

---

**Simulación numérica de tsunamis  
generados por avalanchas  
submarinas: aplicación al caso de  
Lituya-Bay**

---



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

**Trabajo Fin de Máster**

**Carlos Sánchez Linares**

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Este documento está preparado para ser imprimido a doble cara.

Simulación numérica de tsunamis generados  
por avalanchas submarinas: aplicación al caso  
de Lituya-Bay

*Dirigido por los Doctores*

**Manuel Jesús Castro Díaz y Jose Manuel González Vida**

**Máster en Matemáticas  
Facultad de Ciencias**





# Índice

<b>Introducción</b>	<b>ix</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.1.1. Soluciones débiles . . . . .	2
1.2. Esquemas numéricos camino-conservativos . . . . .	7
1.2.1. Convergencia y elección de caminos . . . . .	13
1.3. Esquemas bien equilibrados . . . . .	15
<b>2. Métodos de Roe e IFCP</b>	<b>17</b>
2.1. Introducción . . . . .	17
2.2. Resolvedores Riemann aproximados . . . . .	17
2.3. Método de Roe . . . . .	19
2.4. Esquema IFCP . . . . .	22
<b>3. Aplicación del esquema IFCP a un modelo bicapa de tipo Savage-Hutter para la simulación de avalanchas y la propagación de tsunamis</b>	<b>29</b>
3.1. Ecuaciones del modelo . . . . .	29
3.2. Esquema numérico IFCP . . . . .	33
3.3. Frentes seco-mojado. . . . .	38
3.3.1. Redefinición de los términos de presión. . . . .	38
3.3.2. Imposición de una condición de contorno de tipo pared . . . . .	38
3.4. Tratamiento de los términos de fricción . . . . .	40
3.4.1. Paso 1/3. Cálculo de $w_i^{n+1/3}$ . . . . .	40

3.4.2.	Paso 2/3. Cálculo de $w_i^{n+2/3}$ . . . . .	41
3.4.3.	Paso 3/3. Cálculo de $w_i^{n+1}$ . . . . .	42
<b>4.</b>	<b>Experimentos numéricos y aplicación al caso de Lituya Bay</b>	<b>45</b>
4.1.	Introducción . . . . .	45
4.2.	Casos académicos . . . . .	45
4.2.1.	Desprendimiento de sedimentos submarinos sobre un fondo plano. . . . .	45
4.2.2.	Desprendimiento de sedimentos submarinos sobre un fondo plano e inclinado. . . . .	46
4.2.3.	Avalancha submarina. . . . .	49
4.3.	Experimentos en laboratorio . . . . .	51
4.3.1.	Introducción y referencias . . . . .	51
4.3.2.	Modelo físico . . . . .	51
4.3.2.1.	Canal rectangular . . . . .	51
4.3.2.2.	Material granular . . . . .	51
4.3.2.3.	Sistemas de medición . . . . .	53
4.3.3.	Resultados experimentales . . . . .	53
4.3.3.1.	Geometría del experimento . . . . .	55
4.3.3.2.	Resultados obtenidos . . . . .	55
4.3.4.	Simulaciones numéricas . . . . .	55
4.3.5.	Discusión de los resultados . . . . .	62
4.4.	Aplicación al caso de Lituya Bay . . . . .	63
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>

# Índice de figuras

1.1. Esquema volúmenes finitos . . . . .	8
2.1. Situación de los autovalores. Caso (a.1). . . . .	27
2.2. Situación de los autovalores. Caso (a.2). . . . .	27
2.3. Situación de los autovalores. Caso (b.1). . . . .	27
2.4. Situación de los autovalores. Caso (b.2). . . . .	27
3.1. Esquema bicapa. Términos y notación. . . . .	31
3.2. Frente seco-mojado: Aparición de ambas capas . . . . .	39
3.3. Frente seco-mojado: Aparición de la capa inferior . . . . .	39
4.1. Desprendimiento de sedimentos submarinos sobre un fondo plano: evolución de la superficie del agua y del sedimento (escala horizontal $x(m)$ , escala vertical $z(m)$ ). . . . .	47
4.2. Desprendimiento de sedimentos submarinos sobre un fondo plano e inclinado: evolución de la superficie del agua y del sedimento (escala horizontal $x(m)$ , escala vertical $z(m)$ ). . . . .	48
4.3. Posición y depósito de la capa de sedimentos en función del ángulo de Coulomb (escala horizontal $x(m)$ , escala vertical $z(m)$ ). . . . .	49
4.4. Avalancha submarina: evolución de la superficie del agua y del sedimento (escala horizontal $x(m)$ , escala vertical $z(m)$ ). . . . .	50
4.5. Impacto y generación de olas. ( $m_s = 108$ Kg, $h = 0.45$ m, $\alpha = 45^\circ$ ) . . . . .	52
4.6. Canal rectangular: dimensiones, generador de avalanchas, protección de salpicaduras y barrera de absorción [30]. . . . .	52
4.7. Materiales granulares considerados en los experimentos, correspondientes a la Tabla 4.1. . . . .	53
4.8. Sistema de medición y seguimiento de avalancha y generación de olas. [36]. . . . .	54

4.9. Velocidad de impacto. Análisis LDS. . . . .	54
4.10. Seguimiento de olas a lo largo del canal. Análisis CWG. . . . .	54
4.11. Parámetros y variables relevantes en el experimento. . . . .	55
4.12. Análisis PIV, tomado en $t =$ (a) 0.2 s ,(b) 0.4 s ,(c) 0.6 s ,(d) 0.8 s y (e) 1.0 s tras del impacto. [35] . . . . .	57
4.13. Perfil relativo $\eta/h$ frente a $t$ en (a) $CWG_1$ (b) $CWG_2$ (c) $CWG_3$ (d) $CWG_4$ (e) $CWG_5$ (f) $CWG_6$ y (g) $CWG_7$ . Las áreas en gris están influenciadas por la reflexión de las olas. [Heller-2007] . . . . .	58
4.14. Evolución de la superficie libre del agua y de la capa de sedimentos (escala horizontal $x/h$ , escala vertical $z/h$ ) . . . . .	59
4.15. Resultados numéricos de perfil relativo en los CWG's (escala horizontal $T_r$ , escala vertical $z/h$ ) . . . . .	60
4.16. Perfiles relativos en los CWG's. Comparación de resultados experimentales (negro) y numéricos (azul). . . . .	61
4.17. Bahía de Lituya. Línea de alcance del tsunami. . . . .	63
4.18. Modelo físico de la zona de avalancha en la bahía de Lituya. . . . .	64
4.19. Simulación del caso Lituya Bay . . . . .	66
4.20. Run-up. Resultados numéricos. (escala horizontal $t(s)$ , escala vertical $z(m)$ ). . . . .	67
4.21. Elevación de la superficie libre en $x = 885$ m. Resultados numéricos. (escala horizontal $t(s)$ , escala vertical $z(m)$ ). . . . .	67
4.22. Runup. Comparación de los resultados numéricos (verde) con datos experimentales (magenta). . . . .	68
4.23. Elevación de la superficie libre en $x = 885$ m. Comparación de los resultados numéricos (azul) con datos experimentales (negro). . . . .	68

# Introducción

La historia de la humanidad está salpicada de numerosos episodios catastróficos que han determinado cambios importantes en las ubicaciones de los asentamientos urbanos, así como, migraciones o modificaciones en los usos del territorio. Gran parte de estos episodios tienen su origen en los movimientos sísmicos que suceden en la corteza terrestre y en los procesos que desencadenan. En algunas ocasiones son mayores los desastres originados por los fenómenos que a su vez genera un terremoto que los efectos de propio movimiento sísmico.

Una de las catástrofes más antiguas y mejor documentadas que ilustran este tipo de fenómenos, es la que sucedió en la isla de Thera -actualmente denominada como el archipiélago de Santorini, en el mar Egeo- alrededor del año 1627 a.C. y que dañó muy seriamente la civilización minoica, con importantes consecuencias en la isla de Creta, núcleo cultural de aquella sociedad. El desplome en la caldera de un volcán, generó un colapso del conjunto montañoso de una magnitud ingente. La precipitación secuenciada sobre la superficie del mar de semejante volumen de rocas y piroclastos, produjo una sucesión de tsunamis que impactaron sobre la costa adyacente en el interior de la bahía, causando la práctica destrucción de cuantas infraestructuras existían en el litoral. El tren de olas así generado podría haber alcanzado alturas entre 14 y 18 metros, lo cual supondría que las aguas ascenderían hasta cotas de 50 metros de altura en las zonas acantiladas.

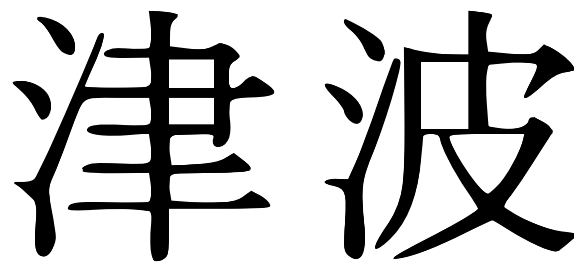
Esta primera referencia de un tsunami tan complejo, nos sitúa en un escenario relacionado con dos posibles fuentes tsunamigénicas: los colapsos o avalanchas de gran cantidad de rocas sobre la superficie del mar, y los terremotos originados en los niveles superiores de la corteza terrestre en regiones marítimas o próximas al mar.

Otros episodios más recientes nos trasladan a Sumatra, Chile y Japón. Quizás el más violento y desolador ha sido el tsunami que originó el terremoto de Honshu (11/3/2011) y que sacudió la costa de Japón cebándose particularmente en torno a la ciudad de Fukushima. El seísmo de mayor magnitud, 9 en la escala de Richter, se produjo a las 05:46 horas en un punto localizado a 177 km de la costa, y a 32 km de profundidad en la corteza del archipiélago japonés. El tren de olas que generó el movimiento sísmico alcanzó los 14 metros de altura, desplazándose a gran velocidad y cargándose de sedimentos marinos, lo cual incremento considerablemente su capacidad destructiva.

Ante la inexorable ocurrencia de este tipo de fenómenos naturales, ha surgido la imperiosa necesidad del ser humano de adaptarse al medio en el que habita, a veces hostil. Esto le ha obligado a tener que comprender los mecanismos que los genera y así poder mitigar sus efectos devastadores. Es precisamente, en este punto, donde los *modelos matemáticos* juegan un papel determinante y la *simulación numérica* mediante ordenadores se ha convertido en una herramienta de predicción extremadamente potente y, en ocasiones, precisa.

Este trabajo se enmarca dentro de un proyecto más ambicioso y que tiene como objetivo fundamental la puesta a punto de modelos matemáticos que permitan simular la generación y propagación de tsunamis en geometrías reales.

La percepción subjetiva que tenemos los seres humanos sobre el fenómeno de los tsunamis, consiste en la irrupción de un frente de olas de grandes dimensiones que se desplazan a gran velocidad en dirección a las costas, que tienen una gran capacidad destructiva y que suceden siempre después de un gran terremoto. Es más, algunos medios de comunicación acostumbran a utilizar, indistintamente, el término maremoto y el de tsunami, aunque ciertamente no tienen ninguna relación con las mareas. En realidad, la palabra tsunami deriva de un vocablo japonés que significa “ola de puerto”.



*tsu* (puerto)

*nami* (ola)

La diferencia entre las olas de tsunami (de traslación) y las ondas que se producen en la superficie de mares y océanos (de oscilación) es, principalmente, el origen de unas y otras. El mecanismo que dispara los tsunamis es, principalmente, la dinámica de la corteza terrestre, de forma que a un fuerte desplazamiento vertical en el fondo marino le sucede un colapso en la superficie marina que genera una onda de traslación, que desde el primer momento que se genera tiene rozamiento con el fondo marino, ya que la ola afecta a toda la columna de agua. Por otro lado, el oleaje que se produce en la superficie del mar está ocasionado por la intervención de vientos, corrientes y mareas.

La energía que acumula un tsunami es muy superior a la que posee un fuerte oleaje en momentos de tormentas. Esta energía se propaga desde el foco que haya provocado el tsunami, a lo largo de toda la columna de agua, de manera que cuando las olas alcanzan la costa, disminuyen la velocidad de propagación, al tiempo que incrementan su altura. Cuando un tsunami se acerca a la costa parte de la energía cinética que posee, se transforma en energía potencial mediante un aumento en la altura de la onda y una ralentización de su movimiento.

Cuatro son los mecanismos que se proponen de forma básica para explicar cuál puede ser el origen de los tsunamis: un movimiento tectónico asociado a un fuerte terremoto, una importante erupción volcánica, un deslizamiento de tierras y el impacto de un meteorito procedente del espacio. En este trabajo estamos interesados en la simulación de tsunamis generados por deslizamientos del terreno. Concretamente, vamos a considerar un modelo unidimensional de dos capas de tipo Savage-Hutter para la simulación de avalanchas y propagación de tsunamis. Este sistema resulta de simplificar el modelo introducido en 2008 por Fernández et al. en [27] y que puede escribirse como un sistema de leyes de conservación con productos no conservativos y términos fuentes:

$$(S) \quad w_t + F(w)_x + B(w)w_x = S(w)\sigma_x + S_F(w),$$

donde la incógnita  $w(x, t)$  toma valores en un abierto convexo de  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^m$ ,  $F$  es una función regular de  $\mathcal{O}$  en  $\mathbb{R}^m$ ,  $B$  es una función matricial de  $\mathcal{O}$  en  $\mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ ,  $S$  y  $S_F$  son funciones de  $\mathcal{O}$  en  $\mathbb{R}^m$  y  $\sigma(x)$  es una función conocida de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ .

Uno de los objetivos de este trabajo es el diseño de un esquema numérico que permita aproximar de forma fiable las soluciones del sistema (S). En general, los métodos numéricos para la resolución de estos sistemas hiperbólicos no conservativos deben satisfacer las siguientes propiedades:

- Deben propagar y capturar correctamente las discontinuidades que pueden aparecer en la solución a lo largo de la simulación. Es bien sabido que este tipo de sistemas suelen generar discontinuidades en tiempo finito, aún partiendo de condiciones iniciales regulares.
- Los esquemas numéricos deben ser bien equilibrados (*well balanced*): en los casos donde existan soluciones estacionarias no triviales deben resolver estas soluciones, o al menos algunas de ellas, con una enorme precisión. En otro caso, podrían aparecer oscilaciones espurias en situaciones estacionarias o casi estacionarias.

En el caso de la primera propiedad, la presencia de productos no conservativos añade varias dificultades tanto desde el punto de vista de la definición del concepto de solución débil como del desarrollo de esquemas numéricos. Así, la presencia de discontinuidades hace que los productos no conservativos no tengan sentido en el marco de la teoría de distribuciones. En esta memoria repasaremos el concepto de solución débil introducido por Dal Maso LeFloch y Murat (véase [24]) y de esquema *camino-conservativo* introducido por Parés (véase [59]). El marco teórico introducido en [59] permite desarrollar de forma general esquemas numéricos para problemas no conservativos y estudiar sus propiedades de bien equilibrado.

En esta memoria abordaremos el diseño de esquemas numéricos para leyes de conservación con productos no conservativos y términos fuentes basados en resolvedores de Riemann aproximados. En particular, consideraremos el esquema de Roe (véase [66] y [76]) y el esquema IFCP, introducido por Fernández-Castro-Parés (véase [28]) proponiendo su extensión a un sistema general del tipo (S).

Un segundo objetivo es la validación práctica del modelo resultante. Para ello se realizarán varios experimentos numéricos y se compararán con datos experimentales de laboratorio.

La organización de esta memoria es la siguiente:

- ▶ En el Capítulo 1 se presentan los fundamentos teóricos necesarios para el diseño de esquemas numéricos de volúmenes finitos para sistemas hiperbólicos de leyes de conservación con términos fuentes y productos no conservativos. Se repasan los conceptos de solución débil de este tipo de sistemas y el de esquema numérico *camino-conservativo* introducido por Parés en [59], que será fundamental para el diseño de esquemas para el sistema (S).
- ▶ En el Capítulo 2 se aborda diseño de esquemas numéricos para el sistema (S) basados en resolvedores de Riemann aproximados. En particular, se considera el esquema de Roe y el esquema IFCP. El esquema IFCP fue introducido por Fernández-Castro-Parés en [28] para aproximar las soluciones del sistema de aguas someras bicapa. En esta memoria consideramos su extensión a un sistema general del tipo (S), probándose además que el esquema es linealmente  $L^\infty$  estable bajo la condición CFL usual.

- ▶ En el Capítulo 3 se describe, en primer lugar, el modelo utilizado para la simulación de tsunamis y se describe de forma detallada el método numérico resultante de aplicar el esquema IFCP, prestando especial énfasis a la descripción de la discretización de los términos que parametrizan la fricción. Se prueba que el esquema resultante preserva de forma exacta un conjunto relevante de soluciones estacionarias de (S).
- ▶ En el Capítulo 4 se presentan algunas aplicaciones prácticas y se comparan con datos experimentales de laboratorio.
- ▶ En el Capítulo 5 se enumeran las conclusiones extraídas del trabajo realizado, así como alguna de las líneas de investigación a seguir.

La versión digital de esta memoria incluye las simulaciones numéricas realizadas con el modelo matemático implementado.



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Introducción

En este capítulo introduciremos los aspectos teóricos relacionados con los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación con términos fuentes y productos no conservativos. En particular, estos sistemas pueden ser vistos como casos particulares de sistemas hiperbólicos no conservativos. Utilizaremos la teoría introducida por Dal Maso, LeFloch y Murat en [24] para definir el concepto de solución débil de este tipo de sistemas. Presentaremos el concepto de esquema numérico camino-conservativo, introducido por Parés en [59], y abordaremos también el concepto de esquemas bien equilibrados. Todo ello con el objetivo de sentar las bases teóricas que permitan el diseño de esquemas numéricos que aproximen las soluciones de estos sistemas.

Consideremos el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden cuasi-lineal

$$(1.1.1) \quad W_t + \mathcal{A}(W)W_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

donde  $W(x, t)$  toma valores en un abierto convexo  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ , y  $W \in \Omega \mapsto \mathcal{A}(W) \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$  es una aplicación regular localmente acotada. Supondremos que el sistema (1.1.1) es estrictamente hiperbólico, es decir, para cada  $W \in \Omega$ ,  $\mathcal{A}(W)$  tiene  $N$  autovalores reales y distintos  $\lambda_1(W) < \dots < \lambda_N(W)$ , con autovectores asociados  $R_1(W), \dots, R_N(W)$ . Supondremos además que para cada  $i = 1, \dots, N$ , el campo característico  $R_i(W)$  es o bien genuinamente no lineal:

$$\nabla \lambda_i(W) \cdot R_i(W) \neq 0, \quad \forall W \in \Omega,$$

o bien linealmente degenerado:

$$\nabla \lambda_i(W) \cdot R_i(W) = 0, \quad \forall W \in \Omega.$$

Un caso particular de (1.1.1) son los sistemas de la forma

$$(1.1.2) \quad w_t + F(w)_x + B(w)w_x = S(w)\sigma_x,$$

donde la incógnita  $w(x, t)$  toma valores en un abierto convexo de  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^m$ ,  $F$  es una función regular de  $\mathcal{O}$  en  $\mathbb{R}^m$ ,  $B$  es una función matricial de  $\mathcal{O}$  en  $\mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ ,  $S$  es una función de  $\mathcal{O}$  en  $\mathbb{R}^m$  y  $\sigma(x)$  es una función conocida de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  (en particular, podemos tomar  $\sigma(x) = x$ ). En

efecto, si añadimos a (1.1.2) la ecuación

$$(1.1.3) \quad \sigma_t = 0,$$

podemos reescribir el sistema en la forma de (1.1.1):

$$W_t + \mathcal{A}(W)W_x = 0,$$

donde  $W$  es el vector aumentado

$$W = \begin{bmatrix} w \\ \sigma \end{bmatrix} \in \Omega = \mathcal{O} \times \mathbb{R},$$

y  $\mathcal{A}(W)$  es la matriz de orden  $(m+1) \times (m+1)$  cuya estructura por bloques es:

$$\mathcal{A}(W) = \left[ \begin{array}{c|c} A(w) & -S(w) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right],$$

siendo

$$A(w) = J(w) + B(w),$$

donde  $J(w)$  es el Jacobiano de  $F$ :

$$J(w) = \frac{\partial F}{\partial w}(w).$$

Asumimos que la matriz  $A(w)$  tiene  $m$  autovalores reales y distintos

$$\lambda_1(w) < \dots < \lambda_m(w)$$

con autovectores asociados  $r_j(w)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Si ninguno de estos autovalores es cero, (1.1) es un sistema estrictamente hiperbólico:  $\mathcal{A}(W)$  tiene  $m+1$  autovalores

$$\lambda_1(w), \dots, \lambda_m(w), 0,$$

con autovectores asociados

$$R_i(W) = \begin{bmatrix} r_i(w) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m; \quad R_{m+1}(W) = \begin{bmatrix} A^{-1}(w)S(w) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Evidentemente, el  $(m+1)$ -ésimo campo característico es linealmente degenerado y, por simplicidad, asumimos que éste es el único, siendo los otros genuinamente no lineales. Las curvas integrales del campo linealmente degenerado están dadas por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$(1.1.4) \quad \frac{dW}{ds} = R_{m+1}(W).$$

### 1.1.1. Soluciones débiles

A fin de introducir la noción de solución débil para sistemas no conservativos, recordemos en primer lugar cómo se define para problemas conservativos:

$$(1.1.5) \quad W_t + F(W)_x = 0.$$

Como es bien sabido, dada una solución débil  $W$  de (1.1.5), el término  $F(W)_x$  debe entenderse

como una distribución. Esto no ocurre, sin embargo, para el producto no conservativo  $\mathcal{A}(W)W_x$ : en el caso en que una solución débil  $W$  de (1.1.1) presente discontinuidades no se puede dar sentido a dicho producto como distribución. No obstante, siguiendo la teoría desarrollada por Dal Maso, LeFloch y Murat en [24], es posible dar una definición rigurosa de solución débil para el problema (1.1.1) que generaliza el concepto de solución débil para sistemas de leyes de conservación. Para ello, los productos no conservativos se interpretan como medidas de Borel, cuya definición requiere la elección de una familia de caminos en el espacio de fases.

En el caso particular de una solución débil de (1.1.5) regular a trozos, dado  $t > 0$ , la distribución  $[F(W(\cdot, t))_x]$  se define de la siguiente manera:

$$(1.1.6) \quad \langle [F(W(\cdot, t))_x], \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} F(W(x, t))_x \phi(x) dx + \sum_l (F(W_l^+) - F(W_l^-)) \phi(x_l(t)), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

donde la derivada que aparece en el término integral de la última expresión debe entenderse en el sentido clásico; el índice  $l$  de la suma corresponde a las discontinuidades existentes en la solución;  $x_l(t)$  es la posición en el instante  $t$  de la  $l$ -ésima discontinuidad;  $W_l^-$  y  $W_l^+$ , los límites de la solución a la izquierda y a la derecha de la  $l$ -ésima discontinuidad en el instante  $t$ ; y finalmente,  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  representa el conjunto de funciones de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  y soporte compacto.

La distribución  $[F(W(\cdot, t))_x]$  puede ser interpretada como una medida de Borel cuya descomposición de Lebesgue es  $\mu_a + \mu_s$ , donde  $\mu_a$  viene dada por:

$$\mu_a(E) = \int_E F(W(x, t))_x dx$$

para cada conjunto de Borel  $E$ , siendo  $F(W(x, t))_x$  la derivada puntual, y

$$(1.1.7) \quad \mu_s = \sum_l (F(W_l^+) - F(W_l^-)) \delta_{x=x_l(t)},$$

donde  $\delta_{x=a}$  es la medida de Dirac en  $x = a$ .

Dado un conjunto de Borel  $E$ , denotaremos su medida mediante:

$$(1.1.8) \quad \int_E F(W(x, t))_x dx = \mu_a(E) + \mu_s(E).$$

La idea clave para generalizar esta interpretación de soluciones débiles reside en expresar cualquier diferencia de flujos  $F(W_R) - F(W_L)$  en términos de la matriz jacobiana  $\mathcal{J}(W)$  mediante la introducción de un camino arbitrario  $\Phi(\cdot; W_L, W_R) : [0, 1] \mapsto \Omega$  tal que:

$$\Phi(0; W_L, W_R) = W_L; \quad \Phi(1; W_L, W_R) = W_R;$$

de la siguiente manera:

$$F(W_R) - F(W_L) = \int_0^1 \mathcal{J}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds.$$

Esto nos permitirá definir el producto no conservativo  $\mathcal{A}(W)W_x$  para funciones regulares a trozos de nuevo como una medida, cuya parte regular se calcula integrando la función  $\mathcal{A}(W)W_x$  y cuya parte singular resulta de sustituir las diferencias de flujo en (1.1.7) por integrales de línea, como veremos a continuación.

La herramienta básica empleada en la teoría desarrollada en [24] para interpretar los productos no conservativos como medidas es una *familia de caminos*, definida como sigue:

**Definición 1.1.1.** Una familia de caminos en  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es una aplicación localmente de Lipschitz

$$\Phi: [0, 1] \times \Omega \times \Omega \mapsto \Omega$$

tal que:

- $\Phi(0; W_L, W_R) = W_L$  y  $\Phi(1; W_L, W_R) = W_R$ , para cada  $W_L, W_R \in \Omega$ ;
- para cada conjunto acotado arbitrario  $\mathcal{O} \subset \Omega$ , existe una constante  $k$  tal que

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) \right| \leq k |W_R - W_L|,$$

para cada  $W_L, W_R \in \mathcal{O}$  y cada  $s \in [0, 1]$ ;

- para cada conjunto acotado  $\mathcal{O} \subset \Omega$ , existe una constante  $K$  tal que

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L^1, W_R^1) - \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L^2, W_R^2) \right| \leq K (|W_L^1 - W_L^2| + |W_R^1 - W_R^2|),$$

para cada  $W_L^1, W_R^1, W_L^2, W_R^2 \in \mathcal{O}$  y cada  $s \in [0, 1]$ .

Una vez elegida una familia de caminos  $\Phi$  en  $\Omega$ , el producto no conservativo puede interpretarse como una medida de Borel en  $(L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap BV(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+))^N$ , denotada por  $[\mathcal{A}(W)W_x]_\Phi$ . Dada una solución débil  $W$  de (1.1.1) regular a trozos, la medida de Borel correspondiente al producto no conservativo se define como:

$$(1.1.9) \quad \int_E \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx = \int_E \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx + \sum_l \left( \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_l^-, W_l^+)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_l^-, W_l^+) ds \right) \delta_{x=x_l(t)},$$

que, obviamente, generaliza a (1.1.8), donde  $E$  es un conjunto de Borel. En la igualdad anterior, la expresión  $W_x$  de la primera integral representa de nuevo la derivada puntual de  $W(\cdot, t)$ ;  $x_l(t)$ , la posición de la  $l$ -ésima discontinuidad de  $W$  en el instante  $t$ ; y  $W_l^-$  y  $W_l^+$ , los límites de  $W$  a la izquierda y a la derecha de la  $l$ -ésima discontinuidad en el instante  $t$ .

Obsérvese que la medida puede descomponerse como una suma  $\mu_a^\Phi + \mu_s^\Phi$  donde:

$$\mu_a^\Phi(E) = \int_E \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx,$$

para cada conjunto de Borel  $E$ , entendiéndose a la derivada en sentido puntual, y:

$$(1.1.10) \quad \mu_s^\Phi = \sum_l \left( \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_l^-, W_l^+)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_l^-, W_l^+) ds \right) \delta_{x=x_l(t)}.$$

A través de una discontinuidad con velocidad  $\xi$ , una solución débil debe satisfacer la condición

de Rankine-Hugoniot generalizada

$$(1.1.11) \quad \int_0^1 (\xi \mathcal{I} - \mathcal{A}(\Phi(s; W^-, W^+))) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W^-, W^+) ds = 0,$$

donde  $\mathcal{I}$  es la matriz identidad y  $W^-, W^+$  son los límites a la izquierda y a la derecha de la solución en la discontinuidad. Obsérvese que en el caso particular de un sistema de leyes de conservación, esta condición de Rankine-Hugoniot es independiente de la familia de caminos elegida y se reduce a la condición usual:

$$(1.1.12) \quad F(W^+) - F(W^-) = \xi(W^+ - W^-).$$

Igual que en el caso conservativo, no toda discontinuidad que verifique la condición anterior es admisible. Es necesario, además, adoptar conceptos de solución entrópica, como los siguientes:

**Definición 1.1.2.** *Se dice que una solución débil es una solución entrópica en el sentido de Lax si, en cada discontinuidad, existe  $i \in \{1, \dots, N\}$  tal que*

$$\lambda_i(W^+) < \xi < \lambda_{i+1}(W^+) \quad y \quad \lambda_{i-1}(W^-) < \xi < \lambda_i(W^-)$$

si el  $i$ -ésimo campo característico es genuinamente no lineal, o

$$\lambda_i(W^-) = \xi = \lambda_i(W^+)$$

si el  $i$ -ésimo campo característico es linealmente degenerado.

