

XXIII CONGRESO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES  
XIII CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA  
Castellón, 9-13 septiembre 2013  
(pp. 1–8)

## Un modelo 1D NPZ de acoplamiento entre la hidrodinámica y los flujos biogeoquímicos en estrechos bicapa. Aplicación a la dinámica mareal en el Estrecho de Gibraltar

J. MACÍAS<sup>1</sup>, M.J. CASTRO<sup>1</sup>, E. FERNÁNDEZ-NIETO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidad de Málaga, Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias, Campus de Teatinos, s/n, 29080-Málaga. E-mails: [jmacias@uma.es](mailto:jmacias@uma.es), [mjcastro@uma.es](mailto:mjcastro@uma.es).

<sup>2</sup> Universidad de Sevilla Departamento de Matemática Aplicada I, ETS Arquitectura, Avda. Reina Mercedes, 2, 41012-Sevilla. E-mail: [edofer@us.es](mailto:edofer@us.es).

**Palabras clave:** Modelo NPZ, shallow water bicapa, acoplamiento, flujos biogeoquímicos, Estrecho de Gibraltar

### Resumen

Los modelos NPZ (siglas para Nutrientes-Fitoplancton-Zooplancton en inglés) son comúnmente utilizados en estudios de biología marina. Este tipo de modelos utiliza un conjunto de ecuaciones diferenciales muy sencillo para definir la dinámica del plancton marino. Las variables de estado de las cuales se modeliza su evolución son los nutrientes, el fitoplancton y el zooplankton, esto se hace en términos de su contenido de nitrógeno, ya que este compuesto es el que normalmente limita la producción primaria en el océano. En este trabajo se implementa el acoplado de un modelo NPZ para el modelado de los flujos biogeoquímicos con un modelo de aguas poco profundas bicapa para la hidrodinámica. El objetivo es aplicar este modelo a la simulación de flujos biogeoquímicos en el Estrecho de Gibraltar con imposición de la dinámica mareal.

## 1. Introducción

El Estrecho de Gibraltar es un área de nuestros mares y océanos fascinante desde muchos puntos de vista. Su dinámica es muy complicada y energética, y los procesos biológicos asociados de un enorme interés socio-económico y ambiental. En la actualidad no existe ningún modelo físico-biológico completamente acoplado para el Estrecho de Gibraltar. Un primer intento se recoge en [5] donde en primer lugar se integra el modelo hidrodinámico y tras la simulación se extraen los valores de las variables necesarias para la integración del modelo biológico. En este trabajo proponemos un modelo unidimensional

que acopla la hidrodinámica y los procesos biológicos en estrechos de sección arbitraria y con un flujo bicapa, se pretende así representar la dinámica que se observa en el Estrecho de Gibraltar, que es esencialmente bicapa. La estrategia tanto numérica como computacional difiere completamente del trabajo anteriormente mencionado. En [6] aplicamos este tipo de estrategias para modelos acoplados con una componente biológica de mucha mayor complejidad que la que aquí se presenta.

## 2. La componente hidrodinámica

La parte hidrodinámica del modelo acoplado consiste en un modelo de aguas poco profundas unidimensional de dos capas inmiscibles con superficie libre en un canal de sección arbitraria. La deducción de este modelo puede encontrarse en [1]. En nuestro caso la primera capa representa la capa de agua atlántica que penetra en superficie en el Mar de Alborán, en la cual tienen lugar los procesos biológicos, mientras que la segunda capa está formada por el agua mediterránea más salada y densa que fluye en profundidad en su camino a través del Estrecho hacia en Atlántico Norte. El sistema de ecuaciones diferenciales que resulta es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q_1^2}{A_1} + \frac{g}{2\sigma_1} A_1^2 \right) = -\frac{g}{\sigma_1} A_1 \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{g}{2} \left( \frac{1}{\sigma_1} \right)_x A_1^2 - g \frac{db}{dx} \frac{\sigma_b}{\sigma_1} A_1 + \\ \qquad \qquad \qquad \frac{g}{\sigma_1} (I_{3,1} + I_{3,2}) A_1, \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial Q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q_2^2}{A_2} + \frac{g}{2\sigma_2} A_2^2 \right) = -r \frac{g}{\sigma_1} A_2 \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{g}{2} \left( \frac{1}{\sigma_2} \right)_x A_2^2 - g \frac{db}{dx} \frac{\sigma_b}{\sigma_2} A_2 + \\ \qquad \qquad \qquad g \left[ \frac{r}{\sigma_1} (I_{3,1} + I_{3,2}) + \frac{(1-r)}{\sigma_3} I_{3,2} \right] A_2, \end{array} \right. \quad (1)$$

