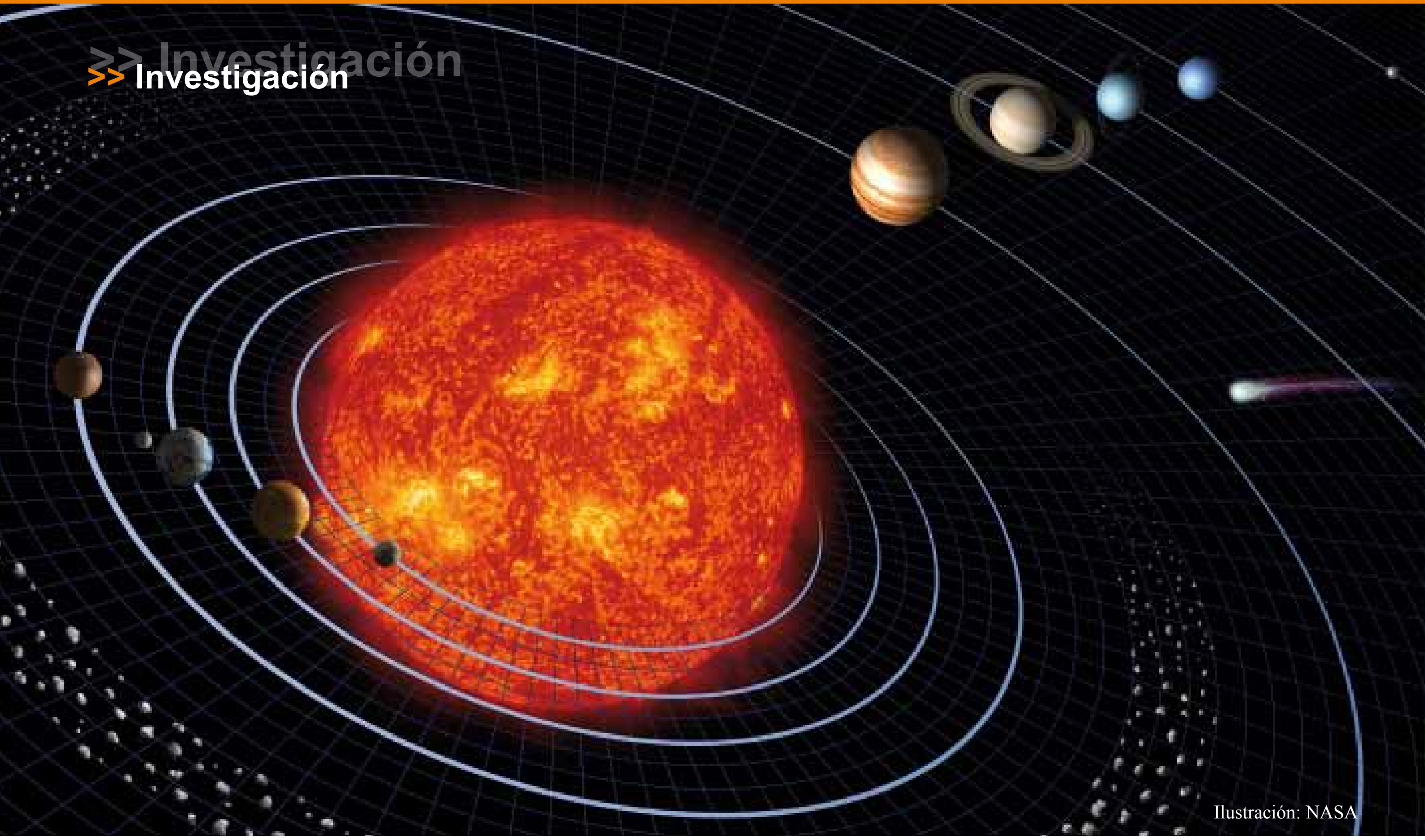


Ilustración: NASA

Kepler, el matemático que pintaba órbitas planetarias

Este científico alemán revolucionó los cánones astronómicos del siglo XVII con tres leyes que demostraron, entre otras cosas, que el recorrido de los planetas en el espacio era elíptico y no circular, y que permitieron saber la masa de los astros a cientos de miles de kilómetros.

