Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Departamento de Matemática Aplicada

Semántica funcional para lógicas temporales$\times$modales. Definibilidad y Teoremas de Completitud.

Emilio José Muñoz Velasco

Tesis Doctoral

Universidad de Málaga

Junio 2003

Dña. Inmaculada Pérez de Guzmán Molina y
D. Alfredo Burrieza Muñiz, CERTIFICAN:

Que D. Emilio José Muñoz Velasco, Licenciado en Ciencias (Sección Matemáticas), ha realizado en el Departamento de Matemática Aplicada de la E.T.S. de Ingeniería Informática de la Universidad de Málaga, bajo nuestra dirección, el trabajo de investigación correspondiente a su Tesis Doctoral titulado:

Semántica funcional para lógicas temporales×modales. Definibilidad y Teoremas de Completitud.

Revisado el presente trabajo, estimamos que puede ser presentado al Tribunal que ha de juzgarlo. Y para que conste a efectos de lo establecido en el artículo octavo del Real Decreto 778/1998, autorizamos la presentación de este trabajo en la Universidad de Málaga.

Málaga, a 2 de junio de 2003.

Dra. Inmaculada Pérez de Guzmán Molina   Dr. Alfredo Burrieza Muñiz

Índice general

Objetivos:

Este trabajo está enmarcado en un área de conocimiento teórico, concretamente en el campo de la **Lógica Formal** como parte de los **Fundamentos Matemáticos de la Computación**. Sin embargo, su motivación ha partido de un área de conocimiento aplicado como la búsqueda de lógicas adecuadas para la especificación y control de procesos y sistemas multiagentes. Las lógicas introducidas permiten la especificación y control de procesos paralelos y el comportamiento de distintos agentes conectados en red. La investigación llevada a cabo por el grupo de investigación GIMAC [1] hasta la fecha de inicio de este trabajo, cuyo objetivo puede ser descrito como:

> *El diseño de una nueva metodología de demostración automática de teoremas que contribuya al uso real de software deductivo y, en definitiva, al uso de la lógica en Computación*

y, concretamente, los estudios realizados en el grupo en aspectos tanto teóricos como aplicativos de las lógicas modales y temporales, llevó a los directores del presente trabajo a plantear como lógica adecuada a las aplicaciones anteriormente señaladas una lógica **temporal**$\times$**modal**. Pensamos en un conjunto no vacío de mundos, W; cada $w \in W$, es la etiqueta de un conjunto no vacío T_w, llamado *flujo de tiempo* del mundo w. Los flujos de tiempo son conjuntos dotados de un orden lineal estricto y disponemos además de un conjunto de funciones parciales no vacías (*funciones de accesibilidad*).

Con esta visión, consideramos como aspecto destacado y novedoso en la investigacion:

> *El estudio de la definibilidad de las propiedades destacadas de clases de funciones tales como: totalidad, sobreyectividad, inyectividad, crecimiento, componibilidad,...*, sin necesidad de hacer uso de la lógica de segundo orden.

Deseamos destacar que nuestro trabajo ha tenido un punto de partida diferente a la de los trabajos existentes en la bibliografía en los que encontramos contemplada la combinación de tiempo y modalidad y en los que se abordan cuestiones filosóficas tales como el determinismo, la teoría de la acción, la causalidad, los condicionales, etc. Ver, por ejemplo, [Aqvist(1999)], [Belnap and Perloff(1990)],[Belnap(1996)], [Chellas(1992)], [Kutschera(1993)], [Reynolds(1997)], [Thomason(1984)], [Thomason and Gupta(1981)], [Van Fraassen(1981)] , [Zanardo(1986)], [Stirling(1996)], [Fagin, Halpern, Moses and Vardi(1995)].

Para cada una de las lógicas introducidas en el trabajo, hemos contemplado cuatro aspectos fundamentales:

- El diseño de un lenguaje adecuado, introduciendo conectivas que permiten especificar el acceso a información en instantes asociados a un flujo temporal (nombrado o no).

[1] Grupo de Investigación en herramientas matemáticas para la Computación

- Introduciendo una semántica novedosa de estilo algebraico, que incorpora clases de funciones de accesibilidad entre flujos temporales.
- Definiendo sistemas axiomáticos que permitan caracterizar sintácticamente la noción de validez semántica.
- El análisis de corrección y completitud de las teorías introducidas.

Como veremos a lo largo del trabajo, nuestro estudio de lógicas que combinan tiempo y modalidad, a diferencia de los encontrados en la bibliografía hasta la fecha, se realiza de modo que nos permita obtener un marco general. En este sentido, en el estudio de la semántica, hemos introducido un nuevo tipo de estructuras, a las que hemos denominado *estructuras funcionales*, que nos permiten mejorar los planteamientos anteriores debilitando la componente modal (no restringiéndonos a la base S5), establecer conexiones entre los flujos temporales de múltiples formas y llevar a cabo diferentes comparaciones entre mundos con distintas medidas de tiempo.

Como tendremos ocasión de mostrar, las estructuras funcionales son más generales que las tradicionales en el tratamiento de lógicas sobre tiempo y modalidad (estructuras $T{\times}W$ y estructuras Kamp) y se muestran adecuadas para el análisis específico de las propiedades de funciones, el cual no es posible realizar con las estructuras tradicionales. Su novedad, frente a las estructuras $T{\times}W$ y las estructuras Kamp consiste en que la conexión entre los procesos o los agentes permite hacer distinciones más finas y flexibles desde el punto de vista temporal, debido al uso de funciones. Se permite tanto una sincronización de los procesos involucrados como una comparación entre diferentes medidas de tiempo (cada proceso puede contar con su propio reloj).

Por otra parte, las lógicas con índices para denotar los flujos temporales de llegada (introducidas en el capítulo 3) permiten discriminar los procesos que se quieren controlar específicamente en una red.

Por último, la combinación de lenguajes funcionales indizados (del capítulo 3) con lenguajes funcionales genéricos (del capítulo 2) introducida en el capítulo 4, permite contar con una potente herramienta para distinguir entre acciones precisas e indefinidas.

Aportaciones y Estructura del Trabajo:

En el **capítulo 1**, y con la finalidad de hacer el trabajo autocontenido, introducimos los conceptos y resultados de los que haremos uso a lo largo del mismo. Concretamente, recordamos algunas nociones sobre relaciones y funciones, de conjuntos inductivos e inducción estructural. Además,

- Comentamos el papel de la lógica en las Ciencias de la Computación.
- Resumimos los aspectos de los que haremos uso de la Lógica Clásica Proposicional.

- Recordamos la clasificación de Susan Haak [Haak(1978)] de las lógicas no clásicas.

- Presentamos un breve resumen tanto de la lógica modal proposicional como de la lógica temporal proposicional, componentes básicas en nuestro desarrollo, limitándonos a los aspectos de los que haremos uso en este trabajo.

- Recogemos las lógicas que combinan tiempo y modalidad existentes en la bibliografía, a las que haremos referencia en el capítulo 2 para enmarcarlas en nuestro trabajo.

  Desde un punto de vista semántico, los planteamientos propuestos para este tipo de estudios (en unos explícitamente y en otros más o menos de forma implícita) se han desarrollado bajo dos ideas diferentes:

  (i) la de considerar el flujo del tiempo como algo independiente de los mundos posibles, como es el caso de las estructuras $T \times W$;

  (ii) el tiempo depende o es relativo a cada mundo posible, como es el caso de las estructuras Kamp y de las estructuras Ockham [2].

  En nuestra discusión subsiguiente, consideraremos las estructuras $T \times W$ y las estructuras de Kamp y dejaremos de lado otros tipos de estructuras para tratar conjuntamente operadores modales y temporales, como las estructuras Ochamistas (para tiempo ramificado) y las estructuras neutras (en inglés *neutral frames*, donde el tiempo puede contener *clusters* [3]. La razón es que los desarrollos que nos interesan contemplan únicamente flujos estríctamente lineales y en este trabajo nos vamos a centrar en este tipo de tiempo.

En el **capítulo 2**, aportación de este trabajo, presentamos una lógica temporal×modal que, como hemos indicado en la introducción de este trabajo, se define (tanto en los aspectos sintácticos, como en los aspectos semánticos) con la finalidad de disponer de un marco general para este tipo de lógicas multimodales, en el que se enriquezcan los trabajos existentes en la bibliografía y que, en consecuencia, puedan ser útiles para cuestiones mencionadas como la teoría de la acción, la causalidad, los condicionales, el estudio de los procesos, sistemas multiagentes, etc.

Nos centramos tanto en los aspectos teóricos, de interés por sí mismos, desde el punto de vista matemático (tales como aspectos de definibilidad y completitud),

[2]Estas estructuras son arbóreas y son aptas para tratar tiempo ramificado. Si consideramos que cada rama del árbol es un mundo posible, podemos entender que en las estructuras Ockham el tiempo depende de cada mundo posible. Las estructuras Ockham han sido propuestas inicialmente por [Prior(1967)] y su generalización a estructuras de "haces" (*bundle trees*) ha sido realizada por Burgess (véase, por ejemplo, [Burgess(1979)] p. 577). Estas últimas estructuras son equivalentes a las estructuras Kamp (ver [Zanardo(1996)]).

[3]En castellano, *agrupamientos*). Según [Segerberg(1970)], dado un conjunto W dotado de una relación transitiva R, los clusters son las clases de equivalencia de W bajo la relación de equivalencia siguiente: $x \simeq y$ si, y sólo si xRy e yRx, o bien $x = y$. Los clusters pueden ser de tres tipos: *propios*, con al menos dos elementos, *simples*, con un elemento reflexivo o *degenerados*, con un elemento irreflexivo. (Para más detalles, véanse [Burgess(1984)] y [Thomason(1984)]).

como en aspectos aplicativos computacionales (teniendo en mente contemplar, por ejemplo, los mundos como memorias de computadores en red, cada uno de los cuales con su propio reloj). Para ello, introducimos un nuevo tipo de estructuras, denominadas *estructuras funcionales*, donde se utilizan funciones (llamadas *de accesibilidad*) para interconectar flujos de tiempo. A diferencia de los planteamientos anteriormente citados, contemplar funciones nos permite:

- debilitar la componente modal (no restringiéndonos a la base S5),
- establecer conexiones entre los flujos temporales de múltiples formas,
- llevar a cabo diferentes comparaciones entre mundos con distintas medidas de tiempo.

Como tendremos ocasión de mostrar, esta opción nos permite un estudio de la *definibilidad de las propiedades básicas de clases de funciones (totalidad, inyectividad, sobreyectividad, crecimiento, decrecimiento, etc)* sin necesidad de recurrir a teorías de segundo orden. Esta última característica es una aportación destacada de este trabajo.

La lógica presentada, a la que denotamos $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ (donde el superíndice $\mathcal{F}$ destaca la novedad de la componente funcional en la semántica) es un punto de partida adecuado para otras lógicas de interés que, de modo natural, reclaman o bien extender o bien restringir $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$.

La estructura del capítulo es como sigue:

- Comenzamos introduciendo la lógica $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$. Su lenguaje, denotado $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$, incluye el operador modal específico $\Box^{\mathcal{F}}$ (leyendo $\Box^{\mathcal{F}}A$ como "A es cierta en todo instante accesible desde el instante en el que hablo o ejecuto") y su dual $\Diamond^{\mathcal{F}}$.

- Como aportación destacada, definimos la semántica funcional para el lenguaje $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$:
  Definimos una **estructura funcional** para $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ como una terna $(W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, donde W es un conjunto no vacío (conjunto de etiquetas para un conjunto de flujos temporales). $\mathcal{T}$ es a conjunto no vacío de órdenes estrictos lineales indizado por W, es decir,

  $\mathcal{T} = \{(T_w, <_w) \mid w \in W\}$ tales que, $T_w \neq \varnothing$ para todo $w \in W$, y si

  $w \neq w'$, se tiene que $T_w \cap T_{w'} = \varnothing$. $\mathcal{F}$ es un conjunto de funciones no vacías, llamadas **funciones de accesibilidad**, tales que:

  a) cada función de $\mathcal{F}$ es una función parcial de T_w en $T_{w'}$ para algún par $w, w' \in W$.
  b) para cualesquiera $w, w' \in W$ hay a lo sumo una función de T_w en $T_{w'}$, denotada $\xrightarrow{w\ w'}$, en $\mathcal{F}$.

Introducimos la noción de **modelo funcional** para $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ y las nociones de satisfacibilidad, validez en un modelo funcional, validez en una estructura funcional, validez, validez en una clase de estructuras funcionales, equivalencia lógica y consecuencia lógica.

- Introducimos una clase especial de funciones, $\mathcal{F}$, que satisface la **condición de dominio uniforme**, que denotamos por (`U-Dom`) y que jugará un papel destacado a lo largo de todo el trabajo.

- Estudiamos la **Definibilidad de propiedades de funciones en** $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ (sección 2.2). Concretamente, determinamos las fórmulas cuya validez caracteriza clases de estructuras determinadas por propiedades habituales de funciones. Para ello, comenzamos con resultados que proporcionan estas caracterizaciones algebraicas para las propiedades estándares de las funciones (teorema 2.2.2), para posteriormente caracterizar algebraicamente las estructuras funcionales, $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, atendiendo a las propiedades de la clase de funciones $\mathcal{F}$ (lema 2.2.3, teoremas 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6, 2.2.7, 2.2.8 y 2.2.9). De este modo, tenemos todos los elementos necesarios para abordar el estudio de la definibilidad en $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ de clases de estructuras funcionales determinadas por propiedades básicas de las funciones, especificamente:

  - La definibilidad de clases de estructuras funcionales con funciones (`U-Dom`), la definibilidad de estructuras funcionales con funciones totales y la definibilidad de estructuras funcionales con funciones (`U-Dom`) no totales (teoremas 2.2.10, 2.2.11, 2.2.12).
  - La definibilidad de clases de estructuras funcionales con funciones constantes (teorema 2.2.13).
  - La definibilidad de clases de estructuras funcionales con funciones inyectivas y con funciones sobreyectivas (teoremas 2.2.14 y 2.2.15)
  - La definibilidad de clases de estructuras funcionales con funciones crecientes y con funciones decrecientes (teoremas 2.2.16 y 2.2.18)

- Analizamos la relación entre la $(T \times W)$-validez y la Kamp-validez, bien conocidas, con la validez respecto a las estructuras funcionales y demostramos que las estructuras funcionales constituyen una fuerte generalización de las estructuras *Kamp* y, consecuentemente, de las estructuras $T \times W$ (teorema 2.3.5).

- Definimos sistemas axiomáticos para $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$. Comenzamos introduciendo un sistema minimal, $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$, en el que nada se exige a la componente funcional y en el que, siguiendo nuestra opción, consideramos flujos temporales lineales. Posteriormente, introducimos el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(U\text{-}Dom)$ que caracteriza sintácticamente la clase de estructuras

$$\mathbb{K}_1 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase } (\texttt{U-Dom}) \text{ de funciones } \}$$

El sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$, que caracteriza sintácticamente la clase de estructuras

$$\mathbb{K}_2 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase de funciones totales}\}$$

- Presentamos resultados de caracterización (corrección y completitud) de los sistemas funcionales minimales (Lema del agotamiento para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$ 2.5.19 y teoremas 2.5.20, 2.5.23, 2.5.25).

- Abordamos el estudio de completitud de sistemas funcionales no minimales. En particular, demostramos que, en el caso de funciones totales y constantes el sistema es completo. Por su parte, en el caso de las inyectivas y sobreyectivas demostramos que podemos construir una cadena infinita de sistemas incompletos.

En el **capítulo 3**, analizamos que el estudio realizado en el capítulo 2, no permite especificar a qué flujo concreto deseamos ir mediante una función de accesibilidad. Sin embargo, en las aplicaciones que tenemos en mente, y en particular en todas las relativas a la modelización y proceso de ordenadores en red, esta posibilidad es requerida con frecuencia. Para resolver este problema, proponemos incluir en el lenguaje conectivas del tipo $<i>$, de forma que la expresión $<i>A$ tiene como lectura: *"A es verdadera en el flujo i, exactamente en la imagen del instante de referencia (o donde me hallo)".*

La utilización de nombres en los lenguajes modales se remonta a Prior (1967), con el estudio de una lógica temporal de tiempo ramificado. Más recientemente, [Blackburn(1993)], [Passy and Tinchev(1991)], [Gargov and Goranko(1993)] y [Brown and Goranko(1999)] han hecho uso de nombres en el lenguaje modal proposicional para denotar instantes (o mundos posibles). El uso de nombres permite contemplar restricciones específicas sobre las estructuras, con lo cual es posible definir propiedades de las relaciones que no son definibles en los lenguajes modales al uso (por ejemplo, la irreflexividad). En nuestro caso, como hemos indicado, el interés práctico de la utilización de nombres es computacional: poder especificar a qué memoria de ordenador accedemos desde un lugar determinado.

Con este punto de partida, en el **capítulo 3**, aportación de este trabajo, presentamos una lógica (modal-etiquetada)$\times$temporal, denotada $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$. Como veremos, la lógica $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ (al igual que $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$) asegura la definibilidad de propiedades básicas de las funciones.

Tras el estudio de la definibilidad, definimos sistemas axiomáticos caracterizados por clases de estructuras en las que las funciones de accesibilidad poseen propiedades destacables. Como veremos, el sistema minimal introducido es *completo.* Por otra parte, como en el capítulo anterior, realizamos el estudio de completitud de otros sistemas funcionales no minimales y analizamos que la incorporación de índices mantiene los resultados de completitud para el caso de funciones totales y constantes, aporta la completitud para los casos de funciones inyectivas y monótonas, aunque se mantiene el resultado de incompletitud para el caso de funciones sobreyectivas [4].

La estructura del capítulo es como sigue:

[4] Como veremos en este capítulo, los resultados de completitud para los sistemas indizados dependen fuertemente del modo de incorporar los índices. Por lo tanto, lo que probaremos es que no basta indicar el flujo de llegada para obtener la completitud.

- Comenzamos introduciendo las lógicas

$$\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}\text{-}\mathfrak{I} = (L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}\text{-}\mathfrak{I}, \mathcal{M}^{\mathcal{F}}\text{-}\mathfrak{I})$$

  donde $\mathfrak{I}$ es un conjunto de índices no vacío y numerable, cuya elección determina una lógica concreta, $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ denota el lenguaje y $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$-$\mathfrak{I}$ los modelos funcionales para $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$.

  El lenguaje $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ incluye una familia de conectivas modales monarias de la forma $<i>^{\mathcal{F}}$, para $i \in \mathfrak{I}$ y sus duales $[\,i\,]^{\mathcal{F}}$ (la lectura de $<i>\,^{\mathcal{F}}A$ es la siguiente:

  A es verdadera en algún instante del flujo temporal T_i, exactamente en el instante imagen del presente (desde el que ejecuto o hablo)).

- Como en el capítulo anterior, definimos la semántica funcional para el lenguaje $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$: Definimos una **estructura ind-funcional** para $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ como una terna $\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, donde W es un conjunto no vacío (conjunto de etiquetas para un conjunto de flujos temporales). $\mathcal{T}$ es a conjunto no vacío de órdenes estrictos lineales indizado por W. $\mathcal{F}$ es un conjunto de funciones no vacías, llamadas **funciones de accesibilidad**. En este contexto, la definición de $\mathcal{T}$ depende sólo del conjunto (de etiquetas) W, mientras que $\mathcal{F}$ depende de W e $\mathcal{I}$. Por otra parte, no exigimos que $\mathfrak{I} \subseteq W$ para poder contemplar estructuras de cardinalidad arbitraria.

- Por otra parte, la definición anterior establece que las imágenes de las funciones estén siempre nombradas por índices del lenguaje. La razón es doble, una referida a las aplicaciones y otra de interés tanto teórico como aplicativo:

  (i) nuestro deseo es saber siempre a dónde vamos, especificar el destino [5].

  (ii) podremos establecer la definibilidad de propiedades de la clase de todas las funciones de una estructura con cada elección de $\mathfrak{I}$.

  Introducimos la noción de **modelo ind-funcional** para $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ y las nociones de satisfacibilidad, validez en un modelo funcional, validez en una estructura funcional, validez, validez en una clase de estructuras funcionales, equivalencia lógica y consecuencia lógica.

- Estudiamos la **Definibilidad de propiedades de funciones en $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$** (sección 3.2). Es decir, como en el capítulo anterior, determinamos las fórmulas cuya validez caracterizan clases de estructuras determinadas por propiedades habituales de funciones. Especificamente:

  - La definibilidad de clases de estructuras funcionales con funciones no totales, de clases de estructuras funcionales con funciones constantes, de clases de estructuras funcionales con funciones inyectivas y con funciones sobreyectivas y de clases de estructuras funcionales con funciones crecientes y con funciones decrecientes (teorema 3.2.2).

[5] En particular el ordenador en el que queremos ejecutar con unos requisitos determinados.

- La definibilidad de clases de estructuras funcionales con funciones totales, de clases de estructuras funcionales con funciones totales y constantes, de clases de estructuras funcionales con funciones totales e inyectivas y de clases de estructuras funcionales con funciones totales y crecientes y con funciones totales y decrecientes (teorema 3.2.3)

- Definimos Sistemas axiomáticos para $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$. Comenzamos introduciendo un sistema axiomático para tratar funciones parciales y, posteriormente, diversas extensiones de dicho sistema para tratar las propiedades básicas de las funciones consideradas en el ítem anterior (sección 3.3).

- Presentamos resultados de caracterización (corrección y completitud) de los sistemas para funciones parciales presentados (Lema 3.4.15 del agotamiento para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Parc$ y teoremas 3.4.16, 3.4.18).

- Abordamos el estudio de completitud de los sistemas funcionales introducidos (teoremas 3.5.3, 3.5.6, 3.5.10, 3.5.15 y 3.5.20) salvo para la propiedad de sobreyectividad.

- Analizamos que la consideración de índices mejora el resultado para la propiedad de la inyectividad y las lagunas pendientes respecto de las funciones crecientes y decrecientes. Aún así, por lo que se refiere a la sobreyectividad, mostramos que se mantiene el resultado de incompletitud del sistema indfuncional correspondiente.

En el **capítulo 4** enriquecemos el estudio realizado en los dos capítulos anteriores. Por una parte, abordamos nuevos aspectos de la definibilidad de propiedades de funciones en el marco de las lógicas *temporales*$\times$*modales* que inciden en la base modal de los sistemas funcionales. Concretamente, contemplamos operaciones en el conjunto de funciones de accesibilidad tales como la operación de composición, no contempladas en los capítulos anteriores y analizamos la extensión natural de las propiedades reflexiva, transitiva, simétrica, euclídea y serial de las estructuras de Kripke en la lógica modal.

Además, si en los capítulos anteriores hemos contemplado la extensión *Temporal* $\times$ *Modal* en su componente modal de forma excluyente, es decir, en el capítulo 2 hemos contemplado la posibilidad de especificar afirmaciones *en algún flujo accesible* (utilizando conectivas modales-funcionales) y en el capítulo 3 la posibilidad de especificar afirmaciones *en un flujo accesible determinado* (utilizando conectivas modales-funcionales indizadas), en este capítulo enriquecemos nuestro estudio previo, para obtener mayor grado de expresividad; concretamente, para poder especificar ambos tipos de afirmaciones. [6]

De nuevo, contemplar esta extensión, no sólo tiene un interés puramente teórico sino que viene reclamado por las aplicaciones. Así, en el estudio de Procesos

[6] De un modo análogo a lo que ocurre con las afirmaciones temporales en la lógica temporal lineal con flujo de tiempo discreto en las que es posible especificar afirmaciones sobre instantes futuros indeterminados (mediante la conectiva F –*alguna vez en el futuro*–) y afirmaciones sobre instantes futuros determinados (mediante la conectiva $\oplus^n$ – *dentro de n instantes*–).

(véase [Stirling(1996)]) podemos encontrar un ejemplo de la utilización de conectivas modales indizadas junto con otras no indizadas, utilizándose las conectivas con índices para propiedades de procesos que se mantienen tras la actuación de un conjunto de acciones (que es el que indiza la conectiva), mientras que las conectivas sin índices se utilizan para propiedades que se mantienen tras cualquier conjunto de acciones.

Comenzamos introduciendo esta extensión en el modo natural mediante las lógicas

$$\widehat{\mathcal{L}}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}\text{-}\mathfrak{I} = (\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}\text{-}\mathfrak{I},\ \widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{F}}\text{-}\mathfrak{I})$$

donde $\mathfrak{I}$ es un conjunto de índices no vacío y numerable, cuya elección determina una lógica concreta, $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ denota el lenguaje y $\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{F}}$-$\mathfrak{I}$ los modelos funcionales para $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$.

Finalmente, contemplamos nuevas propiedades en el conjunto de funciones de accesibilidad $\mathcal{F}$. Recordemos que en las estructuras kripkeanas se establece una relación binaria entre los "mundos posibles" de un conjunto no vacío W llamada *relación R de accesibilidad*. En cambio, en las estructuras funcionales introducimos W como un conjunto de etiquetas para flujos temporales (los flujos T_w, $w \in W$) asociados a cada mundo) y entre estos flujos establecemos una conexión descrita mediante funciones. Analizamos que esta conexión *funcional* induce una relación (de accesibilidad) entre las etiquetas (elementos de W) de los flujos conectados. Es natural, en consecuencia, plantearse estructurar el conjunto $\mathcal{F}$ de funciones de accesibilidad, dotándolo de propiedades análogas a las contempladas en la lógica modal y que dan lugar a los sistemas modales bien conocidos. Sin embargo, mostramos en este capítulo que podemos establecer discriminaciones más finas conforme a las propiedades de las funciones. Más concretamente, podemos establecer por ejemplo, una relación transitiva entre flujos mediante composición o no. Esto nos lleva a que podamos definir la mencionada propiedad de transitividad (y otras propiedades) de la relación de accesibilidad $R_{\mathcal{F}}$ inducida de diferentes maneras, según las propiedades específicas que conlleve el conjunto de funciones. Lo cual dota al planteamiento funcional de mayor versatilidad.

Específicamente, en este capítulo:

- consideramos la propiedad de reflexividad y mostramos que puede ser capturada con nuestro planteamiento funcional de dos modos, que hemos denominado reflexividad "débil" y "reflexividad" respectivamente.

- consideramos la propiedad de transitividad que, como en el caso de la reflexividad, puede ser capturada con nuestro planteamiento funcional de dos modos, débil y fuerte.

- igualmente, definimos las propiedades simétrica, euclídea y serial débil y fuerte.

Para todas ellas aportamos caracterizaciones conjuntistas.

Finalmente, terminamos el trabajo describiendo el trabajo futuro.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, en aras de hacer el trabajo autocontenido en la medida de lo posible, introducimos los conceptos y resultados de los que haremos uso.

1.1. Definiciones básicas

1.1.1. Relaciones y Funciones

Definición 1.1.1 *Dados dos conjuntos A y B, llamaremos* **relación** *o* **correspondencia** *de A en B a cualquier subconjunto de $A \times B$. Llamaremos* **relación binaria** *en un conjunto A a cualquier relación de A en A.*

Definición 1.1.2
Dados dos conjuntos A, B y una relación R de A en B, llamaremos:

- **Origen** *de R al conjunto A y lo denotaremos $\mathcal{O}rigen(R)$.*
- **Dominio** *de R al conjunto:*

$$Dom(R) = \{a \in A \mid \text{ existe } b \in B \text{ tal que } aRb\}$$

- **Recorrido** *de R al conjunto B y lo denotaremos $\mathcal{R}ecorrido(R)$.*
- **Imagen** *de R al conjunto*

$$Im(R) = \{b \in B \mid \text{ existe } a \in A \text{ tal que } aRb\}$$

Dadas dos relaciones de A en B, tiene sentido hablar de su *unión* y de su *intersección* conjuntistas. Además, podemos generar nuevas relaciones a partir de las siguientes definiciones.

Definición 1.1.3 *Dados tres conjuntos A, B y C, una relación R de A en B y una relación S de B en C, definimos la* **composición** *de R y S como una relación de A en C, denotada $R \circ S$, definida como sigue: Para todo $a \in A, c \in C$ se tiene que :*

$$a(R \circ S)c \quad \text{ si y sólo si } \quad \text{existe } b \in B \text{ tal que } aRb \text{ y } bSc$$

Definición 1.1.4 *Dados dos conjuntos A, B y una relación R de A en B, definimos la* **relación inversa** *de R, como la relación de B en A, denotada R^{-1} definida como sigue: Para todo $a \in A, b \in B$ se tiene que :*

$$b\,R^{-1}a \quad \text{si y sólo si } aRb$$

Definición 1.1.5 *Sea A un conjunto y R una relación binaria sobre A. Diremos que:*

- *R es* **reflexiva** *si, para todo $a \in A$, se verifica que aRa.*
- *R es* **irreflexiva** *si para todo $a \in A$, no se verifica que aRa.*
- *R es* **simétrica** *si, para todo $a, b \in A$, se verifica que si aRb, entonces bRa.*
- *R es* **antisimétrica** *si, para todo $a, b \in A$, se verifica que si aRb y bRa, entonces $a = b$.*
- *R es* **transitiva** *si, para todo $a, b, c \in A$, tales que aRb y bRc, se verifica que aRc.*
- *R es* **serial** *si, para todo $a \in A$, existe $b \in A$ tal que aRb.*
- *R es* **euclídea** *si, para todo $a, b, c \in A$, tales que aRb y aRc, se verifica que bRc.*

Definición 1.1.6 *Sea A un conjunto y R una relación binaria sobre A. Diremos que R es una* **relación de equivalencia** *si es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Definición 1.1.7 *Sea A un conjunto, R una relación de equivalencia en A y $a \in A$. Llamaremos* **clase de equivalencia** *de a al conjunto*

$$[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}$$

El conjunto de las clases de equivalencia se llama **conjunto cociente** *de A respecto de R y se denota*

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

Definición 1.1.8 *Dado un conjunto no vacío A, llamaremos* **partición** *de A a cualquier familia $\mathcal{P} = \{A_i\}_{i \in I}$ tal que I es un conjunto no vacío y cada A_i es un subconjunto de A, verificando que $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ y $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i \neq j$.*

Es bien conocido que toda relación de equivalencia definida sobre un conjunto A induce una partición sobre dicho conjunto y viceversa.

Definición 1.1.9 *Diremos que una relación binaria definida sobre un conjunto no vacío A y denotada habitualmente por $\leq$, es una* **relación de orden parcial** *si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En este caso, diremos que $(A, \leq)$ es un* **conjunto parcialmente ordenado**.

Definición 1.1.10 *Un conjunto parcialmente ordenado, $(A, \leq)$, que satisface la propiedad de linealidad:*

$$\textit{para todo } a, b \in A, \ \textit{se tiene que } a \leq b \ \textit{o bien } b \leq a$$

se denomina **conjunto linealmente ordenado**, **conjunto totalmente ordenado** *o* **cadena**. *Así mismo, se dice que $\leq$ es un* **orden lineal** *o un* **orden total**.

Definición 1.1.11 *Sea A un conjunto y sea $<$ una relación sobre A. Diremos que $<$ es una* **relación de orden parcial estricto** *si es irreflexiva y transitiva. Diremos que $<$ es un* **orden lineal estricto** *si $<$ es un orden estricto que satisface la siguiente propiedad de linealidad:*

$$\textit{para todo } a, b \in A \ \textit{tales que } a \neq b, \ \textit{se tiene que } a < b \ \textit{o bien } b < a$$

Definición 1.1.12 *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sean $a \in A$ y $B \subseteq A$. Diremos que a es* **cota superior** *de B si $b \leq a$, para todo $b \in B$. Una cota superior a de B diremos que es el* **supremo**, **extremo superior** *o* **mínima cota superior** *de B, denotado por $a = \sup B$, si para cada cota superior a' de B, se verifica que $a \leq a'$.*

Diremos que a es **cota inferior** *de B si $a \leq b$, para todo $b \in B$. Una cota inferior a de B diremos que es el* **ínfimo** *o* **extremo inferior** *o* **máxima cota inferior** *de B, denotado por $a = \inf B$, si para cada cota inferior a' de B, se verifica que $a' \leq a$.*

Diremos que b es el **máximo** *(resp.* **mínimo***) de B, y lo denotaremos por $b = \max B$ (resp. $\min B$) si es una cota superior (resp. inferior) de B y además es un elemento de B.*

Diremos que $b \in B$ es un elemento **maximal** *(resp.* **minimal***) de B si para todo $b' \in B$ se tiene que si $b \leq b'$ (resp. $b' \leq b$), entonces $b = b'$.*

Definición 1.1.13 *Dados dos conjuntos A, B, llamaremos* **función parcial** *de A en B, a cualquier relación R de A en B que verifica la siguiente propiedad, para todo $x \in A$ y para cualesquiera $y, z \in B$:*

$$\textit{si } xRy \ \textit{y } xRz \ \textit{entonces } y = z$$

Como es habitual, utilizaremos $f : A \to B$ para denotar una función parcial de A en B y $f(x) = y$ para denotar que x está relacionado con y, diciendo que y es la imagen de x por f. Así mismo, denotaremos $\mathcal{O}rigen(f) = A$, por $Dom(f)$ el dominio de f, $\mathcal{R}ecorrido(f) = B$ y por $Im(f)$ la imagen de f.

Diremos que f es **total** *si $Dom(f) = A$.*

Definición 1.1.14 *Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1$. Una función parcial $f : A^n \to A$ diremos que es una función n-***aria** *o que tiene* **aridad** *n.*

Definición 1.1.15 *Sean A y B dos conjuntos y $f : A \to B$ una función parcial. Diremos que f es:*

- **inyectiva** *si para todo* $x, y \in Dom(f)$ *tales que* $f(x) = f(y)$*, se verifica que* $x = y$
- **sobreyectiva** *si* $Im(f) = B$*.*
- **biyectiva** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

Definición 1.1.16
Llamaremos **permutación** *de* n *elementos a toda función biyectiva*

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

Denotaremos por $S(n)$ *al conjunto de las permutaciones de* n *elementos.*

Definición 1.1.17 *Dado un conjunto* A*, la función* $id_A : A \to A$*, definida por* $id_A(x) = x$ *se llama* **identidad** *de* A*.*

Particularizando los conceptos de composición de relaciones y de relación inversa para el caso de funciones, tenemos:

Definición 1.1.18 *Dadas dos funciones parciales* $f : A \to B$ *y* $g : C \to D$ *tales que* $Im(f) \subseteq Dom(g)$*, la* **composición** *de* f *y* g *es una función parcial* $g \circ f : A \to D$ *definida por* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$*.*

Definición 1.1.19 *Dados dos conjuntos dotados de sendas relaciones de orden estricto* $(A, <)$ *y* $(B, <')$*. Una función parcial* $f : A \to B$ *se dice:*

- **estríctamente creciente***, si para todo* $x, y \in Dom(f)$ *tales que* $x < y$*, se verifica que* $f(x) <' f(y)$*.*
- **estríctamente decreciente***, si para todo* $x, y \in Dom(f)$ *tales que* $x < y$*, se verifica que* $f(y) <' f(x)$*.*
- **creciente***, si para todo* $x, y \in Dom(f)$ *tales que* $x < y$*, se verifica que* $f(x) \leq' f(y)$*.*
- **decreciente***, si para todo* $x, y \in Dom(f)$ *tales que* $x < y$*, se verifica que* $f(y) \leq' f(x)$*.*

1.1.2. Conjuntos Inductivos

Una propiedad relevante de los números naturales que va a ser una herramienta fundamental en este trabajo es la establecida por el siguiente principio:

Principio de Inducción. Sea $\mathcal{P}$ una propiedad relativa a los números naturales tal que:

- (*Caso base*) 0 verifica $\mathcal{P}$.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, si n verifica $\mathcal{P}$ (*Hipótesis de inducción*), entonces $n + 1$ verifica $\mathcal{P}$.

En estas condiciones, todos los números naturales verifican $\mathcal{P}$.

1.1.3. Conjuntos inductivos. Inducción estructural

Definición 1.1.20 *Sea A un conjunto no vacío, X un subconjunto no vacío de A, llamado* **conjunto base** *o* **conjunto de átomos**, *y F un conjunto de funciones de alguna aridad sobre A (no necesariamente la misma para todos los elementos de F), llamado* **conjunto de constructores**. *Un subconjunto Y de A se dice* **inductivo** *sobre X para F, si verifica:*

1. $X \subseteq Y$

2. *Y es cerrado para F, es decir, para toda $f : A^n \to A$ de F y para todo $(y_1, \dots y_n) \in Y$, se tiene que $f(y_1, \dots, y_n) \in Y$*

La intersección de todos los conjuntos inductivos sobre X para F, que denotaremos por X^+ es también un conjunto inductivo sobre X para F y se llama **clausura inductiva** *de X para F. Diremos que X^+ es* **libremente generada** *si cumple las siguientes condiciones.*

- *Para toda $f : A^m \to A$ de F, su restricción a X^+ es inyectiva, es decir, todo constructor genera elementos distintos desde elementos distintos.*

- *Para todo par $f : A^m \to A, g : A^n \to A$ de F, las imágenes $f(X^+)^m$ y $g(X^+)^n$ son disjuntas cuando $f \neq g$, es decir, constructores distintos generan elementos distintos.*

- *Para toda $f : A^m \to A$ de F y todo $(x_1, \dots, x_m) \in (X^+)^m$, se tiene que $f(x_1, \dots, x_m) \notin X$, es decir, ningún constructor genera elementos del conjunto base.*

Ahora podemos generalizar el Principio de Inducción de la forma siguiente:

Principio de Inducción Estructural. Sea X^+ la clausura inductiva de X para F y sea $\mathcal{P}$ una propiedad relativa a X^+ tal que:

1. Todo elemento de X verifica $\mathcal{P}$.

2. F respeta la propiedad $\mathcal{P}$, es decir, para todo $f \in F$ de aridad n:

   Si $x_1, \dots, x_n \in X^+$ verifican $\mathcal{P}$, entonces $f(x_1, \dots, x_n)$ verifica $\mathcal{P}$.

En tales condiciones, todos los elementos de X^+ verifican $\mathcal{P}$.

1.1.4. Alfabeto y Cadenas

Definición 1.1.21 *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto no vacío y $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:*

- *Una* **cadena** *o* **lista** *de longitud n de elementos de $\mathcal{A}$ es una función*

  $$\alpha : \{1, \dots, n\} \to \mathcal{A}$$

  Denotamos por $\mathcal{A}^n$ al conjunto de las cadenas o listas de longitud n sobre $\mathcal{A}$.

- *Llamamos* **cadena vacía**, **cadena nula** *o* **lista vacía** *y la denotamos indistintamente por* ϵ *o* `nil`, *a la función* $\epsilon : \varnothing \to \mathcal{A}$. *Así mismo, denotamos por* $\mathcal{A}^0$ *al conjunto* $\mathcal{A}^0 = \{\epsilon\}$.

- *Llamamos* **lenguaje universal** *sobre* $\mathcal{A}$ *y se denota indistintamente por* $\mathcal{A}^*$ *o* `List`$(\mathcal{A})$ *al conjunto* $\mathcal{A}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n$.

En este contexto, el conjunto $\mathcal{A}$ *se denomina* **alfabeto**.

Definición 1.1.22 *Dado un alfabeto* $\mathcal{A}$, *llamaremos* **lenguaje** L *sobre* $\mathcal{A}$ *a cualquier subconjunto no vacío del lenguaje universal sobre* $\mathcal{A}$, *es decir* $L \subseteq \mathcal{A}^*$. *A los elementos de* L *los denominaremos fórmulas bien formadas (fbfs). Así pues, un lenguaje* L *vendrá determinado por:*

- *Un conjunto de símbolos, llamado alfabeto del lenguaje.*

- *Un conjunto de reglas de formación que determinan qué cadenas de símbolos del alfabeto son fbfs , constituyendo la gramática o sintaxis del lenguaje.*

1.2. La Lógica en las Ciencias de la Computación

Nuestro grupo de investigación está especialmente interesado en las aplicaciones computacionales de las distintas lógicas, por ello, siguiendo a Martin-Löf [Martin-Löf(1987)], distinguimos en una lógica los cuatro aspectos siguientes:

- El lenguaje.
- La semántica.
- Una teoría de la demostración.
- La automatización de las deducciones.

Detallaremos a continuación los tres primeros aspectos, en los que nos centraremos en este trabajo.

1.2.1. El Lenguaje

La descripción del lenguaje que utilizaremos en cada lógica empieza por determinar el conjunto de caracteres básicos o alfabeto. Estos caracteres se utilizan para construir las cadenas o palabras que permitirán describir el conocimiento sobre el dominio.

Como hemos indicado, llamaremos a los elementos del lenguaje L *fórmulas bien formadas*(*fbfs*).