**Definición 1.1.3.** *Dado un par de entropía  $(\eta, G)$  para (1.1.1), es decir, un par de funciones regulares de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  tales que:*

$$\nabla G(W) = \nabla \eta(W) \cdot \mathcal{A}(W), \quad \forall W \in \Omega,$$

se dice que una solución débil es entrópica si satisface la desigualdad:

$$\partial_t \eta(W) + \partial_x G(W) \leq 0,$$

en el sentido de las distribuciones.

La elección de la familia de caminos es importante puesto que determina la velocidad de propagación de las discontinuidades. La opción más simple consiste en la familia de segmentos, que equivale a la definición de producto no conservativo propuesta por Volpert en [77]. En aplicaciones prácticas, esta elección debería estar basada en consideraciones físicas. No obstante, es natural desde el punto de vista matemático requerir a esta familia que satisfaga algunas hipótesis que relacionan los caminos con las curvas integrales de los campos característicos. Siguiendo [55], supondremos que los caminos verifican las siguientes hipótesis:

**(H1)** *Dados dos estados  $W_L$  and  $W_R$  pertenecientes a la misma curva integral  $\gamma$  de un campo linealmente degenerado, el camino  $\Phi(s; W_L, W_R)$  es una parametrización del arco de  $\gamma$  que conecta a  $W_L$  y  $W_R$ .*

**(H2)** *Dados dos estados  $W_L$  and  $W_R$  pertenecientes a la misma curva integral  $\gamma$  de un campo genuinamente no lineal,  $R_i$ , con  $\lambda_i(W_L) < \lambda_i(W_R)$ , el camino  $\Phi(s; W_L, W_R)$  es una parametrización del arco de  $\gamma$  que conecta a  $W_L$  y  $W_R$ .*

(H3) Denotemos mediante  $\mathcal{RP} \subset \Omega \times \Omega$  al conjunto de pares  $(W_L, W_R)$  tales que el problema de Riemann:

$$(1.1.13) \quad \begin{cases} W_t + \mathcal{A}(W)W_x = 0, \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0, \\ W_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

tiene una única solución autosimilar  $W(x, t) = V(x/t; W_L, W_R)$  compuesta por a lo sumo  $N$  ondas simples (esto es, choques, discontinuidades de contacto u ondas de rarefacción) que conectan  $J + 1$  estados intermedios

$$W_0 = W_L; W_1; \dots; W_{J-1}; W_J = W_R;$$

con  $J \leq N$ . Suponemos entonces que, dados dos estados  $(W_L, W_R) \in \mathcal{RP}$ , la curva descrita por el camino  $\Phi(s; W_L, W_R)$  en  $\Omega$  es la unión de las curvas correspondientes a los caminos  $\Phi(s; W_j, W_{j+1})$ ,  $j = 0, \dots, J - 1$ .

Si la definición de soluciones débiles de (1.1.1) está basada en una familia de caminos que satisfaga estas hipótesis, se verifican las siguientes propiedades naturales (ver [55]):

**Proposición 1.1.1.** *Supongamos que el concepto de solución débil de (1.1.1) se define a partir de una familia de caminos que verifica las hipótesis (H1)-(H3). Entonces:*

(i) *Dados dos estados  $W_L$  y  $W_R$  pertenecientes a la misma curva integral de un campo linealmente degenerado, la discontinuidad de contacto dada por:*

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < \sigma t, \\ W_R & \text{si } x > \sigma t, \end{cases}$$

donde  $\sigma$  es el valor (constante) del correspondiente autovalor a lo largo de la curva integral, es una solución débil de (1.1.1).

(ii) *Sea  $(W_L, W_R)$  un par de estados pertenecientes a  $\mathcal{RP}$  y  $W$ , la solución del correspondiente Problema de Riemann (1.1.13). Se tiene la siguiente igualdad:*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(W(x, t))W_x(x, t) dx = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds.$$

Consecuentemente, la masa total de la medida de Borel  $[\mathcal{A}(W(\cdot, t))W_x(\cdot, t)]_{\Phi}$  no depende de  $t$ .

(iii) *Sea  $(W_L, W_R)$  un par de estados pertenecientes a  $\mathcal{RP}$  y sea  $W_j$  cualquiera de los estados intermedios que aparecen en la solución del problema de Riemann (1.1.13). Entonces:*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds = \\ \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_j)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_j) ds \\ + \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_j, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_j, W_R) ds. \end{aligned}$$

En [55] se dan algunas orientaciones para construir una familia de caminos satisfaciendo estas hipótesis (al menos para pares  $(W_L, W_R) \in \mathcal{RP}$ ).

La siguiente proposición presenta una propiedad de la solución de un problema de Riemann que tendrá un destacado papel a la hora de definir resolvedores de Riemann aproximados para (1.1.1) (véase [59]):

**Proposición 1.1.2.** *Dado  $(W_L, W_R) \in \mathcal{RP}$ , la solución  $W(x, t) = V(x/t; W_L, W_R)$  del problema de Riemann (1.1.13) satisface la siguiente igualdad:*

$$(1.1.14) \quad \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds + \int_0^\infty (V(v; W_L, W_R) - W_R) dv + \int_{-\infty}^0 (V(v; W_L, W_R) - W_L) dv = 0.$$

**Observación 1.1.1.** Si se establece el concepto de solución entrópica a partir de un par de entropía  $(\eta, G)$ , siendo  $\eta$  convexa, se tiene la siguiente desigualdad para la solución de un problema de Riemann:

$$(1.1.15) \quad G(W_R) + \int_0^\infty (\eta(V(v; W_L, W_R)) - \eta(W_R)) dv \leq G(W_L) - \int_{-\infty}^0 (\eta(V(v; W_L, W_R)) - \eta(W_L)) dv.$$

La prueba es análoga a la correspondiente a un sistema de leyes de conservación.

## 1.2. Esquemas numéricos camino-conservativos

El eje central de la teoría en la que se apoya esta memoria para la resolución numérica de sistemas hiperbólicos no conservativos es el concepto de esquema numérico *camino-conservativo* introducido por Parés en [59]. Este concepto generaliza el de esquema conservativo para sistemas de leyes de conservación, como veremos a continuación.

Una solución débil de (1.1.5) satisface la igualdad:

$$(1.2.1) \quad \frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_1) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_0) dx + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} F(W(a, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} F(W(b, t)) dt \right),$$

para cada rectángulo  $[a, b] \times [t_0, t_1]$  en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , siendo  $\Delta x = b - a$  y  $\Delta t = t_1 - t_0$ .

Como es bien sabido, los esquemas conservativos se basan en la igualdad anterior. A la hora de discretizar el sistema, consideramos celdas computacionales  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , (véase Figura 1.1), cuyo tamaño  $\Delta x$  se supone constante por simplicidad. Supongamos también que  $x_{i+1/2} = i\Delta x$  y denotemos por  $x_i = (i - 1/2)\Delta x$  el centro de la celda  $I_i$ . Sea  $\Delta t$  el paso de tiempo, considerado también constante, y definimos  $t_n = n\Delta t$ . Denotemos por  $W_i^n$  la aproximación en la celda  $I_i$  y en el tiempo  $t_n$  dada por el esquema.  $W_i^n$  se supone una aproximación de los promedios de la solución exacta en cada celda:

$$W_i^n \cong \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t_n) dx.$$

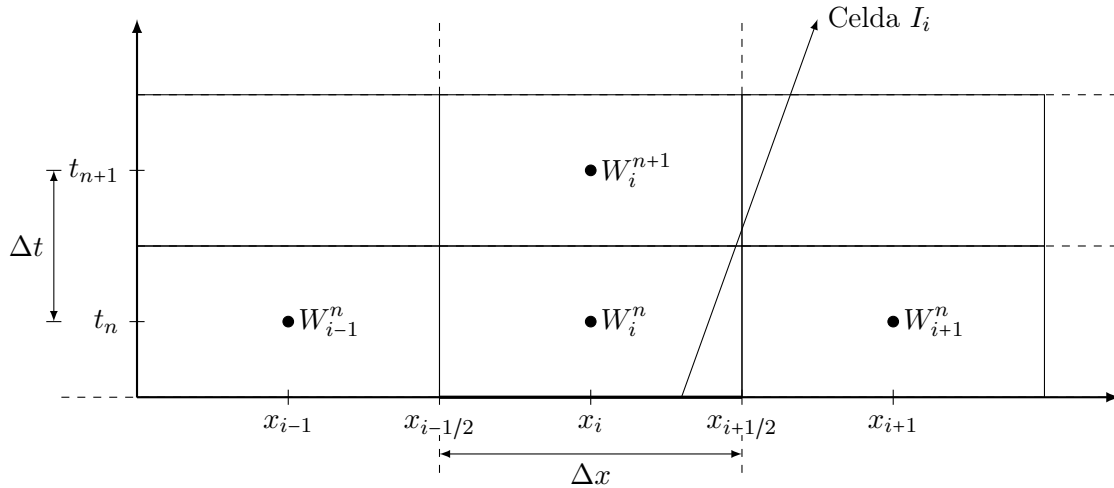


Figura 1.1: Esquema volúmenes finitos

Entonces, la expresión de un esquema numérico conservativo es:

$$(1.2.2) \quad W_i^{n+1} = W_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (G_{i-1/2} - G_{i+1/2}),$$

donde

$$(1.2.3) \quad G_{i+1/2} \cong \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(W(x_{i+1/2}, t)) dt.$$

Claramente, la expresión del esquema es el equivalente discreto a la igualdad (1.2.1) correspondiente al rectángulo  $I_i \times [t^n, t^{n+1}]$ .

Esta sencilla interpretación de un esquema numérico conservativo no es fácilmente adaptable al caso de sistemas no conservativos, donde no aparece una función de flujo  $F$ . Por ello, reescribimos (1.2.1) basándonos en la interpretación de  $[F(W)_x]$  como medida:

$$(1.2.4) \quad \frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_1) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_0) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b F(W(x, t))_x dx dt \right).$$

A continuación, definimos la función constante a trozos  $W^n$  cuyo valor en la celda  $I_i$  es la aproximación  $W_i^n$ . El equivalente discreto a (1.2.4) sería:

$$(1.2.5) \quad W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \int F(W^n)_x dx,$$

pero esta definición no corresponde a un esquema conservativo (1.2.2). En efecto, como  $W^n$  es constante a trozos, la medida  $[F(W^n)_x]$  sólo consta de la parte singular

$$\sum_i (F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)) \delta_{x=x_{i+1/2}}.$$

Pero, puesto que las celdas  $I_i$  se han definido como intervalos cerrados, en (1.2.5) la masa puntual situada en  $x_{i+1/2}$  debería contribuir a las dos celdas  $I_i$  y  $I_{i+1}$ . En este sentido, el esquema numérico conservativo (1.2.2) puede interpretarse como una *corrección* de (1.2.5): el flujo numérico se usa



para descomponer las medidas de Dirac situadas en las interceldas de la siguiente manera:

$$(F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)) \delta_{x=x_{i+1/2}} = (F(W_{i+1}^n) - G_{i+1/2}) \delta_{x=x_{i+1/2}} + (G_{i+1/2} - F(W_i^n)) \delta_{x=x_{i+1/2}}.$$

Entonces, el primer sumando contribuye a la celda  $I_{i+1}$  y el segundo a la celda  $I_i$ :

$$(1.2.6) \quad W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (F(W_i^n) - G_{i-1/2}) + (G_{i+1/2} - F(W_i^n)) \right),$$

que obviamente equivale a (1.2.2).

Volvamos nuevamente al sistema no conservativo (1.1.1) y supongamos que se ha elegido una familia de caminos  $\Phi$  para definir las soluciones débiles. Dado un rectángulo  $[a, b] \times [t_0, t_1]$  en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , una solución débil de (1.1.1) satisface la igualdad:

$$(1.2.7) \quad \frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_1) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_0) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx dt \right),$$

que generaliza a (1.2.1), siendo  $\Delta x = b - a$  y  $\Delta t = t_1 - t_0$ .

El equivalente discreto de (1.2.7) es ahora:

$$(1.2.8) \quad \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t_{n+1}) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t_n) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx dt,$$

donde, de nuevo,  $W^n$  es la función constante a trozos que toma el valor  $W_i^n$  en la celda  $I_i$ . La medida  $[\mathcal{A}(W^n) W_x^n]_{\Phi}$  vuelve a constar únicamente de la parte singular:

$$\sum_i \left( \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_i^n, W_{i+1}^n)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_i^n, W_{i+1}^n) ds \right) \delta_{x=x_{i+1/2}}.$$

Por tanto, las masas puntuales situadas en las interceldas deben descomponerse en dos términos  $\mathcal{D}_{i+1/2}^-$  y  $\mathcal{D}_{i+1/2}^+$ , que contribuyen a las celdas  $I_i$  e  $I_{i+1}$  respectivamente. Esta idea nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 1.2.1.** *Dada una familia de caminos  $\Phi$ , un esquema numérico se dice que es  $\Phi$ -conservativo si se puede escribir en la forma:*

$$(1.2.9) \quad W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{D}_{i-1/2}^+ + \mathcal{D}_{i+1/2}^-),$$

donde

$$\mathcal{D}_{i+1/2}^{\pm} = \mathcal{D}^{\pm}(W_{i-q}^n, \dots, W_{i+p}^n),$$

siendo  $\mathcal{D}^-$  y  $\mathcal{D}^+$  dos funciones continuas de  $\Omega^{p+q+1}$  en  $\Omega$  que satisfacen

$$(1.2.10) \quad \mathcal{D}^{\pm}(W, \dots, W) = 0 \quad \forall W \in \Omega$$

y

$$(1.2.11) \quad \mathcal{D}^-(W_{-q}, \dots, W_p) + \mathcal{D}^+(W_{-q}, \dots, W_p) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_0, W_1)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_0, W_1) ds$$

para cada conjunto  $\{W_{-q}, \dots, W_p\} \subset \Omega$ .

Los esquemas numéricos camino-conservativos satisfacen (1.2.7) a nivel discreto: si un esquema  $\Phi$ -conservativo es aplicado a las condiciones iniciales

$$(1.2.12) \quad W_i^0 \cong \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W_0(x) dx,$$

la igualdad

$$(1.2.13) \quad \int_{\mathbb{R}} W^{n+1}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} W^n(x) dx - \Delta t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(W^n(x)) W_x^n(x) dx,$$

puede obtenerse sumando en (1.2.9) y usando (1.2.11). La afirmación recíproca también es cierta: un esquema numérico de la forma

$$(1.2.14) \quad W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} H(W_{i-q}^n, \dots, W_{i+p}^n),$$

que satisfaga (1.2.13) es  $\Phi$ -conservativo, es decir, puede escribirse en la forma (1.2.9) con  $\mathcal{D}^\pm$  satisfaciendo (1.2.10) y (1.2.11).

**Observación 1.2.1.** Nótese que la condición (1.2.11) juega un doble papel. Por un lado, se usa para aproximar las masas puntuales asociadas a las discontinuidades. Por otro lado, junto con (1.2.10), es un requisito de consistencia para soluciones regulares. En efecto, si  $W$  y  $\mathcal{A}(W)$  son suficientemente regulares y  $\mathcal{D}^\pm(W_{-q}, \dots, W_p)$  son también regulares, de (1.2.10) y (1.2.11) se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} (\mathcal{D}^+(W(x_{i-q-1}, t), \dots, W(x_{i+p-1}, t)) + \mathcal{D}^-(W(x_{i-q}, t), \dots, W(x_{i+p}, t))) \\ = \mathcal{A}(W(x_i, t)) W_x(x_i, t) + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

Consideremos ahora el sistema (1.1.2) con condición inicial

$$(1.2.15) \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para diseñar un esquema camino-conservativo, reescribimos en primer lugar el problema de Cauchy en la forma (1.1), con condición inicial  $W(x, 0) = W_0(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , con

$$W_0(x) = [w_0, \sigma]^T.$$

Ahora, tenemos que elegir una familia de caminos en  $\Omega$ . Usaremos la notación

$$(1.2.16) \quad W_L = \begin{bmatrix} w_L \\ \sigma_L \end{bmatrix}, \quad W_R = \begin{bmatrix} w_R \\ \sigma_R \end{bmatrix},$$

para los estados, y

$$(1.2.17) \quad \tilde{\Phi}(s; W_L, W_R) = \begin{bmatrix} \Phi(s; W_L, W_R) \\ \Phi_{m+1}(s; W_L, W_R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(s; W_L, W_R) \\ \vdots \\ \Phi_m(s; W_L, W_R) \\ \Phi_{m+1}(s; W_L, W_R) \end{bmatrix},$$

para los caminos que conectan los estados. Se eligen dos funciones  $\mathcal{D}^\pm$  que satisfacen (1.2.10) y (1.2.11). Se usará la siguiente notación:

$$(1.2.18) \quad \mathcal{D}^\pm(W_{-q}, \dots, W_p) = \begin{bmatrix} D^\pm(W_{-q}, \dots, W_p) \\ D_{m+1}^\pm(W_{-q}, \dots, W_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1^\pm(W_{-q}, \dots, W_p) \\ \vdots \\ D_m^\pm(W_{-q}, \dots, W_p) \\ D_{m+1}^\pm(W_{-q}, \dots, W_p) \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta la definición en (1.1) de  $\mathcal{A}(W)$ , podemos escribir (1.2.11) como sigue:

$$(1.2.19) \quad \begin{aligned} D^-(W_{-q}, \dots, W_p) + D^+(W_{-q}, \dots, W_p) = \\ = F(w_1) - F(w_0) + \int_0^1 B(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds \\ - \int_0^1 S(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds, \end{aligned}$$

$$(1.2.20) \quad D_{m+1}^-(W_{-q}, \dots, W_p) + D_{m+1}^+(W_{-q}, \dots, W_p) = 0,$$

y el esquema numérico se reduce a

$$(1.2.21) \quad w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (D_{i-1/2}^+ + D_{i+1/2}^-),$$

$$(1.2.22) \quad \sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (D_{m+1, i-1/2}^+ + D_{m+1, i+1/2}^-),$$

donde

$$\begin{aligned} D_{i+1/2}^\pm &= D^\pm(W_{i-q}^n, \dots, W_{i+p}^n), \\ D_{m+1, i+1/2}^\pm &= D_{m+1}^\pm(W_{i-q}^n, \dots, W_{i+p}^n). \end{aligned}$$

Los valores iniciales en las celdas vienen dados por:

$$w_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w_0(x) dx \quad \text{y} \quad \sigma_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \sigma(x) dx.$$

De acuerdo a la ecuación (1.1.3), la aproximaciones numéricas de  $\sigma$  deberían ser constantes en el tiempo, es decir

$$\sigma_i^n = \sigma_i^0 \quad \forall i, n.$$

Esto se satisface, obviamente, si

$$(1.2.23) \quad D_{m+1}^\pm \equiv 0.$$

En lo que sigue, buscaremos esquemas numéricos que satisfagan (1.2.23).

En la mayoría de los casos es posible reformular el esquema numérico de forma que se acerque a la formulación original (1.1.2) del problema. Se producirá este caso si la familia de caminos satisface el siguiente requerimiento:

(R0) Existe una familia de caminos  $\Phi$  en  $\mathcal{O}$  tal que si  $W_L = [w_L, \sigma_L]^T$  y  $W_R = [w_R, \sigma_R]^T$  verifican  $\sigma_L = \sigma_R = \tilde{\sigma}$ , entonces

$$(1.2.24) \quad \tilde{\Phi}(s; W_L, W_R) = \begin{bmatrix} \Phi(s; W_L, W_R) \\ \tilde{\sigma} \end{bmatrix} \quad \forall s \in [0, 1].$$

Este requerimiento es natural, en el sentido que implica que, si el esquema numérico se aplica a un problema en el que  $\sigma$  es constante, entonces se reduce a un método  $\Phi$ -conservativo para el problema homogéneo:

$$(1.2.25) \quad w_t + F(w)_x + B(w)w_x = 0.$$

Asumamos que (R0) se satisface y fijemos un valor para  $\sigma$ , digamos  $\tilde{\sigma}$ . Dados

$$W_{-q} = [w_{-q}, \sigma_{-q}]^T, \dots, W_p = [w_p, \sigma_p]^T$$

en  $\Omega$ , definimos:

$$(1.2.26) \quad G(W_{-q}, \dots, W_p) = D^-([w_{-q}, \tilde{\sigma}]^T, \dots, [w_p, \tilde{\sigma}]^T) + F(w_0) - \frac{1}{2} \int_0^1 B(\Phi(s; w_0, w_1)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; w_0, w_1) ds,$$

$$(1.2.27) \quad G(W_{-q}, \dots, W_p) = F(w_1) - D^+([w_{-q}, \tilde{\sigma}]^T, \dots, [w_p, \tilde{\sigma}]^T) + \frac{1}{2} \int_0^1 B(\Phi(s; w_0, w_1)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; w_0, w_1) ds.$$

Aplicando la igualdad (1.2.19) a los estados  $[w_{-q}, \tilde{\sigma}]^T, \dots, [w_p, \tilde{\sigma}]^T$  y usando (R0), se puede ver fácilmente que (1.2.26) y (1.2.27) definen una misma función  $G$ . Ahora de (1.2.10) y (R0) obtenemos:

$$(1.2.28) \quad G(W, \dots, W) = F(w) \quad \forall W = [w, \sigma]^T \in \Omega,$$

y entonces  $G$  puede interpretarse como un flujo numérico consistente con  $F$ .

Ahora, dados  $W_{-q}, \dots, W_p$  en  $\Omega$ , definimos:

$$(1.2.29) \quad B^-(W_{-q}, \dots, W_p) = \frac{1}{2} \int_0^1 B(\Phi(s; W_0, W_1)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_0, W_1) ds,$$

$$(1.2.30) \quad B^+(W_{-q}, \dots, W_p) = \frac{1}{2} \int_0^1 B(\Phi(s; W_0, W_1)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_0, W_1) ds,$$

$$(1.2.31) \quad S^-(W_{-q}, \dots, W_p) = G(W_{-q}, \dots, W_p) - F(w_0) + B^-(W_{-q}, \dots, W_p) - D^-(W_{-q}, \dots, W_p),$$

$$(1.2.32) \quad S^+(W_{-q}, \dots, W_p) = F(w_1) - G(W_{-q}, \dots, W_p) + B^+(W_{-q}, \dots, W_p) - D^+(W_{-q}, \dots, W_p).$$

Las siguientes igualdades puede verificarse fácilmente:

$$(1.2.33) \quad B^-(W_{-q}, \dots, W_p) + B^+(W_{-q}, \dots, W_p) = \int_0^1 B(\Phi(s; W_0, W_1)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_0, W_1) ds,$$

$$(1.2.34) \quad S^-(W_{-q}, \dots, W_p) + S^+(W_{-q}, \dots, W_p) = \int_0^1 S(\Phi(s; W_0, W_1)) \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial s}(s; W_0, W_1) ds.$$

Ahora, el esquema numérico (1.2.21) puede reescribirse como:

$$(1.2.35) \quad w_i^{n+1} = w_i^n + \frac{\Delta x}{\Delta t} (G_{i-1/2}^- - G_{i+1/2}^- - B_{i-1/2}^+ - B_{i+1/2}^- + S_{i-1/2}^+ + S_{i+1/2}^-),$$

donde

$$(1.2.36) \quad G_{i+1/2} = G(W_{i-q}^n, \dots, W_{i+p}^n),$$

$$(1.2.37) \quad B_{i+1/2}^\pm = B^\pm(W_{i-q}^n, \dots, W_{i+p}^n),$$

$$(1.2.38) \quad S_{i+1/2}^\pm = S^\pm(W_{i-q}^n, \dots, W_{i+p}^n).$$

Por otro lado, cualquier esquema numérico de la forma (1.2.35)-(1.2.38) con  $G, B^\pm, S^\pm$  satisfaciendo (1.2.28), (1.2.33) y (1.2.34) respectivamente, es un esquema camino-conservativo para una familia  $\tilde{\Phi}$ .

En particular, si el sistema es conservativo, es decir,  $B \equiv 0, S \equiv 0$ , la discusión anterior muestra que cada esquema numérico camino-conservativo es equivalente al esquema conservativo con flujo numérico

$$(1.2.39) \quad \begin{aligned} G(W_{-q}, \dots, W_p) &= D^-(W_{-q}, \dots, W_p) + F(w_0) \\ &= -D^+(W_{-q}, \dots, W_p) + F(w_1). \end{aligned}$$

Y por otro lado, un esquema numérico conservativo es camino-conservativo para cualquier familia de caminos. Como consecuencia, el concepto de esquema numérico camino-conservativo es una generalización de esquema conservativo.

Finalmente, reparemos en que la expresión de un esquema numérico (1.2.21) en la forma (1.2.35) no es única: por un lado, tenemos que elegir un valor arbitrario para  $\sigma$ , y por otro lado,  $B^\pm$  puede ser sustituido por cualquier par de funciones que satisfagan (1.2.33).

### 1.2.1. Convergencia y elección de caminos

Como hemos visto, los esquemas numéricos camino-conservativos para una familia de caminos  $\Phi$  generaliza el concepto usual de esquema numérico conservativo para sistemas de leyes de conservación.

Efectivamente, si (1.1.1) es un sistema de leyes de conservación, es decir,  $\mathcal{J}$  es la matriz jacobiana de una función de flujo  $F$ , todo esquema numérico  $\Phi$ -conservativo es consistente y conservativo en el sentido usual. Recíprocamente, todo esquema numérico camino conservativo y consistente es  $\Phi$ -conservativo. Por otro lado, el teorema de Lax-Wendroff establece que si las aproximaciones obtenidas por un esquema numérico conservativo convergen (en un sentido a precisar), el límite es una solución débil del problema de valores iniciales asociado al sistema de leyes de conservación. Por tanto, si las soluciones numéricas proporcionadas por un esquema numérico conservativo convergen a una función discontinua, sus discontinuidades deben satisfacer las condiciones de Rankine-Hugoniot (1.1.12).

Nos preguntamos ahora si los esquemas  $\Phi$ -conservativos satisfacen un resultado similar para sistemas (1.1.1). En [16] se probó el siguiente resultado:

**Teorema 1.2.1.** *Sea  $W_{\Delta x}$  la aproximación numérica obtenida de un esquema numérico  $\Phi$ -conservativo aplicado a la condición inicial (1.2.12). Supongamos que existe una función  $W \in (L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap BV(\mathbb{R} \times [0, \infty)))^N$  tal que, para cada  $t \in [0, \infty)$ ,*

$$(1.2.40) \quad W_{\Delta x}(\cdot, t) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} W(\cdot, t) \quad \text{uniformemente en el sentido de los grafos,}$$

y que existe una constante  $C$  tal que

$$(1.2.41) \quad \|W_{\Delta x}(\cdot, t)\|_{\infty(\mathbb{R})} \leq C \quad \text{para todo } t \in [0, \infty), \text{ con } \Delta x > 0$$

y

$$(1.2.42) \quad TV(W_{\Delta x}(\cdot, t)) \leq C \text{ para todo } t \in [0, \infty), \text{ con } \Delta x > 0$$

Entonces  $W$  es una  $\Phi$ -solución del sistema (1.1.1) con condición inicial  $W(x, 0) = W_0(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

Sin embargo, la convergencia en el sentido de los grafos es demasiado fuerte (véase [24] y [16] para más detalles) y sólo esquemas como los de Glimm y *front tracking* la satisfacen. En general, las aproximaciones de esquemas  $\Phi$ -conservativos convergen a soluciones débiles de un sistema perturbado de (1.1.1): aparece un término fuente que corresponde a una medida del error de convergencia con soporte en las discontinuidades (véase [16]).

En ciertas situaciones especiales, la medida del error de convergencia es idénticamente cero. Este es el caso de los sistemas de leyes de equilibrio, en los que pueden aparecer dos tipos de discontinuidades en las soluciones débiles: choques que avanzan en regiones donde el término fuente es continuo y que satisfacen las condiciones de Rankine-Hugoniot usuales; y discontinuidades de contacto estacionarias situadas sobre las discontinuidades del término fuente. Si la familia de caminos  $\Phi$  elegida para construir el esquema  $\Phi$ -conservativo satisface (H1), entonces todas las discontinuidades son aproximadas correctamente y las soluciones numéricas convergen a las soluciones correctas. No obstante, los sistemas de leyes de equilibrio pueden también presentar una dificultad adicional (el problema de resonancia) si uno de los autovalores de la matriz Jacobiana se anula. En este caso, las soluciones débiles no están determinadas de manera única por los datos iniciales, y los límites de las soluciones numéricas pueden depender al mismo tiempo de la familia de caminos y del propio esquema numérico.

En general, si queremos asegurar la convergencia de las soluciones numéricas hacia una función que sea solución clásica, que sea regular y cuyas discontinuidades concuerden con la física del problema, debemos llevar a cabo los siguientes pasos:

- Elegir una regularización del sistema hiperbólico que sea compatible con la física del problema.
- Calcular una familia de caminos compatible con esta regularización.
- Considerar un esquema numérico cuyas soluciones converjan a la solución débil correspondiente a la familia de caminos.

