columna, se incluye una **forma abreviada** para escribir estas cantidades (**el subíndice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8**))

	Cajas	Paquetes	Bolsas	Bombones	FORMA ABREVIADA
2009	2	6	7	5	2675_8
2010	3	4	5	6	3456_8

18.1-Expresa el total de ventas en los dos años.

18.2-Expresa el incremento producido en el año 2010

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIIC19

Pedro ha dibujado en el recuadro de la derecha los bombones que han sobrado en su fiesta de cumpleaños. Expresa dicha cantidad utilizando **<u>la notación abreviada</u>**	⊕ ⊕

Respuesta : ________________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIIA20.1 y IIIA20.2

En la siguiente tabla están reflejados, en forma abreviada, los pedidos de tres diferentes confiterías en los dos semestres del años 2010

	1ª	2º
Miel y nata	756_8	2026_8
La Exquisita	706_8	1203_8
La Parisina	2503_8	1404_8

20.1-Indica el pedido global de cada una de las tres confiterías en el 2010

20.2-Indica la confitería con mayor y menor pedidos, y la diferencia de pedidos entre ambas

Espacio para anotaciones / operaciones

IIIA21.1 y IIIA21.2

La fabrica “El chocolate” también vende bombones en otro formato, en el que las bolsas contienen 6 bombones, los paquetes 6 bolsas y

	1ª quincena	2º quincena
Miel y nata	$206_{(8}$	$175_{(8}$

las cajas 6 paquetes. La siguiente tabla representa el pedido de dos confiterías en los formatos 6 y 8 para las dos quincenas del mes de marzo de 2011	La Parisina | $243_{(6}$ | $335_{(6}$

21.1-¿Cuál es el pedido total para el mes de marzo en cada una de las dos confiterías?

21.2-¿Cuál es la diferencia entre ambos pedidos?:

Espacio para anotaciones / operaciones

IIIA22

Si las ventas del mes de abril de "La Parisina" han sido : 2 0 $4_{(6}$ y se espera que en los cuatro meses siguientes se va a vender cada mes la misma cantidad, ¿cuál será el pedido para los siguientes cuatro meses?

Espacio para anotaciones / operaciones

III.IIA24.1 y III.IIA24.2

Un matemático contratado por la fabrica "El chocolate" para organizar los pedidos en diferentes formatos, introduce el agrupamiento indeterminado **"a"** (**a** bombones en cada bolsa, **a** bolsa en cada paquete y **a** paquetes en cada caja).

Junio	Julio	Agosto	Septiembre
a-1 a-1 a-1 (a	1 1 1 (a	a-2 a-1 a-1(a	a-1 2 2 (a

(**a-1 a-1 a-1** (a representa ventas de a-1 paquetes, a-1 bolsa y a-1 bombones con agrupamientos de a en a)

En la tabla adjunta están registradas las cantidades vendidas en diferentes meses.	
24.1-¿ Cuál será la cantidad vendida en los meses de junio y julio? 24.2-¿Cuál ha sido el incremento de ventas entre los meses de agosto y septiembre?	
Espacio para anotaciones / operaciones	

A3.4 Tercera prueba de comprensión numérica PCN3

Cuestionario

Apellidos:		Nombre:
Curso:	Grupo:	Fecha:

Estudios realizados :

Completa

IN5.1, IN5.2 y IN5.3

	Rodea con un círculo
La cifra de las centenas	4 5 6 2
La cifra de las decenas	3 8 9 1
La cifra de las centenas de millar	2 3 4 4 0 0 9

IIN9.1 y IIN9.2

	Escribe con cifras el número que corresponde
tres decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades	_______________
siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas y diecisiete unidades	_______________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIN8.1 y IIN8.2

el numero 8 2 3 4 . . .	… contiene ___________ centenas
el número 2 1 0 0 0 4 . . .	… contiene ___________ decenas de millar

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIN11

	Escribe el número (con cifras):
Mi amigo Roberto juega conmigo un décimo de un número de la lotería del niño. Para adivinarlo me da las siguientes pistas: - La cifra de las centenas es el doble de la cifra de las unidades. - El número contiene 16 centenas. - La cifra de las decenas es la suma de las cifras de las unidades y las de las unidades de millar	Respuesta: __________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

Explica

IIA13

Para hacer la suma:

```
    3 6 8
+   4 5 7
---------
    8 2 5
```

hacemos lo siguiente:

- 8 + 7 = 15 (escribo 5) y me llevo 1
- 6 + 5 = 11, (a) 11 + **1** (que llevo) = 12, escribo 2, me llevo 1
- 3 + 4 = 7, (b) 7 + **1** (que llevo) = 8, escribo 8

¿Qué significa el uno (**1**) en (b) ?

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

IIA14

En la siguiente resta:

```
    5 6 2
-     3 6
---------
    5 2 6
```

Operamos así:

(a) - De 6 a 12 van 6 y me llevo 1
(b) - 3 + **1** = 4, de 4 a 6 van 2
(c) - De 0 a 5 = 5

¿Por qué sumo **1** en (b)?

IIA15.1 y IIA15.2

Al hacer la multiplicación:

```
    2 5 8
    x 2 6
  -------
  1 5 4 8
  5 1 6
  -------
  6 7 0 8
```

Decimos:
(a) 6 x 8= 48, escribo 8 y me llevo 4.
(b) 6x 5 = 30, 30 + 4 (que me llevaba) = 34, escribo 4 y me llevo 3
(c) 6x2 = 12, 12 + 3 (que me llevaba) =15 ....

15.1-¿Qué significa el **3 que se suma a 12** en (c)?

15.2-¿Por qué colocamos el 6 de la segunda fila debajo del 4 de la primera?

Resuelve y explica

IIIC17

La fábrica de vasos La Universal vende su producción en unidades sueltas, en paquetes de 8 vasos cada uno, en cajas de

8 paquetes y en palet de 8 cajas cada una.

En la figura se representan los vasos del pedido del Restaurante “Los claveles”, ayúdanos a organizarlos indicando las cajas, paquetes y vasos sueltos que se enviaran.

Por grupos separados:

Número de cajas: ____________ Número de paquetes: ____________ Número de vasos sueltos: ____________

De forma abreviada:

Subíndice (Número que indica el tamaño de los agrupamientos)

Explica aquí cómo obtienes el resultado:

IIIN.25

En unas notas de pedidos de la fabrica La Universal aparecen las anotaciones siguientes. Indica en cada caso si son correctas o erróneas explicando porqué y añadiendo la expresión correcta en su caso

Por grupos separados (de 8 en 8):

cajas	paquetes	vasos sueltos
__2___	____8___	______4______
__1___	____0___	_____9______

De forma abreviada:

IIIA18.1 y IIIA18.2

Las ventas de vasos en los dos últimos años se recogen en la

	Palets	Cajas	Paquetes	Vasos	FORMA ABREVIADA

tabla de la derecha

2010	2	6	7	5	2675_8
2011	3	4	5	6	3456_8

18.1-Expresa en forma abreviada el total de ventas en los dos años y explica cómo haces los cálculos.

18.2-Expresa el incremento producido en el año 2011 y explica cómo haces los cálculos.

IIIA20.1 y IIIA20.2

En la siguiente tabla están reflejados, en forma abreviada, los pedidos de vasos de los hoteles "Málaga Palacio" y "Los Naranjos" en los años 2010 y 2011

	2010	2011
Málaga Palacio	756_8	2026_8
Los Naranjos	2503_8	1404_8

20.1-Indica el pedido global en ambos años de cada uno de los hoteles

20.2-Indica la diferencia entre los pedidos globales de ambos hoteles en dichos años

III.II.A24.1 y III.IIA24.2

La Universal quiere organizar los pedidos en diferentes formatos, para lo que introduce el agrupamiento indeterminado "x" (x vasos en cada paquetes, x paquetes en cada caja y x cajas en cada palet).
En la tabla adjunta están registradas las cantidades vendidas en diferentes meses.

Junio	Julio	Agosto	Septiembre
x-1 x-1 x-1 (x	**1 1 1** (x	**x-2 x-1 x-1**(x	**x-1 2 2** (x

Donde **x-1 x-1 x-1** (x representa una venta de x-1 cajas, x-1 paquetes y x-1 vasos con agrupamientos de x en x

24.1-¿ Cuál será la cantidad vendida en los meses de junio y julio?

24.2-¿Cuál ha sido el incremento de ventas entre los meses de agosto y septiembre?

III.IIA.26

Si los vasos vendidos en el mes de octubre son x-1 x-1 x-8 (x y se ha distribuido por igual entre x-2 hoteles ¿Cuántos corresponden a cada uno de ellos?

A3.5 Tareas que componen la entrevista

3.5.1 Tarea 1 (IT.2)

1(IT.2). Lee en voz alta los siguientes números :

3 0 5 9

9 7 0 2 9

3 1 0 0 3 0 0

1 2 0 0 3 0 0 5

3 0 0 0 1 0 0 0

3.5.2 Tarea 2(IO.3)

2(IO.3). Escribe con cifras el siguiente de los números:

ciento diez mil

tres mil veinte

3.5.3 Tarea 3 (IN.5)

3(IN.5). Señala en los siguientes números :

La cifra que ocupa el lugar de las centenas: 2 0 3 4 5 6

La cifra que ocupa el lugar de las centenas de millar: 3 8 2 5 0 8

3.5.4 Tarea 4(IIN.8)

4(IIN.8). Indica el número de unidades de distintos órdenes que hay en un número

El número 8 2 3 4 ¿Cuántas centenas contiene?