donde el índice 1 denota la capa superficial y el índice 2 la capa más profunda. La coordenada  $x$  representa la posición a lo largo de un eje transversal al canal,  $t$  es el tiempo,  $g$  la aceleración de la gravedad,  $b(x)$  es la función que define la batimetría del fondo y  $\sigma(x, z)$  la función anchura que depende de la coordenada vertical. Cada una de las capas se supone que tiene una densidad constante,  $\rho_i$ ,  $i = 1, 2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ), siendo  $r = \frac{\rho_1}{\rho_2}$  la razón entre estas densidades. Las variables  $A_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$  representan las secciones húmedas para cada capa y se relacionan con el espesor de la capa,  $h_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$  mediante las expresiones:

$$A_1(x, t) = \int_{b(x)+h_2(x,t)}^{b+h_2+h_1} \sigma(x, z) dz, \quad A_2(x, t) = \int_{b(x)}^{b(x)+h_2(x,t)} \sigma(x, z) dz. \quad (2)$$

Las incógnitas  $Q_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$  representan el flujo de masa en cada sección de coordenada  $x$  en el tiempo  $t$  y se relacionan con la velocidad media de cada capa mediante la expresión:

$$Q_i(x, t) = u_i(x, t)A_i(x, t), \quad i = 1, 2.$$

Los términos  $I_{3,1}$  e  $I_{3,2}$  que aparecen en las ecuaciones de conservación de momento vienen dados por:

$$I_{3,1}(x, t) = \int_{b(x)+h_2(x,t)}^{b(x)+h_1(x,t)+h_2(x,t)} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, z) dz, \quad I_{3,2}(x, t) = \int_{b(x)}^{b(x)+h_2(x,t)} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, z) dz. \quad (3)$$

Finalmente,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  y  $\sigma_b$  están definidas por

$$\begin{aligned} \sigma_1(x, t) &= \sigma(x, b(x) + h_2(x, t) + h_1(x, t)), & \sigma_3(x, t) &= \sigma(x, b(x) + h_2(x, t)), \\ \sigma_2(x, t) &= \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_1(1-r) + r\sigma_3}, & \sigma_b(x) &= \sigma(x, b(x)). \end{aligned}$$

El sistema (1) se puede escribir como:

$$\frac{\partial w^H}{\partial t} + \mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}, w^H) \frac{\partial w^H}{\partial x} = S(x, \boldsymbol{\sigma}, w^H, b) \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} w^H &= \left( A_1(x, t) \quad Q_1(x, t) \quad A_2(x, t) \quad Q_2(x, t) \right)^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \left( \sigma_1(x, t) \quad \sigma_2(x, t) \quad \sigma_3(x, t) \quad \sigma_b(x) \right)^T, \\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}, w^H) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g\bar{h}_1 - u_1^2 & 2u_1 & g\bar{h}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ rg\hat{h}_2 & 0 & g\bar{h}_2 - u_2^2 & 2u_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

con

$$\bar{h}_i = \frac{A_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, 2 \quad \hat{h}_2 = \frac{A_2}{\sigma_1} \quad (6)$$

y

$$S(x, \boldsymbol{\sigma}, w^H, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{A_1}{\sigma_1} \int_b^{b+h_1+h_2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dz - g A_1 \frac{\sigma_b}{\sigma_1} \frac{db}{dx} \\ 0 \\ -g \frac{\sigma_b}{\sigma_2} A_2 \frac{db}{dx} + g A_2 \left( \frac{r}{\sigma_1} \int_b^{b+h_1+h_2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dz + \frac{1-r}{\sigma_3} \int_b^{b+h_2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Teniendo en cuenta las definiciones de  $A_1$  y  $A_2$  y usando la regla de Leibnitz se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x}(A_1 + A_2) = \int_b^{b+h_1+h_2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dz + \left( \frac{db}{dx} + \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) \sigma_1 - \frac{db}{dx} \sigma_b \quad (8)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} = \int_b^{b+h_2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dz + \left( \frac{db}{dx} + \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) \sigma_3 - \frac{db}{dx} \sigma_b. \quad (9)$$