En la práctica, esto anterior puede resultar muy costoso y difícil de llevar a cabo. El cálculo efectivo de una familia de caminos compatible con una regularización dada requiere el cálculo de los correspondientes “perfiles viscosos”. Por otro lado, como hemos mencionado en líneas anteriores, la convergencia de las soluciones numéricas hacia las soluciones débiles correctas sólo está garantizada para los métodos de Glimm y *front tracking* cuya implementación puede también ser muy costosa y tediosa, ya que requiere el conocimiento explícito de la solución del problema de Riemann. De hecho, cuando tomamos el modelo no conservativo como una versión simplificada de uno más complejo (pero conservativo), como ocurre en esta memoria, la estrategia mencionada puede terminar siendo más costosa que resolver directamente el problema complejo en sí.

Por estas razones, el uso de estrategias numéricas basadas en una discretización directa del sistema no conservativo está completamente justificado. En este caso, la elección de esquemas numéricos camino-conservativos tiene las siguientes ventajas:

- Las soluciones numéricas satisfacen una *propiedad conservativa* (1.2.13), compatible con la definición rigurosa de producto no conservativo. En particular, si el sistema tiene un subsistema conservativo, el esquema numérico es conservativo para ese subsistema en el sentido usual.
- Las aproximaciones de los choques dadas por los esquemas son compatibles con la regularización del sistema con términos de alto orden que se hacen cero cuando  $\Delta x$  tiende a cero.
- Como originalmente se apunta en [47], en el caso más simple de ecuaciones hiperbólicas escalares, el error de convergencia solo se aprecia para mallas muy finas, para discontinuidades de gran amplitud y/o para tiempos de simulación prolongados.
- La estrategia es fácilmente aplicable a métodos de alto orden o a problemas multidimensionales.

El principal inconveniente con el que nos encontramos es que la velocidad y amplitud de los choques simulados dependen tanto de la familia de caminos como de la viscosidad numérica del esquema (véase [16]). Como consecuencia, no sólo dos esquemas que sean camino-conservativos para diferentes familias de caminos pueden dar diferentes aproximaciones en un choque, sino también dos esquemas numéricos diferentes basados en la misma familia de caminos, pueden presentar los mismo problemas (véanse ejemplos en [16] y [64]). De hecho este inconveniente se extiende a todos los métodos que presentan alguna viscosidad numérica. Sin embargo, como se menciona en líneas anteriores, con frecuencia estas diferencias son pequeñas en comparación con los errores de discretización y pueden pasar inadvertidas en situaciones prácticas.

En la práctica, se puede elegir una familia de caminos simple para diseñar esquemas numéricos y posteriormente se pueden comparar los resultados que ofrecen dichos esquemas con datos experimentales para validar el modelo resultante. La elección canónica de una familia de caminos está dada por la familia de segmentos:

$$(1.2.43) \quad \Phi(s; W_L, W_R) = W_L + s(W_R - W_L).$$

Con esta elección, la definición de productos no conservativos es equivalente a la propuesta por Volpert en [77].

En el caso particular del modelo objeto de estudio en esta memoria, los choques capturados por las soluciones numéricas obtenidas con un esquema IFCP basado en la familia de segmentos son una buena aproximación de aquellos obtenidos de datos experimentales.

### 1.3. Esquemas bien equilibrados

El buen equilibrado está relacionado con la capacidad de un esquema numérico para aproximar el equilibrio, es decir, las soluciones estacionarias. El sistema (1.1.1) sólo puede poseer soluciones

estacionarias no triviales si posee algún campo linealmente degenerado: si  $W(x)$  es una solución estacionaria, satisface

$$\mathcal{A}(W(x)) \cdot W'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si  $W'(x) \neq 0$ , entonces 0 es un autovalor de  $\mathcal{A}(W(x))$  para todo  $x$  y  $W'(x)$  es un autovector asociado. Por tanto,  $x \mapsto W(x)$  se puede interpretar como una parametrización de una curva integral a lo largo de un campo característico linealmente degenerado cuyo correspondiente autovalor toma el valor 0 a lo largo de la curva.

Además, si introducimos el conjunto  $\Gamma$  de todas las curvas integrales  $\gamma$  de un campo linealmente degenerado de  $\mathcal{A}(W)$  tal que el correspondiente autovalor se haga 0 en  $\gamma$ , las soluciones estacionarias del sistema pueden considerarse parametrizaciones de arco de curvas pertenecientes a  $\Gamma$  en las que  $x$  es el parámetro.

De acuerdo a [58] introducimos las siguientes definiciones:

**Definición 1.3.1.** *Dada una curva  $\gamma \in \Gamma$ , un esquema numérico para resolver (1.1.1) se dice que es exactamente bien equilibrado para  $\gamma$  si resuelve exactamente cualquier solución regular estacionaria  $W$  tal que*

$$(1.3.1) \quad W(x) \in \gamma \quad \forall x$$

en el sentido siguiente: si el esquema numérico se aplica a valores iniciales

$$W_i^0(x) = W(x_i) \quad \forall i,$$

entonces

$$W_i^n = W_i^0 \quad \forall n, i.$$

El esquema se dice que es bien equilibrado de orden  $k$  para  $\gamma$  si resuelve hasta orden  $k$  cualquier solución regular estacionaria que satisfaga (1.3.1). Finalmente, el esquema se dice exactamente bien equilibrado o bien equilibrado de orden  $k$  si estas propiedades se satisfacen para cualquier curva de  $\Gamma$ .

A fin de que el esquema numérico sea bien equilibrado para una curva  $\gamma \in \Gamma$ , debemos elegir una familia de caminos que satisfaga la propiedad siguiente (véase [58]):

(WBP) Dados estados  $W_L$  y  $W_R$  en  $\gamma$ , el camino  $\Phi(s; W_L, W_R)$  es una parametrización del arco de  $\gamma$  que une estos estados.

Como vamos a ver, los esquemas numéricos descritos en esta memoria son bien equilibrados para un subconjunto  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  que se precisará en las siguientes secciones.



## Capítulo 2

# Métodos de Roe e IFCP

### 2.1. Introducción

En este capítulo abordaremos el diseño de esquemas numéricos para leyes de conservación con productos no conservativos y términos fuentes basados en resolutores de Riemann aproximados. En particular, vamos a considerar el esquema de Roe y el esquema IFCP. El esquema de Roe fue introducido por Philip L. Roe en [66] para sistemas de leyes de conservación y posteriormente extendido por Toumi en [76] a sistemas hiperbólicos no conservativos. Es un esquema de orden 1 en espacio y tiempo, y es probablemente uno de los esquemas más utilizados en la práctica. Para su definición es necesario conocer, en primer lugar una linealización adecuada de la matriz  $\mathcal{A}(W)$ , así como la descomposición espectral completa de esta linealización. Esto hace que el método de Roe resulte computacionalmente costoso si esta descomposición espectral no se conoce de forma explícita.

Para resolver este problema se pueden considerar otros esquemas que no necesitan utilizar la descomposición espectral completa. Este es el caso del esquema IFCP desarrollado por Fernández-Castro-Parés en [28] para aproximar las soluciones del sistema de aguas someras bicapa, y que sólo necesita conocer el mayor y el menor de los autovalores de la linealización considerada, así como una cota para el resto de los autovalores. En esta memoria vamos a considerar su extensión a un sistema general del tipo (1.1.2).

### 2.2. Resolvedores Riemann aproximados

El concepto de resolvedores de Riemann aproximados, introducidos en [46] para sistemas conservativos y extendidos en [5] para leyes de equilibrio, se puede generalizar a sistemas no conservativos como sigue (véase [59]):

**Definición 2.2.1.** *Dada una familia de caminos  $\Phi$ , un resolutor  $\Phi$ -aproximado de Riemann para (1.1.1) es una función  $V : \mathbb{R} \times \Omega \times \Omega \mapsto \Omega$  que satisface:*

(i) *para cada  $W \in \Omega$*

$$V(v, W, W) = W \quad \forall v \in \Omega,$$

(ii) para cada  $W_L, W_R \in \Omega$ , existe  $\lambda_{\min}(W_L, W_R), \lambda_{\max}(W_L, W_R)$  en  $\mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} V(v; W_L, W_R) &= W_L \quad \text{si } v < \lambda_{\min}(W_L, W_R), \\ V(v; W_L, W_R) &= W_R \quad \text{si } v > \lambda_{\max}(W_L, W_R), \end{aligned}$$

(iii) para cada  $W_L, W_R \in \Omega$ ,

$$(2.2.1) \quad \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds + \\ + \int_0^\infty (V(v; W_L, W_R) - W_R) dv + \\ + \int_{-\infty}^0 (V(v; W_L, W_R) - W_L) dv = 0.$$

Se espera que  $V(x/t; W_L, W_R)$  sea una aproximación de una solución autosimilar del problema de Riemann:

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} W_t + \mathcal{A}(W)W_x = 0 \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0 \\ W_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

donde la familia de caminos  $\Phi$  se usa para dar sentido al producto no conservativo. Esta solución satisface los tres puntos de la definición anterior.

Dado un resolvidor de Riemann  $\Phi$ -aproximado para (1.1.1), se puede construir un esquema numérico de la siguiente manera:

$$(2.2.3) \quad W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} V\left(\frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n\right) dx \right. \\ \left. + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} V\left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n\right) dx \right)$$

Teniendo como condición CFL a 1/2, el esquema numérico se puede escribir en la forma (1.2.9) con

$$(2.2.4) \quad \mathcal{D}_{i+1/2}^- = - \int_{-\infty}^0 (V(v; W_i^n, W_{i+1}^n) - W_i^n) dv,$$

$$(2.2.5) \quad \mathcal{D}_{i+1/2}^+ = - \int_0^\infty (V(v; W_i^n, W_{i+1}^n) - W_{i+1}^n) dv.$$

Queda claro de (2.2.1) que un esquema numérico (1.2.9) basado en un resolvidor  $\Phi$ -aproximado de Riemann es  $\Phi$ -conservativo. Además, es bien equilibrado para una curva  $\gamma \in \Gamma$  si y sólo si, dados dos estados  $W_L$  y  $W_R$  en  $\gamma$ , se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 (V(v; W_L, W_R) - W_L) dv &= 0, \\ \int_0^\infty (V(v; W_L, W_R) - W_R) dv &= 0. \end{aligned}$$

Estas igualdades se satisfacen, de manera trivial, si

$$(2.2.6) \quad V(v; W_L, W_R) = \begin{cases} W_L & \text{si } v < 0 \\ W_R & \text{si } v > 0. \end{cases}$$

## 2.3. Método de Roe

Los métodos de Roe se basan en resolvedores aproximados de Riemann lineales:  $V(x/t; W_L, W_R)$  es una solución autosimilar del problema de Riemann lineal:

$$(2.3.1) \quad \begin{cases} U_t + \mathcal{A}(W_L, W_R)U_x = 0, \\ U(x, 0) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0 \\ W_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

donde  $\mathcal{A}(W_L, W_R)$  es una linealización de  $\mathcal{A}(W)$ .

Se puede mostrar fácilmente que este es un resolvedor  $\Phi$ -aproximado de Riemann si y sólo si  $\mathcal{A}(W_L, W_R)$  es una linealización de Roe en el sentido definido por Toumi en [76]:

**Definición 2.3.1.** *Dada una familia de caminos  $\Phi$ , una función  $\mathcal{A}_\Phi : \Omega \times \Omega \mapsto \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$  se llama linealización de Roe si verifica las siguientes propiedades:*

- para cada  $W_L, W_R \in \Omega$ ,  $\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R)$  tiene  $N$  autovalores reales y distintos,
- $\mathcal{A}_\Phi(W, W) = \mathcal{A}(W)$  para cada  $W \in \Omega$ ,
- para cada  $W_L, W_R \in \Omega$ ,

$$(2.3.2) \quad \mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R) \cdot (W_R - W_L) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds.$$

Una vez que se ha escogido la linealización, seguimos la discretización en volúmenes finitos introducida en la Sección 1.2, y discretizamos el sistema considerando las celdas computacionales  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . Asumimos por simplicidad que las celdas tienen el mismo tamaño constante  $\Delta x$ , y que  $x_{i+1/2} = i\Delta x$ , siendo  $x_i = (i - 1/2)\Delta x$  el centro de la celda  $I_i$ ,  $\Delta t$  el paso de tiempo y  $t^n = n\Delta t$ .

De manera usual, notamos por  $W_i^n$  la aproximación de los promedios de la solución exacta en la celda  $I_i$  y en el tiempo  $t_n$  dada por el esquema.

$$W_i^n \cong \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t_n) dx.$$

Para calcular estas aproximaciones, vamos a introducir las matrices intermedias

$$(2.3.3) \quad \mathcal{A}_{i+1/2} = \mathcal{A}_\Phi(W_i^n, W_{i+1}^n).$$

Los autovalores y autovectores asociados de la matriz se denotan, respectivamente por

$$\lambda_{1,i+1/2} < \lambda_{2,i+1/2} < \dots < \lambda_{N,i+1/2} \quad y \quad \{R_{l,i+1/2}\}_{l=1}^N.$$

Denotamos también  $\mathcal{K}_{i+1/2}$  la matriz  $N \times N$  cuyas columnas son los autovectores de  $\mathcal{A}_{i+1/2}$  y por  $\mathcal{L}_{i+1/2}$  la matriz diagonal cuyos coeficientes son los autovalores de  $\mathcal{A}_{i+1/2}$ . Sean  $\mathcal{L}_{i+1/2}^+$ ,  $\mathcal{L}_{i+1/2}^-$ ,  $\mathcal{A}_{i+1/2}^+$  y  $\mathcal{A}_{i+1/2}^-$  las matrices definidas por

$$(2.3.4) \quad \mathcal{L}_{i+1/2}^\pm = \begin{bmatrix} (\lambda_{1,i+1/2})^\pm & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\lambda_{N,i+1/2})^\pm \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{i+1/2}^\pm = \mathcal{K}_{i+1/2} \mathcal{L}_{i+1/2}^\pm \mathcal{K}_{i+1/2}^{-1}.$$

El esquema numérico evoluciona en el tiempo de la siguiente manera: una vez se han calculado las aproximaciones en el tiempo  $t^n$ ,  $W_i^n$ , se considera un problema de Riemann en cada intercelda  $x_{i+1/2}$ , cuya matriz es  $\mathcal{A}_{i+1/2}$ , siendo los estados a derecha e izquierda  $W_i^n$  y  $W_{i+1}^n$ . Así obtenemos las aproximaciones en el tiempo  $t^{n+1}$ ,  $W_i^{n+1}$ , haciendo el promedio de las soluciones en las celdas para este problema lineal.

Bajo la hipótesis

$$(2.3.5) \quad x_{i-1/2} + \lambda_{N,i-1/2} \Delta t \leq x_i \leq x_{i+1/2} + \lambda_{1,i+1/2} \Delta t,$$

se pueden obtener las aproximaciones en el tiempo  $t^n$  mediante la formula:

$$(2.3.6) \quad W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathcal{A}_{i-1/2}^+ \cdot (W_i^n - W_{i-1}^n) + \mathcal{A}_{i+1/2}^- \cdot (W_{i+1}^n - W_i^n) \right),$$

que es la expresión general del esquema de Roe para el sistema  $W_t + \mathcal{A}(W)W_x = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ .

En la práctica, la condición CFL usual es

$$(2.3.7) \quad \max \{ |\lambda_{l,i+1/2}|, 1 \leq l \leq N, i \in \mathbb{Z} \} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \gamma, \quad \text{con } 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Observemos que el método de Roe es  $\Phi$ -conservativo. Efectivamente, si definimos

$$\mathcal{D}^\pm(W_L, W_R) = \mathcal{A}_\Phi^\pm(W_L, W_R)(W_R - W_L),$$

se tiene trivialmente que

$$\mathcal{D}^\pm(W, W) = 0 \quad \forall W \in \Omega.$$

Haciendo uso de las definiciones de  $\mathcal{A}_\Phi^\pm(W_L, W_R)$  y de (2.3.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+(W_L, W_R) + \mathcal{D}^-(W_L, W_R) &= \\ \mathcal{A}_\Phi^+(W_L, W_R)(W_R - W_L) + \mathcal{A}_\Phi^-(W_L, W_R)(W_R - W_L) &= \\ \mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R)(W_R - W_L) &= \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds \end{aligned}$$

Veamos a continuación cómo podemos definir una linealización de Roe para el sistema (1.1.2). Siguiendo [58] podemos definir una linealización de Roe  $\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R)$  de la forma:

$$(2.3.8) \quad \mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A}_\Phi(w_L, w_R) & -S_\Phi(w_L, w_R) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right],$$

donde

$$(2.3.9) \quad \mathcal{A}_\Phi(w_L, w_R) = J(w_L, w_R) + B_\Phi(w_L, w_R).$$

En este caso,  $J(w_L, w_R)$  es una linealización de Roe del Jacobiano del flujo  $F$  en el sentido usual:

$$(2.3.10) \quad J(w_L, w_R) \cdot (w_R - w_L) = F(w_R) - F(w_L)$$

y

$$(2.3.11) \quad B_\Phi(w_L, w_R) \cdot (w_R - w_L) = \int_0^1 B(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi_{[1, \dots, m]}}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds.$$

$$(2.3.12) \quad S_\Phi(w_L, w_R) \cdot (\sigma_R - \sigma_L) = \int_0^1 S(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds.$$

Teniendo en cuenta la forma de la matriz  $\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R)$  en (2.3.8) y la de sus autovectores en (1.1) podemos escribir

$$(2.3.13) \quad \mathcal{A}_\Phi^\pm(W_L, W_R) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A_\Phi^\pm(w_L, w_R)}{0} & \frac{-A_\Phi^\pm(w_L, w_R)A_\Phi^{-1}(w_L, w_R)S_\Phi(w_L, w_R)}{0} \end{array} \right],$$

$$(2.3.14) \quad |\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R)| = \left[ \begin{array}{c|c} |A_\Phi(w_L, w_R)| & -|A_\Phi(w_L, w_R)|A_\Phi^{-1}(w_L, w_R)S_\Phi(w_L, w_R) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Además,

$$(2.3.15) \quad \mathcal{A}_\Phi^\pm(W_L, W_R) = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R) \pm |A_\Phi(W_L, W_R)|).$$

Usando las igualdades anteriores, podemos escribir un esquema de Roe para el sistema (1.1.2) como:

$$(2.3.16) \quad w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( D_{i-1/2}^+(w_{i-1}^n, w_i^n, \sigma_{i-1}, \sigma_i) + D_{i+1/2}^-(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) \right)$$

donde

$$(2.3.17) \quad D_{i+1/2}^\pm(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( A_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right. \\ \left. \pm |A_{i+1/2}|(w_{i+1}^n - w_i^n - A_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i)) \right),$$

donde  $A_{i+1/2} = A_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$ ,  $B_{i+1/2} = B_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$  y  $S_{i+1/2} = S_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$ .

Equivalentemente,

$$(2.3.18) \quad D_{i+1/2}^\pm(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( A_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right. \\ \left. \pm |A_{i+1/2}|(w_{i+1}^n - w_i^n) \pm \operatorname{sgn}(A_{i+1/2}) S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right),$$

donde

$$(2.3.19) \quad \operatorname{sgn}(A_{i+1/2}) = K_{i+1/2} \operatorname{sgn}(L_{i+1/2}) K_{i+1/2}^{-1},$$

siendo  $K_{i+1/2}$  la matriz de autovectores de  $A_{i+1/2}$  y  $L_{i+1/2}$  la matriz diagonal de sus autovalores.

Ahora usando (2.3.8),(2.3.9) y (2.3.10) podemos finalmente escribir

$$(2.3.20) \quad D_{i+1/2}^{\pm}(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( F(w_{i+1}^n) - F(w_i^n) + B_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right. \\ \left. \pm |A_{i+1/2}|(w_{i+1}^n - w_i^n) \pm \operatorname{sgn}(A_{i+1/2})S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right).$$

## 2.4. Esquema IFCP

El método de Roe presentado anteriormente constituye, como hemos visto, un caso particular de esquema  $\Phi$ -conservativo. Aunque estos métodos resultan robustos, tienen como principal inconveniente que es necesario conocer completamente la estructura espectral de las matrices de Roe para su definición e implementación. En muchos casos, no se conoce explícitamente dicha descomposición, lo que hace que el método de Roe resulte costoso desde el punto de vista computacional. A lo anterior le tenemos que unir que el método de Roe no satisface, en general, una desigualdad de entropía, por lo que será necesario realizar una corrección al mismo a fin de poder capturar la solución entrópica.

El uso de resolvedores incompletos como Rusanov, Lax-Friedrichs, FORCE, etc. (véase [21]) permiten solventar parcialmente el problema: son entrópicos y son más baratos computacionalmente que el método de Roe, aunque en muchos casos son poco precisos debido a la mayor difusión numérica que introducen.

Recientemente Fernández-Castro-Parés, en [28], han introducido un nuevo resolvedor de Riemann incompleto denominado IFCP para aproximar las soluciones del sistema de aguas someras bicapa. Presentaremos en esta sección su extensión a sistemas del tipo (1.1.2).

Consideremos el esquema de Roe definido en la sección anterior

$$(2.4.1) \quad w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( D_{i-1/2}^+(w_{i-1}^n, w_i^n, \sigma_{i-1}, \sigma_i) + D_{i+1/2}^-(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) \right)$$

donde

$$(2.4.2) \quad D_{i+1/2}^{\pm}(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( F(w_{i+1}^n) - F(w_i^n) + B_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right. \\ \left. \pm |A_{i+1/2}|(w_{i+1}^n - w_i^n - A_{i+1/2}^{-1}S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i)) \right),$$

con  $B_{i+1/2} = B_{\Phi}(w_i^n, w_{i+1}^n)$ ,  $S_{i+1/2} = S_{\Phi}(w_i^n, w_{i+1}^n)$  y  $A_{i+1/2} = A_{\Phi}(w_i^n, w_{i+1}^n)$ .

Esta expresión del esquema de Roe sugiere la siguiente generalización

$$(2.4.3) \quad D_{i+1/2}^{\pm}(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( F(w_{i+1}^n) - F(w_i^n) + B_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right. \\ \left. \pm Q_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n - A_{i+1/2}^{-1}S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i)) \right),$$

donde  $Q_{i+1/2} = Q_{\Phi}(w_i^n, w_{i+1}^n)$  es una matriz de viscosidad numérica a precisar.

Proponemos aquí una clase de esquemas en volúmenes finitos definidos por (2.4.1)-(2.4.3), donde la matriz de viscosidad numérica está dada por

$$(2.4.4) \quad Q_{i+1/2} = P_l^{i+1/2}(A_{i+1/2})$$

siendo  $P_l^{i+1/2}(x)$  es un polinomio de grado  $l$ ,

$$(2.4.5) \quad P_l^{i+1/2}(x) = \sum_{j=0}^l \alpha_j^{i+1/2} x^j$$

cuyos coeficientes  $\alpha_j^{i+1/2}$  deben satisfacer algunas condiciones, a precisar, para que el esquema resultante sea estable.

Veamos en primer lugar que el método de Roe es un método de esta familia para una elección particular del polinomio  $P_l^{i+1/2}(x)$ . Para ello basta ver que

$$|A_{i+1/2}| = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j^{i+1/2} A_{i+1/2}^j$$

donde  $\alpha_j^{i+1/2}$ ,  $j = 0, \dots, m-1$  son solución del sistema lineal

$$(2.4.6) \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{1,i+1/2} & \lambda_{1,i+1/2}^2 & \cdots & \lambda_{1,i+1/2}^{m-1} \\ 1 & \lambda_{2,i+1/2} & \lambda_{2,i+1/2}^2 & \cdots & \lambda_{2,i+1/2}^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_{m,i+1/2} & \lambda_{m,i+1/2}^2 & \cdots & \lambda_{m,i+1/2}^{m-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0^{i+1/2} \\ \alpha_1^{i+1/2} \\ \vdots \\ \alpha_{m-1}^{i+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_{1,i+1/2}| \\ |\lambda_{2,i+1/2}| \\ \vdots \\ |\lambda_{m,i+1/2}| \end{pmatrix},$$

donde  $\lambda_{k,i+1/2}$ ,  $k = 1, \dots, m$  son los autovalores de la matriz  $A_{i+1/2}$ .

Notamos que (2.4.6) tiene una única solución, ya que es una matriz de VanderMonde, y los autovalores  $\lambda_j$  son todos distintos.

En general, la definición del polinomio  $P_l^{i+1/2}(x)$  estará relacionada con la estabilidad y la difusión numérica del método. Se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 2.4.1.** *Una condición suficiente para asegurar que el esquema numérico (2.4.1), (2.4.3) y (2.4.4) es  $L^\infty$ -estable es que*

$$(2.4.7) \quad \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq P_l^{i+1/2}(x) \geq |x| \quad \forall x \in [\lambda_{1,i+1/2}, \dots, \lambda_{m,i+1/2}], \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

**Demostración.-** Efectivamente, para problemas lineales donde  $A_{i+1/2} = A$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , los esquemas definidos en (2.4.1), (2.4.3) y (2.4.4) se pueden reescribir así, (basta agrupar términos):

$$(2.4.8) \quad \begin{aligned} w_i^{n+1} &= \left( Id - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{P_l(A) + A}{2} \right) w_i^n \\ &\quad - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{P_l(A) - A}{2} \right) w_{i-1}^n \\ &\quad + \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{P_l(A) - A}{2} \right) w_{i+1}^n. \end{aligned}$$

Por un lado, la condición  $P_l(x) \geq |x|$  para todo  $x \in [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$  implica que

$$[K^{-1}(P_l(A) - A)K]_{jj} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

siendo  $K$  la matriz de autovectores de  $A$ .

Por otro lado, la condición  $P_l(x) \leq \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x}$  implica que

$$[K^{-1}(Id - \frac{\Delta t}{\Delta x} P_l(A))K]_{jj} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Por tanto, la condición (2.4.7) implica que el esquema numérico es linealmente  $L^\infty$ -estable bajo la condición CFL usual

$$(2.4.9) \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_i |\lambda_i| = \gamma \leq 1.$$

■

**Observación 2.4.1.** La condición 2.4.7 puede reemplazarse por

$$(2.4.10) \quad \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq P_l^{i+1/2}(\lambda_{k,i+1/2}) \geq |\lambda_{k,i+1/2}|, \quad k = 1, \dots, m, \quad i \in \mathbb{Z},$$

y el resultado sigue siendo válido.

Para definir el esquema IFCP vamos a considerar una matriz de viscosidad

$$(2.4.11) \quad Q_{i+1/2} = P_2^{i+1/2}(A_{i+1/2}),$$

donde  $P_2^{i+1/2}(x) = \alpha_0^{i+1/2} + \alpha_1^{i+1/2}x + \alpha_2^{i+1/2}x^2$  es un polinomio de grado 2 donde los coeficientes  $\alpha_l^{i+1/2}$ ,  $l = 0, 1, 2$  son solución del siguiente sistema:

$$(2.4.12) \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{1,i+1/2} & \lambda_{1,i+1/2}^2 \\ 1 & \lambda_{m,i+1/2} & \lambda_{m,i+1/2}^2 \\ 1 & \chi_{\text{int},i+1/2} & \chi_{\text{int},i+1/2}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0^{i+1/2} \\ \alpha_1^{i+1/2} \\ \alpha_2^{i+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_{1,i+1/2}| \\ |\lambda_{m,i+1/2}| \\ |\chi_{\text{int},i+1/2}| \end{pmatrix}$$

donde

$$\chi_{\text{int},i+1/2} = \sigma_{\text{ext}} \cdot \max(|\lambda_{2,i+1/2}|, \dots, |\lambda_{m-1,i+1/2}|)$$

y

$$\sigma_{\text{ext}} = \begin{cases} \text{sgn}(\lambda_{1,i+1/2} + \lambda_{m,i+1/2}) & \text{si } (\lambda_{1,i+1/2} + \lambda_{m,i+1/2}) \neq 0, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos

$$(2.4.13) \quad \alpha_0^{i+1/2} = \delta_1 \lambda_{m,i+1/2} \chi_{\text{int},i+1/2} + \delta_m \lambda_{1,i+1/2} \chi_{\text{int},i+1/2} + \delta_{\text{int}} \lambda_{1,i+1/2} \lambda_{m,i+1/2},$$

$$(2.4.14) \quad \alpha_1^{i+1/2} = -\lambda_{1,i+1/2}(\delta_m + \delta_{\text{int}}) + -\lambda_{m,i+1/2}(\delta_1 + \delta_{\text{int}}) + -\chi_{\text{int},i+1/2}(\delta_1 + \delta_m),$$

$$(2.4.15) \quad \alpha_2^{i+1/2} = \delta_1 + \delta_m + \delta_{\text{int}},$$

donde

$$(2.4.16) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{|\lambda_{1,i+1/2}|}{(\lambda_{1,i+1/2} - \lambda_{m,i+1/2})(\lambda_{1,i+1/2} - \chi_{\text{int},i+1/2})}, \\ \delta_m &= \frac{|\lambda_{m,i+1/2}|}{(\lambda_{1,i+1/2} - \lambda_{m,i+1/2})(\chi_{\text{int},i+1/2} - \lambda_{m,i+1/2})}, \\ \delta_{\text{int}} &= \frac{|\chi_{\text{int},i+1/2}|}{(\chi_{\text{int},i+1/2} - \lambda_{1,i+1/2})(\chi_{\text{int},i+1/2} - \lambda_{m,i+1/2})}. \end{aligned}$$



**Teorema 2.4.1.** *El esquema IFCP es linealmente  $L^\infty$ -estable bajo la condición CFL usual.*

**Demostración.-** En primer lugar notemos que  $Q_{i+1/2}$  tiene los mismos autovectores que  $A_{i+1/2}$ , y que si  $\lambda_{l,i+1/2}$  es un autovalor de  $A_{i+1/2}$  entonces  $P_2^{i+1/2}(\lambda_{l,i+1/2})$  es un autovalor de  $Q_{i+1/2}$ .