¿Cúantas unidades contiene?

¿Cuántas decenas contiene?

3.5.5 Tarea 5(IIN.11)

5(IIN.11). Mi amigo Roberto juega conmigo un décimo de un número de la lotería del niño. Para adivinarlo me da las siguientes pistas:
- La cifra de las centenas es el doble de la cifra de las unidades.
- El número contiene 16 centenas.
- La cifra de las decenas es la suma de las cifras de las unidades y las de las unidades de millar

3.5.6 Tarea 6 (IIN.12)

6(IIN.12). Escribe con cifras los números que corresponden a:

Trece decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades

Siete unidades de millar, trece centenas, dieciseis decenas y diecisiete unidades

3.5.7 Tarea 7 (IIA.13)

7(IIA.13) . Realiza las siguientes operaciones en voz alta

$$\begin{array}{r} 3\ \ 6\ \ 8 \\ +\quad 4\ \ 5\ \ 7 \\ \hline \end{array}$$

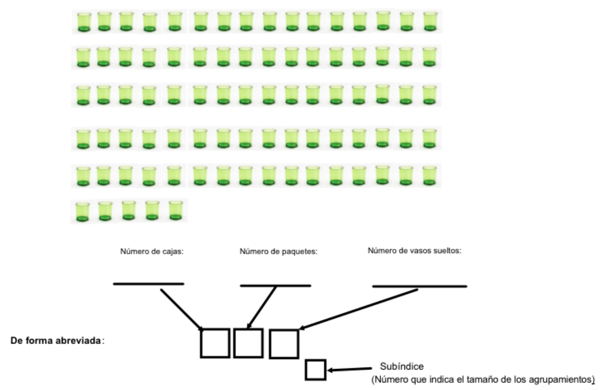
3.5.8 Tareas 8 y 9 (IIA.14 y IIA.15)

8(IIA14) y 9(IIA15). Realiza las siguientes operaciones en voz alta

$$\begin{array}{r} 5\ \ 6\ \ 2 \\ -\quad 3\ \ 6 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ \ 5\ \ 8 \\ \times\quad 2\ \ 6 \\ \hline \end{array}$$

3.5.9 Tarea 10 (IIIC.17)

10(IIIC.17). La fábrica "La Universal" vende su producción de vasos en unidades sueltas, en paquetes de 8 vasos cada uno, en cajas de 8 paquetes y en palet de 8 cajas cada una.
En la figura se representan los vasos del pedido del Restaurante "Los claveles", ayúdanos a organizarlos indicando los palets, las cajas, paquetes y vasos sueltos que se enviaran.



3.5.10 Tarea 11(IIIN.25)

11(IIIN.25). En unas notas de pedidos aparecen las anotaciones siguientes. Indica en cada caso si son correctas o erróneas explicando porqué y añadiendo la expresión correcta en su caso:

Por grupos separados (de 8 en 8):

_2_ _8_ _4_ _1_ _7_ _8_

De forma abreviada :

$\boxed{9}\boxed{3}\boxed{0}_{\boxed{8}}$ $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{9}_{\boxed{8}}$

3.5.11 Tarea 12 (IIIM.25)

12(III.I.A.18.1-2). Las ventas de vasos en los dos últimos años se recogen en la tabla de abajo, en la que, en la ultima columna, se incluye una **forma abreviada** para escribir estas cantidades (**el subíndice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8)**)

	Palet	Cajas	Paquetes	Vasos	FORMA ABREVIADA
2010	2	6	7	5	2 6 7 5 (8
2011	3	4	5	6	3 4 5 6 (8

9.1-Expresa el total de ventas en los dos años.

9.2-Expresa el incremento producido en el año 2011.

3.5.12 Tarea 13 (III.II.A.24)

13(III.II.A.24.1-2). La Universal para organizar los pedidos en diferentes formatos, introduce el agrupamiento indeterminado **"x"** (**x** vasos en cada paquete, **x** paquetes en cada caja y **x** cajas en cada palet).
En la tabla adjunta están registradas las cantidades vendidas en diferentes meses.

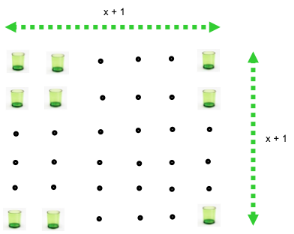
Junio	Julio	Agosto	Septiembre
x-1 x-1 x-1 (x	1 1 1 (x	x-2 x-1 x-1(x	x-1 2 2 (x

12.1-¿ Cuál será la cantidad vendida en los meses de junio y julio?

12.2-¿Cuál ha sido el incremento de ventas entre los meses de agosto y septiembre?

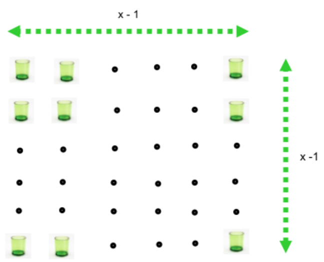
3.5.13 Tarea 14(III.II.C.25)

14(III-II-C.26). En la figura se representan los vasos del pedido del Hotel "Aristoteles". Ayúdanos a organizarlos indicando con la notación abreviada y con agrupamientos indeterminados x, los palets, las cajas, paquetes y vasos sueltos que se enviaran.



3.5.14 Tarea 15 (III.II.C.26)

15(III.II.C.27). Expresa la cantidad de vasos de la siguiente figura utilizando los agrupamientos indeterminados anteriores.



ANEXO IV

Tablas de resultados de los estudios cuantitativos aplicados a los cuestionarios PCN1, PCN2 y PCN3 (Capítulos 5 y 6).

A4.1. Contrastes de hipótesis entre las proporciones de respuestas en los grupos que componen las muestras M1, M2 y M3

4.1 Z empíricas obtenidas al comparar las proporciones de respuestas correctas en los tres grupos (M1.1, M1.2 y M1.3) de la muestra M1

Tabla IV.1.1 Z empíricas de diferencia de proporciones entre los tres grupos que componen la muestra M1

Ítems	M1.1	M1.2	M1.3	Z(M1.1-M1.2)	Z (M1.1-M1.3)	Z(M1.2-M1.3)
IT1.1	0,98	1,00	1,00	-0,94	-1,12	S/V
IT1.2	1	0,95	1,00	1,60	S/V	-1,78
IT2.1	0,98	1,00	1,00	-0,94	-1,12	S/V
IT2.2	0,96	1,00	1,00	-1,34	-1,59	S/V
IO3.1	1	1,00	1,00	S/V	S/V	S/V
IO3.2	0,62	0,91	0,74	-3,27	-1,36	2,20
IO3.3	0,66	0,70	0,79	-0,41	-1,54	-1,06
IO3.4	0,98	0,95	0,97	0,80	0,33	-0,53
IO4.1	0,98	0,93	0,97	1,19	0,33	-0,96
IO4.2	0,94	0,89	0,92	0,87	0,41	-0,53
IN5.1	0,98	0,89	0,98	1,80	0,00	-1,96
IN5.2	0,98	0,93	0,98	1,19	0,00	-1,28
IN5.3	0,94	0,91	0,98	0,55	-1,10	-1,64
IN5.4	0,98	0,89	0,95	1,80	0,84	-1,16
IN6.1	0,94	0,91	1,00	0,55	-1,96	-2,41
IN6.2	0,94	0,98	1,00	-0,97	-1,96	-1,12
IIN7.1	0,16	0,09	0,18	1,02	-0,28	-1,31
IIN7.2	0,82	0,84	0,92	-0,26	-1,59	-1,28
IIN8.1	0,14	0,20	0,03	-0,78	2,14	2,87
IIN8.2	0,12	0,20	0,05	-1,06	1,35	2,41
IIN9.1	0,8	0,84	0,95	-0,50	-2,46	-1,90
IIN9.2	0,44	0,36	0,37	0,79	0,75	-0,11
IIN10	0,64	0,52	0,65	1,18	-0,11	-1,34
IIN11	0,16	0,11	0,34	0,70	-2,16	-2,71
IIN12.1	0,26	0,25	0,15	0,11	1,45	1,29
IIN12.2	0,22	0,11	0,15	1,42	0,96	-0,60
IIA13.1	0,58	0,43	0,61	1,45	-0,32	-1,83
IIA13.2	0,52	0,34	0,53	1,76	-0,11	-1,94
IA14.1	0,16	0,20	0,13	-0,51	0,45	0,97
IA14.2	0,16	0,20	0,15	-0,51	0,15	0,67
IA15.1	0,54	0,50	0,56	0,39	-0,21	-0,61
IA15.2	0,48	0,34	0,42	1,37	0,63	-0,83
IA15.3	0,08	0,05	0,02	0,58	1,49	0,86
IIC.16	0,64	0,66	0,65	-0,20	-0,11	0,11
IIIC.17	0,56	0,55	0,48	0,10	0,84	0,71
IIIA.18.1	0,26	0,25	0,32	0,11	-0,69	-0,78
IIIA.18.2	0,16	0,20	0,32	-0,51	-1,95	-1,37
IIIC.19	0,18	0,18	0,27	0,00	-1,13	-1,08
IIIA.20.1	0	0,11	0,15	-2,41	-2,86	-0,60
IIIA20.2	0,02	0,07	0,15	-1,19	-2,37	-1,26
IIIA21.1	0,16	0,11	0,11	0,70	0,78	0,00
IIIAT21.2	0,04	0,02	0,11	0,56	-1,37	-1,76
IIIA22	0,06	0,00	0,11	1,65	-0,93	-2,27
IIIA23	0,02	0,00	0,10	0,94	-1,72	-2,16
III.IIA24.1	0,02	0,02	0,00	0,00	1,12	1,12
III.IIA24.2	0	0,00	0,00	S/V	S/V	S/V