En términos de clausuras inductivas (libremente generadas): dado un alfabeto $\mathcal{A}$, un conjunto no vacío X de **átomos**, donde $X \subset \mathcal{A}^*$, y un conjunto de operadores o conectivos $F = \{op_i : X^{\alpha(op_i)} \to X\}$, donde $\alpha(op_i)$ denota la aridad de op_i, llamamos lenguaje L a la clausura inductiva (libremente generada) del conjunto X para el conjunto de constructores F, es decir $L = X^+$.

1.2.2. La Semántica

Para introducir el concepto de "verdad" debemos hacer corresponder las fórmulas del lenguaje con su "significado". Este significado es un elemento de un conjunto de valores, llamados valores semánticos.

Puesto que el interés de la lógica está centrado en el análisis de los razonamientos, para ello debemos introducir el concepto de deducción semántica. Para ello, necesitamos las siguientes definiciones.

Definición 1.2.1
Una **interpretación** *para un lenguaje* L *es una función* $I : L \to S$*, siendo* S *un conjunto, llamado de valores semánticos. Así mismo, definiremos el conjunto de valores semánticos destacados* $\mathcal{D}$ *como un subconjunto de* S*.*

Por ejemplo, en la Lógica Clásica Proposicional, el conjunto de valores semánticos es {verdad, falsedad} o $\{0, 1\}$, y el de valores semánticos destacados el subconjunto $\{1\}$.

Definición 1.2.2 *Una fórmula* $A \in L$ *se dice* **satisfacible** *si existe una interpretación* I *tal que* $I(A) \in D$*. En este caso, se dice que la interpretación* I **satisface** *a* A *o que* I *es un* **modelo** *para* A*.*

Un conjunto de fórmulas $\Omega \subseteq L$ *se dice* **satisfacible** *si existe una interpretación* I *tal que* $I(A) \in D$ *para cualquier* $A \in \Omega$*, a la interpretación* I *se le llama modelo para* Ω *y se dice que* I **satisface** *a* Ω*.*

Definición 1.2.3 *Sea* A *una fbf de* L*. Diremos que* A *es* **válida** *y denotaremos* $\models A$*, si toda interpretación es un modelo para* A*.*

Dos fórmulas $A, B \in L$ *se dicen* **lógicamente equivalentes***, denotado* $A \equiv B$ *si para cualquier interpretación* I *se tiene que* $I(A) = I(B)$*.*

Dado un conjunto Ω *de fbfs y una fbf* A *de* L*. Diremos que* A *se deriva, deduce o infiere semánticamente de* Ω*, denotado* $\Omega \models A$*, si todo modelo para* Ω *es un modelo para* A*.*

Cuando contamos con una Semática asociada a un lenguaje, decimos que tenemos una **Teoría de Modelos** para el lenguaje.

1.2.3. Teoría de la Demostración

La introducción de reglas de inferencia como patrones formales que permiten deducir unas fórmulas a partir de otras y que manipulan las distintas componentes del lenguaje de modo puramente sintáctico, es lo que se denomina una teoría de la demostración para un lenguaje. Este mecanismo deductivo será el objeto de este aspecto de la lógica.

En particular, para los **sistemas axiomáticos** sobre un lenguaje L, el mecanismo deductivo viene dado por un conjunto numerable de fórmulas de L, llamadas **axiomas** y un conjunto de **reglas de inferencia, deducción o transformación** que establecen cuándo una *fbf* de L es "consecuencia inmediata" de una o varias *fbfs* de L.

Definición 1.2.4 *En un sistema axiomático $\mathcal{S}$, sobre un lenguaje L, se dice que la secuencia de fórmulas $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$ con $A_i \in L$ es una* **demostración** *de longitud n de A_n si y sólo si cada una de las fórmulas A_i es un axioma o una consecuencia inmediata de algún subconjunto de $\{A_1, A_2, \ldots A_{i-1}\}$.*

Una fórmula A de L se dice que es un **teorema** *en el sistema axiomático $\mathcal{S}$, denotado $\vdash_{\mathcal{S}} A$ si existe para ella una demostración. Obviamente, los axiomas de $\mathcal{S}$ son teoremas de $\mathcal{S}$.*

Se dice que la secuencia $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$ con $A_i \in L$ es una **deducción** *o* **derivación** *de A_n a partir de un conjunto de fórmulas $\Omega \subseteq L$ en $\mathcal{S}$ si y sólo si cada una de las fórmulas A_i es una fórmula de Ω, o un axioma, o una consecuencia inmediata de algún subconjunto de $\{A_1, A_2, \ldots A_{i-1}\}$. Este hecho se representa mediante $\Omega \vdash_{\mathcal{S}} A_n$.*

Los tres aspectos: lenguaje, semántica y teoría de la demostración, constituyen una **teoría formal**.

Dada una teoría formal $\mathcal{T}$, una interpretación es un **modelo para** $\mathcal{T}$ si es un modelo para todos los teoremas de $\mathcal{T}$.

Una teoría formal se dice **correcta** si cumple que

$$\text{Si } \Omega \vdash A \text{ entonces } \Omega \models A$$

Una teoría formal se dice **completa** si cumple que

$$\text{Si } \Omega \models A \text{ entonces } \Omega \vdash A$$

Conseguir teorías formales correctas es fácil, basta exigir que los axiomas sean fórmulas válidas y que las reglas de inferencia preserven la validez. Sin embargo, la completitud es más difícil de conseguir y a veces es inalcanzable. A estudiar la competitud de diversas teorías formales dedicaremos parte de este trabajo.

En este momento es preciso destacar que existe bibliografía en la que las propiedades de “corrección” y “completitud” se adjudican a los sistemas axiomáticos en lugar de a las teorías. Así lo haremos en este trabajo, por seguir la pauta habitual de los trabajos precedentes en lógicas temporales $\times$ modales.

1.3. Lógica Clásica Proposicional

La Lógica Clásica Proposicional es el tipo de lógica más elemental, el más conocido y posiblemente el más utilizado. Como es bien conocido, esta lógica se caracteriza porque:

- es independiente del contexto, es decir, considera únicamente construcciones declarativas (proposiciones) sobre las que podemos pronunciarnos acerca de su verdad o falsedad sin recurrir a consideraciones de *contexto* alguno, ni a consideraciones sobre la estructura interna de estas proposiciones.

- es veritativa funcional, es decir, contempla la verdad composicionalmente: la verdad de una construcción compuesta queda determinada por la verdad de sus componentes.

- verifica la ley del tercio excluido, es decir, las proposiciones tienen que ser verdaderas o falsas, y no hay más posibilidades. Por tanto la proposición "p o no es el caso que p" es siempre verdadera (válida) sea cual sea la proposición p que se elija.

El hecho de no considerar la estructura interna de los enunciados (proposiciones) hace que en la Lógica Clásica Proposicional el enunciado

"Si todo hombre es mortal entonces algún hombre es mortal"

no sea válido, ya que este enunciado se formalizaría como "si p entonces q", que no es una fórmula válida. Es necesario, pues, ampliar la Lógica Clásica Proposicional de forma que pueda hacerse un análisis interno de los enunciados en el que se distinga el qué se predica y de quién o qué se predica, es decir, necesitamos considerar la Lógica Clásica de Predicados.

Al igual que se ha necesitado una lógica distinta para capturar un concepto de "verdad" que la Lógica Clásica Proposicional no capturaba, el análisis eficaz y adecuado de otros razonamientos requiere otros tipos de lógicas, conocidas como lógicas no clásicas.

En general se denomina lógica no clásica a cualquier lógica distinta de la Lógica Clásica Proposicional y de la Lógica Clásica de Predicados. Estas lógicas incumplen uno o más puntos de los anteriormente comentados; así podemos considerar lógicas en los que se permita considerar contextos temporales, de creencia, de necesidad, etc.

Siguiendo a Susan Haak [Haak(1978)] podemos clasificar las lógicas no clásicas en dos grandes grupos:

- <u>Extensiones de la lógica clásica</u>. Pueden hablar de cosas de las que la lógica clásica no puede, extendiendo el vocabulario básico de ésta. Por lo tanto, añaden nuevas leyes a las de la lógica clásica.

  Ejemplos de este tipo de lógicas son aquéllas en las que el análisis de los razonamientos consideran contextos de tiempo (lógicas *temporales*), de necesidad y posibilidad (lógicas *modales*), de creencia (lógicas *doxásticas*), etc.

- <u>Desviaciones o rivales de la lógica clásica</u>. Utilizan el mismo vocabulario que la lógica clásica, pero no mantienen algunas de las leyes de ésta.

  Ejemplos de lógicas rivales lo constituyen las lógicas multivaluadas, la lógica intuicionista y las lógicas difusas.

Las lógicas no clásicas han adquirido gran protagonismo en las Ciencias de la Computación al ser utilizadas por disciplinas tales como control automático, simulación de circuitos digitales, planificación, diagnosis, comprensión del lenguaje natural, sistemas expertos, verificación de programas, etc. Las lógicas que vamos a presentar en este trabajo, pueden ser utilizadas para la incorporación del tiempo al estudio del conocimiento en sistemas multiagentes pudiendo contemplar, además de la ganancia o pérdida de conocimiento a lo largo del tiempo, la interrelación puntual entre el conocimiento en un instante de un agente con el conocimiento de otro agente en otro instante, admitiendo la posibilidad de que el tiempo fluya para cada agente de forma independiente del resto de los agentes. Más concretamente, las lógicas introducidas en este trabajo, nos permitirán especificar situaciones en las que se ven involucrados distintos ordenadores conectados en red, cada uno de ellos con su propio reloj.

1.3.1. El lenguaje L de la Lógica Proposicional

Alfabeto
El alfabeto de L está formado por:

- un conjunto numerable $\mathcal{V}$ de variables proposicionales:

$$\mathcal{V} = \{p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots, p_n, q_n, r_n, \dots\}$$

- Las constantes lógicas $\top$ ("verdad") y $\bot$ ("falsedad").
- Los conectivos booleanos $\neg$, $\vee$, $\wedge$ y $\rightarrow$.
- Los símbolos de puntuación "(" y ")".

Fórmulas bien formadas
El conjunto de *fbfs* del lenguaje L es la clausura inductiva libremente generada del conjunto $\mathcal{V} \cup \{\top, \bot\}$ para los constructores $C_\neg, C_\wedge, C_\vee, C_\rightarrow$ y $C_\leftrightarrow$, definidos de la forma siguiente:
Si $X, Y \in (\mathcal{V} \cup \{\top, \bot\})^*$: $C_\neg(X) = \neg X$, $C_\wedge(X, Y) = X \wedge Y$, $C_\vee(X, Y) = X \vee Y$, $C_\rightarrow(X, Y) = X \rightarrow Y$ y $C_\leftrightarrow(X, Y) = X \leftrightarrow Y$. Es decir,

1. Toda variable proposicional es una *fbf* , llamada *átomo* o *fórmula atómica.*
2. $\top$ y $\bot$ son *fbfs* .
3. Si A y B son *fbfs* , entonces $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ y $A \leftrightarrow B$ son *fbfs* .
4. Sólo las cadenas obtenidas aplicando las reglas 1, 2 y 3 anteriores son *fbfs* .

1.3.2. Semántica para L

Definición 1.3.1
Una **interpretación** *del lenguaje L es una función $I : L \longrightarrow \{0, 1\}$. que satisface:*

1. $I(\top) = 1$ *e* $I(\bot) = 0$
2. $I(\neg A) = 0$ *sii* $I(A) = 1$
3. $I(A \wedge B) = 1$ *sii* $I(A) = I(B) = 1$
4. $I(A \vee B) = 0$ *sii* $I(A) = I(B) = 0$

5. $I(A \to B) = 0$ *sii* $I(A) = 1$ *y* $I(B) = 0$

6. $I(A \leftrightarrow B) = 1$ *sii* $I(A) = I(B)$

Para toda fórmula A *y toda interpretación* I, *si* $I(A) = 1$ *se dice que* A *es* **verdadera** *y si* $I(A) = 0$, *se dice que* A *es* **falsa**.

1.3.3. Un sistema axiomático para la Lógica Proposicional

Presentamos ahora uno de los sistemas axiomáticos más usados para la Lógica clásica proposicional:

Axiomas

Ax.1 $\quad A \to (B \to A)$

Ax.2 $\quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Ax.3 $\quad (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

Reglas de inferencia

Existe una única regla de inferencia, llamada *modus ponens* MP:

$$A, A \to B \vdash B \qquad \text{(MP)}$$

1.3.4. Corrección y Completitud de la Lógica Proposicional

Teorema 1.3.2 *La Lógica Clásica Proposicional es correcta y completa, es decir:*

$$\vdash A \quad \textit{sii} \quad \models A$$

1.4. Lógicas modales

En esta sección presentamos un breve resumen de la lógica no clásica modal proposicional, una de las componentes básicas de nuestro trabajo.

La lógica modal surgió para tratar los llamados modos o contextos *aléticos* de necesidad y posibilidad y los primeros trabajos modernos sobre dicha lógica se deben a Lewis, (véase [Lewis(1918)]) en su intento de clarificar la relación entre implicación y deducibilidad.

La lógica modal proposicional es una extensión de la Lógica Proposicional Clásica que pasamos a describir a continuación.

1.4.1. El lenguaje LM

Es el mismo que el de la Lógica Proposicional Clásica con la adición de dos operadores monarios: $\Box$ (de "necesidad") y $\Diamond$ (de "posibilidad").

Alfabeto

- Un conjunto numerable $\mathcal{V}$ de símbolos proposicionales

$$\{p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots, p_n, q_n, r_n, \ldots\}$$

- Las constantes booleanas $\top$ y $\bot$.
- Los conectivos booleanos $\neg$, $\vee$, $\wedge$ y $\rightarrow$.
- El operador de necesidad $\Box$, leído ."es necesario que".
- El operador de posibilidad $\Diamond$, leído "es posible que".
- Los símbolos de puntuación "(" y ")".

Fórmulas bien formadas

1. Todo elemento de $\mathcal{V} \cup \{\top, \bot\}$ es una *fbf* .
2. Si A es una *fbf* , entonces $\neg A$, $\Box A$ y $\Diamond A$ son *fbfs* .
3. Si A y B son *fbfs* , entonces $A \vee B$, $A \wedge B$ y $A \rightarrow B$ son *fbfs* .

1.4.2. Semántica de los mundos posibles

Los operadores "es necesario que" y "es posible que" son llamados operadores modales. El término modal es usado para destacar que estos operadores "modifican" la interpretación de los enunciados a los que afectan.

En la actualidad la lógica modal engloba una larga familia de sistemas lógicos que se asocian a diferentes lecturas de las modalidades, incluyendo además de las de necesidad y posibilidad, las siguientes: *después de una acción, conocimiento, creencia, demostrable, desde, hasta, etc.*

Cada una de ellas requiere un tratamiento diferente. Así, por ejemplo, conocimiento y creencia difieren en que lo que se conoce se supone habitualmente como cierto; pero lo que se cree no se considera como necesariamente cierto.

El tipo dominante de semántica dada mediante teoría de modelos es la de los mundos posibles o semántica de Kripke. Pasamos pues a exponer la semántica de los mundos posibles cuyo concepto básico es el de *estructura*:

Definición 1.4.1 *Una* **estructura de Kripke** *es un par* (W, R) *en el cual tenemos que* $W = \{w_i \mid i \in I\}$ *es un conjunto no vacío denominado* **conjunto de mundos posibles** *y* R *una relación binaria en* W *llamada* **relación de accesibilidad**. *Si* $w_1 R w_2$, *se dice que* w_2 *es* **accesible** *desde* w_1.
Un **modelo de Kripke** *es una terna* $M = (W, R, h)$ *donde* (W, R) *es una estructura y* h *una función, llamada* **función de valuación**

$$h : LM \longrightarrow 2^W$$

que satisface:

1. *$h(\top) = W$ y $h(\bot) = \varnothing$*
2. *$h(\neg A) = W - h(A)$*
3. *$h(A \wedge B) = h(A) \cap h(B)$; $\quad h(A \vee B) = h(A) \cup h(B)$*
4. *$h(A \to B) = (W - h(A)) \cup h(B)$; $\quad h(A \leftrightarrow B) = h(A \to B) \cup h(B \to A)$*
5. *$h(\Box A) = \{w \in W \mid R(w) \subseteq h(A)\}$*
6. *$h(\Diamond A) = \{w \in W \mid R(w) \cap h(A) \neq \varnothing\}$*

donde $R(w)$ representa el conjunto de los mundos accesibles desde w, es decir, $R(w) = \{w' \in W \mid wRw'\}$.[1]

Puesto que LM es el cierre inductivo libremente generado sobre $\mathcal{V} \cup \{\top, \bot\}$ mediante el conjunto de constructores $\{\neg, \Box, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, se tiene que h queda determinada cuando conocemos sus imágenes sobre $\mathcal{V} \cup \{\top, \bot\}$.

Dado un conjunto de fbfs Ω y una fbf A se dice que A es:

- **verdadera** *o* **satisfacible** *en un mundo w para el modelo $M = (W, R, h)$, denotado, $M \models_w A$, si $w \in h(A)$.*
- **válida en el modelo** *$M = (W, R, h)$, denotado $M \models A$, si $h(A) = W$.*
- **válida en la estructura** *$E = (W, R)$, denotado $E \models A$, si es válida para todo modelo sobre E.*
- **válida en una clase $\mathcal{C}$ de modelos** *o* **$\mathcal{C}$-válida**, *denotado $\mathcal{C} \models A$, si $M \models A$ para todo modelo $M \in \mathcal{C}$.*
- *Dos fbfs A y B son* **lógicamente equivalentes** *en un modelo M, una estructura E o una clase $\mathcal{C}$ de modelos, denotado $A \equiv_X B$, si $A \leftrightarrow B$ es válida en $X = M$, E ó $\mathcal{C}$ respectivamente.*

  Dado un conjunto de fórmulas Ω:

  - *A es* **consecuencia lógica de Ω en el modelo** *$M = (W, R, h)$, denotado $\Omega \models_M A$, si para todo $w \in W$ tal que $w \in h(A_i)$ para toda fbf $A_i \in \Omega$, se tiene que $w \in h(A)$*

[1] Análogamente podíamos haber definido la semántica destacando que estamos describiendo una lógica en la que los valores semánticos son, al igual que en la lógica clásica proposicional, 0 y 1, pero en la que cada fórmula es verdadera o falsa en cada mundo. En cuyo caso, podemos definir, alternativamente, la semántica definiendo una interpretación como una aplicación

$$I : W \times LM \longrightarrow \{0, 1\}$$

tal que:

1. $I(w, \top) = 1$ y $h(w, \bot) = 0$ para todo $w \in W$.
2. $I(w, \neg A) = 1$ sii $I(w, A) = 0$
3. ...

Obviamente, h e I se determinan unívocamente: $w \in h(A)$ sii $I(w, A) = 1$.

- *A es* **consecuencia lógica de Ω en la estructura** *$E = (W, R)$, denotado $\Omega \models_E A$, si $\Omega \models_M A$ para todo modelo M sobre la estructura E.*
- *La fórmula A es* **consecuencia lógica de Ω en la clase de modelos** *$\mathcal{C}$, denotado $\Omega \models_{\mathcal{C}} A$, si $\Omega \models_M A$ para todo modelo $M \in \mathcal{C}$.*

Obviamente, si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son clases de modelos tales que $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, entonces toda fórmula $\mathcal{C}_2$-válida es $\mathcal{C}_1$-válida.

Teorema 1.4.2 *Las siguientes fbfs son válidas en todos los modelos*

1. $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$
2. *Las fbfs obtenidas de una tautología en L por sustitución uniforme de sus símbolos proposicionales por fbfs de LM.*
3. $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.
4. $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.
5. $(\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box(A \vee B)$.
6. $\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$.
7. $\Diamond(A \wedge B) \rightarrow (\Diamond A \wedge \Diamond B)$.

Regla de intercambio:

Si α representa una secuencia finita de $\Box$ y $\Diamond$ y si $\underline{\alpha}$ representa la secuencia obtenida a partir de α por intercambio de $\Box$ y $\Diamond$, se tienen los siguientes esquemas de fórmulas válidas.

$$\alpha A \leftrightarrow \neg\underline{\alpha}\neg A; \qquad \alpha\neg A \leftrightarrow \neg\underline{\alpha}A$$

$$\neg\alpha A \leftrightarrow \underline{\alpha}\neg A; \qquad \neg\alpha\neg A \leftrightarrow \underline{\alpha}A$$

El siguiente teorema establece que la validez de determinadas *fbfs* caracteriza un tipo de estructura:

Teorema 1.4.3 *Sea $E = (W, R)$ una estructura de Kripke. Entonces:*

1. $\models_E \Box A \rightarrow \Diamond A$ *si y sólo si R es serial.*
2. $\models_E A \rightarrow \Diamond A$ *(o, equivalentemente, $\models_E \Box A \rightarrow A$) si y sólo si R es reflexiva.*
3. $\models_E \Diamond\Diamond A \rightarrow \Diamond A$ *(o, equivalentemente, $\models_E \Box A \rightarrow \Box\Box A$) si y sólo si R es transitiva.*
4. $\models_E A \rightarrow \Box\Diamond A$ *(o, equivalentemente, $\models_E \Diamond\Box A \rightarrow A$) si y sólo si R es simétrica.*

5. *$\models_E \Diamond A \to \Box\Diamond A$ (o, equivalentemente, $\models_E \Diamond\Box A \to \Box A$) si y sólo si R es euclídea.*

Puesto que cada clase $\mathcal{C}$ de modelos proporciona un conjunto destacado de fórmulas: el conjunto de las fórmulas $\mathcal{C}$-válidas, para cada clase $\mathcal{C}$ de modelos tendremos una lógica modal. En la siguiente tabla se dan los nombres de los modelos básicos:

NOMBRE DEL MODELO	CONDICIONES
K	Ninguna
KT	Reflexiva
KB ó B	Simétrica
KT4 ó S4	Reflexiva y Transitiva
KTB	Reflexiva y Simétrica
KT4B ó S5	Reflexiva, Transitiva y Simétrica

Cuando se exige que la relación R verifique la propiedad serial, se obtienen los llamados modelos deónticos.

NOMBRE DEL MODELO	CONDICIONES
D	Serial
DB	Serial y Simétrica
D4	Serial y Transitiva

Los sistemas axiomáticos que siguen constituyen extensiones de la Lógica Proposicional Clásica, es decir, se obtienen añadiendole axiomas característicos que les dan nombre. En particular, consideraremos extensiones del sistema considerado anteriormente para la lógica clásica proposicional.

El sistema $\mathcal{K}$

El sistema modal $\mathcal{K}$ se obtiene del sistema de la lógica proposicional, añadiendo un axioma y una regla de inferencia. Concretamente:

$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ (Axioma K)

Regla de inferencia

$A \vdash \Box A$ (De Necesidad)

El sistema T

Se obtiene del sistema $\mathcal{K}$ añadiendo como axioma

(Axioma T): $\Box A \to A$

El sistema S4

El sistema S4 se obtiene del sistema T añadiendo el siguiente axioma característico de Lewis:

(Axioma 4): $\Box A \to \Box\Box A$

El Sistema S5

Se obtiene del sistema T añadiendo el axioma:

$$\text{(Axioma 5 ó E (Euclidea)):} \quad \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$$

El Sistema Deóntico

Se obtiene añadiendo al sistema $\mathcal{K}$ el axioma:

$$\text{(Axioma D):} \quad \Box A \rightarrow \Diamond A$$

Cada una de las diferentes lógicas modales expuestas, proporciona una relación de deducibilidad sintáctica ($\vdash$) y semántica ($\models$) diferente que notaremos $\vdash_S$, $\models_S$ donde S es el nombre de la lógica modal considerada. La relación existente entre $\vdash$ y $\models$ viene dada mediante los correspondientes teoremas de completitud y corrección:

Teorema 1.4.4 *1. $\vdash_K A$ si y sólo si A es válida en todas las estructuras.*

2. $\vdash_{KT} A$ (o $\vdash_T A$) si y sólo si A es válida en todas las estructuras reflexivas.

3. $\vdash_{K4} A$ si y sólo si A es válida en todas las estructuras transitivas.

4. $\vdash_{KT4} A$ (o $\vdash_{S4} A$) si y sólo si A es válida en todas las estructuras reflexivas y transitivas.

5. $\vdash_{KTB} A$ si y sólo si A es válida en todas las estructuras reflexivas y simétricas.

6. $\vdash_{KT5} A$ (o $\vdash_{S5} A$) si y sólo si A es válida en todas las estructuras reflexivas y euclideas [2].

7. $\vdash_{KD} A$ si y sólo si A es válida en todas las estructuras seriales.

1.5. Lógicas temporales

El mundo real en el que se desarrolla nuestra vida es un mundo dinámico y, en consecuencia, la noción de tiempo es intrínseca a toda actividad humana. Por tanto, es preciso disponer de mecanismos que nos permitan el análisis de los razonamientos cuya corrección involucra al tiempo.

Los lógicos no han permanecido indiferentes a esta necesidad: ya Aristóteles se planteaba (en su obra *"Sobre la Interpretación"*) la posibilidad de extender el **Principio del tercero excluido** a los acontecimientos futuros contingentes. A pesar de ello, la tarea de formalización temporal en el marco lógico, es decir, el desarrollo de una *lógica temporal*, no es abordada seriamente por los lógicos hasta la segunda mitad del siglo XX. La causa, como destaca Peirce [Peirce(1967)], no es otra que

[2] Es bien sabido que una relación es reflexiva y euclídea si, y sólo si, es de equivalencia.

> "...la lógica no había alcanzado aún un estado de desarrollo suficiente para evitar que la consideración de contextos temporales acarrease confusión ..."

Un modo natural de abordar este objetivo es reinterpretar la lógica modal en el ámbito temporal introduciendo los operadores temporales de Prior: G, H, F y P. La fórmula GA se lee como *"en el futuro, siempre ocurrirá A"*, HA se lee como *"en el pasado, siempre ocurrió A"*, FA se lee como *"alguna vez en el futuro ocurrirá $A\tau$* PA se lee como *"alguna vez en el pasado ocurrió A"*.

Una lógica temporal con estos operadores temporales es en definitiva una lógica multimodal con dos operadores de necesidad: G (hacia el futuro) y H (hacia el pasado) y sus correspondientes operadores de posibilidad: F y P.

Con esta visión de la lógica temporal, que de hecho fue la que motivó el impulso de la lógica temporal a mediados del siglo XX, el lenguaje es una extensión de la Lógica Proposicional con operadores temporales.

Definición 1.5.1 *Llamaremos* **flujo temporal** *o* **estructura temporal**, *denotado por $(T, <)$, a un conjunto no vacío T, dotado de una relación binaria $<$. A los elementos de T los llamaremos instantes y a la relación $<$ la llamaremos relación temporal* [3].

Vamos a empezar presentando una lógica temporal *minimal*, es decir, una lógica en la que no se impone ninguna condición a la relación $<$ y, en consecuencia, no se impone ninguna hipótesis sobre la naturaleza (en consecuencia, propiedades) del tiempo.

1.5.1. El Sistema $\mathbf{K}_t$ de la lógica Temporal Minimal

El lenguaje L_{K_t}

Alfabeto: El de la Lógica Proposicional Clásica junto con los símbolos de conectivas temporales F, P, G y H.

Fórmulas bien formadas: Las reglas de formación de la Lógica Proposicional Clásica y

- Si A es una *fbf*, FA, PA, GA y HA son *fbfs*.

Semántica

Definición 1.5.2 *Un* **modelo temporal** $S = (T, <, h)$ *consiste en un flujo de tiempo* $(T, <)$ *y una función de interpretación* $h : L_{K_t} \longrightarrow 2^T$ *que satisface las propiedades habituales para las conectivas booleanas y:*

1. $h(FA) = \{t \in T \mid \text{ existe } t' \in T, \text{ tal que } t < t' \text{ y } t' \in h(A)\}$.
2. $h(PA) = \{t \in T \mid \text{ existe } t' \in T, \text{ tal que } t' < t \text{ y } t' \in h(A)\}$.

[3] Relación de accesibilidad en la semántica de los mundos posibles

3. $h(GA) = \{t \in T \mid si\ t < t',\ se\ tiene\ que\ t' \in h(A)\}$.

4. $h(HA) = \{t \in T \mid \ si\ t' < t,\ se\ tiene\ que\ t' \in h(A)\}$.

- *Una fórmula A de K_t se dice* **satisfacible** *si existe un modelo $S = (T, <, h)$ y un instante $t \in T$ tales que $t \in h(A)$.*
- *Una fórmula A de K_t se dice* **válida en un modelo** $(T, <, h)$*, si $h(A) = T$.*
- *Una fórmula A de K_t se dice* **válida en un flujo** $S = (T, <)$*, si es válida en todo modelo sobre S.*
- *Una fórmula A de K_t se dice* **válida** *si es válida en todo flujo $S = (T, <)$ y se denota $\models A$.*
- *Dos fórmulas A y B son* **equivalentes respecto de un flujo** $S = (T, <)$ *y denotaremos por $A \equiv_S B$ si $A \leftrightarrow B$ es válida en dicho flujo. Así mismo, diremos que dos fórmulas A y B son* **equivalentes** *y denotaremos por $A \equiv B$ si $A \leftrightarrow B$ es válida.*

El siguiente resultado recoge algunas fórmulas válidas en K_t, cuya prueba es inmediata.

Teorema 1.5.3 *1.* $FA \equiv \neg G \neg A$; $\quad PA \equiv \neg H \neg A$

2. $F(A \vee B) \ \equiv \ (FA \vee FB)$; $\quad G(A \wedge B) \ \equiv \ (GA \wedge GB)$

3. $\models F(A \wedge B) \ \rightarrow \ (FA \wedge FB)$; $\quad \models (GA \vee GB) \ \rightarrow \ G(A \vee B)$

4. $\models \ (FA \vee G\neg A)$

<u>**Regla de intercambio**</u>:

Si α representa una secuencia finita de G, F, H y P y si $\underline{\alpha}$ representa la secuencia obtenida a partir de α por intercambio de G por F y H por P (y recíprocamente) se tienen los siguientes esquemas de fórmulas válidas.

$$\alpha A \leftrightarrow \neg \underline{\alpha} \neg A; \qquad \alpha \neg A \leftrightarrow \neg \underline{\alpha} A$$

$$\neg \alpha A \leftrightarrow \underline{\alpha} \neg A; \qquad \neg \alpha \neg A \leftrightarrow \underline{\alpha} A$$

El Sistema Axiomático $\mathcal{K}_t$

<u>Axiomas:</u> Los de la Lógica Proposicional Clásica y

(G1) $\vdash G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$
(H1) $\vdash H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$
(G2) $\vdash \neg H \neg GA \rightarrow A$
(H2) $\vdash \neg G \neg HA \rightarrow A$

<u>Reglas de Inferencia:</u> Modus Ponens y:

(RH:) Si $\vdash A$ entonces $\vdash HA$ (RG:) Si $\vdash A$ entonces $\vdash GA$

En siguiente teorema tenemos la corrección y completitud de esta teoría formal.

Teorema 1.5.4 *En K_t se tiene que, para toda fbf A, se verifica*

$$\models_{K_t} A \text{ sii } \vdash_{K_t} A$$

1.5.2. Tiempo lineal: la lógica $\mathbf{K}_l$

La concepción habitual del tiempo es lineal, es decir, se considera que la representación adecuada del tiempo es mediante una línea recta. Por ello, vamos a extender la lógica K_t a la lógica denotada K_l, para la cual el lenguaje y la semántica coinciden con la de K_t y el sistema axiomático es el definido a continuación.

El Sistema Axiomático $\mathcal{K}_l$

La axiomatización para esta lógica temporal fue introducida por primera vez por Cocchiarella en 1965:

Axiomas: Los de la Lógica Proposicional Clásica y

(G1) $\vdash G(A \to B) \to (GA \to GB)$

(G2) $\vdash \neg H \neg GA \to A$

(G3) $\vdash GA \to GGA$

(G4) (linealidad hacia el futuro):

$$\vdash [G(A \vee B) \wedge G(A \vee GB) \wedge G(GA \vee B)] \to (GA \vee GB)$$

Reglas de Inferencia: Modus Ponens y

(RG) Si $\vdash A$ entonces $\vdash GA$

(RE) Si $\vdash A$ entonces $\vdash A'$, donde A' es el resultado de reemplazar G por H y H por G (*Regla del espejo*).

Observación. La regla (RE) nos permite obtener:

(H1) $\vdash H(A \to B) \to (HA \to HB)$

(H2) $\vdash \neg G \neg HA \to A$

(H3) $\vdash HA \to HHA$

(H4) (linealidad hacia el pasado):

$$\vdash [H(A \vee B) \wedge H(A \vee HB) \wedge H(HA \vee B)] \to (HA \vee HB)$$

En siguiente teorema tenemos la corrección y completitud de esta teoría formal.

Teorema 1.5.5 *En K_l se tiene que, para toda fbf A, se verifica*

$$\models_{K_l} A \text{ sii } \vdash_{K_l} A$$

1.6. Lógicas que combinan tiempo y modalidad

Como hemos indicado en la introducción, en los últimos años, una rama destacable de la investigación lógica se centra en la combinación de modalidades aléticas y temporales. Los estudios existentes arrancan de planteamientos filosóficos tales como la discusión del determinismo, la teoría de la causalidad, la teoría de la acción, los condicionales, etc (véase, por ejemplo, [Thomason y Gupta(1981)], [Belnap(1996)], [Chellas(1992)], [Kutschera(1993)], [Belnap y Perloff(1990)]). Recientemente se ha constatado el interés de este tipo de investigación en el ámbito de la Computación, especialmente en sistemas multiagentes (véase [Fagin, Halpern, Moses and Vardi(1995)]) y procesos temporales (véase [Stirling(1996)]).

Desde un punto de vista semántico, los planteamientos propuestos para este tipo de estudios (en unos explícitamente y en otros más o menos de forma implícita) se han desarrollado bajo dos ideas diferentes:

(i) la de considerar el flujo del tiempo como algo independiente de los mundos posibles, como es el caso de las estructuras $T{\times}W$;

(ii) el tiempo depende o es relativo a cada mundo posible, como es el caso de las estructuras Kamp y de las estructuras Ockham [4].

En nuestra discusión subsiguiente, consideraremos las estructuras $T \times W$ y las estructuras de Kamp y dejaremos de lado otros tipos de estructuras para tratar conjuntamente operadores modales y temporales, como las estructuras Ockhamistas (para tiempo ramificado) y las estructuras neutras (en inglés *neutral frames*, donde el tiempo puede contener *clusters* [5]. La razón es que los desarrollos que nos interesan contemplan únicamente flujos estríctamente lineales y en este trabajo nos vamos a centrar en este tipo de tiempo.

Para entender intuitivamente el uso de este tipo de estructuras consideremos una frase del lenguaje natural como la siguiente:

Si hubieras traído el paraguas no te habrías mojado

Un modo de dar cuenta del significado de esta frase es pensar que en mundos alternativos al mundo en el que nos hallamos, nuestro interlocutor toma el paraguas, y a partir de entonces las cosas discurren de una manera diferente respecto a nuestro propio mundo, mientras que anteriormente todo discurre de la misma forma.

[4] Estas estructuras son arbóreas y son aptas para tratar tiempo ramificado. Si consideramos que cada rama del árbol es un mundo posible, podemos entender que en las estructuras Ockham el tiempo depende de cada mundo posible.

Las estructuras Ockham han sido propuestas inicialmente por [Prior(1967)] y su generalización a estructuras de “haces” (*bundle trees*) ha sido realizada por Burgess (véase, por ejemplo, [Burgess(1979)] p. 577). Estas últimas estructuras son equivalentes a las estructuras Kamp (ver [Zanardo(1996)]).

[5] En castellano, *agrupamientos* o *apiñamientos*. Según [Segerberg(1970)], dado un conjunto W dotado de una relación transitiva R, los clusters son las clases de equivalencia de W bajo la relación de equivalencia siguiente: $x \simeq y$ si, y sólo si xRy e yRx, o bien $x = y$. Los clusters pueden ser de tres tipos: *propios*, con al menos dos elementos, *simples*, con un elemento reflexivo o *degenerados*, con un elemento irreflexivo. (Para más detalles, véanse [Burgess(1984)] y [Thomason(1984)]).

Esto trae consigo que consideremos a los mundos idénticos hasta cierto momento del tiempo y los agrupemos en clases de equivalencia bajo este criterio. Así, es habitual denotar por $w \approx_t w'$ para indicar que los mundos w y w' poseen la misma historia hasta un cierto punto t. En este contexto, el operador modal $\Box$ captura la noción de la *necesidad histórica* o inevitabilidad [6]. Así, se considera que la fórmula $\Box A$ es verdadera en un instante t del mundo w si justamente A es verdadera en ese instante t en cualquier mundo posible w' en el que se tiene la misma historia hasta t que en w, es decir, en cualquier w' tal que $w \approx_t w'$.

Una cuestión a tener en cuenta en este planteamiento es la necesidad o no de la coincidencia del orden temporal en todos los mundos posibles. A este respecto, conviene destacar que en las estructuras $T\times W$ el orden temporal coincide en todos los mundos, mientras que en las estructuras Kamp no se da tal exigencia. En estas últimas, sólo los mundos relacionados hasta un mismo instante comparten el mismo orden temporal hasta ese instante, pero a partir de ese momento pueden diferir. Ciertos autores introducen, además del operador modal para capturar la necesidad histórica, un operador modal específico para capturar la coincidencia del orden temporal (Véase, por ejemplo, [Kutschera(1997)], [Di and Zanardo(1998)] y [Wölfl(1999)])

Para poder discutir posteriormente nuestras aportaciones en relación a los planteamientos existentes, en esta sección exponemos el lenguaje y la semántica de las lógicas que usan los planteamientos que hemos comentado, con un operador de necesidad histórica, de forma similar a la presentación de [Thomason(1984)]. Denotaremos a estas lógicas por $\mathcal{L}_{T\times W}$.

Alfabeto

El alfabeto de $\mathcal{L}_{T\times W}$ consiste en:

(i) un conjunto infinito numerable, $\mathcal{V}$, de variables proposicionales;

(ii) las constantes lógicas $\top$ y $\bot$, y las conectivas clásicas $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$;

(iii) las conectivas temporales de Prior G ("siempre en el futuro") y H ("siempre en el pasado");

(iv) el operador modal $\Box$ (de necesidad histórica).

Fórmulas bien formadas

El lenguaje $L_{T\times W}$ de $\mathcal{L}_{T\times W}$, es decir, el conjunto de fórmulas bien formadas es la clausura inductiva libremente generada sobre el conjunto base $\mathcal{V} \cup \{\top, \bot\}$ y los constructores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, G, H y $\Box$.

Consideraremos las conectivas F, P y $\Diamond$ definidas como:

$$FA =_{def} \neg G \neg A; \quad PA =_{def} \neg H \neg A; \quad \Diamond A =_{def} \neg \Box \neg A$$

[6] Un tipo de necesidad que se remonta a Aristóteles en *Sobre la interpretación* con motivo de la discusión acerca de los futuros contingentes (De Int. IX, $18^b25 - 19^b4$).

1.6.1. Semántica

Presentamos a continuación dos tipos de estructuras para este lenguaje, concretamente, las estructuras señaladas anteriormente: $T \times W$ y estructuras Kamp.

Definición 1.6.1 *Una* **estructura** $T \times W$ *es una tupla* $(T, <, W, \approx)$ *constituida por:*

1. *Un conjunto no vacío T (de "puntos o instantes temporales").*
2. *Un orden lineal estricto $<$ sobre T.*
3. *Un conjunto no vacío W (de "mundos" o "historias").*
4. *Una familia $\approx = \{\approx_t \mid t \in T\}$ de relaciones de equivalencia, $\approx_t$, sobre W que satisfacen la siguiente condición : para todo $w, w' \in W$ y $t_1, t_2 \in T$,*

$$\textit{si} \;\; w \approx_{t_1} w' \;\; \textit{y} \;\; t_2 \leq t_1, \quad \textit{entonces} \quad w \approx_{t_2} w'$$

   La expresión $w \approx_t w'$ se lee "w y w' han tenido la misma historia hasta t (inclusive)".

