Aplicaciones de la teoría de juegos a los problemas de reparto

Miguel Ángel Hinojosa Ramos

Málaga, 20 de mayo de 2014

1 Introducción

2 Tasas de intercambio en redes de cajeros automáticos

3 ¿Cómo repartir de acuerdo a una o varias referencias?
- El problema de la bancarrota (¿cómo repartir cuando no hay bastante?)
- Repartir con arreglo a varias referencias

4 El problema de la producción lineal y sus extensiones
- El problema de la producción lineal
- El juego de la producción lineal
- Extensiones del modelo de producción lineal

5 El problema de repartir el coste de ejecución de una ruta
- Juegos de ruta
- Juegos de ruta multiescenario

- Teoría de Juegos
  - Juegos cooperativos
    - Juegos de negociación
    - Juegos de utilidad transferible (TU)
    - Juegos de utilidad no transferible (NTU)
  - Juegos no cooperativos

Núcleo (Gillies(1953))	(estabilidad)	Un subconjunto de R^n
Nucleolo (Schmeidler(1969))	(justicia social)	Un único reparto
Valor de Shapley (Shapley(1953))	(ecuanimidad)	Un único reparto
	Estable si el juego es convexo	Media de las aportaciones marginales
	Jugador Nulo Simetría Aditividad	

- Teoría de Juegos
  - Juegos cooperativos
    - Juegos de negociación
    - Juegos de utilidad transferible (TU)
    - Juegos de utilidad no transferible (NTU)
  - Juegos no cooperativos

Núcleo (Gillies(1953))	(estabilidad)	Un subconjunto de R^n
Nucleolo (Schmeidler(1969))	(justicia social)	Un único reparto
Valor de Shapley (Shapley(1953))	(ecuanimidad)	Un único reparto
	Estable si el juego es convexo	Media de las aportaciones marginales
	Jugador Nulo Simetría Aditividad	

Ejemplo (el profesor visitante)

3 grupos de investigación de Málaga (grupo 1), Sevilla (grupo 2) y Oviedo (grupo 3) quieren invitar a un profesor japonés para dar un curso. Se coordinan para minimizar costes de forma que imparte consecutivamente el curso en Málaga, Sevilla y Oviedo. El problema es repartir el coste de la gira si estiman que los costes de visitar todas las posibles coaliciones son

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$							3000

Ejemplo (el profesor visitante)

3 grupos de investigación de Málaga (grupo 1), Sevilla (grupo 2) y Oviedo (grupo 3) quieren invitar a un profesor japonés para dar un curso. Se coordinan para minimizar costes de forma que imparte consecutivamente el curso en Málaga, Sevilla y Oviedo. El problema es repartir el coste de la gira si estiman que los costes de visitar todas las posibles coaliciones son

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$	1500	1600	1900				3000

Ejemplo (el profesor visitante)

3 grupos de investigación de Málaga (grupo 1), Sevilla (grupo 2) y Oviedo (grupo 3) quieren invitar a un profesor japonés para dar un curso. Se coordinan para minimizar costes de forma que imparte consecutivamente el curso en Málaga, Sevilla y Oviedo. El problema es repartir el coste de la gira si estiman que los costes de visitar todas las posibles coaliciones son

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$	1500	1600	1900	1600	2900	3000	3000

Ejemplo (el profesor visitante)

3 grupos de investigación de Málaga (grupo 1), Sevilla (grupo 2) y Oviedo (grupo 3) quieren invitar a un profesor japonés para dar un curso. Se coordinan para minimizar costes de forma que imparte consecutivamente el curso en Málaga, Sevilla y Oviedo. El problema es repartir el coste de la gira si estiman que los costes de visitar todas las posibles coaliciones son

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$	1500	1600	1900	1600	2900	3000	3000
$v(S)$	0	0	0	1500	500	500	2000

J	123	132	213	231	312	321	$\phi(N,v)$
1	0	0	1500	1500	500	1500	
2	1500	1500	0	0	1500	500	
3	500	500	500	500	0	0	

Ejemplo (el profesor visitante)

3 grupos de investigación de Málaga (grupo 1), Sevilla (grupo 2) y Oviedo (grupo 3) quieren invitar a un profesor japonés para dar un curso. Se coordinan para minimizar costes de forma que imparte consecutivamente el curso en Málaga, Sevilla y Oviedo. El problema es repartir el coste de la gira si estiman que los costes de visitar todas las posibles coaliciones son

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$	1500	1600	1900	1600	2900	3000	3000
$v(S)$	0	0	0	1500	500	500	2000

J	123	132	213	231	312	321	$\phi(N,v)$
1	0	0	1500	1500	500	1500	
2	1500	1500	0	0	1500	500	
3	500	500	500	500	0	0	

Ejemplo (el profesor visitante)

3 grupos de investigación de Málaga (grupo 1), Sevilla (grupo 2) y Oviedo (grupo 3) quieren invitar a un profesor japonés para dar un curso. Se coordinan para minimizar costes de forma que imparte consecutivamente el curso en Málaga, Sevilla y Oviedo. El problema es repartir el coste de la gira si estiman que los costes de visitar todas las posibles coaliciones son

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$	1500	1600	1900	1600	2900	3000	3000
$v(S)$	0	0	0	1500	500	500	2000

J	123	132	213	231	312	321	$\phi(N,v)$
1	0	0	1500	1500	500	1500	$833'\widehat{33}$
2	1500	1500	0	0	1500	500	$833'\widehat{33}$
3	500	500	500	500	0	0	$333'\widehat{33}$

Ejemplo (el profesor visitante)

3 grupos de investigación de Málaga (grupo 1), Sevilla (grupo 2) y Oviedo (grupo 3) quieren invitar a un profesor japonés para dar un curso. Se coordinan para minimizar costes de forma que imparte consecutivamente el curso en Málaga, Sevilla y Oviedo. El problema es repartir el coste de la gira si estiman que los costes de visitar todas las posibles coaliciones son

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$	1500	1600	1900	1600	2900	3000	3000
$v(S)$	0	0	0	1500	500	500	2000

J	123	132	213	231	312	321	$\phi(N,v)$	$\phi(N,c)$
1	0	0	1500	1500	500	1500	$833'\widehat{33}$	$666'\widehat{66}$
2	1500	1500	0	0	1500	500	$833'\widehat{33}$	$766'\widehat{66}$
3	500	500	500	500	0	0	$333'\widehat{33}$	$1566'\widehat{66}$

Nucleolo (Procedimiento de Maschler, Peleg y Shapley(1979) aplicando el algoritmo de Kopelowitz(1967)):

$$
\begin{array}{llcll}
\text{mín} & \varepsilon & & & \\
 & & & & \\
s.a: & 0 & - & x_1 & \leq \varepsilon \\
 & 0 & - & x_2 & \leq \varepsilon \\
 & 0 & - & x_3 & \leq \varepsilon \\
 & & & & \\
 & 1500 & - & (x_1 + x_2) & \leq \varepsilon \\
 & 500 & - & (x_1 + x_3) & \leq \varepsilon \\
 & 500 & - & (x_2 + x_3) & \leq \varepsilon \\
 & & & & \\
 & \multicolumn{4}{c}{x_1 + x_2 + x_3 = 2000} \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0} \\
 & \multicolumn{4}{l}{\varepsilon \text{ libre}}
\end{array}
$$

Nucleolo (Procedimiento de Maschler, Peleg y Shapley(1979) aplicando el algoritmo de Kopelowitz(1967)):

$$\begin{array}{llcccl}
\text{mín} & \varepsilon & & & & = -250 \\
s.a: & 0 & - & x_1 & \leq \varepsilon & \\
 & 0 & - & x_2 & \leq \varepsilon & \\
 & 0 & - & x_3 & \leq \varepsilon & \\
 & 1500 & - & (x_1 + x_2) & \leq \varepsilon & \\
 & 500 & - & (x_1 + x_3) & \leq \varepsilon & \\
 & 500 & - & (x_2 + x_3) & \leq \varepsilon & \\
 & & x_1 + x_2 + x_3 = 2000 & & & \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & & \\
 & \varepsilon \text{ libre} & & & &
\end{array}$$

Nucleolo (Procedimiento de Maschler, Peleg y Shapley(1979) aplicando el algoritmo de Kopelowitz(1967)):

$$
\begin{array}{llcccl}
\text{mín} & \varepsilon & & & & = -250 \\
s.a: & 0 & - & x_1 & \leq \varepsilon & x_1 = 1250 \\
 & 0 & - & x_2 & \leq \varepsilon & x_2 = 500 \\
 & 0 & - & x_3 & \leq \varepsilon & x_3 = 250 \\
 & 1500 & - & (x_1 + x_2) & \leq \varepsilon & \\
 & 500 & - & (x_1 + x_3) & \leq \varepsilon & \\
 & 500 & - & (x_2 + x_3) & \leq \varepsilon & \\
\end{array}
$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2000$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$\varepsilon \text{ libre}$$

Ejemplo (el profesor visitante)

3 grupos de investigación de Málaga (grupo 1), Sevilla (grupo 2) y Oviedo (grupo 3) quieren invitar a un profesor japonés para dar un curso. Se coordinan para minimizar costes de forma que imparte consecutivamente el curso en Málaga, Sevilla y Oviedo. El problema es repartir el coste de la gira si estiman que los costes de visitar todas las posibles coaliciones son

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$	1500	1600	1900	1600	2900	3000	3000
$v(S)$	0	0	0	1500	500	500	2000

J	$\phi(N,v)$	$\phi(N,c)$	$\nu(N,v)$	$\nu(N,c)$
1	$833'\widehat{33}$	$666'\widehat{66}$	1250	250
2	$833'\widehat{33}$	$766'\widehat{66}$	500	1100
3	$333'\widehat{33}$	$1566'\widehat{66}$	250	1650

Littlechild & Owen(1973) [(Baker(1965) y Thompson(1971)]

Otro ejemplo: El problema del aeropuerto

$m = 3,\ N_1 = \{1\},\ N_2 = \{2,3\},\ N_3 = \{4\}$

$$v(S) = \begin{cases} -12 & \text{si} \quad S = \{1\} \\ -28 & \text{si} \quad S \cap N_2 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad 4 \notin S \\ -30 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

12

28

30

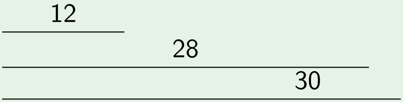
	1	2	3	4
N_1	3	3	3	3
N_2	0	$5'\widehat{33}$	$5'\widehat{33}$	$5'\widehat{33}$
N_3	0	0	0	2
$\phi(N,v)$	3	$8'\widehat{33}$	$8'\widehat{33}$	$10'\widehat{33}$
$\nu(N,v)$	6	$7'\widehat{33}$	$7'\widehat{33}$	$9'\widehat{33}$

Littlechild & Owen(1973)   [(Baker(1965) y Thompson(1971)]

Otro ejemplo: El problema del aeropuerto

$m = 3,\ N_1 = \{1\},\ N_2 = \{2,3\},\ N_3 = \{4\}$

$$v(S) = \begin{cases} -12 & \text{si} \quad S = \{1\} \\ -28 & \text{si} \quad S \cap N_2 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad 4 \notin S \\ -30 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



	1	2	3	4
N_1	3	3	3	3
N_2	0	$5'\widehat{33}$	$5'\widehat{33}$	$5'\widehat{33}$
N_3	0	0	0	2
$\phi(N,v)$	3	$8'\widehat{33}$	$8'\widehat{33}$	$10'\widehat{33}$
$\nu(N,v)$	6	$7'\widehat{33}$	$7'\widehat{33}$	$9'\widehat{33}$

CONS: Consistencia

NAMS: No Advantage for Merging or Spliting

Reglas \ Propiedades	CONS	NAMS
"Corre al banco"	No	No
Talmud	Sí	No
Proporcional	Sí	Sí

Ejemplo

(E, c), con $E = 200$, $c_1 = 100$, $c_2 = 200$ y $c_3 = 400$

$f(E,c)$	$T(E,c)$	$P(E,c)$
$(33'\widehat{33}, 83'\widehat{33}, 83'\widehat{33})$	$(50, 75, 75)$	$(28'57, 57'14, 114'29)$

El agente 2 se va con su asignación: $\hat{E}$:

$116'\widehat{66}$	125	$142'86$

$f(\hat{E}, \{c_1, c_3\})$	$T(\hat{E}, \{c_1, c_3\})$	$P(\hat{E}, \{c_1, c_3\})$
$(50, 66'\widehat{66})$	$(50, 75)$	$(28'57, 114'29)$

El agente 3 separa sus reclamaciones:

$\hat{c}_1 = 100$, $\hat{c}_2 = 200$ y $\hat{c}_3 = 200$, $\hat{c}_4 = 200$

$f(E,\hat{c})$	$T(E,\hat{c})$	$P(E,\hat{c})$
$(25, 58'\widehat{33}, 58'\widehat{33}, 58'\widehat{33})$	$(50, 50, 50, 50)$	$(28'58, 57'14, 57'14, 57'14)$

CONS: Consistencia
NAMS: No Advantage for Merging or Spliting

Propiedades / Reglas	CONS	NAMS
"Corre al banco"	No	No
Talmud	Sí	No
Proporcional	Sí	Sí

Ejemplo

(E, c), con $E = 200$, $c_1 = 100$, $c_2 = 200$ y $c_3 = 400$

$f(E,c)$	$T(E,c)$	$P(E,c)$
$(33'\widehat{33}, 83'\widehat{33}, 83'\widehat{33})$	$(50, 75, 75)$	$(28'57, 57'14, 114'29)$

El agente 2 se va con su asignación: $\hat{E}$:

$116'\widehat{66}$	125	$142'86$

$f(\hat{E}, \{c_1, c_3\})$	$T(\hat{E}, \{c_1, c_3\})$	$P(\hat{E}, \{c_1, c_3\})$
$(50, 66'\widehat{66})$	$(50, 75)$	$(28'57, 114'29)$

El agente 3 separa sus reclamaciones:

$\hat{c}_1 = 100$, $\hat{c}_2 = 200$ y $\hat{c}_3 = 200$, $\hat{c}_4 = 200$

$f(E,\hat{c})$	$T(E,\hat{c})$	$P(E,\hat{c})$
$(25, 58'\widehat{33}, 58'\widehat{33}, 58'\widehat{33})$	$(50, 50, 50, 50)$	$(28'58, 57'14, 57'14, 57'14)$

CONS: Consistencia
NAMS: No Advantage for Merging or Spliting

Reglas \ Propiedades	CONS	NAMS
"Corre al banco"	No	No
Talmud	Sí	No
Proporcional	Sí	Sí