Por comodidad en la notación omitiremos los índices  $i + 1/2$  al referirnos tanto a los autovalores  $\lambda_{1,i+1/2}, \lambda_{m,i+1/2}$  y  $\chi_{\text{int},i+1/2}$  como a los coeficientes del polinomio  $P_2^{i+1/2}(x), \alpha_j^{i+1/2}, j = 0, 1, 2$ .

Denotemos por  $\lambda_{Q,j}, j = 1, \dots, m$ , los autovalores de la matriz  $Q_{i+1/2}$ , entonces, se tiene que

$$(2.4.17) \quad \lambda_{Q,j} = P_2(\lambda_j) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_j + \alpha_2 \lambda_j^2, \quad j = 1, \dots, m.$$

Probemos que  $\lambda_{Q,j} \geq |\lambda_j|$ . Por construcción, esto se cumple para  $j = 1$  y  $j = m$ , así que demostraremos que  $\lambda_{Q,j} \geq |\lambda_j|$ , para  $j = 2, \dots, m - 1$ . Obsérvese que  $\lambda_1 < \chi_{\text{int}} < \lambda_m$  por construcción de  $\chi_{\text{int}}$ .

- ▶ Supongamos en primer lugar, que  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ , luego  $0 \leq \lambda_1 < \chi_{\text{int}} < \lambda_m$ . En tal caso, el polinomio  $P_2(\lambda)$  es una parábola que pasa por los puntos  $(\lambda_1, \lambda_1), (\chi_{\text{int}}, \chi_{\text{int}})$  y  $(\lambda_m, \lambda_m)$ . Por tanto se tiene  $P_2(\lambda) = \lambda$ , lo que prueba el resultado.
- ▶ El caso  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m \leq 0$  es análogo y se tiene  $P_2(\lambda) = -\lambda$ , lo que prueba el resultado.
- ▶ Supongamos ahora que  $\lambda_1 < 0$  y  $\lambda_m > 0$ .

El caso  $\chi_{\text{int}} = 0$  es trivial ya que si  $\chi_{\text{int}} = 0$ , implica que  $\lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = 0$  y  $P_2(\lambda)$  es la parábola que pasa por los puntos  $(\lambda_1, \lambda_1), (0, 0)$  y  $(\lambda_m, \lambda_m)$ . Por tanto  $P_2(\lambda_j) = |\lambda_j|, j = 1, \dots, m$ .

Consideremos, pues, que  $\chi_{\text{int}} \neq 0$ .

- Supongamos que  $|\lambda_1| > |\lambda_m|$  (el otro caso es análogo). En tal caso, tenemos  $\chi_{\text{int}} < 0$ .

Vamos a probar que  $P_2(\lambda) \geq |\lambda|$  para todo  $\lambda \in [\chi_{\text{int}}, -\chi_{\text{int}}] \cap [\chi_{\text{int}}, \lambda_m]$ .

Analícemos en primer lugar el signo de  $\alpha_2$ . Para ello escribimos  $\alpha_2 = \beta \gamma_2$ , con

$$(2.4.18) \quad \beta = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\lambda_1 - \chi_{\text{int}})(\chi_{\text{int}} - \lambda_m)}$$

y

$$(2.4.19) \quad \gamma_2 = |\lambda_1|(\chi_{\text{int}} - \lambda_m) + |\chi_{\text{int}}|(\lambda_m - \lambda_1) + |\lambda_m|(\lambda_1 - \chi_{\text{int}}).$$

Es claro, por la definición de  $\chi_{\text{int}}$ , que  $\beta < 0$ .

Por otro lado, como  $\chi_{\text{int}} < 0$ , podemos escribir

$$(2.4.20) \quad \gamma_2 = \lambda_m(|\chi_{\text{int}}| - |\lambda_1|) + |\lambda_m|(\lambda_1 - \chi_{\text{int}}),$$

y nuevamente, haciendo uso de la definición de  $\chi_{\text{int}}$ , tenemos que  $\gamma_2 < 0$ . De donde concluimos que  $\alpha_2 > 0$ .

Estudiemos ahora el signo de  $\alpha_1$ . Del mismo modo que antes, escribimos  $\alpha_1 = -\beta \gamma_1$ , con

$$(2.4.21) \quad \gamma_1 = (|\lambda_1| - |\lambda_m|)(|\lambda_1| - |\chi_{\text{int}}|)(|\lambda_m| - |\chi_{\text{int}}|).$$

De nuevo, usando de la definición de  $\chi_{\text{int}}$ , tenemos que

$$(2.4.22) \quad \text{sgn}(\alpha_1) = \text{sgn}(\gamma_1) = \text{sgn}(|\lambda_m| - |\chi_{\text{int}}|).$$

Además,

$$(2.4.23) \quad P_2'(\chi_{\text{int}}) + 1 = \frac{2\lambda_m(\chi_{\text{int}} - \lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\chi_{\text{int}} - \lambda_m)},$$

$$(2.4.24) \quad P_2'(\lambda_m) - 1 = \frac{-2\lambda_1\chi_{\text{int}} + 2\lambda_m^2}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\chi_{\text{int}} - \lambda_m)}.$$

(a) Supongamos que  $|\lambda_m| \geq |\chi_{\text{int}}|$ , por tanto  $\alpha_1 \geq 0$ . Entonces, para  $\lambda \geq 0$ ,

$$P_2(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 \geq \alpha_0 - \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 = P_2(-\lambda).$$

Luego  $P_2(\lambda) \geq P_2(-\lambda)$  para todo  $\lambda \in [0, \chi_{\text{int}}]$ . Por tanto, es suficiente probar

$$P_2(\lambda) \geq -\lambda = |\lambda|, \quad \forall \lambda \in [\chi_{\text{int}}, 0].$$

Sea  $\lambda_v = \frac{-2\alpha_1}{\alpha_2} \leq 0$  el vértice de la parábola. Además,  $\lambda_v$  es el punto donde  $P_2(\lambda)$  alcanza su mínimo absoluto, ya que  $\alpha_2 > 0$ .

(a.1) Supongamos que  $\lambda_v \leq \chi_{\text{int}}$ . Como la parábola es creciente para todo  $\lambda \geq \lambda_v$ , entonces

$$P_2(\lambda) \geq P_2(\chi_{\text{int}}) = |\chi_{\text{int}}| \geq |\lambda|, \quad \forall \lambda \in [\chi_{\text{int}}, 0] \quad (\text{véase Figura 2.1}).$$

(a.2) Supongamos que  $\lambda_v > \chi_{\text{int}}$ . Como  $P_2(\chi_{\text{int}}) = -\chi_{\text{int}}$ ,  $P_2'(\lambda_v) = 0$  y usando (2.4.23), tenemos que  $P_2'(\chi_{\text{int}}) \geq -1$ , y se tiene que  $P_2(\lambda) \geq -\lambda \quad \forall \lambda \in [\chi_{\text{int}}, \lambda_v]$ .

Además,  $P_2(\lambda) \geq P_2(\lambda_v) \geq |\lambda_v| \geq |\lambda| \quad \forall \lambda \in [\lambda_v, 0]$ , ya que  $P_2(\lambda)$  es creciente  $\forall \lambda \geq \lambda_v$ .

Por tanto,  $P_2(\lambda) \geq -\lambda \quad \forall \lambda \in [\chi_{\text{int}}, 0]$  (véase Figura 2.2).

(b) Supongamos ahora que  $|\lambda_m| < |\chi_{\text{int}}|$ . Entonces  $\alpha_1 < 0$ , luego  $\lambda_v > 0$ .

(b.1) Supongamos que  $\lambda_v \geq \lambda_m$ . Por lo anterior,  $P_2(\lambda) \geq -\lambda \quad \forall \lambda \in [\chi_{\text{int}}, 0]$ .

Por otro lado, por ser  $P_2(\lambda)$  decreciente para todo  $\lambda \leq \lambda_v$ , se tiene que

$$P_2(\lambda) \geq P_2(\lambda_m) = \lambda_m \geq \lambda \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_m] \quad (\text{véase Figura 2.3}).$$

(b.2) Supongamos que  $0 < \lambda_v < \lambda_m$ . Por lo anterior,  $P_2(\lambda) \geq -\lambda \quad \forall \lambda \in [\chi_{\text{int}}, 0]$ .

Usando ahora (2.4.24), tenemos  $P_2'(\lambda_m) \leq 1$ . Como además,  $P_2(\lambda_m) = \lambda_m$  y  $P_2'(\lambda_v) = 0$ , tenemos que  $P_2(\lambda) \geq \lambda \quad \forall \lambda \in [\lambda_v, \lambda_m]$ .

Por último,  $P_2(\lambda) \geq P_2(\lambda_v) \geq \lambda_v \geq \lambda \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_v]$ , ya que  $P_2(\lambda)$  es decreciente  $\forall \lambda \leq \lambda_v$ . (véase Figura 2.4).

■

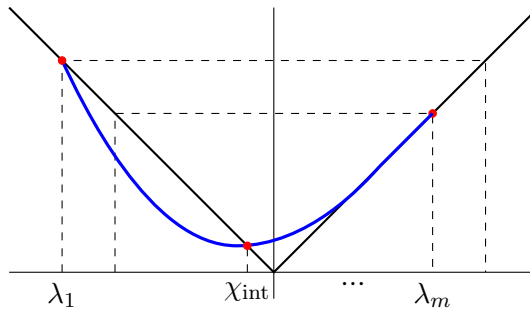


Figura 2.1: Situación de los autovalores. Caso (a.1).

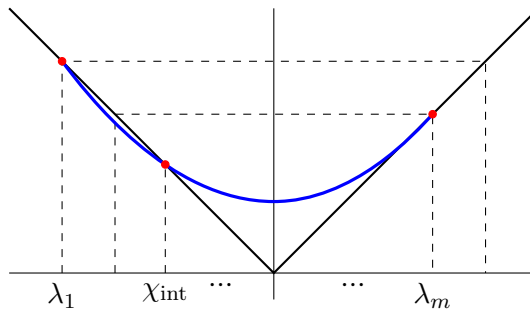


Figura 2.2: Situación de los autovalores. Caso (a.2).

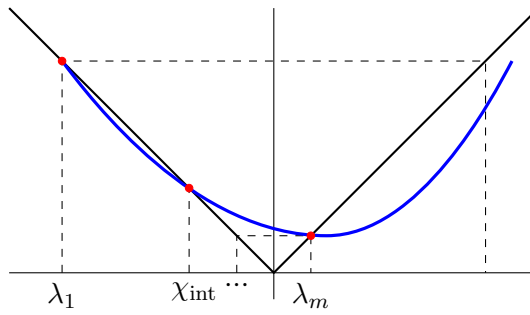


Figura 2.3: Situación de los autovalores. Caso (b.1).

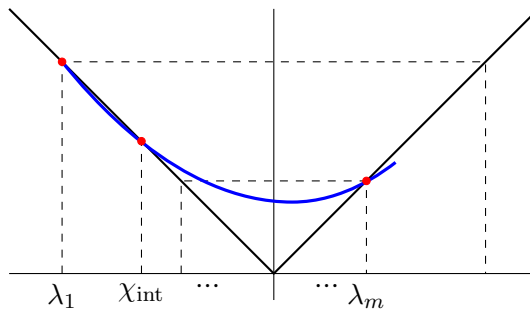


Figura 2.4: Situación de los autovalores. Caso (b.2).

**Observación 2.4.2.** La construcción del esquema IFCP tiene sentido para  $m \geq 3$ , pero su definición se puede extender para  $1 \leq m \leq 2$ , aunque no es recomendable su uso en este caso, ya que puede resultar computacionalmente caro.

- $m = 1$ . Tenemos un sólo autovalor  $\lambda$ .  
Consideramos  $\lambda_1 = |\lambda|$ ,  $\lambda_2 = -|\lambda|$  y  $\chi_{\text{int}} = 0$ .
- $m = 2$ . Tenemos dos autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .  
Si  $\lambda_1 < 0$  y  $\lambda_2 > 0$ , tomamos  $\chi_{\text{int}} = 0$ . En otro caso, podemos tomar un valor arbitrario  $\chi_{\text{int}}$  con  $\lambda_1 < \chi_{\text{int}} < \lambda_2$ .

Nótese que (2.4.3) puede escribirse para el esquema IFCP como sigue:

$$(2.4.25) \quad D_{i+1/2}^{\pm}(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( R_{i+1/2} \pm \left( \alpha_0^{i+1/2} (w_{i+1}^n - w_i^n - A_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2} (\sigma_{i+1} - \sigma_i)) \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_1^{i+1/2} R_{i+1/2} + \alpha_2^{i+1/2} A_{i+1/2} R_{i+1/2} \right) \right).$$

donde

$$(2.4.26) \quad R_{i+1/2} = F(w_{i+1}^n) - F(w_i^n) + B_{i+1/2} (w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2} (\sigma_{i+1} - \sigma_i).$$

**Observación 2.4.3.** En la expresión  $\alpha_0^{i+1/2} (w_{i+1}^n - w_i^n - A_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2} (\sigma_{i+1} - \sigma_i))$  aparece el producto  $A_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}$ . Si uno de los autovalores de  $A_{i+1/2}$  es cero, este término no tiene sentido. En estos casos se dice que el problema es *resonante*. Como dijimos en la Sección 1.2.1, los problemas resonantes entrañan una dificultad añadida, ya que las soluciones débiles pueden no estar unívocamente determinadas por sus condiciones iniciales ya que el límite de las soluciones numéricas pueden depender tanto de la familia de caminos como del esquema numérico en sí mismo. El análisis de estas dificultades queda alejado del objetivo de este trabajo. En cualquier caso, es posible introducir algunas pequeñas modificaciones en el esquema numérico con el fin de evitar formalmente la aparición de estas dificultades, aunque esto pueda suponer una restricción en las propiedades de buen equilibrado del esquema numérico. La estrategia a seguir consiste en la redefinición del término  $A_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}$  del siguiente modo (véase [21]): Supongamos que el esquema numérico necesita ser bien equilibrado sólo para las curvas de un subconjunto  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ , y supongamos que las curvas  $\gamma \in \Gamma_0$  son tales que, dados dos estados  $W_L = [w_L, \sigma_L]^T$  y  $W_R = [w_R, \sigma_R]^T$  en  $\gamma$ :

- el camino  $\Phi(s; W_L, W_R)$  es una parametrización del arco de  $\gamma$  que une los estados.
- la matriz de Roe  $A_{\Phi}(W_L, W_R)$  es regular a lo largo de la curva  $\gamma$ .

Asumamos también que existe una función continua  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  tal que

$$T(W) = W \quad \forall W \in \gamma \in \Gamma_0.$$

Lo que se propone entonces, es modificar el esquema numérico reemplazando  $A_{i+1/2}^{-1}$  por  $(A_{i+1/2}^*)^{-1}$ , donde

$$A_{i+1/2}^* = A_{i+1/2}(T(W_i^n), T(W_{i+1}^n)).$$

Con esta modificación el esquema numérico seguiría siendo exactamente bien equilibrado para las curvas de  $\Gamma_0$ .

## Capítulo 3

# Aplicación del esquema IFCP a un modelo bicapa de tipo Savage-Hutter para la simulación de avalanchas y la propagación de tsunamis

### 3.1. Ecuaciones del modelo

En esta sección presentamos un modelo unidimensional de dos capas de tipo Savage-Hutter para la simulación de avalanchas y propagación de tsunamis. Este sistema resulta de simplificar el modelo introducido en 2008 por Fernández et al. en [27], fijando para ello el sistema de referencia cartesiano usual, en vez del sistema de referencia local considerado en dicho trabajo. El sistema resultante es el siguiente:

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_1^2}{h_1} + \frac{g}{2} h_1^2 \right) + gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} = gh_1 \frac{dH}{dx} + S_f + S_{b_1} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_2^2}{h_2} + \frac{g}{2} h_2^2 \right) + rgh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} = gh_2 \frac{dH}{dx} - rS_f + S_{b_2} + \tau \end{cases}$$

En estas ecuaciones, el índice 1 hace referencia a la capa superior que está compuesta de un fluido homogéneo no viscoso con densidad  $\rho_1$ , y el índice 2 a una capa compuesta de un material granular parcialmente fluidizado de porosidad  $\psi_0$ . Si denotamos por  $\rho_s$  la densidad del material granular, entonces la densidad de la segunda capa viene dada por

$$\rho_2 = (1 - \psi_0)\rho_s + \psi_0\rho_1.$$

Supongamos además que ambas capas son inmiscibles y que fluyen en un canal rectilíneo. La coordenada  $x \in [0, L]$  se refiere al eje del canal y  $t \in [0, t]$  es el tiempo;  $g$  es la aceleración debida

a la gravedad y  $r = \rho_1/\rho_2$  es el cociente de las densidades de ambas capas.  $H(x)$  representa la profundidad medida desde un nivel de referencia fijado. Las incógnitas  $q_i(x, t)$  y  $h_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ , representan respectivamente el caudal (o flujo másico) y la altura de la capa  $i$ -ésima para cada punto  $x$  en el instante  $t$ , y están relacionados con la velocidad media de cada una de las capas mediante la ecuación  $u_i(x, t) = q_i(x, t)/h_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ .

El sistema (3.1.1) se obtiene mediante un proceso de integración vertical a partir de un sistema bicapa inmisible, donde cada una de las capas se suponen modeladas por las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles para un fluido homogéneo, donde se han despreciado los efectos viscosos horizontales, y se supone que la presión es hidrostática (véase [27]).

En las ecuaciones anteriores,  $S_f, S_{b_1}, S_{b_2}$  y  $\tau$  parametrizan los distintos efectos de la fricción. Así,  $S_f$  es el término que parametriza la fricción entre ambas capas, y que en el caso de fluidos bifásicos suele parametrizarse como

$$(3.1.2) \quad S_f = c_f \frac{h_1 h_2}{h_2 + r h_1} (u_2 - u_1) |u_2 - u_1|,$$

siendo  $c_f$  una constante positiva.

El término  $S_{b_1}$  parametriza la fricción entre el fluido y el fondo no erosionable, y viene determinado por una ley de Manning,

$$(3.1.3) \quad S_{b_1} = -g h_1 \frac{n_1^2}{h_1^{4/3}} u_1 |u_1|,$$

siendo  $n_1 > 0$  el correspondiente coeficiente de Manning.

El término  $S_{b_2}$  parametriza la fricción *dinámica* entre el medio granular y el fondo no erosionable, y al igual que en el caso anterior, viene determinado por una ley de Manning,

$$(3.1.4) \quad S_{b_2} = -g h_2 \frac{n_2^2}{h_2^{4/3}} u_2 |u_2|,$$

siendo  $n_2 > 0$  el correspondiente coeficiente de Manning.

Por último,  $\tau$  parametriza los efectos de la fricción *estática*. Nosotros utilizaremos aquí una parametrización de tipo Coulomb que debe interpretarse como:

$$(3.1.5) \quad \text{si } |\tau| \geq \sigma^c \Rightarrow \tau = -g(1-r)h_2 \frac{q_2}{|q_2|} \tan(\delta_0),$$

$$(3.1.6) \quad \text{si } |\tau| < \sigma^c \Rightarrow q_2 = 0,$$

donde  $\sigma^c = g(1-r)h_2 \tan(\delta_0)$ , con  $\delta_0 > 0$  el ángulo de reposo o ángulo de fricción de Coulomb. Introduzcamos las funciones

$$(3.1.7) \quad \eta_1(x, t) = h_1(x, t) + h_2(x, t) - H(x)$$

y

$$(3.1.8) \quad \eta_2(x, t) = h_2(x, t) - H(x)$$

La primera de ellas representa la función que describe la superficie libre del fluido de la primera capa, y  $\eta_2(x, t)$  describe la interfaz que separa a cada uno de los fluidos (véase Figura 3.1). El

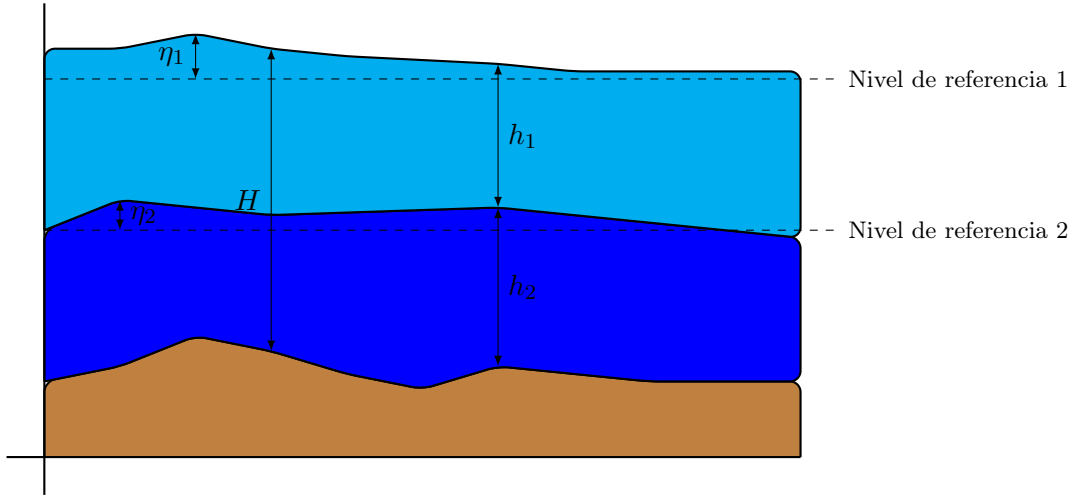


Figura 3.1: Esquema bicapa. Términos y notación.

sistema (3.1.1) se puede escribir como (1.1.2):

$$(3.1.9) \quad w_t + F(w)_x + B(w)w_x = S(w)\sigma_x + S_F(w),$$

donde  $\sigma = H$  y

$$(3.1.10) \quad w = \begin{bmatrix} h_1 \\ q_1 \\ h_2 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad F(w) = \begin{bmatrix} q_1 \\ \frac{q_1^2}{h_1} + \frac{q}{2}h_1^2 \\ q_2 \\ \frac{q_2^2}{h_2} + \frac{g}{2}h_2^2 \end{bmatrix},$$

$$(3.1.11) \quad S(w) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh_1 \\ 0 \\ gh_2 \end{bmatrix},$$

$$(3.1.12) \quad B(w) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gh_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ grh_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_F(w) = \begin{bmatrix} 0 \\ S_f + S_{b_1} \\ 0 \\ -rS_f + S_{b_2} + \tau \end{bmatrix}.$$

El vector  $w$  toma valores en el conjunto:

$$\mathcal{O} = \{[h_1, q_1, h_2, q_2]^T \in \mathbb{R}^4, \quad h_1 \geq 0, h_2 \geq 0\},$$

ya que la altura de las capas  $h_i$  puede hacerse cero en aplicaciones prácticas como ocurre en el caso de que una de las dos capas desaparezca en una parte del dominio.

Nótese que en la ecuación (3.1.9) aparece un nuevo término fuente  $S_F(w)$  que contiene los términos de fricción y que no aparece en la ecuación (1.1.2). Como vamos a ver en la Sección 3.2, la presencia de estos términos no afectan de forma esencial a la escritura del esquema numérico IFCP, ya que estos términos se discretizarán de forma semi-implícita.

La matriz  $A(w) = J(w) + B(w)$  con  $J(w) = \frac{\partial F}{\partial w}(w)$  viene dada por

$$(3.1.13) \quad A(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u_1^2 + gh_1 & 2u_1 & gh_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ rgh_2 & 0 & -u_2^2 + gh_2 & 2u_2 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica de  $A(w)$  es

$$(3.1.14) \quad (\lambda^2 - 2u_1\lambda + u_1^2 - gh_1)(\lambda^2 - 2u_2\lambda + u_2^2 - gh_2) = rg^2h_1h_2.$$

Es fácil comprobar que la condición que hace que uno de los autovalores se haga cero es:

$$(3.1.15) \quad G^2 = F_1^2 + F_2^2 - (1-r)F_1^2F_2^2 = 1,$$

donde  $G$  se conoce como el número de Froude compuesto, y  $F_i$ ,  $i = 1, 2$  son los números de Froude contruidos de esta forma:  $F_i^2 = \frac{u_i^2}{g'h_i}$ , donde  $g'$  es la gravedad reducida  $g' = (1-r)g$ . Cuando se da la condición (3.1.15) en la sección  $x$  el flujo o caudal se dice que es *crítico* en este punto  $x$  y se denomina *control*. Cuando  $G^2 < 1$  el flujo se dice *subcrítico*, siendo denominado *supercrítico* cuando  $G^2 > 1$ .

Cuando  $r = 0$ , los autovalores que se obtienen son aquellos que corresponden a cada capa por separado, así que cuando se tiene  $r \cong 0$ , el acoplamiento de los términos no afecta a la naturaleza del sistema en modo alguno.

Los autovalores de  $A$  se pueden clasificar en dos *externos* y dos *internos*: Los autovalores externos  $\lambda_{ext}^\pm$  están relacionados con la velocidad de propagación de las perturbaciones barotrópicas y los internos  $\lambda_{int}^\pm$  a la velocidad de propagación de las perturbaciones baroclinas.

En situaciones en las que  $r \cong 1$ , y  $u_1 \cong u_2$ , una buena aproximación de primer orden de estos autovalores estudiada en [69]] es:

$$(3.1.16) \quad \lambda_{ext}^\pm \cong \frac{u_1h_1 + u_2h_2}{h_1 + h_2} \pm (g(h_1 + h_2))^{\frac{1}{2}},$$

$$(3.1.17) \quad \lambda_{int}^\pm \cong \frac{u_1h_2 + u_2h_1}{h_1 + h_2} \pm \left( g' \frac{h_1h_2}{h_1 + h_2} \left[ 1 - \frac{(u_1 - u_2)^2}{g'(h_1 + h_2)} \right] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A partir de (3.1.17) puede derivarse la siguiente desigualdad:

$$(3.1.18) \quad \frac{(u_1 - u_2)^2}{g'(h_1 + h_2)} > 1,$$

que establece un criterio aproximado de hiperbolicidad del sistema (3.1.1), que es bastante preciso cuando  $r \cong 1$  (véase [13]). Esta pérdida de hiperbolicidad está relacionada con la aparición de inestabilidades en la interfaz de ambos fluidos, que en fluidos reales implicaría la aparición de una región de mezcla.

El sistema (3.1.1) satisface la siguiente desigualdad de entropía (la demostración es similar a



la presentada en [27]):

$$(3.1.19) \quad \partial_t \left( \frac{rh_1 u_1^2 + h_2 u_2^2}{2} + g \frac{rh_1^2 + h_2^2}{2} - gH(rh_1 + h_2) + grh_1 h_2 \right) \\ + \partial_x \left( rh_1 h_2 \left( \frac{u_1^2}{2} + g(h_1 + h_2 - H) \right) + h_2 u_2 \left( \frac{u_2^2}{2} + g(rh_1 h_2 - H) \right) \right) \\ \leq -rS_f(u_2 - u_1) + \tau + S_{b_1} + S_{b_2}$$

Esta desigualdad se reduce a la conservación de la energía para soluciones regulares, suponiendo  $S_f = 0$ ,  $\tau = 0$  y  $S_{b_1} = S_{b_2} = 0$ .

Las soluciones estacionarias del sistema (3.1.1) correspondientes al agua en reposo son de la forma

$$(3.1.20) \quad \begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ h_1 + h_2 - H = \text{constante} \\ \partial_x(h_2 - H) < \tan(\delta_0), \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$(3.1.21) \quad \begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ \eta_1 = \text{constante} \\ \partial_x \eta_2 < \tan(\delta_0). \end{cases}$$

En particular,

$$(3.1.22) \quad \begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ \eta_1 = \text{constante} \\ \eta_2 = \text{constante} \end{cases}$$

es solución del sistema (3.1.1).

## 3.2. Esquema numérico IFCP

En esta sección vamos a aplicar el esquema numérico IFCP descrito en el capítulo 2 al sistema (3.1.1). Consideremos en primer lugar el sistema que resulta de despreciar en (3.1.1) los términos de fricción  $S_F$ . El sistema resultante es

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_1^2}{h_1} + \frac{g}{2} h_1^2 \right) + gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} = gh_1 \frac{dH}{dx} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_2^2}{h_2} + \frac{g}{2} h_2^2 \right) + rgh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} = gh_2 \frac{dH}{dx} \end{cases}$$

que se puede escribir como (1.1.2):

$$w_t + F(w)_x + B(w)w_x = S(w)H_x$$

usando la notación introducida en (3.1.10)-(3.1.12).

A fin de aplicar el esquema numérico IFCP para aproximar las soluciones del sistema (3.2.1) es necesario definir una linealización de Roe como se describe en la Sección 2.4.

Sean  $w_L = [h_1^L, h_2^L, q_1^L, q_2^L]$  y  $W_L = [w_L, H_L]^T$ ; y  $w_R = [h_1^R, h_2^R, q_1^R, q_2^R]$  y  $W_R = [w_R, H_R]^T$ .