Definición 1.6.2 *Un* **modelo** $T \times W$ *es una tupla* $\mathcal{M}_{T\times W} = (T, <, W, \approx, h)$*, donde* $(T, <, W, \approx)$ *es una estructura* $T \times W$ *y* h *es una función*

$$h : L_{T\times W} \longrightarrow T \times W$$

que asigna a cada átomo $p \in \mathcal{V}$, un subconjunto de $T \times W$ y que satisface:

$$\textit{si} \;\; w \approx_t w' \textit{entonces} \quad (t, w) \in h(p) \;\textit{sii}\; (t, w') \in h(p) \quad (*)$$

h se extiende de forma recursiva a $L_{T\times W}$. Concretamente, a todas las fbfs de la lógica proposicional (incluidas las constantes $\top$ y $\bot$) de la forma habitual. Para las conectivas temporales y modales, h se define como sigue:

$$\begin{aligned} h(GA) &= \{(t, w) \in T \times W \mid \bigcup_{t' \in (t, \rightarrow)} (t', w) \subseteq h(A)\}; \\ h(HA) &= \{(t, w) \in T \times W \mid \bigcup_{t' \in (\leftarrow, t)} (t', w) \subseteq h(A)\}; \\ h(\Box A) &= \{(t, w) \in T \times W \mid \bigcup_{w' \in [w]_{\approx_t}} (t, w') \subseteq h(A)\}; \end{aligned}$$

donde $[w]_{\approx_t}$ denota la clase de equivalencia de w por la relación $\approx_t$

Observación. De la condición $(*)$ y del ítem 4 de la definición de estructura $T \times W$, se deduce que

$$\text{si} \;\; w \approx_t w' \text{ y } t' \leq t \text{ entonces:} \quad (t', w) \in h(p) \text{ si y sólo si } \;(t', w') \in h(p)$$

Así pues, como habíamos indicado, en las estructuras $T \times W$ que acabamos de definir, todos los mundos $w \in W$ "comparten" el mismo flujo temporal. Las estructuras Kamp son, como exponemos a continuación, menos restrictivas.

Definición 1.6.3 *Una* **estructura Kamp** *es una tupla* $(W, T, <, \approx)$ *formada por:*

1. *Un conjunto no vacío* W *(de "mundos" o "historias").*
2. *Un conjunto no vacío* $T = \bigcup_{w \in W} T_w$ *(de "puntos o instantes temporales en cada mundo").*
3. *Una familia* $<= \{<_w \mid w \in W\}$ *de relaciones sobre* T*, donde cada* $<_w$ *es un orden lineal estricto definido sobre* $T_w \subseteq T$.
4. *Una familia* $\approx = \{\approx_t \mid t \in T\}$ *de relaciones de equivalencia,* $\approx_t$*, sobre* W *tal que satisface las siguientes condiciones: Para todo* $w, w' \in W$ *y* $t \in T$,

   a) *si* $w \approx_t w'$ *entonces:*
      - $t \in T_w \cap T_{w'}$,
      - $\{t_1 \in T_w \mid t_1 <_w t\} = \{t_1 \in T_{w'} \mid t_1 <_{w'} t\}$

   b) *si* $w \approx_t w'$ *y* $t' \leq_w t$*, entonces* $w \approx_{t'} w'$

   Igual que en las estructuras $T \times W$*, la expresión* $w \approx_t w'$ *se lee "*w *y* w' *han tenido la misma historia hasta* t *(inclusive)".*

Definición 1.6.4 *Un* **modelo Kamp** *es una tupla* $\mathcal{M}_{Kamp} = (W, T, <, \approx, h)$*, donde* $(W, T, <, \approx)$ *es una estructura Kamp y* h *es una función*

$$h : L_{T\times W} \longrightarrow T \times W$$

que asigna a cada átomo $p \in \mathcal{V}$ *un subconjunto* Δ *de* $T \times W$ *de la forma*

$$\Delta = \{(t, w) \mid t \in T_w\}$$

y que satisface:

$$\textit{si } \; w \approx_t w' \textit{entonces} \quad (t, w) \in h(p) \textit{ si y sólo si } \quad (t, w') \in h(p) \quad (*)$$

h *se extiende de forma recursiva a* $L_{T\times W}$*. Concretamente, a todas las fbfs de la lógica proposicional (incluidas las constantes* $\top$ *y* $\bot$*) de la forma habitual. Para las conectivas temporales y modales,* h *se define como sigue:*

$$\begin{aligned}
h(GA) &= \{(t, w) \in \Delta \mid \bigcup_{t' \in (t, \rightarrow)} (t', w) \subseteq h(A)\};\\
h(HA) &= \{(t, w) \in \Delta \mid \bigcup_{t' \in (\leftarrow, t)} (t', w) \subseteq h(A)\};\\
h(\Box A) &= \{(t, w) \in \Delta \mid \bigcup_{w' \in [w]_{\approx_t}} (t, w') \subseteq h(A)\};
\end{aligned}$$

En este caso hemos de tener en cuenta simplemente que elegimos sólo los pares (t, w) *donde* t *pertenezca al flujo* T_w.

Las estructuras $T\times W$ y las estructuras Kamp constituyen un precedente de las estructuras que presentaremos en este trabajo. Las diferencias entre ambos tipos de planteamientos y sus motivaciones serán motivo de discusión en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Un planteamiento funcional para $T \times W$

Como hemos indicado en el capítulo anterior, la combinación de tiempo y modalidad se ha mostrado apta para tratar diversas cuestiones filosóficas como el determinismo, la teoría de la acción, la causalidad, los condicionales, etc. Así mismo, se considera que esta combinación puede dar frutos en Computación en campos como en el estudio de procesos y sistemas multiagentes.

En el capítulo anterior, hemos visto que es frecuente que las lógicas que combinan tiempo y modalidad utilicen, para la descripción de su semántica, estructuras $T \times W$ o estructuras Kamp. También hemos señalado que, en estos tipos de estructuras, el tiempo puede ser común a todos los mundos (como en las estructuras $T \times W$) o bien dependiente de cada mundo (como en las de Kamp). Por otra parte, ambos planteamientos comparten el hecho de que el mecanismo para conectar los flujos temporales son relaciones de equivalencia que permiten representar una historia compartida por los diferentes mundos hasta un momento dado del tiempo. Es decir, los flujos temporales de los mundos conectados tienen un pasado común hasta un instante dado, hasta el instante en que se pierde la conexión.

Esto requiere, desde un punto de vista sintáctico, que la base modal utilizada sea la del sistema S5 de Lewis, tanto para tratar el operador modal de la necesidad histórica como para tratar el operador modal de coincidencia temporal en los casos en los que éste se introduce (Véanse [Kutschera(1993)], [Di Maio and Zanardo(1997)], y [Wölfl(1999)]). Además, en este tipo de estructuras, el tiempo se considera lineal en cada mundo posible. El lenguaje temporal usado habitualmente es el de la lógica de Prior y, en consecuencia, una base temporal minimal adecuada es la del sistema de tiempo lineal $\mathcal{K}_l$, que suele ser extendida convenientemente, en ocasiones, especialmente de cara a los usos en Computación, para los que se usan los operadores U(*"hasta"*) y S(*"desde"*) de Hans Kamp, de mayor potencia expresiva, y el operador $\oplus$ ("mañana" o " en el instante siguiente") en el caso de tiempo discreto.

En este capítulo presentaremos una lógica temporal$\times$modal que, como hemos indicado en la introducción de este trabajo, se define (tanto en los aspectos sintácticos, como en los aspectos semánticos) con la finalidad de disponer de un marco general para este tipo de lógicas multimodales, en el que se enriquezcan los trabajos existentes en la bibliografía y que, en consecuencia, puedan ser útiles para cuestiones mencionadas como la teoría de la acción, la causalidad, los condicionales, el estudio de los procesos, sistemas multiagentes, etc.

Nos centraremos tanto en los aspectos teóricos, de interés desde el punto de vista matemático (tales como aspectos de definibilidad y completitud), como en aspectos aplicativos computacionales (teniendo en mente contemplar, por ejemplo, los mundos como memorias de computadores en red, cada uno de los cuales posee su propio reloj). Para ello, introducimos un nuevo tipo de estructuras, denominadas *estructuras funcionales*, donde se utilizan funciones (llamadas *de accesibilidad*) para interconectar flujos de tiempo. A diferencia de los planteamientos anteriormente citados, contemplar funciones nos permite:

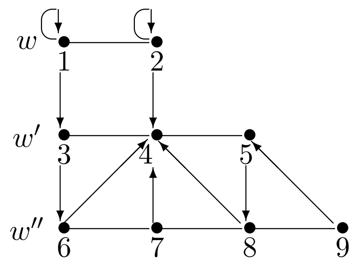
- debilitar la componente modal (no restringiéndonos a la base S5),
- establecer conexiones entre los flujos temporales de múltiples formas,
- llevar a cabo diferentes comparaciones entre mundos con distintas medidas de tiempo.

Como tendremos ocasión de mostrar, esta opción nos permite un estudio de la *definibilidad de las propiedades básicas de clases de funciones (totalidad, inyectividad, sobreyectividad, crecimiento, decrecimiento, etc)* sin necesidad de recurrir a teorías de segundo orden. Esta última característica es una aportación destacada de este trabajo.

Finalmente, como mostraremos en el resto del desarrollo, la lógica presentada, a la que denotamos $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ (donde el superíndice $\mathcal{F}$ destaca la novedad de la componente funcional en la semántica) es un punto de partida adecuado para otras lógicas de interés que, de modo natural, reclaman o bien extender o bien restringir $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$.

Antes de iniciar el estudio formal, consideremos un ejemplo que enmarcará el estudio posterior.

Pensamos en un conjunto no vacío de mundos, W; cada $w \in W$, es la etiqueta de un conjunto no vacío T_w, llamado *flujo de tiempo* del mundo w. Los flujos de tiempo son conjuntos dotados de un orden lineal estricto y disponemos además de un conjunto de funciones parciales no vacías (*funciones de accesibilidad*). Así, en la figura:



tenemos tres mundos $W = \{w, w', w''\}$ y tres flujos de tiempo lineal, uno asociado a cada mundo, a saber, $(T_w, <_w), (T_{w'}, <_{w'})$ y $(T_{w''}, <_{w''})$ respectivamente, donde

$T_w = \{1_w, 2_w\}; T_{w'} = \{3_{w'}, 4_{w'}, 5_{w'}\}$ y $T_{w''} = \{6_{w''}, 7_{w''}, 8_{w''}, 9_{w''}\}$. Existen cuatro funciones de accesibilidad:

$$\overset{w\ w}{\longrightarrow}: T_w \to T_w;\ \overset{w\ w'}{\longrightarrow}: T_w \to T_{w'};\ \overset{w'\ w''}{\longrightarrow}: T_{w'} \to T_{w''} \text{ y } \overset{w''\ w'}{\longrightarrow}: T_{w''} \to T_{w'};$$

definidas como sigue:

$$\begin{cases} \overset{w\ w}{\longrightarrow} = id_{T_w} \text{ (identidad sobre } T_w); \\ \overset{w\ w'}{\longrightarrow}(1_w) = 3_{w'},\ \overset{w\ w'}{\longrightarrow}(2_w) = 4_{w'}; \\ \overset{w'\ w''}{\longrightarrow}(3_{w'}) = 6_{w''},\ \overset{w'\ w''}{\longrightarrow}(5_{w'}) = 8_{w''}; \\ \overset{w''\ w'}{\longrightarrow}(6_{w''}) = \overset{w''\ w'}{\longrightarrow}(7_{w''}) = \overset{w''\ w'}{\longrightarrow}(8_{w''}) = 4_{w'},\ \overset{w''\ w'}{\longrightarrow}(9_{w''}) = 5_{w'}. \end{cases}$$

2.1. La Lógica $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$

En esta sección definimos la lógica $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W} = (L^{\mathcal{F}}_{T\times W}, \mathcal{M}^{\mathcal{F}})$ donde $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ denota el lenguaje y $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ los modelos funcionales para $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$.

2.1.1. El Lenguaje $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ de $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$

El alfabeto de $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ consiste en:

(i) un conjunto infinito numerable, $\mathcal{V}$, de variables proposicionales;

(ii) las constantes lógicas $\top$ ("verdad") y $\perp$ ("falsedad"), y las conectivas clásicas $\neg$ ("no"), $\wedge$ ("y"), $\vee$ ("o") y $\to$ ("si... entonces...");

(iv) las conectivas temporales G ("siempre en el futuro") y H ("siempre en el pasado");

(v) el operador modal específico $\Box^{\mathcal{F}}$ (en adelante $\Box$, cuando no dé lugar a confusión).

(vi) un conjunto de símbolos de puntuación: {(,), [,] ...}

El lenguaje $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ (es decir, el conjunto de fórmulas bien formadas, en adelante *fbfs*) es la clausura inductiva libremente generada sobre el conjunto $\mathcal{V} \cup \{\top, \perp\}$ y los constructores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, G, H y $\Box^{\mathcal{F}}$ de aridad $1, 2, 2, 2, 1, 1,$ y 1 respectivamente. En definitiva:

1. $\top$, $\perp$ y toda $p \in \mathcal{V}$ son *fbfs* .
2. Si A es una *fbf* , entonces $\neg A$, GA, HA y $\Box^{\mathcal{F}} A$ son *fbfs* .
3. Si A y B son *fbfs* , entonces $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ y $(A \to B)$ son *fbfs* [1].

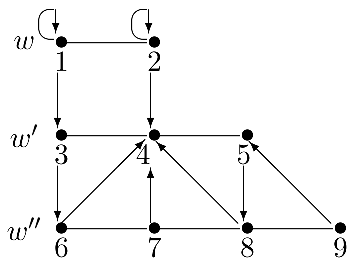
[1]Como es habitual, usaremos el convenio de omitir los paréntesis externos en las *fbfs* .

Consideraremos las conectivas definidas F, P y $\Diamond^{\mathcal{F}}$ siguientes:

$$FA =_{def} \neg G \neg A; \quad PA =_{def} \neg H \neg A; \quad \Diamond^{\mathcal{F}} A =_{def} \neg \Box^{\mathcal{F}} \neg A$$

Entenderemos que las conectivas monarias tienen mayor prioridad que las binarias.

Las conectivas temporales G, H, tienen su lectura habitual (antes indicada) y, en consecuencia, la lectura de F es "alguna vez en el futuro" y la de P es "alguna vez en el pasado". Por su parte, la conectiva modal específica $\Box^{\mathcal{F}}$ tiene el significado siguiente: $\Box^{\mathcal{F}} A$ se lee "*A es cierta en todo instante accesible al instante en el que hablo o ejecuto*". En el ejemplo anterior,



el presente accesible de 1_w es $\{1_w, 3_{w'}\}$, el presente accesible de $6_{w''}$ es $\{4_{w'}\}$, etc.

2.1.2. Semántica de $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T \times W}$

En esta sección definimos la semántica funcional para el lenguaje $L^{\mathcal{F}}_{T \times W}$.

Definición 2.1.1 *Definimos una* **estructura funcional** *para $L^{\mathcal{F}}_{T \times W}$ como una terna $(W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, donde:*

(i) W es un conjunto no vacío (conjunto de etiquetas para un conjunto de flujos temporales).

(ii) $\mathcal{T}$ es un conjunto no vacío de órdenes lineales estrictos indizado por W, es decir,

$\mathcal{T} = \{(T_w, <_w) \mid w \in W\}$ tales que, $T_w \neq \varnothing$ para todo $w \in W$, y si se verifica que $w \neq w'$, entonces se tiene que $T_w \cap T_{w'} = \varnothing$.

Para cada $w \in W$, decimos que $(T_w, <_w)$ es el **flujo temporal** *correspondiente a w.*

(iii) $\mathcal{F}$ es un conjunto de funciones no vacías, llamadas **funciones de accesibilidad**, *tales que:*

a) cada función de $\mathcal{F}$ es una función parcial de T_w en $T_{w'}$ para algún par $w, w' \in W$.

b) para cualesquiera $w, w' \in W$ hay a lo sumo en $\mathcal{F}$ una función de T_w en $T_{w'}$, denotada $\overset{w\ w'}{\longrightarrow}$.

Además, si para cada $w \in W$*, denotamos por* $\mathcal{F}_w = \{\overset{w\ w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F} \mid w' \in W\}$*, se tiene que* $\mathcal{F} = \bigcup_{w\in W} \mathcal{F}_w$.

En adelante, denotaremos $Dom(\mathcal{F}_w) = \bigcup\limits_{\overset{w\ w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w} Dom(\overset{w\ w'}{\longrightarrow})$

Observación 2.1.1 *En este punto es preciso destacar que:*

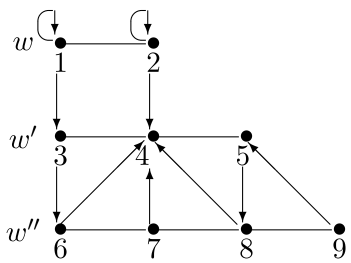
- *el ítem (ii) y el ítem (iii.b) de la definición 2.1.1 aseguran que para cada coordenada* $t_w \in T_w$ *o cada subconjunto de coordenadas* $X \subseteq T_w$*, tanto* $\mathcal{F}_w(t_w) = \bigcup\limits_{\overset{w\ w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w} \overset{w\ w'}{\longrightarrow}(t_w)$*, como* $\mathcal{F}_w(X) = \bigcup\limits_{\overset{w\ w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w} \overset{w\ w'}{\longrightarrow}(X)$ *son uniones disjuntas.*

- *El conjunto de funciones de accesibilidad,* $\mathcal{F}$*, no es necesariamente cerrado para la composición de funciones, como podemos comprobar en nuestro ejemplo inicial.* [2]

En adelante, si no hay lugar a confusión, hablaremos simplemente de "estructura funcional", sobreentendiendo el lenguaje $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$.

Definición 2.1.2 *Sea una estructura funcional* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$*. A los elementos,* t_w*, de la unión disjunta* $\mathcal{C}oord_\Sigma = \bigoplus_{w\in W} T_w$ *se les llama* **coordenadas** *de* Σ.

Ejemplo 2.1.1 *En el ejemplo anterior:*



tenemos la estructura funcional $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$*, tal que:*

- $W = \{w, w', w''\}$,
- $\mathcal{T} = \{(T_w, <_w), (T_{w'}, <_{w'}), (T_{w''}, <_{w''})\}$*, siendo*

$$T_w = \{1, 2\},\ T_{w'} = \{3, 4, 5\},\ T_{w''} = \{6, 7, 8, 9\}$$

y $<_w, <_{w'}, <_{w''}$ *la restricción del orden natural en* $\mathbb{N}$ *a* T_w*,* $T_{w'}$ *y* $T_{w''}$*. En consecuencia,* $\mathcal{C}oord_\Sigma = \{1_w, 2_w, 3_{w'}, 4_{w'}, 5_{w'}, 6_{w''}, 7_{w''}, 8_{w''}, 9_{w''}\}$.

[2] En el capítulo 4 abordaremos el estudio de estructuras funcionales en las que $\mathcal{F}$ es cerrado por composición.

- $\mathcal{F} = \{id_{T_w}, \stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}, \stackrel{w'\,w''}{\longrightarrow}, \stackrel{w''\,w'}{\longrightarrow}\}$ *definidas* [3] *por*
  $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} = \{(1_w, 3_{w'}), (2_w, 4_{w'})\}$, $\stackrel{w'\,w''}{\longrightarrow} = \{(3_{w'}, 6_{w''}), (5_{w'}, 8_{w''})\}$ *y*
  $\stackrel{w''\,w'}{\longrightarrow} = \{(6_{w''}, 4_{w'}), (7_{w''}, 4_{w'}), (8_{w''}, 4_{w'}), (9_{w''}, 5_{w'})\}$.

Ejemplo 2.1.2 *Otro ejemplo de estructura funcional, en este caso infinita, es la siguiente:* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ *tal que*

- $W = \{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$,
- $\mathcal{T} = \{(T_{w_i}, <_{w_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$, *con*

$$T_{w_0} = \{1_{w_0}, 2_{w_0}\} \;\; y \;\; T_{w_i} = \{k_{w_i} \mid k \in \mathbb{Z}\}, \;\; para\ todo\ \ i \geq 1$$

  y cada $<_{w_i}$ *el orden natural en* $\mathbb{Z}$. *En consecuencia,*

$$\mathcal{C}oord_\Sigma = \{1_{w_0}, 2_{w_0}\} \cup \{k_{w_i} \mid k \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}, i \geq 1\}$$

- $\mathcal{F} = \{\stackrel{w_i w_{i+1}}{\longrightarrow} \mid i \in \mathbb{N}\}$, *siendo* $\stackrel{w_i w_{i+1}}{\longrightarrow} (k_{w_i}) = (2k)_{w_{i+1}}$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$ *y todo* $k_{w_i} \in T_{w_i}$.

A continuación presentamos algunos convenios de notación:

Notaciones:

Sea $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$. Entonces:

$[t_w, \to) = \{t'_w \mid t_w \leq_w t'_w\} \subseteq T_w$. $\quad (t_w, \to) = \{t'_w \mid t_w <_w t'_w\} \subseteq T_w$.

$(\leftarrow, t_w] = \{t'_w \mid t'_w \leq_w t_w\} \subseteq T_w$. $\quad (\leftarrow, t_w) = \{t'_w \mid t'_w <_w t_w\} \subseteq T_w$.

$\mathfrak{C}\!\uparrow = \bigcup_{t_w\in\mathfrak{C}}[t_w, \to)$, para todo $\mathfrak{C} \subseteq \mathcal{C}oord_\Sigma$.

$\mathfrak{C}\!\uparrow^* = \bigcup_{t_w\in\mathfrak{C}}(t_w, \to)$, para todo $\mathfrak{C} \subseteq \mathcal{C}oord_\Sigma$.

$\mathfrak{C}\!\downarrow = \bigcup_{t_w\in\mathfrak{C}}(\leftarrow, t_w]$, para todo $\mathfrak{C} \subseteq \mathcal{C}oord_\Sigma$.

$\mathfrak{C}\!\downarrow^* = \bigcup_{t_w\in\mathfrak{C}}(\leftarrow, t_w)$, para todo $\mathfrak{C} \subseteq \mathcal{C}oord_\Sigma$.

Antes de definir la semántica de las conectivas, recordemos la siguiente definición.

Definición 2.1.3 *Sean* A *y* B *dos conjuntos no vacíos y* $f : A \longrightarrow B$ *una función parcial de* A *en* B. *Entonces, si* $X \subseteq B$ *definimos*

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X \cap Dom(f)\}$$

En particular, si $a \notin Dom(f)$ *entonces* $f(\{a\}) = \varnothing$. *Análogamente, en su uso en intervalos, si* $a \notin Dom(f)$ *entonces* $(f(\{a\}), \to) = (\leftarrow, f(\{a\})) = \varnothing$.

[3]Identificando las funciones con sus grafos.

Definición 2.1.4 *Un* **modelo funcional** *para* $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ *es un par* $\mathcal{M}^{\mathcal{F}} = (\Sigma, h)$, *donde* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ *es una estructura funcional y* h *es una función*

$$h : L^{\mathcal{F}}_{T\times W} \longrightarrow 2^{\mathcal{C}oord_\Sigma}$$

llamada **interpretación funcional**, *que satisface:*

$$\begin{array}{lcl}
h(\bot) & = & \varnothing; \\
h(\top) & = & \mathcal{C}oord_\Sigma \\
h(\neg A) & = & \mathcal{C}oord_\Sigma - h(A); \\
h(A \wedge B) & = & h(A) \cap h(B) \\
h(A \vee B) & = & h(A) \cup h(B); \\
h(A \to B) & = & (\mathcal{C}oord_\Sigma - h(A)) \cup h(B); \\
h(GA) & = & \{t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma \mid (t_w, \to) \subseteq h(A)\}; \\
h(HA) & = & \{t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma \mid (\leftarrow, t_w) \subseteq h(A)\}; \\
h(\Box^{\mathcal{F}} A) & = & \{t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma \mid \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \subseteq h(A)\}.
\end{array}$$

En consecuencia, la semántica de las conectivas definidas es la siguiente:

$$\begin{array}{lcl}
h(FA) & = & \{t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma \mid (t_w, \to) \cap h(A) \neq \varnothing\}; \\
h(PA) & = & \{t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma \mid (\leftarrow, t_w) \cap h(A) \neq \varnothing\}; \\
h(\Diamond^{\mathcal{F}} A) & = & \{t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma \mid \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \cap h(A) \neq \varnothing\}.
\end{array}$$

Definición 2.1.5 *Diremos que una fórmula* A *de* $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ *es* **satisfacible** *si existe un modelo funcional* $\mathcal{M}^{\mathcal{F}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}, h)$ *y una coordenada* $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ *tal que* $t_w \in h(A)$*; en este caso diremos también que* A *es* **verdadera en** t_w *. Diremos que* A *es* **válida en un modelo funcional** $\mathcal{M}^{\mathcal{F}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}, h)$ *si* A *es verdadera en toda coordenada del modelo, es decir, si* $h(A) = \mathcal{C}oord_\Sigma$*. Diremos que* A *es* **válida en una estructura funcional** $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ *si* A *es válida en todo modelo funcional* $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ *sobre* Σ*. Se dice que* A *es* **válida** *si* A *es válida en toda estructura funcional. Se dice que* A *es* **válida en la clase de estructuras funcionales** $\mathbb{K}$ *si* A *es válida en toda estructura* $\Sigma \in \mathbb{K}$.

Dos fbfs $A, B \in L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ *son* **lógicamente equivalentes** *en un modelo funcional* $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ *(respectivamente, en una estructura funcional* Σ *o una clase* $\mathbb{K}$ *de modelos funcionales), denotado* $A \equiv_{\mathcal{M}^{\mathcal{F}}} B$ *(respectivamente,* $A \equiv_\Sigma B$ *o* $A \equiv_{\mathbb{K}} B$*) si* $A \leftrightarrow B$ *es válida en* $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ *(respectivamente,* Σ *o* $\mathbb{K}$*).*

Dado un conjunto de fbfs $\Omega \subseteq L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$*, diremos que* $A \in L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ *es* **consecuencia lógica** *de* Ω *en el modelo funcional* $\mathcal{M}^{\mathcal{F}} = (\Sigma, h)$*, denotado* $\Omega \models_{\mathcal{M}^{\mathcal{F}}} A$*, si para todo* $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ *tal que* $t_w \in h(A_i)$ *para toda fbf* $A_i \in \Omega$*, se verifica* $t_w \in h(A)$*. Así mismo, diremos que* A *es* **consecuencia lógica** *de* Ω *en la estructura funcional* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$*, denotado* $\Omega \models_\Sigma A$*, si* $\Omega \models_{\mathcal{M}^{\mathcal{F}}} A$ *para todo modelo* $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ *sobre la estructura* Σ*. Finalmente, diremos que la fórmula* A *es consecuencia lógica de* Ω *en la clase de modelos* $\mathbb{K}$*, denotado* $\Omega \models_{\mathbb{K}} A$*, si* $\Omega \models_{\mathcal{M}^{\mathcal{F}}} A$ *para todo modelo* $\mathcal{M}^{\mathcal{F}} \in \mathbb{K}$.

Ejemplo 2.1.3 *Si consideramos la estructura del ejemplo 2.1.2,* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$*, tal que:*

- $W = \{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$,

- $\mathcal{T} = \{(T_{w_i}, <_{w_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$, *con*

$$T_{w_0} = \{1_{w_0}, 2_{w_0}\} \;\; y \;\; T_{w_i} = \{k_{w_i} \mid k \in \mathbb{Z}\}, \;\; \textit{para todo} \;\; i \geq 1$$

  y cada $<_{w_i}$ *el orden natural en* $\mathbb{Z}$.

- $\mathcal{F} = \{\overset{w_i w_{i+1}}{\longrightarrow} \mid i \in \mathbb{N}\}$, *siendo* $\overset{w_i w_{i+1}}{\longrightarrow} (k_{w_i}) = (2k)_{w_{i+1}}$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$ *y todo* $k_{w_i} \in T_{w_i}$.

y el modelo funcional $\mathcal{M}^{\mathcal{F}} = (\Sigma, h)$, *tal que* $h(p) = \{2_{w_1}\}$ *y* $h(q) = \varnothing$ *para todo* $q \in \mathcal{V} - \{p\}$. *Es inmediato comprobar que:*

- $\Box^{\mathcal{F}} p$ *y* $\Diamond^{\mathcal{F}} p$ *son satisfacibles, pero no válidas.*
- $\Box^{\mathcal{F}} q$ *no es satisfacible.*
- $G\,\Box^{\mathcal{F}} \neg q$ *es válida.*
- $\Diamond^{\mathcal{F}} F(p \wedge q) \rightarrow \Diamond^{\mathcal{F}}(Fp \wedge Fq)$ *es válida.*

Definición 2.1.6 *Sea* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ *una estructura funcional, con* $\mathcal{F}$ *una clase de funciones parciales no vacías. Decimos que* $\mathcal{F}$ *satisface la condición de* **dominio uniforme**, *que denotaremos por* (`U-Dom`) *si para todo* $w \in W$ *y todo par de funciones* $\overset{w\,w'}{\longrightarrow}, \overset{w,\,w''}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w$ *se tiene que*

$$Dom(\overset{w\,w'}{\longrightarrow}) = Dom(\overset{w\,w''}{\longrightarrow}) \qquad\qquad (\texttt{U-Dom})$$

en tal caso, denotaremos por $Dom_U(\mathcal{F}_w)$ *a este dominio común.*

Ejemplo 2.1.4 *En las estructuras funcionales de los ejemplos 2.1.1 y 2.1.2 se tiene que, en ambas, las clases de funciones de accesibilidad satisfacen la condición* (`U-Dom`). *Concretamente, en el ejemplo 2.1.1:*

$$Dom_U(\mathcal{F}_w) = T_w, \;\; Dom_U(\mathcal{F}_{w'}) = \{3, 5\} \;\; y \;\; Dom_U(\mathcal{F}_{w''}) = T_{w''}$$

Ejemplo 2.1.5 *Si consideramos la estructura* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, *definida por:*

- $W = \{w, w', w''\}$,
- $\mathcal{T} = \{(T_w, <_w), (T_{w'}, <_{w'}), (T_{w''}, <_{w''})\}$, *siendo*

$$T_w = \{1_w, 2_w, 3_w\}, \;\; T_{w'} = \{4_{w'}, 5_{w'}, 6_{w'}\} \;\; y \;\; T_{w''} = \{7_{w''}, 8_{w''}, 9_{w''}, 10_{w''}\}$$

  con $<_w, <_{w'}, <_{w''}$ *el orden habitual en* $\mathbb{Z}$.

- $\mathcal{F} = \{\overset{w\,w'}{\longrightarrow}, \overset{w\,w''}{\longrightarrow}\}$ *con*

$$\overset{w\,w'}{\longrightarrow} = \{(1_w, 4_{w'}), (3_w, 5_{w'})\}; \;\; \overset{w\,w''}{\longrightarrow} = \{(1_w, 7_{w''}), (2_w, 8_{w''}), (3_w, 10_{w''})\}$$

  Se tiene que $\mathcal{F}$ *no satisface la condición* (`U-Dom`), *ya que*

$$Dom(\overset{w\,w'}{\longrightarrow}) = \{1_w, 3_w\}, \;\; pero \;\; Dom(\overset{w\,w''}{\longrightarrow}) = \{1_w, 2_w, 3_w\}$$

Si consideramos la clase de funciones parciales, podemos clasificar sus elementos respecto a la condición (`U-Dom`) de la forma siguiente:

No totales (`U-Dom`)	Totales

2.2. Definibilidad de propiedades de funciones en $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$

En esta sección, nuestro objetivo es determinar las fórmulas cuya validez caracteriza clases de estructuras determinadas por propiedades habituales de funciones. Comenzamos con la siguiente definición:

Definición 2.2.1 *Sea $\mathbb{J}$ una clase de estructuras funcionales y sea $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{J}$. Decimos que $\mathbb{K}$ es* $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$**-definible en** $\mathbb{J}$*, si existe un conjunto Γ de fórmulas de $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ tal que, para cada estructura $\Sigma \in \mathbb{J}$, se tiene que $\Sigma \in \mathbb{K}$ si y sólo si cada fórmula de Γ es válida en Σ. Si $\mathbb{J}$ es la clase de todas las estructuras funcionales, diremos que $\mathbb{K}$ es* $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$**-definible**.

Sea P una propiedad de las funciones (totalidad, inyectividad, ...) y sea $\mathbb{K}_P$ la clase de todas las estructuras funcionales $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ en las que los elementos de $\mathcal{F}$ satisfacen la propiedad P. Diremos que P es definible si $\mathbb{K}_P$ es $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-definible.

En cualquiera de los casos anteriores, diremos que las fórmulas de Γ **definen** *la clase $\mathbb{K}$ (o la propiedad P).*

En adelante, "definible" significará "$\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-definible".

2.2.1. Caracterizando propiedades de funciones

Antes de estudiar la definibilidad de propiedades de las funciones de accesibilidad, nos detendremos en algunas consideraciones. Las bien conocidas lógicas modales KT, $K4$, KB, KD ... nos proporcionan la definibilidad de propiedades de las relaciones, tales como la reflexividad, transitividad, simetría y serialidad, respectivamente. Sin embargo, como se afirma en [Guzman(PrePrint)], podemos encontrar en la bibliografía demostraciones de estas afirmaciones que ponen de relieve que una mejor caracterización algebraica de las propiedades de las relaciones, permitirían hacer transparente su definibilidad. Así, por ejemplo, si usamos las caracterizaciones siguientes de la transitividad y simetría (introducidas en [Guzman(PrePrint)]): Sea R una relación binaria sobre un conjunto A, $a \in A$, si denotamos $R(a) = \{b \in A \mid a\,R\,b\}$, $R^2(a) = R(R(a)) = \bigcup_{b\in R(a)} R(b)$ y $R^n(a) = R(R^{n-1}(a))$. Entonces:

- R es transitiva si y sólo si $R^2(a) \subseteq R(a)$ si y sólo si $R^n(a) \subseteq R(a)$ para todo $a \in A$.
- R es simétrica si y sólo si $a \in \bigcap\limits_{b \in R(a)} R(b)$

con estas caracterizaciones, es inmediato que las fórmulas modales que definen estas propiedades son: $\Box A \to \Box\Box A$ (o, equivalentemente, $\Box A \to \Box \overset{n}{\ldots} \Box A$) y la fórmula $A \to \Box\Diamond A$, respectivamente.

Por esta razón, comenzamos con resultados que proporcionan este tipo de caracterización algebraica para las propiedades estándares de las funciones y que están recogidos en [Burrieza and P. de Guzmán(2002)]. La relevancia de estos resultados (que se hará patente en el resto del trabajo) contrasta con la simplicidad de sus demostraciones, que se reducen a simples ejercicios haciendo uso de las definiciones.

Teorema 2.2.2 *Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$ una función parcial no vacía de A en B. Entonces:*

1. f es constante si y sólo si

$$f(A - \{a\}) \subseteq \{f(a)\} \qquad \textit{para todo } a \in Dom(f)$$

En particular,

1.1 si $(A, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado, f es constante si y sólo si, para todo $a \in Dom(f)$, se tiene que:

$$f((\leftarrow, a)) \cup f((a, \rightarrow)) \subseteq \{f(a)\}$$

1.2 si f es total y $(A, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado, f es constante si y sólo si, para todo $a \in A$, se tiene que:

$$f((\leftarrow, a)) \subseteq \{f(a)\} \quad \textit{o, equivalentemente,} \quad f((a, \rightarrow)) \subseteq \{f(a)\}$$

2. f es inyectiva si y sólo si

$$f(A - X) \subseteq B - f(X) \qquad \textit{para todo } X \subseteq A$$

o equivalentemente,

$$f(A - \{a\}) \subseteq B - f(\{a\}) \qquad \textit{para todo } a \in A$$

o equivalentemente,

$$f(A - \{a\}) \subseteq B - \{f(a)\} \qquad \textit{para todo } a \in Dom(f)$$

En particular,

2.1 si $(A, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado, f es inyectiva si y sólo si, para todo $a \in A$, se tiene que:

$$f((\leftarrow, a)) \cup f((a, \rightarrow)) \subseteq B - f(\{a\})$$

2.2 si $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$ son conjuntos linealmente ordenados, f es inyectiva si y sólo si, para todo $a \in Dom(f)$, se tiene que:

$$f((\leftarrow, a)) \cup f((a, \rightarrow)) \subseteq (\leftarrow, f(a)) \cup (f(a), \rightarrow)$$

2.3 si f es total y $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$ son conjuntos linealmente ordenados, f es inyectiva si y sólo si, para todo $a \in A$, se tiene que:

$$f((\leftarrow, a)) \subseteq (\leftarrow, f(a)) \cup (f(a), \rightarrow)$$

o, equivalentemente:

$$f((a, \rightarrow)) \subseteq (\leftarrow, f(a)) \cup (f(a), \rightarrow)$$

3. f es sobreyectiva si y sólo si

$$B - f(X) \subseteq f(A - X) \qquad \text{para todo } X \subseteq A$$

o equivalentemente,

$$B - f(\{a\}) \subseteq f(A - \{a\}) \qquad \text{para todo } a \in A$$

o equivalentemente,

$$B - \{f(a)\} \subseteq f(A - \{a\}) \qquad \text{para todo } a \in Dom(f)$$

En particular,

3.1 si $(A, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado, f es sobreyectiva si y sólo si, para todo $a \in A$, se tiene que:

$$B - f(\{a\}) \subseteq f((\leftarrow, a)) \cup f((a, \rightarrow))$$

3.2 si $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$ son conjuntos linealmente ordenados, f es sobreyectiva si y sólo si, para todo $a \in A$, se tiene que:

$$(\leftarrow, f(\{a\})) \cup (f(\{a\}), \rightarrow) \subseteq f((\leftarrow, a)) \cup f((a, \rightarrow))$$

4. Si $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$ son conjuntos linealmente ordenados, f es creciente (resp. decreciente) si y sólo si, para todo $a \in Dom(f)$, se tiene que:

$$f((\leftarrow, a)) \subseteq (\leftarrow, f(a)] \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad f((a, \rightarrow)) \subseteq [f(a), \rightarrow)$$

(respectivamente

$$f((\leftarrow, a)) \subseteq [f(a), \rightarrow) \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad f((a, \rightarrow)) \subseteq (\leftarrow, f(a)]$$

5. Si $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$ son conjuntos linealmente ordenados, f es estrictamente creciente (resp. decreciente) si y sólo si, para todo $a \in Dom(f)$, se tiene que:

$$f((\leftarrow, a)) \subseteq (\leftarrow, f(a)) \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad f((a, \rightarrow)) \subseteq (f(a), \rightarrow)$$

(respectivamente

$$f((\leftarrow, a)) \subseteq (f(a), \rightarrow) \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad f((a, \rightarrow)) \subseteq (\leftarrow, f(a))$$

Los teoremas siguientes caracterizan algebraicamente las estructuras funcionales, $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, atendiendo a las propiedades de la clase de funciones $\mathcal{F}$. Comenzamos con el siguiente lema.

Lema 2.2.3 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional y sea $\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w$. Entonces, si $t_w \in T_w$ se tiene que $t_w \in Dom(\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow})$ si y sólo si se satisface la inclusión $(*_1)$ siguiente:*

$$\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}\big((t_w, \rightarrow)\big) \stackrel{(*_1)}{\subseteq} (\leftarrow, \stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}(\{t_w\})) \cup [\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}(\{t_w\}), \rightarrow \big)$$

Demostración:
Si $t_w \in Dom(\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow})$, se tiene que $(\leftarrow, \stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}(t_w)) \cup [\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}(t_w), \rightarrow \big) = T_{w'}$ y $(*_1)$ es obviamente cierta.

Recíprocamente, si $t_w \notin Dom(\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow})$, se tiene que:

$$(\leftarrow, \stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}(\{t_w\})) \cup [\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}(\{t_w\}), \rightarrow \big) = \varnothing$$

Por otra parte, puesto que toda función parcial $\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w$ es no vacía, existirá un $t'_w \in Dom(\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}) \subseteq (\leftarrow, t_w) \cup (t_w, \rightarrow)$ y, en consecuencia,

$$\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}\big((t_w, \rightarrow)\big) \neq \varnothing$$

con lo cual, $(*_1)$ no es cierta.

Teorema 2.2.4 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Entonces:*

1. *$\mathcal{F}$ es una clase de funciones* `(U-Dom)` *si y sólo si para toda $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$ se tiene la inclusión $(u\text{-}dom\text{-}*_1)$ siguiente:*

$$\mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \stackrel{(u\text{-}dom\text{-}*_1)}{\subseteq} \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow^*} \cup \mathcal{F}_w(t_w){\uparrow}$$

2. *$\mathcal{F}$ es una clase de funciones totales si y sólo si para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene la inclusión $(tot\text{-}*_1)$ siguiente:*

$$\mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \stackrel{(tot\text{-}*_1)}{\subseteq} \mathcal{F}_w(\{t_w\}){\downarrow^*} \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\}){\uparrow}$$

Demostración:
Recordemos que hemos introducido la notación siguiente: Para todo $X \subseteq \mathcal{C}oord_\Sigma$:

$$X{\uparrow} = \bigcup_{t_w \in X} [t_w, \rightarrow),\ \ X{\uparrow^*} = \bigcup_{t_w \in X} (t_w, \rightarrow),\ \ X{\downarrow} = \bigcup_{t_w \in X} (\leftarrow, t_w],\ \ X{\downarrow^*} = \bigcup_{t_w \in X} (\leftarrow, t_w)$$

Demostramos 2. La prueba de 1 es similar. Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones totales. Como consecuencia directa del lema 2.2.3 se tiene que para toda función parcial $\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w$ y toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se satisface:

$$\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}\big((t_w, \rightarrow)\big) \stackrel{(*_1)}{\subseteq} (\leftarrow, \stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}(\{t_w\})) \cup [\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}(\{t_w\}), \rightarrow \big)$$

En consecuencia, (*tot*-$*_1$) es cierta, ya que ($*_1$) no es más que la inclusión (*tot*-$*_1$) expresada con la notación introducida, para cada $\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}_w$.