>> **Alberto Castellón Serrano** / *Profesor de Astronomía de posición*

Durante el 2009, Año Internacional de la Astronomía (AIA), una considerable cantidad de actividades de todo tipo ha recordado que, hace justo cuatro siglos, Galileo apuntó al cielo con un anteojo fabricado por él mismo. Los descubrimientos que propició aquel nuevo aparato revolucionaron nuestra visión del universo. Sin embargo, hay una segunda efeméride que también se conmemora en el AIA. Y es que en 1609 se produjo asimismo un hecho crucial para el desarrollo de la astronomía y, en general, de la ciencia: Johannes Kepler publicaba, tras una década de investigaciones, *Astronomía nova*. En esta obra el matemático alemán mostró dos resultados rotundos a los que


ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEU
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex observationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:
Jussu & sumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:
Plurium annorum pertinaci studio elaborata Pragæ,
JOANNE KEPLERO,

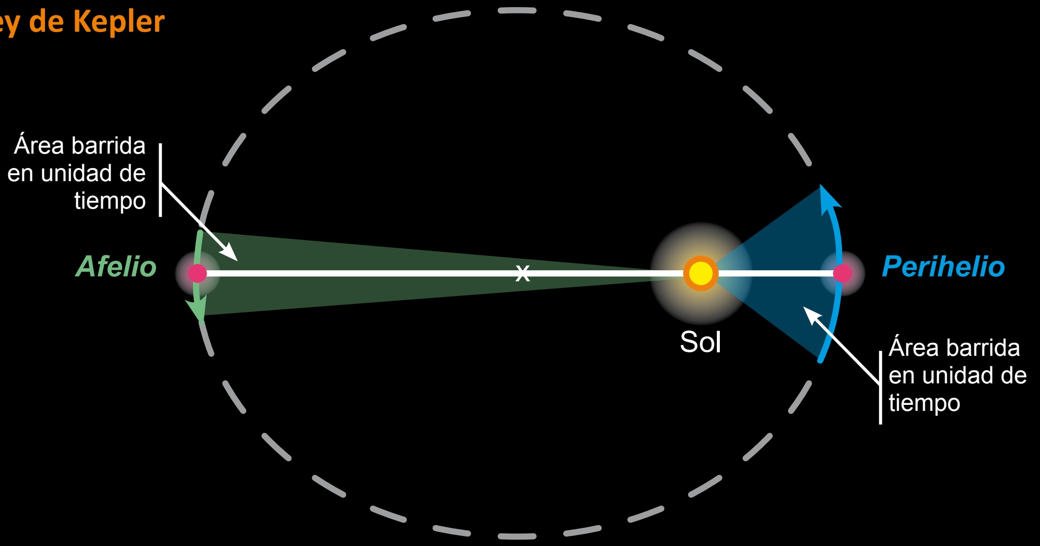
se conoce como *primera ley de Kepler* y *segunda ley de Kepler*. La tercera apareció algo más tarde en *Harmonice mundi* (1619). He aquí sus enunciados:

Primera ley: Los planetas se mueven según órbitas elípticas que tienen al Sol como uno de sus focos.

Segunda ley: El radio que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

Tercera ley: Los cubos de los radios medios de las órbitas de los planetas son proporcionales a los cuadrados de los tiempos que invierten en recorrerlas.