Ahora, usando (8) y (9), el término fuente  $S(x, \boldsymbol{\sigma}, w, b)$  se puede reescribir formalmente como:

$$S(x, \boldsymbol{\sigma}, w^H, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ g\bar{h}_1 \frac{\partial}{\partial x} (A_1 + A_2) - gA_1 \frac{\partial}{\partial x} (b + h_1 + h_2) \\ 0 \\ g\bar{h}_2 \frac{\partial A_2}{\partial x} + rg\hat{h}_2 \frac{\partial A_1}{\partial x} - gA_2 \frac{\partial}{\partial x} (b + h_2 + rh_1) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Los autovalores de  $\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}, w)$  se clasifican en externos (2) e internos (otros 2). Los autovalores externos,  $\lambda_{ext}^\pm$ , están relacionados con la velocidad de propagación de las perturbaciones barotrópicas y los autovalores internos,  $\lambda_{int}^\pm$ , con la velocidad de propagación de las perturbaciones baroclínicas. Desafortunadamente no existen expresiones analíticas para estos autovalores, sin embargo, cuando  $r \cong 1$ , se tienen las siguientes aproximaciones de primer orden (véase [7]):

$$\lambda_{ext}^\pm = \frac{u_1 \bar{h}_1 + u_2 \bar{h}_2}{\bar{h}_1 + \bar{h}_2} \pm \sqrt{g(\bar{h}_1 + \bar{h}_2)} \quad (11)$$

$$\lambda_{int}^\pm = \frac{u_1 \bar{h}_2 + u_2 \bar{h}_1}{\bar{h}_1 + \bar{h}_2} \pm \sqrt{g' \frac{\bar{h}_1 \bar{h}_2}{\bar{h}_1 + \bar{h}_2} \left( 1 - \frac{(u_1 - u_2)^2}{g'(\bar{h}_1 + \bar{h}_2)} \right)}, \quad (12)$$

con  $g' = g(1 - r \frac{\hat{h}_2}{h_2})$ . Obsérvese como, de acuerdo con la expresión (12), el sistema (1) es hiperbólico si

$$F_I^2 = \frac{(u_1 - u_2)^2}{g'(\bar{h}_1 + \bar{h}_2)} \leq 1,$$

siendo  $F_I^2$  conocido como número de estabilidad de Froude.

En los casos que abordamos en las aplicaciones reales, donde  $r \cong 1$ , se tienen las siguientes desigualdades:

$$\lambda_{ext}^- < \lambda_{int}^- < \lambda_{int}^+ < \lambda_{ext}^+.$$

Dependiendo del valor de los autovalores, el flujo se dice que es *subcrítico* si los autovalores internos tienen signos distintos, *crítico* si uno de estos autovalores es cero y, en otro caso, el flujo se dice *supercrítico*. De la expresión de la matriz  $\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}, w)$  se deduce que las secciones crítica, subcrítica y supercrítica se caracterizan por ser secciones donde  $G^2 = 1$ ,  $G^2 > 1$ ,  $G^2 < 1$ , respectivamente, donde

$$G^2 = F_1^2 + F_2^2 - \frac{g'}{g} F_1^2 F_2^2, \quad (13)$$

y

$$F_1^2 = \frac{u_1^2}{g' \bar{h}_1}, \quad F_2^2 = \frac{u_2^2}{g' \bar{h}_2}. \quad (14)$$

En estas expresiones  $G$  y  $F_i$ ,  $i = 1, 2$  son las definiciones adecuadas para este caso del *número de Froude compuesto* y el *número de Froude interno*, respectivamente.

### 3. La componente biológica: un modelo NPZ

La componente biológica del modelo acoplado es un modelo sencillo NPZ que, básicamente, es el mismo que el descrito en [5], pero formulado en variables conservadas. Las tres variables de estado del modelos,  $N$ ,  $P$ ,  $Z$ , se modelizan usualmente en función de su contenido de nitrógeno, al ser el nitrógeno el componente que normalmente limita la producción primaria. Los cambios temporales en la concentración de los contituyentes vienen dadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (A_1 N)}{\partial t} + \frac{\partial (u_1 A_1 N)}{\partial x} &= -f(I) g(N) A_1 P + (1 - \beta) h(P) A_1 Z + \gamma j(Z) A_1 Z. \\ \frac{\partial (A_1 P)}{\partial t} + \frac{\partial (u_1 A_1 P)}{\partial x} &= f(I) g(N) A_1 P - h(P) A_1 Z - i(P) A_1 P, \\ \frac{\partial (A_1 Z)}{\partial t} + \frac{\partial (u_1 A_1 Z)}{\partial x} &= \beta h(P) A_1 Z - j(Z) A_1 Z, \end{aligned} \quad (15)$$