Ejemplo

(E, c), con $E = 200$, $c_1 = 100$, $c_2 = 200$ y $c_3 = 400$

$f(E,c)$	$T(E,c)$	$P(E,c)$
$(33'\widehat{33}, 83'\widehat{33}, 83'\widehat{33})$	$(50, 75, 75)$	$(28'57, 57'14, 114'29)$

El agente 2 se va con su asignación: $\hat{E}$: $116'\widehat{66}$ | 125 | $142'86$

$f(\hat{E}, \{c_1, c_3\})$	$T(\hat{E}, \{c_1, c_3\})$	$P(\hat{E}, \{c_1, c_3\})$
$(50, 66'\widehat{66})$	$(50, 75)$	$(28'57, 114'29)$

El agente 3 separa sus reclamaciones:
$\hat{c}_1 = 100$, $\hat{c}_2 = 200$ y $\hat{c}_3 = 200$, $\hat{c}_4 = 200$

$f(E,\hat{c})$	$T(E,\hat{c})$	$P(E,\hat{c})$
$(25, 58'\widehat{33}, 58'\widehat{33}, 58'\widehat{33})$	$(50, 50, 50, 50)$	$(28'58, 57'14, 57'14, 57'14)$

CONS: Consistencia
NAMS: No Advantage for Merging or Spliting

Propiedades / Reglas	CONS	NAMS
"Corre al banco"	No	No
Talmud	Sí	No
Proporcional	Sí	Sí

Ejemplo

(E, c), con $E = 200$, $c_1 = 100$, $c_2 = 200$ y $c_3 = 400$

$f(E,c)$	$T(E,c)$	$P(E,c)$
$(33'\widehat{33}, 83'\widehat{33}, 83'\widehat{33})$	$(50, 75, 75)$	$(28'57, 57'14, 114'29)$

El agente 2 se va con su asignación: $\hat{E}$:

$116'\widehat{66}$	125	$142'86$

$f(\hat{E}, \{c_1, c_3\})$	$T(\hat{E}, \{c_1, c_3\})$	$P(\hat{E}, \{c_1, c_3\})$
$(50, 66'\widehat{66})$	$(50, 75)$	$(28'57, 114'29)$

El agente 3 separa sus reclamaciones:

$\hat{c}_1 = 100$, $\hat{c}_2 = 200$ y $\hat{c}_3 = 200$, $\hat{c}_4 = 200$

$f(E,\hat{c})$	$T(E,\hat{c})$	$P(E,\hat{c})$
$(25, 58'\widehat{33}, 58'\widehat{33}, 58'\widehat{33})$	$(50, 50, 50, 50)$	$(28'58, 57'14, 57'14, 57'14)$

1 Introducción

2 Tasas de intercambio en redes de cajeros automáticos

3 ¿Cómo repartir de acuerdo a una o varias referencias?

4 El problema de la producción lineal y sus extensiones

5 El problema de repartir el coste de ejecución de una ruta

Hinojosa M.A., Mármol A.M., Thomas L.(2005) A Multi-Objective Model for Bank ATM Networks *Naval Research Logistics 52: 165-177, 2005.*

Situación:

- Cada banco tiene sus propios cajeros, pero es ventajoso conectar sus cajeros automáticos en redes para que los clientes de un determinado banco puedan usar los cajeros automáticos de cualquier banco en la red.
- Hay que repartir entre los bancos el coste total del servicio.

- R_j es el coste real del servicio de cajeros que tiene el banco j.

El coste total del servicio:

$$c(N) = \sum_{j \in N} R_j = \sum_{j \in N} \left(d_j t_j + m_j k + \sum_{i \in N} c_{ij} n_{ij} \right)$$

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de bancos que intervienen.
- d_j es el coste fijo anual de mantenimiento del cajero para el banco j.
- t_j número total de cajeros del banco j.
- c_{ij} es el coste variable de transacción de un cliente del banco i usando un cajero del banco j.
- n_{ij} es el número anual de transacciones que realizan los clientes del banco i en cajeros del banco j.
- k es el coste medio de la operación de retirada de dinero de un banco que no sea mediante un cajero automático.
- m_j es el número anual de transacciones de retirada de dinero de un banco que no sea mediante un cajero automático.

Para formalizar el problema como un juego hay que contemplar la situación en la que uno o más de los bancos integrantes dejen de pertenecer a la red.

Si un banco sale de la red entonces hay que ver lo que hacen los clientes de los bancos que aún permanecen en la coalición y que usaban cajeros del banco que abandona.
Se supone que:

- Una fracción 1 - α de estas transacciones se reemplazarán por otros medios que no son cajeros automaticos.
- Una fracción α de estas transacciones se realizarán en otros cajeros de los bancos que permanecen en la red.

El coste para cada coalición viene dado por:

$$c(S) = \sum_{j \in S} \left(d_j t_j + m_j(S)k + \sum_{i \in S} c_{ij} n_{ij}(S) \right), \forall S \subseteq N$$

donde:

- $m_j(S) = m_j + (1-\alpha) \sum_{k \notin S} n_{jk}$, con $j \in S$.
  (número de operaciones que no son de cajero automático de los clientes de j cuando la red está formada por los bancos de S).
- $n_{ij}(S) = n_{ij} + \alpha \sum_{k \notin S} n_{ik} \frac{n_{ij}}{\sum_{r \in S} n_{ir}}$, con $i, j \in S$.
  (número de operaciones de los clientes del banco i utilizando un cajero del banco j, cuando la red consiste en los bancos de S, y tanto i como j son de S).

El siguiente caso está basado en los datos obtenidos para una red de cuatro bancos en el Reino Unido.

- $d_j = d = 8500$ anual
- $k = 0,75$ por transacción
- $t_1 = 2672$
- $t_2 = 2439$
- $t_3 = 398$
- $t_4 = 778$

- $c_{ij} = \begin{cases} 0,15 \text{ por transacción} & si \quad i = j \\ 0,25 \text{ por transacción} & si \quad i \neq j \end{cases}$

- n_{ij} puede verse en Tabla 1
- $m_j = 0$ para todos los bancos
- $\alpha = 0,65$

Volumen		Cajeros de los bancos				
		1	2	3	4	Total
Clientes	1	157	30	0,7	3,2	190,9
	2	35	134	0,9	3,5	173,4
	3	2,2	1,6	32	7,5	43,3
	4	6,6	4,7	6,6	49	66,9
	Total	280,8	170,3	40,2	63,2	474,5

Tabla 1: Número de operaciones de clientes del banco i en cajeros del banco j (en millones).

Juego Cooperativo (N, c), donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$ son los 4 bancos de Reino Unido y $c(S)$ la función característica asociada a cada banco o coalición de bancos:

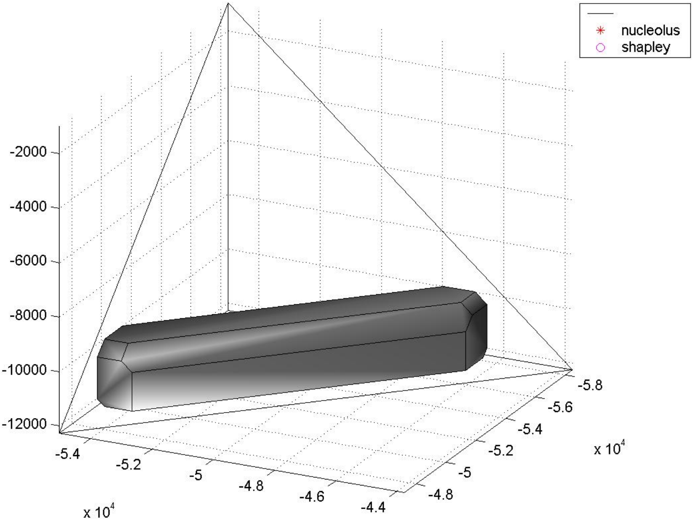
Jugadores	Costes	Jugadores	Costes	Jugadores	Costes
$\{1\}$	58.466.000	$\{2\}$	55.015.500	$\{3\}$	12.251.000
$\{4\}$	20.407.000	$\{1,2\}$	106.431.399	$\{1,3\}$	70.455.629
$\{1,4\}$	77.922.049	$\{2,3\}$	67.038.220	$\{2,4\}$	74.654.993
$\{3,4\}$	31.241.088	$\{1,2,3\}$	118.122.337	$\{1,2,4\}$	124.859.892
$\{1,3,4\}$	88.312.290	$\{2,3,4\}$	85.129.881	$\{1,2,3,4\}$	134.864.500

- $c(S)$ es el coste que se puede asegurar la coalición S por sí misma.

Juego Cooperativo (N, c), donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$ son los 4 bancos de Reino Unido y $c(S)$ la función característica asociada a cada banco o coalición de bancos:

Jugadores	Costes	Jugadores	Costes	Jugadores	Costes
$\{1\}$	58.466.000	$\{2\}$	55.015.500	$\{3\}$	12.251.000
$\{4\}$	20.407.000	$\{1, 2\}$	106.431.399	$\{1, 3\}$	70.455.629
$\{1, 4\}$	77.922.049	$\{2, 3\}$	67.038.220	$\{2, 4\}$	74.654.993
$\{3, 4\}$	31.241.088	$\{1, 2, 3\}$	118.122.337	$\{1, 2, 4\}$	124.859.892
$\{1, 3, 4\}$	88.312.290	$\{2, 3, 4\}$	85.129.881	$\{1, 2, 3, 4\}$	134.864.500

- $c(S)$ es el coste que se puede asegurar la coalición S por sí misma.


nucleolus
shapley
-2000
-4000
-6000
-8000
-10000
-12000
-5.4
-5.2
-5
-4.8
-4.6
-4.4
x 10^4
-5.8
-5.6
-5.4
-5.2
-5
-4.8
x 10^4

El reparto del valor de Shapley:

x_1	x_2	x_3	x_4
54.173.971	50.850.591	11.179.943	18.659.995

El nucleolo es el reparto:

x_1	x_2	x_3	x_4
54.238.953	50.788.453	11.127.804	18.709.290

Jugador	Costes actuales (R)	Valor de Shapley (ϕ)	Nucleolo (η)	Diferencias	
				$\phi_i - R_i$	$\eta_i - R_i$
{1}	56.717.000	54.173.971	54.238.953	-2.543.029	-2.478.047
{2}	50.061.500	50.850.591	50.788.453	789.091	726.953
{3}	10.388.000	11.179.943	11.127.804	791.944	739.804
{4}	17.698.000	18.659.995	18.709.290	961.995	1.011.290

- Como puede observarse, para ajustar los costes actuales a los costes teóricos que se obtienen, los bancos 2,3 y 4 tendrían que pagar al banco 1 que está asumiendo costes más altos de lo que le corresponde.

- Lo habitual es usar **tasas de intercambio por transacción**: Cada coalición impone una tasa por cada transacción que realizan los clientes de los otros bancos de la coalición en sus cajeros.
- Denotamos f_{ij} a la tasa que se paga al banco j por cada transacción que realizan en sus cajeros los clientes del banco i.
- Tiene que cumplirse:

$$x_j - R_j = \sum_{i, i \neq j} n_{ji} f_{ji} - \sum_{i, i \neq j} n_{ij} f_{ij}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

- Pueden considerarse distintos tipos de tasas de intercambio para una misma división de los costes totales entre los bancos:
  1. $f_{ij} = f, \forall i \neq j$ (Tasas de intercambio uniformes)
  2. $f_{ij} = f_j, \forall i \neq j$ (Tasas uniformes por el uso de los cajeros de un banco por los clientes de los otros bancos)
  3. $f_{ij} = f_i, \forall i \neq j$ (Tasas uniformes para los clientes de un banco en cualquiera de los cajeros de los otros bancos)
  4. $f_{ij} = f_{ji}, \forall i \neq j$ **(Tasas de intercambio bilaterales simétricas)**

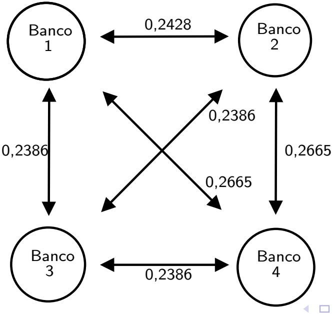
En el caso de la red formada por los cuatro bancos de Reino Unido:

Para la distribución de costes que proporciona el valor de Shapley, las tasas de intercambio bilaterales simétricas son:

$f_{12} = 0,2428$ $\quad f_{13} = 0,2386$ $\quad f_{14} = 0,2565$

$f_{23} = 0,2386$ $\quad f_{24} = 0,2665$ $\quad f_{34} = 0,2386$

Gráficamente:



1 Introducción

2 Tasas de intercambio en redes de cajeros automáticos

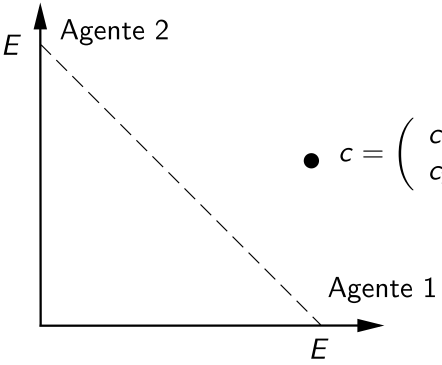
3 ¿Cómo repartir de acuerdo a una o varias referencias?

4 El problema de la producción lineal y sus extensiones

5 El problema de repartir el coste de ejecución de una ruta

El problema de la bancarrota: (E, c), $E \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{R}^n_+$

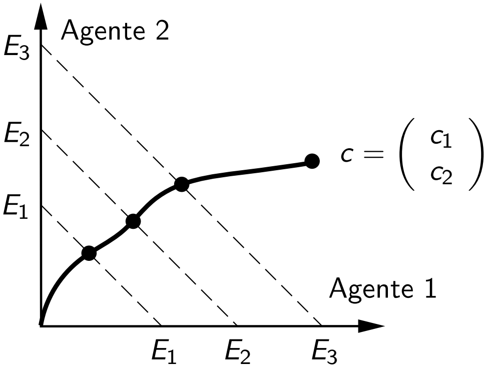
¿Cómo repartir cuando no hay bastante?



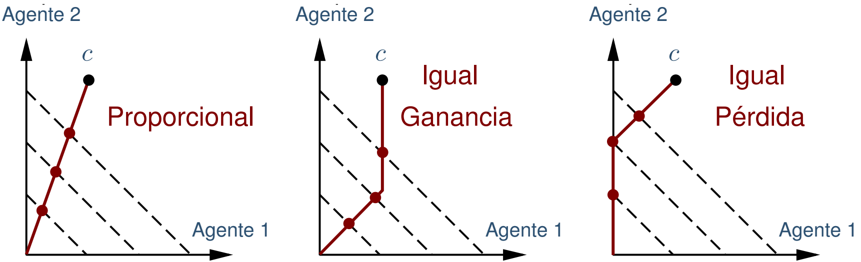
$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Regla de reparto para un

problema de la bancarrota: $f(E,c) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n f_i(E,c) = E$.