4.2 Z empíricas obtenidas al comparar las proporciones de respuestas correctas en los dos grupos (M2.1 y M2.1) de la muestra M2

Tabla IV.1.2 Z empíricas entre de diferencia de proporciones de los dos grupos que componen la muestra M2

Ítems	M2.1	M2.2	Z(M2.1-M2.2)
IT1.1	0,98	1,00	-1,02
IT1.2	0,98	1,00	-1,02
IT2.1	0,91	1,00	-2,21
IO3.1	0,72	0,98	-3,66
IO3.2	0,63	0,71	-0,83
IO3.3	0,47	0,69	-2,17
IO3.4	0,65	0,92	-3,26
IO4.1	0,70	0,96	-3,46
IO4.2	0,67	0,94	-3,39
IN5.1	0,91	0,94	-0,56
IN5.2	0,91	0,94	-0,56
IN5.3	0,86	0,87	-0,14
IIN8.1	0,07	0,13	-0,96
IIN8.2	0,19	0,13	0,80
IIN9.1	0,70	0,87	-2,04
IIN9.2	0,35	0,54	-1,85
IIN11	0,26	0,21	0,57
IIA13	0,09	0,25	-2,03
IA14	0,07	0,06	0,20
IA15.1	0,12	0,25	-1,60
IA15.2	0,12	0,10	0,31
IIC.16	0,49	0,67	-1,77
IIIC.17	0,44	0,50	-0,58
IIIA.18.1	0,35	0,33	0,20
IIIA.18.2	0,19	0,23	-0,47
IIIC.19	0,26	0,31	-0,54
IIIA.20.1	0,14	0,10	0,60
IIIA20.2	0,12	0,06	1,03
IIIA21.1	0,07	0,10	-0,52
IIIAT21.2	0,07	0,10	-0,52
IIIA22	0,05	0,08	-0,58
III.IIA24.1	0,00	0,02	-0,93
III.IIA24.2	0,00	0,02	-0,93

4.3. Z empíricas obtenidas al comparar las proporciones de respuestas correctas en los dos grupos de la muestra M3

Tabla IV.1.3 Z empíricas de diferencia de proporciones entre los dos grupos (M3.1 y M3.2) que componen la muestra M3

Ítems	M3.1	M3.2	Z(M3.1-M3.2)
IN5.1	100	97,1	1,136809772
IN5.2	100	97,1	1,136809772
IN5.3	100	97,1	1,136809772
IIN9.1	97,7	91,2	1,289957193
IIN9.2	97,7	79,4	2,639282954
IIN8.1	63,6	58,8	0,432024167
IIN8.2	61,4	55,9	0,48974205
IIN11	47,7	47,1	0,052622371
IIA13	75	50	2,28238597
IIA14	40,9	26,5	1,325518882
IIA15.1	68,2	47,1	1,87882859
IIA15.2	40,9	29,4	1,04996357
IIIC.17	84,1	91,2	-0,930549343
IIIN.25	61,4	67,6	-0,56603172
IIIA.18.1	56,8	91,2	-3,347851507
IIIA.18.2	15,9	82,4	-5,855347351
IIIA.20.1	45,5	79,4	-3,034039395
IIIA20.2	13,6	76,5	-5,600441122
III.IIA24.1	4,5	5,9	-0,278429693
III.IIA24.2	0	2,9	-1,136809772
III.IIA.26	0	0	S/V

A4.2 Tablas de frecuencias obtenidas en las pruebas de comprensión numérica

Tabla IV.2.1 Frecuencias absolutas y relativas. Nivel Técnico (PCN1)

	Correctas		Incorrectas		SR	
Items	**fa**	**%**	**fa**	**%**	**fa**	**%**
IT1.1	154	99,4	1	0,6	0	0,0
IT1.2	153	98,7	2	1,3	0	0,0
IT2.1	154	99,4	1	0,6	0	0,0
IT2.2	153	98,7	2	1,3	0	0,0
IO3.1	152	98,1	3	1,9	0	0,0
IO3.2	117	75,5	38	24,5	0	0,0
IO3.3	113	72,9	41	26,5	1	0,6
IO3.4	150	96,8	3	1,9	2	1,3
IO4.1	149	96,1	5	3,2	1	0,6
IO4.2	142	91,6	12	7,7	1	0,6
IN5.1	148	95,5	6	3,9	1	0,6

IN5.2	150	96,8	4	2,6	1	0,6
IN5.3	147	94,8	7	4,5	1	0,6
IN5.4	146	94,2	8	5,2	1	0,6
IN6.1	148	95,5	7	4,5	0	0,0
IN6.2	151	97,4	4	2,6	0	0,0

Tabla IV.2.2 Frecuencias absolutas y relativas. Nivel Análisis (PCN1)

	Correctas		**Incorrectas**		**SR**	
Items	**fa**	**%**	**fa**	**%**	**Fa**	**%**
IIN7.1	1	0,6	108	69,7	24	15,5
IIN7.2	125	80,6	14	9,0	7	4,5
IIN8.1	17	11,0	137	88,4	1	0,6
IIN8.2	16	10,3	138	89,0	1	0,6
IIN9.1	135	87,1	14	9,0	6	3,9
IIN9.2	60	38,7	57	36,8	38	24,5
IIN10	94	60,6	25	16,1	36	23,2
IIN11	32	20,6	53	34,2	70	45,2
IIN12.1	33	21,3	30	19,4	23	14,8
IIN12.2	25	16,1	55	35,5	24	15,5

Tabla IV.2. 3 Frecuencias absolutas y relativas. Nivel Análisis- algoritmos (PCN1)

	Correctas		**Incorrectas**		**SR**	
Items	**fa**	**%**	**fa**	**%**	**Fa**	**%**
IIA13.1-13.2	54	34,8	92	59,4	9	5,8
IA14.1-14.2	10	6,5	127	81,9	19	12,3
IA15.1-15.2	44	28,4	85	54,8	27	17,4
IA15.3	25	16,1	85	54,8	45	29,0

Tabla IV.2.4 Frecuencias absolutas y relativas. Nivel de Síntesis (PCN1)

	Correctas		**Incorrectas**		**SR**	
Items	**fa**	**%**	**fa**	**%**	**Fa**	**%**
IIC.16	100	64,5	51	32,9	4	2,6
IIIC.17	82	52,9	63	40,6	10	6,5
IIIA.18.1	44	28,4	61	39,4	50	32,3
IIIA.18.2	35	22,6	53	34,2	67	43,2
IIIC.19	35	22,6	52	33,5	68	43,9
IIIA.20.1	15	9,7	75	49	65	41,9
IIIA20.2	12	7,7	63	41,3	80	51,6
IIIA21.1	9	5,8	44	28,4	102	65,8
IIIAT21.2	9	5,8	38	24,5	108	69,7
IIIA22	9	5,8	39	25,2	107	69,0
IIIA23	8	5,2	40	25,8	107	69,0
III.IIA24.1	2	1,3	10	6,5	143	92,3
III.IIA24.2	0	0	11	7,1	144	92,9

Tabla IV.2.5 Frecuencias absolutas y relativas. PCN2

	Correctas		**Incorrectas**		**SR**	
Items	**fa**	**%**	**fa**	**%**	**fa**	**%**
IT1.1	94	98,9	1	1,1	0	0,0
IT1.2	94	98,9	1	1,1	0	0,0
IT2.1	90	94,8	5	5,2	0	0,0
IO3.1	81	85,2	13	14,7	1	1,1
IO3.2	64	67,4	29	30,5	2	2,1
IO3.3	61	64,2	33	34,7	1	1,1
IO3.4	80	84,2	14	14,7	1	1,1
IO4.1	79	83,2	14	14,7	2	2,1
IO4.2	79	83,2	14	14,7	2	2,1
IN5.1	87	91,6	8	8,4	0	0,0
IN5.2	88	92,6	7	7,4	0	0,0
IN5.3	82	86,3	13	13,7	0	0,0
IIN8.1	10	10,5	84	88,4	1	1,1
IIN8.2	10	10,5	84	88,4	1	1,1
IIN9.1	75	78,9	16	16,9	4	4,2
IIN9.2	43	45,3	44	46,3	8	8,4
IIN11	21	22,1	35	36,9	39	41
IIA13	17	17,9	75	78,9	4	4,2
IA14	6	6,3	81	85,3	8	8,4
IIA15.1	18	18,9	67	70,6	10	10,5
IIA15.2	10	10,6	70	73,6	15	15,8
IIC.16	56	58,9	31	32,7	8	8,4
IIIC.17	45	47,4	63	47,3	5	5,3
IIIA.18.1	32	33,7	37	38,9	26	27,4
IIIA.18.2	20	21,1	44	46,3	31	32,6
IIIC.19	27	28,4	42	45,3	25	26,3
IIIA.20.1	11	11,6	54	56,8	30	31,6
IIIA20.2	8	8,4	50	52,7	37	38,9
IIIA21.1	8	8,4	41	43,2	46	48,4
IIIAT21.2	8	8,4	35	36,9	52	54,7
IIIA22	6	6,3	40	42,1	49	51,6
III.IIA24.1	1	1,1	9	9,4	85	89,5
III.IIA24.2	1	1,1	7	7,3	87	91,6