El primer paso para formular un modelo NPZ consiste en determinar las expresiones para las funciones de transferencia que aparecen en las ecuaciones anteriores. La elección de la forma funcional para estos términos es crítica para la dinámica del modelo y puede también restringir la parametrización del modelo debido a los coeficientes necesarios para su escritura. En este trabajo consideramos las mismas parametrizaciones para las funciones de transferencia que en [5]. Sin embargo, hemos implementado una versión del modelo extremadamente versátil que permite a cualquier potencial usuario del modelo, que lo utilice a través de la Plataforma HySEA, escribir y usar cualquier otra expresión funcional para las ecuaciones del modelo NPZ particular que desee considerar de forma sencilla. También es posible realizar la implementación de otros tipos de modelos biológicos más complicados, como el que se presenta en [6].

Las cinco funciones de transferencia que aparecen en un modelo NPZ han sido parametrizadas, en nuestro caso, como se indica a continuación:

- $f(I) = J$  es la respuesta del fitoplancton a la luz, siendo una función de la irradiación solar,  $h_1$ ,  $P$  y otros parámetros como latitud, nubosidad, ...
- $g(N) = \mathcal{Q}_p = \mu_p \frac{N}{k_1 + N}$ , es el consumo de nutrientes por el fitoplancton donde  $\mu_p$  es la tasa máxima de crecimiento para el fitoplancton, y  $k_1$  es el valor medio para la saturación del consumo de nitrato.
- $h(P) = G_p = \frac{\mu_g P}{k_g + P}$ , parametriza la ingestión de fitoplancton por el zooplancton, donde  $\mu_g$  es la tasa máxima de consumo de fitoplancton por el zooplancton, y  $k_g$  el valor medio de saturación.
- $i(P) = m_p = \frac{\mu_1 P}{k_g + P}$ , es la pérdida de fitoplancton, donde  $\mu_1$  es la tasa de mortalidad natural máxima del fitoplancton.

- $j(Z)$  es la pérdida de zooplankton debido a muerte, excreción y predación:

$$m_z = \frac{\mu_z Z}{k_z + Z},$$

donde  $k_z$  es la mitad del valor de saturación para la mortalidad del zooplancton y  $\mu_z$  la tasa máxima de mortalidad del zooplancton.

Finalmente,  $\beta$  es la asimilación de zooplancton y  $\gamma$  es la fracción de pérdida de zooplancton en relación a los nutrientes.

### 3.1. Producción debida a los procesos de mezcla

Además de la advección, los procesos de mezcla entre la capa superficial de agua atlántica y la capa profunda mediterránea son fundamentales para la comprensión de los patrones biogeoquímicos en este área marina (Macías et al., 2007). Con el objetivo de evitar el uso de parametrizaciones complejas para los procesos de mezcla interfacial, que además dependen fuertemente en la elección de diversos parámetros a los que muestran gran sensibilidad, resultando difíciles de ajustar, nosotros hemos considerado el número de estabilidad de Froude,  $F_f^2$ , para determinar cuando los procesos de mezcla tienen lugar y cuando no, a la vez que para modular su intensidad. Cuando  $F_f^2 > 1$  esto está relacionado con la aparición de las conocidas como inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y, en tal caso, la mezcla juega un papel importante. Así pues, podremos parametrizar la mezcla mediante un coeficiente de mezcla a través de la picnoclina que sea constante o bien modularlo en función de este número de estabilidad de Froude.