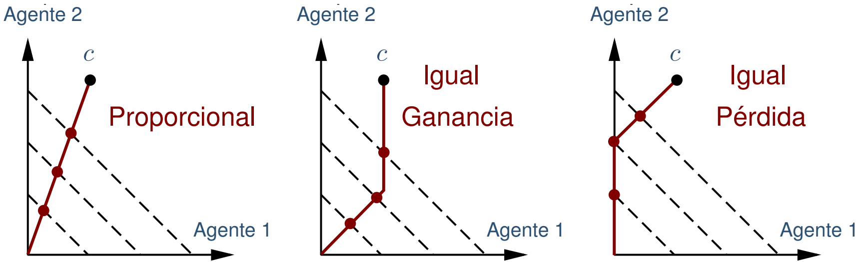
Algunos ejemplos de reglas de reparto:



"Los tres mosqueteros"

Herrero, C., Villar, A (2001) "The Three Musketeers": Four Classical Solutions to Bankruptcy Problems. Mathemathical Social Sciences, 42: 307-328

Algunos ejemplos de reglas de reparto:



"Los tres mosqueteros"
Herrero, C., Villar, A (2001) "The Three Musketeers": Four Classical Solutions to Bankruptcy Problems. Mathemathical Social Sciences, 42: 307-328

- Igual tratamiento de iguales
  - Los agentes que reclaman lo mismo deben obtener lo mismo
- Homogeneidad
  - $f(\lambda E, \lambda \mathbf{c}) = \lambda f(E, \mathbf{c})$
- Consistencia (CONS)
  - Para cada N, cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $N' \subset N$, si $x = f(E, \mathbf{c})$, entonces $x_{N'} = f\left(\sum_{i \in N'} x_i, \mathbf{c}_{N'}\right)$
- Composición hacia arriba
  - Para cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $\sum_{i \in N} c_i > E' > E$, $f(E', \mathbf{c}) = f(E, \mathbf{c}) + f\left(E' - E, \mathbf{c} - f(E, \mathbf{c})\right)$.
- Composición hacia abajo
  - Para cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $E' < E$, $f(E', \mathbf{c}) = f(E', f(E, \mathbf{c}),)$.

"Los tres mosqueteros" son las únicas reglas que verifican:

Igual tratamiento de iguales	Los agentes que reclaman lo mismo deben obtener lo mismo
Homogeneidad	$f(\lambda E, \lambda \mathbf{c}) = \lambda f(E, \mathbf{c})$
Consistencia (CONS)	Para cada N, cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $N' \subset N$, si $x = f(E, \mathbf{c})$, entonces $x_{N'} = f\left(\sum_{i \in N'} x_i, \mathbf{c}_{N'}\right)$
Composición hacia arriba	Para cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $\sum_{i \in N} c_i > E' > E$, $f(E', \mathbf{c}) = f(E, \mathbf{c}) + f\big(E' - E, \mathbf{c} - f(E, \mathbf{c})\big)$.
Composición hacia abajo	Para cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $E' < E$, $f(E', \mathbf{c}) = f(E', f(E, \mathbf{c}),)$.

- Igual tratamiento de iguales
- Homogeneidad
- Consistencia (CONS)
- Composición hacia arriba
- Composición hacia abajo

- Los agentes que reclaman lo mismo deben obtener lo mismo.
- $f(\lambda E, \lambda \mathbf{c}) = \lambda f(E, \mathbf{c})$
- Para cada N, cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $N' \subset N$, si $x = f(E, \mathbf{c})$, entonces $x_{N'} = f\left(\sum_{i \in N'} x_i, \mathbf{c}_{N'}\right)$
- Para cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $\sum_{i \in N} c_i > E' > E$, $f(E', \mathbf{c}) = f(E, \mathbf{c}) + f\big(E' - E, \mathbf{c} - f(E, \mathbf{c})\big)$.
- Para cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $E' < E$, $f(E', \mathbf{c}) = f(E', f(E, \mathbf{c}),)$.

Igual tratamiento de iguales	Los agentes que reclaman lo mismo deben obtener lo mismo.
Homogeneidad	$f(\lambda E, \lambda \mathbf{c}) = \lambda f(E, \mathbf{c})$
Consistencia (CONS)	Para cada N, cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $N' \subset N$, si $x = f(E, \mathbf{c})$, entonces $x_{N'} = f\left(\sum_{i \in N'} x_i, \mathbf{c}_{N'}\right)$
Composición hacia arriba	Para cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $\sum_{i \in N} c_i > E' > E$, $f(E', \mathbf{c}) = f(E, \mathbf{c}) + f\left(E' - E, \mathbf{c} - f(E, \mathbf{c})\right)$
Composición hacia abajo	Para cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $E' < E$, $f(E', \mathbf{c}) = f(E', f(E, \mathbf{c}),)$.

- Igual tratamiento de iguales
- Homogeneidad
- Consistencia (CONS)
- Composición hacia arriba
- Composición hacia abajo

- Los agentes que reclaman lo mismo deben obtener lo mismo.
- $f(\lambda E, \lambda \mathbf{c}) = \lambda f(E, \mathbf{c})$
- Para cada N, cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $N' \subset N$, si $x = f(E, \mathbf{c})$, entonces $x_{N'} = f\left(\sum_{i \in N'} x_i, \mathbf{c}_{N'}\right)$
- Para cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $\sum_{i \in N} c_i > E' > E$, $f(E', \mathbf{c}) = f(E, \mathbf{c}) + f\big(E' - E, \mathbf{c} - f(E, \mathbf{c})\big)$.
- Para cada $(E, \mathbf{c})$ y cada $E' < E$, $f(E', \mathbf{c}) = f(E', f(E, \mathbf{c}),)$

- Preservación del orden
- Si $c_i \geq c_j$, entonces $f_i(E, \mathbf{c}) \geq f_j(E, \mathbf{c})$

- Continuidad
- Si $(E^\nu, \mathbf{c}^\nu) \longrightarrow (E, \mathbf{c})$, entonces $f(E^\nu, \mathbf{c}^\nu) \longrightarrow f(E, \mathbf{c})$

- Anonimato
- $f_{\pi(i)}(E, \mathbf{c}_\pi) = f_i(E, \mathbf{c})$

La regla proporcional es la única que verifica:

No Advantage for Merging or Spliting (NAMS)

- Preservación del orden
- Si $c_i \geq c_j$, entonces $f_i(E, \mathbf{c}) \geq f_j(E, \mathbf{c})$

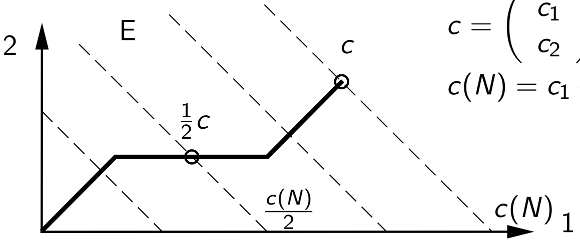
- Continuidad
- Si $(E^\nu, \mathbf{c}^\nu) \longrightarrow (E, \mathbf{c})$, entonces $f(E^\nu, \mathbf{c}^\nu) \longrightarrow f(E, \mathbf{c})$

- Anonimato
- $f_{\pi(i)}(E, \mathbf{c}_\pi) = f_i(E, \mathbf{c})$

La regla proporcional es la única que verifica:

No Advantage for Merging or Spliting (NAMS)

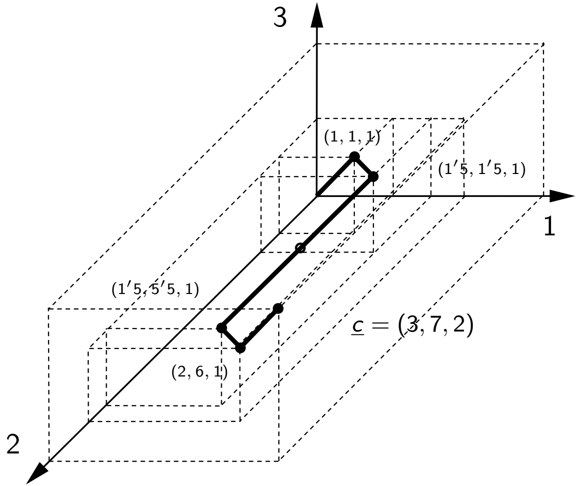
Regla del Talmud (D'Artagnan)



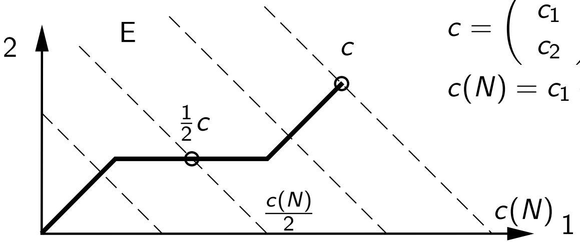
$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$c(N) = c_1 + c_2$$

Regla del Talmud



Regla del Talmud



$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$c(N) = c_1 + c_2$$

- **CONS**
- **Igual tratamiento de iguales**
- **Composición desde mínimos derechos**
- **Independencia del truncamiento de las reclamaciones**

Regla "Corre al banco"

$$f_i(E,c) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \text{mín}\left\{ c_i, \text{máx}\left\{0, E - \sum_{j \in P^\pi(i)} c_j\right\}\right\}$$

- **Igual tratamiento de iguales**
- **Preservación del orden**
- **Anonimato**
- **Continuidad**
- **Homogeneidad**
- **Independencia del truncamiento de las reclamaciones**

Juego de bancarrota de O'Neill(1982)

$$v(S) := \max\left\{0, E - \sum_{i \notin S} c_i\right\}.$$

Problema de bancarrota

$$(E, c)$$

Reclamaciones truncadas

$$(E, \bar{c}),$$

donde $\bar{c}_i := \min\{c_i, E\}$.

(Independencia de truncamiento de las reclamaciones)

Teorema (Curiel et al.(1987))

Una regla de división f para problemas de bancarrota es una regla de reparto del juego de mínimos derechos de O'Neill si y solo si, para cada problema de bancarrota, (E, c), $f(E, c) = f(E, \bar{c})$.

Juego de bancarrota de O'Neill(1982)

$$v(S) := \text{máx}\left\{0, E - \sum_{i \notin S} c_i\right\}.$$

Problema de bancarrota

$$(E, c)$$

Reclamaciones truncadas

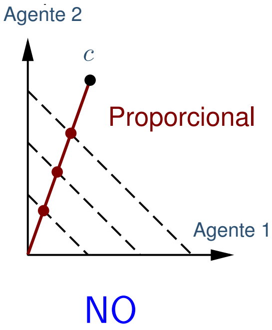
$$(E, \bar{c}),$$

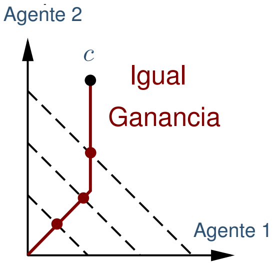
$$\text{donde } \bar{c}_i := \text{mín}\left\{c_i, E\right\}.$$

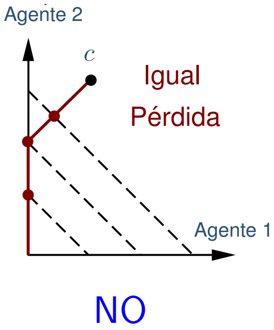
(Independencia de truncamiento de las reclamaciones)

Teorema (Curiel et al.(1987))

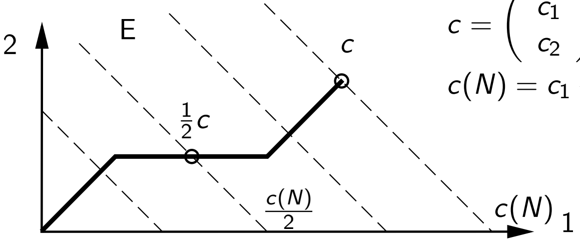
Una regla de división f para problemas de bancarrota es una regla de reparto del juego de mínimos derechos de O'Neill si y solo si, para cada problema de bancarrota, (E, c), $f(E, c) = f(E, \bar{c})$.


Agente 2
c
Proporcional
Agente 1
NO


Agente 2
c
Igual
Ganancia
Agente 1


Agente 2
c
Igual
Pérdida
Agente 1
NO

Regla del Talmud



$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

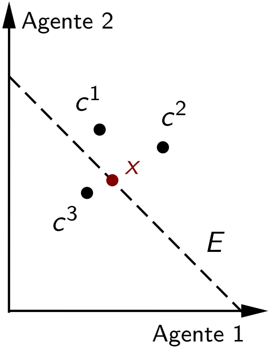
$$c(N) = c_1 + c_2$$

SI: $T(E,c) = \nu(N,v)$ (Aumann y Mashler(1985)) (Benoît(1997))

Regla "Corre al banco"

$$f_i(E,c) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \min\left\{ c_i, \max\left\{0, E - \sum_{j \in P^\pi(i)} c_j\right\}\right\}$$

SI: $f(E,c) = Sh(N,v)$



Referencias múltiples

- Diferentes valoraciones de los derechos.
- División bajo incertidumbre.
- Reclamaciones sobre diferentes bienes.

- Proporcionalidad generalizada
  - Ju B-G., Miyagawa E., Sakai T. (2007) Non-manipulable division rules in reference problems and generalizations. Journal of Economic Theory 132, pp.1-26.
- Bancarrota con múltiples referencias
  - Pulido M., Borm P., Hendrickx R., Llorca N., Sánchez-Soriano J. (2008) Compromise solutions for bankruptcy situations with references. Annals of Operations Research, 158, 133-141.
  - Pulido M., Sánchez-Soriano J., LLorca N.(2002) Game theory techniques for University management: and extended bankruptcy model. Annals of Operations Research, 102, 129-142.
- Interval Bankruptcy Games
  - Branzei R., Dimitrov D., Pickl S., Tijs S. (2004) How to cope with division problems under interval uncertainty claims?. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 12, (2), 191 - 200.

Multi-issue Allocation

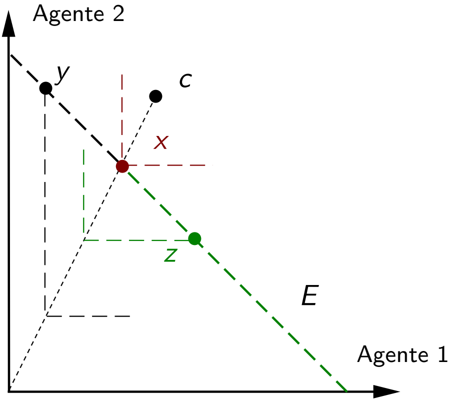
- Moreno-Ternero J.D. (2009) The Proportional Rule for Multi-Issue Bankruptcy Problems. Economics Bulletin 29, 483-490.
- Lorenzo-Freire, Casas-Méndez, Hendrickx (2009). The two-stage constrained equal awards and losses rules for multi-issue allocation situations. TOP
- Lorenzo-Freire, Alonso-Meijide, Casas-Méndez, Hendrickx (2007). Balanced contributions for TU games with awards and applications. European Journal of Operational Research, 182 , 958-964.
- González-Alcón, C., Borm, P., Hendrickx, R. (2007) A composite run-to-the-bank rule for multi-issue allocation situations. Methods of Operations Research, 65, 339-352.
- Calleja P., Borm P., Hendrickx R. (2005) Multi-issue allocation situations. European Journal of Operational research 164, 730-747.