Segunda Ley de Kepler

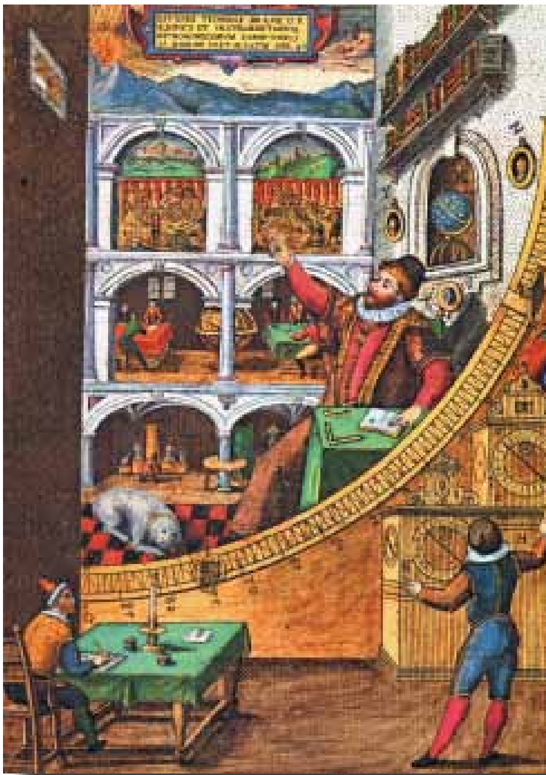


Consiguió predecir tránsitos de Venus y Mercurio por delante del disco solar, aunque no vivió lo suficiente para presenciarlos

Estas tres leyes describían y cuantificaban las evoluciones de las llamadas *estrellas errantes*. Además, permitían calcular con precisión las posiciones que ocuparían los planetas en la esfera celeste a una fecha dada. Por ejemplo, Kepler consiguió predecir tránsitos de Venus y Mercurio por delante del disco solar, aunque no vivió lo suficiente como para presenciarlos. En definitiva, las investigaciones de Kepler, como antes las de Copérnico y Galileo, constituyeron una de las primeras manifestaciones de la ciencia moderna. Kepler comprobó, teniendo en cuenta los tres modelos cosmológicos de los que se disponía en la época (el de Ptolomeo, el de Copérnico y el de Brahe), que los datos observacionales cuadraban con los calculados si se presuponían las leyes anteriores.

Hasta la genialidad de Kepler, no se concebían otras órbitas para los planetas que las circulares. Imposible que la inteligencia del Creador hubiera recurrido a curvas más imperfectas que la circunferencia. No obstante, la matemática griega clásica ya había aportado toda una teoría acerca de las secciones cónicas. En una órbita elíptica, la excentricidad e expresa el cociente c/a entre la semidistancia focal c y el semieje mayor a, también llamado este *radio medio* al obtenerse como media aritmética entre las distancias mínima y máxima del planeta al Sol. (Al lugar de la órbita de distancia mínima se le conoce como *perihelio*, y al de distancia máxima, *afelio*.) La excentricidad, que toma valores en el intervalo [0,1), proporciona una idea del achatamiento de la elipse. Una excentricidad $e = 0$ corresponde a la circunferencia. Salvando a Mercurio ($e = 0.20563$), del que era muy complicado obtener medidas fiables debido a su permanente proximidad al Sol, el resto de las órbitas planetarias poseen excentricidades muy bajas. No obstante, la excentricidad $e = 0.09341$ del planeta Marte ya alcanzaba un valor lo bastante elevado como para que una circunferencia no se ajustase con exactitud a sus movimientos por el cielo. Y de Marte sí que compiló Tycho Brahe una importante cantidad de datos gracias al imponente círculo mural que construyó en su castillo de Uraniborg. Este ha sido el instrumento de medida más preciso (error de 1' de arco) que no se auxiliaba de más óptica que el ojo desnudo. Kepler basó sus cálculos en las valiosísimas *Tablas rudolfinas* de Tycho.

La segunda ley, que puede reenunciarse diciendo que el área del sector de elipse barrida por el radio vector del planeta es proporcional al tiempo, impone que la velocidad del astro no sea uniforme si $e > 0$, alcanzando su máximo en el perihelio, y su mínimo en el afelio. La Tierra, por ejemplo, con $e = 0.01671$, viaja a 30.29 kilómetros por segundo (Km/s) en el perihelio (alrededor del 4 de enero), y solo a 29.29 Km/s en el afelio (hacia el 4 de julio). Esta circunstancia es la causante de que cada *día solar* (intervalo entre dos pasos consecutivos del Sol por el meridiano del lugar) tenga una duración distinta. Así, a las 12:00 de T.U. el Sol no siempre señala el Sur. En ocasiones pasa con adelanto, en ocasiones con retraso, sobre la hora oficial. Estas diferencias son tan apreciables que hay que plasmarlas en los relojes de Sol que aspiren a la precisión.