Recíprocamente, si para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ se tiene (tot-$*_1$), con objeto de probar que $\mathcal{F}$ es una clase de funciones totales, únicamente tendremos que demostrar, utilizando de nuevo el lema 2.2.3, que toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ verifica:

$$\xrightarrow{w\ w'} \big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \xrightarrow{w\ w'} \big((t_w, \rightarrow)\big) \overset{(*_1)}{\subseteq} (\leftarrow, \xrightarrow{w\ w'} (\{t_w\})) \cup [\xrightarrow{w\ w'} (\{t_w\}), \rightarrow \big)$$

Sea $t_{w'} \in \xrightarrow{w\ w'} \big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \xrightarrow{w\ w'} \big((t_w, \rightarrow)\big)$, como por definición

$$\mathcal{F}_w(X) = \bigcup_{t_w \in X} \xrightarrow{w\ w'} (\{t_w\}) \text{ para todo } X \subseteq T_w$$

tenemos que $t_{w'} \in \mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big)$. Haciendo uso de nuestra hipótesis (*tot*-$*_1$), tenemos que $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\}){\downarrow^*} \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\}){\uparrow}$. Ahora, como hicimos ver en la observación 2.1.1, en la definición de $\mathcal{F}_w(X)$, dicha unión es disjunta. Por ello, tenemos que $t_{w'} \in (\leftarrow, \xrightarrow{w\ w'} (\{t_w\})) \cup [\xrightarrow{w\ w'} (\{t_w\}), \rightarrow \big)$ verificándose así ($*_1$) para todo $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, como queríamos demostrar.

Teorema 2.2.5 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Entonces,*

1. *$\mathcal{F}$ es una clase* `(U-Dom)` *de funciones constantes si, y sólo si, para toda coordenada $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$, se tiene que:*

$$(\textit{u-dom-cons}) \qquad \mathcal{F}_w\left((\leftarrow, t_w)\right) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w) \quad y \quad \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)$$

2. *$\mathcal{F}$ es una clase de funciones totales y constantes si, y sólo si, para todo elemento $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene que:*

$$(\textit{tot-cons}) \qquad \mathcal{F}_w\left((\leftarrow, t_w)\right) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})$$

3. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones* `(U-Dom)`*. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase de funciones constantes si y solo si, para toda $t_w \in Dom_U(\mathcal{F}_w)$, se tiene que:*

$$(\textit{cons}) \qquad \mathcal{F}_w\left((\leftarrow, t_w)\right) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)$$

o, equivalentemente:

$$(\textit{cons}) \qquad \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)$$

4. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones totales. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase de funciones constantes si y solo si, para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se satisface cualesquiera de las inclusiones equivalentes (cons) del ítem anterior.*

Demostración:

Demostramos el ítem 1. Sea $\mathcal{F}$ una clase `(U-Dom)` de funciones constantes. Como consecuencia directa del ítem 1.1 del teorema 2.2.2 se tiene que para toda función parcial $\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}_w$ y toda $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\ w'})$, se satisface:

$$\xrightarrow{w\ w'} \big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \xrightarrow{w\ w'} \big((t_w, \rightarrow)\big) \subseteq \{\xrightarrow{w\ w'} (t_w)\}$$

que es equivalente a

$$\xrightarrow{w\ w'} \big((\leftarrow, t_w)\big) \subseteq \{\xrightarrow{w\ w'} (t_w)\} \quad \text{y} \quad \xrightarrow{w\ w'} \big((t_w, \rightarrow)\big) \subseteq \{\xrightarrow{w\ w'} (t_w)\}$$

Por lo tanto, (*u-dom-cons*) se satisface para toda $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ no fuera una clase `(U-Dom)` de funciones constantes. En ese caso, supongamos primeramente que $\mathcal{F}$ no es una clase `(U-Dom)` (es decir, hay al menos un par de funciones en $\mathcal{F}$ que no poseen un dominio común). Entonces, por el ítem 1 del teorema 2.2.4, tendremos que para alguna coordenada $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$ se tiene que:

$$\mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \nsubseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\downarrow^* \cup \mathcal{F}_w(t_w)\!\uparrow$$

Esto significa, claramente, que $\mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \nsubseteq \mathcal{F}_w(t_w) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\uparrow$. En consecuencia, no se cumple (*u-dom-cons*) para t_w.

Por otra parte, si se diera el caso de que $\mathcal{F}$ no es una clase de funciones constantes, existirá al menos una función no constante $\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}$ y, por el ítem 1.1, del teorema 2.2.2 tendremos que existe $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\ w'})$ tal que:

$$\xrightarrow{w\ w'} \big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \xrightarrow{w\ w'} \big((t_w, \rightarrow)\big) \nsubseteq \{\xrightarrow{w\ w'} (t_w)\}$$

Ahora, por la observación 2.1.1, se tiene, finalmente, que (*u-dom-cons*) no se cumple para t_w.

La demostración de 2 es análoga a la del ítem 1.

Demostramos ahora el ítem 4, ya que la demostración del ítem 3 es similar. Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones totales. Supongamos, además, que $\mathcal{F}$ es una clase de funciones constantes y sean $\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}$ y $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$. Entonces, por el ítem 1.2 del teorema 2.2.2, tenemos que

$$\xrightarrow{w\ w'} \big((\leftarrow, t_w)\big) \subseteq \{\xrightarrow{w\ w'} (t_w)\}$$

o equivalentemente

$$\xrightarrow{w\ w'} \big((t_w, \rightarrow)\big) \subseteq \{\xrightarrow{w\ w'} (t_w)\}$$

Luego se verifica

$$(cons) \qquad \mathcal{F}_w\,((\leftarrow, t_w)) \ \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)$$

o, equivalentemente:

$$(cons) \qquad \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \ \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)$$

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ no es una clase de funciones constantes. En ese caso existirá al menos una función no constante $\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}$. Entonces, de nuevo por el ítem 1.2 del teorema 2.2.2, tendremos que existirá un elemento $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ tal que $\xrightarrow{w\ w'} \big((t_w, \rightarrow)\big) \not\subseteq \{\xrightarrow{w\ w'} (t_w)\}$. La observación 2.1.1 asegura finalmente que no se cumple $(cons)$ para t_w.

Teorema 2.2.6 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$. Entonces:*

1. *$\mathcal{F}$ es una clase* (U-Dom) *de funciones inyectivas si y sólo si, para toda coordenada $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$, se tiene que:*

$$(u\text{-}dom\text{-}iny) \quad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\downarrow^* \cup \mathcal{F}_w(t_w)\uparrow^*$$

2. *$\mathcal{F}$ es una clase de funciones totales e inyectivas si y sólo si, para toda coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene que:*

$$(tot\text{-}iny) \quad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})\downarrow^* \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\})\uparrow^*$$

3. *Sea $\mathcal{F}$ una clase* (U-Dom) *de funciones. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase de funciones inyectivas si y sólo si, para toda $t_w \in Dom_U(\mathcal{F}_w)$, se tiene que:*

$$(iny) \quad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\downarrow^* \cup \mathcal{F}_w(t_w)\uparrow^*$$

   o, equivalentemente:

$$(iny) \quad \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\downarrow^* \cup \mathcal{F}_w(t_w)\uparrow^*$$

4. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones totales. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase de funciones inyectivas si y solo si, para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se satisface cualesquiera de las inclusiones equivalentes (iny) del ítem anterior.*

Demostración:
Demostramos el ítem 2, la demostración de los tres ítemes restantes es similar. Por ser $\mathcal{F}$ una clase de funciones totales, dados $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ y $\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}$, tenemos que $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\ w'})$. Entonces, como $\xrightarrow{w\ w'}$ es una función inyectiva, el ítem 2.2 del teorema 2.2.2, asegura que

$$\xrightarrow{w\ w'} \big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \xrightarrow{w\ w'} \big((t_w, \rightarrow)\big) \subseteq (\leftarrow, \xrightarrow{w\ w'} (t_w)) \cup (\xrightarrow{w\ w'} (t_w), \rightarrow)$$

Luego se tiene que, para todo $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se verifica

$$(tot\text{-}iny) \quad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})\downarrow^* \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\})\uparrow^*$$

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ no es una clase de funciones totales e inyectivas. Si hubiera una función no total en $\mathcal{F}$, entonces por el teorema 2.2.4, tendríamos que para alguna coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$:

$$\mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \not\subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})\downarrow^* \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\})\uparrow$$

de donde se deduce que

$$\mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \nsubseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})\downarrow^* \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\})\uparrow^*$$

por lo que no se verifica (*tot-iny*).

Por otro lado, si existiera una función no inyectiva $\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}$, entonces, de nuevo por el ítem 2.2 del teorema 2.2.2 tendríamos que existe $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\ w'})$ tal que

$$\xrightarrow{w\ w'} \big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \xrightarrow{w\ w'} \big((t_w, \rightarrow)\big) \nsubseteq (\leftarrow, \xrightarrow{w\ w'} (t_w)) \cup (\xrightarrow{w\ w'} (t_w), \rightarrow)$$

Finalmente, la observación 2.1.1 asegura que no se cumple (*tot-iny*) para t_w.

Teorema 2.2.7 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Entonces, $\mathcal{F}$ es una clase de funciones sobreyectivas si y sólo si, para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene que:*

$$(sob) \quad \mathcal{F}_w(\{t_w\})\downarrow^* \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\})\uparrow^* \subseteq \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow))$$

Demostración:
Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones sobreyectivas. Si $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ y $\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}$, el ítem 3.2 del teorema 2.2.2, asegura que:

$$(\leftarrow, \xrightarrow{w\ w'} (\{t_w\})) \cup (\xrightarrow{w\ w'} (\{t_w\}), \rightarrow) \subseteq \xrightarrow{w\ w'} \big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \xrightarrow{w\ w'} \big((t_w, \rightarrow)\big)$$

Luego se tiene que, para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se verifica (*sob*).

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ no es una clase de funciones sobreyectivas. Sea $\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}$ una función no sobreyectiva entonces, de nuevo por el ítem 3.2 del teorema 2.2.2 tendremos que existe $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ tal que:

$$(\leftarrow, \xrightarrow{w\ w'} (\{t_w\})) \cup (\xrightarrow{w\ w'} (\{t_w\}), \rightarrow) \nsubseteq \xrightarrow{w\ w'} \big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \xrightarrow{w\ w'} \big((t_w, \rightarrow)\big)$$

Finalmente, por la observación 2.1.1, se tiene que t_w no satisface (*sob*).

Observación 2.2.1 *En el teorema anterior no se ha distinguido, como en los que lo preceden, que las funciones sean* (`U-Dom`) *o no. El motivo es que, como se muestra en el teorema 2.2.2, la caracterización algebraica de la sobreyectividad no requiere esta distinción.*

Teorema 2.2.8 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Entonces,*

1. *$\mathcal{F}$ es una clase* (`U-Dom`) *de funciones crecientes si, y sólo si, para toda coordenada $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$, se tiene que:*

$$(u\text{-}dom\text{-}crec) \qquad \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\uparrow \quad y \quad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\downarrow$$

2. *$\mathcal{F}$ es una clase de funciones totales y crecientes si, y sólo si, para toda coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene que:*

$$(tot\text{-}crec) \qquad \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})\uparrow \quad y \quad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})\downarrow$$

3. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones* (`U-Dom`)*. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase de funciones crecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in Dom_U(\mathcal{F}_w)$, se tiene que:*

$$(crec) \qquad \mathcal{F}_w((t_w, \to)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\uparrow$$

o, equivalentemente,

$$(crec) \qquad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\downarrow$$

4. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones totales. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase de funciones crecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se satisface cualesquiera de las inclusiones (crec) del ítem anterior.*

5. *$\mathcal{F}$ es una clase* (`U-Dom`) *de funciones decrecientes si, y sólo si, para toda coordenada $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$, se tiene que:*

$$(u\text{-}dom\text{-}decrec) \quad \mathcal{F}_w((t_w, \to)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\downarrow \quad y \quad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\uparrow$$

6. *$\mathcal{F}$ es una clase de funciones totales y decrecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene que:*

$$(tot\text{-}decrec) \qquad \mathcal{F}_w((t_w, \to)) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})\downarrow \quad y \quad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})\!\uparrow$$

7. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones* (`U-Dom`)*. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase de funciones decrecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in Dom_U(\mathcal{F}_w)$, se tiene que:*

$$(decrec) \qquad \mathcal{F}_w((t_w, \to)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\downarrow$$

o, equivalentemente,

$$(decrec) \qquad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\uparrow$$

8. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones totales. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase de funciones decrecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se satisface cualesquiera de las inclusiones (decrec) del ítem anterior.*

Demostración:
Demostramos los ítemes 1 y 8, ya que los restantes se demuestran de modo similar. Veamos 1. Sea $\mathcal{F}$ una clase (`U-Dom`) de funciones crecientes. Como consecuencia directa del ítem 4 del teorema 2.2.2 se tiene que para toda función parcial $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w$ y toda $t_w \in Dom(\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow})$, se satisface:

$$\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} \big((\leftarrow, t_w)\big) \subseteq (\leftarrow, \stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} (t_w)]$$

o, equivalentemente

$$\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} \big((t_w, \to)\big) \subseteq [\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} (t_w), \to)$$

Por lo tanto, (*u-dom-crec*) se satisface para toda $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ no fuera una clase `(U-Dom)` de funciones crecientes. En ese caso, supongamos primeramente que $\mathcal{F}$ no es una clase `(U-Dom)`. Entonces, por el ítem 1 del teorema 2.2.4, tendremos que para alguna coordenada $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$ se tiene que:

$$\mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \nsubseteq \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow}^* \cup \mathcal{F}_w(t_w){\uparrow}$$

luego

$$\mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \nsubseteq \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow} \cup \mathcal{F}_w(t_w){\uparrow}$$

ya que $\mathcal{F}_w(t_w){\downarrow}^* \subseteq \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow}$. Por lo tanto, (*u-dom-crec*) no se satisface en t_w.

Por otra parte, si se diera el caso de que $\mathcal{F}$ no es una clase de funciones crecientes, existirá al menos una función no creciente $\xrightarrow{w\,w'} \in \mathcal{F}$ y, de nuevo por el ítem 4, del teorema 2.2.2 tendremos que existe $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\,w'})$ tal que:

$$\xrightarrow{w\,w'}\big((\leftarrow, t_w)\big) \nsubseteq (\leftarrow, \xrightarrow{w\,w'}(t_w)]$$

Ahora, de nuevo por la observación 2.1.1, se tiene, finalmente, que (*u-dom-crec*) no se cumple para t_w.

Veamos ahora 8. Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones totales. Supongamos, además, que $\mathcal{F}$ es una clase de funciones decrecientes y sea la función $\xrightarrow{w\,w'} \in \mathcal{F}$. Entonces, de nuevo por el ítem 4 del teorema 2.2.2, se tiene que para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ se verifica

$$\xrightarrow{w\,w'}\big((\leftarrow, t_w)\big) \subseteq [\xrightarrow{w\,w'}(t_w), \rightarrow)$$

o, equivalentemente:

$$\xrightarrow{w\,w'}\big((t_w, \rightarrow)\big) \subseteq (\leftarrow, \xrightarrow{w\,w'}(t_w)]$$

Luego (*decrec*) se verifica para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ no es una clase de funciones decrecientes. En ese caso existirá al menos una función no decreciente $\xrightarrow{w\,w'} \in \mathcal{F}$. Entonces, otra vez por el ítem 4 del teorema 2.2.2, tendremos que existirá $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\,w'})$ tal que:

$$\xrightarrow{w\,w'}\big((\leftarrow, t_w)\big) \nsubseteq [\xrightarrow{w\,w'}(t_w), \rightarrow)$$

La observación 2.1.1 asegura finalmente que no se cumple (*decrec*) para t_w.

Teorema 2.2.9 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Entonces,*

1. *$\mathcal{F}$ es una clase* `(U-Dom)` *de funciones estrictamente crecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$, se tiene que:*

   $$(u\text{-}dom\text{-}estr\text{-}crec) \quad \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w){\uparrow}^* \quad y \quad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow}^*$$

2. *$\mathcal{F}$ es una clase de funciones totales y estrictamente crecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene que:*

   $$(tot\text{-}estr\text{-}crec) \quad \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\}){\uparrow}^* \quad y \quad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\}){\downarrow}^*$$

3. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones* (`U-Dom`)*. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase de funciones estrictamente crecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in Dom_U(\mathcal{F}_w)$ se tiene que:*

$$(estr\text{-}crec) \qquad \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\uparrow^*$$

o, equivalentemente,

$$(estr\text{-}crec) \qquad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\downarrow^*$$

4. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones totales. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase de funciones estrictamente crecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se satisface cualesquiera de las inclusiones* (*estr-crec*) *del ítem anterior.*

5. *$\mathcal{F}$ es una clase* (`U-Dom`) *de funciones estrictamente decrecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$, se tiene que:*

$$(u\text{-}dom\text{-}estr\text{-}decrec) \quad \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\downarrow^* \;\; y \;\; \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\uparrow^*$$

6. *$\mathcal{F}$ es una clase de funciones totales y estrictamente decrecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene que:*

$$(tot\text{-}estr\text{-}decrec) \quad \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})\!\downarrow^* \;\; y \; \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})\!\uparrow^*$$

7. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones* (`U-Dom`)*. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase de funciones estrictamente decrecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in Dom_U(\mathcal{F}_w)$, se tiene que:*

$$(estr\text{-}decrec) \qquad \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\downarrow^*$$

o, equivalentemente,

$$(estr\text{-}decrec) \qquad \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \subseteq \mathcal{F}_w(t_w)\!\uparrow^*$$

8. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones totales. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase de funciones estrictamente decrecientes si, y sólo si, para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se satisface cualesquiera de las inclusiones* (*estr-decrec*) *del ítem anterior.*

Demostración:
Es análoga a la del teorema anterior.

2.2.2. Definibilidad en $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$

Ya tenemos todos los elementos necesarios para abordar el estudio de la definibilidad en $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ de clases de estructuras funcionales determinadas por propiedades básicas de las funciones, objetivo de esta sección.

Definibilidad de clases de estructuras funcionales con funciones (U-Dom) y con funciones totales

Teorema 2.2.10 *La siguiente clase de estructuras funcionales es definible*

$$\mathbb{K}_1 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase } \texttt{(U-Dom)} \text{ de funciones parciales}\}$$

Demostración:
Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \in \mathbb{K}_1$. Por el ítem 1 del teorema 2.2.4, $\mathcal{F}$ es una clase de funciones (U-Dom) si y sólo si para toda coordenada $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$ se tiene que:

$$\mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \overset{(u\text{-}dom\text{-}*_1)}{\subseteq} \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow}^* \cup \mathcal{F}_w(t_w){\uparrow}$$

Esto nos lleva de forma natural a tomar como fórmula candidata para definir $\mathbb{K}_1$ la siguiente:

$$(U\text{-}Dom) \qquad \Box(HA \wedge A \wedge GA) \rightarrow (\Box\bot \vee (H\Box A \wedge G\Box A))\ ^4$$

En efecto, para todo modelo (Σ, h) con $\Sigma \in \mathbb{K}_1$ y $t_w \in h(\Box(HA \wedge A \wedge GA))$, pueden darse las siguentes posibilidades:

- $t_w \notin Dom_U(\mathcal{F}_w)$, en cuyo caso $t_w \in h(\Box\bot) \subseteq h((\Box\bot \vee (H\Box A \wedge G\Box A)))$.
- $t_w \in Dom_U(\mathcal{F}_w)$, en cuyo caso tenemos que

$$\begin{array}{ll} t_w \in h(\Box(HA \wedge A \wedge GA)) & \text{sii} \\ t_w \in h(\Box HA) \cap h(\Box A) \cap h(\Box GA)) & \text{sii} \\ \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow}^* \cup \mathcal{F}_w(t_w) \cup \mathcal{F}_w(t_w){\uparrow}^* \subseteq h(A)) & \text{sii} \\ \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow}^* \cup \mathcal{F}_w(t_w){\uparrow} \subseteq h(A)) & \end{array}$$

  Por lo tanto, la inclusión $(u\text{-}dom\text{-}*_1)$ asegura que:

$$\mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \subseteq h(A)$$

  Finalmente, puesto que

$$t_w \in h(H\Box A) \text{ si y sólo si, } \mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \subseteq h(A)$$

$$t_w \in h(G\Box A) \text{ si y sólo si, } \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \subseteq h(A)$$

  tenemos que $t_w \in h((H\Box A \wedge G\Box A)) \subseteq h((\Box\bot \vee (H\Box A \wedge G\Box A)))$.

---

[4] La fórmula

$$(\Diamond\top \wedge (P\Diamond A \vee F\Diamond A)) \rightarrow \Diamond(PA \vee A \vee FA)$$

obtenida a partir de $(U\text{-}Dom)$ gracias a la validez del esquema

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

y las definiciones de F, P y $\Diamond$, define la misma clase. Igual ocurre para el resto de clases estudiadas a continuación, por lo que las omitiremos.

Así pues, (U-Dom) es válida en Σ y por ser Σ un elemento arbitrario de $\mathbb{K}_1$, (U-Dom) es válida en la clase $\mathbb{K}_1$.

Recíprocamente, si $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \notin \mathbb{K}_1$, de nuevo por el ítem 1 del teorema 2.2.4, se tiene que existe $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$ tal que

$$\mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \nsubseteq \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow^*} \cup \mathcal{F}_w(t_w){\uparrow}$$

Esta coordenada nos da pie a considerar cualquier modelo modelo funcional (Σ, h) tal que $h(p) = \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow^*} \cup \mathcal{F}_w(t_w){\uparrow}$, para el cual es inmediato comprobar que:

$$t_w \in h(\Box(Hp \wedge p \wedge Gp)) \text{ y que } t_w \notin h((\Box\bot \vee (H\Box p \wedge G\Box p)))$$

por lo que (U-Dom) no es válida en Σ y, puesto que Σ es una estructura arbitraria que no está en $\mathbb{K}_1$, la demostración está completa.

Teorema 2.2.11 *La siguiente clase de estructuras funcionales es definible*

$$\mathbb{K}_2 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \textit{ es una clase de funciones totales}\}$$

Demostración:
Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \in \mathbb{K}_2$. Por ítem 2 del teorema 2.2.4, $\mathcal{F}$ es una clase de funciones totales si y sólo si para toda coordenada, $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene que:

$$\mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \overset{(tot\text{-}*_1)}{\subseteq} \mathcal{F}_w(\{t_w\}){\downarrow^*} \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\}){\uparrow}$$

Esto nos lleva a tomar como fórmula candidata para definir $\mathbb{K}_2$ la siguiente:

$$(Tot) \quad \Box(HA \wedge A \wedge GA) \rightarrow (H\Box A \wedge G\Box A)$$

En efecto, basta razonar como en el teorema anterior, utilizado ahora (tot-$*_1$), para obtener la validez de la fórmula (Tot) en $\mathbb{K}_2$.

Recíprocamente, sea $\Sigma \notin \mathbb{K}_2$. Entonces, utilizando de nuevo el teorema 2.2.4, existe $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ tal que

$$\mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \nsubseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\}){\downarrow^*} \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \uparrow$$

Ahora consideramos cualquier modelo (Σ, h), tal que

$$h(p) = \mathcal{F}_w(\{t_w\}){\downarrow^*} \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\}){\uparrow}$$

Razonando como en el teorema anterior se prueba que (Tot) no es válida en dicho modelo y, por tanto no es válida en ninguna estructura que no pertenezca a $\mathbb{K}_2$, finalizando esta demostración.

Teorema 2.2.12 *La siguiente clase de estructuras funcionales es definible*

$$\mathbb{K}_3 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \textit{ es una clase } \texttt{(U-Dom)} \textit{ de funciones no totales }\}$$

Demostración:
Demostraremos que $\mathbb{K}_3$ es definida por el conjunto de fórmulas

$$\{\Box(HA \wedge A \wedge GA) \to (\Box\bot \vee (H\Box A \wedge G\Box A)), P\Box\bot \vee \Box\bot \vee F\Box\bot\}$$

La validez de $\Box(HA \wedge A \wedge GA) \to (\Box\bot \vee (H\Box A \wedge G\Box A))$ en $\mathbb{K}_3$ se deduce del teorema 2.2.10, puesto que la clase de las funciones no totales con dominio uniforme es una subclase de las funciones parciales con dominio uniforme. Además, para cada estructura de $\mathbb{K}_3$ se tiene que, para todo T_w, existe al menos un $t_w \in T_w$ tal que $t_w \notin Dom_U(\mathcal{F}_w)$ y, por lo tanto, $t_w \in h(\Box\bot)$. Finalmente, la linealidad de $<_w$ asegura que la fórmula

$$(No\text{-}Tot) \qquad P\Box\bot \vee \Box\bot \vee F\Box\bot$$

se satisface en todos los elementos de T_w.

Para el recíproco, supongamos que $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \notin \mathbb{K}_3$ y consideramos los dos casos siguientes:

(i) Existe una función total, $\overset{w\ w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$. Entonces $\Box\bot$ no es verdadera en ninguna coordenada de T_w y, por tanto, la fórmula $P\Box\bot \vee \Box\bot \vee F\Box\bot$ no es válida en dicha estructura (no importa la función de interpretación definida sobre dicha estructura).

(ii) $\mathcal{F}$ no verifica la condición `(U-Dom)`, caso que ya ha sido tratado en el teorema 2.2.10.

Definibilidad de clases de estructuras funcionales con funciones constantes

Teorema 2.2.13 *Las siguientes clases de estructuras funcionales son definibles:*

a) $\mathbb{K}_4 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase* `(U-Dom)` *de funciones constantes*$\}$.

b) $\mathbb{K}_5 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones totales y constantes*$\}$.

c) Además:

c.1) $\mathbb{K}_4$ *es definible en* $\mathbb{K}_1$ *por cualquiera de las fórmulas*

$$(Cons)_{(U\text{-}Dom)} \quad \Box A \to (\Box\bot \vee H\Box A); \quad \Box A \to (\Box\bot \vee G\Box A)$$

c.2) $\mathbb{K}_5$ *es definible en* $\mathbb{K}_2$ *por cualquiera de las fórmulas*

$$(Cons)_{(Tot)} \quad \Box A \to H\Box A; \quad \Box A \to G\Box A$$

Demostración:

Probaremos el ítem b). El resto de las demostraciones son análogas y nos limitaremos a dar las fórmulas o conjuntos de fórmulas que definen las respectivas clases.

Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \in \mathbb{K}_5$. Por el ítem 2 del teorema 2.2.5, $\mathcal{F}$ es una clase de funciones totales constantes si y sólo si para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene que:

$$(\textit{tot-cons}) \qquad \mathcal{F}_w\left((\leftarrow, t_w)\right) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})$$

Esto nos lleva de forma natural a tomar como fórmula candidata para definir $\mathbb{K}_5$ la siguiente:

$$(Tot\text{-}Cons) \qquad \Box A \rightarrow (H\Box A \wedge G\Box A)$$

En efecto, consideremos un modelo arbitarrio (Σ, h) con $\Sigma \in \mathbb{K}_5$ y $t_w \in h(\Box A)$, entonces $\mathcal{F}_w(\{t_w\}) \subseteq h(A)$ y, haciendo uso de la inclusión (*tot-cons*), se tiene que $\mathcal{F}_w\left((\leftarrow, t_w)\right) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \subseteq h(A)$. Luego:

$$t_w \in h(H\Box A) \cap (G\Box A) = h(H\Box A \wedge G\Box A)$$

Así pues, $(Tot\text{-}Cons)$ es válida en la clase $\mathbb{K}_5$.

Recíprocamente, sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \notin \mathbb{K}_5$. De nuevo por el ítem 2 del teorema 2.2.5, se tiene que existe $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$,tal que:

$$\mathcal{F}_w\left((\leftarrow, t_w)\right) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow)) \not\subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})$$

Esta coordenada nos da pie a considerar cualquier modelo modelo funcional (Σ, h) tal que $h(p) = \mathcal{F}_w(\{t_w\})$, para el cual es inmediato comprobar que:

$$t_w \in h(\Box p) \text{ pero } t_w \notin h(H\Box p \wedge G\Box p)$$

luego $(Tot\text{-}Cons)$ no es válida en dicho modelo y, por tanto no es válida en ninguna estructura que no pertenezca a $\mathbb{K}_5$.

Análogamente se demuestran el resto de los ítemes, haciendo uso del teorema 2.2.5. Concretamente, se tiene que:

$(U\text{-}Dom\text{-}Cons)$ $\quad \Box A \rightarrow (\Box\bot \vee (H\Box A \wedge G\Box A))$ define $\mathbb{K}_4$.

Definibilidad de clases de estructuras funcionales con funciones inyectivas y con funciones sobreyectivas

Teorema 2.2.14 *Las siguientes clases de estructuras funcionales son definibles*

a) $\mathbb{K}_6 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase* `(U-Dom)` *de funciones inyectivas*$\}$.

b) $\mathbb{K}_7 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones totales e inyectivas*$\}$.

c) Además:

c.1) $\mathbb{K}_6$ *es definible en* $\mathbb{K}_1$ *por cualquiera de las fórmulas*

$$(Iny)_{(U\text{-}Dom)} \; \Box(HA \wedge GA) \rightarrow (\Box\bot \vee G\Box A); \; \Box(HA \wedge GA) \rightarrow (\Box\bot \vee H\Box A)$$

c.2) $\mathbb{K}_7$ *es definible en* $\mathbb{K}_2$ *por por cualquiera de las fórmulas*

$$(Iny)_{(Tot)} \quad \Box(HA \wedge GA) \to G\Box A; \quad \Box(HA \wedge GA) \to H\Box A$$

Demostración:
Daremos las fórmulas o conjuntos de fórmulas que definen a estas clases y detallamos la demostración para el ítem c.1. Concretamente, demostraremos que la clase $\mathbb{K}_6$ es definible en $\mathbb{K}_1$ por cualquiera de las fórmulas

$$(Iny)_{(U\text{-}Dom)} \ \Box(HA \wedge GA) \to (\Box\bot \vee G\Box A); \ \Box(HA \wedge GA) \to (\Box\bot \vee H\Box A)$$

Elegimos por ejemplo $\Box(HA \wedge GA) \to (\Box\bot \vee G\Box A)$, la demostración para la otra fórmula es similar.

Sea (Σ, h) un modelo cualquiera, donde $\Sigma \in \mathbb{K}_6 \subseteq \mathbb{K}_1$ y sea $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ tal que $t_w \in h(\Box(HA \wedge GA))$. Entonces, tenemos dos posibilidades:

- $t_w \notin Dom_U(\mathcal{F}_w)$, en cuyo caso $t_w \in h(\Box\bot) \subseteq h(\Box\bot \vee G\Box A)$.
- $t_w \in Dom_U(\mathcal{F}_w)$, en cuyo caso,

$$\begin{array}{ll} t_w \in h(\Box(HA \wedge GA)) & \text{sii} \\ t_w \in h(\Box HA) \cap h(\Box GA) & \text{sii} \\ \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow^*} \cup \mathcal{F}_w(t_w){\uparrow^*} \subseteq h(A) & \end{array}$$

Ahora, la inclusión (*iny*) del ítem 3 del teorema 2.2.6 asegura que

$$\mathcal{F}_w((t_w, \to)) \subseteq h(A)$$

Por tanto, $t_w \in h(G\Box A) \subseteq h(\Box\bot \vee G\Box A)$. Así pues, $\Box(HA \wedge GA) \to (\Box\bot \vee G\Box A)$ es válida en Σ y por ser Σ un elemento arbitrario de $\mathbb{K}_6$, dicha fórmula es válida en la clase $\mathbb{K}_6$.

Recíprocamente, si $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \in \mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_6$ (es decir, $\mathcal{F}$ es una clase `(U-Dom)` de funciones, pero hay al menos una función no inyectiva en $\mathcal{F}$), entonces, de nuevo por el ítem 3 del teorema 2.2.6, tenemos que existe $t_w \in Dom_U(\mathcal{F}_w)$ tal que

$$\mathcal{F}_w((t_w, \to)) \nsubseteq \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow^*} \cup \mathcal{F}_w(t_w){\uparrow^*}$$

Podemos considerar, entonces, cualquier modelo funcional (Σ, h) tal que $h(p) = \mathcal{F}_w(t_w){\downarrow^*} \cup \mathcal{F}_w(t_w){\uparrow^*}$, para el cual es inmediato comprobar que:

$$t_w \in h(\Box(Hp \wedge Gp)) \text{ y que } t_w \notin h(\Box\bot \vee G\Box p)$$

por lo que $\Box(HA \wedge GA) \to (\Box\bot \vee G\Box A)$ no es válida en Σ. Dado que Σ es una estructura arbitraria en $\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_6$, la demostración está completada.

De forma análoga se demuestra, haciendo uso del teorema 2.2.6, que

a) La fórmula

$$(\textit{U-Dom-Iny}) \qquad \Box(HA \wedge GA) \rightarrow (\Box\bot \vee (H\Box A \wedge G\Box A))$$

define la clase $\mathbb{K}_6$.

b) La fórmula

$$(\textit{Tot-Iny}) \qquad \Box(HA \wedge GA) \rightarrow (H\Box A \wedge G\Box A)$$

define define la clase $\mathbb{K}_7$.

Teorema 2.2.15 *La siguiente clase de estructuras funcionales es definible*

$$\mathbb{K}_8 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase de funciones sobreyectivas}\}$$

Demostración:
Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \in \mathbb{K}_8$. El teorema 2.2.7 afirma que $\mathcal{F}$ es una clase de funciones sobreyectivas si y sólo si para toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene que:

$$(sob) \quad \mathcal{F}_w(\{t_w\})\downarrow^* \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\})\uparrow^* \subseteq \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow))$$

Esto nos lleva de forma natural a tomar como fórmula candidata para definir $\mathbb{K}_8$, la siguiente:

$$(Sob) \qquad (H\Box A \wedge G\Box A) \rightarrow \Box(HA \wedge GA)$$

En efecto, sea (Σ, h) un modelo funcional con $\Sigma \in \mathbb{K}_8$. Entonces, se verifica que:

$$t_w \in h((H\Box A \wedge G\Box A)) \text{ sii } \mathcal{F}_w\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \mathcal{F}_w\big((t_w, \rightarrow)\big) \subseteq h(A)$$

Utilizando ahora (sob) obtenemos que:

$$\mathcal{F}_w(\{t_w\})\downarrow^* \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\})\uparrow^* \subseteq h(A)$$

y por lo tanto:

$$t_w \in h(\Box(HA \wedge GA))$$

Así pues, (Sob) es válida en Σ, siendo Σ un elemento arbitrario de $\mathbb{K}_8$.

Recíprocamente, si $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \notin \mathbb{K}_8$, de nuevo por el teorema 2.2.7, se tiene que existe $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, tal que:

$$\mathcal{F}_w(\{t_w\})\downarrow^* \cup \mathcal{F}_w(\{t_w\})\uparrow^* \nsubseteq \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow))$$

Consideramos ahora cualquier modelo modelo funcional (Σ, h) tal que

$$h(p) = \mathcal{F}_w((\leftarrow, t_w)) \cup \mathcal{F}_w((t_w, \rightarrow))$$

Para él es inmediato comprobar que:

$$t_w \in h((H\Box p \wedge G\Box p)) \text{ y } t_w \notin h(\Box(Hp \wedge Gp))$$

por lo que (Sob) no es válida en Σ, como queríamos demostrar.

Definibilidad de clases de estructuras funcionales con funciones crecientes y con funciones decrecientes

Teorema 2.2.16 *Las siguientes clases de estructuras funcionales son definibles*

a) $\mathbb{K}_9 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase* (U-Dom) *de funciones crecientes*$\}$.

b) $\mathbb{K}_{10} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones totales y crecientes*$\}$.

c) $\mathbb{K}_{11} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase* (U-Dom) *de funciones decrecientes*$\}$.

d) $\mathbb{K}_{12} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones totales y decrecientes*$\}$.

Demostración:
A partir del teorema 2.2.8, y razonando como en los teoremas anteriores, obtenemos:

- El conjunto de fórmulas

  (*U-Dom-Crec*) $\{\Box(A \wedge HA) \rightarrow (\Box\bot \vee H\Box A), \Box(A \wedge GA) \rightarrow (\Box\bot \vee G\Box A)\}$

  define $\mathbb{K}_9$.

- el conjunto de fórmulas

  (*Tot-Crec*) $\{\Box(A \wedge HA) \rightarrow H\Box A), \Box(A \wedge GA) \rightarrow G\Box A)\}$

  define $\mathbb{K}_{10}$.

- El conjunto de fórmulas

  (*U-Dom-Decrec*) $\{\Box(A \wedge GA) \rightarrow (\Box\bot \vee H\Box A), \Box(A \wedge HA) \rightarrow (\Box\bot \vee G\Box A)\}$

  define $\mathbb{K}_{11}$.

- el conjunto de fórmulas

  (*Tot-Decrec*) $\{\Box(A \wedge HA) \rightarrow G\Box A, \Box(A \wedge GA) \rightarrow H\Box A\}$

  define $\mathbb{K}_{12}$.

La siguiente proposición se demuestra fácilmente a partir del teorema 2.2.8. Usamos en el enunciado de esta proposición la nomenclatura introducida en la prueba del teorema 2.2.16.

Proposición 2.2.17

a) Cualquiera de las fórmulas del conjunto (*U-Dom-Crec*) *es suficiente para definir* $\mathbb{K}_9$ *en* $\mathbb{K}_1$.

b) Cualquiera de las fórmulas del conjunto (*Tot-Crec*) *es suficiente para definir* $\mathbb{K}_{10}$ *en* $\mathbb{K}_2$.

c) Cualquiera de las fórmulas del conjunto (*U-Dom-Decrec*) *es suficiente para definir* $\mathbb{K}_{11}$ *en* $\mathbb{K}_1$.

d) *Cualquiera de las fórmulas del conjunto* $(Tot\text{-}Decrec)$ *es suficiente para definir* $\mathbb{K}_{12}$ *en* $\mathbb{K}_2$.

Teorema 2.2.18 *Las siguientes clases de estructuras funcionales son definibles*

a) $\mathbb{K}_{13} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase* `(U-Dom)` *de funciones estrictamente crecientes*$\}$.

b) $\mathbb{K}_{14} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones totales y estrictamente crecientes*$\}$.

c) $\mathbb{K}_{15} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase* `(U-Dom)` *de funciones estrictamente decrecientes*$\}$.

d) $\mathbb{K}_{16} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es de funciones totales y estrictamente decrecientes*$\}$.

Demostración:
A partir del teorema 2.2.9, obtenemos:

- El conjunto de fórmulas

$$(U\text{-}Dom\text{-}Estr\text{-}Crec) \quad \{\Box GA \to (\Box\bot \vee G\Box A), \Box HA \to (\Box\bot \vee H\Box A)\}$$

define $\mathbb{K}_{13}$.

- El conjunto de fórmulas

$$(Tot\text{-}Estr\text{-}Crec) \quad \{\Box GA \to G\Box A, \Box HA \to H\Box A\}$$

define $\mathbb{K}_{14}$.

- El conjunto de fórmulas

$$(U\text{-}Dom\text{-}Estr\text{-}Decrec) \quad \{\Box GA \to (\Box\bot \vee H\Box A), \Box HA \to (\Box\bot \vee G\Box A)\}$$

define $\mathbb{K}_{15}$.

- El conjunto de fórmulas

$$(Tot\text{-}Estr\text{-}Decrec) \quad \{\Box GA \to H\Box A, \Box HA \to G\Box A\}$$

define $\mathbb{K}_{16}$.

La siguiente proposición también es consecuencia del teorema 2.2.9.