- Hinojosa, M.A., Mármol A.M., Sánchez, F. (2012) A consistent talmudic rule for division problems with multiple references. TOP 20, 661-678.
- Hinojosa, M.A., Mármol A.M., Sánchez, F (2013). Extended proportionality in division problems with multiple references. ANOR 206, 1, 183-195.
- Hinojosa, M.A., Mármol A.M., Sánchez, F. (2014) Leximin rules for bankruptcy problems under uncertainty". International Journal of Systems Science 14 (1), 20- 28.
- Hinojosa, M.A., Mármol A.M. (2014). Multi-commodity rationing problems with maxmin payoffs. MMOR (En 2ª revisión).

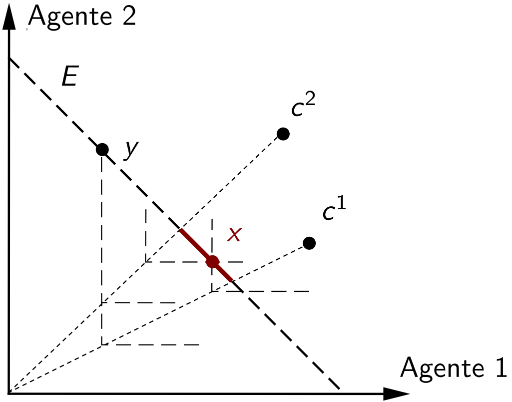
- Hinojosa, M.A., Mármol A.M., Sánchez, F. (2012) A consistent talmudic rule for division problems with multiple references. TOP 20, 661-678.
- Hinojosa, M.A., Mármol A.M., Sánchez, F (2013). Extended proportionality in division problems with multiple references. ANOR 206, 1, 183-195.
- Hinojosa, M.A., Mármol A.M., Sánchez, F. (2014) Leximin rules for bankruptcy problems under uncertainty". International Journal of Systems Science 14 (1), 20- 28.
- Hinojosa, M.A., Mármol A.M. (2014). Multi-commodity rationing problems with maxmin payoffs. MMOR (En 2ª revisión).

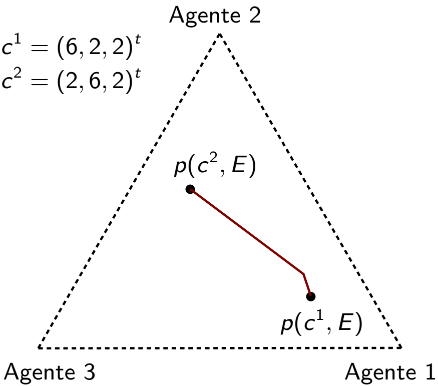
Regla proporcional:

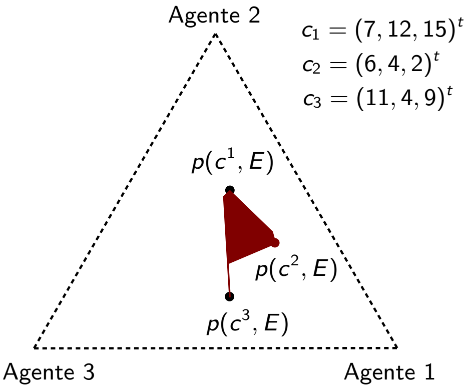
$$p(E, \mathbf{c}) = arg\ max_{x \in X(E)} \left\{ min_{i \in N} \left\{ \frac{x_i}{c_i} \right\} \right\}$$



El reparto $x \in X(E)$ es **ratio-eficiente** si no hay otro reparto $y \in X(E)$, $y \neq x$, tal que $min_{i \in N} \left\{ \frac{y_i}{c_i^j} \right\} \geq min_{i \in N} \left\{ \frac{x_i}{c_i^j} \right\}$ for all $j \in M$.







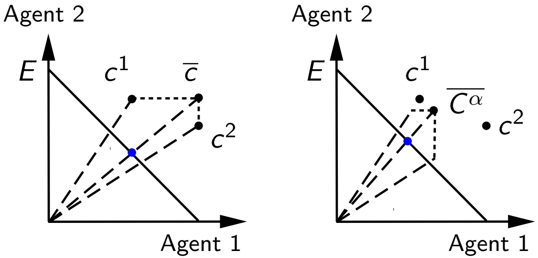
El conjunto de asignaciones ratio-eficientes no es un conjunto convexo, si es conexo y contiene a las soluciones proporcionales de cada referencia.

Teorema

La regla R es ratio eficiente si y solo si para cada $(C, E) \in \mathcal{D}_N^M$, existe $\alpha : \mathbb{R}^{N \times M} \to \Delta^{|M|-1}$, tal que

$$R(C, E) = p(\overline{C^\alpha}, E),$$

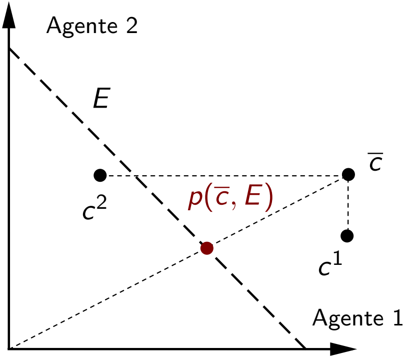
donde $C^\alpha \in \mathbb{R}_{++}^{N \times M}$, $(c^\alpha)_i^j = \alpha^j(C, E) c_i^j$ para cada $i \in N$ y $j \in M$.



Reglas regulares:
La regla max-proporcional

$$\overline{P}(C,E) = p(\overline{c},E), \text{ donde}$$

$$\overline{c} = (max_{j\in M}\{c_i^j\})_{i\in N}.$$



Las reglas proporcionales regulares satisfacen:

Homogeneidad
Anonimato
Consistencia

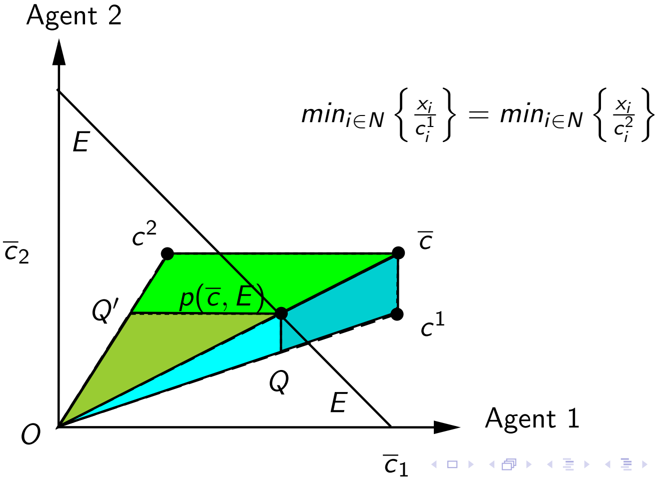
La regla max-proporcional es la única de ellas que satisface

Neutralidad:

Para cada $(C,E)\in\mathcal{D}_N^M$ y cada $\sigma\in\Pi^M$, si $x=R(C,E)$, entonces $x=R(C^\sigma,E)$.

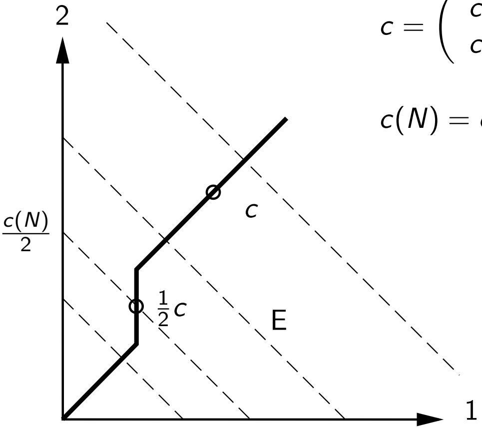
Teorema

La regla max-proporcional es la única regla que maximiza las mínimas proporciones alcanzadas por los agentes respecto a todas las referencias.



Extendiendo la regla del Talmud a partes iguanas: Todavía coincide con $\nu(N, v)$ (Serrano (1995)), donde

$$v(S) := \max\{0, E - \sum_{i \notin S} c_i\}$$



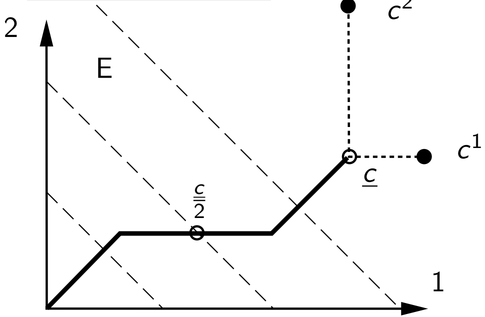
$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$c(N) = c_i + c_2$$

Caso de referencias múltiples:

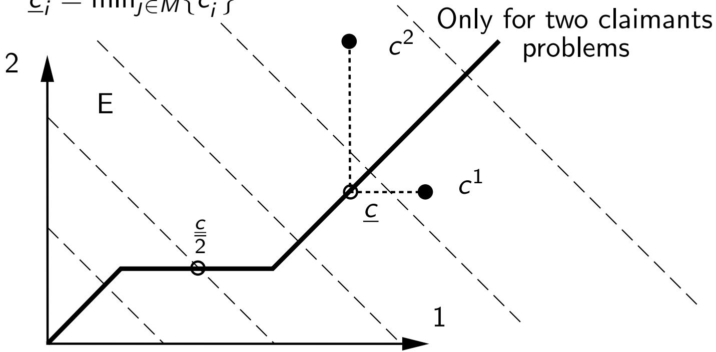
$$MT(C,E) = \nu(N, v_{\text{máx}})$$

$$\boxed{\underline{c}_i = \text{mín}_{j\in M}\{c_i^j\}}$$

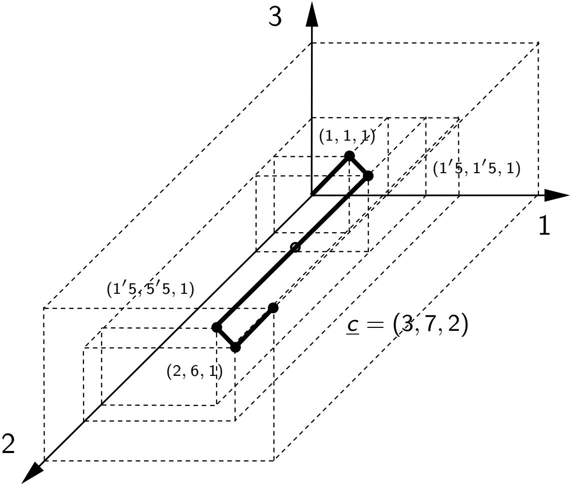


$$MT(C, E) = \nu(N, v_{\text{máx}})$$

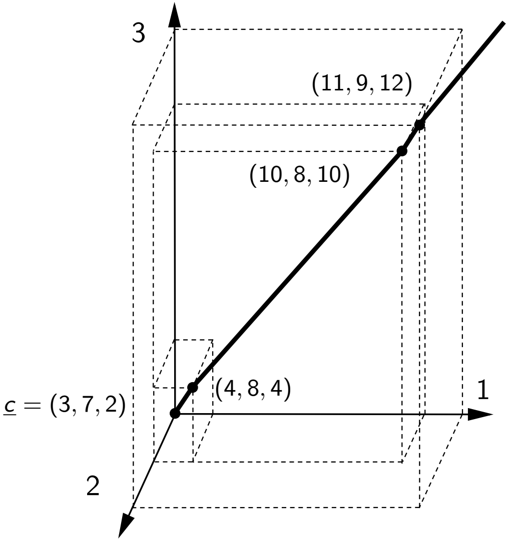
$\underline{c}_i = \text{mín}_{j \in M}\{c_i^j\}$



$$MT(C,E) = \nu(N, v_{\text{máx}})$$



$$C = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 7 & 9 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$


3
(11, 9, 12)
(10, 8, 10)
(4, 8, 4)
1
$\underline{c} = (3, 7, 2)$
2

1. Introducción
2. Tasas de intercambio en redes de cajeros automáticos
3. ¿Cómo repartir de acuerdo a una o varias referencias?
4. El problema de la producción lineal y sus extensiones
5. El problema de repartir el coste de ejecución de una ruta

El problema de producción lineal

$$\left.\begin{array}{ll} max & \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ s.a: & A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}; \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m_{++},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p_{+},\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p_{+},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

El problema de producción lineal

$$\left.\begin{array}{ll} max & \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ s.a: & A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}; \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m_{++},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p_+,\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p_+,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

El problema de producción lineal

$$\left.\begin{array}{ll} max & \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ s.a: & A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}; \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m_{++},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p_+,\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p_+,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

El problema de producción lineal

$$\left.\begin{array}{ll} max & \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ s.a: & A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}; \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m_{++},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p_{+},\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p_{+},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

El problema de producción lineal

$$\left.\begin{array}{ll} max & \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ s.a: & A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}; \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m_{++},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p_{+},\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p_{+},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

Un problema de producción

$$
\begin{array}{ll}
max & 2{,}5y_1 + 5y_2 + 4y_3 \\
s.a.: & 2y_1 + 9y_2 + 3{,}5y_3 \leq 430 \\
 & 6y_1 + 4y_2 + 9y_3 \leq 410 \\
 & 8y_1 + 9y_2 + 7y_3 \leq 570 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$
y_N^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 36{,}3432 \\ 29{,}4029 \end{pmatrix}
$$

Beneficio optimo: 299,328 u.m.

El juego de la producción lineal

$$[p_S] \qquad \left.\begin{array}{ll} max & \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ s.a: & A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}(S); \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{array}\right\} \qquad b(S) = \sum_{i \in S} b^i$$

$$\begin{array}{l} v(\emptyset) = 0; \\ v(S) = \mathbf{c}^t\mathbf{y}^*(S), \quad \forall\, S \subseteq N; \end{array}$$

donde $\mathbf{y}^*(S)$ es una solución óptima del problema $[p_S]$.