Tabla IV.2.6 Frecuencias absolutas y relativas. PCN3

	Correctas		**Incorrectas**		**SR**	
Items	**fa**	**%**	**fa**	**%**	**fa**	**%**
IN5.1	77	98,7	1	1,3	0	0
IN5.2	77	98,7	1	1,3	0	0
IN5.3	77	98,7	1	1,3	0	0
IIN9.1	74	94,87	3	3,84	1	1,28
IIN9.2	70	89,74	6	7,69	2	8,4
IIN8.1	48	61,53	30	38,46	1	1,28

IIN8.2	46	58,97	31	39,74	1	1,28
IIN11	37	47,43	18	23,07	23	29,48
IIA13	48	61,53	30	38,46	0	4,2
IIA14	34	43,58	41	52,56	3	3,84
IIA15.1	46	58,97	26	33,33	6	7,69
IIA15.2	28	35,89	45	57,69	5	6,41
IIIC.17	64	82,05	6	7,7	8	10,25
IIIN.25	50	64,1	14	17,94	14	17,94
IIIA.18.1	57	73,07	9	11,53	12	15,38
IIIA.18.2	35	44,87	20	25,64	23	29,48
IIIA.20.1	47	60,25	9	11,53	22	28,2
IIIA20.2	32	41,02	18	23,07	28	35,89
III.IIA24.1	2	2,56	15	19,23	61	78,2
III.IIA24.2	1	1,28	14	17,94	63	80,76
III.IIA.26	0	0	5	6,41	73	93,58

A4.3 Vectores de comprensión de los alumnos en las pruebas de comprensión numéricas

Tabla IV.3.1 Vectores de comprensión de alumnos PCN1

1.	87,5	57,8	40,0	0
2.	62,5	9,1	10,0	0
3.	93,8	18,2	20,0	0
4.	100,0	63,0	80,0	50
5.	100,0	67,5	40,0	0
6.	93,8	74,7	30,0	0
7.	100,0	51,3	20,0	0
8.	100,0	55,8	0,0	0
9.	100,0	22,7	10,0	0
10.	87,5	13,6	0,0	0
11.	100,0	90,9	30,0	0
12.	100,0	56,5	30,0	0
13.	87,5	46,8	20,0	0
14.	93,8	27,9	0,0	0
15.	93,8	32,5	10,0	0
16.	93,8	13,6	20,0	0
17.	100,0	25,3	30,0	0
18.	93,8	20,8	30,0	0
19.	100,0	18,2	20,0	0
20.	100,0	9,1	10,0	0
21.	100,0	18,2	0,0	0
22.	100,0	32,5	20,0	0
23.	100,0	18,2	40,0	0
24.	100,0	32,5	20,0	0
25.	100,0	58,4	0,0	0
26.	87,5	39,6	0,0	0

27.	100,0	37,0	10,0	0
28.	100,0	44,2	10,0	0
29.	100,0	18,2	10,0	0
30.	87,5	9,1	20,0	0
31.	75,0	18,8	0,0	0
32.	87,5	30,5	10,0	0
33.	81,3	18,2	0,0	0
34.	100,0	51,3	0,0	0
35.	100,0	81,8	10,0	0
36.	100,0	74,7	10,0	0
37.	93,8	22,7	20,0	0
38.	100,0	70,1	50,0	0
39.	100,0	74,0	10,0	0
40.	87,5	76,6	0,0	0
41.	87,5	37,0	0,0	0
42.	68,8	9,1	0,0	0
43.	100,0	46,8	10,0	0
44.	100,0	9,1	0,0	0
45.	87,5	35,1	10,0	0
46.	81,3	9,1	0,0	0
47.	68,8	4,5	10,0	0
48.	81,3	72,7	10,0	0
49.	87,5	33,1	0,0	0
50.	93,8	41,6	0,0	0
51.	93,8	23,4	50,0	0
52.	93,8	51,3	70,0	0
53.	87,5	9,1	20,0	0
54.	100,0	90,9	30,0	0
55.	100,0	22,7	60,0	0
56.	100,0	22,7	30,0	0
57.	81,3	9,1	20,0	0
58.	93,8	16,2	40,0	0
59.	100,0	72,7	10,0	0
60.	100,0	39,6	20,0	0
61.	75,0	4,5	0,0	0
62.	100,0	74,7	20,0	0
63.	100,0	65,6	10,0	0
64.	100,0	20,8	30,0	0
65.	93,8	13,6	0,0	0
66.	100,0	64,9	10,0	0
67.	56,3	4,5	0,0	0
68.	100,0	18,2	20,0	0
69.	100,0	9,1	0,0	0
70.	100,0	67,5	30,0	0
71.	93,8	63,0	10,0	0
72.	100,0	51,3	10,0	0

73.	100,0	55,2	30,0	0
74.	93,8	55,8	0,0	0
75.	93,8	55,8	0,0	0
76.	100,0	9,1	10,0	0
77.	93,8	32,5	20,0	0
78.	93,8	25,3	30,0	0
79.	100,0	29,9	10,0	0
80.	93,8	34,4	30,0	0
81.	93,8	9,1	0,0	0
82.	93,8	16,2	0,0	0
83.	100,0	70,1	0,0	0
84.	68,8	9,1	0,0	0
85.	81,3	39,6	0,0	0
86.	87,5	36,4	10,0	0
87.	93,8	13,6	0,0	0
88.	100,0	20,8	0,0	50
89.	87,5	13,6	0,0	0
90.	62,5	20,8	0,0	0
91.	81,3	4,5	0,0	0
92.	100,0	81,8	30,0	0
93.	100,0	27,9	0,0	0
94.	93,8	13,6	0,0	0
95.	68,8	26,0	0,0	0
96.	100,0	46,8	100,0	0
97.	100,0	62,3	20,0	0
98.	93,8	39,6	0,0	0
99.	100,0	16,2	30,0	0
100.	93,8	64,9	80,0	0
101.	100,0	51,3	70,0	0
102.	100,0	55,8	0,0	0
103.	100,0	13,6	30,0	0
104.	93,8	39,6	80,0	0
105.	100,0	46,8	50,0	0
106.	93,8	42,2	0,0	0
107.	100,0	79,2	30,0	0
108.	93,8	25,3	0,0	0
109.	100,0	51,3	0,0	0
110.	87,5	25,3	60,0	0
111.	93,8	18,2	40,0	0
112.	87,5	18,2	60,0	0
113.	100,0	13,6	0,0	0
114.	93,8	51,3	0,0	0
115.	87,5	22,7	0,0	0
116.	100,0	51,3	20,0	0
117.	100,0	79,2	20,0	0
118.	93,8	13,6	20,0	0

119.	93,8	27,9	0,0	0
120.	100,0	35,1	0,0	0
121.	100,0	46,8	0,0	0
122.	75,0	13,6	0,0	0
123.	93,8	74,7	80,0	0
124.	100,0	23,4	30,0	0
125.	93,8	18,2	0,0	0
126.	93,8	27,9	0,0	0
127.	87,5	13,6	0,0	0
128.	100,0	46,1	10,0	0
129.	100,0	61,0	40,0	0
130.	93,8	79,2	10,0	0
131.	100,0	48,7	0,0	0
132.	100,0	55,8	20,0	0
133.	100,0	44,2	20,0	0
134.	100,0	60,4	90,0	0
135.	100,0	55,8	30,0	0
136.	100,0	13,6	0,0	0
137.	100,0	51,3	60,0	0
138.	100,0	30,5	10,0	0
139.	100,0	70,1	10,0	0
140.	100,0	61,0	20,0	0
141.	93,8	9,1	0,0	0
142.	93,8	18,2	40,0	0
143.	100,0	32,5	0,0	0
144.	100,0	65,6	0,0	0
145.	100,0	18,2	0,0	0
146.	81,3	44,2	40,0	0
147.	93,8	27,3	10,0	0
148.	100,0	13,6	20,0	0
149.	93,8	18,2	10,0	0
150.	81,3	29,9	10,0	0
151.	87,5	9,1	0,0	0
152.	100,0	18,2	20,0	0
153.	100,0	18,2	20,0	0
154.	100,0	27,9	0,0	0
155.	93,8	48,7	10,0	0
156.	93,8	4,5	0,0	0

Tabla IV.3.2 Vectores de comprensión de alumnos PCN2

1.	84,6	40,0	11,1	0
2.	84,6	30,0	77,8	0
3.	46,2	40,0	22,2	0
4.	100,0	30,0	11,1	0
5.	30,8	20,0	0,0	0