Sea

$$\Phi(s; W_L, W_R) = W_L + s(W_R - W_L).$$

Definimos las matrices  $A_\Phi(w_L, w_R) = J(w_L, w_R) + B_\Phi(w_L, w_R)$  donde

$$(3.2.2) \quad J(w_L, w_R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\widehat{u}_1)^2 + (\widehat{c}_1)^2 & 2\widehat{u}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(\widehat{u}_2)^2 + (\widehat{c}_2)^2 & 2\widehat{u}_2 \end{bmatrix}$$

verifica la igualdad

$$F(w_R) - F(w_L) = J(w_L, w_R)(w_R - w_L),$$

con  $F(w)$  definida en (3.1.10), y

$$(3.2.3) \quad B_\Phi(w_L, w_R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\widehat{c}_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r(\widehat{c}_2)^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

verifica

$$B_\Phi(w_L, w_R)(w_R - w_L) = \int_0^1 B(\Phi(s; w_L, w_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; w_L, w_R) ds,$$

con  $B(w)$  definida en (3.1.12); y definimos también el vector

$$(3.2.4) \quad S_\Phi(w_L, w_R) = \begin{bmatrix} 0 \\ (\widehat{c}_1)^2 \\ 0 \\ (\widehat{c}_2)^2 \end{bmatrix},$$

que verifica

$$S_\Phi(w_L, w_R)(H_R - H_L) = \int_0^1 S(\Phi(s; w_L, w_R)) \frac{\partial \Phi[H]}{\partial s}(s; w_L, w_R) ds$$

con  $S_\Phi(w)$  definido en (3.1.11) y donde

$$\widehat{u}_k = \frac{\sqrt{h_k^L} u_k^L + \sqrt{h_k^R} u_k^R}{\sqrt{h_k^L} + \sqrt{h_k^R}}, \quad \widehat{c}_k = \sqrt{g \frac{h_k^L + h_k^R}{2}}, \quad k = 1, 2$$

con

$$u_k^L = \frac{q_k^L}{h_k^L}, \quad u_k^R = \frac{q_k^R}{h_k^R}, \quad k = 1, 2.$$

De esta forma, el esquema IFCP aplicado al sistema (3.2.1) puede escribirse como

$$(3.2.5) \quad w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( D_{i-1/2}^+(w_{i-1}^n, w_i^n, H_{i-1}, H_i) + D_{i+1/2}^-(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) \right)$$

donde

$$(3.2.6) \quad D_{i+1/2}^\pm(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( F(w_{i+1}^n) - F(w_i^n) + B_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i) \right. \\ \left. \pm Q_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n - A_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i)) \right),$$

donde  $B_{i+1/2} = B_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$ ,  $S_{i+1/2} = S_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$  y  $A_{i+1/2} = A_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$  y  $Q_{i+1/2} = Q_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$  es la matriz de viscosidad numérica definida en (2.4.11).

Si denotamos por

$$(3.2.7) \quad R_{i+1/2} = F(w_{i+1}^n) - F(w_i^n) + B_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i)$$

y usamos la forma de  $Q_{i+1/2}$ , podemos reescribir  $D_{i+1/2}^\pm$  de forma equivalente como:

$$(3.2.8) \quad D_{i+1/2}^\pm(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( R_{i+1/2} \pm \left( \alpha_0^{i+1/2} (w_{i+1}^n - w_i^n - A_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i)) \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_1^{i+1/2} R_{i+1/2} + \alpha_2^{i+1/2} A_{i+1/2} R_{i+1/2} \right) \right).$$

Como dijimos en la Observación 2.4.3, el término  $\alpha_0^{i+1/2} (w_{i+1}^n - w_i^n - A_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i))$  no está bien definido si  $A_{i+1/2}$  tiene un autovalor 0. A fin de definir el esquema en cualquier situación, vamos a proceder como se indicó en la observación mencionada. Efectivamente, podemos reemplazar  $A_{i+1/2}^{-1}$  por  $(A_{i+1/2}^*)^{-1}$ , donde

$$A_{i+1/2}^* = A_{i+1/2}(T(w_i^n), T(w_{i+1}^n)),$$

siendo  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  una función continua tal que

$$T(w) = w \quad \forall w \in \gamma \in \Gamma_0 \subset \Gamma.$$

Desde el punto de vista práctico, es importante que el esquema numérico sea bien equilibrado para la solución de agua en reposo dada por (3.1.22). Por tanto, definimos  $A_{i+1/2}^* = A_\Phi(T(w_i^n), T(w_{i+1}^n))$  donde  $T: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ , siendo

$$T(w) = T \left( \begin{bmatrix} h_1 \\ q_1 \\ h_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \\ h_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que si  $W_L = [w_L, H_L]^T$  y  $W_R = [w_R, H_R]^T$  son dos estados que verifican

$$(3.2.9) \quad u_{1,L} = u_{2,L} = u_{1,R} = u_{2,R} = 0,$$

$$(3.2.10) \quad h_{1,L} + h_{2,L} - H_L = h_{1,R} + h_{2,R} - H_R,$$

$$(3.2.11) \quad h_{2,L} - H_L = H_{2,R} - H_R,$$

entonces

$$(3.2.12) \quad T(w_L) = w_L \quad \text{y} \quad T(w_R) = w_R.$$

Es fácil probar que

$$\alpha_0^{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n - (A^*)_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i))$$

puede escribirse como

$$\alpha_0^{i+1/2} \tilde{I}_{i+1/2}(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}),$$

donde

$$(3.2.13) \quad \tilde{I}_{i+1/2}(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \begin{pmatrix} (\eta_{1,i+1} - \eta_{1,i}) - (\eta_{2,i+1} - \eta_{2,i}) \\ q_{1,i+1} - q_{1,i} \\ \eta_{2,i+1} - \eta_{2,i} \\ q_{2,i+1} - q_{2,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{i+1/2}\eta_1 - \Delta_{i+1/2}\eta_2 \\ \Delta_{i+1/2}q_1 \\ \Delta_{i+1/2}\eta_2 \\ \Delta_{i+1/2}q_2 \end{pmatrix}$$

Así, podemos escribir (3.2.8) como

$$(3.2.14) \quad D_{i+1/2}^\pm(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( R_{i+1/2} \pm \left( \alpha_0^{i+1/2} \tilde{I}_{i+1/2}(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_1^{i+1/2} R_{i+1/2} + \alpha_2^{i+1/2} A_{i+1/2} R_{i+1/2} \right) \right).$$

Obsérvese que

$$(3.2.15) \quad R_{i+1/2} = F_Q(w_{i+1}^n) - F_Q(w_i^n) + P_{i+1/2}(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1})$$

donde

$$(3.2.16) \quad P_{i+1/2}(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_{1,i+1/2}^n \Delta_{i+1/2} \eta_1^n \\ 0 \\ gh_{2,i+1/2}^n (r \Delta_{i+1/2} \eta_1^n + (1-r) \Delta_{i+1/2} \eta_2^n) \end{pmatrix},$$

con  $h_{l,i+1/2}^n = \frac{1}{2}(h_{l,i} + h_{l,i+1})$ ,  $l = 1, 2$ , y

$$(3.2.17) \quad F_Q(w_i) = \begin{pmatrix} q_{1,i} \\ \frac{q_{1,i}^2}{h_{1,i}} \\ q_{2,i} \\ \frac{q_{2,i}^2}{h_{2,i}} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, podemos escribir el esquema (3.2.5) de forma equivalente:

$$(3.2.18) \quad w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( D_{F,i-1/2}^+ + D_{F,i+1/2}^- \right)$$

donde

$$(3.2.19) \quad D_{F,i+1/2}^+(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( R_{i+1/2} + \left( \alpha_0^{i+1/2} \tilde{T}_{i+1/2}(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) + \alpha_1^{i+1/2} R_{i+1/2} + \alpha_2^{i+1/2} A_{i+1/2} R_{i+1/2} \right) \right) - F_Q(w_{i+1}^n),$$

$$D_{F,i+1/2}^-(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( R_{i+1/2} - \left( \alpha_0^{i+1/2} \tilde{T}_{i+1/2}(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) + \alpha_1^{i+1/2} R_{i+1/2} + \alpha_2^{i+1/2} A_{i+1/2} R_{i+1/2} \right) \right) + F_Q(w_i^n).$$

**Teorema 3.2.1.** *El esquema (3.2.18),(3.2.19) es buen equilibrado para las soluciones estacionarias (3.1.22).*

**Demostración.-**

Sea  $\{W_i^0\}_{i \in \mathbb{Z}} = \{[w_i^0, H_i^0]^T\}_{i \in \mathbb{Z}}$ , con

$$w_i^0 = [h_{1,i}^0, 0, h_{2,i}^0, 0]^T \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} h_{1,i}^0 + h_{2,i}^0 - H_i = \text{constante} \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\ h_{2,i}^0 - H_i = \text{constante} \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Es suficiente probar que  $w_i^1 = w_i^0$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , donde  $w_i^1$  viene definido por (3.2.18),(3.2.19). Nótese que

$$\tilde{T}_{i+1/2}(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \begin{pmatrix} \Delta_{i+1/2}\eta_1 - \Delta_{i+1/2}\eta_2 \\ \Delta_{i+1/2}q_1 \\ \Delta_{i+1/2}\eta_2 \\ \Delta_{i+1/2}q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$R_{i+1/2} = A_{i+1/2}(w_{i+1}^0 - w_i^0) - S_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_{1,i+1/2}^n \Delta_{i+1/2}\eta_1^n \\ 0 \\ gh_{2,i+1/2}^n (r\Delta_{i+1/2}\eta_1^n + (1-r)\Delta_{i+1/2}\eta_2^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$F_Q(w_i^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto,

$$D_{F,i+1/2}^\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■

### 3.3. Frentes seco-mojado.

Como se muestra en [10], si aplicamos el esquema anterior a situaciones donde se anula una de las capas y el fondo emerge, tal como se muestra en las Figuras 4.6 y 4.7, pueden aparecer fuerzas espurias de presión que, en particular, pueden destruir el carácter bien equilibrado del esquema. A fin de evitar estos problemas, modificaremos el esquema como sigue:

#### 3.3.1. Redefinición de los términos de presión.

Para evitar las fuerzas espurias de presión, redefinimos a nivel discreto los términos relacionados con los efectos de la presión:  $P_{i+1/2}(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1})$  e  $\tilde{I}_{i+1/2}(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1})$ . Así, siguiendo las ideas descritas en [10], vamos a definir

$$(3.3.1) \quad P_{i+1/2}(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_{1,i+1/2}\tilde{\Delta}_{i+1/2}\eta_1 \\ 0 \\ gh_{2,i+1/2}(r\tilde{\Delta}_{i+1/2}\eta_1 + (1-r)\tilde{\Delta}_{i+1/2}\eta_2) \end{pmatrix},$$

e

$$(3.3.2) \quad \tilde{I}_{i+1/2}(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_{i+1/2}\eta_1 - \tilde{\Delta}_{i+1/2}\eta_2 \\ \Delta_{i+1/2}q_1 \\ \tilde{\Delta}_{i+1/2}\eta_2 \\ \Delta_{i+1/2}q_2 \end{pmatrix}.$$

donde

$$(3.3.3) \quad \tilde{\Delta}_{i+1/2}\eta_1 = \max(\eta_{1,i+1} + H_{i+1/2}, 0) - \max(\eta_{1,i} + H_{i+1/2}, 0)$$

y

$$(3.3.4) \quad \tilde{\Delta}_{i+1/2}\eta_2 = \max(\eta_{2,i+1} + H_{i+1/2}, 0) - \max(\eta_{2,i} + H_{i+1/2}, 0),$$

con

$$(3.3.5) \quad H_{i+1/2} = \min(H_i, H_{i+1})$$

Obsérvese que  $\tilde{\Delta}_{i+1/2}\eta_1$  (resp.  $\tilde{\Delta}_{i+1/2}\eta_2$ ) coincide con  $\Delta_{i+1/2}\eta_1$  (resp.  $\Delta_{i+1/2}\eta_2$ ) en el caso de que el fondo no sea emergente. Por lo tanto, usaremos siempre esta definición a la hora de calcular los términos  $P_{i+1/2}$  e  $\tilde{I}_{i+1/2}$ .

#### 3.3.2. Imposición de una condición de contorno de tipo pared

A fin de imponer que el fondo emergente actúe como una pared para el fluido, se impondrá que las velocidades sean nulas en la celda vecina a una con fondo emergente tal que, o bien el espesor de la capa inferior o bien el espesor total de las capas sea inferior a un umbral  $\varepsilon_h$  fijado. En la práctica,  $\varepsilon_h \cong 10^{-3}$ .

De forma más precisa:

Si la situación es como la que se presenta en la Figura 4.6, y si  $(h_{1,i} + h_{2,i}) < \varepsilon_h$ , entonces definimos

$$(3.3.6) \quad w_i^n = \begin{pmatrix} h_{1,i}^n \\ q_{1,i}^n \\ h_{2,i+1}^n \\ q_{2,i}^n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad w_{i+1}^{n,*} = \begin{pmatrix} h_{1,i+1}^n \\ 0 \\ h_{2,i+1}^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si la situación es como la que se presenta en la Figura 4.7, y si  $h_{2,i} < \varepsilon_n$ , entonces definimos

$$(3.3.7) \quad w_i^n = \begin{pmatrix} h_{1,i}^n \\ q_{1,i}^n \\ h_{2,i+1}^n \\ q_{2,i}^n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad w_{i+1}^{n,*} = \begin{pmatrix} h_{1,i+1}^n \\ q_{1,i+1}^n \\ h_{2,i+1}^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, calculamos  $D_{F,i+1/2}^\pm$  usando los estados  $w_i^n$  y  $w_{i+1}^{*,n}$ .

El caso en el que el fondo emergente esté en la celda  $I_{i+1}$ , el modo de proceder es análogo.

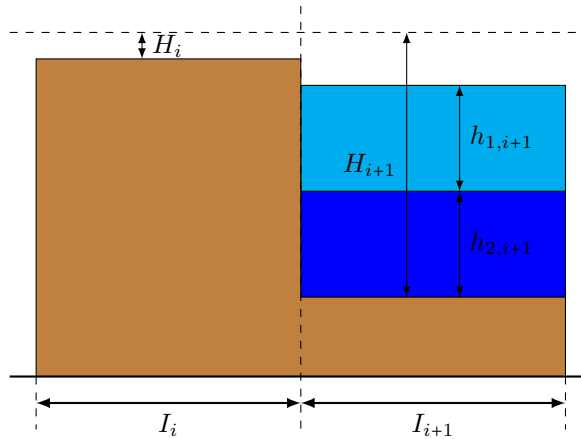


Figura 3.2: Frente seco-mojado: Aparición de ambas capas

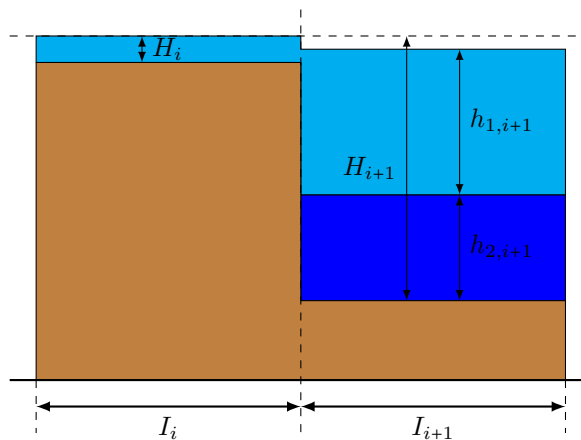


Figura 3.3: Frente seco-mojado: Aparición de la capa inferior

### 3.4. Tratamiento de los términos de fricción

En esta sección presentamos el esquema que utilizaremos para discretizar el sistema (3.1.1) incluyendo los términos de fricción  $S_F(w)$ . Estos términos se discretizarán de forma semi-implícita como se describe en [6]. La discretización del término de fricción  $\tau$  se realizará siguiendo el procedimiento descrito en [27].

El esquema resultante consta de tres etapas, cada una de ellas referenciada por un superíndice fraccionario:

$$w_i^n \longrightarrow w_i^{n+1/3} \longrightarrow w_i^{n+2/3} \longrightarrow w_i^{n+1}$$

Supongamos calculadas las aproximaciones de los promedios  $\{w_i^n\}_{i \in \mathbb{Z}}$ .

#### 3.4.1. Paso 1/3. Cálculo de $w_i^{n+1/3}$ .

Calculamos

$$(3.4.1) \quad w_i^{n+1/3} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (D_{F,i-1/2}^\tau)^+ + (D_{F,i+1/2}^\tau)^- \right)$$

donde

$$(3.4.2) \quad (D_{F,i+1/2}^\tau)^+(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( R_{i+1/2} + \left( \alpha_0^{i+1/2} \tilde{I}_{i+1/2}^\tau(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_1^{i+1/2} R_{i+1/2}^\tau + \alpha_2^{i+1/2} A_{i+1/2} R_{i+1/2}^\tau \right) \right) - F_Q(w_{i+1}^n).$$

$$(D_{F,i+1/2}^\tau)^-(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( R_{i+1/2} - \left( \alpha_0^{i+1/2} \tilde{I}_{i+1/2}^\tau(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_1^{i+1/2} R_{i+1/2}^\tau + \alpha_2^{i+1/2} A_{i+1/2} R_{i+1/2}^\tau \right) \right) + F_Q(w_i^n).$$

donde

$$\tilde{I}_{i+1/2}^\tau = \begin{cases} \tilde{I}_{i+1/2} & \text{si } |q_{2,i+1/2}| > \sigma_{i+1/2}^c \cdot \Delta t \\ \tilde{I}_{i+1/2}^* & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde

$$\sigma_{i+1/2}^c = g(1-r)h_{2,i+1/2} \tan(\delta_0),$$

$$q_{2,i+1/2} = h_{2,i+1/2} \cdot u_{2,i+1/2}$$

y

$$\tilde{I}_{i+1/2}^* = \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_{i+1/2} \eta_1^n \\ \Delta_{i+1/2} q_1^n \\ 0 \\ \Delta_{i+1/2} q_2^n \end{pmatrix},$$

$$R_{i+1/2}^\tau = \begin{cases} R_{i+1/2} & \text{si } |q_{2,i+1/2}| > \sigma_{i+1/2}^c \Delta t \\ R_{i+1/2}^* & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde

$$R_{i+1/2}^* = F_Q(w_{i+1}^n) - F_Q(w_i^n) + P_{i+1/2}^*(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1})$$



con

$$P_{i+1/2}^*(w_i^n, w_{i+1}^n, H_i, H_{i+1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_{1,i+1/2} \tilde{\Delta}_{i+1/2} \eta_1^n \\ 0 \\ rgh_{2,i+1/2} \tilde{\Delta}_{i+1/2} \eta_1^n \end{pmatrix}$$

**Observación 3.4.1.** Esta modificación de los términos discretos relacionados con la presión se realiza con el fin de obtener una propiedad de bien equilibrado para las soluciones estacionarias del tipo (3.1.21), como probaremos al final de esta sección. Estas soluciones representan estados de equilibrio donde la presión se compensa con la fricción “estática”, dando lugar a los perfiles característicos de avalanchas de materiales granulares.

### 3.4.2. Paso 2/3. Cálculo de $w_i^{n+2/3}$ .

Una vez calculados  $\{w_i^{n+1/3}\}$ , definimos  $\{w_i^{n+2/3}\}$  como:

$$(3.4.3) \quad w_i^{n+2/3} = \begin{pmatrix} h_{1,i}^{n+1/3} \\ u_{1,i}^{n+2/3} \cdot h_{1,i}^{n+1/3} \\ h_{2,i}^{n+1/3} \\ u_{2,i}^{n+2/3} \cdot h_{2,i}^{n+1/3} \end{pmatrix}$$

donde  $u_{l,i}^{n+2/3}$ ,  $l = 1, 2$  son solución del sistema lineal

(3.4.4)

$$u_{1,i}^{n+2/3} = u_{1,i}^{n+1/3} + \Delta t \frac{c_f h_{2,i}^{n+1/3}}{r h_{1,i}^{n+1/3} + h_{2,i}^{n+1/3}} \cdot |u_{1,i}^n - u_{2,i}^n| (u_{2,i}^{n+2/3} - u_{1,i}^{n+2/3}) - \Delta t \frac{g n_1^2}{(h_{1,i}^{n+1/3})^{4/3}} |u_{1,i}^n| u_{1,i}^{n+2/3},$$

$$u_{2,i}^{n+2/3} = u_{2,i}^{n+1/3} - r \Delta t \frac{c_f h_{1,i}^{n+1/3}}{r h_{1,i}^{n+1/3} + h_{2,i}^{n+1/3}} \cdot |u_{1,i}^n - u_{2,i}^n| (u_{2,i}^{n+2/3} - u_{1,i}^{n+2/3}) - \Delta t \frac{g n_2^2}{(h_{2,i}^{n+1/3})^{4/3}} |u_{2,i}^n| u_{2,i}^{n+2/3}.$$

Obsérvese que (3.4.4) corresponde a una discretización semi-implícita de los términos de fricción  $S_f$ ,  $S_{b_1}$  y  $S_{b_2}$ .

**Observación 3.4.2.** El término  $S_{b_1}$  sólo estará presente en aquellas regiones del dominio donde la segunda capa no exista, es decir, donde  $\eta_2 = 0$ . En tal caso,  $n_2 = 0$  y  $c_f = 0$ . En otro caso supondremos que  $n_1 = 0$ .

### 3.4.3. Paso 3/3. Cálculo de $w_i^{n+1}$ .

Finalmente, calculamos  $\{w_i^{n+1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$  a partir de  $\{w_i^{n+2/3}\}_{i \in \mathbb{Z}}$  como

$$(3.4.5) \quad w_i^{n+1} = \begin{pmatrix} h_{1,i}^{n+2/3} \\ q_{1,i}^{n+2/3} \\ h_{2,i}^{n+2/3} \\ q_{2,i}^{n+1} \end{pmatrix}$$

siendo

$$(3.4.6) \quad q_2^{n+1} = \begin{cases} \frac{|q_{2,i}^{n+2/3}| \cdot q_{2,i}^{n+2/3}}{|q_{2,i}^{n+2/3}| + \Delta t \cdot \sigma_i^{n+2/3}} & \text{si } |q_{2,i}^{n+2/3}| \geq \sigma_i^{n+2/3} \cdot \Delta t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde

$$\sigma_i^{n+2/3} = g(1-r)\bar{h}_{2,i}^{n+2/3} \tan(\delta_0)$$

con

$$\bar{h}_{2,i}^{n+2/3} = \frac{1}{2} \left( \frac{h_{2,i-1}^{n+2/3} + h_{2,i}^{n+2/3}}{2} + \frac{h_{2,i}^{n+2/3} + h_{2,i+1}^{n+2/3}}{2} \right).$$

**Observación 3.4.3.** El tratamiento semi-implícito del término de Coulomb fue propuesto en [6] para la simulación de avalanchas “aéreas” de materiales granulares.

**Teorema 3.4.1.** *El esquema numérico anterior preserva las soluciones estacionarias (3.1.21) tales que*

$$(3.4.7) \quad |\Delta_{i+1/2}\eta_2^0| < \tan(\delta_0)\Delta x, \quad \delta_0 > 0.$$

*En particular, es exactamente bien equilibrado para las soluciones (3.1.22).*

**Demostración.-** Sea  $\{W_i^0\}_{i \in \mathbb{Z}} = \{[w_i^0, H_L]^T\}_{i \in \mathbb{Z}}$ , con  $w_i^0 = \begin{bmatrix} h_{1,i}^0 \\ 0 \\ h_{2,i}^0 \\ 0 \end{bmatrix}$  verificando

$$\eta_{1,i}^0 = \text{cte } \forall i \in \mathbb{Z},$$

$$|\Delta_{i+1/2}\eta_2^0| < \tan(\delta_0)\Delta x.$$

Probemos que  $w_i^1 = w_i^0 \forall i \in \mathbb{Z}$  donde  $w_i^1$  se calcula usando el procedimiento anterior.

Nótese que

$$\tilde{I}_{i+1/2}(w_i^0, w_{i+1}^0, H_i, H_{i+1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$R_{i+1/2}^\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$R_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ gh_{2,i+1/2}^0(1-r)\Delta_{i+1/2}\eta_2^0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$w_i^{1/3} = \begin{pmatrix} h_{1,i}^0 \\ 0 \\ h_{2,i}^0 \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{g(1-r)}{2} (h_{2,i-1/2}^0 \Delta_{i-1/2} \eta_2^0 + h_{2,i+1/2}^0 \Delta_{i+1/2} \eta_2^0) \end{pmatrix}$$

y  $w_i^{2/3} = w_i^{1/3}$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |q_{2,i}^{n+2/3}| &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{g(1-r)}{2} \left| h_{2,i-1/2}^0 \Delta_{i-1/2} \eta_2^0 + h_{2,i+1/2}^0 \Delta_{i+1/2} \eta_2^0 \right| \\ &\leq \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{g(1-r)}{2} \left( h_{2,i-1/2}^0 |\Delta_{i-1/2} \eta_2^0| + h_{2,i+1/2}^0 |\Delta_{i+1/2} \eta_2^0| \right) \\ &< \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{g(1-r)}{2} \left( h_{2,i-1/2}^0 \tan(\delta_0) \Delta x + h_{2,i+1/2}^0 \tan(\delta_0) \Delta x \right) \\ &< \Delta t g(1-r) \bar{h}_{2,i}^{n+2/3} \tan(\delta_0) = \Delta t \sigma_i^{n+2/3} \end{aligned}$$

y

$$|q_{2,i}^{n+2/3}| < \Delta t \sigma_i^{n+2/3} \Rightarrow q_{2,i}^{n+1} = 0,$$

de donde

$$w_i^1 = \begin{bmatrix} h_{1,i}^0 \\ 0 \\ h_{2,i}^0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

■



## Capítulo 4

# Experimentos numéricos y aplicación al caso de Lituya Bay

### 4.1. Introducción

A fin de ilustrar el comportamiento del esquema que hemos construido aplicado a los problemas unidimensionales de avalanchas y propagación de tsunamis, se proponen en una primera sección una serie de test numéricos aplicados a casos académicos. Posteriormente, una sección dedicada a simulaciones numéricas basadas en configuraciones correspondientes a experimentos de laboratorio. En ella trataremos de aplicar el esquema numérico a una situación de la que conocemos datos experimentales y se valorará la validez del esquema para reproducir numéricamente dichos datos. Analizaremos los resultados que ofrece el esquema al aplicarlo a la situación que describen los experimentos realizados por V. Heller y W.H. Hager del instituto ETH de Zurich y publicados en 2010 [37], donde un bloque de material granular es impulsado sobre un plano inclinado provocando una avalancha que desemboca sobre un canal en el que se halla agua en reposo. Para terminar, aplicamos el esquema a un caso real. Se trata de abordar una versión simplificada del mega-tsunami de la bahía de Lituya (Alaska, EEUU) que tuvo lugar en 1958 y del que se tienen multitud de datos físicos que nos pueden ayudar a validar nuestro modelo.

### 4.2. Casos académicos

#### 4.2.1. Desprendimiento de sedimentos submarinos sobre un fondo plano.

Tomamos como eje de nuestro canal el intervalo  $[-10,10]$ , función de profundidad  $H(x) = 1$ , con condiciones iniciales

$$h_1(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0.3 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}, \quad q_1(x, 0) = 0,$$

$$h_2(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0.7 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}, \quad q_2(x, 0) = 0,$$

y condiciones de frontera libres. Tomamos como parámetros CFL = 0.9 y ratio de densidades  $r = 0.4$ , considerando la segunda capa como un tipo de sedimento granular. Usamos una malla de 400 puntos. Los tres parámetros de fricción son cero y se ha tomado el ángulo de fricción interna o ángulo de Coulomb como  $\delta_0 = 15^\circ$ . La Figura 4.1 muestra la evolución de la capa de sedimentos desde la condición inicial hasta que el flujo de masa se detiene en  $t = 5s$ .

#### 4.2.2. Desprendimiento de sedimentos submarinos sobre un fondo plano e inclinado.

En este caso tomamos de nuevo el intervalo  $[-10,10]$ , con función de profundidad

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{x}{5} & \text{si } |x - 2| < 2 \\ 0.2 & \text{si } x > 4, \end{cases}$$

condiciones iniciales

$$h_1(x, 0) = H(x) - h_2(x, 0), \quad q_1(x, 0) = 0,$$

$$h_2(x, 0) = \begin{cases} H(x) - 0.3 & \text{si } |x + 2| < 1 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad q_2(x, 0) = 0,$$

y condiciones de frontera libres. Tomamos como parámetros CFL = 0.9 y ratio de densidades  $r = 0.4$ , considerando la segunda capa como un tipo de sedimento granular. Usamos de nuevo una malla de 400 puntos. Los tres parámetros de fricción son cero. El ángulo de fricción interna o ángulo de Coulomb considerado es  $\delta_0 = 15^\circ$ . En la Figura 4.2 se muestra la condición inicial y la evolución de la capa de sedimentos en varios instantes de tiempo.