Los agentes comparten recursos

Tres agentes o jugadores que aportan al proceso productivo los tres recursos necesarios de acuerdo con la siguiente tabla:

Jugadores			*Recurso*
1	2	3	*Total*
139	181	110	430
140	87	183	410
130	225	215	570

Resolviendo los problemas para las distintas coaliciones se obtienen los valores de la función característica:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	73,774	102,336	98,142	198,528	194,868	200,507	299,328

¿Cómo se reparte 299.328 entre los 3 agentes teniendo en cuenta lo que se pueden garantizar las coaliciones?

G. Owen (1975), On the core of Linear Production Games, Mathematical Programming 9, 358-370.

Conjunto de Owen

Considerando

$$x_i = (\mathbf{b}^i)^t \mathbf{u}^*, \ \forall\, i \in N,$$

donde $\mathbf{u}^*$ es una solución de

$$[p_N] \quad \left. \begin{array}{ll} max & \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ s.a: & A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}(N); \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{array} \right\} \qquad [d_N] \quad \left. \begin{array}{ll} min & \mathbf{b}^t\mathbf{u} \\ s.a: & A^t\mathbf{u} \geq \mathbf{c}; \\ & \mathbf{u} \geq 0, \end{array} \right\}$$

el vector, $\mathbf{x}$, resultante es un reparto del núcleo del juego de producción.

Un reparto del conjunto de Owen

Resolviendo el problema para $N = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{rl} max & 2{,}5y_1 + +5y_2 + 4y_3 \\ s.a.: & 2y_1 + 9y_2 + 3{,}5y_3 \leq 430 \\ & 6y_1 + 4y_2 + 9y_3 \leq 410 \\ & 8y_1 + 9y_2 + 7y_3 \leq 570 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Se obtiene el valor del beneficio óptimo $v(N) = 299{,}328$ y los precios duales

$$u_N^* = (0{,}4328, 2761, 0).$$

Repartos: $I(N, v) = \{\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3), \mathbf{x} \geq 0 \,|\, x^1 + x^2 + x^3 = 299{,}328\}$.

Reparto de Owen: Se valoran los recursos aportados por cada jugador, b^i, a los precios duales: $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) = (u_N^* \cdot b^1, u_N^* \cdot b^2, u_N^* \cdot b^3)$

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= 0{,}4328 \times 139 + 2761 \times 140 + 0 \times 130 = 98{,}821. \\ \bar{x}^2 &= 0{,}4328 \times 181 + 2761 \times 87 + 0 \times 225 = 102{,}336. \\ \bar{x}^3 &= 0{,}4328 \times 110 + 2761 \times 183 + 0 \times 215 = 98{,}142. \end{aligned}$$

Repartos de Owen

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	73,774	102,336	98,142	198,528	194,868	200,507	299,328
$\bar{x}(S)$	98,821	102,366	98,142	201,19	196,96	200,507	299,328

- Se observa que algunas coaliciones obtienen justamente lo mismo que podrían conseguir por sí mismas.

Recursos justos:
Otro reparto del conjunto de Owen: $x^* = (94{,}556, 104{,}46, 100{,}312)$

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	73,774	102,336	98,142	198,528	194,868	200,507	299,328
$\bar{x}(S)$	98,821	102,366	98,142	201,19	196,96	200,507	299,328
$x^*(S)$	94,556	104,46	100,312	199,016	194, 87	204,77	299,328

Repartos de Owen

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	73,774	102,336	98,142	198,528	194,868	200,507	299,328
$\bar{x}(S)$	98,821	102,366	98,142	201,19	196,96	200,507	299,328

- Se observa que algunas coaliciones obtienen justamente lo mismo que podrían conseguir por sí mismas.

Recursos justos:
Otro reparto del conjunto de Owen: $x^* = (94{,}556, 104{,}46, 100{,}312)$

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	73,774	102,336	98,142	198,528	194,868	200,507	299,328
$\bar{x}(S)$	98,821	102,366	98,142	201,19	196,96	200,507	299,328
$x^*(S)$	94,556	104,46	100,312	199,016	194, 87	204,77	299,328

Nucleolo y Valor de Shapley

El nucleolo: $\nu(N, v) = (96{,}459, 103{,}398, 99{,}471)$

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	73,774	102,336	98,142	198,528	194,868	200,507	299,328
$\bar{x}(S)$	98,821	102,366	98,142	201,19	196,96	200,507	299,328
$x^*(S)$	94,556	104,46	100,312	199,016	194, 87	204,77	299,328
$\nu(S)$	96,459	103,398	99,471	199,857	195,93	202,869	299,328

El valor de shapley: $\nu(N, v) = (96{,}459, 103{,}398, 99{,}471)$

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	73,774	102,336	98,142	198,528	194,868	200,507	299,328
$\bar{x}(S)$	98,821	102,366	98,142	201,19	196,96	200,507	299,328
$x^*(S)$	94,556	104,46	100,312	199,016	194, 87	204,77	299,328
$\nu(S)$	96,459	103,398	99,471	199,857	195,93	202,869	299,328
$Sh(S)$	89,685	106,785	102,858	196,47	192,543	209,643	299,328

Nucleolo y Valor de Shapley

El nucleolo: $\nu(N, v) = (96{,}459, 103{,}398, 99{,}471)$

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	73,774	102,336	98,142	198,528	194,868	200,507	299,328
$\bar{x}(S)$	98,821	102,366	98,142	201,19	196,96	200,507	299,328
$x^*(S)$	94,556	104,46	100,312	199,016	194, 87	204,77	299,328
$\nu(S)$	96,459	103,398	99,471	199,857	195,93	202,869	299,328

El valor de shapley: $\nu(N, v) = (96{,}459, 103{,}398, 99{,}471)$

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	73,774	102,336	98,142	198,528	194,868	200,507	299,328
$\bar{x}(S)$	98,821	102,366	98,142	201,19	196,96	200,507	299,328
$x^*(S)$	94,556	104,46	100,312	199,016	194, 87	204,77	299,328
$\nu(S)$	96,459	103,398	99,471	199,857	195,93	202,869	299,328
$Sh(S)$	89,685	106,785	102,858	196,47	192,543	209,643	299,328

El problema de producción lineal (Extensión vectorial)

$$\left.\begin{array}{ll} max & \mathbf{y} \\ s.a: & A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}; \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{array}\right\}$$

- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2001). "Multiobjective Linear Production Games" en *Game Theory and Applications*, Vol VII, 44-55. NOVA Science Publishers, Inc.
- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2002). "Core Solutions in Vector Valued Games". *Journal of Optimization Theory and Applications* 112 (2), 331-360.
- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2004). "Set-Valued TU Games". *European Journal of Operational Research* 159 (1), 181-195.
- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Mármol A.M., Puerto J. (2002). "Solution Concepts in Multiple Criteria Linear Production Games" en *Multiple Objective and Goal Programming. Recent Developments*, 257-271. Physica Verlag Heidelberg New York.
- Hinojosa M.A., Mármol A.M., Monroy, L., Fernández, F.R. (2013). "A multi-objective approach to fuzzy linear production games". *International Journal of Information Technology & Decision Making* 12, (5), 1-17.

El problema de producción lineal (Extensión vectorial)

$$\left.\begin{array}{ll} max & \mathbf{y} \\ s.a: & A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}; \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{array}\right\}$$

- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2001). "Multiobjective Linear Production Games" en *Game Theory and Applications*, Vol VII, 44-55. NOVA Science Publishers, Inc.
- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2002). "Core Solutions in Vector Valued Games". *Journal of Optimization Theory and Applications* 112 (2), 331-360.
- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2004). "Set-Valued TU Games". *European Journal of Operational Research* 159 (1), 181-195.
- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Mármol A.M., Puerto J. (2002). "Solution Concepts in Multiple Criteria Linear Production Games" en *Multiple Objective and Goal Programming. Recent Developments*, 257-271. Physica Verlag Heidelberg New York.
- Hinojosa M.A., Mármol A.M., Monroy, L., Fernández, F.R. (2013). "A multi-objective approach to fuzzy linear production games". *International Journal of Information Technology & Decision Making* 12, (5), 1-17.

El problema de producción lineal (Extensión vectorial)

$$\left.\begin{array}{ll} max & \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{y} \\ s.a: & A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}; \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{array}\right\}$$

- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2001). "Multiobjective Linear Production Games" en *Game Theory and Applications*, Vol VII, 44-55. NOVA Science Publishers, Inc.
- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2002). "Core Solutions in Vector Valued Games". *Journal of Optimization Theory and Applications* 112 (2), 331-360.
- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2004). "Set-Valued TU Games". *European Journal of Operational Research* 159 (1), 181-195.
- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Mármol A.M., Puerto J. (2002). "Solution Concepts in Multiple Criteria Linear Production Games" en *Multiple Objective and Goal Programming. Recent Developments*, 257-271. Physica Verlag Heidelberg New York.
- Hinojosa M.A., Mármol A.M., Monroy, L., Fernández, F.R. (2013). "A multi-objective approach to fuzzy linear production games". *International Journal of Information Technology & Decision Making* 12, (5), 1-17.

Problemas de producción con tecnología inspirada en el DEA (Lozano S. (2013))

$$\left.\begin{array}{ll} max & \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ s.a: & \sum_{l\in D}\lambda_l\mathbf{x}_l \leq \mathbf{x}; \\ & \sum_{l\in D}\lambda_l\mathbf{y}_l \geq \mathbf{y}; \\ & \mathbf{x} \leq \mathbf{b}; \\ & \lambda \in \Lambda, \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ll} max & \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ s.a: & X\lambda \leq \mathbf{x}; \\ & Y\lambda \geq \mathbf{y}; \\ & \mathbf{x} \leq \mathbf{b}; \\ & \lambda \in \Lambda, \end{array}\right\}$$

$\lambda \in \mathbb{R}^d$ es el vector cuyas components son los parámetros del modelo DEA, y el conjunto Λ depende de si se asumen rendimientos constantes de escala (CRS), $\Lambda = \Lambda_C = \{\lambda \in \mathbb{R}^d : \lambda \geq 0\}$ o rendimientos variables de escala (VRS), $\Lambda = \Lambda_V = \{\lambda \in \mathbb{R}^d : \lambda \geq 0, \sum_{l=1}^d \lambda_l = 1\}$.

Juegos de producción con tecnología inspirada en el DEA

$$
\begin{aligned}
v^{I}(S) = \quad \max \quad & \mathbf{c}^t \textstyle\sum_{i\in S} \mathbf{y}^i \\
s.a: \quad & X(S)\lambda(i) \leq \mathbf{x}^i, \ \ \forall i \in S; \\
& Y(S)\lambda(i) \geq \mathbf{y}^i, \ \ \forall i \in S; \\
& \mathbf{x}(S) \leq \mathbf{b}(S); \\
& \lambda(i) \in \Lambda^S, \ \ \forall i \in S,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^{II}(S) = \quad \max \quad & \mathbf{c}^t \textstyle\sum_{i\in S} \mathbf{y}^i \\
s.a: \quad & X(i)\lambda(i) \leq \mathbf{x}^i, \ \ \forall i \in S; \\
& Y(i)\lambda(i) \geq \mathbf{y}^i, \ \ \forall i \in S; \\
& \mathbf{x}(S) \leq \mathbf{b}(S); \\
& \lambda(i) \in \Lambda^i, \ \ \forall i \in S,
\end{aligned}
$$

Juegos de producción con tecnología inspirada en el DEA

$$\begin{array}{rll} v^{I}(S) = & max & \mathbf{c}^t \sum_{i\in S} \mathbf{y}^i \\ & s.a: & X(S)\lambda(i) \leq \mathbf{x}^i, \ \ \forall i \in S; \\ & & Y(S)\lambda(i) \geq \mathbf{y}^i, \ \ \forall i \in S; \\ & & \mathbf{x}(S) \leq \mathbf{b}(S); \\ & & \lambda(i) \in \Lambda^S, \ \ \forall i \in S, \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} v^{II}(S) = & max & \mathbf{c}^t \sum_{i\in S} \mathbf{y}^i \\ & s.a: & X(i)\lambda(i) \leq \mathbf{x}^i, \ \ \forall i \in S; \\ & & Y(i)\lambda(i) \geq \mathbf{y}^i, \ \ \forall i \in S; \\ & & \mathbf{x}(S) \leq \mathbf{b}(S); \\ & & \lambda(i) \in \Lambda^i, \ \ \forall i \in S, \end{array}$$

Problemas de producción con tecnología inspirada en el DEA

$$\begin{array}{rll} v^I(S) = & max & \mathbf{c}^t \sum_{i\in S} \mathbf{y}^i \\ & s.a: & X(S)\lambda(i) \leq \mathbf{x}^i, \ \ \forall i \in S; \\ & & Y(S)\lambda(i) \geq \mathbf{y}^i, \ \ \forall i \in S; \\ & & \mathbf{x}(S) \leq \mathbf{b}(S); \\ & & \lambda(i) \in \Lambda^S, \ \ \forall i \in S, \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} v^{II}(S) = & max & \mathbf{c}^t \sum_{i\in S} \mathbf{y}^i \\ & s.a: & X(i)\lambda(i) \leq \mathbf{x}^i, \ \ \forall i \in S; \\ & & Y(i)\lambda(i) \geq \mathbf{y}^i, \ \ \forall i \in S; \\ & & \mathbf{x}(S) \leq \mathbf{b}(S); \\ & & \lambda(i) \in \Lambda^i, \ \ \forall i \in S, \end{array}$$

son igualdades en cualquier solución óptima (Jahanshahloo et al. (2007))

Problemas de producción con tecnología inspirada en el DEA

$$\begin{array}{rll} v^{I}(S) = & max & \mathbf{c}^t \sum_{i\in S} \mathbf{y}^i \\ & s.a: & X(S)\lambda(i) \leq \mathbf{x}^i, \ \ \forall i \in S; \\ & & Y(S)\lambda(i) \geq \mathbf{y}^i, \ \ \forall i \in S; \\ & & \mathbf{x}(S) \leq \mathbf{b}(S); \\ & & \lambda(i) \in \Lambda^S, \ \ \forall i \in S, \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} v^{II}(S) = & max & \mathbf{c}^t \sum_{i\in S} \mathbf{y}^i \\ & s.a: & X(i)\lambda(i) \leq \mathbf{x}^i, \ \ \forall i \in S; \\ & & Y(i)\lambda(i) \geq \mathbf{y}^i, \ \ \forall i \in S; \\ & & \mathbf{x}(S) \leq \mathbf{b}(S); \\ & & \lambda(i) \in \Lambda^i, \ \ \forall i \in S, \end{array}$$

Hay una solución óptima en la que son igualdades

Juegos de producción con tecnología inspirada en el DEA

$$v^{I}(S) = \begin{array}{ll} max & \mathbf{c}^t \sum_{i\in S} Y(S)\lambda(i) \\ s.t: & \sum_{i\in S} X(S)\lambda(i) \leq \mathbf{b}(S); \\ & \lambda(i) \in \Lambda^S, \ \ \forall i \in S. \end{array}$$

$$v^{II}(S) = \begin{array}{ll} max & \mathbf{c}^t \sum_{i\in S} Y(i)\lambda(i) \\ s.t: & \sum_{i\in S} X(i)\lambda(i) \leq \mathbf{b}(S); \\ & \lambda(i) \in \Lambda^i, \ \ \forall i \in S. \end{array}$$

- En el caso CRS los modelos I y II son equivalentes.
- Todo juego de producción DEA puede verse como un juego de producción lineal, ie, la clase de los juegos de producción DEA coincide con la clase de los juegos de producción lineal (es la clase de juegos totalmente equilibrados)

On DEA production games, Borrero D.V., Hinojosa M.A., Mármol A.M.