6.	76,9	100,0	88,9	0
7.	100,0	30,0	44,4	0
8.	70	0,0	0,0	0
9.	100,0	10,0	11,1	0
10.	46,2	20,0	22,2	0
11.	38,5	0,0	0,0	0
12.	76,9	10,0	0,0	0
13.	76,9	20,0	44,4	0
14.	76,9	40,0	22,2	0
15.	100,0	60,0	0,0	0
16.	84,6	20,0	44,4	0
17.	46,2	10,0	0,0	0
18.	100,0	30,0	22,2	0
19.	92,3	10,0	11,1	0
20.	100,0	70,0	11,1	0
21.	76,9	10,0	33,3	0
22.	92,3	10,0	44,4	0
23.	100,0	20,0	22,2	0
24.	84,6	20,0	11,1	0
25.	84,6	30,0	11,1	0
26.	46,2	0,0	0,0	0
27.	30,8	0,0	22,2	0
28.	100,0	50,0	100,0	0
29.	70	0,0	0,0	0
30.	92,3	0,0	0,0	0
31.	92,3	30,0	0,0	0
32.	46,2	10,0	0,0	0
33.	100,0	20,0	0,0	0
34.	53,8	50,0	33,3	0
35.	92,3	10,0	0,0	0
36.	92,3	60,0	33,3	0
37.	70	0,0	11,1	0
38.	53,8	10,0	11,1	0
39.	46,2	10,0	11,1	0
40.	53,8	50,0	0,0	0
41.	84,6	10,0	0,0	0
42.	46,2	40,0	11,1	0
43.	92,3	20,0	0,0	0
44.	84,6	20,0	11,1	0
45.	92,3	40,0	11,1	0
46.	70	30,0	0,0	0
47.	92,3	40,0	0,0	0
48.	92,3	40,0	11,1	0
49.	100,0	30,0	11,1	0
50.	100,0	70,0	11,1	0

51.	100,0	80,0	100,0	0
52.	92,3	30,0	11,1	0
53.	84,6	30,0	22,2	0
54.	92,3	20,0	11,1	0
55.	92,3	30,0	11,1	0
56.	92,3	30,0	11,1	0
57.	92,3	30,0	55,6	0
58.	84,6	70,0	22,2	0
59.	92,3	90,0	44,4	0
60.	92,3	30,0	0,0	0
61.	76,9	0,0	0,0	0
62.	46,2	10,0	0,0	0
63.	46,2	0,0	66,7	0
64.	92,3	30,0	44,4	0
65.	100,0	20,0	22,2	0
66.	92,3	30,0	44,4	0
67.	100,0	80,0	44,4	0
68.	92,3	50,0	77,8	0
69.	84,6	20,0	33,3	0
70.	92,3	20,0	33,3	0
71.	84,6	10,0	11,1	0
72.	92,3	30,0	11,1	0
73.	84,6	0,0	44,4	0
74.	70	20,0	11,1	0
75.	92,3	20,0	11,1	0
76.	92,3	50,0	0,0	0
77.	84,6	70,0	0,0	0
78.	100,0	60,0	11,1	0
79.	100,0	30,0	22,2	0
80.	100,0	30,0	22,2	0
81.	76,9	20,0	11,1	0
82.	84,6	20,0	11,1	0
83.	92,3	0,0	11,1	0
84.	92,3	50,0	11,1	0
85.	92,3	20,0	11,1	0
86.	92,3	10,0	11,1	0
87.	100,0	40,0	0,0	0
88.	76,9	20,0	11,1	0
89.	84,6	30,0	0,0	0
90.	100,0	90,0	100,0	100
91.	70	10,0	0,0	0
92.	76,9	0,0	0,0	0
93.	70	10,0	0,0	0
94.	46,2	30,0	0,0	0
95.	92,3	30,0	0,0	0

Tabla IV.3.3 Vectores de comprensión de alumnos PCN3

1.	100	78	50	0
2.	100	44	100	0
3.	100	100	67	0
4.	100	67	33	33
5.	100	67	67	0
6.	100	56	17	0
7.	100	78	100	0
8.	100	33	83	0
9.	100	56	17	0
10.	100	100	83	0
11.	100	78	50	0
12.	100	56	17	0
13.	100	78	67	0
14.	100	67	17	0
15.	100	44	33	0
16.	100	67	67	0
17.	100	67	33	0
18.	100	100	67	0
19.	100	67	17	0
20.	100	44	0	0
21.	100	67	17	0
22.	100	67	17	0
23.	100	44	17	0
24.	100	78	17	0
25.	100	22	67	0
26.	100	78	67	0
27.	100	78	33	0
28.	100	56	33	0
29.	100	67	67	0
30.	100	44	17	0
31.	100	67	33	0
32.	100	67	67	0
33.	100	67	33	0
34.	100	89	33	0
35.	100	78	0	0
36.	100	78	0	0
37.	100	56	33	0
38.	100	33	83	33
39.	100	56	100	0
40.	100	89	50	0
41.	100	33	50	0

42.	100	67	50	0
43.	100	100	67	0
44.	100	78	100	0
45.	0	56	0	0
46.	100	22	67	0
47.	100	11	17	0
48.	100	0	33	0
49.	100	44	100	0
50.	100	33	83	0
51.	100	56	100	0
52.	100	78	100	67
53.	100	89	100	0
54.	100	22	83	0
55.	100	78	100	33
56.	100	33	50	0
57.	100	56	83	0
58.	100	33	100	0
59.	100	89	100	0
60.	100	89	100	0
61.	100	56	100	0
62.	100	33	83	0
63.	100	100	100	0
64.	100	67	100	0
65.	100	44	100	0
66.	100	56	83	0
67.	100	33	100	0
68.	100	78	100	0
69.	100	11	17	0
70.	100	56	67	0
71.	100	67	100	0
72.	100	67	67	0
73.	100	67	100	0
74.	100	44	100	0
75.	100	56	50	0
76.	100	67	83	0
77.	100	89	100	0
78.	100	56	100	0

A4.4 Vectores singulares de comprensión de los alumnos en las pruebas de comprensión numéricas

Tabla IV.4.1 Vectores de comprensión con $c_1 \leq 70$ en la PCN1

62,5	9,1	8,3	0
68,8	9,1	,0	0
68,8	4,5	8,3	0

56,3	4,5	,0	0
68,8	9,1	,0	0
62,5	20,8	,0	0
68,8	26,0	,0	0

Tabla IV.4.2 Vectores de comprensión con $c_1 \geq 70$ y $c_2 \leq 70$ en la PCN1

84,6	30	77,8	0
100,0	30	11,1	0
100,0	30	44,4	0
100,0	10	11,1	0
76,9	10	0,0	0
76,9	20	44,4	0
84,6	20	44,4	0
100,0	30	22,2	0
92,3	10	11,1	0
76,9	10	33,3	0
92,3	10	44,4	0
100,0	20	22,2	0
84,6	20	11,1	0
84,6	30	11,1	0
92,3	0	0,0	0
92,3	30	0,0	0
100,0	20	0,0	0
92,3	10	0,0	0
84,6	10	0,0	0
92,3	20	0,0	0
84,6	20	11,1	0
100,0	30	11,1	0
92,3	30	11,1	0
84,6	30	22,2	0
92,3	20	11,1	0
92,3	30	11,1	0
92,3	30	11,1	0
92,3	30	55,6	0
92,3	30	0,0	0
76,9	0	0,0	0
92,3	30	44,4	0
100,0	20	22,2	0
92,3	30	44,4	0
84,6	20	33,3	0
92,3	20	33,3	0
84,6	10	11,1	0
92,3	30	11,1	0
84,6	0	44,4	0
92,3	20	11,1	0
100,0	30	22,2	0
100,0	30	22,2	0
76,9	20	11,1	0
84,6	20	11,1	0
92,3	0	11,1	0
92,3	20	11,1	0
92,3	10	11,1	0
76,9	20	11,1	0
84,6	30	0,0	0
76,9	0	0,0	0
92,3	30	0,0	0

Tabla IV.4.3 Vectores de comprensión con $c_1 \geq 70$ y $c_2 \geq 70$ en la PCN1

76,9	100	88,9	0
100,0	70	11,1	0

100,0	70	11,1	0
100,0	80	100,0	0
84,6	70	22,2	0
92,3	90	44,4	0
100,0	80	44,4	0
84,6	70	0,0	0

Tabla IV.4.4 Vectores de comprensión con c1 ≤ 70 en la PCN2

46,2	40	22,2	0
30,8	20	0	0
46,2	20	22,2	0
38,5	0	0	0
46,2	10	0	0
46,2	0	0	0
30,8	0	22,2	0
46,2	10	0	0
53,8	50	33,3	0
53,8	10	11,1	0
46,2	10	11,1	0
53,8	50	0	0
46,2	40	11,1	0
46,2	10	0	0
46,2	0	66,7	0
46,2	30	0	0

Tabla IV.4.5 Vectores de comprensión con $c_1 \geq 70$ y $c_2 \leq 70$ en la PCN2