Teniendo todo esto en cuenta, la expresión final para el modelo para los flujos biogeoquímico considerado es la siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1 N}{\partial t} + \frac{\partial (u_1 A_1 N)}{\partial x} = k_{mix} (N_{deep} - N) - J Q_p A_1 P + (1 - \beta) G_p A_1 Z + \gamma m_z A_1 Z, \\ \frac{\partial A_1 P}{\partial t} + \frac{\partial (u_1 A_1 P)}{\partial x} = -k_{mix} P + J Q_p A_1 P - G_p A_1 Z - m_p A_1 P, \\ \frac{\partial A_1 Z}{\partial t} + \frac{\partial (u_1 A_1 Z)}{\partial x} = -k_{mix} Z + \beta G_p A_1 Z - m_z A_1 Z, \end{cases} \quad (16)$$

donde  $N_{deep}$  es la concentración de nitrato en la capa inferior y  $k_{mix}$  es el coeficiente o función de mezcla a través de la picnoclina. En nuestro caso,  $k_{mix}$  es una función que depende de  $F_f^2$  y  $A_1$ .

Por último el sistema (16) se puede escribir como:

$$\frac{\partial w^B}{\partial t} + \frac{\partial F_B}{\partial x}(w^B, u_1) = S_B(w^B), \quad (17)$$

donde

$$w^B = \begin{pmatrix} A_1 N \\ A_1 P \\ A_1 Z \end{pmatrix}, \quad F_B(w^B, u_1) = \begin{pmatrix} u_1 A_1 N \\ u_1 A_1 P \\ u_1 A_1 Z \end{pmatrix}$$

y

$$S_B(w^B) = \begin{pmatrix} k_{mix} (N_{deep} - N) - J Q_p A_1 P + (1 - \beta) G_p A_1 Z + \gamma m_z A_1 Z, \\ -k_{mix} P + J Q_p A_1 P - G_p A_1 Z - m_p A_1 P, \\ -k_{mix} Z + \beta G_p A_1 Z - m_z A_1 Z. \end{pmatrix}$$

#### 4. Esquema numérico

Las soluciones de (1) y (17) pueden desarrollar discontinuidades, incluso partiendo de datos iniciales suaves. En este trabajo, proponemos un método de volúmenes finitos de segundo orden con limitador de flujo, basado en una combinación no lineal adecuada del esquema IFCP (de “Intermediate Field Capturing Parabola”) introducido en [2] y el esquema Lax-Wendroff, con un tratamiento especial para las ecuaciones de transporte del sistema (17). El esquema que resulta se reduce al IFCP para la componente hidrodinámica y a un esquema tipo upwind con un tratamiento descentrado upwind para las ecuaciones de transporte en las regiones de solución no suave y al método de Lax-Wendroff en las zonas regulares, consiguiéndose orden dos en las regiones suaves. Para ver una descripción completa del esquema numérico véase [4].

#### 5. Tests numéricos

Hemos realizado multitud de test numéricos para distintas geometrías del canal, imponiendo una diversidad de condiciones de contorno y, en particular, imponiendo el efecto de la luz solar constante o dependiente del tiempo. Como ejemplo más complejo hemos considerado la geometría del Estrecho de Gibraltar (extremadamente abrupta y complicada), sobre la cual hemos hecho una imposición realista del efecto de las mareas, al igual que en [1], teniendo en cuenta sus cuatro componentes principales. Hemos realizado varias simulaciones de 10 días en diferentes épocas del año y con una parametrización adecuada del término de irradiación solar.

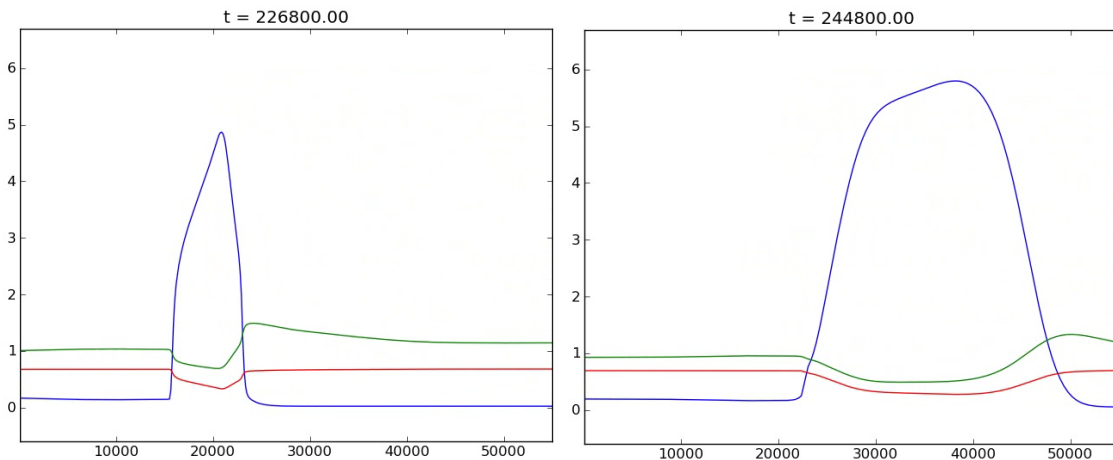


Figura 1: Instantáneas del modelo NPZ en el Estrecho de Gibraltar.