Uraniborg, ilustración del libro *Astronomiae Instauratae Mechanica*, Tycho Brahe, 1598. Wikimedia Commons

A la derecha, libración lunar en longitud / Foto: Copyright David Haworth

Abajo, modelo platónico del Sistema Solar presentado por Kepler en su obra *Misterium Cosmographicum*. / Wikimedia Commons

Otro efecto palpable de la segunda ley es factible de ser detectado por cualquiera que posea un pequeño telescopio. Se trata de una de las *libraciones* lunares. (Por libración se entiende al fenómeno según el cual puede verse desde la Tierra parte de la cara oculta de la Luna.) Sabido es que las mareas que ejerce la Tierra sobre su satélite han aminorado la rotación lunar de modo que la Luna presenta siempre el mismo hemisferio a la Tierra. Pero la segunda ley, aplicable a cualquier par de cuerpos celestes entre los que se ejerza la gravedad, obliga a la Luna a desplazarse con mayor velocidad en el perigeo (lugar más próximo) que en el apogeo (lugar más alejado). Así, la Luna rota, respecto a su traslación, con algo más de rapidez en el apogeo, mostrándonos por su limbo occidental zonas de su cara oculta. En el perigeo sucede lo contrario, se traslada a más velocidad que la de rotación, no dándole tiempo a ocultar del todo su borde oriental.

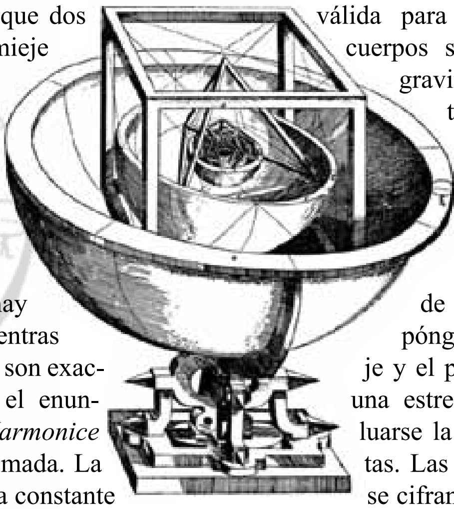
He aquí la expresión matemática de la tercera ley para el sistema solar:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{constante},$$

donde *a* es el semieje mayor (o radio medio) de la órbita de un planeta, y *T*, el periodo de traslación de ese planeta, es decir, el tiempo que tarda en dar una vuelta al Sol. Por ejemplo, el radio medio de Neptuno es unas 30 veces el de la

Ante la imposibilidad de realizar una medida directa, sus tres leyes nos han permitido conocer de forma estimada la masa de los planetas

Tierra. De esta forma, aplicando la tercera ley con el semieje mayor de la Tierra, se obtiene que Neptuno invierte algo más de 164 años en completar un giro alrededor del Sol. Lo que sorprende es que en el periodo de traslación *T* solo influya el radio medio *a*, y no la longitud total de la órbita. Esto quiere decir que dos órbitas del mismo semieje *a*, aun siendo de longitudes muy distintas si es que poseen diferentes excentricidades, serán recorridas en el mismo tiempo.



Por otro lado, hay que advertir que, mientras las dos primeras leyes son exactas, esta tercera, en el enunciado original de *Harmonice mundi*, solo es aproximada. La causa estriba en que la constante del segundo miembro depende en realidad de las masas *M* y *m* de los cuerpos involucrados. (Véase el recuadro adjunto, p.33) En el caso en que *M* represente a la masa del Sol, y *m*, a la de un planeta, esta última masa resulta despreciable en comparación con la de nuestra estrella, de forma que, con los datos de los que disponía Kepler, el cociente a^3/T^2 era prácticamente el mismo para todos los planetas. No obstante, existen ligeras disparidades. Gracias a ellas es posible estimar masas planetarias. En el recuadro se calcula, por ejemplo, la masa de Júpiter $m = 0.00219$ masas solares. Una cantidad pequeña, sí, e insuficiente como para que en el siglo XVII se apreciaran desviaciones a la tercera ley, pero esas 0.00219 masas solares son significativas.