Proposición 2.2.19

a) *Cualquiera de las fórmulas del conjunto* $(U\text{-}Dom\text{-}Estr\text{-}Crec)$ *es suficiente para definir* $\mathbb{K}_{13}$ *en* $\mathbb{K}_1$.

b) *Cualquiera de las fórmulas del conjunto* $(Tot\text{-}Estr\text{-}Crec)$ *es suficiente para definir* $\mathbb{K}_{14}$ *en* $\mathbb{K}_2$.

c) *Cualquiera de las fórmulas del conjunto* $(U\text{-}Dom\text{-}Estr\text{-}Decrec)$ *es suficiente para definir* $\mathbb{K}_{15}$ *en* $\mathbb{K}_1$.

d) *Cualquiera de las fórmulas del conjunto* $(Tot\text{-}Estr\text{-}Decrec)$ *es suficiente para definir* $\mathbb{K}_{16}$ *en* $\mathbb{K}_2$.

2.3. $(T \times W)$-validez, Kamp-validez y validez funcional

En este apartado analizamos la relación entre la $(T \times W)$-validez y la Kamp-validez, bien conocidas, con la validez respecto a las estructuras funcionales definidas en este trabajo. Como veremos, las estructuras funcionales constituyen una fuerte generalización de las estructuras $Kamp$ y, consecuentemente, de las $T \times W$.

2.3.1. $(T \times W)$-validez y validez funcional

Recordemos que, según la definición 1.6.1, una **estructura** $T \times W$ es una tupla $\Sigma_{T\times W} = (T, <, W, \approx)$ constituida por:

1. Un conjunto no vacío T (de "puntos o instantes temporales").
2. Un orden lineal estricto $<$ sobre T.
3. Un conjunto no vacío W (de "mundos" o "historias").
4. Una familia $\approx = \{\approx_t \mid t \in T\}$ de relaciones de equivalencia, $\approx_t$, sobre W que satisfacen la siguiente condición : para todo $w, w' \in W$ y $t_1, t_2 \in T$,

$$\text{si } \ w \approx_{t_1} w' \ \text{ y } \ t_2 \leq t_1, \quad \text{entonces} \quad w \approx_{t_2} w'$$

Y, según la definición 1.6.2. un **modelo** $T \times W$ es una tupla

$$\mathcal{M}_{T\times W} = (\Sigma_{T\times W}, h)$$

donde $\Sigma_{T\times W} = (T, <, W, \approx)$ es una estructura $T \times W$ y h es una función

$$h : L_{T\times W} \longrightarrow T \times W$$

que asigna a cada átomo $p \in \mathcal{V}$, un subconjunto de $T \times W$ y que satisface:

$$\text{si } \ w \approx_t w' \text{ entonces } \quad (t, w) \in h(p) \text{ sii } \ (t, w') \in h(p) \quad (*)$$

h se extiende de forma recursiva a $L_{T\times W}$. Concretamente, a todas las fbfs de la lógica proposicional (incluidas las constantes $\top$ y $\bot$) de la forma habitual. Para las conectivas temporales y modales, h se define como sigue:

$$\begin{array}{rcl} h(GA) & = & \{(t, w) \in T \times W \mid \bigcup\limits_{t' \in (t, \rightarrow)} (t', w) \subseteq h(A)\}; \\ h(HA) & = & \{(t, w) \in T \times W \mid \bigcup\limits_{t' \in (\leftarrow, t)} (t', w) \subseteq h(A)\}; \\ h(\Box A) & = & \{(t, w) \in T \times W \mid \bigcup\limits_{w' \in [w]_{\approx_t}} (t, w') \subseteq h(A)\}; \end{array}$$

donde $[w]_{\approx_t}$ denota la clase de equivalencia de w por la relación $\approx_t$

Recordemos que, como destacamos en el capítulo anterior, de la condición $(*)$ y del ítem 4 de la definición de estructura $T \times W$, se deduce que

$$\text{si } \ w \approx_t w' \text{ y } t' \leq t \text{ entonces:} \quad (t', w) \in h(p) \text{ si y sólo si } \quad (t', w') \in h(p)$$

Tenemos ya todos los elementos necesarios para relacionar este tipo de modelos y los modelos funcionales introducidos en este trabajo. En primer lugar, establecemos cómo representar el contexto $T \times W$ en nuestro ámbito funcional:

Generación de una estructura funcional a partir de una estructura $T \times W$.

Definición 2.3.1 *Dada una estructura $T \times W$, $\Sigma_{T\times W} = (T, <, W, \approx)$, definimos la estructura funcional asociada, $\Sigma_\bullet^{\mathcal{F}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, donde*

1. *$\mathcal{T}$ es el conjunto de todos los órdenes lineales estrictos $(T_w, <_w)$ tales que para cada $w \in W$, $(T_w, <_w)$ es una copia isomórfica de $(T, <)$. La copia de t en T_w se denota t_w. Así pues, si $w \neq w'$, entonces t_w y $t_{w'}$ son diferentes.*

2. *$\mathcal{F}$ es la clase $\{\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} \mid w \approx_t w',$ para algún $t \in T$ y $w, w' \in W\}$,*

   donde $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}$ se define como sigue:

   - el dominio de $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}$ es el conjunto $\{t_w \in T_w \mid w \approx_t w'\}$ y,

   - para cada $t_w \in T_w$, se tiene que $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} (t_w) = t_{w'}$.

Puesto que $\approx_t$ son relaciones de equivalencia, tenemos que:

1. $id_{T_w} \in \mathcal{F}_w$ para toda $w \in W$.

2. si $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w$, entonces $(\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow})^{-1} \in \mathcal{F}_{w'}$.

3. $\mathcal{F}$ es cerrado bajo composición de funciones.

El siguiente lema (cuya demostración es trivial) asegura que, en la construcción anterior, $\approx$ queda determinada por $\mathcal{F}$:

Lema 2.3.2 *Sea $\Sigma_{T\times W} = (T, <, W, \approx)$ una estructura $T \times W$ y consideremos la estructura funcional, $\Sigma_\bullet^{\mathcal{F}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, asociada a $\Sigma_{T\times W}$. Entonces, para cualesquiera $w, w' \in W$ y $t \in T$, se tiene que:*

$$w \approx_t w' \text{ si y sólo si } t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})$$ [5]

Podemos ya pasar a relacionar los correspondientes modelos.

Generación de un $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$-modelo a partir de un modelo $T \times W$.

De cara a generar un $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$-modelo a partir de un modelo $T \times W$, restringimos la noción de "modelo funcional" dada en la definición 2.1.4

Definición 2.3.3 *Sea $\Sigma_{T\times W}$ una estructura $T \times W$ y $\Sigma_\bullet^{\mathcal{F}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ la estructura funcional asociada dada en la definición 2.3.1. Un* **modelo funcional $T \times W$-restringido** *sobre $\Sigma_\bullet^{\mathcal{F}}$ es una tupla $\mathcal{M}_\bullet^{\mathcal{F}} = (\Sigma_\bullet^{\mathcal{F}}, h_\bullet)$, donde la función $h_\bullet$ está definida como en la definición 2.1.4, pero con la siguiente restricción: para todo átomo*

[5] Donde t_w es la copia de t en T_w y $t_{w'}$ es la copia de t en $T_{w'}$

$p \in \mathcal{V}$ y coordenadas cualesquiera $t_w, t'_{w'} \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathcal{F}}_{\bullet}}$ tales que $t'_{w'} \in \mathcal{F}_w(t_w)$, se satisface

$$t_w \in h_{\bullet}(p) \quad \textit{si y sólo si} \quad t'_{w'} \in h_{\bullet}(p) \qquad (**)$$

El siguiente lema establece la equivalencia de los modelos $T \times W$ y los modelos funcionales $T \times W$-restringidos.

Lema 2.3.4 *Sea $\mathcal{M}_{T\times W} = (\Sigma_{T\times W}, h)$ un modelo $T\times W$ definido sobre la estructura dada por $\Sigma_{T\times W} = (T, <, W, \approx)$, sea $\Sigma^{\mathcal{F}}_{\bullet} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ la estructura funcional asociada a $\Sigma_{T\times W}$ y $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}_{\bullet} = (\Sigma^{\mathcal{F}}, h_{\bullet})$ un modelo funcional restringido sobre $\Sigma^{\mathcal{F}}_{\bullet}$ que satisface la condición siguiente:*

$$t_w \in h_{\bullet}(p) \textit{ si y sólo si } (t, w) \in h(p)$$

Entonces, para toda fórmula A, se cumple que:

$$t_w \in h_{\bullet}(A) \textit{ si y sólo si } (t, w) \in h(A).$$

Demostración:
Es inmediata por inducción estructural sobre A.

El siguiente resultado es de comprobación trivial:

Teorema 2.3.5 *Sea $\Sigma_{T\times W}$ una estructura $T \times W$ y sea $A \in L_{T\times W}$. Entonces A es $(T \times W)$-válida en $\Sigma_{T\times W}$ si y sólo si A es válida en todo modelo restringido sobre la estructura funcional, $\Sigma^{\mathcal{F}}_{\bullet} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ asociada a $\Sigma_{T\times W}$.*

2.3.2. Kamp-validez y validez funcional

Recordemos que, de acuerdo con la definición 1.6.3, una **estructura Kamp** es una tupla $\Sigma_{Kamp} = (W, T, <, \approx)$ formada por:

1. Un conjunto no vacío W (de "mundos" o "historias").
2. Un conjunto no vacío $T = \bigcup_{w\in W} T_w$ (de "puntos o instantes temporales en cada mundo").
3. Una familia $<= \{<_w \mid w \in W\}$ de relaciones sobre T, donde cada $<_w$ es un orden lineal estricto definido sobre $T_w \subseteq T$.
4. Una familia $\approx = \{\approx_t \mid t \in T\}$ de relaciones de equivalencia, $\approx_t$, sobre W tal que satisface las siguientes condiciones: Para todo $w, w' \in W$ y $t \in T$,

   a) si $w \approx_t w'$ entonces:
   - $t \in T_w \cap T_{w'}$,
   - $\{t_1 \in T_w \mid t_1 <_w t\} = \{t_1 \in T_{w'} \mid t_1 <_{w'} t\}$

   b) si $w \approx_t w'$ y $t' \leq_w t$, entonces $w \approx_{t'} w'$

Por otra parte, según la definición 1.6.4, un **modelo Kamp** es una tupla

$$\mathcal{M}_{Kamp} = (\Sigma_{Kamp}, h)$$

donde $\Sigma_{Kamp} = (W, T, <, \approx)$ es una estructura Kamp y h es una función

$$h : L_{T\times W} \longrightarrow T \times W$$

que asigna a cada átomo $p \in \mathcal{V}$ un subconjunto Δ de $T \times W$ de la forma

$$\Delta = \{(t, w) \mid t \in T_w\}$$

y que satisface:

$$\text{si } \ w \approx_t w' \text{entonces} \quad (t, w) \in h(p) \text{ si y sólo si } \quad (t, w') \in h(p) \quad (*)$$

h se extiende de forma recursiva a $L_{T\times W}$. Concretamente, a todas las fbfs de la lógica proposicional (incluidas las constantes $\top$ y $\bot$) de la forma habitual. Para las conectivas temporales y modales, h se define como sigue:

$$\begin{array}{rcl} h(GA) & = & \{(t, w) \in \Delta \mid \bigcup\limits_{t' \in (t, \rightarrow)} (t', w) \subseteq h(A)\}; \\ h(HA) & = & \{(t, w) \in \Delta \mid \bigcup\limits_{t' \in (\leftarrow, t)} (t', w) \subseteq h(A)\}; \\ h(\Box A) & = & \{(t, w) \in \Delta \mid \bigcup\limits_{w' \in [w]_{\approx_t}} (t, w') \subseteq h(A)\}; \end{array}$$

donde $[w]_{\approx_t}$ denota la clase de equivalencia de w por la relación $\approx_t$.

Como en el caso de las estructuras $T \times W$, podemos ya relacionar este tipo de modelos y los modelos funcionales. En primer lugar, establecemos cómo representar el contexto $Kamp$ en nuestro ámbito funcional:

Generación de una estructura funcional a partir de una estructura Kamp.

Definición 2.3.6 *Dada una estructura Kamp, $\Sigma_{Kamp} = (T, <, W, \approx)$, definimos la estructura funcional asociada, $\Sigma_{\bullet}^{\mathcal{F}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, donde*

1. *$\mathcal{T} = \bigcup\limits_{w \in W} (T_w^*, <_w^*)$, donde para cada $(T_w, <_w)$ de Σ_{Kamp}, $(T_w^*, <_w^*)$ es una copia de $(T_w, <_w)$, de forma que si $w, w' \in W$ y $w \neq w'$, entonces $T_w^* \cap T_{w'}^* = \varnothing$. La copia de $t \in T = \bigcup_{w \in W} T_w$ se denota t_w^*. Por tanto, si $t \in T_w \cap T_{w'}$, entonces hay una copia t_w^* de t en T_w^* y una copia $t_{w'}^*$ de t en $T_{w'}^*$.*

2. *$\mathcal{F}$ es la clase $\{\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} \mid w \approx_t w'$, para algún $t \in T$ y $w, w' \in W\}$,*

   donde $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}$ se define como sigue:

   - el dominio de $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}$ es el conjunto $\{t_w^* \in T_w^* \mid w \approx_t w'\}$ y,

   - para cada $t_w^* \in T_w^*$, se tiene que $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} (t_w^*) = t_{w'}^*$.

Dado que $\approx_t$ son relaciones de equivalencia, tenemos que:

1. $id_{T^*_w} \in \mathcal{F}_w$ para todo $w \in W$.

2. si $\overset{w\,w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w$, entonces $(\overset{w\,w'}{\longrightarrow})^{-1} \in \mathcal{F}_{w'}$.

3. $\mathcal{F}$ es cerrado bajo composición de funciones.

El siguiente lema (cuya demostración es trivial) asegura que, en la anterior construcción, $\approx$ está determinada por $\mathcal{F}$:

Lema 2.3.7 *Sea $\Sigma_{Kamp} = (T, <, W, \approx)$ una estructura Kamp y consideremos la estructura funcional, $\Sigma^{\mathcal{F}}_{\bullet} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, asociada a Σ_{Kamp}. Entonces, para cualesquiera $w, w' \in W$ y $t \in T$, tenemos que:*

$$w \approx_t w' \text{ si y sólo si } t^*_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t^*_w\}).$$

El resto sigue los mismos pasos que los efectuados para las estructuras $T \times W$.

2.4. Sistemas axiomáticos para $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$

En esta sección consideramos sistemas axiomáticos para $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$. El estudio realizado hasta aquí de la definibilidad nos permitirá seleccionar los axiomas de modo natural. Comenzamos introduciendo un sistema minimal en el que nada se exige a la componente funcional y en el que, siguiendo nuestra opción, consideramos flujos temporales lineales.

2.4.1. El sistema minimal $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$

Este sistema tiene como esquemas de axiomas los siguientes:

1. Las tautologías de la lógica clásica proposicional (a la que denotaremos $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$).

2. Los esquemas de axiomas temporales del sistema minimal del la lógica proposicional temporal $\mathcal{K}_l$.

3. El esquema de axioma K, característico de la lógica normal modal proposicional $\mathcal{K}$.

Las **reglas de inferencia** son: la regla *Modus Ponens* (denotada (MP)) de $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$, y las reglas de $\mathcal{K}_l + \mathcal{K}$:

$$(RG) : \frac{A}{GA}; \qquad (RH) : \frac{A}{HA}; \qquad (RN) : \frac{A}{\Box A}$$

A partir de este sistema, introducimos sistemas que tratan funciones parciales de dominio uniforme, funciones totales, y funciones no totales de dominio uniforme. Estos sistemas son los sistemas minimales para tratar cada una de estas clases de funciones.

2.4.2. El sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-(*U-Dom*)

Nuestro objetivo es introducir un sistema que caracterice sintácticamente la clase de estructuras

$$\mathbb{K}_1 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase } \texttt{(U-Dom)} \text{ de funciones } \}$$

En consecuencia, el teorema 2.2.10 nos indica que el sistema buscado, al que denotaremos por $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-(*U-Dom*), se obtiene añadiendole a $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ el esquema de axioma:

$$(U\text{-}Dom) \qquad \Box(HA \wedge A \wedge GA) \rightarrow (\Box\bot \vee (H\Box A \wedge G\Box A))$$

2.4.3. El sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-*Tot*

Nuestro siguiente objetivo es introducir un sistema axiomático que caracterice sintác-ticamente la clase de estructuras

$$\mathbb{K}_2 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase de funciones totales}\}$$

En consecuencia, el teorema 2.2.11 nos indica que el sistema buscado, al que denotaremos por $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-*Tot*, se obtiene añadiendole a $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ el esquema de axioma:

$$(Tot) \quad \Box(HA \wedge A \wedge GA) \rightarrow (H\Box A \wedge G\Box A)$$

Este sistema es una extensión de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-(*U-Dom*). Es inmediato comprobar que (*U-Dom*) es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-*Tot*.

2.4.4. El sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-(*No-Tot*)

Utilizando ahora el teorema 2.2.12, extendemos el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-(*U-Dom*), mediante la adición del esquema

$$(No\text{-}Tot) \qquad P\Box\bot \vee \Box\bot \vee F\Box\bot$$

2.5. Corrección y completitud de sistemas funcionales

En esta sección presentaremos resultados de caracterización (corrección y completitud) de los sistemas funcionales que hemos presentado en la sección anterior.

2.5.1. Corrección y completitud de sistemas funcionales minimales

En esta sección trabajaremos con sistemas funcionales que tratan funciones totales, parciales de dominio uniforme y no totales de dominio uniforme. Estos sistemas son los sistemas minimales para tratar cada una de estas clases de funciones.

La demostración de la corrección de cualquiera de los sistemas presentados en esta sección es estándar [6].

[6] Basta probar que los axiomas son fórmulas válidas y que las reglas respetan la validez.

Para demostrar la completitud necesitamos definiciones y resultados previos que pasamos a introducir. En adelante, denotaremos mediante $\mathcal{S}$ a un sistema de demostración axiomático arbitrario para una lógica $\mathcal{L}$ extensión de la lógica clásica proposicional.

Definición 2.5.1
Un conjunto de fórmulas Γ *de* $\mathcal{L}$ *se dice* $\mathcal{S}$**-inconsistente** *si existen fbfs*

$$A_1, ..., A_n \in \Gamma,\ n \geq 1,\ \textit{tales que}\ \vdash_{\mathcal{S}} \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$$

Γ *se dice* $\mathcal{S}$**-consistente** *si no es* $\mathcal{S}$*-inconsistente.*
Una fórmula A *se dice* $\mathcal{S}$*-consistente si y sólo si* $\{A\}$ *lo es.*

Definición 2.5.2 *Un conjunto* Γ *de fórmulas de* $\mathcal{L}$ *se dice que es* **máximamente** $\mathcal{S}$**-consistente** *(en adelante,* $\mathcal{S}$*-m.c) si es* $\mathcal{S}$*-consistente y para cualquier fórmula* $A \notin \Gamma$*, se tiene que* $\Gamma \cup \{A\}$ *es* $\mathcal{S}$*-inconsistente* [7].

Notación. En adelante denotaremos por $\mathcal{MC}$ al conjunto cuyos elementos son conjuntos $\mathcal{S}$-m.c, siendo $\mathcal{S}$ el sistema axiomático determinado por el contexto en que estemos trabajando.

En el resto de la sección suponemos la familiaridad con las propiedades básicas de los conjuntos máximamente consistentes. Los dos lemas siguientes son bien conocidos.

Lema 2.5.3 *Dado un conjunto* $\Gamma \in \mathcal{MC}$*, y* $A \in \mathcal{L}$ *se tiene que:*

1. *Si* $\vdash_{\mathcal{S}} A$*, entonces* $A \in \Gamma$.
2. Γ *es cerrado para* $\wedge$ *y* $\vee$.

Lema 2.5.4 (Lema de Lindenbaum) *Para todo conjunto de fórmulas* $\mathcal{S}$*-consistente, existe un conjunto máximamente* $\mathcal{S}$*-consistente que lo contiene.*

Nos centramos ya en el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$.

Definición 2.5.5 *Si* $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{MC}$*, definimos:*

$$\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2 \quad \textit{si y sólo si} \quad \{A \mid GA \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2.$$

$$\Gamma_1 \prec_W \Gamma_2 \quad \textit{si y sólo si} \quad \{A \mid \Box A \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2$$

A partir de la definición, es inmediato el siguiente lema, que nos proporciona definiciones equivalentes de $\prec_T$ y $\prec_W$.

Lema 2.5.6 *Sean* $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{MC}$*. Entonces:*

(a) $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2 \quad$ *si y sólo si* $\quad \{A \mid HA \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_1$.

[7] Es decir, si no existe un conjunto Γ' de *fbfs* en $\mathcal{L}$ tal que Γ' es $\mathcal{S}$-consistente y $\Gamma \subset \Gamma'$

(b) $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *si y sólo si* $\{FA \mid A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_1$.

(c) $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *si y sólo si* $\{PA \mid A \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2$.

(d) $\Gamma_1 \prec_W \Gamma_2$ *si y sólo si* $\{\Diamond A \mid A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_1$.

Como consecuencia de los resultados anteriores se tienen los siguientes lemas, que son estándares en lógica temporal y lógica modal, de los cuales $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ es una extensión.

Lema 2.5.7 *Sea* $\Gamma_1 \in \mathcal{MC}$. *Entonces:*

(a) Si $FA \in \Gamma_1$, *entonces existe* $\Gamma_2 \in \mathcal{MC}$ *tal que* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $A \in \Gamma_2$.

(b) Si $PA \in \Gamma_1$, *entonces existe* $\Gamma_2 \in \mathcal{MC}$ *tal que* $\Gamma_2 \prec_T \Gamma_1$ *y* $A \in \Gamma_2$.

(c) Si $\Diamond A \in \Gamma_1$, *entonces existe* $\Gamma_2 \in \mathcal{MC}$ *tal que* $\Gamma_1 \prec_W \Gamma_2$ *y* $A \in \Gamma_2$.

Definición 2.5.8 *Si* $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{MC}$, *definimos:*

$$\Gamma_1 \sim_T \Gamma_2 \quad \textit{si y sólo si} \quad (\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2 \ \textit{o}\ \Gamma_1 = \Gamma_2 \ \textit{o}\ \Gamma_2 \prec_T \Gamma_1)$$

Ahora podemos enunciar los dos resultados siguientes estándares de la lógica temporal lineal.

Lema 2.5.9 $\prec_T$ *es una relación transitiva. Es decir, para todo* Γ_1, Γ_2 *y* $\Gamma_3 \in \mathcal{MC}$, *si* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $\Gamma_2 \prec_T \Gamma_3$, *entonces* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_3$.

Lema 2.5.10 *Sean* Γ_1, Γ_2 *y* $\Gamma_3 \in \mathcal{MC}$. *Entonces:*

(a) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_3$, *entonces* $\Gamma_2 \sim_T \Gamma_3$.

(b) Si $\Gamma_2 \prec_T \Gamma_1$ *y* $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_1$, *entonces* $\Gamma_2 \sim_T \Gamma_3$.

Completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$

Para abordar el teorema de completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$, necesitamos los dos resultados preliminares siguientes.

Teorema 2.5.11 *Las siguientes fórmulas son teoremas de* $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$*:*

T1: $F\Box A \to \Box(PA \vee A \vee FA)$.

T2: $P\Box A \to \Box(PA \vee A \vee FA)$.

Demostración:
Vamos a probar T1 (T2 es su imagen del espejo). Sea $\psi = H\neg A \wedge \neg A \wedge G\neg A$

1. $\Box(H\neg\psi \wedge \neg\psi \wedge G\neg\psi) \to H\Box\neg\psi$ — por (Tot) y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
2. $P\Diamond\psi \to (\Diamond P\psi \vee \Diamond\psi \vee \Diamond F\psi)$ — por 1, $\mathcal{K}$ y las definiciones de $\Diamond, F, P$
3. $\Diamond\psi \to \Diamond\neg A$ — por $\mathcal{K}$

4. $\psi \to H\neg A$	por $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
5. $\Diamond F\psi \to \Diamond FH\neg A$	por 4, $\mathcal{K}_l$ y $\mathcal{K}$
6. $\Diamond FH\neg A \to \Diamond\neg A$	por $\mathcal{K}_l$ y $\mathcal{K}$
7. $\Diamond F\psi \to \Diamond\neg A$	por 5, 6 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
8. $\Diamond P\psi \to \Diamond\neg A$	[similar a 4-7]
9. $P\Diamond\psi \to \Diamond\neg A$	por 2, 3, 7, 8 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
10. $\Box A \to H\Box\neg\psi$	por 9 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
11. $\neg\psi \to (PA \vee A \vee FA)$	por $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
12. $H\Box\neg\psi \to H\Box(PA \vee A \vee FA)$	por 11, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}_l$
13. $\Box A \to H\Box(PA \vee A \vee FA)$	por 10, 12 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
14. $F\Box A \to \Box(PA \vee A \vee FA)$	por 13 y $\mathcal{K}_l$

El siguiente lema es un lema específico, fundamental para la prueba de completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$.

Lema 2.5.12 *Sean Γ_1, Γ_2 y Γ_3 conjuntos $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$-m.c's, entonces se tiene:*

(a) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ y $\Gamma_1 \prec_W \Gamma_3$, entonces existe un conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$-m.c, Γ_4, tal que $\Gamma_2 \prec_W \Gamma_4$ y, además, $\Gamma_3 \sim_T \Gamma_4$.

(b) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ y $\Gamma_2 \prec_W \Gamma_3$, entonces existe un conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$-m.c, Γ_4 tal que $\Gamma_1 \prec_W \Gamma_4$ y, además, $\Gamma_3 \sim_T \Gamma_4$.

Demostración:
Probamos (a). La prueba de (b) es similar. En la demostración, $\vdash$ significa $\vdash_{\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}\text{-}Tot}$.

Supongamos que $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ y $\Gamma_1 \prec_W \Gamma_3$. Es suficiente con demostrar que se da alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\{A \mid \Box A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_3$.

(ii) $X = X_1 \cup X_2 = \{A \mid \Box A \in \Gamma_2\} \cup \{A \mid GA \in \Gamma_3\}$ es consistente.

(iii) $Y = Y_1 \cup Y_2 = \{A \mid \Box A \in \Gamma_2\} \cup \{A \mid HA \in \Gamma_3\}$ es consistente.

En efecto:

- Si se satisface (i), bastará tomar $\Gamma_4 = \Gamma_3$.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_1 \arrow[rr, "\prec_T"] \arrow[dr, "\prec_W"'] & & \Gamma_2 \arrow[dl, "\prec_W"] \\
& \Gamma_4 = \Gamma_3 &
\end{tikzcd}$$

- Si se satisface (ii), bastará tomar como Γ_4 el conjunto-$m.c$ que contiene a X (que existe por el lema de Lindenbaum).

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_1 \arrow[r, "\prec_T"] \arrow[d, "\prec_W"'] & \Gamma_2 \arrow[d, "\prec_W"] \\
\Gamma_3 \arrow[r, "\prec_T"] & \Gamma_4
\end{tikzcd}$$

- Si se satisface (iii), bastará tomar como Γ_4 el conjunto-$m.c$ que contiene a Y (que existe igualmente por el lema de Lindenbaum).

$$\begin{tikzcd}
& \Gamma_1 \arrow[r, "\prec_T"] \arrow[d, "\prec_W"'] & \Gamma_2 \arrow[dll, "\prec_W"] \\
\Gamma_4 \arrow[r, "\prec_T"] & \Gamma_3 &
\end{tikzcd}$$

Para completar la demostración procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que no se satisface ninguna de las condiciones (i)–(iii) anteriores, entonces tendríamos respectivamente:

(i') Existe una fórmula $\Box A \in \Gamma_2$ tal que $A \notin \Gamma_3$.

(ii') Existen fórmulas $B_1, B_2, ..., B_n \in X_1$ y $C_1, C_2, ..., C_m \in X_2$ tales que, si llamamos $B = B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n$ y $C = C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_m$, se tiene que: $\vdash \neg(B \wedge C)$, o equivalentemente, $\vdash B \to \neg C$.

(iii') Existen fórmulas $D_1, D_2, ..., D_r \in Y_1$ y $E_1, E_2, ..., E_s \in Y_2$ tales que, si llamamos $D = D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_r$ y $E = E_1 \wedge E_2 \wedge ... \wedge E_s$, se tiene que: $\vdash \neg(D \wedge E)$, o equivalentemente, $\vdash D \to \neg E$.

Ahora, teniendo en cuenta que $(\Box U \wedge \Box V) \to \Box(U \wedge V)$ es un teorema de $\mathcal{K}$ y por lo tanto de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$, que Γ_2 es un conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$-m.c, y los ítemes (ii') y (iii'), podemos asegurar que $\Box B, \Box D \in \Gamma_2$. Análogamente, trabajando en $\mathcal{K}_l$, obtenemos que $GC, HE \in \Gamma_3$.

Por otro lado, de (ii'), (iii') y el hecho de que $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$ es extensión de $\mathcal{K}$, tenemos que $\vdash (\Box B \to \Box\neg C)$ y $\vdash (\Box D \to \Box\neg E)$. Por lo tanto, se tiene que: $\Box(A \wedge \neg C \wedge \neg E) \in \Gamma_2$.

Ahora, puesto que $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$, tenemos que $F\Box\gamma \in \Gamma_1$, siendo $\gamma = A \wedge \neg C \wedge \neg E$. De donde, por T1 del teorema 2.5.11, deducimos que $\Box(P\gamma \vee \gamma \vee F\gamma) \in \Gamma_1$. Con lo cual, puesto que $\Gamma_1 \prec_W \Gamma_3$, se tiene a que $(P\gamma \vee \gamma \vee F\gamma) \in \Gamma_3$. Pero esto es imposible porque:

- Si $P\gamma \in \Gamma_3$ contradice que $HE \in \Gamma_3$.
- Si $\gamma \in \Gamma_3$ contradice que $A \notin \Gamma_3$.
- Si $F\gamma \in \Gamma_3$ contradice que $GC \in \Gamma_3$.

Por consiguiente, se tiene que se satisface al menos una de las condiciones (i)-(iii), lo cual completa la demostración.

Introducimos ahora algunas definiciones requeridas en la demostración del teorema de completitud de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$.

Definición 2.5.13 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Llamamos* **traza** *de Σ a toda aplicación*

$$\Phi_\Sigma : \mathcal{C}oord_\Sigma \longrightarrow 2^{L^{\mathcal{F}}_{T\times W}}$$

tal que, para toda coordenada t_w se tiene que $\Phi_\Sigma(t_w)$ es un conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$-m.c.

Definición 2.5.14 *Sea Φ_Σ una traza de una estructura funcional Σ. Decimos que Φ_Σ es:*

temporalmente coherente *si satisface que*

$$si\ t'_w \in (t_w, \rightarrow),\ \ entonces\ \Phi_\Sigma(t_w) \prec_T \Phi_\Sigma(t'_w)$$

modalmente coherente *si satisface que*

$$si\ t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\}),\ \ entonces\ \Phi_\Sigma(t_w) \prec_W \Phi_\Sigma(t_{w'})$$

coherente *si es temporal y modalmente coherente.*

profética *si es temporalmente coherente y, además,*

$$si\ FA \in \Phi_\Sigma(t_w),\ \ entonces\ existe\ t'_w \in (t_w, \rightarrow)\ tal\ que\ A \in \Phi_\Sigma(t'_w) \quad (1)$$

histórica *si es temporalmente coherente y, además,*

$$si\ PA \in \Phi_\Sigma(t_w),\ \ entonces\ existe\ t'_w \in (\leftarrow, t_w,)\ tal\ que\ A \in \Phi_\Sigma(t'_w) \quad (2)$$

posibilista *si es modalmente coherente y, además,*

$$si\ \Diamond A \in \Phi_\Sigma(t_w),\ \ entonces\ existe\ t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})\ tal\ que\ A \in \Phi_\Sigma(t_{w'}) \quad (3)$$

plena *si es profética, histórica y posibilista.*

A las condiciones (1), (2) y (3), las llamaremos **condicional profético** *(respectivamente histórico o posibilista)* **para Φ_Σ respecto de** *FA (respectivamente PA y $\Diamond A$)* ***y*** *t_w.*

Definición 2.5.15 *Sea Φ_Σ una traza de una estructura funcional Σ. Decimos que Φ_Σ es* **total** *si es coherente y además, para toda t_w, t'_w y $t_{w'}$ se tiene:*

$$Si\ t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})\ y\ t'_w \neq t_w,\ entonces\ existe\ t'_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t'_w\}) \quad (4)$$

El condicional (4) se llama **condicional total para Φ_Σ respecto de** *t_w, t'_w* **y** *$t_{w'}$. Φ_Σ se llama* **total-plena** *si es profética, histórica, posibilista y total.*

Definición 2.5.16 *Sea* $U = (W_U, T_U)$, *donde* W_U *es un conjunto infinito numerable y* $T_U = \bigcup_{w \in W_U} T_{U_w}$ *tal que, para cada* $w \in W_U$, *se tiene que* T_{U_w} *es un conjunto infinito numerable y, si* $w \neq w'$, *entonces* $T_{U_w} \cap T_{U_{w'}} = \varnothing$. *Consideremos una clase,* Ξ_U, *de estructuras funcionales* $(W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ *tales que:*

- W *es un subconjunto finito no vacío de* W_U.

- $\mathcal{T} = \{(T_w, <_w) \mid w \in W\}$, *donde* T_w *es un subconjunto finito no vacío de* T_{U_w}.

Si $\Sigma_1 = (W_1, \mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ *y* $\Sigma_2 = (W_2, \mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ *son elementos de* Ξ_U, *diremos que* Σ_2 *es una* **extensión** *de* Σ_1 *si se cumple:*

- $W_1 \subseteq W_2$;

- $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, *o bien, para cada* $(T_w, <_w) \in \mathcal{T}_1$, *el conjunto* $\mathcal{T}_2$ *contiene una extensión de* $(T_w, <_w) \in \mathcal{T}_1$;

- $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, *o bien, para cada* $\stackrel{w\, w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_1$, *el conjunto* $\mathcal{F}_2$ *contiene una función que es una extensión de* $\stackrel{w\, w'}{\longrightarrow}$.

Llamaremos a Ξ_U **la clase de estructuras funcionales finitas generada por** U.

Definición 2.5.17 *Sea* Ξ_U *la clase de estructuras funcionales finitas generada por* $U = (W_U, T_U)$, *introducida en la definición anterior y sea* Φ_Σ *una traza de una estructura funcional* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \in \Xi_U$.

I) *Sea el condicional profético:*

$$\text{si } FA \in \Phi_\Sigma(t_w), \text{ entonces existe } t'_w \in (t_w, \rightarrow) \text{ tal que } A \in \Phi_\Sigma(t'_w) \quad (1)$$

Decimos que el condicional (1) está **activo**, *si se satisface su antecedente pero no su consecuente, esto es, si* $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ *y* $FA \in \Phi_\Sigma(t_w)$, *pero no existe* $t'_w \in (t_w, \rightarrow)$ *tal que* $A \in \Phi_\Sigma(t'_w)$.

Decimos que el condicional (1) está **agotado**, *si se verifica su consecuente, es decir, existe* $t'_w \in (t_w, \rightarrow)$ *tal que* $A \in \Phi_\Sigma(t'_w)$.

Análogamente,

II) *Sea el condicional histórico:*

$$\text{si } PA \in \Phi_\Sigma(t_w), \text{ entonces existe } t'_w \in (\leftarrow, t_w) \text{ tal que } A \in \Phi_\Sigma(t'_w) \quad (2)$$

Decimos que el condicional (2) está **activo**, *si se verifica que* $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ *y* $PA \in \Phi_\Sigma(t_w)$, *pero no existe* $t'_w \in (\leftarrow, t_w)$ *tal que* $A \in \Phi_\Sigma(t'_w)$.

Decimos que (2) está **agotado**, *si existe una coordenada* $t'_w \in (\leftarrow, t_w)$ *tal que* $A \in \Phi_\Sigma(t'_w)$.

III) *Consideremos el condicional posibilista:*

$$\textit{si} \ \ \Diamond A \in \Phi_\Sigma(t_w), \ \textit{entonces existe un} \ t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \ \textit{tal que} \ A \in \Phi_\Sigma(t_{w'}) \quad (3)$$

Decimos que el condicional (3) está **activo***, si se verifica que* $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ *y* $\Diamond A \in \Phi_\Sigma(t_w)$*, pero no existe* $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})$ *tal que* $A \in \Phi_\Sigma(t_{w'})$*.*

Decimos que el condicional (3) está **agotado***, si se verifica que existe una coordenada* $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})$ *tal que* $A \in \Phi_\Sigma(t_{w'})$*.*

IV) *Consideremos el condicional total:*

$$\textit{si} \ t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \ \textit{y} \ t'_w \neq t_w, \ \textit{entonces existe} \ t'_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t'_w\}) \quad (4)$$

Decimos que el condicional (4) está **activo***, si* $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})$*,* $t'_w \neq t_w$*, pero no existe* $t'_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t'_w\})$*.*

Decimos que el condicional (4) está **agotado***, si existe* $t'_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t'_w\})$*.*

Lema 2.5.18 (Lema de la Traza) *Sea* Φ_Σ *una traza total-plena de una estructura funcional* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$*. Sea* h *una función de interpretación tal que a cada variable proposicional* p *le asigna el conjunto* $h(p) = \{t_w \mid p \in \Phi_\Sigma(t_w)\}$*. Entonces, para toda fbf* A *se tiene que* $h(A) = \{t_w \mid A \in \Phi_\Sigma(t_w)\}$*.*

Demostración:
Lo probaremos por inducción sobre la longitud n de la fórmula A. En primer lugar, la definición de h asegura que el resultado es cierto si la longitud de A es 1. Supongamos que el resultado es cierto para cualquier fórmula de longitud menor que n (siendo $n > 1$) y sea A de longitud n. Pueden darse las siguientes posibilidades:

- Si $A = \neg B$, por hipótesis de inducción tenemos que

  $$h(B) = \{t_w \mid B \in \Phi_\Sigma(t_w)\}$$

  Por lo tanto, tenemos:

  $$\begin{aligned} h(A) = h(\neg B) \quad &= \{t_w \mid B \notin \Phi_\Sigma(t_w)\} \\ &= \{t_w \mid \neg B \in \Phi_\Sigma(t_w)\} \\ &= \{t_w \mid A \in \Phi_\Sigma(t_w)\} \end{aligned}$$

  como queríamos demostrar.

- Si $A = B \wedge C$. Por hipótesis de inducción tenemos que

  $$h(B) = \{t_w \mid B \in \Phi_\Sigma(t_w)\} \text{ y } h(C) = \{t_w \mid C \in \Phi_\Sigma(t_w)\}$$

  Por lo tanto,

  $$\begin{aligned} h(A) = h(B) \cap h(C) \quad &= \{t_w \mid B \in \Phi_\Sigma(t_w)\} \cap \{t_w \mid C \in \Phi_\Sigma(t_w)\} \\ &= \{t_w \mid A \in \Phi_\Sigma(t_w)\} \end{aligned}$$

- Si $A = B \vee C$, razonaremos de forma similar al ítem anterior.
- Si $A = GB$ haremos uso en la demostración de una doble inclusión:

  Veamos en primer lugar que $\{t_w \mid GB \in \Phi_\Sigma(t_w)\} \subseteq h(GB)$. Sea t_w tal que $GB \in \Phi_\Sigma(t_w)$. Al ser Φ_Σ temporalmente coherente, se verifica que

  $$B \in \{\Phi_\Sigma(t'_w) \mid t'_w \in (t_w, \rightarrow)\}$$

  y la hipótesis de inducción asegura que $(t_w, \rightarrow) \subseteq h(B)$, es decir, que se verifica $t_w \in h(GB)$.

  Para verificar la otra inclusión, procederemos por contraposición. Sea t_w tal que $GB \notin \Phi_\Sigma(t_w)$, luego $\neg GB \in \Phi_\Sigma(t_w)$, es decir, $F\neg B \in \Phi_\Sigma(t_w)$. Ahora, como Φ_Σ es profética, existe $t'_w \in (t_w, \rightarrow)$ tal que $\neg B \in \Phi_\Sigma(t'_w)$, lo que significa que $B \notin \Phi_\Sigma(t'_w)$. Ahora, por la hipótesis de inducción, tenemos que $t'_w \notin h(B)$ y esto nos lleva a que $t_w \notin h(GB)$, como queríamos demostrar.

- Si $A = HB$ la demostración es análoga a la anterior, utilizando que Φ_Σ es temporalmente coherente e histórica.
- Si $A = \Box B$, razonamos de forma análoga al caso en el que $A = GA$ con la semántica de $\Box$, cambiando G por $\Box$, F por $\Diamond$ y utilizando que Φ_Σ es modalmente coherente y posibilista.

Para demostrar la completitud de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$ al estilo Henkin, procederemos como sigue: para cada fórmula consistente A construiremos una estructura funcional $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ y una traza total-plena Φ_Σ tal que $A \in \Phi_\Sigma(t_w)$ para alguna coordenada $t_w \in Coord_\Sigma$ [8].