84,6	40	11,1	0
84,6	30	77,8	0
100	30	11,1	0
100	30	44,4	0
100	10	11,1	0
76,9	10	0	0
76,9	20	44,4	0
76,9	40	22,2	0
100	60	0	0
84,6	20	44,4	0
100	30	22,2	0
92,3	10	11,1	0
76,9	10	33,3	0
92,3	10	44,4	0
100	20	22,2	0
84,6	20	11,1	0
84,6	30	11,1	0
100	50	100	0
92,3	0	0	0
92,3	30	0	0
100	20	0	0
92,3	10	0	0
92,3	60	33,3	0
84,6	10	0	0
92,3	20	0	0
84,6	20	11,1	0
92,3	40	11,1	0
92,3	40	0	0
92,3	40	11,1	0
100	30	11,1	0
92,3	30	11,1	0
84,6	30	22,2	0
92,3	20	11,1	0
92,3	30	11,1	0
92,3	30	11,1	0
92,3	30	55,6	0
92,3	30	0	0
76,9	0	0	0
92,3	30	44,4	0

100	20	22,2	0
92,3	30	44,4	0
92,3	50	77,8	0
84,6	20	33,3	0
92,3	20	33,3	0
84,6	10	11,1	0
92,3	30	11,1	0
84,6	0	44,4	0
92,3	20	11,1	0
92,3	50	0	0
100	60	11,1	0
100	30	22,2	0
100	30	22,2	0
76,9	20	11,1	0

Tabla IV.4.6 Vectores de comprensión c1 ≥ 70, c2 ≥ 70 en la PCN2

76,9	100	88,9	0
100	70	11,1	0
100	70	11,1	0
100	80	100	0
84,6	70	22,2	0
92,3	90	44,4	0
100	80	44,4	0
84,6	70	0	0
100	90	100	100

Tabla IV.4.7 Vectores con c1 ≥ 70 y c2 ≤70 en la PCN3

100	44	100	0
100	67	33	33
100	67	67	0
100	56	17	0
100	33	83	0
100	56	17	0
100	56	17	0
100	67	17	0
100	44	33	0
100	67	67	0
100	67	33	0
100	67	17	0
100	44	0	0
100	67	17	0
100	67	17	0
100	44	17	0
100	22	67	0
100	56	33	0
100	67	67	0
100	44	17	0
100	67	33	0
100	67	67	0
100	67	33	0
100	56	33	0
100	33	83	33
100	56	100	0
100	33	50	0
100	67	50	0
100	22	67	0
100	11	17	0
100	0	33	0
100	44	100	0
100	33	83	0
100	56	100	0
100	22	83	0
100	33	50	0
100	56	83	0
100	33	100	0
100	56	100	0
100	33	83	0

100	67	100	0
100	44	100	0
100	56	83	0
100	33	100	0
100	11	17	0
100	56	67	0
100	67	100	0
100	67	67	0
100	67	100	0
100	44	100	0
100	56	50	0
100	67	83	0
100	56	100	0

Tabla IV.4.8 Vectores con valores con $c_1 \geq 70$ y $c_2 \geq 70$ en la PCN3

100	78	50	0
100	100	67	0
100	78	50	0
100	78	67	0
100	100	67	0
100	78	17	0
100	78	67	0
100	78	33	0
100	89	33	0
100	78	0	0
100	78	0	0
100	89	50	0
100	100	67	0
100	78	100	0
100	100	83	0
100	78	100	0
100	78	100	67
100	89	100	0
100	78	100	33
100	89	100	0
100	89	100	0
100	100	100	0
100	78	100	0
100	89	100	0

A4.5 Estudio de la homogeneidad de los ítems en las pruebas de comprensión numérica

Tabla IV.5.1 Índices de homogeneidad total y parciales de los ítems de reproducción PCN1

Ítems	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
I.T.1.1	0,107	0,053	0,100	0,065
I.T.1.2	0,070	0	0,127	-0.041
I.T2.1	0,136	0,210	0,100	0,065
I.T2.2	0.139	0,357	0,062	0,070
I.O.3.1	S/V	0	S/V	S/V
I.O.3.2	0,115	0,145	0,113	0,003
I.O.3.3	0,361	0,342	0,293	0,185
I.O.3.4	0,130	0,192	0,113	0,005
I.O.4.1	0,089	0,155	0,054	0,029
I.O.4.2	0,205	0,222	0,184	0,055
I.N.5.1	0,282	0,427	0,180	0,132
I.N.5.2	0,313	0,497	0,198	0,131

I.N.5.3	0,357	0,577	0,210	0,176
I.N.5.4	0,346	0,448	0,243	0,175
I.N.6.1	0,297	0,558	0,302	0,136
I.N.6.2	0,284	0,400	0,213	0,093

Tabla IV.5.2 Índices de homogeneidad total y parciales de los ítems de análisis PCN1

Ítems	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
II.N.7.1	0,185	0,122	0,202	0,044
II.N.7.2	0.148	0,136	0,133	0,100
II.N.8.1	0,282	0,062	0,320	0,053
II.N.8.2	0,233	0,048	0,269	0,034
II.N.9.1	0,253	0,408	0,247	0,126
II.N.9.2	0,373	0,216	0,429	0,063
II.N.10	0,130	0	0,139	0,038
II.N.11	0,260	0,114	0,289	0,066
II.0.12.1	0,232	0,142	0,256	0,054
II.0.12.2	0,349	0,176	0,384	0,086
IIA13.1	0,590	0,289	0,657	0,164
IIA13.2	0,601	0,313	0,634	0,216
IA14.1	0,468	0,177	0,555	0,047
IIA14.2	0,435	0,177	0,500	0,071
IIA15.1	0,542	0,219	0,575	0,191
IIA15.2	0,606	0,291	0,661	0,170
IIA15.3	0,228	0,042	0,244	0,071
IIC16	0,366	0,203	0,298	0,304

Tabla IV.5.3 Índices de homogeneidad total y parciales de los ítems de síntesis PCN1

Items	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
IIIC.17	0.346	0,287	0,171	0,513
IIIA.18.1	0,264	0,126	0,011	0,649
IIIA.18.2	0,347	0,168	0,083	0,581
IIIC.19	0,297	0,168	0,087	0,417
IIIA.20.1	0,311	0,061	0,038	0,638
IIIA20.2	0,326	0,032	0,067	0,615
IIIA21.1	0,308	0,078	0,106	0,440
IIIAT21.2	0,377	0,088	0,132	0,616
IIIA22	0,397	0,088	0,167	0,588
IIIA23	0,325	0,083	0,126	0,494
III.IIA24.1	0,074	0,076	0,008	0,193
III.IIA24.2	S/V	S/V	S/V	S/V

Tabla IV.5.4 Índices de homogeneidad total y parciales de los ítems de reproducción PCN2

Items	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
I.T.1.1	0,162	0,231	0,039	0,082
I.T.1.2	-0,023	-0,076	-0,006	0.035
I.T2.1	-0,014	0,183	-0,128	-0,098
I.O.3.1	0,442	0,678	0,152	0,163
I.O.3.2	0,416	0,646	0,186	0,112
I.O.3.3	0,438	0640	0,252	0,096
I.O.3.4	0,455	0,749	0,191	0,097
I.O.4.1	0,456	0,749	0,178	0,107
I.O.4.2	0,507	0,777	0,227	0,146
I.N.5.1	0,307	0,286	0,232	0,151
I.N.5.2	0,274	0,305	0,215	0,077
I.N.5.3	0,339	0,314	0,313	0,107

Tabla IV.5.5 Índices de homogeneidad total y parciales de los ítems de análisis de la PCN2

Ítems	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
II.N.8.1	0,454	0,080	0,571	0,358
II.N.8.2	0,304	-0,007	0,407	0,279
II.N.9.1	0,240	0,194	0,288	0,044
II.N.9.2	0459	0,255	0,510	0,257
II.N.11	0,219	0,112	0,350	0,043
IIA13	0,547	0,277	0,548	0,373
IA14	0,345	-0,026	0,471	0,311
IIA15.1	0,538	0,245	0,558	0,381
IIA15.2	0,353	0,066	0,500	0,216
IIA.16	0,509	0,347	0,423	0,333

Tabla IV.5.6 Índices de homogeneidad total y parciales de los ítems de síntesis de la PCN2

Ítems	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
IIIC.17	0.253	0,098	0,207	0,257
IIIA.18.1	0,347	0,011	0,230	0,582
IIIA.18.2	0,450	0,121	0,351	0,544
IIIC.19	0,384	0,162	0,265	0,432
IIIA.20.1	0,487	0,199	0,284	0,614
IIIA20.2	0,537	0,161	0,354	0,699
IIIA.21.1	0,505	0,065	0,337	0,706
IIIA.21.2	0,505	0,065	0,337	0,755
IIIA.22	0,471	0,101	0,341	0,602
III.IIA24.1	0,335	0,076	0,280	0,303
III.IIA24.2	0,335	0,076	0,280	0,303

Tabla IV.5.7 Índices de homogeneidad total y parciales de los ítems de reproducción PCN3

Ítems	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
I.N.5.1	0,228	1	0,026	0,207
I.N.5.2	0,228	1	0,026	0,207
I.N.5.3	0,228	1	0,026	0,207

Tabla IV.5.8 Índices de homogeneidad total y parciales de los ítems de análisis PCN3

Ítems	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
II.N.8.1	0,073	-0,026	0,120	0,007
II.N.8.2	0,283	-0,038	0,350	0,103
II.N.9.1	0,276	-0,090	0,379	0,085
II.N.9.2	0,227	-0,095	0,319	0,065
II.N.11	0,352	0,108	0,187	0,311
IIA13	0,044	-0,085	0,312	-0,191
IA14	0,355	0,082	0,345	0,190
IIA15.1	0,218	0,136	0,434	-0,073
IIA15.2	0,206	0,085	0,266	0,049