Juegos de producción con tecnología inspirada en el DEA

$$\begin{array}{rll} v^I(S) = & max & \mathbf{c}^t \sum_{i \in S} Y(S)\lambda(i) \\ & s.t: & \sum_{i \in S} X(S)\lambda(i) \leq \mathbf{b}(S); \\ & & \lambda(i) \in \Lambda^S, \ \ \forall i \in S. \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} v^{II}(S) = & max & \mathbf{c}^t \sum_{i \in S} Y(i)\lambda(i) \\ & s.t: & \sum_{i \in S} X(i)\lambda(i) \leq \mathbf{b}(S); \\ & & \lambda(i) \in \Lambda^i, \ \ \forall i \in S. \end{array}$$

- En el caso CRS los modelos I y II son equivalentes.
- Todo juego de producción DEA puede verse como un juego de producción lineal, ie, la clase de los juegos de producción DEA coincide con la clase de los juegos de producción lineal (es la clase de juegos totalmente equilibrados)

On DEA production games, Borrero D.V., Hinojosa M.A., Mármol A.M.

Juegos de producción con tecnología inspirada en el DEA

$$\begin{array}{rll} v^{I}(S) = & max & \mathbf{c}^t \sum_{i \in S} Y(S)\lambda(i) \\ & s.t: & \sum_{i \in S} X(S)\lambda(i) \leq \mathbf{b}(S); \\ & & \lambda(i) \in \Lambda^S, \ \ \forall i \in S. \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} v^{II}(S) = & max & \mathbf{c}^t \sum_{i \in S} Y(i)\lambda(i) \\ & s.t: & \sum_{i \in S} X(i)\lambda(i) \leq \mathbf{b}(S); \\ & & \lambda(i) \in \Lambda^i, \ \ \forall i \in S. \end{array}$$

- En el caso CRS los modelos I y II son equivalentes.
- Todo juego de producción DEA puede verse como un juego de producción lineal, ie, la clase de los juegos de producción DEA coincide con la clase de los juegos de producción lineal (es la clase de juegos totalmente equilibrados)

On DEA production games, Borrero D.V., Hinojosa M.A., Mármol A.M.

Juegos de producción con tecnología inspirada en el DEA

$$
\begin{array}{rll}
v^{I}(S) = & max & \mathbf{c}^t \sum_{i \in S} Y(S)\lambda(i) \\
& s.t: & \sum_{i \in S} X(S)\lambda(i) \leq \mathbf{b}(S); \\
& & \lambda(i) \in \Lambda^S, \ \ \forall i \in S.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
v^{II}(S) = & max & \mathbf{c}^t \sum_{i \in S} Y(i)\lambda(i) \\
& s.t: & \sum_{i \in S} X(i)\lambda(i) \leq \mathbf{b}(S); \\
& & \lambda(i) \in \Lambda^i, \ \ \forall i \in S.
\end{array}
$$

Juegos de producción con tecnología inspirada en el DEA

$$\begin{array}{rll} v^{I}(S) = & max & \sum_{i\in S} Y(S)\lambda(i) \\ & s.t: & \sum_{i\in S} X(S)\lambda(i) \leq \mathbf{b}(S); \\ & & \lambda(i) \in \Lambda^{S}, \ \ \forall i \in S. \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} v^{II}(S) = & max & \sum_{i\in S} Y(i)\lambda(i) \\ & s.t: & \sum_{i\in S} X(i)\lambda(i) \leq \mathbf{b}(S); \\ & & \lambda(i) \in \Lambda^{i}, \ \ \forall i \in S. \end{array}$$

- *Set-valued DEA production games*, Lozano S., Hinojosa M.A., Mármol A.M. En revisión en OMEGA

Juegos de producción con tecnología inspirada en el DEA

$$
\begin{array}{rll}
v^{I}(S) = & max & \tilde{\mathbf{c}}^t \sum_{i\in S} Y(S)\lambda(i) \\
 & s.t: & \sum_{i\in S} X(S)\lambda(i) \leq \mathbf{b}(S); \\
 & & \lambda(i) \in \Lambda^S, \quad \forall i \in S.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
v^{II}(S) = & max & \tilde{\mathbf{c}}^t \sum_{i\in S} Y(i)\lambda(i) \\
 & s.t: & \sum_{i\in S} X(i)\lambda(i) \leq \mathbf{b}(S); \\
 & & \lambda(i) \in \Lambda^i, \quad \forall i \in S.
\end{array}
$$

- *Fuzzy DEA production games*, Hinojosa M.A., Lozano S., Mármol A.M.

1. Introducción
2. Tasas de intercambio en redes de cajeros automáticos
3. ¿Cómo repartir de acuerdo a una o varias referencias?
4. El problema de la producción lineal y sus extensiones
5. El problema de repartir el coste de ejecución de una ruta

- La visita de un conferenciante a varias universidades.
- Los servicios de traslado (shuttle) en autobús o coches compartidos.
- El reparto a los comercios de un fabricante.
- La realización de un servicio a domicilio
  - médico
  - reparador
  - repartidor de paquetes o mensajes
  - etc

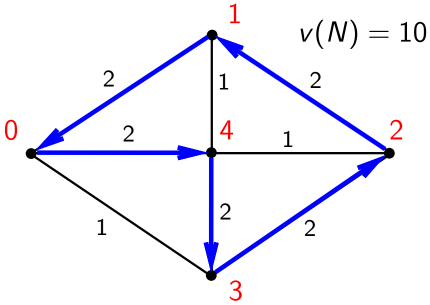
Teoría de juegos aplicada al reparto de costes de una ruta

1. Juegos de ruta (routing games).
2. Juegos del viajante (traveling salesman games)

- Fishburn P.C., Pollak H.O. (1983). "Fixed-route cost allocation". *American Mathematical Monthly* 90, 366–378.
- Potters J.A.M., Curiel I.J., Tijs S.H. (1992). "Traveling salesman games". *Mathematical Programming* 53,199-211.
- Kuipers J. (1993). "A note on the 5-person traveling salesman game". *Methods Models of Oper. Research* 38, 131-139.
- Derks J., Kuipers J. (1997). "On the core of routing games". *International Journal of Game Theory* 26, 193-205.
- Engevall S., Gothe-Lundgren M., Varbrand P. (1998). "The traveling salesman game: an application of cost allocation in a gas and oil company". *Annals of Operations Research* 82, 453–472.

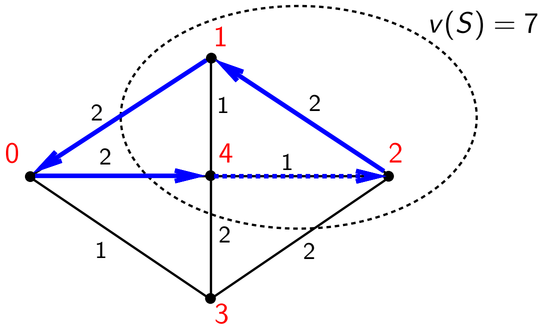
Teoría de juegos aplicada al reparto de costes de una ruta

1. Juegos de ruta (routing games).
2. Juegos del viajante (traveling salesman games)

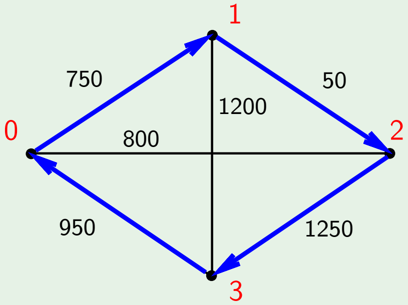


Teoría de juegos aplicada al reparto de costes de una ruta

1. Juegos de ruta (routing games).
2. Juegos del viajante (traveling salesman games)



Ejemplo (el profesor visitante)



S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$	1500	1600	1900	1600	2900	3000	3000

Teoría de juegos aplicada al reparto de costes de una ruta

1. Juegos de ruta (routing games).
2. Juegos del viajante (traveling salesman games)

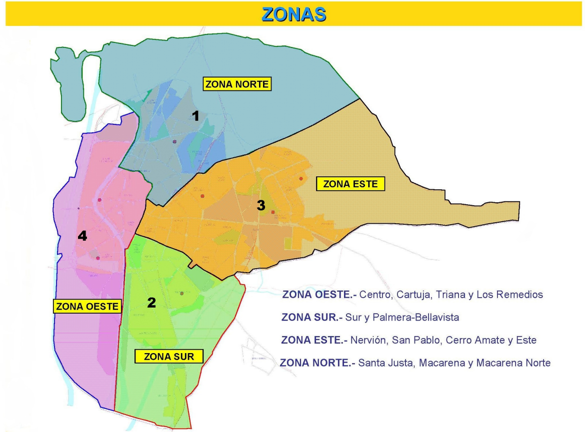
Si la matriz de costes cumple la desigualdad triangular, el *juego de ruta* tiene repartos en el núcleo. Sin embargo, para que el *juego del viajante* tenga repartos en el núcleo hay que imponer condiciones más fuertes a la matriz de costes.

Teoría de juegos aplicada al reparto de costes de una ruta

1. Juegos de ruta (routing games).
2. Juegos del viajante (traveling salesman games)

Yengin D. (2012). "Characterizing the Shapley value in fixed-route traveling salesman problems with appointments". *International Journal of Game Theory* 41, 271-299.

Se trata de proponer un reparto del coste de ejecución del servicio de recogida entre las 4 zonas de la ciudad aplicando las soluciones de la teoría de juegos cooperativos.



(N, c) donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$, y $c(S)$:

S	$c(S)$
{1}	308.6
{2}	240.6
{3}	866.9
{4}	118.9
{1,2}	602.6
{1,3}	1167.3
{1,4}	455.8
{2,3}	1186.0
{2,4}	353.5
{3,4}	998.3
{1,2,3}	1443.1
{1,2,4}	670.3
{1,3,4}	1363.8
{2,3,4}	1233.5
{1,2,3,4}	1509

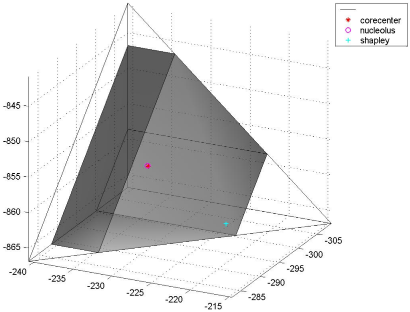
- $c(S)$ es el coste que se puede asegurar la coalición S por sí misma.
- El coste de la recogida es proporcional a la distancia recorrida por el camión.

El conjunto de repartos del juego es

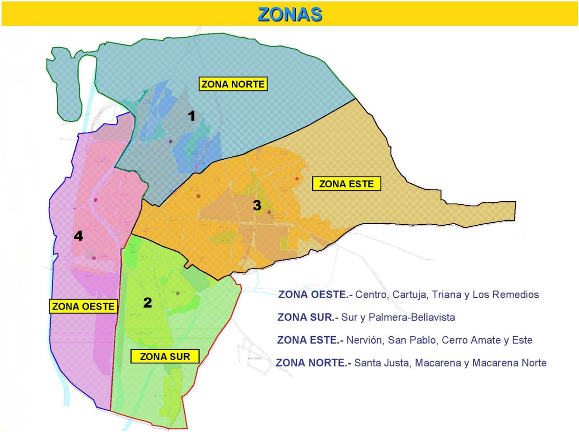
$$I(N,c)=\{x\in \mathbb{R}^4 \mid x\geq 0, x_1+x_2+x_3+x_4=1509\}.$$

Los puntos extremos del núcleo son:

$C(N,c)$
(288.6, 240.6, 866.9, 112.9)
(288.6, 234.6, 866.9, 118.9)
(300.4, 222.8, 866.9, 118.9)
(308.6, 222.8, 858.7, 118.9)
(308.6, 234.6, 846.9, 118.9)
(308.6, 240.6, 846.9, 112.9)
(300.4, 240.6, 866.9, 101.1)
(308.6, 240.6, 858.7, 101.1)



S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
$c(S)$	308.6	240.6	866.9	118.9
$Sh(N,v)$	307.6	227.5	**869.1**	104,8
$\nu(N,v)$	301.55	234.65	859,85	112.9


ZONAS
ZONA NORTE
1
ZONA ESTE
3
4
2
ZONA OESTE
ZONA SUR
ZONA OESTE.- Centro, Cartuja, Triana y Los Remedios
ZONA SUR.- Sur y Palmera-Bellavista
ZONA ESTE.- Nervión, San Pablo, Cerro Amate y Este
ZONA NORTE.- Santa Justa, Macarena y Macarena Norte

Por cada uno de los posibles escenarios (rutas) se define el *juego de ruta* (N, c_j), $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $c_j(N) = E$ para cada $j = 1, 2, \ldots, m$.

Juego de ruta multiescenario

(N, c, E), donde N=$\{$1,2,...,n$\}$ es el conjunto de usuarios, E es el coste total que ha de repartirse entre ellos y c asocia a cada coalición $S \subseteq N$ un vector $c(S) \in \mathbb{R}^m$, cuyas componentes son el valor de la función característica asociado a la coalición S en el *juego de ruta* correspondiente.

Un reparto del juego de costes multiescenario es un vector $x \in \mathbb{R}^n$, que verifica $\sum_{i \in N} x_i = E$.

Núcleo de preferencia

Con un reparto del núcleo de preferencias todos los jugadores o coaliciones pagarían menos (a lo sumo lo mismo) que lo que pueden garantizarse pagar en cualquiera de los escenarios.

$$PC(N, c, E) = \{x \in I^*(N, c) : \; x(S) \leq c_j(S), \quad \forall\, S \subset N, \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots m\}\,.$$

Se verifica:

- $PC(N, c, E) = \bigcap_{j=1}^{m} C(N, c_j)$.
- $PC(N, c, E) = C(N, c_{\text{mín}})$, donde $c_{\text{mín}}(S) = \text{mín}_{j \in \{1,2,\ldots,m\}} c_j(S)$.

Núcleo de dominancia

Con un reparto del núcleo de dominancia ningún jugador o coalición va a pagar estrictamente más, en todos los escenarios, que lo que puede garantizarse.