Comparando las dos simulaciones numéricas anteriores atendiendo a las Figuras 4.1 y 4.2 podemos observar, en los primeros instantes de tiempo, las mismas configuraciones tanto de la capa de agua como del depósito final de la capa de sedimentos, debido a que ambas simulaciones tienen los mismos parámetros de fricción entre capas y el mismo término de Coulomb. Las diferencias empiezan cuando la capa de sedimentos entra en contacto con el fondo plano inclinado. A partir de entonces las configuraciones de ambas capas resultan diferentes entre una simulación y la otra.

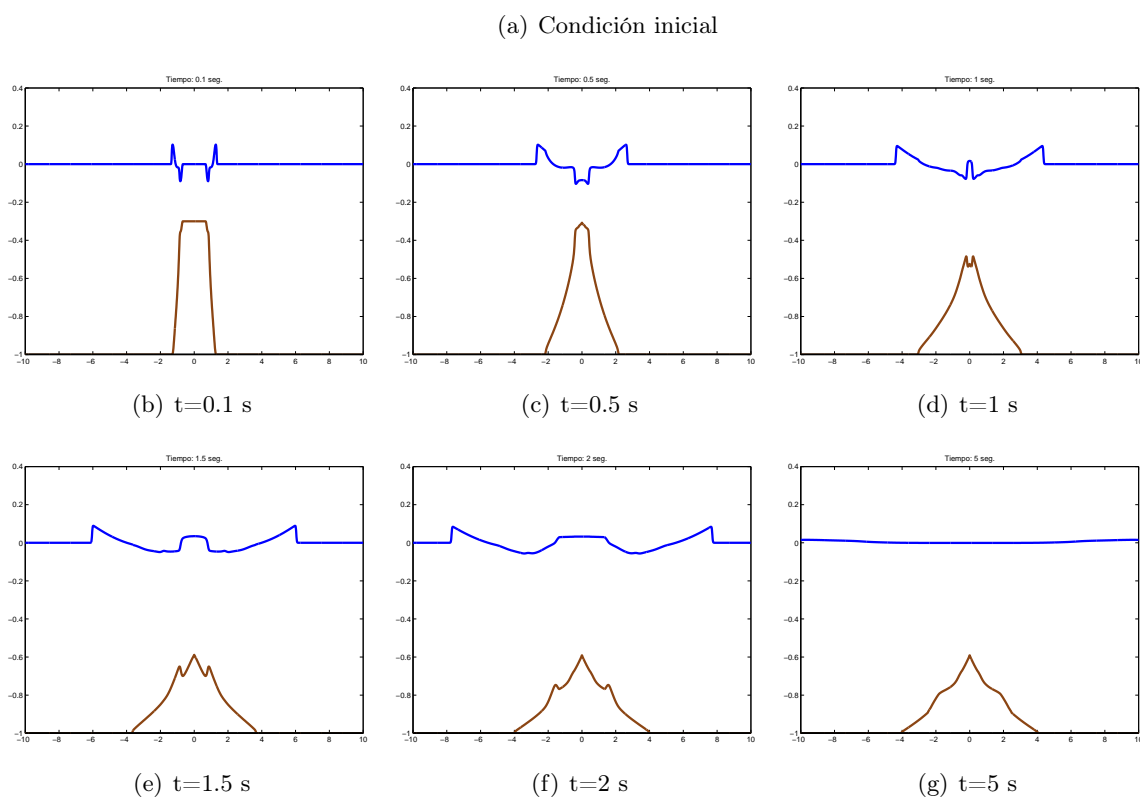


Figura 4.1: Desprendimiento de sedimentos submarinos sobre un fondo plano: evolución de la superficie del agua y del sedimento (escala horizontal  $x(m)$ , escala vertical  $z(m)$ ).

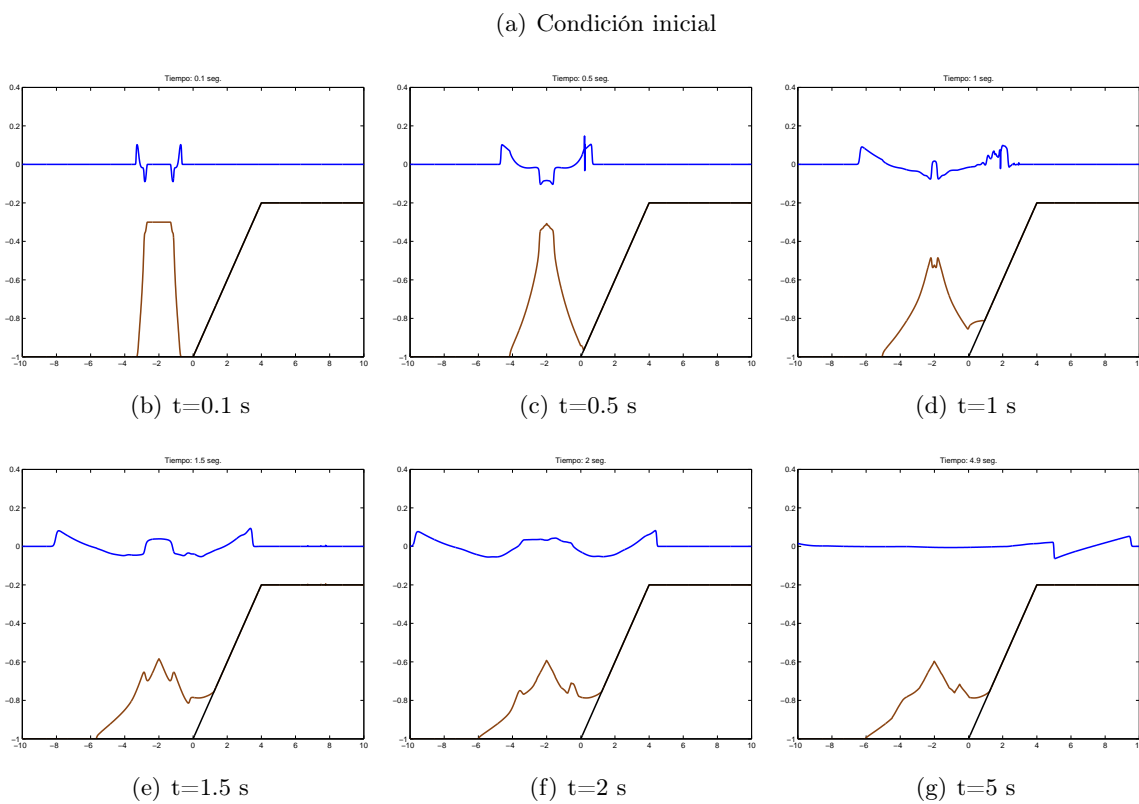


Figura 4.2: Desprendimiento de sedimentos submarinos sobre un fondo plano e inclinado: evolución de la superficie del agua y del sedimento (escala horizontal  $x(m)$ , escala vertical  $z(m)$ ).



### 4.2.3. Avalancha submarina.

Nos situamos ahora en un canal con eje el intervalo  $[-10, 15]$ . El siguiente paso en nuestros test numéricos es *dejar caer* una columna de sedimentos que se encuentran bajo la superficie del agua y apoyada sobre un fondo inclinado de pendiente  $\alpha = 0.2$  ( $= 11.31^\circ$ ). La función profundidad viene dada por

$$H(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{5} & \text{si } x \in [-5, 4] \\ 9/5 & \text{si } x > 4 \end{cases},$$

con condiciones iniciales

$$h_1(x, 0) = H(x) - h_2(x, 0), \quad q_1(x, 0) = 0,$$

$$h_2(x, 0) = \begin{cases} H(x) - 0.3 & \text{si } |x+2| < 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad q_2(x, 0) = 0,$$

y condiciones de frontera libres. Tomamos como parámetros  $CFL = 0.9$  y ratio de densidades  $r = 0.2$ , considerando la segunda capa como un tipo de sedimento granular. Usamos una malla de 500 puntos. Los tres parámetros de fricción son cero. El ángulo de fricción interna o ángulo de Coulomb se toma  $\delta_0 = 15^\circ$ . La Figura 4.4 muestra la condición inicial y la evolución de la avalancha en distintos instantes de tiempo hasta que el flujo de masa del sedimento se detiene y forma el depósito que se puede ver en la Figura 4.4(g).

El comportamiento de la capa de sedimentos dependerá del ángulo de Coulomb elegido a la hora de simular el experimento. En la Figura 4.3 se observa los diferentes depósitos de sedimentos en función del parámetro  $\delta_0$ .

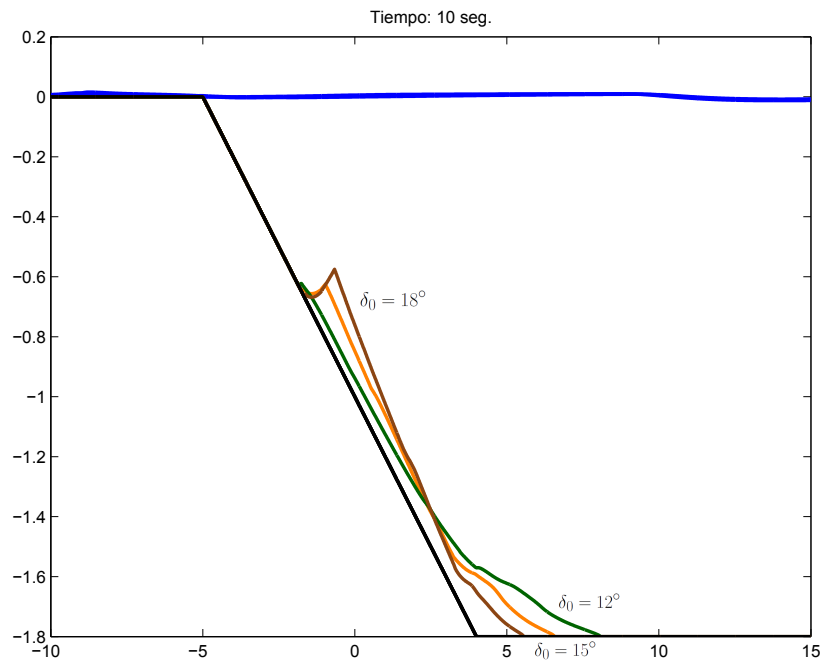


Figura 4.3: Posición y depósito de la capa de sedimentos en función del ángulo de Coulomb (escala horizontal  $x(m)$ , escala vertical  $z(m)$ ).

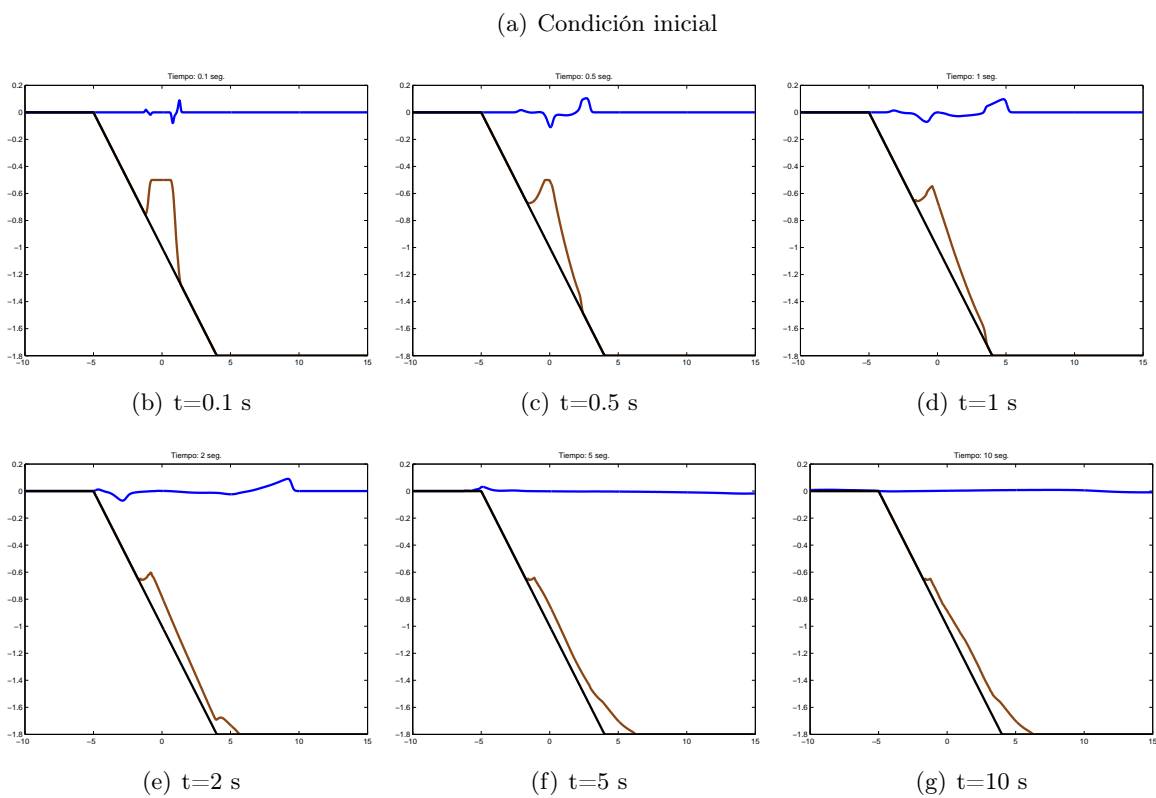


Figura 4.4: Avalancha submarina: evolución de la superficie del agua y del sedimento (escala horizontal  $x(m)$ , escala vertical  $z(m)$ ).

El siguiente paso en nuestras simulaciones sería trasladar esta avalancha submarina y estudiar el efecto que se produciría dejando caer una capa de sedimentos que se introduce en el medio acuático: una avalancha subaérea. Este caso test estará respaldado por los estudios de laboratorio que se describen en la Sección 4.3 y que serán simulados en la Sección 4.3.4 utilizando el esquema construido.

## 4.3. Experimentos en laboratorio

### 4.3.1. Introducción y referencias

En esta sección realizaremos simulaciones numéricas basándonos en las configuraciones correspondientes a los experimentos realizados por Valentín Heller, del Laboratorio de Hidráulica del instituto ETH de Zurich, en colaboración con Will H. Hager de la Escuela de Ingeniería Civil y medio ambiente de la universidad de Southampton, y publicados en 2010, *Wave types of landslide generated impulse waves* [37].

### 4.3.2. Modelo físico

#### 4.3.2.1. Canal rectangular

Los experimentos de laboratorio han sido realizados mediante un *generador de avalanchas*, desarrollado por Fritz y Moser, del instituto ETH de Zurich, [32]. Se trata de un canal de sección rectangular cuyo fondo está formado por una rampa que desemboca sobre el fondo del canal. Sobre la rampa está colocada una caja que contiene material granular, que es impulsado mediante un sistema neumático (véanse Figuras 4.5 y 4.6). En la posición 2 de la Figura 4.5, que se encuentra a 1.3 m. sobre la superficie del agua en la dirección de la rampa, la caja alcanza su velocidad máxima y la pared frontal de la misma se abre. El material granular deja la caja para deslizarse sobre la rampa debido a la fuerza de la gravedad y alcanza la superficie del agua. Es a partir de este momento cuando se produce la generación de olas en el canal construido. En la posición 3 de la Figura 4.5 se encuentra la caja vacía, generalmente a 0.8 m. sobre la superficie del agua en la dirección de la rampa. Esta posición final de la caja se ajusta a las diferentes profundidades del agua en reposo  $h$ .

Las medidas del canal usadas para este experimento son 11 m de largo, 0.5 m de ancho, y 1 m de profundidad, como muestra la Figura 4.6. El lado frontal del canal está fabricado en cristal, mientras que la parte trasera consiste en una plancha de acero. El fondo del canal está hecho de acero hasta la zona de impacto (3.67 m) mientras que el resto se constituye de cristal, necesario para poder aplicar un posterior tratamiento de imagen mediante laser, [36]. Como se aprecia en la Figura 4.5 se establece una protección de salpicaduras, y paneles perforados a modo de barrera que absorbe en la medida de lo posible la ola al final del canal, reduciendo la reflexión de la misma en el sentido contrario. El material granular es acelerado a lo largo de una rampa de 3 m de longitud. El ángulo de impacto  $\alpha$ , y en consecuencia el generador de avalanchas, son ajustables de  $30^\circ$  a  $90^\circ$  con respecto al eje horizontal.

#### 4.3.2.2. Material granular

El material granular, juega un papel determinante en el desarrollo del experimento, al igual que en nuestro modelo matemático. El tratamiento físico del mismo se ha estudiado previamente en [30], [78], con el objetivo de investigar los efectos de escala que produce la granulometría del material en la generación de olas. El tratamiento matemático fue discutido en [68] y [27].

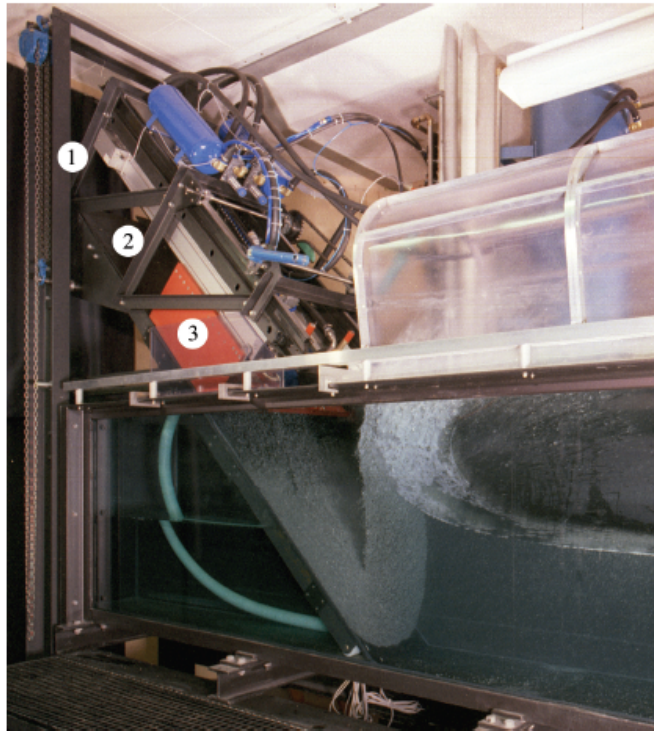


Figura 4.5: Impacto y generación de olas. ( $m_s = 108$  Kg,  $h = 0.45$  m,  $\alpha = 45^\circ$ )

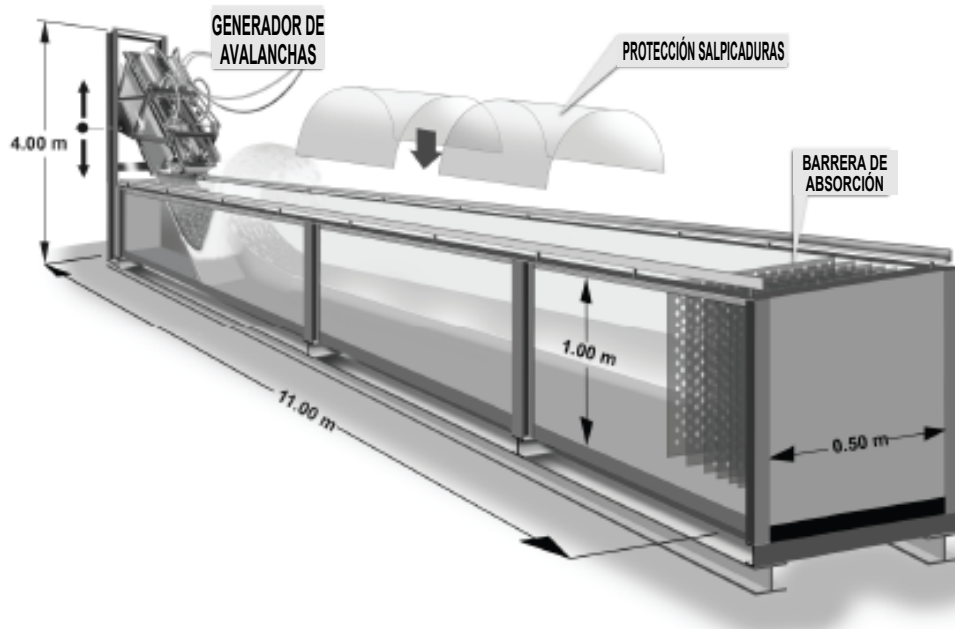


Figura 4.6: Canal rectangular: dimensiones, generador de avalanchas, protección de salpicaduras y barrera de absorción [30].

Dentro de las propiedades de un material granular podemos destacar, entre otras, el diámetro de grano,  $d_g$ ; la densidad de grano,  $\rho_g$ ; la densidad del bloque,  $\rho_s$ ; la porosidad,  $\psi_0$  (en %), el ángulo de fricción entre el bloque granular y la superficie de la rampa, también denominado ángulo de Coulomb,  $\delta_0$ , y el ángulo de fricción interna entre los granos,  $\phi'$ .

En la Tabla 4.1 y Figura 4.7 se muestran distintos tipos de material granular con los que se llevan a cabo los experimentos de Heller y Hager.

Figura 4.7	$d_g$ (mm)	$\rho_g$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\psi_0$ (%)	$\delta$ (°)	$\phi'$ (°)
(a)	2	2.372	1.442	39	27	32
(b)	4	2.745	1.592	42	24	34
(c)	5	955	573	40	20	27
(d)	8	2.429	1.338	45	21	21

Tabla 4.1: Tabla de propiedades de materiales granulares de acuerdo a la Figura 4.7

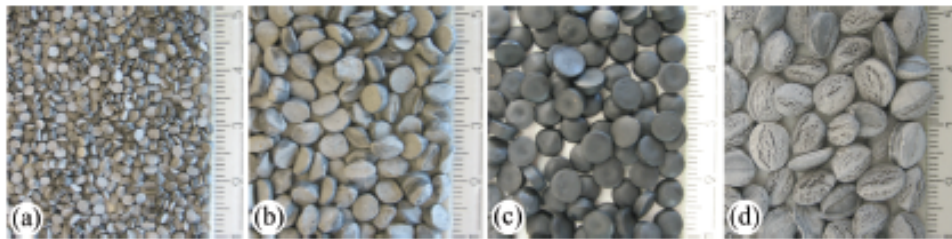


Figura 4.7: Materiales granulares considerados en los experimentos, correspondientes a la Tabla 4.1.

#### 4.3.2.3. Sistemas de medición

El tratamiento de los datos experimentales se desarrolla a través de diferentes técnicas y software especializados en cada función. En la Figura 4.8 se puede observar este complejo sistema de medición en el que intervienen, entre otros, dos sensores de distancias por laser (LDS), para escanear los perfiles de la avalancha cuyo funcionamiento se observa en la Figura 4.9, siete sensores de calibración (CWG) para medir los perfiles de las olas a lo largo de la zona de propagación, colocados según se observa en la Figura 4.10 y un software de procesamiento de imagen (PIV) que recoge el campo de velocidades de las partículas de material granular.

#### 4.3.3. Resultados experimentales

Los datos experimentales se extraen de uno de los tres experimentos realizados por Heller en [35].

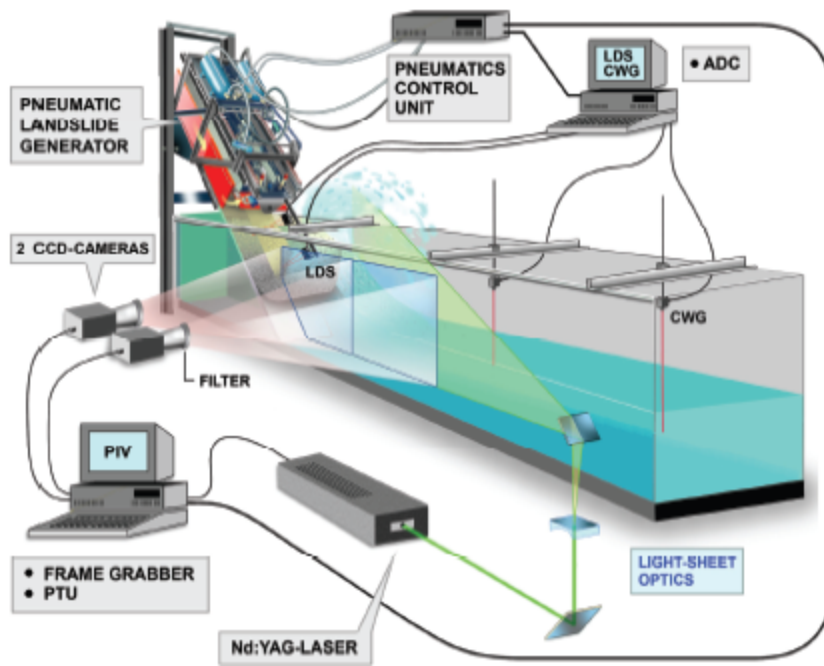


Figura 4.8: Sistema de medición y seguimiento de avalancha y generación de olas. [36].

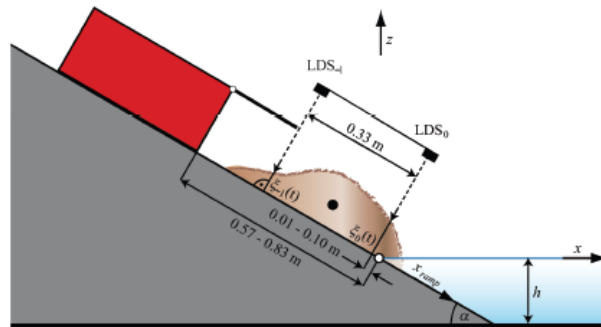


Figura 4.9: Velocidad de impacto. Análisis LDS.

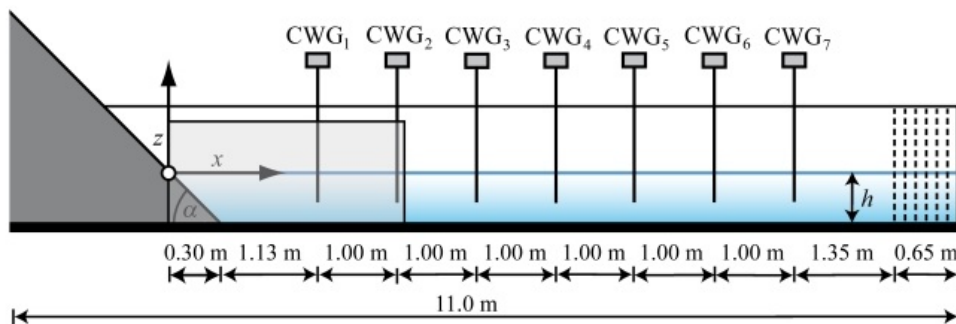


Figura 4.10: Seguimiento de olas a lo largo del canal. Análisis CWG.

### 4.3.3.1. Geometría del experimento

Se trata de una avalancha subaérea realizada en un canal rectangular con una profundidad para el agua en reposo de 0.3 m. La capa granular tiene una densidad de  $\rho_s = 1.678 \text{ kg/m}^3$ , con una densidad de grano de  $\rho_g = 2.745 \text{ kg/m}^3$ , una porosidad de  $\psi_0 = 0.389\% \approx 0.4$ , y un ángulo de fricción interna de  $\phi' = 34^\circ$ . El volumen del bloque es de  $0.0334 \text{ m}^3$  y la velocidad de impacto calculada gracias a los sensores LDS es de  $v = 4.67 \text{ m/s}$ . El ángulo de impacto de la rampa de deslizamiento es de  $\alpha = 45^\circ$ .

El canal donde se efectúa el experimento se corresponde con el de la Figura 4.6. El origen de coordenadas se define en el punto de impacto, es decir, en la intersección de la rampa con la superficie de agua en reposo. El tiempo comienza en  $t = 0$  cuando el bloque alcanza la superficie del agua. En los resultados obtenidos, se expresa el tiempo en función de  $T_r$ , denominado tiempo relativo, y calculado como  $T_r = t\sqrt{g/h}$ .

El generador de avalanchas descrito en secciones anteriores, coloca la caja rellena del material granular a  $-1.285 \text{ m}$ . sobre el origen de coordenadas en la dirección de la rampa, que alcanza una velocidad máxima de  $3.25 \text{ m/s}$ . cuando se abre la parte frontal.

Las dimensiones del material granular son  $0.6 \text{ m} \times 0.118 \text{ m} \times 0.472 \text{ m}$ , por lo que no ocupa la totalidad de la anchura del canal, sólo un 94%

En la Figura 4.11 se establece la definición de los parámetros y variables más relevantes del experimento.

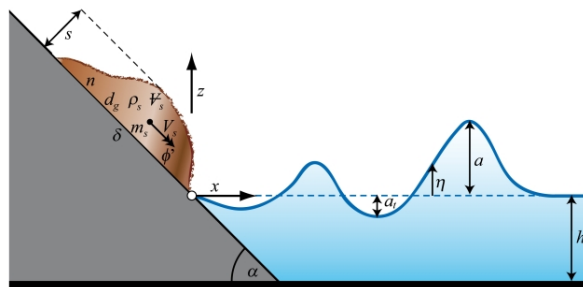


Figura 4.11: Parámetros y variables relevantes en el experimento.

### 4.3.3.2. Resultados obtenidos

Los resultados obtenidos de este experimento se centran en la forma del depósito del material granular y en la amplitud de las ondas generadas.

La información recogida por el análisis de las cámaras PIV, la que proporcionan los sensores CWG colocados según la Figura 4.10, están recogidos en las Figuras 4.12 y 4.13 respectivamente.