Tabla IV.5.9 Índices de homogeneidad total y parciales de los ítems de síntesis PCN3

Ítems	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
IIIC.17	0.361	0,297	0,165	0,335
IIIN.25	0,580	0,152	0,400	0,431
IIIA.18.1	0,424	0,181	0,030	0,632
IIIA.18.2	0,293	0,102	-0,118	0,618
IIIC.19	0,526	0,140	0,095	0,748
IIIA.20.1	0,410	0,095	-0,023	0,710
IIIA20.2	0,122	0,026	0,033	0,149
III.IIA24.1	0,170	0,130	0,087	0,181
III.IIA24.2	S/V	S/V	S/V	S/V

A4.6. Correlaciones entre los resultados de las distintas pruebas aplicadas

6.1 Z empíricas obtenidas al comparar las proporciones de respuestas correctas en PCN1 y PCN2.

Tabla IV.6.1 Z empíricas diferencias de proporciones de respuestas correctas en PCN1 y PCN2

Ítems	Estadístico de contraste- Z
IT1.1	0,35
IT1.2	-0,17
IT2.1	2,32
IO3.1	3,90
IO3.2	1,39
IO3.3	1,45
IO3.4	3,55
IO4.1	3,51

IO4.2	2,03
IN5.1	1,26
IN5.2	1,49
IN5.3	2,36
IIN8.1	0,11
IIIA.8.2	-0,05
IIN9.1	1,71
IIN9.2	-1,02
IINA11	-0,27
IIA13	2,88
IIA14	0,04
IIA15.1	1,68
IA15.2	1,24
IIC.16	0,88
IIIC.17	0,85
IIIA.18.1	-0,88
IIIA.18.2	0,28
IIIC.19	-1,04
IIIA.20.1	-0,65
IIIA20.2	-0,38
IIIA21.1	-0,80
IIIAT21.2	-0,80
IIIA22	-0,16
III.IIA24.1	-1,46
III.IIA24.2	-1,28

6.2. Z empíricas obtenidas al comparar las proporciones de respuestas incorrectas en PCN1 y PCN2.

Tabla IV.6.2 Z empíricas diferencias de proporciones de respuestas incorrectas en PCN1 y PCN2

Ítems	Estadístico de contraste- Z
IT1.1	-0,35
IT1.2	0,17
IT2.1	-2,32
IO3.1	-3,68
IO3.2	-1,04
IO3.3	-1,39
IO3.4	-3,90
IO4.1	-3,33
IO4.2	-1,76
IN5.1	-1,52
IN5.2	-1,79
IN5.3	-2,59
IIN8.1	-0,01

IIIA.8.2	0,15
IIN9.1	-1,84
IIN9.2	-1,49
IINA11	-0,43
IIA13	-3,91
IIA14	-0,68
IIA15.1	-2,47
IIA15.2	-2,98
IIC.16	0,04
IIIC.17	-3,94
IIIA.18.1	0,06
IIIA.18.2	-1,91
IIIC.19	-1,69
IIIA.20.1	-1,20
IIIA20.2	-1,75
IIIA21.1	-2,39
IIIAT21.2	-2,08
IIIA22	-2,80
III.IIA24.1	0,04
III.IIA24.2	-0,08

6.3 Z empíricas obtenidas al comparar las proporciones de SR en PCN1 y PCN2.

Tabla IV.6.3 Z empíricas diferencias de proporciones de SR en PCN1 y PCN2

Ítems	Estadístico de contraste- Z
IT1.1	S/V
IT1.2	S/V
IT2.1	S/V
IO3.1	-1,28
IO3.2	-1,81
IO3.3	-0,35
IO3.4	0,17
IO4.1	-1,03
IO4.2	-1,03
IN5.1	0,78
IN5.2	0,78
IN5.3	0,78
IIN8.1	-0,35
IIIA.8.2	-0,35
IIN9.1	-0,13
IIN9.2	3,19
IINA11	0,64
IIA13	0,55
IIA14	0,95

IIA15.1	1,49
IIA15.2	2,38
IIC.16	-2,10
IIIC.17	0,38
IIIA.18.1	0,82
IIIA.18.2	1,67
IIIC.19	2,79
IIIA.20.1	1,64
IIIA20.2	1,95
IIIA21.1	2,71
IIIAT21.2	2,39
IIIA22	2,77
III.IIA24.1	0,75
III.IIA24.2	0,38

6.4. Z empíricas obtenidas al comparar las proporciones de respuestas correctas entre PCN2 y PCN3.

Tabla V.6.4 Z empíricas diferencias de proporciones de respuestas correctas entre PCN2 y PCN3

IN5.1	2,6
IN5.2	2,4
IN5.3	3,4
IIN9.1	3,3
IIN9.2	6,3
IIN8.1	7,2
IIN8.2	6,9
IIN11	7,2
IIA13	6,0
IIA14	5,8
IIA15.1	5,5
IIA15.2	4,0
IIIC.17	2,6
IIIA.18.1	3,2
IIIA.18.2	2,0
IIIA.20.1	6,1
IIIA20.2	4,6
III.IIA24.1	-0,6
III.IIA24.2	0,1

6.5. Z empíricas obtenidas al comparar las proporciones de respuestas incorrectas entre PCN2 y PCN3.

Tabla IV.6.5 Z empíricas diferencias de proporciones de respuestas incorrectas entre PCN2 y PCN3

IN5.1	-2,08
IN5.2	-1,89
IN5.3	-2,96
IIN9.1	-2,70
IIN9.2	-5,53
IIN8.1	-6,82
IIN8.2	-6,67
IIN11	-1,91
IIA13	-2,67
IIA14	-4,60
IIA15.1	-4,82
IIA15.2	-2,10
IIIC.17	-3,24
IIIA.18.1	-1,60
IIIA.18.2	-1,31
IIIA.20.1	-5,15
IIIA20.2	-3,37
III.IIA24.1	2,63
III.IIA24.2	2,17

6.6 Z empíricas obtenidas al comparar las proporciones de SR entre PCN2 y PCN3.

Tabla IV.6.6 Z empíricas diferencias de proporciones de SR entre PCN2 y PCN3

IN5.1	S/V
IN5.2	S/V
IN5.3	S/V
IIN9.1	-1,13
IIN9.2	-1,62
IIN8.1	0,12
IIN8.2	0,12
IIN11	-1,51
IIA13	-1,82
IIA14	-1,20
IIA15.1	-0,61
IIA15.2	-1,89
IIIC.17	1,25
IIIA.18.1	-1,86
IIIA.18.2	-0,38
IIIA.20.1	-0,43
IIIA20.2	-0,34
III.IIA24.1	-0,99
III.IIA24.2	-0,94

A4.7. Coeficiente de homogeneidad e índices de dificultad y de discriminación de la PCN1

7.1 Nivel de reproducción.

Tabla IV.7.1 Índices de dificultad, discriminación y coeficientes de homogeneidad del nivel técnico PCN1

Items	IF	ID	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
I.T.1.1	0,99	0,019	0,107	0,053	0,100	0,065
I.T.1.2	0,98	0,019	0,070	0	0,127	-0.041
I.T2.1	0,99	0,019	0,136	0,210	0,100	0,065
I.T2.2	0,98	0,019	0.139	0,357	0,062	0,070
I.O.3.1	1	0	S/V	0	S/V	S/V
I.O.3.2	0,75	0,230	0,115	0,145	0,113	0,003
I.O.3.3	0,72	0,423	0,361	0,342	0,293	0,185
I.O.3.4	0,96	0,057	0,130	0,192	0,113	0,005
I.O.4.1	0,96	0,057	0,089	0,155	0,054	0,029
I.O.4.2	0,91	0,173	0,205	0,222	0,184	0,055
I.N.5.1	0,95	0,115	0,282	0,427	0,180	0,132
I.N.5.2	0,96	0,096	0,313	0,497	0,198	0,131
I.N.5.3	0,94	0,153	0,357	0,577	0,210	0,176
I.N.5.4	0,94	0,153	0,346	0,448	0,243	0,175
I.N.6.1	0,94	0,153	0,297	0,558	0,302	0,136
I.N.6.2	0,97	0,07	0,284	0,400	0,213	0,093

7.2 Nivel de análisis

Tabla IV.7.2 Índices de dificultad, discriminación y coeficientes de homogeneidad del nivel de análisis PCN1

Items	IF	ID	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
II.N.7.1	0,14	0,230	0,185	0,122	0,202	0,044
II.N.7.2	0,86	0,152	0.148	0,136	0,133	0,100
II.N.8.1	0,11	0,250	0,282	0,062	0,320	0,053
II.N.8.2	0,11	0,211	0,233	0,048	0,269	0,034
II.N.9.1	0,87	0,269	0,253	0,408	0,247	0,126
II.N.9.2	0,39	0,557	0,373	0,216	0,429	0,063
II.N.10	0,60	0,423	0,130	0	0,139	0,038
II.N.11	0,21	0,384	0,260	0,114	0,289	0,066
II.0.12.1	0,21/0,62	0,307	0,232	0,142	0,256	0,054
II.0.12.2	0,16/0,49	0,346	0,349	0,176	0,384	0,086
IIA13.1	0,54	0,807	0,590	0,289	0,657	0,164
IIA13.2	0,53	0,807	0,601	0,313	0,634	0,216
IA14.1	0,16	0,461	0,468	0,177	0,555	0,047
IIA14.2	0,16	0,423	0,435	0,177	0,500	0,071
IIA15.1	0,53	0,750	0,542	0,219	0,575	0,191