Para ello, sea Ξ_U la clase de estructuras funcionales finitas generada por el conjunto $U = (W_U, T_U)$, como en la definición 2.5.16. Comenzamos definiendo:

- una enumeración de los elementos de W_U: $W_U = \{w_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
- una enumeración de los elementos de $T_U = \bigcup_{w\in W_U} T_{U_w}$:

  $$T_U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_{U_{w_i}}; \quad T_{U_{w_i}} = \{t_{(i,j)} \mid j \in \mathbb{N}\}$$

  consideraremos en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ el orden lexicográfico.
- una enumeración de las fórmulas de $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$: $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$.

El orden en que vamos a ir agotando todas las instancias activas de los condicionales está determinado por un *número de código*, que definimos como sigue:

[8] Esto asegurará que A es satisfacible, aplicando el *Lema de la traza*.

- El número de código del condicional profético:

$$\text{Si } FA \in \Phi_\Sigma(t_w) \text{ existe } t'_w \in (t_w, \rightarrow) \text{ tal que } A \in \Phi_\Sigma(t'_w)$$

  es $2 \cdot 11^i \cdot 13^j \cdot 17^k$, donde i es el natural asociado a la fórmula FA y (j, k) es el par de naturales asociado a t_w en T_U.

- El número de código del condicional histórico:

$$\text{Si } PA \in \Phi_\Sigma(t_w) \text{ existe } t'_w \in (\leftarrow, t_w) \text{ tal que } A \in \Phi_\Sigma(t'_w)$$

  es $3 \cdot 11^i \cdot 13^j \cdot 17^k$, donde i es el natural asociado a la fórmula PA y (j, k) es el par de naturales asociado a t_w en T_U.

- El número de código del condicional posibilista:

$$\text{Si } \Diamond A \in \Phi_\Sigma(t_w) \text{ existe } t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \text{ tal que } A \in \Phi_\Sigma(t_{w'})$$

  es $5 \cdot 11^i \cdot 13^j \cdot 17^k$, donde i es el natural asociado a la fórmula $\Diamond A$ y (j, k) es el par de naturales asociado a t_w en T_U.

- El número de código del condicional total

$$\text{si } t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \text{ y } t'_w \neq t_w, \text{ entonces existe } t'_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t'_w\})$$

  es $7 \cdot 13^j \cdot 17^k \cdot 19^{k'} \cdot 23^{j'} \cdot 29^{k''}$, donde $(j, k), (j, k')$ y (j', k'') son los pares de naturales asociados respectivamente a t_w, t'_w y $t_{w'}$ en T_U.

Observación 2.5.1 *Dado un condicional (α) (profético, histórico, ...) para Φ_Σ, si Σ' es una extensión de Σ y reemplazamos en él la etiqueta Σ por Σ', de modo que $\Sigma \subset \Sigma'$, obtenemos un condicional $(\alpha') = (\alpha)$ para $\Phi_{\Sigma'}$ que, en consecuencia, tiene el mismo número de código que el condicional para Φ_Σ y nos permite afirmar que, en ambos casos, nos referimos al mismo condicional.*

Ahora, dada una fórmula consistente A, vamos a construir Σ y Φ_Σ trabajando etapa por etapa de la forma siguiente:

Comenzamos con una estructura funcional finita $\Sigma_0 = (W_0, \mathcal{T}_0, \mathcal{F}_0) \in \Xi_U$ y una traza Φ_{Σ_0} tales que:

- $W_0 = \{w_0\}$.
- $\mathcal{T}_0 = T_{w_0}$ siendo $T_{w_0} = (\{t_{(0,0)}\}, <_0)$ con $<_0 = \varnothing$.
- $\mathcal{T}_0 = \{(T_{w_0}, <_{w_0})\} = (\{t_{(0,0)}\}, \varnothing)$.
- $\mathcal{F}_0 = \varnothing$.

- $\Phi_{\Sigma_0} = \{(t_{(0,0)}, \Gamma_0)\}$, donde Γ_0 es un conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-*Tot-m.c* que contiene a A (cuya existencia está asegurada por el lema de Lindenbaum)

Supongamos que hemos definido $\Sigma_n = (W_n, \mathcal{T}_n, \mathcal{F}_n)$ y Φ_{Σ_n}. Entonces, para definir Σ_{n+1} y $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$ procedemos como sigue:

- Si no hay condicionales activos, entonces $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n$ y $\Phi_{\Sigma_{n+1}} = \Phi_{\Sigma_n}$, dando por terminada la construcción.

- En caso contrario, es decir, si existe algún condicional para Φ_{Σ_n} que está activo, elegimos el condicional activo (α) de menor número de código y, de acuerdo con el *lema del agotamiento*, enunciado seguidamente, existirá una extensión finita $\Sigma_{n+1} = (W_{n+1}, \mathcal{T}_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ de Σ_n y una extensión $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$ de Φ_{Σ_n} tales que el condicional (α) para $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$ estará agotado.

Como resultado de esta construcción, tendremos una sucesión numerable de estructuras funcionales finitas (tomadas de Ξ_U)

$$\Sigma_0, \Sigma_1, ..., \Sigma_n, ...$$

cuya unión es Σ, y una sucesión numerable de trazas correspondientes

$$\Phi_{\Sigma_0}, \Phi_{\Sigma_1}, ..., \Phi_{\Sigma_n}, ...$$

cuya unión es Φ_Σ.

En cada una de las estructuras finitas de la secuencia anterior se preserva la linealidad de los flujos temporales y cada traza asociada es coherente pero, en general, no está garantizado que dicha traza sea profética, histórica, posibilista o total. Sin embargo, el lema del agotamiento permite probar que nuestra estructura objetivo, Σ, es tal que la traza Φ_Σ cumple todas esas propiedades, es decir, es total-plena. Como consecuencia de lo anterior, el lema de la traza asegurará que la fórmula A en cuestión es satisfacible.

En definitiva, sólo nos queda probar el siguiente resultado:

Lema 2.5.19 (Lema del agotamiento para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-*Tot*) *Sea Ξ_U la clase de estructuras funcionales finitas generada por $U = (W_U, T_U)$ como en la definición 2.5.16; Φ_{Σ_n} una traza coherente de una estructura funcional $\Sigma_n \in \Xi_U$ y (α) un condicional (profético, histórico, posibilista o total) para Φ_{Σ_n} que está activo. Entonces existe una traza coherente $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$, extensión de Φ_{Σ_n}, tal que (α) es un condicional para $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$ que está agotado.*

Demostración:
A lo largo de la demostración identificaremos las trazas con sus grafos. Sea Φ_{Σ_n} una traza coherente de una estructura funcional $\Sigma_n = (W_n, \mathcal{T}_n, \mathcal{F}_n) \in \Xi_U$, y sea

$$(1) \quad \text{si } FA \in \Phi_{\Sigma_n}(t_w), \text{entonces existe } t'_w \in (t_w, \rightarrow) \text{ tal que } A \in \Phi_{\Sigma_n}(t'_w)$$

un condicional profético para Φ_{Σ_n} respecto de FA y t_w, que está activo. Puesto que el condicional (1) está activo, tenemos que $FA \in \Phi_{\Sigma_n}(t_w)$, pero no existe ninguna coordenada $t'_w \in (t_w, \rightarrow)$ tal que $A \in \Phi_{\Sigma_n}(t'_w)$. Entonces, por el item (a) del lema 2.5.7, resulta que hay al menos un conjunto $\Gamma \in \mathcal{MC}$, tal que $\Phi_{\Sigma_n}(t_w) \prec_T \Gamma$ y $A \in \Gamma$. Ahora seleccionamos una nueva coordenada t'_w, es decir, una coordenada $t'_w \in T_U - \mathcal{C}oord_{\Sigma_n}$, con el fin de asignarle Γ. Esto nos conduce a considerar una nueva estructura funcional finita $\Sigma_{n+1} = (W_{n+1}, \mathcal{T}_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1}) \in \Xi_U$, en la que los flujos temporales preserven la linealidad, y una traza $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$ coherente que efectúe tal asignación. Para ello, procederemos por inducción sobre el número l de sucesores de t_w en el flujo finito T_w:

Si $l = 0$, definimos:

- $W_{n+1} = W_n$.
- $\mathcal{T}_{n+1} = (\mathcal{T}_n - \{(T_w, <_w)\}) \cup \{(T'_w, <'_w)\})$, donde

$$T'_w = T_w \cup \{t'_w\}, \text{ y } <'_w = <_w \cup \{(t_w, t'_w)\} \cup \{(t_{1_w}, t'_w) \mid t_{1_w} <_w t_w\}$$

- $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n$
- $\Phi_{\Sigma_{n+1}} = \Phi_{\Sigma_n} \cup \{(t'_w, \Gamma)\}$

Si $l > 0$, supongamos que para cualquier número natural $m < l$ la construcción está bien definida y consideremos el caso $m = l$. Razonamos como sigue:

Sea t^*_w el sucesor de t_w en T_w. Claramente $\neg A \in \Phi_{\Sigma_n}(t^*_w)$, ya que en caso contrario, el condicional estaría agotado. Si $FA \in \Phi_{\Sigma_n}(t^*_w)$, el resultado se obtiene por la hipótesis de inducción. Si no es así, es decir, si $\neg FA \in \Phi_{\Sigma_n}(t^*_w)$, por el apartado (a) del lema 2.5.10 obtenemos que $\Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n}(t^*_w)$ [9]. Por lo tanto, tenemos que $\Phi_{\Sigma_n}(t_w) \prec_T \Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n}(t^*_w)$, por lo cual basta con definir:

- $W_{n+1} = W_n$
- $\mathcal{T}_{n+1} = (\mathcal{T}_n - \{(T_w, <_w)\}) \cup \{(T'_w, <'_w)\}$, donde

$$T'_w = T_w \cup \{t'_w\}$$

$$\begin{aligned} <'_w = <_w &\cup \{(t_w, t'_w), (t'_w, t^*_w)\} \cup \{(t_{1_w}, t'_w) \mid t_{1_w} <_w t_w)\} \\ &\cup \{(t'_w, t_{2_w}) \mid t^*_w <_w t_{2_w}\} \end{aligned}$$

- $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n$
- $\Phi_{\Sigma_{n+1}} = \Phi_{\Sigma_n} \cup \{(t'_w, \Gamma)\}$

Tanto si $l = 0$ como si $l > 0$, es claro que se preserva la linealidad y la transitividad de $\prec_T$ nos permite concluir que $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$ es coherente.

Si un condicional histórico está activo, la prueba es análoga a la anterior.

[9] no puede darse $\Gamma = \Phi_{\Sigma_n}(t^*_w)$, ya que $\neg A \in \Phi_{\Sigma_n}(t^*_w)$. Tampoco puede darse $\Phi_{\Sigma_n}(t^*_w) \prec_T \Gamma$, porque $\neg FA \in \Phi_{\Sigma_n}(t^*_w)$.

Supongamos que está activo el condicional posibilista para Φ_{Σ_n} respecto a $\Diamond A$ y t_w:

$$(2) \quad \text{si } \Diamond A \in \Phi_{\Sigma_n}(t_w), \text{ entonces existe } t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \text{ tal que } A \in \Phi_{\Sigma_n}(t_{w'})$$

Esto significa que $\Diamond A \in \Phi_{\Sigma_n}(t_w)$ pero no existe una coordenada $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})$ tal que $A \in \Phi_{\Sigma_n}(t_{w'})$. Sabemos -por el item c) del lema 2.5.7- que existe un conjunto $\Gamma \in \mathcal{MC}$, tal que $\Phi_{\Sigma_n}(t_w) \prec_W \Gamma$ y $A \in \Gamma$. Esto requiere un nuevo flujo de tiempo finito $T_{w'}$ (es decir, $w' \in W_U - W_n$) que contenga una coordenada $t_{w'}$ asociada a Γ tal que $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})$. Por tanto, las extensiones Σ_{n+1} y Φ_{Σ_n} se definen:

- $W_{n+1} = W_n \cup \{w'\}$
- $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{(T_{w'}, <_{w'})\}$, donde $T_{w'} = \{t_{w'}\}$ y $<_{w'} = \varnothing$
- $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}\}$, donde $\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow} = \{(t_w, t_{w'})\}$
- $\Phi_{\Sigma_{n+1}} = \Phi_{\Sigma_n} \cup \{(t_{w'}, \Gamma)\}$

Claramente, $<_{w'}$ es lineal y $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$ es coherente.

Por último, supongamos que está activo el condicional total para Φ_{Σ_n} respecto de t_w, t'_w y $t_{w'}$:

$$(3) \quad \text{si } t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \text{ y } t'_w \neq t_w, \text{ entonces existe } t'_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t'_w\})$$

Entonces $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})$ y $t'_w \neq t_w$, pero no existe $t'_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t'_w\})$. Ahora tenemos que asignar una imagen a t'_w. Por hipótesis tenemos que se verifica $\Phi_{\Sigma_n}(t_w) \prec_W \Phi_{\Sigma_n}(t_{w'})$ y, además, como $t'_w \in (\leftarrow, t_w) \cup (t_w, \rightarrow)$, se da que $\Phi_{\Sigma_n}(t_w) \prec_T \Phi_{\Sigma_n}(t'_w)$ o $\Phi_{\Sigma_n}(t'_w) \prec_T \Phi_{\Sigma_n}(t_w)$. En cualquier caso, por el lema 2.5.12, existe un conjunto $\Gamma \in \mathcal{MC}$, tal que $\Phi_{\Sigma_n}(t'_w) \prec_W \Gamma$ y que cumple al menos una de las siguientes condiciones:

1. $\Phi_{\Sigma_n}(t_{w'}) = \Gamma$,
2. $\Phi_{\Sigma_n}(t_{w'}) \prec_T \Gamma$,
3. $\Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n}(t_{w'})$.

En todos los casos, la extensión Σ_{n+1} es tal que $W_{n+1} = W_n$ y, además:

a) si se verifica la condición 1, entonces:

   - $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n$
   - $\mathcal{F}_{n+1} = (\mathcal{F}_n - \{\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}\}) \cup \{\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}'\}$, donde $\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}' = \stackrel{w\ w'}{\longrightarrow} \cup \{(t'_w, t_{w'})\}$
   - $\Phi_{\Sigma_{n+1}} = \Phi_{\Sigma_n}$

   Es evidente que $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$ es coherente.

b) si se satisface la condición 2, sea $\{t_{i_{w'}} \mid 1 \leq i \leq s\} = (t_{w'}, \rightarrow)$, es decir, consideramos el número s de sucesores de $t_{w'}$ en el flujo $T_{w'}$. Si $s = 0$, entonces elegimos una coordenada, $t'_{w'} \in T_{U_{w'}} - \mathcal{C}oord_{\Sigma_n}$, que asociaremos a Γ y definimos:

- $\mathcal{T}_{n+1} = (\mathcal{T}_n - \{(T_{w'}, <_{w'})\}) \cup \{(T'_{w'}, <'_{w'})\}$, donde
  $T'_{w'} = T_{w'} \cup \{t'_{w'}\}$
  $<'_{w'} = <_{w'} \cup \{(t_{w'}, t'_{w'})\} \cup \{(t^*_{w'}, t'_{w'}) \mid t^*_w <_{w'} t_{w'}\}$
- $\mathcal{F}_{n+1} = (\mathcal{F}_n - \{\overset{w\ w'}{\longrightarrow}\}) \cup \{\overset{w\ w'}{\longrightarrow}'\}$, donde $\overset{w\ w'}{\longrightarrow}' = \overset{w\ w'}{\longrightarrow} \cup \{(t'_w, t'_{w'})\}$ $\quad(\dagger)$
- $\Phi_{\Sigma_{n+1}} = \Phi_{\Sigma_n} \cup \{(t'_{w'}, \Gamma)\}$. $\quad(\dagger)$

Claramente $<'_{w'}$ es lineal y la coherencia de $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$ se justifica por la transitividad de $\prec_T$.

Si $s > 0$, llamemos $t_{1_{w'}}$ al sucesor de $t_{w'}$ en $T_{w'}$. Ahora, por ser Φ_{Σ_n} temporalmente coherente, tenemos $\Phi_{\Sigma_n}(t_{w'}) \prec_T \Phi_{\Sigma_n}(t_{1_{w'}})$. Además, por el item (a) del lema 2.5.10, pueden darse los siguientes casos:

(i) $\Phi_{\Sigma_n}(t_{1_{w'}}) = \Gamma$,
(ii) $\Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n}(t_{1_{w'}})$,
(iii) $\Phi_{\Sigma_n}(t_{1_{w'}}) \prec_T \Gamma$.

El caso (i) es el mismo que la condición 1 pero sustituyendo $t_{w'}$ por $t_{1_{w'}}$.

En el caso (ii) se tiene que $\Phi_{\Sigma_n}(t_{w'}) \prec_T \Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n}(t_{1_{w'}})$. Debemos seleccionar una coordenada $t'_{w'} \in T_U - \mathcal{C}oord_{\Sigma_n}$, que asociaremos a Γ de forma que resulta:

- $\mathcal{T}_{n+1} = (\mathcal{T}_n - \{(T_{w'}, <_{w'})\}) \cup \{(T'_{w'}, <'_{w'})\}$, donde
  $T'_{w'} = T_{w'} \cup \{t'_{w'}\}$
  $<'_{w'} = <_{w'} \cup \{(t_{w'}, t'_{w'}), (t'_{w'}, t_{1_{w'}})\} \cup \{(t^*_{w'}, t'_{w'}) \mid t^*_{w'} <_{w'} t_{w'}\} \cup$
  $\{(t'_{w'}, t^*_{w'}) \mid t_{1_{w'}} <_{w'} t^*_{w'}\}$
- $\mathcal{F}_{n+1}$ y $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$ se definen como en $(\dagger)$.

Es claro que $<'_{w'}$ es lineal y de nuevo la transitividad de $\prec_T$ completa la prueba de la coherencia de $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$.

El caso (iii) nos lleva a considerar el sucesor de $t_{1_{w'}}$, sea $t_{2_{w'}}$, y razonamos de forma análoga.

Repitiendo este proceso a lo sumo s veces, obtendremos una imagen de t'_w que, además, estará asociada a un conjunto-$m.c$, preservando la coherencia de la traza y la linealidad de los órdenes temporales.

c) Si se satisface la condición 3, se razona como en el item b). Esto completa la demostración [10].

Ahora podemos enunciar el siguiente teorema.

[10] Si eliminamos de esta demostración el caso del condicional total, habremos demostrado este mismo lema para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ y, finalmente, como en el caso del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$, su completitud.

Teorema 2.5.20 (Teorema de completitud para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$)
Si una fórmula A es válida en la clase de estructuras funcionales

$$\{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \textit{ es una clase de funciones totales } \}$$

entonces A es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$.

Terminamos esta subsección, probando la completitud de dos de los sistemas introducidos, cuya demostración requiere realizar mínimas modificaciones en la demostración del teorema de completitud de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$.

Completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-($U$-$Dom$)

Para este sistema, el lema 2.5.12 (punto de partida para la demostración del teorema 2.5.20, de completitud para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$) tiene su correspondiente resultado en el siguiente lema.

Lema 2.5.21 *Sean Γ_1, Γ_2 y Γ_3 conjuntos $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-(U-Dom)-m.c, entonces se tiene:*

(a) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$, $\Gamma_1 \prec_W \Gamma_3$ y $\Box\bot \notin \Gamma_2$, entonces existe un conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-(U-Dom)-m.c, Γ_4, tal que $\Gamma_2 \prec_W \Gamma_4$ y, además, $\Gamma_3 \sim_T \Gamma_4$.

(b) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$, $\Gamma_2 \prec_W \Gamma_3$ y $\Box\bot \notin \Gamma_1$, entonces existe un conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-(U-Dom)-m.c, Γ_4, tal que $\Gamma_1 \prec_W \Gamma_4$ y, además, $\Gamma_3 \sim_T \Gamma_4$.

Demostración:
Es análoga a la demostración del lema 2.5.12 pero usando, en lugar de los teoremas $T1$ y $T2$ de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$, demostrados en 2.5.11, los siguientes teoremas del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-($U$-$Dom$):

T3: $F(\Box A \wedge \neg\Box\bot) \to \Box(PA \vee A \vee FA)$.

T4: $P(\Box A \wedge \neg\Box\bot) \to \Box(PA \vee A \vee FA)$.

Asimismo, necesitamos dar la adecuada definición de traza.

Definición 2.5.22 *Sea Φ_Σ una traza de una estructura funcional $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$. Decimos que Φ_Σ es* **U-Dom** *si es coherente y además, para coordenadas cualesquiera $t_w, t'_w, t_{w'} \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ se tiene:*

$$\textit{si } t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\}), t'_w \neq t_w \textit{ y } \Box\bot \notin \Phi_\Sigma(t'_w), \textit{ entonces existe } t'_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t'_w\}) \quad (5)$$

(5) *se denomina* **condicional U-Dom para Φ_Σ respecto de t_w, t'_w y $t_{w'}$**.
Φ_Σ *se denomina* **(U-Dom)-plena** *si es profética, histórica, posibilista y U-Dom.*

El lema del agotamiento para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-($U$-$Dom$) es análogo al de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$, usando condicionales U-Dom en lugar de condicionales totales y utilizando el lema 2.5.21 en lugar del lema 2.5.12 [11]. Por tanto, podemos enunciar el siguiente teorema.

[11]Nótese que una forma alternativa de enfocar esta sección sobre la completitud de los sistemas introducidos es comenzar estudiando la completitud para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-($U$-$Dom$). El esquema en este caso requiere un lema de agotamiento, que es el mismo que el lema 2.5.19 para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$ sin más que contemplar los condicionales U-Dom en lugar de los condicionales totales y, en consecuencia, es preciso considerar el caso en que $\Box\bot$ no pertenece al conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-($U$-$Dom$)-m.c asociado a la coordenada a tratar.

Teorema 2.5.23 (Teorema de completitud para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(U$-$Dom)$)
Si una fórmula A es válida en la clase de estructuras funcionales

$$\{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \textit{ es una clase de funciones } (\texttt{U-Dom})\}$$

entonces A es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(U$-$Dom)$.

Completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(No$-$Tot)$

Para probar la completitud de este sistema, al ser extensión de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(U$-$Dom)$, necesitaremos el lema 2.5.21 además del siguiente lema específico.

Lema 2.5.24 *Dado cualquier conjunto-$\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(No$-$Tot)$-m.c, Γ_1, entonces se verifica $\Box\bot \in \Gamma_1$ o bien, existe un conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(No$-$Tot)$-m.c, Γ_2, tal que $\Box\bot \in \Gamma_2$ y, además, $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ o $\Gamma_2 \prec_T \Gamma_1$.*

Demostración:
Teniendo en cuenta que $\Box\bot \vee F\Box\bot \vee P\Box\bot \in \Gamma_1$, entonces si $\Box\bot \notin \Gamma_1$, por los ítemes (a) y (b) del lema 2.5.7, se tiene claramente el resultado.

Para probar el lema del agotamiento para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(No$-$Tot)$, simplemente eliminamos el caso de los condicionales totales activos en la prueba de dicho lema para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$. Téngase en cuenta, además, que el lema anterior garantiza que, en la estructura funcional construida finalmente en el proceso, cada flujo posee al menos una coordenada que no pertenece al dominio de ninguna función.

Ahora podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.5.25 (Teorema de completitud para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(No$-$Tot)$)
Si una fórmula A es válida en la clase de estructuras funcionales

$$\{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \textit{ es una clase de funciones } (\texttt{U-Dom}) \textit{ no totales } \}$$

entonces A es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(No$-$Tot)$.

2.5.2. Análisis de completitud de sistemas no minimales

En esta sección abordaremos el estudio de completitud de otros sistemas funcionales no minimales. En particular, probaremos que, en el caso de funciones totales y constantes el sistema es completo. Por su parte, en el caso de las inyectivas y sobreyectivas probaremos que podemos construir una cadena infinita de sistemas incompletos.

El sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$-$Cons$. Teorema de completitud

Ahora añadiremos un nuevo sistema, extensión de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$. Nuestro objetivo es introducir un sistema que caracterice sintácticamente la clase de estructuras

$$\mathbb{K}_5 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F})) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase de funciones totales y constantes}\}$$

En consecuencia, la demostración del ítem b) del teorema 2.2.13 nos indica que el sistema buscado, al que denotaremos por $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-*Tot-Cons*, se obtiene añadiéndole a $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ el esquema de axioma:

$$(Tot\text{-}Cons) \qquad \Box A \to (H\Box A \wedge G\Box A)$$

Para tratar la completitud de este sistema respecto de las clases de estructuras funcionales mencionadas antes, necesitamos resultados preliminares que exponemos a continuación.

Teorema 2.5.26 *Las siguientes fórmulas son teoremas de* $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-*Tot-Cons:*

T5: $F\Box A \to \Box A$.

T6: $P\Box A \to \Box A$.

Demostración:
Vamos a probar T5 (T6 es su imagen del espejo).

1. $\Box A \to (H\Box A \wedge G\Box A)$ por $(Tot\text{-}Cons)$.
2. $\Box A \to H\Box A$ por 1 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$.
3. $F\Box A \to FH\Box A$ por 2 y $\mathcal{K}_l$.
4. $F\Box A \to \Box A$ por 3 y $\mathcal{K}_l$.

El siguiente lema es específico de este sistema.

Lema 2.5.27 *Sean* Γ_1, Γ_2 *y* Γ_3 *conjuntos* $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-*Tot-Cons-m.c.'s, entonces se tiene:*

(a) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $\Gamma_1 \prec_W \Gamma_3$, *entonces* $\Gamma_2 \prec_W \Gamma_3$.

(b) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $\Gamma_2 \prec_W \Gamma_3$, *entonces* $\Gamma_1 \prec_W \Gamma_3$.

Demostración:

Probemos (a). Todo lo que hay que demostrar es que $\{A \mid \Box A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_3$. Supongamos, entonces, que $\Box A \in \Gamma_2$, como $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$, entonces $F\Box A \in \Gamma_1$, luego, por T5 (teorema 2.5.26), tenemos que $\Box A \in \Gamma_1$ y, dado que $\Gamma_1 \prec_W \Gamma_3$, se tiene finalmente que $A \in \Gamma_3$.

La prueba de (b) es análoga, pero utilizando T6, finalizando así esta demostración.

El lema del agotamiento para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-*Tot-Cons* requiere llevar a cabo ciertas modificaciones en la prueba efectuada para el $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-*Tot*. Primeramente necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.5.28 *Sea* Φ_Σ *una traza de una estructura funcional* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$. *Decimos que* Φ_Σ *es* **total constante** *si es coherente y además, para cualesquiera* $t_w, t'_w, t_{w'} \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ *se tiene:*

$$\textit{si } t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \textit{ y } t'_w \neq t_w, \textit{ entonces } t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \quad (6)$$

(6) *se denomina* **condicional total-constante para** Φ_Σ **respecto de** t_w, t'_w **y** $t_{w'}$. Φ_Σ *se denomina* **total constante-plena** *si es profética, histórica, posibilista y total-constante.*

El lema del agotamiento para este sistema requiere modificar el lema del agotamiento para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$ sustituyendo el caso para el condicional total por el condicional total-constante.

Supongamos que está activo el condicional total-constante para Φ_{Σ_n} respecto de t_w, t'_w y $t_{w'}$:

$$\text{si } t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \text{ y } t'_w \neq t_w, \text{ entonces } t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t'_w\})$$

Entonces $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})$ y $t'_w \neq t_w$, pero $t_{w'} \notin \mathcal{F}_w(\{t'_w\})$. Ahora tenemos que asignar a t'_w la misma imagen que a t_w. Como $t'_w \in (\leftarrow, t_w) \cup (t_w, \rightarrow)$, por hipótesis, tenemos que $\Phi_{\Sigma_n}(t_w) \prec_W \Phi_{\Sigma_n}(t_{w'})$ y, además, $\Phi_{\Sigma_n}(t_w) \prec_T \Phi_{\Sigma_n}(t'_w)$ o bien $\Phi_{\Sigma_n}(t'_w) \prec_T \Phi_{\Sigma_n}(t_w)$. En cualquier caso, por el lema 2.5.27, se tiene que $\Phi_{\Sigma_n}(t'_w) \prec_W \Phi_{\Sigma_n}(t_{w'})$. Ahora, seleccionamos una extensión Σ_{n+1} de Σ_n tal que:

- $W_{n+1} = W_n$
- $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n$
- $\mathcal{F}_{n+1} = (\mathcal{F}_n - \{\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}\}) \cup \{\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}'\}$, donde $\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}' = \stackrel{w\ w'}{\longrightarrow} \cup \{(t'_w, t_{w'})\}$
- $\Phi_{\Sigma_{n+1}} = \Phi_{\Sigma_n}$

Es claro que $\Phi_{\Sigma_{n+1}}$ es coherente.

Ahora podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.5.29 (Teorema de completitud para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$-$Cons$)
Si una fórmula A es válida en la clase de estructuras funcionales

$$\{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \textit{ es una clase de funciones totales constantes }\}$$

entonces A es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$-$Cons$.

Los sistemas $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$-$Iny$ y $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$-$Sob$

Ahora contemplamos dos nuevos sistemas, denotados $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$-$Iny$ y $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$Tot$-$Sob$, y analizaremos que no logran (respectivamente) caracterizar sintácticamente la clase de estructuras

$$\mathbb{K}_7 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F})) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase de funciones totales e inyectivas}\}$$

y la clase de estructuras

$$\mathbb{K}_8 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F})) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase de funciones sobreyectivas}\}$$

Más aún, como hemos indicado en la introducción de esta subsección, probaremos que podemos construir una cadena infinita de sistemas incompletos. Para ello, comenzamos con la siguiente definición, teniendo en cuenta que, en todo lo que sigue, n es un entero positivo.

Definición 2.5.30 *En $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ introducimos las siguientes conectivas definidas:*

1. $F[A_1] =_{def} FA_1$ *y* $P[A_1] =_{def} PA_1$
2. $F[A_1,\dots,A_n] =_{def} F(A_1 \wedge F[A_2,\dots,A_{n-1}])$ *y*
   $P[A_1,\dots,A_n] =_{def} P(A_1 \wedge P[A_2,\dots,A_{n-1}])$.
3. *Si $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ son tales que $m_1 + m_2 = n$:*
   $(P^{m_1}, F^{m_2})[A_1,\dots,A_n] = P[A_1,\dots,A_{m_1}] \wedge F[A_{m_1+1},\dots,A_n]$.
   donde consideramos $(P^n, F^0) = P^n$ y $(P^0, F^n) = F^n$

El esquema *(Tot-Iny)*-n:

Definición 2.5.31 *Sea $\gamma \in \{F, P\}$, llamaremos γ-(Tot-Iny)-n al esquema:*

$$\gamma[\Box A_1,\dots,\Box A_n] \to \Box \bigvee_{\substack{0\le m\le n\\ \sigma\in S(n)}} (P^{n\text{-}m}, F^m)[A_{\sigma(1)},\dots,A_{\sigma(n)}]$$

donde $S(n)$ denota el conjunto de permutaciones de n y $m \in \mathbb{N}$.

En particular, en la definición anterior, se tiene que:

a) para $n = 1$ tenemos las fórmulas

$$P\Box A \to \Box(PA \vee FA) \quad \text{y} \quad F\Box A \to \Box(PA \vee FA)$$

b) Para $n = 2$ se tiene la fórmula F-(*Tot-Iny*)-2:

$$\begin{aligned} F(\Box A \wedge F\Box B) \to \quad \Box\Big(& P(A \wedge PB) \vee (PA \wedge FB) \vee F(A \wedge FB) \vee \\ & P(B \wedge PA) \vee (PB \wedge FA) \vee F(B \wedge FA)\Big) \end{aligned}$$

Nuestro siguiente objetivo es comprobar que no es suficiente añadir a $\mathcal{K}_l + \mathcal{K}$ el esquema (*Tot-Iny*):

$$\Box(HA \wedge GA) \to (H\Box A \wedge G\Box A)$$

para obtener un sistema completo respecto a la clase de estructuras con funciones totales e inyectivas, ya que la fórmula F-(*Tot-Iny*)-2 es válida en dicha clase pero no es un teorema del sistema. Más aún, teniendo en cuenta que esta clase de estructuras está definida por (Tot-Iny), el sistema $\mathcal{K}_l + \mathcal{K} + (Tot\text{-}Iny)$ es incompleto incluso en un sentido más amplio: *no existe ninguna clase* $\mathbb{K}$ *de estructuras funcionales tal que los teoremas de dicho sistema sean precisamente las fórmulas válidas en* $\mathbb{K}$.

Para demostrar la incompletitud de $\mathcal{K}_l + \mathcal{K} + (Tot\text{-}Iny)$ basta comprobar que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. La fórmula F-(Tot-Iny)-2 es válida en la clase de todas las estructuras funcionales con funciones totales inyectivas.

2. Existe un modelo de $\mathcal{K}_l + \mathcal{K} + (Tot\text{-}Iny)$ en el que F-(Tot-Iny)-2 no es válida.

En efecto, la demostración de 1 es inmediata. Para 2, definimos un nuevo tipo de estructuras para $L^{\mathcal{F}}_{T \times W}$ (donde las funciones son sustituidas por correspondencias):

Sea $\Psi = (W, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ donde W y $\mathcal{T}$ son como en definición 2.1.1, y $\mathcal{C}$ es un conjunto de correspondencias, llamadas *correspondencias de accesibilidad*. Decimos que Ψ es una *estructura de correspondencias* si se satisface:

a) cada correspondencia en $\mathcal{C}$ es una correspondencia de T_w en $T_{w'}$ para algún par $w, w' \in W$.

b) dados $w, w' \in W$ arbitrarios, existe en $\mathcal{C}$ a lo sumo una correspondencia de accesibilidad de T_w en $T_{w'}$, denotada $c_{ww'}$.

   Denotaremos $\mathcal{C}_w = \{c_{ww'} \in \mathcal{C} \mid w' \in W\}$. Entonces, $\mathcal{C} = \bigcup_{w \in W} \mathcal{C}_w$.

El conjunto de coordenadas de una estructura de correspondencias $\Psi = (W, \mathcal{T}, \mathcal{C})$, denotado $\mathcal{C}oord_\Psi$, se define como en la definición 2.1.2.

Un *modelo de correspondencias* sobre una estructura $\Psi = (W, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ es una tupla (Ψ, h_c), donde h_c es una función: $h_c : L^{\mathcal{F}}_{T \times W} \longrightarrow 2^{\mathcal{C}oord_\Psi}$, que satisface las condiciones usuales para las conectivas booleanas y temporales, y la siguiente condición específica para la conectiva $\Box$:

$$h_c(\Box A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_\Psi \mid \mathcal{C}_w(\{t_w\}) \subseteq h_c(A)\}$$

Las nociones de validez se definen en el modo habitual.

Ahora, consideremos la estructura de correspondencias siguiente:

- $W = \{w, w'\}$;
- $\mathcal{T} = \{(T_w, <_w), (T_{w'}, <_{w'})\}$, donde
  - $T_w = \{1_w, 2_w, 3_w\}, <_w = \{(1_w, 2_w), (1_w, 3_w), (2_w, 3_w)\}$;
  - $T_{w'} = \{4_{w'}, 5_{w'}\}, <_{w'} = \{(4_{w'}, 5_{w'})\}$;
- $\mathcal{C} = \{c_{ww'}\}$, donde $c_{ww'}(1_w) = c_{ww'}(2_w) = c_{ww'}(3_w) = T_{w'}$

y consideremos un modelo arbitrario, $\mathcal{M}$, sobre esta estructura de correspondencias, es decir, una función de interpretación arbitraria $h_c : \mathcal{V} \longrightarrow 2^{\{1_w, 2_w, 3_w, 4_{w'}, 5_{w'}\}}$.

Para verificar que $\mathcal{M}$ es un modelo de $\mathcal{K}_l + \mathcal{K} + (Tot\text{-}Iny)$ basta comprobar la validez de sus axiomas en $\mathcal{M}$ y que las reglas de inferencia respetan la validez. Por otra parte, para ver que $\mathcal{M}$ ratifica nuestra afirmación, basta ver que $\mathcal{M}$ hace falsa a F-(Tot-Iny)-2 en 1_w. Ambas se reducen a un mero ejercicio. Por lo tanto, podremos concluir que F-(Tot-Iny)-2 no es un teorema de $\mathcal{K}_l + \mathcal{K} + (Tot\text{-}Iny)$.

Podemos comprobar igualmente que el resultado de añadir, por ejemplo, la fórmula F-(Tot-Iny)-3 al sistema $\mathcal{K}_l + \mathcal{K}$ + (Tot-Iny) + F-(Tot-Iny)-2 tampoco es un sistema completo. En efecto, la fórmula F-(Tot-Iny)-3 es válida en la clase de estructuras funcionales con funciones totales inyectivas pero no es un teorema de $\mathcal{K}_l$+$\mathcal{K}$ + (Tot-Iny) + F-(Tot-Iny)-2.

Podemos continuar este razonamiento sucesivamente sobre n, obteniendo el siguiente resultado:

Si definimos $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$F$-($Tot$-$Iny$)-$n$ como el sistema

$$\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}\text{-}F\text{-}(Tot\text{-}Iny)\text{-}(n-1)\ +F\text{-}(Tot\text{-}Iny)\text{-}n$$

entonces tenemos un sistema igualmente incompleto.

Afirmamos entonces:

Teorema 2.5.32
Para cada n entero positivo y $\gamma \in \{F, P\}$, el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$\gamma$-($Tot$-$Iny$)-$n$ es incompleto.

Para demostrar este teorema demostramos en primer lugar los resultados siguientes:

Proposición 2.5.33 *Para cualquier entero positivo n y $\gamma \in \{P, F\}$, el esquema γ-(Tot-Iny)-n es válido en la clase $\mathbb{K}_7$, siendo*

$$\mathbb{K}_7 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \textit{ es una clase de funciones totales e inyectivas}\}$$

Demostración:
Razonamos para $\gamma = F$, la demostración para $\gamma = P$ es análoga. Sea un modelo funcional (Σ, h), con $\Sigma \in \mathbb{K}_7$, y $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ tal que $t_w \in h(F[\Box A_1, \ldots, \Box A_n])$. Entonces, la definición de $F[\Box A_1, \ldots, \Box A_n]$ asegura que existen $t^1_w, \ldots, t^n_w$ tales que:

$$t_w <_w t^1_w <_w \ldots <_w t^n_w \;\text{ y }\; t^1_w \in h(\Box A_1), \ldots, t^n_w \in h(\Box A_n)$$

Podemos ahora distinguir dos casos:

I): Si $\mathcal{F}_w = \varnothing$, entonces, trivialmente, se tiene que

$$t_w \in h(\Box \bigvee_{\substack{0\,\leq\, m\,\leq\, n\\ \sigma\,\in\, S(n)}} (P^{n\text{-}m}, F^m)[A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}])$$

II): Supongamos que $\mathcal{F}_w \neq \varnothing$, y sea $t'_{w'} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})$. Como la función $\overset{w\ w'}{\longrightarrow}$ es total, existen las imágenes de $t^1_w, \ldots, t^n_w$ en $T_{w'}$, sean $t'^1_{w'}, \ldots, t'^n_{w'}$ dichas imágenes, donde $t'^1_{w'} \in h(A_1), \ldots, t'^n_{w'} \in h(A_n)$. Por otra parte, por ser $\overset{w\ w'}{\longrightarrow}$ inyectiva, podemos asegurar que $t'_{w'} \neq t'^{i}_{w'}$ y $t'^{i}_{w'} \neq t'^{j}_{w'}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $i \neq j$. Ahora bien, la definición de $(P^{n\text{-}m}, F^m)[A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}]$ y la linealidad de $<_{w'}$, permiten asegurar que existe una permutación $\sigma \in S(n)$ tal que

$$t'_{w'} \in h((P^{n-m}, F^m)[A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}])$$

y, consecuentemente tenemos que

$$t'_{w'} \in h\big(\bigvee_{\substack{0 \leq m \leq n \\ \sigma \in S(n)}} (P^{n-m}, F^m)[A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}]\big)$$

y, por tanto, que

$$t_w \in h\big(\Box \bigvee_{\substack{0 \leq m \leq n \\ \sigma \in S(n)}} (P^{n-m}, F^m)[A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}]\big)$$

y la prueba está completa.

Ahora, tenemos como consecuencia inmediata el siguiente resultado.

Corolario 2.5.34 *Para todo entero positivo n y $\gamma \in \{F, P\}$, el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$\gamma$-($Tot$-$Iny$)-$n$ es correcto respecto a la clase de todas las estructuras funcionales con funciones totales inyectivas.*

Más aún, el corolario 2.5.34, el hecho de que (Tot-Iny) define la clase $\mathbb{K}_7$ y la construcción de los sistemas que hemos denominado $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$\gamma$-($Tot$-$Iny$)-$n$, permiten asegurar el siguiente resultado.