$DC(N,c,E) =$

$$= \{x \in I^*(N,c,E) : \ \forall\, S \subset N, \ \exists\, j_S \in \{1,2,\ldots m\} \mid x(S) \leq c_{j_S}(S)\}\,.$$

Se verifica:

- $DC(N,c,E) = C(N, c_{\text{máx}})$, donde

$$c_{\text{máx}}(S) = \max_{j \in \{1,2,\ldots,m\}} \{c_j(S)\}$$

Núcleo ponderado

Si las probabilidades de ocurrencia de los escenarios son conocidas y vienen dadas por el vector $\lambda \in \Delta^{n-1}$, con un reparto del núcleo ponderado todos los jugadores o coaliciones pagarían menos (a lo sumo igual) que el pago medio que se garantizan.

$$C(N, c^{\lambda}) = \left\{ x \in I^*(N, c, E) : \ x(S) \leq \lambda^t c(S), \quad \forall\, S \subset N, \right\}.$$

Se verifica:

- $PC(N, c, E) \subset C_{\lambda}(N, c, E) \quad \forall\, \lambda \in \Delta^{n-1}$.
- $PC(N, c, E) = \bigcap_{\lambda \in \Delta^{n-1}} C(N, c^{\lambda})$.
- $DC(N, c, E) =$ $\left\{ x \in I^*(N, c, E) : \ \forall\, S \subset N, \ \exists\, \lambda_S \in \Delta^{n-1} \mid x(S) \leq \lambda_S^t c(S) \right\}.$

Núcleo de ponderación común

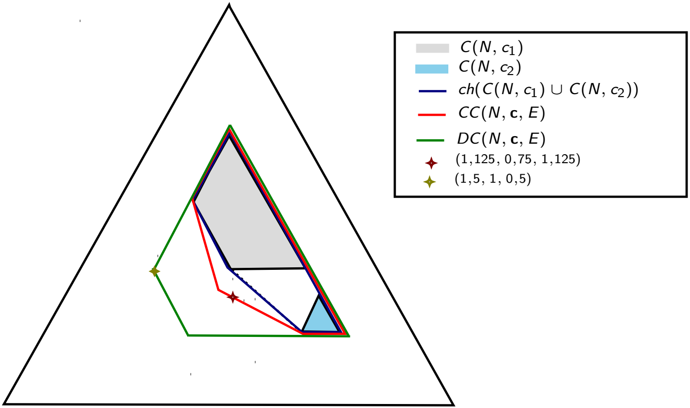
Para cada reparto del núcleo de ponderación común existe un vector de ponderaciones $\lambda \in \Delta^{n-1}$, común para todos los agentes y coaliciones, con el cual dichos jugadores o coaliciones pagarían menos (a lo sumo igual) que el pago medio que se garantizan con dichas ponderaciones comunes.

$$CC(N,c,E) = \left\{x \in I^*(N,c,E) : \exists \lambda \in \Delta^{n-1} \mid x(S) \leq \lambda^t c(S), \quad \forall S \subset N, \right\}.$$

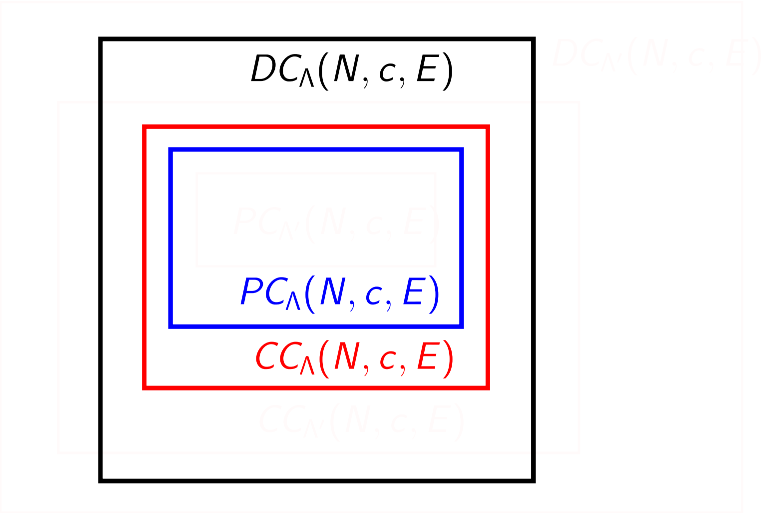
Se verifica:

- Para cada $\lambda \in \Delta^{n-1}$, $PC(N,c,E) \subset C(N,c\lambda) \subset CC(N,c,E)$.
- $CC(N,c,E) = \bigcup_{\lambda \in \Delta^{n-1}} C(N,c^{\lambda})$.
- $CC(N,c,E)$ es un conjunto convexo que contiene a $\bigcup_{j=1}^{m} C(N,c_j)$.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$N=\{1,2,3\}$
$c_1(S)$	1	2	1.5	2.5	2	2.5	3
$c_2(S)$	1.5	0.75	2	1.25	2.5	2.5	3



Núcleos con información parcial



$$PC(N, c, E) = C(N, c_{\text{mín}}).$$

$$DC(N, c, E) = C(N, c_{\text{máx}}).$$

Si para cada $S \subseteq N$, $c^{\Lambda}(S) = E_{\Lambda}^{t} c(S)$

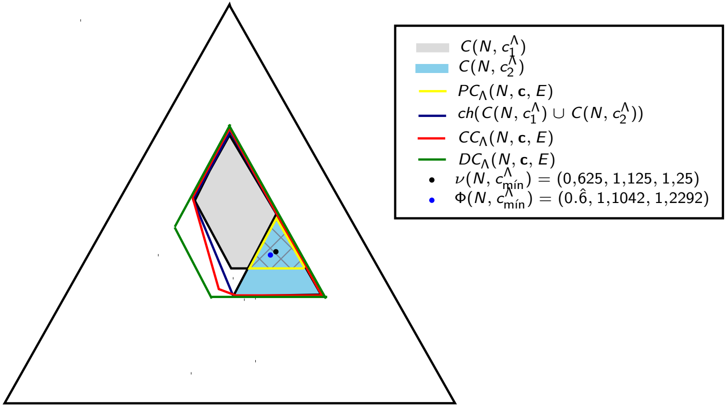
(i) $PC_{\Lambda}(N, c, E) = PC(N, c^{\Lambda})$.

(ii) $DC_{\Lambda}(N, c, E) = DC(N, c^{\Lambda})$.

(iii) $CC_{\Lambda}(N, c, E) = CC(N, c^{\Lambda})$.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$N=\{1,2,3\}$
$c_1^\Lambda(S)$	1	2	1.5	2.5	2	2.5	3
$c_2^\Lambda(S)$	1.25	1.375	1.75	1.875	2.25	2.5	3

$$\boxed{\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}}$$



Aplicaciones de la teoría de juegos a los problemas de reparto

Miguel Ángel Hinojosa Ramos

Málaga, 20 de mayo de 2014

Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla

Aumann R. and Maschler M. (1985) Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. Journal of Economic Theory 36, 195-213.

Benoît J.P. (1997) The nucleolus is contested-garment-consistent: A direct proof. Journal of Economic Theory 77, 192-196.

O'Neill B.(1982) A problem of rights arbitration from the Talmud. Mathematical Social Sciences 2, 345-371.

Serrano, R. (1995) Strategic bargaining, surplus sharing problems and the nucleolus. Journal of Mathematical Economics 24, 319-329.

Núcleos con información parcial

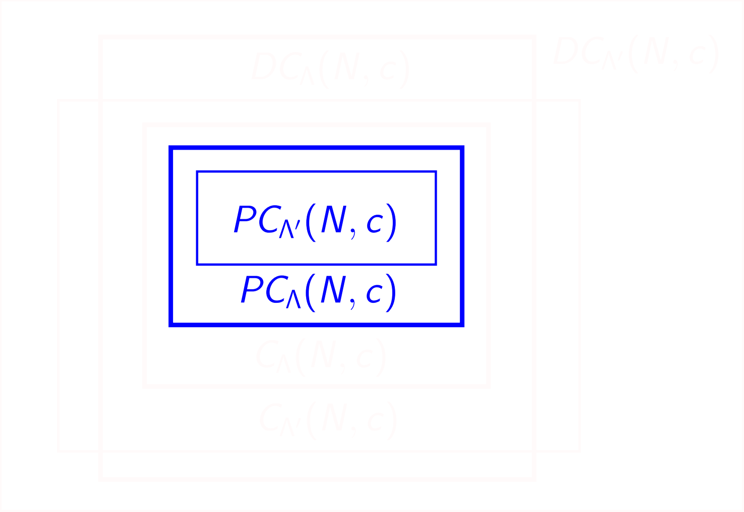
Λ-Núcleo de preferencia

$$PC_\Lambda(N,c) = \{x \in I^*(N,c) : \; x(S) \leq \lambda^t c(S), \quad \forall\, S \subset N, \quad \forall\, \lambda \in \Lambda\}$$

Se verifica:

- $PC_\Lambda(N,c) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda(N,c)$.
- Si $\Lambda = \{\lambda\}$, $PC_\Lambda(N,c) = C_\lambda(N,c)$. Si $\Lambda = \Delta^{n-1}$, $PC_\Lambda(N,c) = PC(N,c)$.
- Si Λ, Λ' son dos poliedros de Δ^{n-1} tales que $\Lambda \subset \Lambda' \subset \Delta^{n-1}$, entonces $PC(N,c) \subset PC_{\Lambda'}(N,c) \subset PC_\Lambda(N,c)$.

$$\Lambda \subset \Lambda' \subset \Delta^{n-1}$$



Núcleos con información parcial

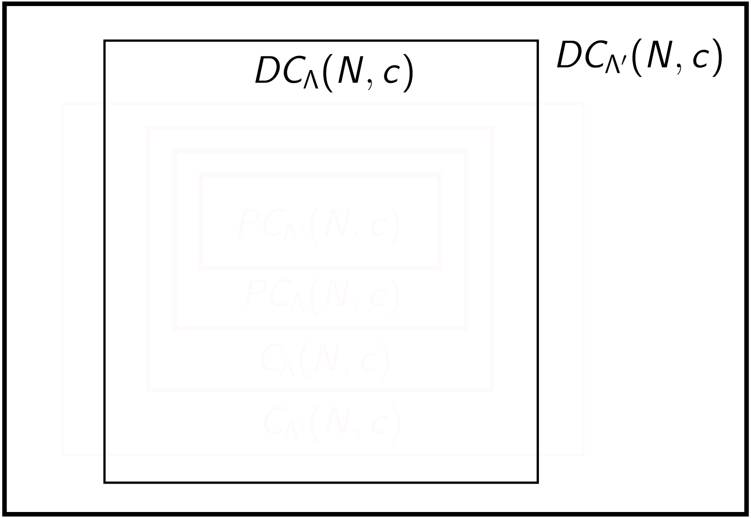
Λ-Núcleo de dominancia

$$DC_\Lambda(N,c) = \left\{x \in I^*(N,c) : \ \forall\, S \subset N, \ \exists\, \lambda \in \Lambda \mid x(S) \leq \lambda^t c(S)\right\}$$

Se verifica:

- Para cada $\lambda \in \Lambda$,
  $PC_\Lambda(N,c) \subset C_\lambda(N,c) \subset C_\Lambda(N,c) \subset DC_\Lambda(N,c)$.
- Si Λ, Λ' son dos poliedros de Δ^{n-1} tales que $\Lambda \subset \Lambda' \subset \Delta^{n-1}$, entonces $DC_\Lambda(N,c) \subset DC_{\Lambda'}(N,c) \subset DC(N,c)$.

$$\Lambda \subset \Lambda' \subset \Delta^{n-1}$$



Núcleos con información parcial

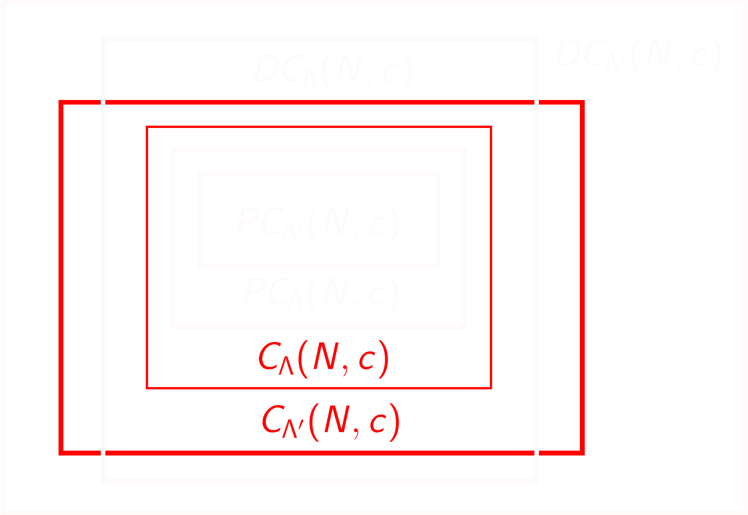
Λ-Núcleo de ponderación común

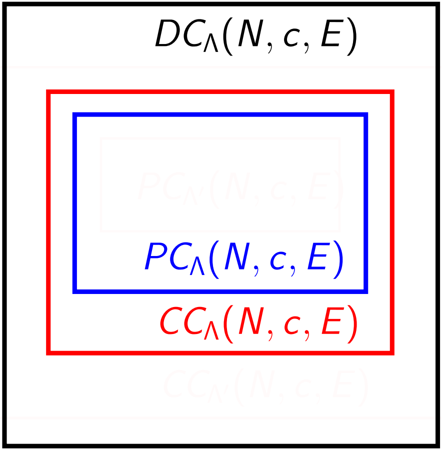
$$C_\Lambda(N,c) = \left\{x \in I^*(N,c) : \ \exists\, \lambda \in \Lambda \mid x(S) \leq \lambda^t c(S), \quad \forall\, S \subset N, \right\}$$

Se verifica:

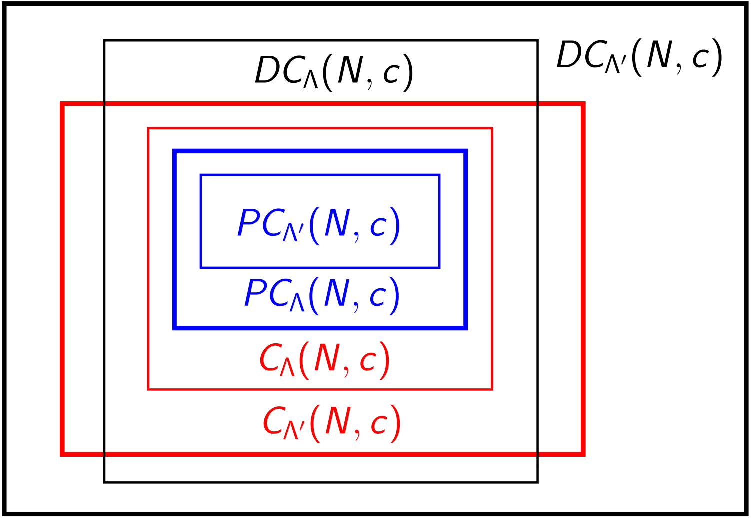
- Para cada $\lambda \in \Lambda$, $PC_\Lambda(N,c) \subset C_\lambda(N,c) \subset C_\Lambda(N,c)$.
- $C_\Lambda(N,c) = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda(N,c)$
- $\bigcup\limits_{\lambda^* \in E(\Lambda)} C_{\lambda^*}(N,c) \subset C_\Lambda(N,c)$.
- $C_\Lambda(N,c)$ es un conjunto convexo que contiene a $\bigcup_{\lambda^* \in E(\Lambda)} C_{\lambda^*}(N,c)$.

$$\Lambda \subset \Lambda' \subset \Delta^{n-1}$$




$DC_\Lambda(N, c, E)$
$PC_\Lambda(N, c, E)$
$CC_\Lambda(N, c, E)$

$$\Lambda \subset \Lambda' \subset \Delta^{n-1}$$



Resultados

$$PC(N,c) = C(N, c_{\text{mín}}).$$

$$DC(N,c) = C(N, c_{\text{máx}}).$$

Si para cada $S \subseteq N$, $c^{\Lambda}(S) = E^t_{\Lambda} c(S)$

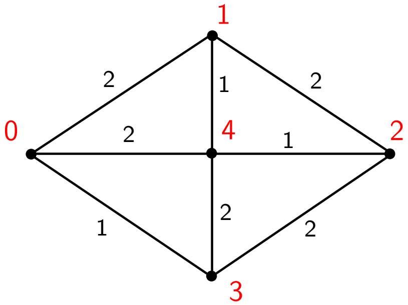
(i) $PC_{\Lambda}(N,c) = PC(N, c^{\Lambda})$.