IIA15.2	0,40	0,780	0,606	0,291	0,661	0,170
IIA15.3	0,25	0,115	0,228	0,042	0,244	0,071
IIC16	0,64	0,519	0,366	0,203	0,298	0,304

7.3 Nivel de síntesis.

Tabla IV.7.3 Índices de dificultad, discriminación y coeficientes de homogeneidad del nivel de síntesis PCN1

Items	IF	ID	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
IIIC.17	0,52	0,480	0.346	0,287	0,171	0,513
IIIA.18.1	0,28	0,307	0,264	0,126	0,011	0,649
IIIA.18.2	0,21	0,326	0,347	0,168	0,083	0,581
IIIC.19	0,21	0,269	0,297	0,168	0,087	0,417
IIIA.20.1	0,08	0,192	0,311	0,061	0,038	0,638
IIIA20.2	0,08	0,192	0,326	0,032	0,067	0,615
IIIA21.1	0,12	0,269	0,308	0,078	0,106	0,440
IIIAT21.2	0,06	0,192	0,377	0,088	0,132	0,616
IIIA22	0,06	0,192	0,397	0,088	0,167	0,588
IIIA23	0,04	0,134	0,325	0,083	0,126	0,494
III.IIA24.1	0,01	0	0,074	0,076	0,008	0,193
III.IIA24.2	0	0	S/V	S/V	S/V	S/V

A4.8. Coeficiente de homogeneidad e índices de dificultad y de discriminación de la PCN2

8.1 Nivel de Técnico

Tabla IV.8.1 Índices de dificultad, discriminación y coeficientes de homogeneidad del nivel técnico PCN2

Items	IF	ID	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
I.T.1.1	0,98	0,031	0,162	0,231	0,039	0,082
I.T.1.2	0,98	0	-0,023	-0,076	-0,006	0.035
I.T2.1	0,95	0	-0,014	0,183	-0,128	-0,098
I.O.3.1	0,86	0,375	0,442	0,678	0,152	0,163
I.O.3.2	0,67	0,656	0,416	0,646	0,186	0,112
I.O.3.3	0,58	0,656	0,438	0640	0,252	0,096
I.O.3.4	0,80	0,437	0,455	0,749	0,191	0,097
I.O.4.1	0,84	0,437	0,456	0,749	0,178	0,107
I.O.4.2	0,82	0,5	0,507	0,777	0,227	0,146
I.N.5.1	0,92	0,218	0,307	0,286	0,232	0,151
I.N.5.2	0,92	0,187	0,274	0,305	0,215	0,077
I.N.5.3	0,86	0,343	0,339	0,314	0,313	0,107

8.2. Nivel de análisis

Tabla IV.8.2 Índices de dificultad, discriminación y coeficientes de homogeneidad del nivel de análisis PCN2

Items	IF	ID	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3

II.N.8.1	0,10	0,250	0,454	0,080	0,571	0,358
II.N.8.2	0,15	0,250	0,304	-0,007	0,407	0,279
II.N.9.1	0,78	0,281	0,240	0,194	0,288	0,044
II.N.9.2	0,45	0,656	0459	0,255	0,510	0,257
II.N.11	0,23	0,312	0,219	0,112	0,350	0,043
IIA13	0,17	0,375	0,547	0,277	0,548	0,373
IA14	0,06	0,125	0,345	-0,026	0,471	0,311
IIA15.1	0,18	0,406	0,538	0,245	0,558	0,381
IIA15.2	0,10	0,250	0,353	0,066	0,500	0,216
IIA.16	0,58	0,656	0,509	0,347	0,423	0,333

8.3 Nivel de síntesis.

Tabla IV.8.3 Índices de dificultad, discriminación y coeficientes de homogeneidad del nivel de síntesis PCN2

Items	IF	ID	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
IIIC.17	0,47	0,375	0.253	0,098	0,207	0,257
IIIA.18.1	0,33	0,437	0,347	0,011	0,230	0,582
IIIA.18.2	0,21	0,437	0,450	0,121	0,351	0,544
IIIC.19	0,28	0,375	0,384	0,162	0,265	0,432
IIIA.20.1	0,11	0,281	0,487	0,199	0,284	0,614
IIIA20.2	0,08	0,250	0,537	0,161	0,354	0,699
IIIA.21.1	0,08	0,187	0,505	0,065	0,337	0,706
IIIA.21.2	0,08	0,187	0,505	0,065	0,337	0,755
IIIA.22	0,06	0,156	0,471	0,101	0,341	0,602
III.IIA24.1	0,01	0,031	0,335	0,076	0,280	0,303
III.IIA24.2	0,01	0,031	0,335	0,076	0,280	0,303

A4.9. Coeficiente de homogeneidad e índices de dificultad y de discriminación de la PCN3

9.1. Nivel de Técnico.

Tabla IV.9.1 Índices de dificultad, discriminación y coeficientes de homogeneidad del nivel técnico PCN3

Items	IF	ID	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
I.N.5.1	0,98	0,038	0,228	1	0,026	0,207
I.N.5.2	0,98	0,038	0,228	1	0,026	0,207
I.N.5.3	0,98	0,038	0,228	1	0,026	0,207

9.2. Nivel de análisis

Tabla IV.9.2 Índices de dificultad, discriminación y coeficientes de homogeneidad del nivel de análisis PCN3

Items	IF	ID	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
II.N.8.1	0,61	0,076	0,073	-0,026	0,120	0,007
II.N.8.2	0,58	0,192	0,283	-0,038	0,350	0,103

II.N.9.1	0,94	0,461	0,276	-0,090	0,379	0,085
II.N.9.2	0,89	0,423	0,227	-0,095	0,319	0,065
II.N.11	0,47	0,576	0,352	0,108	0,187	0,311
IIA13	0,61	0,153	0,044	-0,085	0,312	-0,191
IA14	0,43	0,538	0,355	0,082	0,345	0,190
IIA15.1	0,58	0,307	0,218	0,136	0,434	-0,073
IIA15.2	0,35	0,307	0,206	0,085	0,266	0,049

9.3. Nivel de síntesis

Tabla IV.9.3 Índices de dificultad, discriminación y coeficientes de homogeneidad del nivel de síntesis PCN3

Items	IF	ID	ρ_t	ρ_1	ρ_2	ρ_3
IIIC.17	82,05	0,307	0.361	0,297	0,165	0,335
IIIN.25	64,1	0,807	0,580	0,152	0,400	0,431
IIIA.18.1	73,07	0,576	0,424	0,181	0,030	0,632
IIIA.18.2	44,87	0,538	0,293	0,102	-0,118	0,618
IIIC.19	60,25	0,730	0,526	0,140	0,095	0,748
IIIA.20.1	41,02	0,576	0,410	0,095	-0,023	0,710
IIIA20.2	2,56	0,076	0,122	0,026	0,033	0,149
III.IIA24.1	1,28	0,038	0,170	0,130	0,087	0,181
III.IIA24.2	0	0	S/V	S/V	S/V	S/V

A4.10 Coeficientes de correlación Pearson entre los resultados de las pruebas

10.1 Coeficientes de correlación Pearson entre los resultados de PCN1, PCN2 y PCN3

Tabla IV.10.1 Coeficientes de correlación bilateral de Pearson entre las PCN1, PCN2 y PCN3

		VAR00001	VAR00002	VAR00003
VAR00001	Correlación de Pearson	1	,981**	,821**
	Sig. (bilateral)		,000	,000
	N	19	19	19
VAR00002	Correlación de Pearson	,981**	1	,842**
	Sig. (bilateral)	,000		,000
	N	19	19	19
VAR00003	Correlación de Pearson	,821**	,842**	1
	Sig. (bilateral)	,000	,000	
	N	19	19	19

		VAR00001	VAR00002	VAR00003
VAR00001	Correlación de Pearson	1	,981**	,821**
	Sig. (bilateral)		,000	,000
	N	19	19	19
VAR00002	Correlación de Pearson	,981**	1	,842**
	Sig. (bilateral)	,000		,000
	N	19	19	19
VAR00003	Correlación de Pearson	,821**	,842**	1
	Sig. (bilateral)	,000	,000	
	N	19	19	19

**. La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

10.2 Coeficientes de correlación Pearson entre las dos muestras parciales de la PCN3

Tabla IV.10.2 Coeficientes de correlación bilateral de Pearson entre los dos grupos muestrales de la PCN3

		VAR00001	VAR00002
VAR00001	Correlación de Pearson	1	,728**
	Sig. (bilateral)		,000
	N	21	21
VAR00002	Correlación de Pearson	,728**	1
	Sig. (bilateral)	,000	
	N	21	21

**. La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

ANEXO V

Trascripción de las entrevistas

Análisis de la entrevista

Grabaciones de las entrevistas en formato mp4

Producciones Notebook de las entrevistas