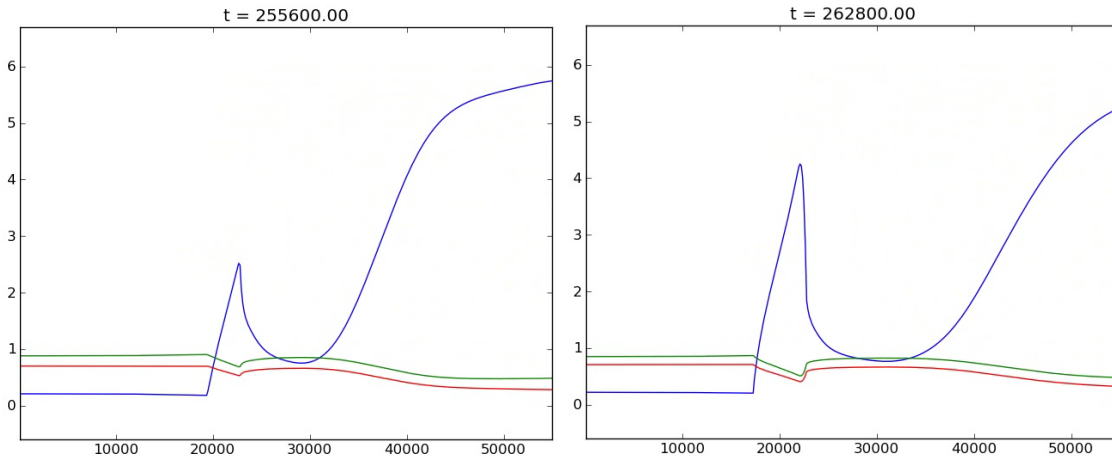


Figura 2: Instantáneas del modelo NPZ en el Estrecho de Gibraltar.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de España y los fondos FEDER a través del proyecto de investigación DAIFLUID (referencia MTM2012-38383-C02-02) y por la Junta de Andalucía a través del proyecto de excelencia TESELA (referencia P11- RNM7069).

## Referencias

- [1] M.J. Castro, J.A. García-Rodríguez, J.M. González-Vida, J. Macías y C. Parés. *Numerical simulation of two-layer shallow-water flows through channels with irregular geometry* J. Comp. Physics., Vol. 195, (2004), pp. 202-235.
- [2] E.D. Fernández-Nieto, M.J. Castro y C. Parés. *On an intermediate field capturing Riemann solver based on a parabolic viscosity matrix for the two-layer shallow water system* J. Sci. Comput., 48(1), (2011), pp. 117-140.
- [3] P.J. Franks. *NPZ models of plankton dynamics: Their construction, coupling to physics, and application*. J. Oceanogr., Vol. 58, (2002), pp. 379-387.
- [4] J. Macías, M.J. Castro y E.D. Fernández-Nieto. *A 1D coupled hydrodynamical biological NPZ model for channels with arbitrary sections*. En preparación, 2013.
- [5] D. Macías, A.P. Martín, J. García-Lafuente, C.M: García, A. Yool, M. Bruno, A. Vázquez-Escobar, A. Izquierdo, D.V. Sein y F. Echevarría. *Analysis of mixing and biogeochemical effects induced by tides on the Atlantic-Mediterranean flow in the Strait of Gibraltar through a physical-biological coupled model*. Prog. Oceanogr., Vol. 74, (2007), pp. 252-272.
- [6] E. Ramírez-Romero , M. Vichi, M.J. Castro, J. Macías, D. Macías, C.M. García y M. Bruno. *Modeling biogeochemical seasonal cycle in the Strait of Gibraltar*. Enviado (2013).
- [7] J.B. Schijf y J.C. Schonfeld. *Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water*. En Proc. of the Minn. Int. Hydraulics Conv., 321-333. Joint meeting IAHR and Hyd. Div. ASCE., Sept. 1953.