Proposición 2.5.35 *La clase*

$$\mathbb{K}_7 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase de funciones totales e inyectivas}\}$$

es la clase de estructuras para los sistemas $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$\gamma$-($Tot$-$Iny$)-$n$.

Proposición 2.5.36 *Sean n un entero positivo y $\gamma \in \{F, P\}$. En estas condiciones, el esquema γ-(Tot-Iny)-($n+1$) no es un teorema del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$\gamma$-($Tot$-$Iny$)-$n$.*

Demostración:
Basta demostrar que existe un modelo del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$\gamma$-($Tot$-$Iny$)-$n$ que no lo es del esquema γ-*(Tot-Iny)*-($n+1$):

En efecto, es sencillo comprobar que cualquier modelo definido sobre la estructura de correspondencias $(W, \mathcal{T}, \mathcal{C})$, donde

- $W = \{w, w'\}$;
- $T_w = \{1_w, ..., (n+1)_w\}$; $T_{w'} = \{1_{w'}, \ldots, n_{w'}\}$;
- $<_w$ y $<_{w'}$ son las relaciones de orden habitual en $\mathbb{N}$.
- $\mathcal{C} = \{c_{ww'}\}$, siendo $c_{ww'}(t_w) = T_{w'}$, para todo $t_w \in T_w$

es un contramodelo de γ-(Tot-Iny)-($n+1$) tanto para $\gamma = F$ como para $\gamma = P$. Sin embargo, de nuevo una simple comprobación permite asegurar que se trata de un modelo de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$\gamma$-($Tot$-$Iny$)-$n$, ya que γ-(Tot-Iny)-n es válido en él.

Estamos ya en condiciones de demostrar el teorema 2.5.32:

Demostración del teorema 2.5.32:

Es consecuencia inmediata de las proposiciones 2.5.33, 2.5.35 y 2.5.36, que aseguran que la fórmula γ-$(Tot\text{-}Iny)$-$(n+1)$ no es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$\gamma$-$(Tot\text{-}Iny)$-$n$, aún cuando es válida en la clase de todas las estructuras funcionales de dicho sistema.

Consideremos ahora la sobreyectividad.

El esquema (Sob)-γ-n

Definición 2.5.37 *Sea $\gamma \in \{F, P\}$, llamamos esquema (Sob)-γ-n a la fórmula:*

$$\Diamond\gamma[A_1, \ldots, A_n] \to \bigvee_{\substack{0 \le m \le n \\ \sigma \in S(n)}} (P^{n-m}, F^m)[\Diamond A_{\sigma(1)}, \ldots, \Diamond A_{\sigma(n)}]$$

En particular, en la definición anterior, se tiene que:

a) para $n = 1$ tenemos las fórmulas

$$\Diamond PA \to (P\Diamond A \vee F\Diamond A) \quad \text{y} \quad \Diamond FA \to (P\Diamond A \vee F\Diamond A)$$

b) Para $n = 2$ y $\gamma = F$, se tiene la fórmula:

$$\begin{aligned}\Diamond F(A \wedge FB) \to \quad & \big(P(\Diamond A \wedge P\Diamond B) \vee (P\Diamond A \wedge F\Diamond B) \ \vee F(\Diamond A \wedge F\Diamond B) \vee \\ & P(\Diamond B \wedge P\Diamond A) \vee (P\Diamond B \wedge F\Diamond A) \vee F(\Diamond B \wedge F\Diamond A)\big)\end{aligned}$$

Proposición 2.5.38 *Para todo n y $\gamma \in \{F, P\}$, el esquema (Sob)-γ-n es válido en la clase $\mathbb{K}_8$, siendo*

$$\mathbb{K}_8 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \textit{ es una clase de funciones sobreyectivas}\}$$

Demostración:
Razonamos para $\gamma = F$, el razonamiento para $\gamma = P$ es similar. Sea un modelo funcional (Σ, h), con $\Sigma \in \mathbb{K}_8$, y $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ tal que $t_w \in h(\Diamond F[A_1, \ldots, A_n])$. Entonces existe $t'_{w'} \in \mathcal{F}_w$ tal que $t'_{w'} \in h(F[A_1, \ldots, A_n])$ y, en consecuencia existen $t'^1_{w'}, \ldots t'^n_{w'}$ tales que $t'_{w'} < t'^1_{w'} <_{w'} \ldots <_{w'} t'^n_{w'}$ y $t'^1_{w'} \in h(A_1), \ldots, t'^n_{w'} \in h(A_n)$. Por otra parte, por ser funciones los elementos de $\mathcal{F}$ y ser éstos funciones sobreyectivas, podemos asegurar la existencia de antiimágenes (distintas) de $t'^1_{w'}, \ldots t'^n_{w'}$ en T_w, sean éstas $t^1_w, \ldots t^n_w$. Ahora, repitiendo palabra por palabra el razonamiento de la demostración de la proposición 2.5.33 en T_w aseguramos el resultado.

Por último, tenemos los resultados análogos a las proposiciones 2.5.35 y 2.5.36.

Proposición 2.5.39 *La clase*

$$\mathbb{K}_8 = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \textit{ es una clase de funciones sobreyectivas}\}$$

es la clase de estructuras para los sistemas $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(Sob)$-$\gamma$-$n$

Proposición 2.5.40 *Para todo n y $\gamma \in \{F, P\}$, el esquema (Sob)-γ-$n+1$ no es un teorema del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(Sob)$-$\gamma$-$n$.*

Demostración:
Cualquier modelo sobre la estructura de correspondencias $(W, \mathcal{T}, \mathcal{C})$, donde:

- $W = \{w, w'\}$;
- $T_w = \{1_w, ..., n_w\}$; $T_{w'} = \{1_{w'}, \ldots, (n+1)_{w'}\}$;
- $<_w$ y $<_{w'}$ son las relaciones de orden habitual en $\mathbb{N}$.
- $\mathcal{C} = \{c_{ww'}\}$, con $c_{ww'}(1_w) = c_{ww'}(2_w) = \ldots = c_{ww'}(n+1)_w = T_{w'}$, para todo $t_w \in T_w$.

es un contramodelo de (Sob)-γ-$(n+1)$. Sin embargo, es un modelo del sistema $\mathcal{S}_{T\times W}$-*(Sob)*-γ-n.

Por último, siguiendo un razonamiento análogo al caso del análisis de la inyectividad, podemos asegurar el teorema deseado.

Teorema 2.5.41 *Para cada $n > 0$ y $\gamma \in \{F, P\}$, el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$(Sob)$-$\gamma$-$n$ es incompleto.*

Capítulo 3

Un planteamiento funcional indizado para $T \times W$

El estudio realizado en el capítulo 2 no permite especificar a qué flujo concreto deseamos ir mediante una función de accesibilidad. Sin embargo, en las aplicaciones que tenemos en mente, y en particular en todas las relativas a la modelización y proceso de ordenadores en red, esta posibilidad es requerida con frecuencia. Para resolver este problema, proponemos incluir en el lenguaje conectivas del tipo $<i>$, de forma que la expresión $<i> A$ tiene como lectura: *"A es verdadera en el flujo i, exactamente en la imagen del instante de referencia (o donde me hallo)"*.

La utilización de nombres en los lenguajes modales se remonta a [Prior (1967)], con el estudio de una lógica temporal de tiempo ramificado. Más recientemente, [Blackburn(1993)], [Passy and Tinchev(1991)], [Gargov and Goranko(1993)] y [Brown and Goranko(1999)] han hecho uso de nombres en el lenguaje modal proposicional para denotar instantes (o mundos posibles). El uso de nombres permite contemplar restricciones específicas sobre las estructuras, con lo cual es posible definir propiedades de las relaciones que no son definibles en los lenguajes modales al uso (por ejemplo, la irreflexividad). En nuestro caso, como hemos indicado, el interés práctico de la utilización de nombres es computacional: poder especificar a qué memoria de ordenador accedemos desde un lugar determinado.

Con este punto de partida, en este capítulo presentamos una lógica (modal-etiquetada)$\times$temporal, denotada $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$. Como veremos, la lógica $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ (al igual que $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$) asegura la definibilidad de propiedades básicas de las funciones.

Tras el estudio de la definibilidad, definimos sistemas axiomáticos caracterizados por clases de estructuras en las que las funciones de accesibilidad poseen propiedades destacables. Como veremos, el sistema minimal introducido es *completo*. Por otra parte, como en el capítulo anterior, realizamos el estudio de la completitud de otros sistemas funcionales no minimales y analizamos que la incorporación de índices mantiene los resultados de completitud para el caso de funciones totales y constantes, aporta la completitud para los casos de funciones inyectivas y monótonas [1], aunque

[1]Como veremos en este capítulo, los resultados de completitud para los sistemas indizados dependen fuertemente del modo de incorporar los índices.

se mantiene el resultado de incompletitud para el caso de funciones sobreyectivas.

3.1. Las lógicas $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$

En esta sección definimos las lógicas

$$\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}\text{-}\mathfrak{I} = (L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}\text{-}\mathfrak{I}, \mathcal{M}^{\mathcal{F}}\text{-}\mathfrak{I})$$

donde $\mathfrak{I}$ es un conjunto de índices no vacío y numerable, cuya elección determina una lógica concreta, $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ denota el lenguaje y $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$-$\mathfrak{I}$ los modelos funcionales para $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$.

3.1.1. El Lenguaje $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ de $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$

Dado un conjunto no vacío numerable $\mathfrak{I}$ (conjunto de índices), el alfabeto del lenguaje $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ es el siguiente:

1. un conjunto numerable, $\mathcal{V}$, de variables proposicionales;
2. las constantes lógicas $\top$ y $\bot$, y las conectivas booleanas $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$;
3. las conectivas temporales G y H;
4. una familia de conectivas modales monarias de la forma $<i>^{\mathcal{F}}$, para $i \in \mathfrak{I}$ (en adelante $<i>$, ya que no da lugar a confusión).
5. un conjunto de símbolos de puntuación: $\{(,),[,],\ldots\}$

El conjunto de fórmulas bien formadas (*fbfs*) es la clausura inductiva libremente generada sobre el conjunto base $\mathcal{V} \cup \{\top, \bot\}$ y los constructores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, G, H y $\{<i> \mid i \in \mathfrak{I}\}$ de aridades $1, 2, 2, 2, 1, 1$, y 1 para todo $i \in \mathfrak{I}$, respectivamente. En definitiva:

1. $\top$, $\bot$ y toda $p \in \mathcal{V}$ son *fbfs*.
2. Si A es una *fbf*, entonces $\neg A$, GA, HA son *fbfs*.
3. Si A es una *fbf* entonces, para todo $i \in \mathfrak{I}$, $<i>A$ es una *fbf*.
4. Si A y B son *fbfs*, entonces $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ y $(A \rightarrow B)$ son *fbfs*.[2]

Consideraremos las conectivas definidas F, P en el modo estándar:

$$FA =_{def} \neg G \neg A; \quad PA =_{def} \neg H \neg A$$

Asimismo, podemos introducir, para cada $i \in \mathfrak{I}$, la conectiva $[\,i\,]$:

$$[\,i\,]A =_{def} \neg <i> \neg A$$

[2] Como es habitual, usaremos el convenio de omitir los paréntesis externos en las *fbfs*

Entenderemos que las conectivas monarias tienen mayor prioridad que las binarias.

Como hemos indicado en la introducción del capítulo, la lectura de $<i>A$ es la siguiente:

A es verdadera en algún instante del flujo temporal T_i, exactamente en el instante imagen del presente (desde el que ejecuto o hablo).

Por su parte, como es habitual, $[\,i\,]A$ tiene un significado no existencial, es decir, la lectura de $[\,i\,]A$ es:

Si existe imagen del presente (desde el que ejecuto o hablo) en el flujo temporal T_i, entonces A es verdadera en tal imagen.

Sin embargo, conviene destacar que, a diferencia de lo que ocurría en $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$, si tal imagen del presente existe en el flujo i, entonces $<i>A$ tiene el mismo significado que $[\,i\,]A$.

3.1.2. Semántica de $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$

Definición 3.1.1 *Una* **estructura ind-funcional** *para $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ (o simplemente estructura ind-funcional si no da lugar a confusión) es una terna*

$$\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$$

tal que:

1. *W es un conjunto no vacío (conjunto de etiquetas para un conjunto de flujos temporales).*

2. *$\mathcal{T}$ es un conjunto no vacío de órdenes lineales estrictos, indizados por W, concretamente:*

   $\mathcal{T} = \{(T_w, <_w) \mid w \in W\}$, donde cada T_w en un conjunto no vacío y si $w \neq w'$, entonces $T_w \cap T_{w'} = \varnothing$.

3. *$\mathcal{F}$ es un conjunto de funciones no vacías, llamadas* **funciones de accesibilidad** *tales que:*

   a) *cada función de $\mathcal{F}$ es una función parcial de T_w en $T_{w'}$, para algún par $w, w' \in W$ tal que $w' \in W \cap \mathfrak{I}$*

   b) *dados $(w, w') \in W \times (W \cap \mathfrak{I})$, existe (en $\mathcal{F}$) a lo sumo una función de T_w en $T_{w'}$, denotada por $\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}$.*

Denotaremos $\mathcal{F}_w = \{\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F} \mid w' \in W \cap \mathfrak{I}\}$. Entonces $\mathcal{F} = \bigcup_{w\in W} \mathcal{F}_w$. A los elementos t_w de la unión disjunta $\mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} = \bigoplus_{w\in W} T_w$ se les llama **coordenadas**.

Observación 3.1.1 *Advirtamos que:*

1. *La definición de $\mathcal{T}$ depende sólo del conjunto (de etiquetas) W, mientras que $\mathcal{F}$ depende de W e $\mathcal{I}$.*

2. *No exigimos que $\mathfrak{I} \subseteq W$ para poder contemplar estructuras de cardinalidad arbitaria.*

3. *Por otra parte, el ítem 3(a) de la definición establece que las imágenes de las funciones estén siempre nombradas por índices del lenguaje. La razón es doble, una referida a las aplicaciones y otra de interés tanto teórico como aplicativo:*

   (i) *nuestro deseo es saber siempre a dónde vamos, especificar el destino* [3].

   (ii) *podremos establecer la definibilidad de propiedades de la clase de todas las funciones de una estructura con cada elección de $\mathfrak{I}$.*

Ejemplo 3.1.1 *Consideremos la estructura ind-funcional $\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ de la figura:*

donde:

- $\mathcal{I} = \{2, 3, 4\}$
- $W = \{1, 2, 3\}$,
- $\mathcal{T} = \{(T_1, <_1), (T_2, <_2), (T_3, <_3)\}$, *siendo*

$$T_1 = \{t_1^1, t_1^2\},\ T_2 = \{t_2^1, t_2^2, t_2^3, t_2^4\},\ T_3 = \{t_3^1, t_3^2, t_3^3\}$$

  y $<_1, <_2, <_3$ *restricciones del orden natural en* $\mathbb{N}$ *a* T_1, T_2 *y* T_3, *respectivamente.*

- $\mathcal{F} = \{\xrightarrow{1\ 2}, \xrightarrow{1\ 3}, \xrightarrow{2\ 3}, \xrightarrow{3\ 2}\}$ *definidas por*

  $\xrightarrow{1\ 2} = \{(t_1^1, t_2^1)\}$, $\xrightarrow{1\ 3} = \{(t_1^1, t_3^1)\}$,

  $\xrightarrow{2\ 3} = \{(t_2^1, t_3^2), (t_2^2, t_3^2), (t_2^3, t_3^3), (t_2^4, t_3^2)\}$ *y* $\xrightarrow{3\ 2} = \{(t_3^3, t_2^4)\}$.

Obsérvese que $W \cap \mathfrak{I} = \{2, 3\}$. En consecuencia, 1 no es un índice:

$$1 \in W - \mathcal{I} = \{1, 2, 3\} - \{2, 3, 4\}$$

[3] En particular el ordenador en el que queremos ejecutar con unos requisitos determinados.

Por otra parte, 4 *es un índice que no corresponde a ningún mundo:*

$$4 \in \mathcal{I} - W = \{2,3,4\} - \{1,2,3\}$$

Definición 3.1.2 *Un* **modelo ind-funcional** *para* $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ *es un par* $(\Sigma^{\mathfrak{I}}, h)$*, donde* $\Sigma^{\mathfrak{I}}$ *es una estructura ind-funcional y* h *es una función,*

$$h : L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}\text{-}\mathfrak{I} \longrightarrow 2^{\mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}}$$

llamada **interpretación ind-funcional** *y que satisface las condiciones siguientes:*

- *La interpretación de las constantes y de las conectivas booleanas se define de modo estándar.*
- $h(GA) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} \mid (t_w, \rightarrow) \subseteq h(A)\}$.
- $h(HA) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} \mid (\leftarrow, t_w) \subseteq h(A)\}$.
- $h(<\!i\!>A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} \mid \stackrel{w\ i}{\longrightarrow} (\{t_w\}) \cap h(A) \neq \varnothing\}$.

Por lo tanto, la semántica de la conectiva definida $[\,i\,]$ es la siguiente:

$$h([\,i\,]A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} \mid \stackrel{w\ i}{\longrightarrow} (\{t_w\}) \subseteq h(A)\}$$

La satisfacibilidad, validez y equivalencia lógica se definen de modo estándar. Advirtamos que, según nuestras definiciones:

- $[\,i\,]A$ es válida en toda estructura ind-funcional, $\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, tal que se verifica que $W \cap \mathfrak{I} = \varnothing$.
- Para que $<\!i\!>A$ sea verdadera en una coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$ es necesario que $i \in W \cap \mathfrak{I}$.

Los siguientes ejemplos reflejan algunas de las características de las estructuras ind-funcionales introducidas.

Ejemplo 3.1.2 *En este ejemplo mostramos la conveniencia de considerar flujos de tiempos diferentes y funciones de accesibilidad no estrictamente crecientes.*

Consideremos dos procesos, denotados mediante P_0 *y* P_1*. Cada uno de ellos realiza un cálculo en el que interviene el valor de una determinada variable.* P_0 *procesa valores de la variable* X *y* P_1 *los de la variable* Y*. Estos procesos están conectados, de forma que los cálculos que realiza* P_1 *dependen de la información que le envía* P_0 *sobre los valores de la variable* X*.*

Supongamos que el reloj de P_0 *(Reloj*$_0$*) da tics a intervalos regulares de tiempo, mientras que el reloj de* P_1 *(Reloj*$_1$*) marca precisamente los instantes en que cambia el valor de la variable* Y*.*

Establecemos como protocolo que la variable Y *cambia de valor en una unidad justamente cuando la variable* X *se incrementa en una unidad. Para ello,* P_0 *debe* *comunicar a* P_1 *cuándo ha cambiado el valor de* X*, lo que da lugar a una acción, por parte de* P_1 *(para cambiar convenientemente el valor de* Y*). Supondremos además que tales mensajes no se pierden.*

Estamos pues interesados en los valores de las variables X *e* Y *a lo largo del tiempo para cada proceso. Como lenguaje para especificar este simple protocolo, usaremos dos átomos,* $X = X + 1$ *e* $Y = Y + 1$*.*

La conectiva modal $< 1 >$ *indica que nos dirigimos a* P_1*. Tenemos, entonces, la siguiente fórmula, que se cumple en todo tic de* $Reloj_0$ *(y trivialmente en todo tic de* $Reloj_1$*):*

$$(X = X + 1) \rightarrow < 1 > (Y = Y + 1)$$

La siguiente figura muestra las acciones descritas:

Tenemos pues: $T_0 = \{1_0, 2_0, 3_0, 4_0, 5_0, 6_0, 7_0 \ldots\}$ *y* $T_1 = \{1_1, 2_1, 3_1, 4_1 \ldots\}$*, mientras que* $<_0$ *y* $<_1$ *son las restricciones del orden habitual de* $\mathbb{Z}$ *a* T_0 *y a* T_1*, respectivamente. Consideramos, además, una función,* $\xrightarrow{0,1}$ *definida, para los siete primeros elementos de* T_0 *como se muestra en la figura, es decir:*

$\xrightarrow{0,1} (1_0) = \xrightarrow{0,1} (2_0) = 1_1$;
$\xrightarrow{0,1} (3_0) = 2_1$;
$\xrightarrow{0,1} (4_0) = \xrightarrow{0,1} (5_0) = \xrightarrow{0,1} (6_0) = 3_1$;
$\xrightarrow{0,1} (7_0) = 4_1$

Nótese que todos los tics de $Reloj_1$ *en los que el valor de la variable* X *no cambia tienen una imagen común en* $Reloj_2$ *(a la espera de que tenga lugar un cambio en el valor de la variable* X*).*

Ejemplo 3.1.3 *En este ejemplo mostramos la necesidad de considerar funciones parciales no totales.*

Consideremos de nuevo el ejemplo 3.1.2 y añadamos las siguientes condiciones al protocolo expuesto para los dos procesos, P_0 *y* P_1*:*

(i) El proceso P_1 comunica a P_0 que el valor de Y ha sido cambiado como consecuencia del mensaje enviado por P_0. Es decir, P_1 envía a P_0 un acuse de recibo.

(ii) Además, cuando Y alcance un valor superior a 25, el proceso P_1 deja de computar los valores de dicha variable. Esto afecta a los cómputos de X por parte de P_0, pues obliga a P_0 a dejar de procesar.

En la figura siguiente representamos esta situación. Hemos supuesto que la comunicación de acuse de recibo es instantánea.

Disponemos pues de una nueva función de accesibilidad $\xrightarrow{1,0}$ *definida por:*

$$\xrightarrow{1,0}(2_1) = 3_0; \quad \xrightarrow{1,0}(3_1) = 4_0; \quad \xrightarrow{1,0}(4_1) = 7_0; \quad \ldots$$

Nótese que la función $\xrightarrow{0,1}$ *es total y creciente; en cambio, la función* $\xrightarrow{1,0}$ *es no total y estrictamente creciente.*

Necesitamos pues extender el lenguaje con una nueva conectiva, $< 0 >$ *y dos nuevos átomos para especificar los dos nuevos hechos a considerar:*

(i) Un átomo denotado AC (acuse).

(ii) Un átomo denotado $Y > 25$.

Las siguientes fórmulas sirven para especificar las nuevas condiciones (i) y (ii) anteriores:

$$\begin{array}{ll} (i') & (Y = Y + 1) \rightarrow < 0 > AC \\ (ii') & (Y > 25) \rightarrow (G\bot \wedge < 1 > G\bot) \end{array}$$

Un comentario similar cabe hacer del siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.4 *Consideramos un nuevo ejemplo en el que se muestra la necesidad de identificar la imagen.*

Consideremos tres procesos, denotados P_0, P_1 y P_2. El proceso P_0 envía mensajes regularmente a P_1 y P_2 y éstos contestan con un "acuse de recibo" (AC). Si alguno de ellos no contesta, entonces P_0 repite el mensaje a dicho proceso en el instante *siguiente (suponemos que hace esto al menos una vez). El lapso de tiempo para dar como respuesta un AC se considera inmediato.*

Convenimos, además, que los procesos están sincronizados, es decir, tienen el mismo reloj.

Si consideramos que P_0 *debe enviar un mensaje a* P_1 *en los tics impares y a* P_2 *en los pares, para los ocho primeros tics tenemos la siguiente situación (advirtiendo que si no hay respuesta se repite el mensaje):*

Tenemos pues las funciones de accesibilidad $\xrightarrow{0,1}$, $\xrightarrow{0,2}$, $\xrightarrow{1,0}$ *y* $\xrightarrow{2,0}$, *definidas como sigue:*

$\xrightarrow{0,1} (t_0) = t_1$, *para* $t = 1, 3, 4, 5, 7$;
$\xrightarrow{0,2} (t_0) = t_2$, *para* $t = 2, 4, 6, 7, 8$;
$\xrightarrow{1,0} (t_1) = t_0$, *para* $t = 1, 5, 7$;
$\xrightarrow{2,0} (t_2) = t_0$, *para* $t = 2, 4, 8$

Estas funciones parciales determinan el comportamiento de los tres procesos. El dominio de estas funciones representa los instantes de emisión de mensajes y la imagen los de recepción de los mismos.

El diagrama refleja que P_0 *no recibe el AC de* P_1 *en el tercer tic del reloj, consecuentemente* P_0 *repite el mensaje en el cuarto tic y* P_1 *tampoco responde; en el quinto tic, de acuerdo con el protocolo,* P_0 *envía un mensaje a* P_1 *y éste responde con un AC, por lo que* P_0 *no repite el mensaje sino que envía otra vez un mensaje cuando está acordado (en el séptimo tic). La conducta entre* P_0 *y* P_2 *se puede explicar de forma similar.*

Estamos ya en condiciones de realizar el estudio de la definibilidad de las propiedades de las funciones, como realizamos en el capítulo anterior.

3.2. Definibilidad de propiedades de funciones en $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$

Como en la sección 2.2, nuestro siguiente objetivo es determinar las fórmulas de $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ cuya validez caracteriza clases de estructuras determinadas por propiedades habituales de funciones. Comenzamos con la siguiente definición:

Definición 3.2.1 *Sea $\mathbb{J}$ una clase de estructuras ind-funcionales y sea $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{J}$. Diremos que $\mathbb{K}$ es $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$-**definible** en (o relativa a) $\mathbb{J}$ si existe algún conjunto Γ de fórmulas de $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ tal que para toda estructura $\Sigma^{\mathfrak{I}} \in \mathbb{J}$, tenemos que $\Sigma^{\mathfrak{I}} \in \mathbb{K}$ si y sólo si toda fórmula de Γ es válida en $\Sigma^{\mathfrak{I}}$. En el caso de que $\mathbb{J}$ sea la clase de todas las estructuras ind-funcionales, diremos que $\mathbb{K}$ es $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$-definible.*

Sea P una propiedad de funciones (inyectividad, etc) y $\mathbb{K}_P$ la clase de todas las estructuras ind-funcionales cuyas funciones poseen la propiedad P. Diremos que P es $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$-definible si $\mathbb{K}_P$ es $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$-definible.

En adelante, "definible" significará "$\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$-definible".

Teorema 3.2.2 *Las siguientes clases de estructuras ind-funcionales para $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ son definibles:*

$\mathbb{K}_1 = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones no totales*$\}$
$\mathbb{K}_2 = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones constantes*$\}$
$\mathbb{K}_3 = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones inyectivas*$\}$
$\mathbb{K}_4 = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones sobreyectivas*$\}$
$\mathbb{K}_5 = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones crecientes*$\}$
$\mathbb{K}_6 = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones estrictamente crecientes*$\}$
$\mathbb{K}_7 = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones decrecientes*$\}$
$\mathbb{K}_8 = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones estrictamente decrecientes*$\}$

Demostración:

1. Probaremos que $\mathbb{K}_1$ está definida por el siguiente conjunto de fórmulas:

$$(No\text{-}Tot)\text{-}ind \qquad \{P[\,i\,]\bot \vee [\,i\,]\bot \vee F[\,i\,]\bot \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

   En efecto, para cada estructura ind-funcional $\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, se cumple que $\Sigma^{\mathfrak{I}} \in \mathbb{K}_1$ si y sólo si para todo $T_w \in \mathcal{T}$ y toda $\xrightarrow{w\ i} \in \mathcal{F}$, hay al menos una $t_w \in T_w$ tal que t_w no pertenece al dominio de $\xrightarrow{w\ i}$. Ahora, es obvio que $t_w \in h([\,i\,]\bot)$ si y sólo si t_w no pertenece al dominio de $\xrightarrow{w\ i}$. Por tanto, si tenemos en cuenta la linealidad de $<_w$, obtenemos que $P[\,i\,]\bot \vee [\,i\,]\bot \vee F[\,i\,]\bot$ se cumple en toda coordenada de T_w si y sólo si $\xrightarrow{w\ i}$ es una función no total.

2. $\mathbb{K}_2$ está definida por el conjunto de fórmulas:

   $(Cons)$-ind: $\{<i>A \rightarrow (H([\,i\,]\bot \vee <i>A) \wedge G([\,i\,]\bot \vee <i>A)) \mid i \in \mathfrak{I}\}$

   Para probar este resultado, según el ítem 1.1 del teorema 2.2.2, $\xrightarrow{w\,i}$ es una función constante si y sólo si para toda $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\ i})$ se satisface que:

$$(cons)\text{-}ind: \qquad \xrightarrow{w\ i} ((\leftarrow, t_w)) \cup \xrightarrow{w\,i} ((t_w, \rightarrow)) \ \subseteq\ \{\xrightarrow{w\,i} (t_w)\}$$

Por otra parte, puesto que para todo $i \in \mathcal{I}$:

$$t_w \in h(<i>A) \quad \text{si y sólo si} \quad \xrightarrow{w\,i} (\{t_w\}) \cap h(A) \neq \varnothing$$

Y puesto que $\xrightarrow{w\,i} (\{t_w\})$ es a lo sumo unitario, tenemos que para todo $i \in \mathcal{I}$:

$$\text{si } t_w \in h(<i>A) \quad \text{entonces} \quad \xrightarrow{w\,i} (\{t_w\}) \subseteq h(A)$$

En consecuencia, por $(cons)$-ind, tenemos que para toda $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\,i})$:

$$\xrightarrow{w\,i} ((\leftarrow, t_w)) \cup \xrightarrow{w\,i} ((t_w, \rightarrow)) \subseteq h(A)$$

Además, la semántica de las conectivas asegura que:

$$t_w \in h(H([\,i\,]\bot \vee <i>A)) \text{ si y sólo si } \xrightarrow{w\,i} ((\leftarrow, t_w)) \subseteq h(A)$$

$$t_w \in h(G([\,i\,]\bot \vee <i>A)) \text{ si y sólo si } \xrightarrow{w\,i} ((t_w, \rightarrow)) \subseteq h(A)$$

con lo cual, obtenemos la validez de $(Cons)$-ind.

Recíprocamente, sea una estructura ind-funcional $\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \notin \mathbb{K}_2$, entonces existen $\xrightarrow{w\,i} \in \mathcal{F}$ y $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\,i})$ tales que

$$\xrightarrow{w\,i} ((\leftarrow, t_w)) \cup \xrightarrow{w\,i} ((t_w, \rightarrow)) \;\; \nsubseteq \;\; \{\xrightarrow{w\,i} (t_w)\}$$

Es decir, existe una coordenada $t'_{w'} \in \xrightarrow{w\,i} ((\leftarrow, t_w)) \cup \xrightarrow{w\,i} ((t_w, \rightarrow))$ tal que $t'_{w'} \notin \{\xrightarrow{w\,i} (t_w)\} \neq \varnothing$. Ahora basta elegir un modelo (Σ, h) tal que

$$h(p) = \{\xrightarrow{w\,i} (t_w)\}$$

para refutar la fórmula

$$<i>p \rightarrow (H([\,i\,]\bot \vee <i>p) \wedge G([\,i\,]\bot \vee <i>p))$$

en t_w (por no verificarse p en $t'_{w'}$), completando así la demostración [4]

En los apartados que siguen podemos razonar de idéntica forma, utilizando los ítemes correspondientes del teorema 2.2.2.

[4]Obsérvese que el conjunto

$$\{[\,i\,]A \rightarrow (H([\,i\,]\bot \vee [\,i\,]A) \wedge G([\,i\,]\bot \vee [\,i\,]A)) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

no define la misma clase, ya que podemos refutar cualquiera de sus fórmulas en una coordenada que no tenga imagen. Una observación similar puede hacerse en las clases siguientes hasta $\mathbb{K}_8$, excepto para $\mathbb{K}_4$, que comentaremos en su momento.

3. Concretamente, $\mathbb{K}_3$ está definida por el siguiente conjunto de fórmulas:
   (Iny)-*ind*:

   $$\{<i>(HA \wedge GA) \to (G(<i>A \vee [\,i\,]\bot) \wedge H(<i>A \vee [\,i\,]\bot)) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

   Lo cual se sigue fácilmente del siguiente resultado: $\xrightarrow{w\,i}$ es una función inyectiva si y sólo si, para toda $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\,i})$, tenemos la inclusión

   $$(iny)\text{-}ind \quad \xrightarrow{w\,i}((\leftarrow, t_w) \cup (t_w, \rightarrow)) \subseteq (\xrightarrow{w\,i}(t_w), \rightarrow) \cup (\leftarrow, \xrightarrow{w\,i}(t_w))$$

4. $\mathbb{K}_4$ está definida por el siguiente conjunto de fórmulas:

   $$(Sob)\text{-}ind \quad \{(G[\,i\,]A \wedge H[\,i\,]A)) \to [\,i\,](GA \wedge HA) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$ [5]

   Lo cual se sigue fácilmente del siguiente resultado: $\xrightarrow{w\,i}$ es una función sobreyectiva si y sólo si, para toda $t_w \in T_w$, tenemos la inclusión

   $$(sob)\text{-}ind: \quad (\leftarrow, \xrightarrow{w\,i}(\{t_w\})) \cup (\xrightarrow{w\,i}(\{t_w\}), \rightarrow) \subseteq \xrightarrow{w\,i}((\leftarrow, t_w) \cup (t_w, \rightarrow))$$

5. $\mathbb{K}_5$ está definida por cualquiera de los siguientes conjuntos de fórmulas, denotados $(Crec)$-*ind*:

   $$\{<i>(A \wedge GA) \to G(<i>A \vee [\,i\,]\bot) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$
   $$\{<i>(HA \wedge A) \to H(<i>A \vee [\,i\,]\bot) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

   Lo cual se sigue fácilmente del siguiente resultado: $\xrightarrow{w\,i}$ es una función creciente si y sólo si, para toda $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\,i})$, tenemos que se verifica cualquiera de las dos inclusiones siguientes, denotadas por:

   $$(crec)\text{-}ind: \begin{cases} \xrightarrow{w\,i}((\leftarrow, t_w)) \subseteq (\leftarrow, \xrightarrow{w\,i}(t_w)] \\ \xrightarrow{w\,i}((t_w, \rightarrow)) \subseteq [\xrightarrow{w\,i}(t_w), \rightarrow) \end{cases}$$

6. Demostraremos que $\mathbb{K}_6$ está definida por cualquiera de los siguientes conjuntos de fórmulas, denotados $(Estr\text{-}Crec)$-*ind*:

   $$\{<i>HA \to H(<i>A \vee [\,i\,]\bot) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$
   $$\{<i>GA \to G(<i>A \vee [\,i\,]\bot) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

   Lo cual se sigue fácilmente del siguiente resultado: $\xrightarrow{w\,i}$ es una función estrictamente creciente si y sólo si, para toda $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\,i})$, tenemos cualquiera de las siguientes inclusiones:

   $$(estr\text{-}crec)\text{-}ind: \begin{cases} \xrightarrow{w\,i}((\leftarrow, t_w)) \subseteq (\leftarrow, \xrightarrow{w\,i}(t_w)) \\ \xrightarrow{w\,i}((t_w, \rightarrow)) \subseteq (\xrightarrow{w\,i}(t_w), \rightarrow) \end{cases}$$

---

[5] Sin embargo, esta clase no está definida por el conjunto

$$\{(H<i>A \wedge G<i>A)) \to <i>(GA \wedge HA) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

ya que sus fórmulas no son válidas si las funciones no son totales.

7. Sólo tenemos que probar que $\mathbb{K}_7$ está definida por cualquiera de los siguientes conjuntos fórmulas, denotados $(Decrec)$-*ind*:

$$\{<i>(HA \wedge A) \to G(<i>A \vee [\,i\,]\bot) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

$$\{<i>(A \wedge GA) \to H(<i>A \vee [\,i\,]\bot) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

Lo cual se sigue fácilmente del siguiente resultado: $\xrightarrow{w\,i}$ es una función decreciente si y sólo si, para toda $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\,i})$, tenemos cualquiera de las siguientes inclusiones

$$(decrec)\text{-}ind: \begin{cases} \xrightarrow{w\,i}((\leftarrow, t_w)) \subseteq [\xrightarrow{w\,i}(t_w), \rightarrow) \\ \xrightarrow{w\,i}((t_w, \rightarrow)) \subseteq (\leftarrow, \xrightarrow{w\,i}(t_w)] \end{cases}$$

8. Demostraremos que $\mathbb{K}_8$ está definida por cualquiera de los siguientes conjuntos fórmulas, denotados $(Estr\text{-}Decrec)$-*ind*:

$$\{<i>HA \to G(<i>A \vee [\,i\,]\bot) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

$$\{<i>GA \to H(<i>A \vee [\,i\,]\bot) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

Pero esto se sigue fácilmente del siguiente resultado: $\xrightarrow{w\,i}$ es una función estrictamente decreciente si y sólo si, para toda $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\,i})$, tenemos cualquiera de las siguientes inclusiones

$$(estr\text{-}decrec)\text{-}ind: \begin{cases} \xrightarrow{w\,i}((\leftarrow, t_w)) \subseteq (\xrightarrow{w\,i}(t_w), \rightarrow) \\ \xrightarrow{w\,i}((t_w, \rightarrow)) \subseteq (\leftarrow, \xrightarrow{w\,i}(t_w)) \end{cases}$$

Teorema 3.2.3 *Las siguientes clases de estructuras ind-funcionales para* $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ *son definibles:*
$\mathbb{K}_9 = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones totales* $\}$.
$\mathbb{K}_{10} = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones totales y constantes*$\}$
$\mathbb{K}_{11} = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones totales e inyectivas*$\}$
$\mathbb{K}_{12} = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones totales y crecientes*$\}$
$\mathbb{K}_{13} = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones totales y estrictamente crecientes*$\}$
$\mathbb{K}_{14} = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones totales y decrecientes*$\}$
$\mathbb{K}_{15} = \{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es una clase de funciones totales y estrictamente decrecientes*$\}$

Demostración:

1. Veamos que $\mathbb{K}_9$ está definida por el siguiente conjunto de fórmulas, denotado (Tot)-*ind*:

$$\{<i>(HA \wedge A \wedge GA) \to (H<i>A \wedge G<i>A) \mid i \in \mathcal{I}\}$$

Para probar este resultado, utilizamos el lema 2.2.3 que asegura que si $t_w \in T_w$ se tiene que $t_w \in Dom(\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow})$ si y sólo si se satisface la inclusión $(*_1)$ siguiente:

$$\stackrel{w\,i}{\longrightarrow}\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \stackrel{w\,i}{\longrightarrow}\big((t_w, \rightarrow)\big) \stackrel{(*_1)}{\subseteq} (\leftarrow, \stackrel{w\,i}{\longrightarrow}(\{t_w\})) \cup [\stackrel{w\,i}{\longrightarrow}(\{t_w\}), \rightarrow\,)$$

Entonces, teniendo en cuenta que trabajamos con funciones totales, tenemos que para todo $i \in \mathcal{I}$

$$\begin{array}{ll}
t_w \in h(<i>(HA \wedge A \wedge GA)) & \text{sii} \\
t_w \in h(<i>HA \cap h(<i>A) \cap h(<i>GA)) & \text{sii} \\
(\leftarrow, \stackrel{w\,i}{\longrightarrow}(t_w)) \cup \{\stackrel{w\,i}{\longrightarrow}(t_w)\} \cup (\stackrel{w\,i}{\longrightarrow}(t_w), \rightarrow) \subseteq h(A) & \text{sii} \\
(\leftarrow, \stackrel{w\,i}{\longrightarrow}(t_w)) \cup [\stackrel{w\,i}{\longrightarrow}(t_w), \rightarrow) \subseteq h(A)) &
\end{array}$$

y, por otra parte, tenemos

- $t_w \in h(G<i>A)$ si y sólo si $\stackrel{w\,i}{\longrightarrow}((t_w, \rightarrow)) \subseteq h(A)$

- $t_w \in h(H<i>A)$ si y sólo si $\stackrel{w\,i}{\longrightarrow}((\leftarrow, t_w)) \subseteq h(A)$

Ahora, basta considerar $(*_1)$ para que la demostración de la validez esté completa.

Recíprocamente, sea una estructura ind-funcional $\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \notin \mathbb{K}_9$, entonces existe $t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$ tal que

$$\stackrel{w\,i}{\longrightarrow}\big((\leftarrow, t_w)\big) \cup \stackrel{w\,i}{\longrightarrow}\big((t_w, \rightarrow)\big) \not\subseteq (\leftarrow, \stackrel{w\,i}{\longrightarrow}(\{t_w\})) \cup [\stackrel{w\,i}{\longrightarrow}(\{t_w\}), \rightarrow\,)$$

Puesto que si $\stackrel{w\,i}{\longrightarrow}(\{t_w\}) \neq \varnothing$ la unión en la derecha coincide con T_i, podemos asegurar que $\stackrel{w\,i}{\longrightarrow}(\{t_w\}) = \varnothing$. Por otra parte, como $\stackrel{w\,i}{\longrightarrow}$ es una función no vacía, existe una coordenada $t'_w \in (\leftarrow, t_w) \cup (t_w, \rightarrow)$ con imagen en T_i. Sea, $(\Sigma^{\mathfrak{I}}, h)$ un modelo ind-funcional donde $h(p) = T_i$. Entonces se tiene que $t'_w \in h(<i>(Hp \wedge p \wedge Gp))$ pero $t'_w \notin h(H<i>p \wedge G<i>p)$, pues $t_w \notin h(<i>p)$ y la demostración está completa.