### 4.3.4. Simulaciones numéricas

A partir de los resultados obtenidos en el laboratorio y recogidos en el caso test realizado por Heller en [37], trataremos de realizar el mismo experimento de manera numérica y comparar los

resultados.

En primer lugar, debemos definir la geometría y fijar los parámetros necesarios para que nuestro esquema refleje numéricamente al caso test llevado a cabo en el laboratorio. Queremos simular una avalancha subaérea en un canal de 11 metros de longitud, donde definimos las funciones topografía,  $H(x)$ , capa de agua,  $h_1(x)$ , y capa de material granular,  $h_2(x)$ .

$$(4.3.1) \quad H(x) = \begin{cases} x + 1.57 & \text{si } x \in [-1.57, 0.3] \\ 1.87 & \text{si } x \in (0.3, 9.43] \end{cases}$$

$$(4.3.2) \quad h_1(x) = -1.57 + H(x)$$

$$(4.3.3) \quad h_2(x) = \begin{cases} 0.1668 & \text{si } x \in [-0.4242, 0] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La velocidad de la primera capa permanece constante e igual a 0, es decir, agua e reposo, mientras que la velocidad de la segunda capa viene dada por los datos iniciales del experimento de laboratorio, así que consideramos

$$(4.3.4) \quad q_1(x) = 0, \quad q_2(x) = 4.67 \cdot h_2(x)$$

Con este nuevo test pretendemos fijar los parámetros de fricción basándonos en los resultados experimentales. En este proceso debemos determinar la influencia en la configuración final, de cada uno de los tres parámetros: fricción entre capas, fricción del material granular con el fondo, y fricción del agua con el fondo. El enfoque tratado aquí va encaminado a reproducir de la manera más exacta posible la amplitud que alcanzan las olas que produce la avalancha de material granular al entrar en contacto con el agua, y a estimar el tiempo en el que se producen dichas amplitudes máximas.

Los parámetros finalmente considerados en esta simulación están representados en la Tabla 4.2.

En la Figura 4.14 se puede observar la evolución de la superficie libre del agua y de la capa de material granular durante el primer segundo de la simulación.

El perfil relativo que mide la altura de las olas en los puntos CWG1 a CWG7 se muestra en la Figura 4.15. En la Figura 4.16 se establece la comparación entre los perfiles relativos correspondientes al experimento numérico.



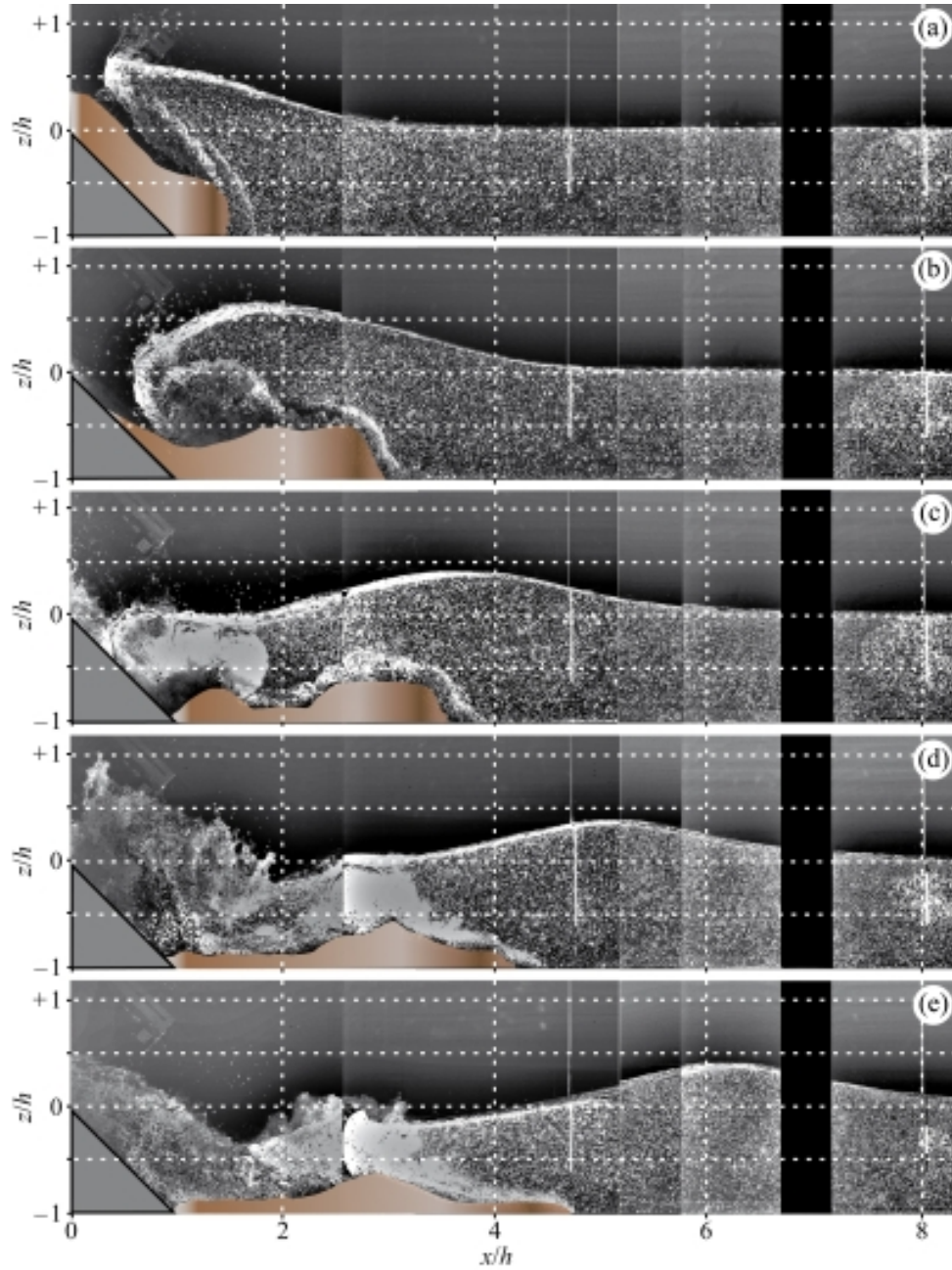


Figura 4.12: Análisis PIV, tomado en  $t =$  (a) 0.2 s ,(b) 0.4 s ,(c) 0.6 s ,(d) 0.8 s y (e) 1.0 s tras del impacto. [35]

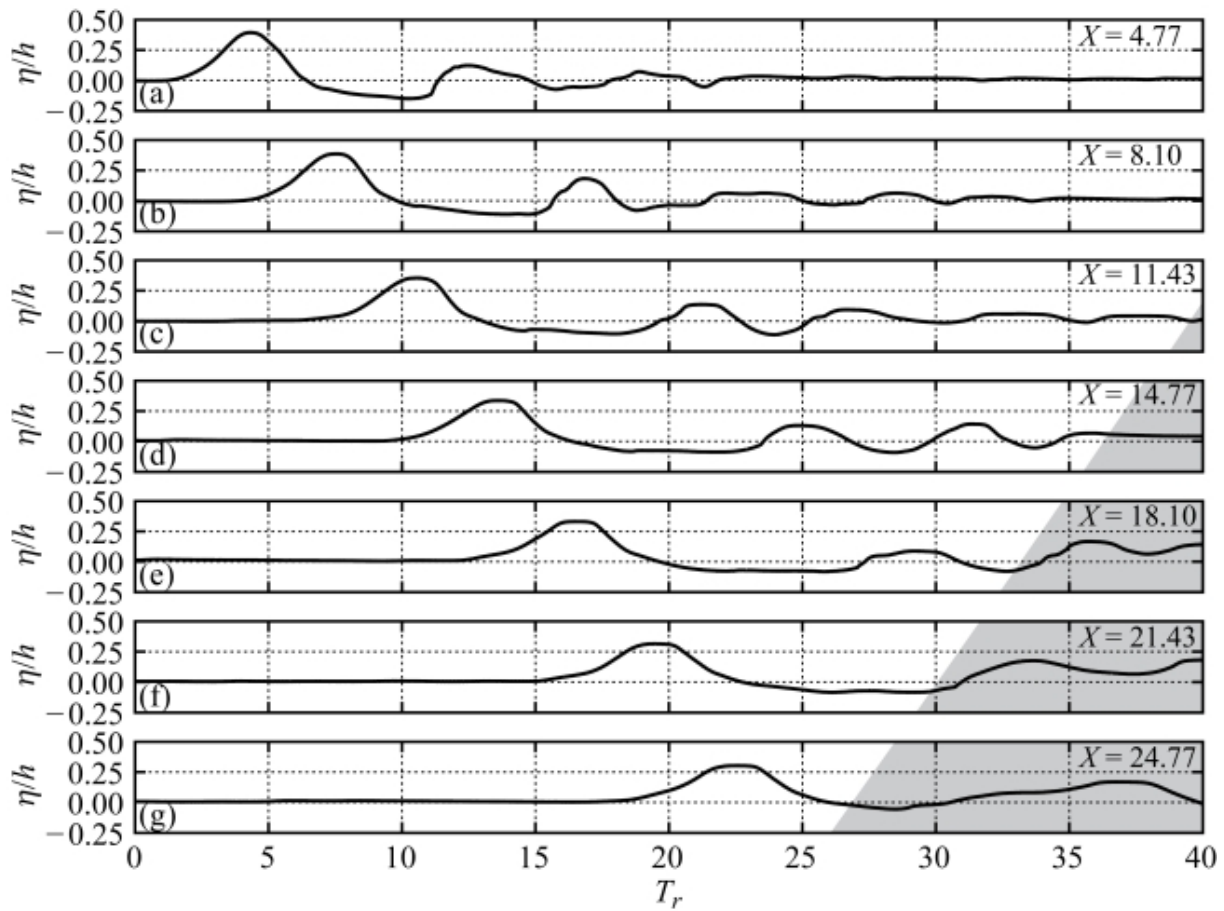


Figura 4.13: Perfil relativo  $\eta/h$  frente a  $t$  en (a)  $CWG_1$  (b)  $CWG_2$  (c)  $CWG_3$  (d)  $CWG_4$  (e)  $CWG_5$  (f)  $CWG_6$  y (g)  $CWG_7$ . Las áreas en gris están influenciadas por la reflexión de las olas. [Heller-2007]

Datos	Valor
$x_0$	-1.57
Longitud del segmento	11
Número de particiones	2200
Tiempo total de integración	1
Tiempo inicial	0.0
Condición CFL	0.4
Ratio de densidades	0.596
Ángulo de Coulomb	34
Parámetro de fricción Material granular-Fondo no erosionable	0.09
Parámetro de fricción Agua-Fondo no erosionable	0.01
Parámetro de fricción Material granular-Agua	0.01
$h_\varepsilon$	0.001
Condiciones frontera	libre

Tabla 4.2: Parámetros de entrada para la simulación del experimento de laboratorio

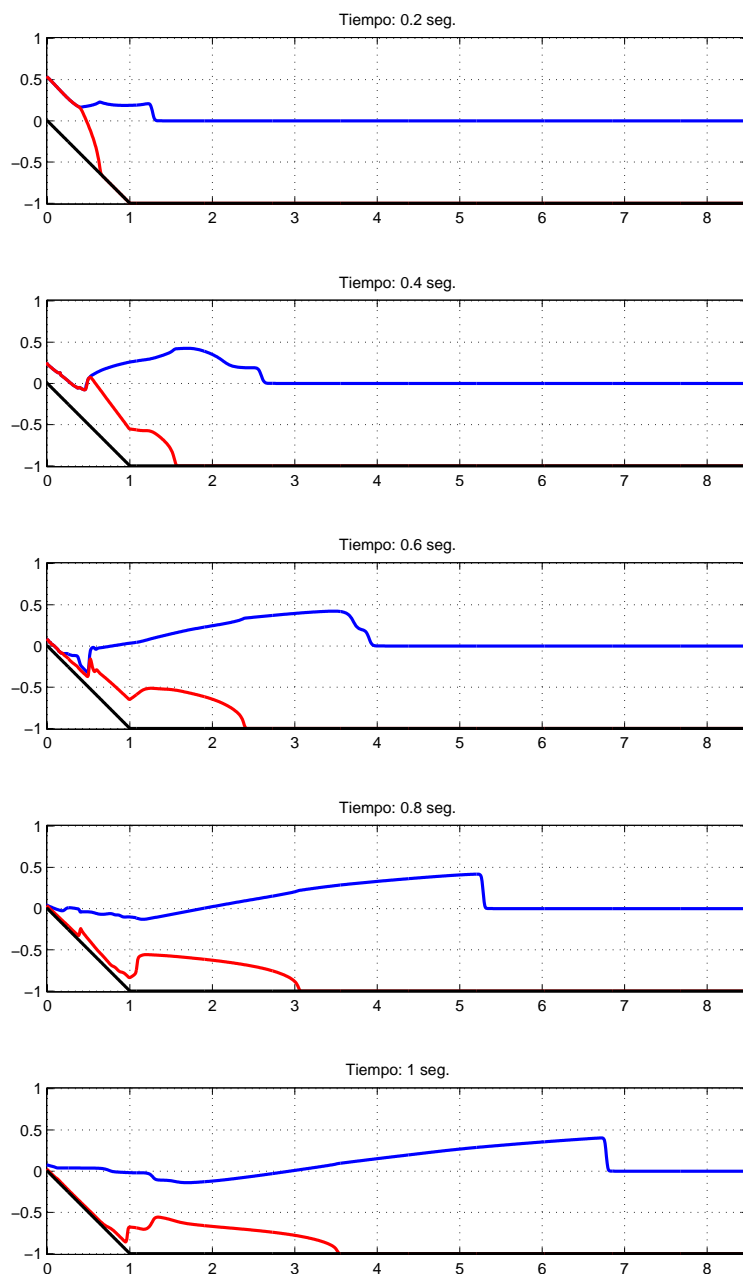


Figura 4.14: Evolución de la superficie libre del agua y de la capa de sedimentos (escala horizontal  $x/h$ , escala vertical  $z/h$ ) .

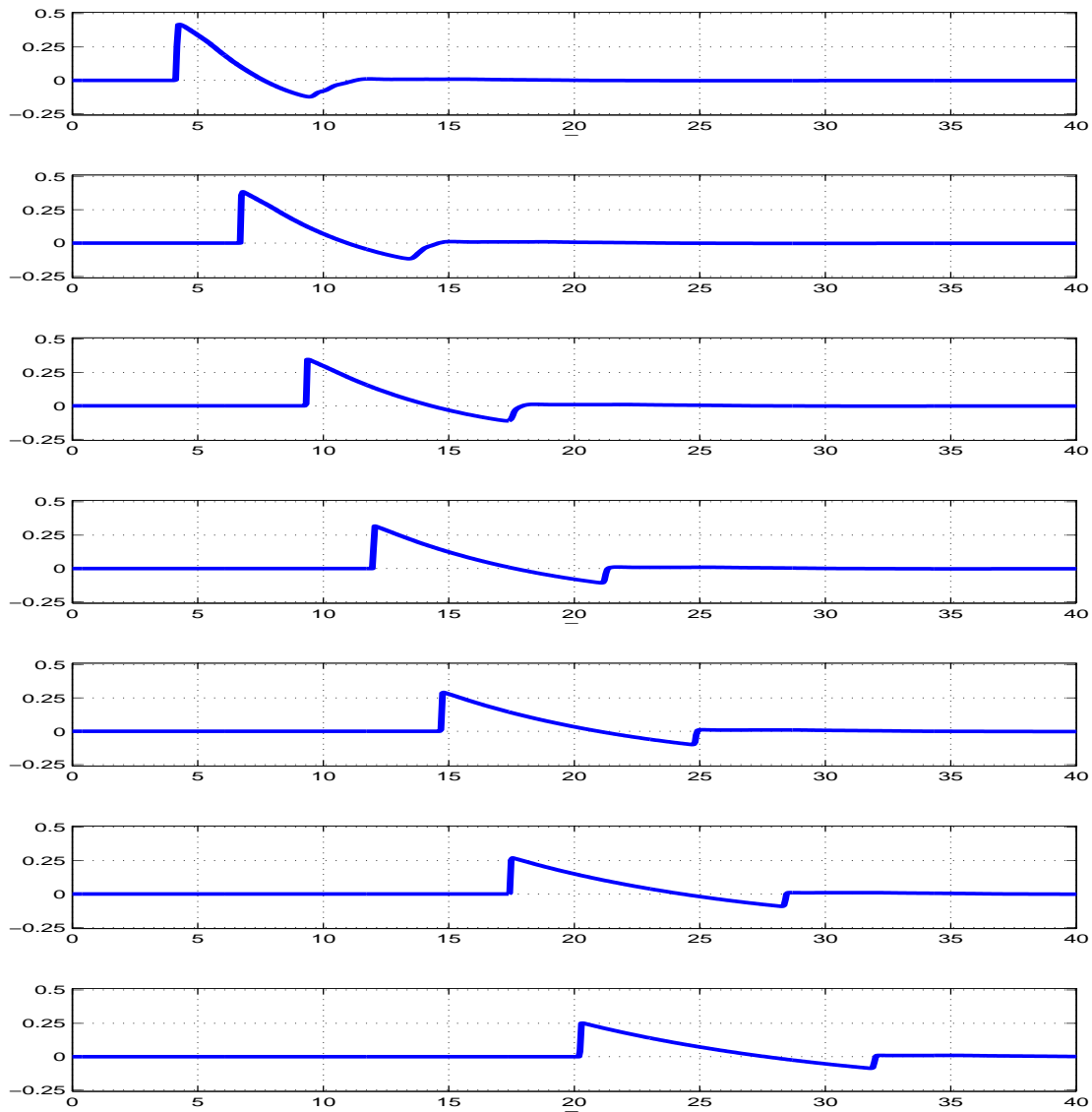


Figura 4.15: Resultados numéricos de perfil relativo en los CWG's (escala horizontal  $T_r$ , escala vertical  $z/h$ )

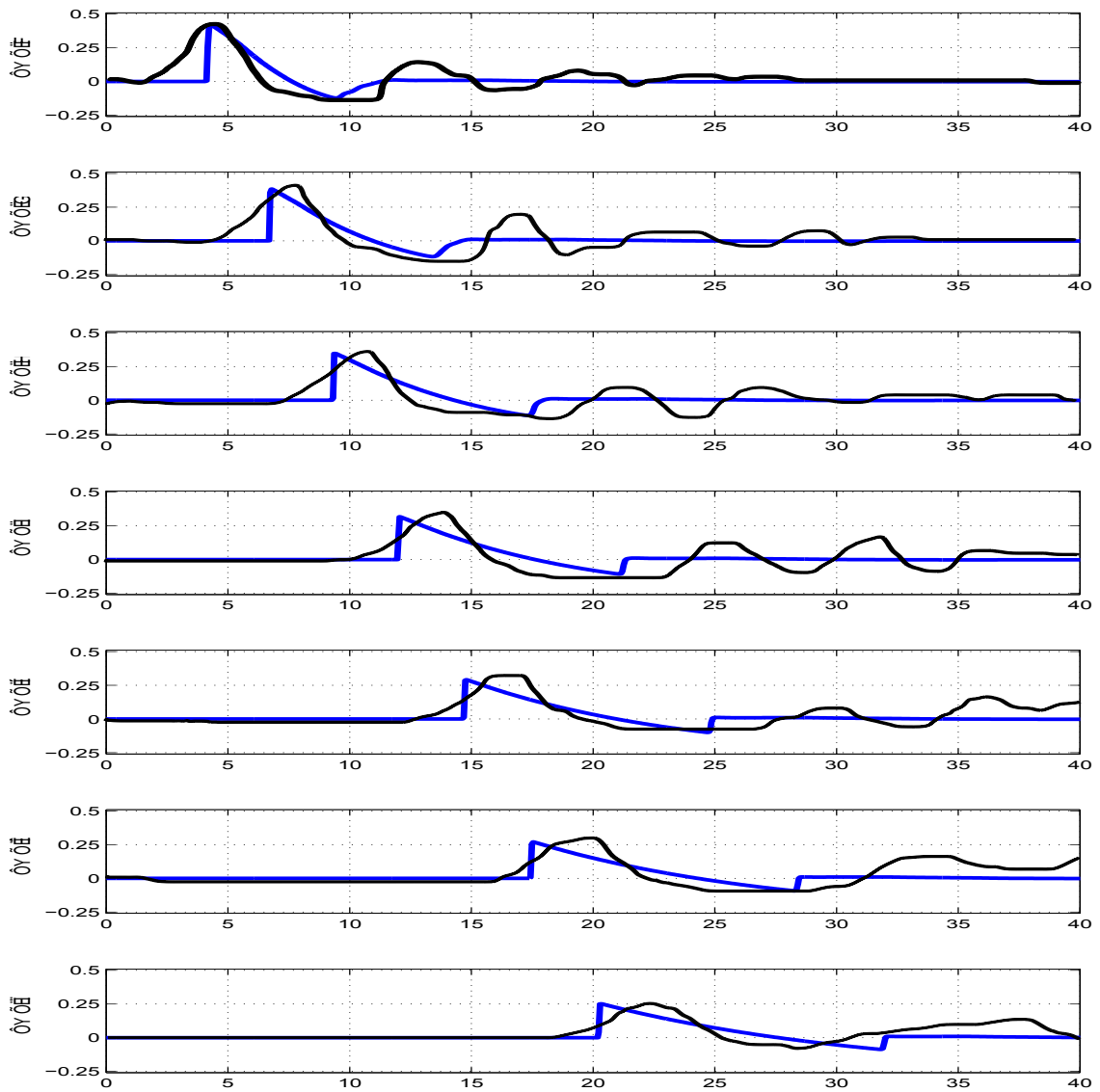


Figura 4.16: Perfiles relativos en los CWG's. Comparación de resultados experimentales (negro) y numéricos (azul).

### 4.3.5. Discusión de los resultados

Tras aplicar nuestro esquema numérico a una situación *real* de la que conocemos datos experimentales podemos decir que los resultados obtenidos son satisfactorios, en el sentido de que hemos logrado reproducir el fenómeno ocurrido y alcanzar numéricamente los valores esperados tanto en la amplitud de las ondas principales como en el instante en el que se producen. Debido a la configuración del experimento que intentamos simular, se puede observar en la Figura 4.12 cómo en los primeros instantes del mismo tienen lugar importantes efectos de cavitación y turbulencia que quedan fuera del alcance de las posibilidades del esquema numérico empleado. De este modo, como se puede observar comparando la secuencia de las Figuras 4.12 y 4.14, es apreciable una configuración diferente entre la evolución del experimento numérico y del experimento real. En el experimento numérico (véase Figura 4.14) la capa de sedimento avanza, en los primeros instantes más lentamente que en el experimento real, si bien, la amplitud y velocidad de la onda de choque producida es prácticamente igual a experimental (véase Figura 4.16).

En cuanto al perfil de depósito del material granular se obtiene una configuración en la que el alcance es ligeramente inferior en el experimento numérico. El perfil frontal de esta capa es similar a la experimental, mientras, en la parte anterior de dicha capa el perfil experimental es apreciablemente de menor espesor que el experimental.

Podemos concluir que nuestro experimento numérico reproduce satisfactoriamente la amplitud y velocidad de la onda producida tras el impacto con el fluido.

#### 4.4. Aplicación al caso de Lituya Bay

El mega-tsunami que tuvo lugar en la bahía de Lituya, en 1958, ha sido descrito por Miller (1960), Slingerland y Voight (1979) y Fritz et al. (2001), entre otros. La bahía de Lituya está localizada cerca de las montañas de Saint Elías, al sur de la costa de Alaska. Las dimensiones de la bahía son de 1.2 km a 3.3 km de ancho por 12 km de longitud. La salida hacia el pacífico está restringida a una anchura de 300 m. (Ver figura 4.17).

El 9 de julio de 1958 se localizó un terremoto de magnitud 8.3 según la escala de Richter con epicentro a 21 km al sudeste de la bahía de 1 a 4 minutos de duración, según los datos recogidos por Slingerland y Voight (1979). Consecuencia de este temblor, se produjo la caída de un frente rocoso a unos 914 metros de altitud sobre una ladera con una pendiente de  $45^\circ$  de media.



Figura 4.17: Bahía de Lituya. Línea de alcance del tsunami.

El material desprendido tenía una densidad de grano  $\rho_g = 2700 \text{ Kg/m}^3$ . La anchura media del desprendimiento fue de  $b = 823 \text{ m}$  y el grosor máximo alcanzaba los  $s = 92 \text{ m}$ . La avalancha generó un *runup*<sup>1</sup> de  $R = 524 \text{ m}$  de altura en la ladera opuesta al desprendimiento, situada a  $x \approx 1350 \text{ m}$ , con una pendiente de  $45^\circ$ . La profundidad media del agua en la zona de impacto era de  $h = 122 \text{ m}$ .

<sup>1</sup>El término técnico en inglés para definir el alcance de un tsunami es conocido como *runup*



Herman Fritz, en [29], construyó un modelo de laboratorio a escala 1:675 basándose en el criterio generalizado de similitud del número de Froude (las dimensiones del canal son: Longitud, Anchura, Altura: 11 m, 0.5 m y 1 m). El mecanismo de construcción y funcionamiento es muy similar al mostrado en la sección 4.3. Puede observarse un esquema con las magnitudes del modelo y la situación del estado inicial en la Figura 4.18.

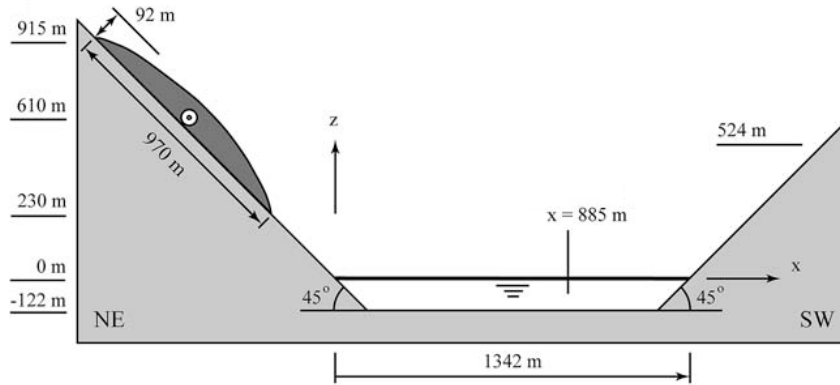


Figura 4.18: Modelo físico de la zona de avalancha en la bahía de Lituya.

Para realizar el experimento se empleó un material granular con las siguientes propiedades: densidad de grano  $\rho_g = 2.64 \text{ t/m}^3$ , diámetro medio de grano  $d_g = 4 \text{ mm}$ , la densidad del bloque  $\rho_s = 1.62 \text{ t/m}^3$ , la porosidad del bloque  $\psi_0 = 39\%$  y el ángulo de fricción dinámico entre el bloque granular y la rampa de  $\delta_0 = 25^\circ$ .

La velocidad inicial de caída del bloque de material granular se tomó como  $110 \text{ m/s}$  y se recogen los datos experimentales durante los primeros 240 segundos.

Estas series de datos nos han servido como información de calibración de nuestro modelo, que ha sido lanzado usando los parámetros que se muestran en la Tabla 4.3:

Símbolo	Dimensión	Valor	Datos	Valor
$h$	$[m]$	122	$x_0$	-1000
$s$	$[m]$	92	Longitud del segmento	3000
$b$	$[m]$	823	Número de particiones	600
$V_s$	$[m/s]$	110	Tiempo total de integración	240
$V$	$[m^3]$	$51 \times 10^6$	Tiempo inicial	0.0
$\rho_s$	$[kg/m^3]$	1620	Condición CFL	0.9
$\alpha$	$[^\circ]$	40	Ratio de densidades	0.5
$\beta$	$[^\circ]$	34.3	Ángulo de Coulomb	25
$F$	$[-]$	2.66	Fricción Bloque-Fondo	0.23
$S$	$[-]$	0.75	Fricción Agua-Fondo	0.015
$M$	$[-]$	6.74	Fricción Bloque-Agua	0.01
			$h_\varepsilon$	0.0012
			Condiciones frontera	libre

Tabla 4.3: Parámetros que intervienen en la avalancha. Datos introducidos en la simulación



Las condiciones de configuración iniciales son:

$$(4.4.1) \quad H(x) = \begin{cases} x + 22 & \text{si } x \in [-1000, 100], \\ 122 & \text{si } x \in (100, 1198), \\ -x + 1320 & \text{si } x \geq 1198, \end{cases}$$

$$(4.4.2) \quad h_1(x) = \begin{cases} H(x) & \text{si } H(x) \geq 0, \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

y

$$(4.4.3) \quad h_2(x) = \begin{cases} 113 & \text{si } |x + 400| < 265, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

En la Figura 4.19 observamos la condición inicial y una secuencia de varios instantes de la simulación. Estamos interesados en comparar los resultados obtenidos en el modelo a escala de laboratorio con los resultados del modelo numérico. En particular hay dos elementos importantes a comparar: el runup o alcance de la onda de tsunami generada en la ladera opuesta a la zona de desprendimiento y la amplitud de las ondas medidas en un sensor que está colocado sobre la vertical del punto  $x = 885$  m.