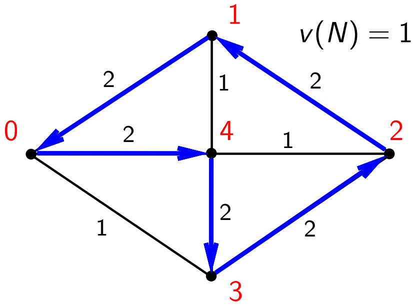
(ii) $DC_{\Lambda}(N,c) = DC(N, c^{\Lambda})$.

(iii) $CC_{\Lambda}(N,c) = CC(N, c^{\Lambda})$.

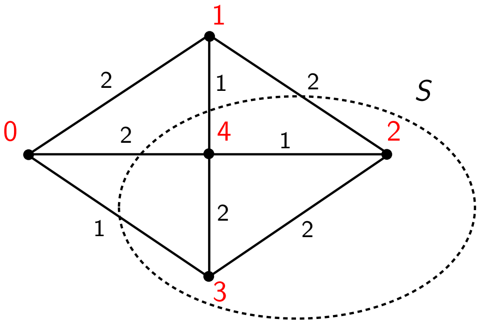
Trabajo por hacer

- Identificar y caracterizar reglas de reparto que proporcionen un reparto único en la clase de juegos multiescenario con información parcial.
- Extender otras soluciones de la teoría de juegos cooperativos clásica a la clase de juegos multiescenario con información parcial.
- Diseñar y analizar otras reglas.

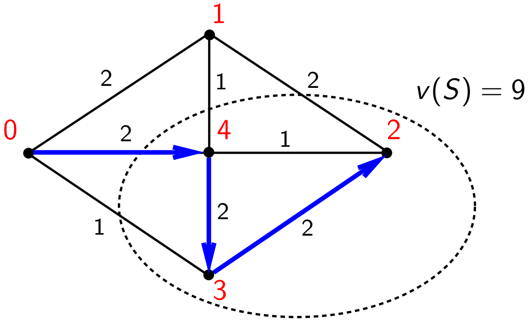

1
2
1
2
0
2
4
1
2
1
2
2
3



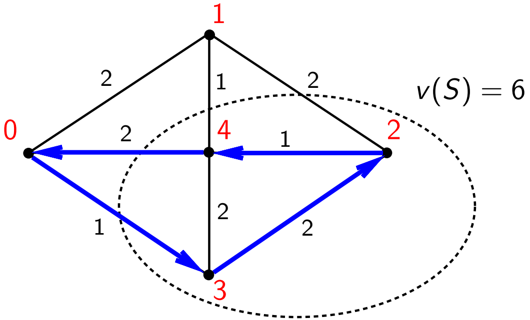
$$v(N) = 10$$

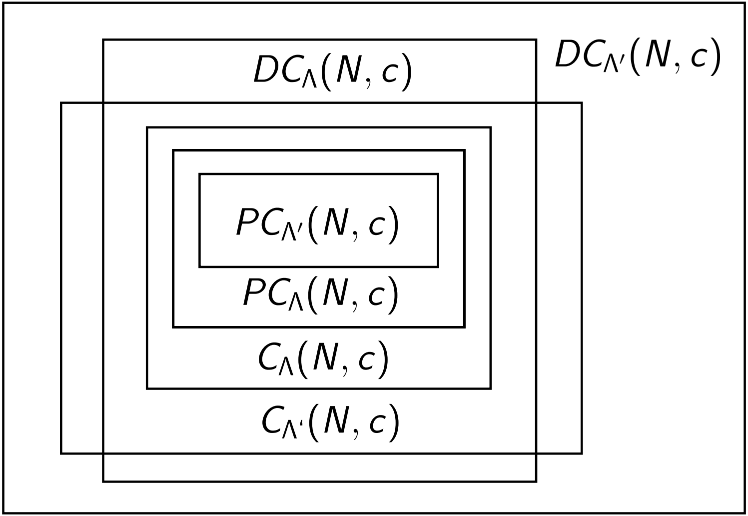

1
0
4
2
3
S
2
1
2
2
1
1
2
2

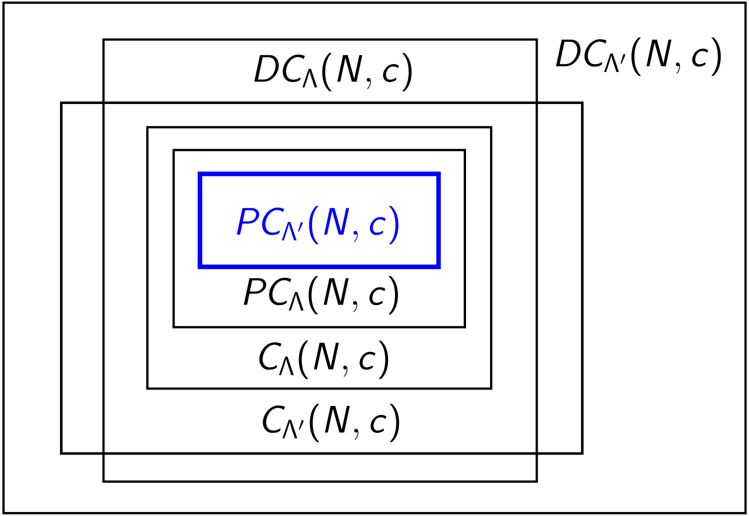
Routing game:

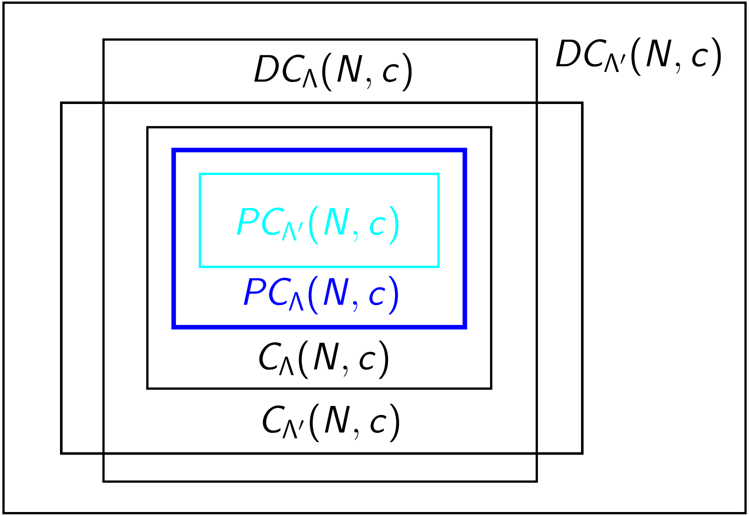


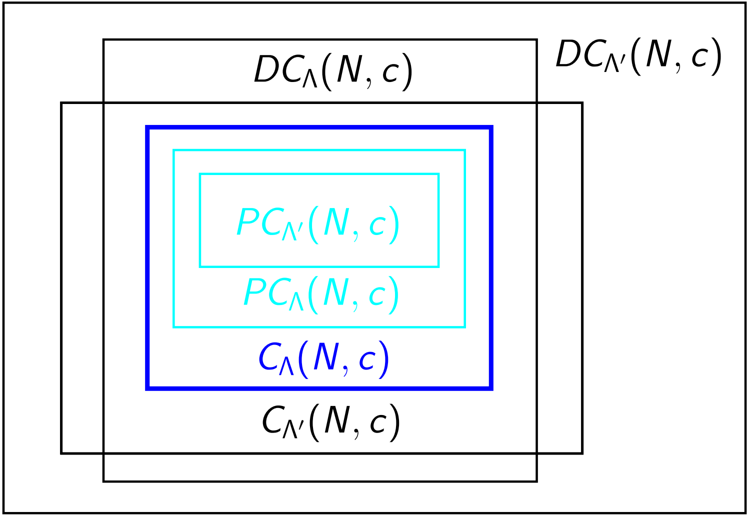
Traveling salesman game:

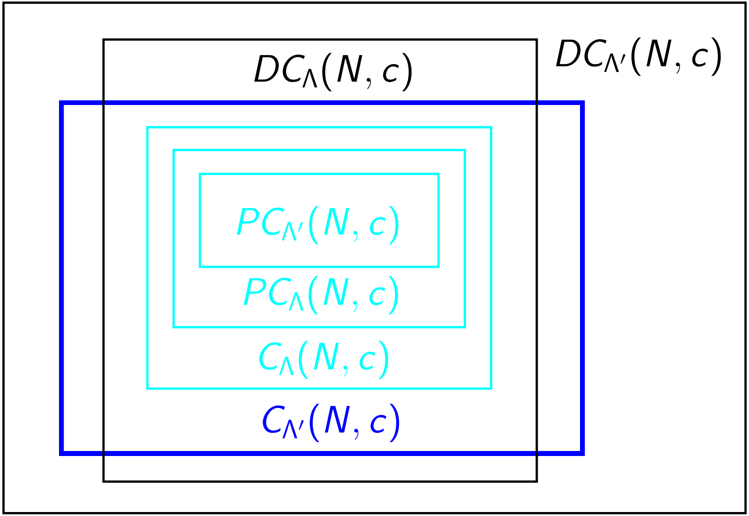


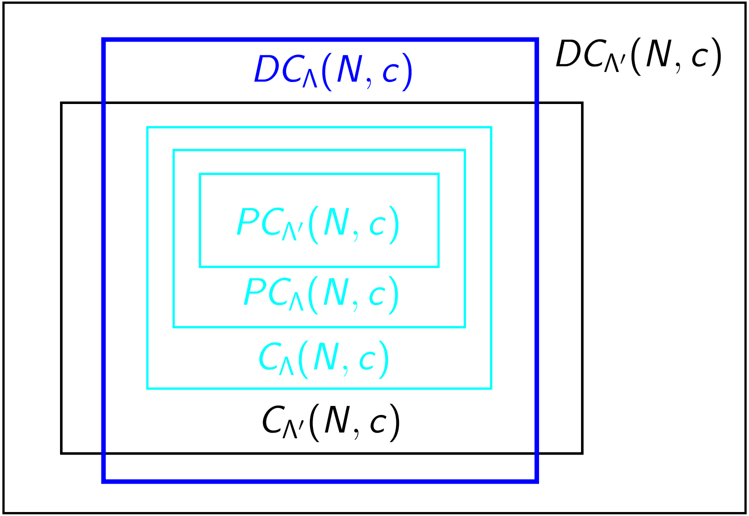

$DC_{\Lambda'}(N,c)$
$DC_{\Lambda}(N,c)$
$PC_{\Lambda'}(N,c)$
$PC_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda'}(N,c)$

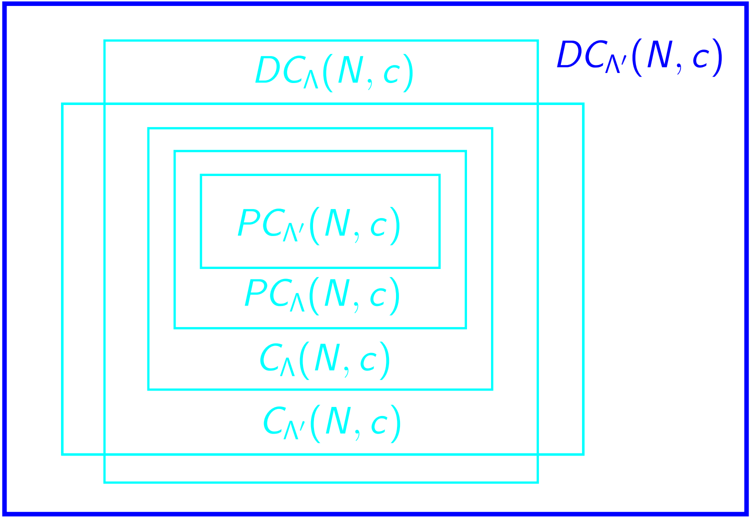

$DC_{\Lambda'}(N,c)$
$DC_{\Lambda}(N,c)$
$PC_{\Lambda'}(N,c)$
$PC_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda'}(N,c)$


$DC_{\Lambda'}(N,c)$
$DC_{\Lambda}(N,c)$
$PC_{\Lambda'}(N,c)$
$PC_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda'}(N,c)$


$DC_{\Lambda'}(N,c)$
$DC_{\Lambda}(N,c)$
$PC_{\Lambda'}(N,c)$
$PC_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda'}(N,c)$


$DC_{\Lambda'}(N,c)$
$DC_{\Lambda}(N,c)$
$PC_{\Lambda'}(N,c)$
$PC_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda'}(N,c)$


$DC_{\Lambda'}(N,c)$
$DC_{\Lambda}(N,c)$
$PC_{\Lambda'}(N,c)$
$PC_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda'}(N,c)$


$DC_{\Lambda'}(N,c)$
$DC_{\Lambda}(N,c)$
$PC_{\Lambda'}(N,c)$
$PC_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda}(N,c)$
$C_{\Lambda'}(N,c)$