La expresión exacta de la tercera ley, válida para cualquier pareja de cuerpos sometidos a atracción gravitatoria mutua, permite entonces cuantificar masas de cuerpos celestes sin necesidad de proceder con una medida directa, imposible de realizar. Si se calcula, póngase por caso, el semieje y el periodo de la órbita de una estrella doble, podrá evaluarse la masa conjunta de éstas. Las masas de los planetas se cifran con cierta precisión a partir de las órbitas de sus satélites (naturales o artificiales). Estos poseen masa despreciable en relación a su planeta. Y, al girar con mucha rapidez, se dispone de una gran cantidad de datos acerca de su trayectoria.

Newton se inspiró en la tercera ley para su 'regla del inverso', de la que deduciría su famosa teoría de la gravitación universal

Por desgracia, no hay suficiente espacio en estas líneas para incluir el interesante relato de cómo Kepler concibió sus tres leyes. Baste mencionar que el astrónomo danés Tycho Brahe contrató a Kepler como matemático. Siempre recelaron el uno del otro. Brahe dosificaba los datos que proporcionaba a Kepler, pues solo estaba interesado en validar su modelo del cosmos. Hubo de fallecer este para que Kepler se hiciera con las *Tablas rudolfinas*.

Fue la tercera ley la que inspiró a Newton la regla del inverso del cuadrado de la distancia. A partir de ahí formuló la ley de la gravitación universal y dedujo, como consecuencia de ella, las tres leyes de Kepler. Además, otros dos tipos de órbitas fueron descritas, las hiperbólicas y las parabólicas, que son las seguidas por cuerpos que no llegan a ser capturados en trayectorias estables. Asimismo, Newton integró el movimiento balístico estudiado por Galileo. Al parecer, Hook manifestó a Halley que había constatado la ley de las elipses a partir de su propia teoría de la gravedad como fuerza de emanación, pero no le revelaría los argumentos hasta que no los tuviese a punto. Halley, enfadado, visitó a Newton para preguntarle cómo sería una órbita en caso de satisfacerse la ley del inverso del cuadrado de las distancias. (*La fuerza con que se atraen dos cuerpos es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.*) Newton respondió de inmediato: *una elipse*. Y es que Newton concluyó con tal hecho cuatro años antes, pero había perdido la demostración. Tardó cuatro meses en reconstruirla y mejorarla, fruto de lo cual publicó los *Principia*.

Finalmente, las leyes de Kepler dejarían de tener validez en física relativista. Sin embargo, con el grado de precisión de los actuales instrumentos de medida, solo se observan discrepancias respecto de la física newtoniana en la proximidad de objetos muy masivos, en donde se hace significativa la curvatura del espacio-tiempo. En el caso del sistema solar, este hecho únicamente se constata en la órbita de Mercurio. Pero esto ya es otra historia…

Mapa del mundo, de *Tabulae Rudolphine.* (Wikimedia Commons)

>> Tercera Ley de Kepler

De las leyes de Newton se deduce la siguiente expresión de la tercera ley de Kepler:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}\,(M+m),$$

donde G es la constante de la gravitación universal, a es el semieje mayor (o radio medio) de la órbita, y T es el periodo de traslación de un cuerpo de masa m que gira alrededor de un cuerpo de masa M. En realidad, ambos cuerpos giran alrededor del centro de masas del sistema. Decir que un cuerpo gira alrededor de otro no es sino adoptar el punto de vista del cuerpo más masivo.

En 1976, la Unión Astronómica Internacional estableció como unidad de masa la masa solar, como unidad de longitud la unidad astronómica (U.A.), que es el radio medio de la órbita terrestre (unos 150 millones de kilómetros), y como unidad de tiempo el día de 86400 segundos del Sistema Internacional. Si se expresa la constante G en tales unidades, la tercera ley queda en la forma

$$133412.5728\,\frac{a^3}{T^2} = M+m$$

Por ejemplo, en el Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid del 2008 se leen los siguientes datos para Júpiter:

$$T = 4330.62 \text{ días}, \quad a = 5.203363 \text{ U.A.}$$

Esto da $M + m = 1.00219$, que sería la masa conjunta del Sol y de Júpiter. Y como $M = 1$, ya que el Sol posee una masa solar, se deduce entonces que Júpiter tiene $m = 0.00219$ masas solares.