En las Figuras 4.20 y 4.21 se muestran los valores obtenidos en nuestro experimento numérico, que son comparados con los valores experimentales en las Figuras 4.22 y 4.23 respectivamente. Observemos en la Figura 4.22 que el runup de los datos numéricos es prácticamente igual al experimental (el máximo se alcanza en el instante  $t = 33$  s (véase Figura 4.19(d)) y tiene un valor de 524, igual al experimental). A partir de este instante la primera onda vuelve de nuevo hacia el canal y se producen nuevas reflexiones que van llegando paulatinamente a la zona de runup y que están representadas en la Figura 4.22. Puede observarse como las amplitudes de dichas ondas son capturadas correctamente por el modelo, si bien, el modelo numérico va progresivamente más adelantado que los datos experimentales.

En la Figura 4.23 se comparan los datos numéricos y experimentales de elevación de la superficie libre del agua para un punto que se encuentra en la coordenada  $x = 885$  m del canal. De nuevo las amplitudes de las ondas generadas por el experimento numérico y la forma de las mismas es capturada de forma muy satisfactoria, si bien, de nuevo el experimento numérico va adelantado en tiempo con respecto a los datos experimentales.

Podemos concluir que a pesar de trabajar con un modelo unidimensional los principales aspectos del experimento de Lituya Bay realizado en laboratorio por H. Fritz (véase [29]) se capturan correctamente en el experimento numérico, si bien éste va progresivamente más adelantado en el tiempo que los datos de laboratorio debido principalmente a la configuración ligeramente distinta que va adquiriendo el depósito de sedimentos.

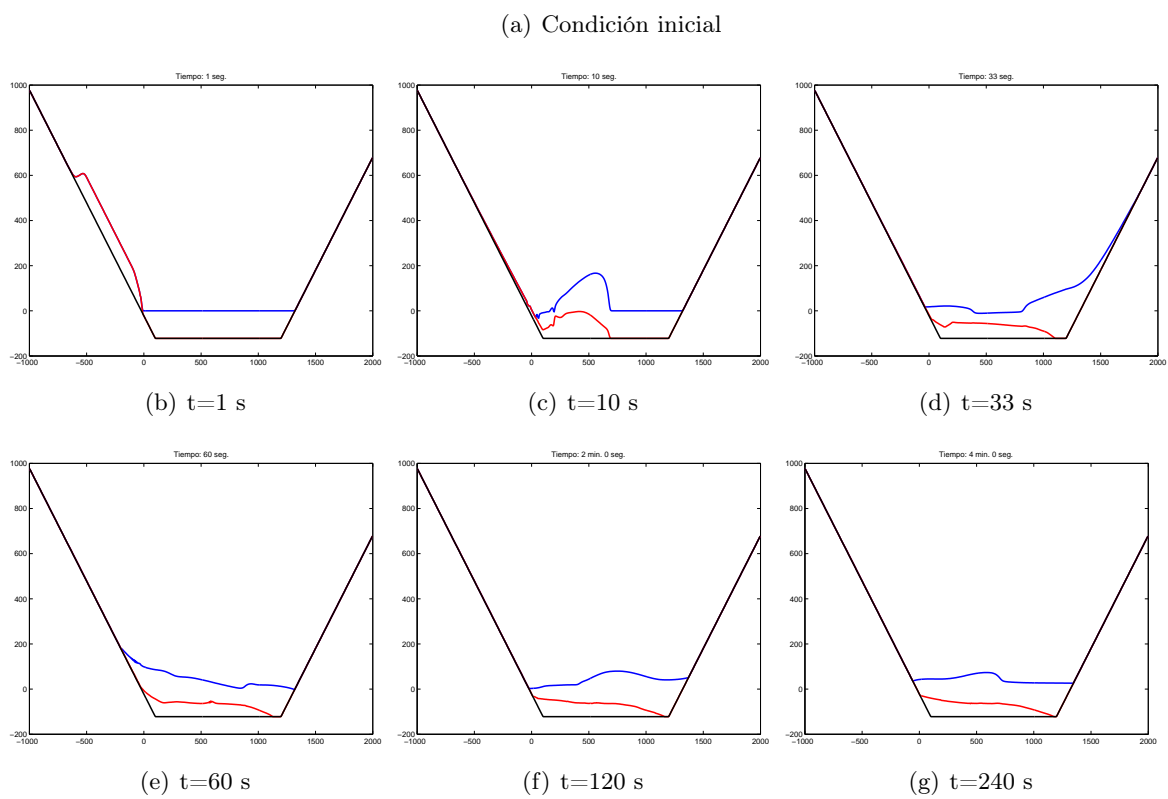


Figura 4.19: Simulación del caso Lituya Bay

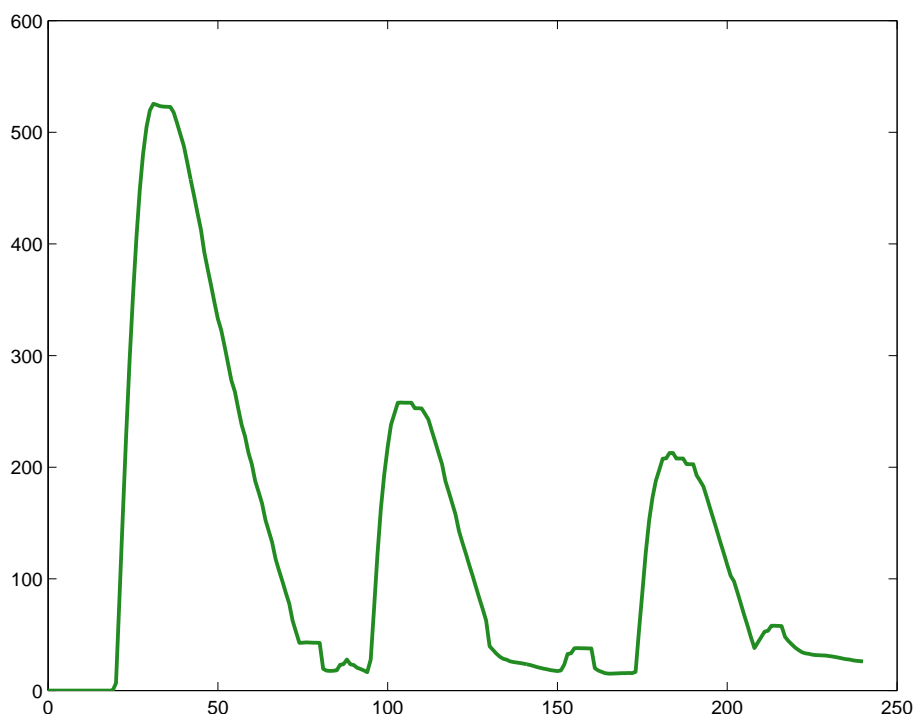


Figura 4.20: Run-up. Resultados numéricos. (escala horizontal  $t(s)$ , escala vertical  $z(m)$ ).

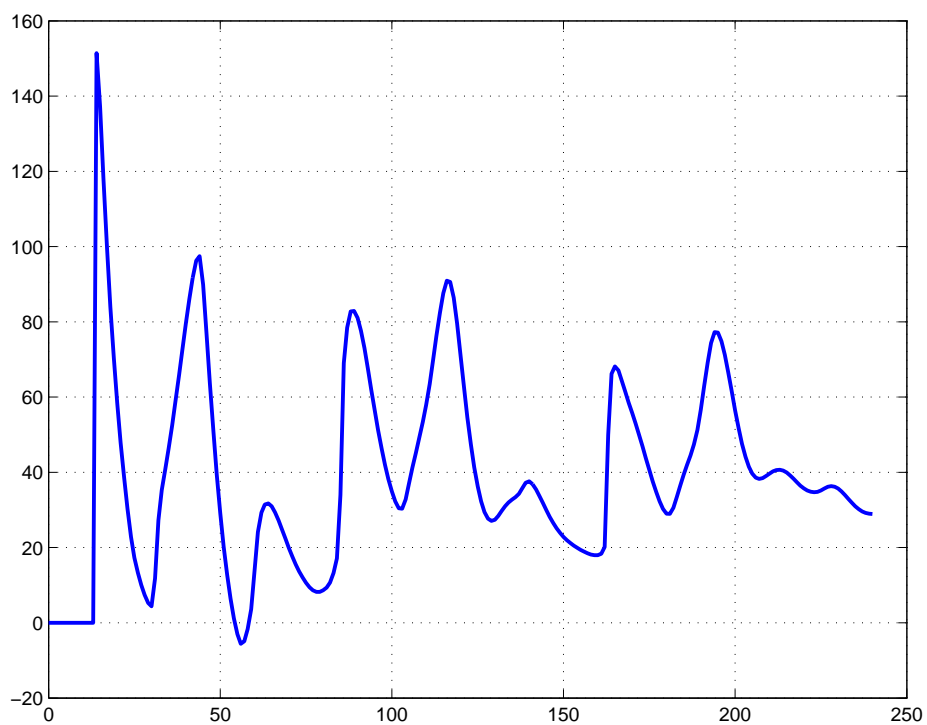


Figura 4.21: Elevación de la superficie libre en  $x = 885$  m. Resultados numéricos. (escala horizontal  $t(s)$ , escala vertical  $z(m)$ ).

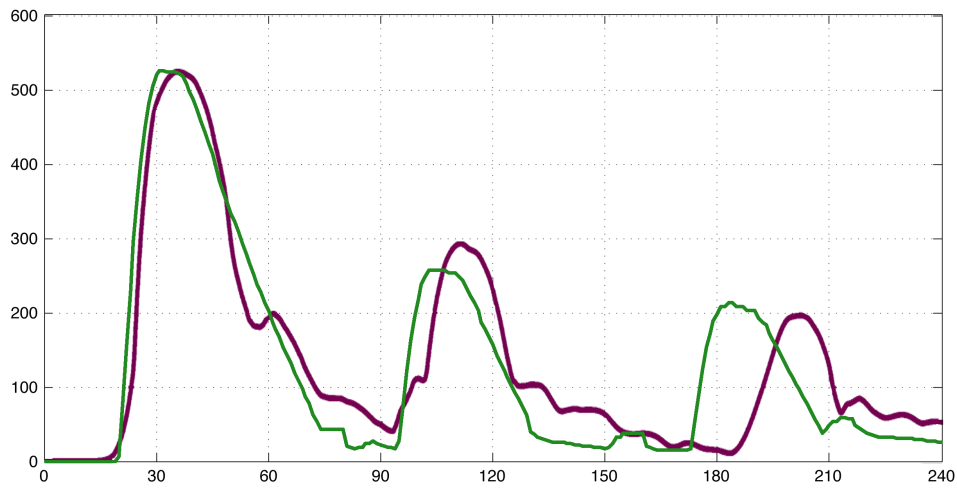


Figura 4.22: Runup. Comparación de los resultados numéricos (verde) con datos experimentales (magenta).

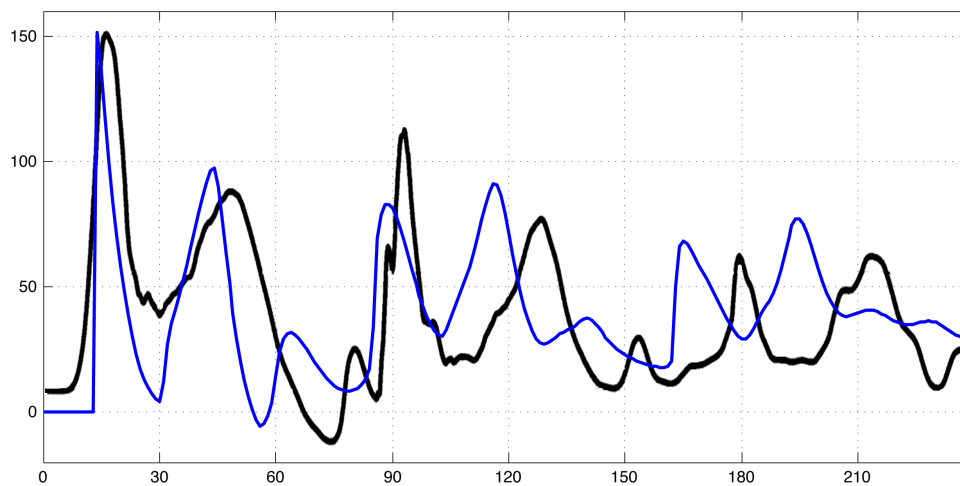


Figura 4.23: Elevación de la superficie libre en  $x = 885$  m. Comparación de los resultados numéricos (azul) con datos experimentales (negro).

## Capítulo 5

# Conclusiones

En esta memoria se ha realizado la extensión del esquema numérico IFCP a sistemas hiperbólicos de leyes de conservación con términos fuentes y productos no conservativos. Se han estudiado las propiedades de buen equilibrio del método y se ha demostrado la estabilidad  $L^\infty$  lineal del mismo.

Se ha llevado a cabo la aplicación de este esquema al modelo unidimensional de Savage-Hutter bicapa para la simulación de avalanchas y propagación de tsunamis, donde se presta especial atención a la discretización de los términos fuentes que parametrizan la fricción. Se prueba que el esquema resultante es exactamente bien equilibrado para una clase particular de soluciones de equilibrio que son de especial interés desde el punto de vista de las aplicaciones.

Se presenta la aplicación de este modelo a casos reales de los que se conocen datos experimentales, como aquellos que recogen los estudios de Heller y Fritz. Uno de ellos corresponde a un experimento de laboratorio a escala del mega-tsunami de Lituya-Bay.

Los resultados obtenidos son satisfactorios, en el sentido de que hemos logrado reproducir el fenómeno de avalancha y el consecuente tsunami generado. Las ondas principales se capturan de forma satisfactoria, tanto la amplitud, como la velocidad de propagación. No ocurre lo mismo con otras ondas secundarias. Esto puede deberse a que el modelo no tiene en cuenta efectos tales como la cavitación y la turbulencia, entre otros.

En cualquier caso, este modelo es un buen punto de partida para entender los mecanismos básicos de generación de tsunamis producidos por avalanchas.

Las líneas de trabajo en un futuro estarán encaminadas en incluir alguno de los efectos que este modelo no contempla, como los efectos no hidrostáticos de la presión, cavitación, entre otros. La inclusión de tales efectos introducirán nuevos términos que conllevará una mayor complejidad en el diseño de esquemas numéricos.

También se estudiarán técnicas para incluir los efectos estocásticos derivados de la incertidumbre de los datos, tales como, los parámetros de fricción.



# Bibliografía

- [1] E. AUDUSSE, F. BOUCHUT, M.O. BRISTEAU, R. KLEIN, B. PERTHAME: A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows, *SIAM J. Sci. Comp.* **25**: 2050–2065, 2004.
- [2] A. BERMÚDEZ, M.E. VÁZQUEZ: Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms, *Computers and Fluids*, **23**: 1049–1071, 1994.
- [3] C. BERTHON, F. COQUEL: Nonlinear projection methods for multi-entropies Navier-Stokes systems, *Math. of Comp.* **76**: 1163–1194, 2007.
- [4] C. BERTHON, F. COQUEL, P.G. LEFLOCH: Why many theories of shock waves are necessary: Kinetic functions, equivalent equations, and fourth-order models, *J. Comput. Phys.* **227**: 4162–4189, 2008.
- [5] F. BOUCHUT: *Nonlinear Stability of Finite Volume Methods for Hyperbolic Conservation Laws and Well-Balanced Schemes for Sources*, Birkhäuser, 2004.
- [6] F. BOUCHUT, A. MANGENEY, B. PERTHAME, J.-P. VILOTTE : A new model of Saint Venant and Savage-Hutter type for gravity driven. *Journal of Geophysical research*, vol. 108, no. B11. 2003.
- [7] M.J. CASTRO, T. CHACÓN, E.D. FERNÁNDEZ, C. PARÉS: On well-balanced finite volume methods for non-conservative non-homogeneous hyperbolic systems, *SIAM J. Sci. Comput.* **29**: 1093–1126, 2007.
- [8] M.J. CASTRO, T. CHACÓN, E.D. FERNÁNDEZ, J.M. GONZÁLEZ, C. PARÉS: Well-balanced finite volume schemes for 2D non-homogeneous hyperbolic systems. Application to the dam-break of Aznalcóllar, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **197**: 3932–3950, 2008.
- [9] M.J. CASTRO, E.D. FERNÁNDEZ, A. FERREIRO, J.A. GARCÍA, C. PARÉS: High order extensions of Roe schemes for two dimensional nonconservative hyperbolic systems, *J. Sci. Comput.* **39**: 67–114, 2009.
- [10] M.J. CASTRO, A.M. FERREIRO, J.A. GARCÍA, J.M. GONZÁLEZ, J. MACÍAS, C. PARÉS, M.E. VÁZQUEZ: On the numerical treatment of wet/dry fronts in shallow flows: applications to one-layer and two-layer systems. *Math. Comp. Model.*, 42 (3-4): 419-439, 2005.
- [11] M.J. CASTRO, J.A. GARCÍA, J.M. GONZÁLEZ, J. MACÍAS, C. PARÉS, M.E. VÁZQUEZ: Numerical simulation of two layer shallow water flows through channels with irregular geometry, *J. Comput. Phys.* **195**: 202–235, 2004.

- [12] M.J. CASTRO, J.A. GARCÍA, J.M. GONZÁLEZ, C. PARÉS: A parallel 2d finite volume scheme for solving systems of balance laws with nonconservative products: application to shallow flows, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **196**: 2788–2815, 2006.
- [13] M.J. CASTRO, E.D. FERNÁNDEZ, J.M. GONZÁLEZ, AND C. PARÉS: Numerical Treatment of the Loss of Hyperbolicity of the Two-Layer Shallow-Water System. *J. Sci. Comput.*, 48, 1-3 (July 2011), 16-40.
- [14] M.J. CASTRO, J.M. GALLARDO, C. PARÉS: High order finite volume schemes based on reconstruction of states for solving hyperbolic systems with nonconservative products. Applications to shallow water systems, *Math. Comp.* **75**: 1103–1134, 2006.
- [15] M.J. CASTRO, J.A. GARCÍA, J.M. GONZÁLEZ, C. PARÉS: Solving shallow water systems in 2d domains using finite volume methods and multimedia SSE instructions, *J. Comput. App. Math.* **221**: 16–32, 2008.
- [16] M.J. CASTRO, P.G. LEFLOCH, M.L. MUÑOZ, C. PARÉS: Why many theories of shock waves are necessary. Convergence error in formally path-consistent schemes, *J. Comput. Phys.* **227**: 8107–8129, 2008.
- [17] M.J. CASTRO, J.A. LÓPEZ, C. PARÉS: Well-balanced high order extensions of Godunov method for linear balance laws, *SIAM J. Num. Anal.* **46**: 1012-1039, 2008.
- [18] M.J. CASTRO, J. MACÍAS, C. PARÉS: A  $Q$ -Scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-D shallow water system, *Math. Mod. Num. Anal.* **35**: 107–127, 2001.
- [19] M.J. CASTRO, A. PARDO, C. PARÉS: Well-Balanced numerical schemes based on a generalized hydrostatic reconstruction technique, *Math. Mod. Meth. in Appl. Sci.* **17**: 2055 - 2113, 2007.
- [20] M.J. CASTRO, A. PARDO, C. PARÉS, E. TORO: Well-balanced high-order MUSTA schemes for non-conservative hyperbolic systems, in *Numerical Mathematics and Advanced Applications. Proceedings of ENUMATH 2007*: 249–256, Springer, 2008.
- [21] M.J. CASTRO, A. PARDO, C. PARÉS, E. TORO: On some fast well-balanced first order solvers for nonconservative systems, *Math. Comp.*, DOI: 10.1090/S0025-5718-09-02317-5.
- [22] T. CHACÓN, A. DOMÍNGUEZ, E.D. FERNÁNDEZ: A family of stable numerical solvers for shallow water equations with source terms, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **192**: 203–225, 2003.
- [23] T. CHACÓN, A. DOMÍNGUEZ, E.D. FERNÁNDEZ: Asymptotically balanced schemes for nonhomogeneous hyperbolic systems—application to the shallow water equations, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, **338**: 85–90, 2004.
- [24] G. DAL MASO, P.G. LEFLOCH, F. MURAT: Definition and weak stability of nonconservative products, *J. Math. Pures Appl.* **74**: 483–548, 1995.
- [25] P. DEGOND, P-F. PEYRARD, G. RUSSO AND PH. VILLEDIEU: *Polynomial upwind schemes for hyperbolic systems*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I, **328** (1999), pp. 479–483 .
- [26] F. DE VUYST: *Schémas nonconservatifs et schémas cinétiques pour la simulation numérique d'écoulements hypersoniques non visqueux en déséquilibre thermochimique*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, Paris, France, 1994.



- [27] E.D. FERNÁNDEZ, F. BOUCHUT, D. BRESCH, M.J. CASTRO-DÍAZ, AND A. MANGENY: A new Savage-Hutter type models for submarine avalanches and generated tsunami. *J. Comput. Phys.*, 227:7720–7754, 2008.
- [28] E.D. FERNÁNDEZ-NIETO, M.J. CASTRO DÍAZ, AND C. PARÉS: On an Intermediate Field Capturing Riemann Solver Based on a Parabolic Viscosity Matrix for the Two-Layer Shallow Water System. *J. Sci. Comput.* 48, 1-3 (July 2011).
- [29] FRITZ, H.M., HAGER, W.H., MINOR, H.-E.: Lituya bay case: Rockslide impact and wave run-up. *Science of Tsunami Hazards* 19(1):3-22, 2001.
- [30] FRITZ, H.M.: Initial phase of landslide generated impulse waves. *VAW-Mitteilung 178, Minor, H.-E., ed.* ETH Zurich, Zurich, 2002.
- [31] FRITZ, H.M., HAGER, W.H., MINOR, H.-E.: Landslide generated impulse waves. *Experiments in Fluids*, 35:505-532, 2003.
- [32] FRITZ, H.M., MOSER, P.: Pneumatic landslide generator. *International Journal of Fluid Power*, 4(1):49-57, 2003.
- [33] FRITZ, H.M., HAGER, W.H., MINOR, H.-E.: Near field characteristics of landslide generated impulse waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE 130(6):287-302, 2004.
- [34] HEINRICH, P.: Nonlinear water waves generated by submarine and aerial landslides. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 1992. ASCE 118(3):249-266.
- [35] V. HELLER, W.H. HAGER, H.-E. MINOR: Scale effects in subaerial landslide generated impulse waves. *Experiments in Fluids*, Volume 44, No. 5, 691-703, 2007.
- [36] V. HELLER: Landslide generated impuls waves: Prediction of near field characteristics by Valentin Heller. *Thesis (Doctoral)* ETH/VAW 2007.
- [37] V. HELLER, W.H. HAGER: Wave types of landslide generated impulse waves. *Ocean Engineering*, Volume 38, No. 4. (17 March 2011), pp. 630-640.
- [38] L. GOSSE: A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms, *Comput. Math. Appl.* **39**: 135–159, 2000.
- [39] L. GOSSE: A well-balanced scheme using nonconservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **11**: 339–365, 2001.
- [40] L. GOSSE: Localization effects and measure source terms in numerical schemes for balance laws, *Math. Comp.* **71**: 553–582, 2002.
- [41] S. GOTTLIEB, C.-W. SHU: Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Math. Comp.* **67**, 73–85, 1998.
- [42] J.M. GREENBERG, A.Y. LEROUX: A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations, *SIAM J. Numer. Anal.* **33**: 1–16, 1996.
- [43] J.M. GREENBERG, A.Y. LEROUX, R. BARAILLE, A. NOUSSAIR: Analysis and approximation of conservation laws with source terms, *SIAM J. Numer. Anal.* **34**: 1980–2007, 1997.

- [44] A. HARTEN, B. ENGQUIST, S. OSHER, S. CHAKRAVARTHY: Uniformly High Order Accurate Essentially Non Oscillatory Schemes III, *J. Comput. Phys.* **71**: 231–303, 1987.
- [45] A. HARTEN, J.M. HYMAN: Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* **50**: 235–269, 1983.
- [46] A. HARTEN, P.D. LAX, B. VAN LEER: On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Rev.* **25**: 35–61, 1983.
- [47] T.Y. HOU, P.G. LEFLOCH: Why nonconservative schemes converge to wrong solutions: error analysis, *Math. Comp.* **62**, 497–530, 1994.
- [48] P.G. LEFLOCH: Shock waves for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form, *Institute for Math. and its Appl., Minneapolis*, Preprint 593, 1989.
- [49] P.G. LEFLOCH: Graph solutions of nonlinear hyperbolic systems, *Jour. Hyper. Differ. Equa.* **2** , 643–689, 2004.
- [50] P.G. LEFLOCH, T.-P. LIU: Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form, *Forum Math.* **5**: 261–280, 1993.
- [51] R.J. LEVEQUE: Numerical methods for conservation laws. *Lectures in Mathematics-ETH Zürich*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin (1992).
- [52] R. LEVEQUE: Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: The quasi-steady wave-propagation algorithm, *J. Comput. Phys.* **146**: 346–365, 1998.
- [53] M. LUKACOVA-MEDVIDOVA, S. NOELLE, M. KRAFT: Well-balanced finite volume evolution Galerkin methods for the shallow water equations, *J. Comput. Phys.* **221**: 122–147, 2007.
- [54] A. MARQUINA: Local piecewise hyperbolic reconstructions for nonlinear scalar conservation laws.. *SIAM J. Sci. Comp.* **15**: 892-915, 1994.
- [55] M.L. MUÑOZ, C. PARÉS: Godunov method for nonconservative hyperbolic systems, *Math. Model. Numer. Anal.* **41**: 169–185, 2007.
- [56] S. NOELLE, N. PANKRATZ, G. PUPPO, J.R. NATVIG: Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows. *J. Comput. Phys.* **213** , 474–499, 2006.
- [57] S. NOELLE, Y. XING, C.-W. SHU: High Order Well-balanced Finite Volume WENO Schemes for Shallow Water Equation with Moving Water. *J. Comput. Phys.* **226**: 29–59, 2007.
- [58] C. PARÉS, M.J. CASTRO: On the well-balance property of Roe’s method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to Shallow-Water Systems, *Math. Model. Numer. Anal.* **38**: 821– 852, 2004.
- [59] C. PARÉS: Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework, *SIAM J. Num. Anal.* **44**: 300– 321 , 2006.
- [60] C. PARÉS: Path-conservative numerical methods for nonconservative hyperbolic systems *Quaderni di matematica*, **24**: 67–122, 2009.
- [61] M. PELANTI, F. BOUCHUT, A. MANGENEY: A Roe-Type Scheme For Two-Phase Shallow Granular Flows Over Variable Topography, *Math. Model. Numer. Anal.* **42**, 851–885, 2008.

- [62] B. PERTHAME, C. SIMEONI: A kinetic scheme for the Saint–Venant system with a source term, *Calcolo* **38**: 201–231, 2001.
- [63] B. PERTHAME, C. SIMEONI: Convergence of the upwind interface source method for hyperbolic conservation laws, in *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, Thou and Tadmor, ed., Springer, Berlin, 2003.
- [64] S. RHEBERGEN, O. BOKHOVE, J.J.W. VAN DER VEGT: Discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic nonconservative partial differential equations, *J. Comput. Phys.* **227**: 1887–1922, 2008.
- [65] P.L. ROE: Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *J. Comp. Phys.*, 43 (1981), 357–372.
- [66] P.L. ROE: Upwinding difference schemes for hyperbolic conservation laws with source terms. In Carasso, Raviart, and Serre, editors, *Proceedings of the Conference on Hyperbolic Problems*, 41–51. Springer, 1986.
- [67] G. RUSSO, A. KHE: High order well balanced schemes for systems of balance laws, presented in *HYP2008: 12th International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, CSCAMM, University of Maryland, June 9–13, 2008.
- [68] S.B. SAVAGE AND K. HUTTER: The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *J. Fluid Mech.*, 199:177–215, 1989.
- [69] J.B. SCHIJF, J.C. SCHONFELD: Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water, *Proceedings of the Minn. Int. Hydraulics Conv.*, Joint meeting IAHR and Hyd. Div. ASCE., September, 1953, pp. 321–333.
- [70] C.-W. SHU: *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*, ICASE Report 97-65, 1997.
- [71] C.-W. SHU, S. OSHER: Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. *J. Comput. Phys.* **77**: 439–471, 1988.
- [72] C.-W. SHU, S. OSHER: Efficient Implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II, *J. Comput. Phys.* **83**: 32–78, 1989.
- [73] H. TANG, T. TANG, K. XU: A gas-kinetic scheme for shallow-water equations with source terms. *Angew. Math. Phys.* **55**: 365–382, 2004.
- [74] E.F. TORO: Riemann Solvers and numerical methods for fluid dynamics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [75] E.F. TORO, V.A. TITAREV: MUSTA fluxes for systems of conservation laws, *J. Comput. Phys.* **216**: 403–429, 2006.
- [76] I. TOUMI: A weak formulation of Roe approximate Riemann solver, *J. Comp. Phys.* **102**: 360–373, 1992.
- [77] A.I. VOLPERT: The space BV and quasilinear equations, *Math. USSR Sbornik*, **73**: 225–267, 1967.
- [78] ZWEIFEL, A., HAGER, W.H., MINOR, H.-E.: Plane impulse waves in reservoirs. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*. ASCE 132(5):358–368., 2006.