Los ítemes restantes se demuestran de forma similar al caso de las funciones (no necesariamente totales) contempladas en el teorema anterior.

2. $\mathbb{K}_{10}$ está definida por el conjunto de fórmulas:

$$(Tot\text{-}Cons)\text{-}ind: \qquad \{<i>A \rightarrow (H<i>A \wedge <i>GA) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

3. $\mathbb{K}_{11}$ está definida por el siguiente conjunto de fórmulas:

$$(Tot\text{-}Iny)\text{-}ind \quad \{<i>(HA \wedge GA) \rightarrow (G<i>A \wedge H<i>A)) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

4. $\mathbb{K}_{12}$ está definida por el siguiente conjunto de fórmulas:

$$(Tot\text{-}Crec)\text{-}ind \quad \{<i>(HA \wedge A) \rightarrow H<i>A)), <i>(A \wedge GA) \rightarrow G<i>A)) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

5. $\mathbb{K}_{13}$ está definida por el siguiente conjunto de fórmulas:

$$(\mathit{Tot\text{-}Estr\text{-}Crec})\text{-}\mathit{ind} \quad \{<i>HA \to H<i>A, <i>GA \to G<i>A \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

6. $\mathbb{K}_{14}$ está definida por el siguiente conjunto de fórmulas denotado $(\mathit{Tot\text{-}Decrec})\text{-}\mathit{ind}$:

$$\{<i>(HA \wedge A) \to G<i>A)), <i>(A \wedge GA) \to H<i>A)) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

7. $\mathbb{K}_{15}$ está definida por el siguiente conjunto de fórmulas:

$$(\mathit{Tot\text{-}Estr\text{-}Decrec})\text{-}\mathit{ind} \quad \{<i>HA \to G<i>A, <i>GA \to H<i>A \ \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

3.3. Sistemas Axiomáticos para $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$

En esta sección, introducimos un sistema axiomático para tratar funciones parciales; además, definiremos diversas extensiones de dicho sistema para tratar propiedades básicas de las funciones consideradas en la sección anterior. Como analizaremos en las siguientes secciones, no todas las extensiones introducidas son completas.

3.3.1. El sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$\mathit{Parc}$

Comenzamos considerando el caso más simple, es decir un sistema axiomático para funciones parciales, denotado $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$\mathit{Parc}$. Este sistema tiene los siguientes esquemas de axiomas:

1. Los de la lógica temporal lineal proposicional $\mathcal{K}_l$ y, para cada $i \in \mathfrak{I}$ el esquema modal: $[\,i\,](A \to B) \to ([\,i\,]A \to [\,i\,]B)$ (en adelante $\mathcal{K}_i$).

2. Para cada $i \in \mathfrak{I}$, los siguientes esquemas de axiomas:

   4.1 $<i>A \to [\,i\,]A$ (**axioma de funcionalidad**)

   4.2 $(\lambda \ <i>A \wedge \lambda' \ <i>B) \to \lambda \ <i>(A \wedge (PB \vee B \vee FB))$

   (**axioma de confluencia**)

   donde:

$$\begin{cases} \lambda = \gamma_1 <j_1>\gamma_2 \ldots <j_n>\gamma_{n+1}, & n \in \mathbb{N},\ n \geq 0, \gamma_i \in \{F, P, \epsilon\},\ j_i \in \mathfrak{I} \\ \lambda' = \gamma'_1 <k_1>\gamma'_2 \ldots <k_m>\gamma'_{m+1}, & m \in \mathbb{N},\ m \geq 0, \gamma'_i \in \{F, P, \epsilon\},\ k_i \in \mathfrak{I} \end{cases}$$

   y ϵ denota la cadena vacía.

Las reglas de inferencia son las de $\mathcal{K}_l$ junto con las siguientes reglas:

Para todo $i \in \mathfrak{I}$: $\dfrac{A}{[\,i\,]A}$,

Los conceptos de *demostración* y *teorema* se definen del modo habitual.

A diferencia del operador de posibilidad $\Diamond^{\mathcal{F}}$ considerado en el capítulo anterior, la consideración de índices asegura el siguiente resultado.

Proposición 3.3.1 *El siguiente esquema es un teorema de* $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Parc:*

$(T1) \quad (<i>A \wedge <i>B) \rightarrow <i>(A \wedge B)$

Demostración:

1. $<i>A \rightarrow [\,i\,]A$ — axioma de funcionalidad
2. $(<i>A \wedge <i>B) \rightarrow ([\,i\,]A \wedge [\,i\,]B)$ — por 1 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
3. $(<i>A \wedge <i>B) \rightarrow ([\,i\,](A \wedge B) \wedge <i>A)$ — por 2 y $\mathcal{K}_i$
4. $(<i>A \wedge <i>B) \rightarrow <i>(A \wedge B)$ — por 3 y $\mathcal{K}_i$

Obsérvese que en la demostración anterior no hemos utilizado el axioma de confluencia. Además, a partir de $(T1)$ se obtiene trivialmente

$$(<i>A \wedge <i>B) \rightarrow <i>(A \wedge (PB \vee B \vee FB)) \qquad (*)$$

que es un caso particular del axioma de confluencia, sin más que hacer $n = m = 0$ y $\gamma_i = \gamma'_i = \epsilon$. En consecuencia, el sistema presentado no es minimal respecto al número de axiomas, ya que incluye como axioma al teorema $(*)$, que se deduce del resto de los axiomas. Sin embargo, hemos optado por introducirlo, de esta forma, en aras de simplificar las expresiones sintácticas.

3.3.2. Extensiones de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Parc*

Los sistemas que vamos a definir contienen todos como base el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Parc*, introducido en la sección 3.3.1.

Siguiendo el orden contemplado en las secciones anteriores, comenzamos considerando los sistemas para funciones parciales, incluyendo el sistema minimal para las funciones no totales:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}No\text{-}Tot &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (No\text{-}Tot)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Cons &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Cons)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Iny &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Iny)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Sob &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Sob)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Crec &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Crec)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Estr\text{-}Crec &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Estr\text{-}Crec)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Decrec &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Decrec)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Estr\text{-}Decrec &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Estr\text{-}Decrec)\text{-}ind
\end{aligned}$$

A continuación expondremos los sistemas básicos para funciones totales:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Tot &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Tot)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Tot\text{-}Cons &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Tot\text{-}Cons)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Tot\text{-}Iny &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Tot\text{-}Iny)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Tot\text{-}Crec &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Tot\text{-}Crec)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Tot\text{-}Estr\text{-}Crec &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Tot\text{-}Estr\text{-}Crec)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Tot\text{-}Decrec &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Tot\text{-}Decrec)\text{-}ind\\
\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Tot\text{-}Estr\text{-}Decrec &= \mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}\text{-}Parc + (Tot\text{-}Estr\text{-}Decrec)\text{-}ind
\end{aligned}$$

3.4. Completitud de sistemas para funciones parciales

En esta sección mostramos los resultados de completitud de los sistemas $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-*Parc* y $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-*No-Tot*.

Al igual que hicimos en el capítulo anterior, denotaremos por $\mathcal{MC}$ la familia de los conjuntos máximamente consistentes (en adelante conjuntos-*m.c.*) de cualquier sistema para el lenguaje $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\Im$. Comenzamos con las definiciones siguientes.

Definición 3.4.1 *Sean* $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{MC}$ *e* $i \in \Im$. *Entonces:*

(a) $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *si y sólo si* $\{A \mid GA \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2$

(b) $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_2$ *si y sólo si* $\varnothing \neq \{A \mid <i> A \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2$.

Recordamos también la definición de la relación de equivalencia $\sim_T$ dada en 2.5.8.

Definición 3.4.2 *Si* $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{MC}$, *entonces:*

$$\Gamma_1 \sim_T \Gamma_2 \quad \textit{si y sólo si} \quad \big(\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2, \ \textit{o bien}\ \Gamma_2 \prec_T \Gamma_1, \ \textit{o bien} \ \ \Gamma_1 = \Gamma_2\big)$$

Además, vamos a definir las siguientes relaciones específicas:

Definición 3.4.3 *En* $\mathcal{MC}$ *definimos la relación* $\prec_i^{\tilde{T}}$ *como sigue:*

Si $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{MC}$ *e* $i \in \Im$, *entonces* $\Gamma_1 \prec_i^{\tilde{T}} \Gamma_2$ *si y sólo si, se satisface alguna de las dos condiciones siguientes:*

- $\Gamma_1 \sim_T \Gamma_2$.
- *existen* Γ_3 *y* Γ_4 *tales que* $\Gamma_1 \sim_T \Gamma_3$, $\Gamma_3 \prec_i \Gamma_4$ *y* $\Gamma_4 \sim_T \Gamma_2$.

La siguiente figura da una idea intuitiva de la definición anterior.

Definición 3.4.4 *Definamos la relación* $\searrow$ *en* $\mathcal{MC}$ *como sigue: si* $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{MC}$, *entonces:* $\Gamma \searrow \Gamma'$ *si y sólo si existen* $n \geq 0$, $i_1, \ldots, i_n \in \Im$ *y* $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n \in \mathcal{MC}$ *tales que*

$$\Gamma = \Gamma_0 \prec_{i_1}^{\tilde{T}} \Gamma_1 \prec_{i_2}^{\tilde{T}} \Gamma_2 \prec_{i_3}^{\tilde{T}} \ldots \prec_{i_n}^{\tilde{T}} \Gamma_n = \Gamma'$$

La definición anterior se puede representar gráficamente como sigue:

3.4.1. Completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-Parc

Comenzamos enunciando el lema siguiente, estándar en las lógicas modales y temporales.

Lema 3.4.5

1. *Todo conjunto consistente de fórmulas en* $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$*-Parc se puede extender a un conjunto-m.c. en* $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$*-Parc (Lema de Lindenbaum)*
2. *Sea* $\Gamma_1 \in \mathcal{MC}$ *e* $i \in \mathfrak{I}$*, entonces tenemos:*
   (a) *Si* $FA \in \Gamma_1$*, entonces existe* $\Gamma_2 \in \mathcal{MC}$ *tal que* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $A \in \Gamma_2$.
   (b) *Si* $PA \in \Gamma_1$*, entonces existe* $\Gamma_2 \in \mathcal{MC}$ *tal que* $\Gamma_2 \prec_T \Gamma_1$ *y* $A \in \Gamma_2$.
   (c) *Si* $<\!i\!>A \in \Gamma_1$*, entonces existe* $\Gamma_2 \in \mathcal{MC}$ *tal que* $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_2$ *y* $A \in \Gamma_2$.
3. *Sea* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathcal{MC}$*. Si* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $\Gamma_2 \prec_T \Gamma_3$*, entonces* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_3$.
4. *Sea* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathcal{MC}$*. Entonces tenemos:*
   (a) *Si* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_3$*, entonces* $\Gamma_2 \sim_T \Gamma_3$.
   (b) *Si* $\Gamma_2 \prec_T \Gamma_1$ *y* $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_1$*, entonces* $\Gamma_2 \sim_T \Gamma_3$.
   (c) $\Gamma_1 \sim_T \Gamma_2$ *si y sólo si existe* $\gamma \in \{F, P, \epsilon\}$ *tal que* $\{\gamma A \mid A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_1$.

Los siguientes lemas son específicos y tendrán carácter general en todos los sistemas considerados en el resto del capítulo.

Lema 3.4.6 *Sea* $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{MC}$ *e* $i \in \mathfrak{I}$*. Entonces:*

1. $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_2$ *si y sólo si se satisface la siguiente condición:*

$$(i) \qquad \{A \mid [\,i\,]A \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2$$

   o, equivalentemente:

$$(ii) \qquad \{<\!i\!>A \mid A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_1$$

2. $\Gamma_1 \prec_i^{\sim T} \Gamma_2$ *si y sólo si se satisface una de las dos condiciones siguientes:*

   (i) *existe* $\gamma \in \{F, P, \epsilon\}$ *tal que* $\{\gamma A \mid A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_1$, *o bien*

   (ii) *existen* $\gamma_1, \gamma_2 \in \{F, P, \epsilon\}$ *tales que* $\{\gamma_1 <i> \gamma_2 A \mid A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_1$.

Demostración:

Demostramos $1(i)$, es decir, la equivalencia de

$$\{A \mid [\,i\,]A \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2 \quad \text{y} \quad \varnothing \neq \{A \mid <i> A \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2$$

Supongamos que $\{A \mid [\,i\,]A \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2$, entonces si $\varnothing = \{A \mid <i> A \in \Gamma_1\}$ se tiene que $\neg <i> \top \in \Gamma_1$, es decir, $[\,i\,]\bot \in \Gamma_1$ y, en consecuencia, $\bot \in \Gamma_2$, lo cual es una contradición. Por lo tanto, $\varnothing \neq \{A \mid <i> A \in \Gamma_1\}$.

Por otro lado, si $<i> A \in \Gamma_1$, entonces, por el axioma de funcionalidad, se tiene que $[\,i\,]A \in \Gamma_1$ y, por tanto, según nuestra hipótesis, $A \in \Gamma_2$.

Inversamente, supongamos que $\varnothing \neq \{A \mid <i> A \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2$, $[\,i\,]A \in \Gamma_1$ y $A \notin \Gamma_2$. Entonces, claramente, $<i> A \notin \Gamma_1$, con lo cual $[\,i\,]\neg A \in \Gamma_1$ y, en consecuencia, $[\,i\,]\bot \in \Gamma_1$, lo cual contradice que $\varnothing \neq \{A \mid <i> A \in \Gamma_1\}$. Por tanto, se tiene que $\{A \mid [\,i\,]A \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2$.

Demostramos $1(ii)$. Para ello, teniendo en cuenta $1(i)$, bastará demostrar la equivalencia de $\{A \mid [\,i\,]A \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2$ y $\{<i> A \mid A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_1$ la cual es estándar en lógica modal.

Por último, 2 es consecuencia inmediata de $1(ii)$ de este lema y de *4(c)* del lema anterior.

Ahora tenemos como corolario inmediato el siguiente resultado:

Corolario 3.4.7 *Sean* Γ_1 *y* Γ_2 *mc-conjuntos. Entonces* $\Gamma_1 \searrow \Gamma_2$ *si y sólo si se satisface una de las dos condiciones siguientes:*

a) *existe* $\gamma \in \{F, P, \epsilon\}$ *tal que* $\{\gamma A \mid A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_1$.

b) *existen* $\gamma_1, \ldots \gamma_{n+1} \in \{F, P, \epsilon\}$ *e* $i_1, \ldots, i_n \in \mathfrak{I}$, *con* $n \geq 1$, *tales que*

$$\{\gamma_1 <i_1> \gamma_2 \ldots <i_n> \gamma_{n+1} A \mid A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_1$$

Abordamos ya un resultado fundamental en este capítulo.

Teorema 3.4.8 (Teorema del Diamante) *Sean* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathcal{MC}$ *tales que:*

1. $\Gamma_1 \searrow \Gamma_2$ *y* $\Gamma_1 \searrow \Gamma_3$.

2. *existen* $i \in \mathfrak{I}$ *y* $\Omega_1 \in \mathcal{MC}$ *tales que* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{a.1)}\ \Gamma_2 \prec_i \Omega_1 \\ \textit{a.2)}\ \{A \mid <i> A \in \Gamma_3\} \neq \varnothing \end{array} \right.$

Entonces, se tiene que existe $\Gamma_4 \in \mathcal{MC}$ *tal que* $\Gamma_2 \searrow \Gamma_4$ *y* $\Gamma_3 \searrow \Gamma_4$. *Más concretamente, existe* $\Omega_2 \in \mathcal{MC}$ *tal que* $\Gamma_3 \prec_i \Omega_2$ *y* $\Omega_2 \sim_T \Omega_1$.

Demostración:
Para demostrar que existe un conjunto-*m.c.* Ω_2 con las dos propiedades deseadas, bastará demostrar que se cumple alguna de las condiciones siguientes:

a) $\{A \mid <i> A \in \Gamma_3\} \subseteq \Omega_1$.

b) $\{A \mid <i> A \in \Gamma_3\} \cup \{A \mid GA \in \Omega_1\}$ es consistente.

c) $\{A \mid <i> A \in \Gamma_3\} \cup \{A \mid HA \in \Omega_1\}$ es consistente.

En efecto, si aseguramos que se satisface la condición a), por la parte 2 de la hipótesis, basta tomar $\Omega_1 = \Omega_2$. Si aseguramos que se satisface b), el lema de Lindenbaum y las definiciones de $\prec_i$ y $\prec_T$, garantizan que existe un conjunto-*m.c.* Ω_2 tal que $\Gamma_3 \prec_i \Omega_2$ y $\Omega_1 \prec_T \Omega_2$. Análogamente, si aseguramos que se satisface c), existe un conjunto-*m.c.* Ω_2, tal que $\Gamma_3 \prec_i \Omega_2$ y $\Omega_2 \prec_T \Omega_1$.

Ahora, completamos la demostración razonando por reducción al absurdo, es decir, supongamos que no se cumple ninguna de las tres condiciones a), b), c). Por no cumplirse la condición a), existe $A \notin \Omega_1$ tal que $<i> A \in \Gamma_3$. Ahora, por no cumplirse la condición b), existen *fbfs* $B_1, \ldots B_{r_1}$ y $C_1, \ldots C_{r_2}$ tales que:

$$\begin{cases} <i> B_1, \ldots <i> B_{r_1} \in \Gamma_3 \\ GC_1, \ldots GC_{r_2} \in \Omega_1 \\ \vdash \neg(B \wedge C), \text{ donde } B = B_1 \wedge \ldots \wedge B_{r_1} \text{ y } C = C_1 \wedge \ldots \wedge C_{r_2} \end{cases}$$

Análogamente, por no cumplirse la condición c), existen *fbfs* $D_1, \ldots D_{r_3}$ y $E_1, \ldots E_{r_4}$ tales que:

$$\begin{cases} <i> D_1, \ldots <i> D_{r_3} \in \Gamma_3 \\ HE_1, \ldots HE_{r_4} \in \Omega_1 \\ \vdash \neg(D \wedge E), \text{ donde } D = D_1 \wedge \ldots \wedge D_{r_3} \text{ y } E = E_1 \wedge \ldots \wedge E_{r_4} \end{cases}$$

Ahora, es evidente que $\neg A \wedge GC \wedge HE \in \Omega_1$ y, teniendo en cuenta $T1$ (es decir, $\vdash (<i> A \wedge <i> B) \rightarrow <i> (A \wedge B))$ y la regla derivada ($RD <i>$) (es decir, $(A \rightarrow B) \vdash (<i> A \rightarrow <i> B)$), podemos asegurar que $<i> (A \wedge \neg C \wedge \neg E) \in \Gamma_3$. Dado que $\Gamma_1 \searrow \Gamma_3$, por el corolario 3.4.7, se satisface una de las dos condiciones siguientes:

a) existe $\gamma \in \{F, P, \epsilon\}$ tal que $\{\gamma A \mid A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_1$.

b) existen $\gamma_1, \ldots \gamma_{n+1} \in \{F, P, \epsilon\}$ e $i_1, \ldots, i_n \in \mathfrak{I}$, con $n \geq 1$, tales que

$$\{\gamma_1 <i_1> \gamma_2 \ldots <i_n> \gamma_{n+1} A \mid A \in \Gamma_2\} \subseteq \Gamma_1$$

Por lo tanto, existe $\lambda = \gamma$ o bien existe $\lambda = \gamma_1 <i_1> \gamma_2 \ldots <i_n> \gamma_{n+1}$ tal que:

$$\lambda <i> (A \wedge \neg C \wedge \neg E) \in \Gamma_1 \qquad (\dagger_1)$$

Por otra parte, puesto que $\Gamma_2 \prec_i \Omega_1$, tenemos $<\!i\!>(\neg A \wedge GC \wedge HE) \in \Gamma_2$ y puesto que $\Gamma_1 \searrow \Gamma_2$, repitiendo el razonamiento, de nuevo por el corolario 3.4.7, existe $\lambda' = \gamma'$ o bien existe $\lambda' = \gamma_1' <\!i_1'\!> \gamma_2' \ldots <\!i_m'\!> \gamma_{m+1}'$ tal que:

$$\lambda' <\!i\!>(\neg A \wedge GC \wedge HE) \in \Gamma_1 \qquad (\dagger_2)$$

Ahora, por $(\dagger_1)$, $(\dagger_2)$ y el axioma de confluencia, se tiene que:

$$\lambda <\!i\!>(\alpha \wedge (P\beta \vee \beta \vee F\beta)) \in \Gamma_1$$

siendo $\alpha = A \wedge \neg C \wedge \neg E$ y $\beta = \neg A \wedge GC \wedge HE$.

Pero $\alpha \wedge (P\beta \vee \beta \vee F\beta) \equiv \bot$, con lo cual, llegamos a la contradicción deseada.

Definición 3.4.9 *Sea $\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura ind-funcional para un lenguaje $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$. Una* **traza** *de $\Sigma^{\mathfrak{I}}$ es una función*

$$\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} : \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} \longrightarrow 2^{L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}\text{-}\mathfrak{I}}$$

tal que para cada $t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$, se tiene que $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w) \in \mathcal{MC}$.

Definición 3.4.10 *Sea $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$ una traza de una estructura ind-funcional $\Sigma^{\mathfrak{I}}$. $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$ se dice que es:*

temporalmente coherente *si, para todo $t_w, t_w' \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$:*

$$si \;\; t_w' \in (t_w, \rightarrow) \;\; entonces \;\; \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w) \prec_T \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w').$$

modalmente coherente *si, para todo $t_w, t_i \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$ con $i \in W \cap \mathfrak{I}$:*

$$si \;\; t_i = \xrightarrow{w\,i} (t_w), \;\; entonces \;\; \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w) \prec_i \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_i)$$

coherente *si es temporalmente coherente y modalmente coherente.*

profética *si es temporalmente coherente y, además, para toda $A \in L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ y toda coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$:*

(1) *si $FA \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w)$, entonces existe $t_w' \in (t_w, \rightarrow)$ tal que $A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w')$*

histórica *si es temporalmente coherente y, además, para toda $A \in L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ y toda coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$:*

(2) *si $PA \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w)$, entonces existe $t_w' \in (\leftarrow, t_w)$ tal que $A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w')$*

ind-posibilista *si es modalmente coherente y, además, para toda $A \in L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$, toda coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$ y todo $i \in W \cap \mathfrak{I}$:*

(3) *si $<\!i\!>A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w)$, entonces existe $t_i = \xrightarrow{w\,i} (t_w)$ tal que $A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_i)$*

El condicional (1) (respectivamente, (2) y (3)) se dice que es un **condicional profético** *(respectivamente,* **histórico** *o* **ind-posibilista) para $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$ con respecto a** *FA, (***respectivamente***, PA o $<\!i\!>A$)* **y** *t_w.*[6]

[6] En el resto del trabajo, cuando usemos la expresión “condicional para $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$”, el contexto determinará a qué tipo de condicional nos referimos.

Definición 3.4.11 *Una traza ind-funcional, $\Phi_{\Sigma^{\Im}}$, se dice* **plena** *si es profética, histórica e ind-posibilista.*

Definición 3.4.12 *Sea $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\Im$ un lenguaje ind-funcional. Consideremos el par*

$$U^{\Im} = (W_{U^{\Im}}, T_{U^{\Im}})$$

donde:

- $W_{U^{\Im}}$ *es un conjunto infinito numerable tal que $\Im \subset W_{U^{\Im}}$.* [7]
- $T_{U^{\Im}} = \bigcup_{w \in W_{U^{\Im}}} T_{U^{\Im}_w}$, *tal que:*
  - *Para cada $w \in W_{U^{\Im}}$, se tiene que $T_{U^{\Im}_w}$ es un conjunto infinito numerable;*
  - *si $w \neq w'$, entonces $T_{U^{\Im}_w} \cap T_{U^{\Im}_{w'}} = \varnothing$.*

Consideremos una clase de estructuras ind-funcionales, denotada $\Xi_{U^{\Im}}$, en la que para cada $(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \in \Xi_{U^{\Im}}$ se tiene que:

- *W es un subconjunto finito no vacío de $W_{U^{\Im}}$.*
- *$\mathcal{T} = \{(T_w, <_w) \mid w \in W\}$, donde T_w es un subconjunto finito no vacío de $T_{U^{\Im}_w}$.*

Entonces, dadas $\Sigma^{\Im}_1 = (W_1, \mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ y $\Sigma^{\Im}_2 = (W_2, \mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2) \in \Xi_{U^{\Im}}$, diremos que $\Sigma^{\Im}_2$ es una **extensión** *de $\Sigma^{\Im}_1$ si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

- *$W_1 \subseteq W_2$;*
- *$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, o bien, para cada $(T_w, <_w) \in \mathcal{T}_1$, el conjunto $\mathcal{T}_2$ contiene una extensión de $(T_w, <_w) \in \mathcal{T}_1$;*
- *$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, o bien, para cada $\xrightarrow{w\,w'} \in \mathcal{F}_1$, el conjunto $\mathcal{F}_2$ contiene una función que es una extensión de $\xrightarrow{w\,w'}$.*

Llamaremos a $\Xi_{U^{\Im}}$ **la clase de estructuras ind-funcionales finitas generada por** *$U^{\Im}$.*

Definición 3.4.13
Sea $\Xi_{U^{\Im}}$ la clase de estructuras ind-funcionales finitas generada por $U^{\Im} = (W_{U^{\Im}}, T_{U^{\Im}})$ y sea $\Phi_{\Sigma^{\Im}}$ una traza de una estructura ind-funcional $\Sigma^{\Im} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \in \Xi_{U^{\Im}}$.

I) *Dado el condicional profético:*

$$(1) \qquad \text{si } FA \in \Phi_{\Sigma^{\Im}}(t_w), \text{ entonces existe } t'_w \in (t_w, \rightarrow) \text{ tal que } A \in \Phi_{\Sigma^{\Im}}(t'_w)$$

Decimos que el condicional (1) está **activo**, *si se satisface su antecedente pero no su consecuente, esto es, si $t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\Im}}$ y $FA \in \Phi_{\Sigma^{\Im}}(t_w)$, pero no existe $t'_w \in (t_w, \rightarrow)$ tal que $A \in \Phi_{\Sigma^{\Im}}(t'_w)$.*

Decimos que el condicional (1) está **agotado**, *si se verifica su consecuente, es decir, existe $t'_w \in (t_w, \rightarrow)$ tal que $A \in \Phi_{\Sigma^{\Im}}(t'_w)$.*

Análogamente,

[7] Como veremos más adelante, necesitamos que esta inclusión sea estricta.

II) *Dado el condicional histórico:*

$$(2) \qquad si\ \ PA \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w),\ entonces\ existe\ \ t'_w \in (\leftarrow, t_w)\ tal\ que\ A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t'_w)$$

Decimos que el condicional (2) está **activo***, si se verifica que* $t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$ *y* $PA \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w)$*, pero no existe* $t'_w \in (\leftarrow, t_w)$ *tal que* $A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t'_w)$*.*

Decimos que (2) está **agotado***, si existe una coordenada* $t'_w \in (\leftarrow, t_w)$ *tal que* $A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t'_w)$*.*

III) *Dado el condicional ind-posibilista:*

$$(3) \qquad si\ \ <i>A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w),\ \ existe\ t_i \overset{w\ i}{=\!\!\longrightarrow} (t_w)\ \ tal\ que\ A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_i)$$

Decimos que el condicional (3) está **activo***, si se verifica que* $t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$ *y* $<i>A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w)$*, pero no existe* $t_i \overset{w\ i}{=\!\!\longrightarrow} (t_w)$ *tal que* $A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_i)$*.*

Decimos que el condicional (3) está **agotado***, si existe* $t_i \overset{w\ i}{=\!\!\longrightarrow} (t_w)$ *tal que* $A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_i)$*.*

A continuación enunciamos el correspondiente lema de la traza, cuya demostración es similar a la presentada en el capítulo anterior.

Lema 3.4.14 (Lema de la traza) *Sea* $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$ *una traza plena de una estructura ind-funcional* $\Sigma^{\mathfrak{I}}$*. Sea* h *una función de interpretación que asigna a cada variable proposicional,* p*, el conjunto*

$$h(p) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} \mid p \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w)\}$$

Entonces, para toda fórmula A*, se tiene que*

$$h(A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}} \mid A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w)\}$$

Para la demostración del teorema de completitud, construiremos, para cada fórmula consistente A, una estructura ind-funcional $\Sigma^{\mathfrak{I}}$ a partir de la clase de estructuras funcionales finitas generada por $U^{\mathfrak{I}} = (W_{U^{\mathfrak{I}}}, T_{U^{\mathfrak{I}}})$, a la que hemos denotado $\Xi_{U^{\mathfrak{I}}}$. Asimismo, definiremos una traza plena, $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$, tal que $A \in \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}(t_w)$ para alguna coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$.

Con este fin definimos:

- una enumeración de los elementos de $W_{U^{\mathfrak{I}}}$:

$$W_{U^{\mathfrak{I}}} = \{w_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- una enumeración de los elementos de $T_{U^{\mathfrak{I}}} = \bigcup_{w \in W_{U^{\mathfrak{I}}}} T_{U^{\mathfrak{I}}_w}$:

$$T_{U^{\mathfrak{I}}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_{U^{\mathfrak{I}}_{w_n}}; \quad T_{U^{\mathfrak{I}}_{w_n}} = \{t_{(n,m)} \mid m \in \mathbb{N}\}$$

donde, como es habitual, consideraremos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el orden lexicográfico.

- una enumeración de las fórmulas de $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$\mathfrak{I}$:

$$A_0, A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$$

De este modo, podemos asociar un número de código para cada condicional profético, histórico o ind-posibilista) de forma análoga a la considerada en la sección 2.5.1.

Ahora, dada una fórmula consistente, A, la construcción de $\Sigma^{\mathfrak{I}}$ y $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$ se realiza etapa por etapa como sigue:

La construcción comienza con una estructura ind-funcional finita, que llamaremos $\Sigma^{\mathfrak{I}}_0 = (W_0, \mathcal{T}_0, \mathcal{F}_0) \in \Xi_{U^{\mathfrak{I}}}$, con:

$$W_0 = \{w_0\},\ \text{donde } w_0 \in W_{U^{\mathfrak{I}}}\text{-}\mathfrak{I}\ ^8; \mathcal{T}_0 = \{(\{t_{(0,0)}\}, \varnothing)\} \text{ y } \mathcal{F}_0 = \varnothing$$

Asimismo, partiremos de una traza $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_0}$, tal que $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_0}(t_{(0,0)}) = \Gamma_0$, siendo Γ_0 un conjunto-*m.c.* al que pertenece A.

Supongamos que se han definido $\Sigma^{\mathfrak{I}}_n = (W_n, \mathcal{T}_n, \mathcal{F}_n)$ y $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}$. En ese caso $\Sigma^{\mathfrak{I}}_{n+1}$ y $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_{n+1}}$ se definen como sigue:

- Si ningún condicional está activo, entonces $\Sigma^{\mathfrak{I}}_{n+1} = \Sigma^{\mathfrak{I}}_n$, $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_{n+1}} = \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}$ y la construcción ha terminado.
- En caso contrario, es decir, si existe algún condicional para $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}$ que está activo, entonces elegimos el condicional activo (α) con el menor número de código y el *lema del agotamiento*, formulado posteriormente, nos asegurará que existe una extensión finita $\Sigma^{\mathfrak{I}}_{n+1} = (W_{n+1}, \mathcal{T}_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ de $\Sigma^{\mathfrak{I}}_n$ y una extensión $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_{n+1}}$ de $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}$, tal que el condicional (α) para $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_{n+1}}$ está agotado.

El resultado de esta construcción, es una cadena numerable de estructuras ind-funcionales finitas

$$(W_0, \mathcal{T}_0, \mathcal{F}_0), (W_1, \mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1), ..., (W_n, \mathcal{T}_n, \mathcal{F}_n), ...,$$

cuya unión es precisamente la estructura ind-funcional $\Sigma^{\mathfrak{I}}$.

Igualmente, obtendremos una sucesión numerable de trazas

$$\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_0}, \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_1}, \ldots, \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}, \ldots$$

cuya unión es $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$.

Cada estructura ind-funcional finita de la secuencia anterior satisface la condición de linealidad de los flujos temporales, las funciones que contiene son parciales y cada traza es coherente pero, en general, no está asegurado que la traza correspondiente sea profética, histórica o ind-posibilista. Sin embargo, probaremos que, en efecto, la traza $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}}$ posee todas esas propiedades. Finalmente, el lema de la traza nos asegurará que A se satisface en $\Sigma^{\mathfrak{I}}$.

[8]Podemos elegir $w_0 \notin \mathfrak{I}$ por haber exigido en la definición 3.4.12 que $\mathfrak{I} \subset W_{U^{\mathfrak{I}}}$.

Lema 3.4.15 (Lema del agotamiento para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Parc*) *Sea $\Xi_{U^{\mathfrak{I}}}$ la clase de estructuras ind-funcionales finitas generada por $U^{\mathfrak{I}} = (W_{U^{\mathfrak{I}}}, T_{U^{\mathfrak{I}}})$; sea $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}$ una traza coherente de una estructura ind-funcional $\Sigma_n^{\mathfrak{I}} = (W_n, \mathcal{T}_n, \mathcal{F}_n) \in \Xi_{U^{\mathfrak{I}}}$ y sea (α) un condicional profético (histórico o ind-posibilista) para $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}$ que está activo. Entonces existe una traza $\Phi_{\Sigma_{n+1}^{\mathfrak{I}}}$, extensión de $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}$, tal que (α) es un condicional para $\Phi_{\Sigma_{n+1}^{\mathfrak{I}}}$ que está agotado.*

Demostración:
A lo largo de la demostración, identificaremos a las trazas con sus grafos.

Consideraremos únicamente el caso de los condicionales ind-posibilistas. Para el resto de los condicionales la demostración es análoga a la demostración del lema 2.5.19.

Sea $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}$ una traza coherente de $\Sigma_n^{\mathfrak{I}} = (W_n, \mathcal{T}_n, \mathcal{F}_n) \in \Xi_{U^{\mathfrak{I}}}$. Supongamos $i \in \mathfrak{I}$ y que está activo el condicional ind-posibilista para $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}$:

$$\text{si } {<}i{>} A \in \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w), \text{ entonces existe } t_i = \xrightarrow{w\,i} (t_w) \text{ tal que } A \in \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$$

Por tanto, se tiene que $<i> A \in \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w)$, pero no existe $t_i = \xrightarrow{w\,i} (t_w)$ tal que $A \in \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$. Ahora hemos de considerar dos casos:

I) $i \notin W_n$. Entonces, por el apartado 2 ítem (c) del lema 3.4.5, existe un conjunto $\Gamma \in \mathcal{MC}$, tal que $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w) \prec_i \Gamma$ y $A \in \Gamma$. Ahora necesitamos un nuevo flujo de tiempo etiquetado con i, T_i, lo cual requiere seleccionar una nueva coordenada t_i asociada a Γ de forma que $t_i = \xrightarrow{w\,i} (t_w)$. Para ello, procedemos como sigue:

- $W_{n+1} = W_n \cup \{i\}$
- $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{(T_i, <_i)\}$, donde $(T_i, <_i) = (\{t_i\}, \varnothing)$
- $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\xrightarrow{w\,i}\}$, donde $\xrightarrow{w\,i} = \{(t_w, t_i)\}$
- $\Phi_{\Sigma_{n+1}^{\mathfrak{I}}} = \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}} \cup \{(t_i, \Gamma)\}$

Es inmediato que se preserva la linealidad y que $\Phi_{\Sigma_{n+1}^{\mathfrak{I}}}$ es coherente.

En la siguiente figura, representamos de forma intuitiva la extensión anterior.

II) $i \in W_n$. En este caso, debemos considerar las siguientes situaciones:

(II.1) $\xrightarrow{w\,i}$ está definida en $\mathcal{F}_n$.

(II.2) $\xrightarrow{w\,i}$ no está definida en $\mathcal{F}_n$.

Demostramos (II.1): Sea t_i el mínimo[9] de $\xrightarrow{w\,i} (T_i)$ y sea t'_w una coordenada tal que $t_i = \xrightarrow{w\,i} (t'_w)$.

Tenemos, pues, que

$$\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_w) \prec_i \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_i) \qquad (\dagger_1)$$

y, dado que $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w) \sim_T \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_w)$, obtenemos que $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w) \searrow \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_w)$. Por otra parte , es evidente que $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w) \searrow \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w)$. Por tanto, teniendo en cuenta $(\dagger_1)$ y aplicando el Teorema del Diamante (teorema 3.4.8), llegamos a que existe al menos un conjunto-$m.c.$, Γ, tal que

$$\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w) \prec_i \Gamma \quad \text{y} \quad \Gamma \sim_T \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_i) \qquad (\dagger_2)$$

lo cual significa que se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

(i) $\Gamma = \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_i)$;

(ii) $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_i) \prec_T \Gamma$;

(iii) $\Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_i)$.

En todos estos casos tenemos que $W_{n+1} = W_n$. Ahora,

– si se cumple el item (i), resulta:

$\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n$; $\Phi_{\Sigma_{n+1}^{\Im}} = \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}$

$\mathcal{F}_{n+1} = (\mathcal{F}_n - \{\xrightarrow{w\,i}\}) \cup \{\xrightarrow{w\,i}{}'\}$, donde $\xrightarrow{w\,i}{}' = \xrightarrow{w\,i} \cup \{(t_w, t_i)\}$

$\Phi_{\Sigma_{n+1}^{\Im}} = \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}$

Es evidente que la linealidad se preserva y que $\Phi_{\Sigma_{n+1}^{\Im}}$ es coherente.

– Si se cumple el item (ii), tenemos que considerar el número de sucesores de t_i en T_i:

(ii.a) si el número de sucesores de t_i en T_i es cero, entonces seleccionamos una coordenada $t'_i \in T_{U_i^{\Im}} - \mathcal{C}oord_{\Sigma_n^{\Im}}$ y la asociamos a Γ, de modo que tenemos:

- $\mathcal{T}_{n+1} = (\mathcal{T}_n - \{(T_i, <_i)\}) \cup \{(T'_i, <'_i)\}$, donde
  - $T'_i = T_i \cup \{t'_i\}$
  - $<'_i = <_i \cup \{(t_i, t'_i)\} \cup \{(t^*_i, t'_i) \mid t^*_i <_i t_i\}$
- $\mathcal{F}_{n+1} = (\mathcal{F}_n - \{\xrightarrow{w\,i}\}) \cup \{\xrightarrow{w\,i}{}'\}$, donde:
  - $\xrightarrow{w\,i}{}' = \xrightarrow{w\,i} \cup \{(t_w, t'_i)\}$ (*)
  - $\Phi_{\Sigma_{n+1}^{\Im}} = \Phi_{\Sigma_n^{\Im}} \cup \{(t'_i, \Gamma)\}$ (**)

[9] Podríamos considerar cualquier coordenada. Nuestra elección del mínimo se debe únicamente a razones de transparencia en la construcción.

Claramente, la linealidad se preserva y el ítem 3 del lema 3.4.5 completa la justificación de la coherencia de $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_{n+1}}$.

(ii.b) Por otro lado, si el número de sucesores de t_i en T_i es $s > 0$, entonces consideramos el sucesor inmediato de t_i, digamos t_i^1. Ahora, puesto que $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}(t_i) \prec_T \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}(t_i^1)$, por el item 4 (a) del lema 3.4.5, obtenemos al menos una de las siguientes condiciones:

(ii.b.1) $\Gamma = \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}(t_i^1)$

(ii.b.2) $\Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}(t_i^1)$

(ii.b.3) $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}(t_i^1) \prec_T \Gamma$

Para el caso (ii.b.1) el razonamiento es el mismo que para el caso (i), sin más que sustituir t_i por t_i^1.

El caso (ii.b.2) da lugar a que

$$\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}(t_i) \prec_T \Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}(t_i^1)$$

Entonces seleccionamos una coordenada $t_i' \in T_{U_i^{\mathfrak{I}}} - \mathcal{C}oord_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_n}$ y la asociamos a Γ. Por tanto:

- $\mathcal{T}_{n+1} = (\mathcal{T}_n - \{(T_i, <_i)\}) \cup \{(T_i', <_i')\}$, donde
  - $T_i' = T_i \cup \{t_i'\}$
  - $<_i' = <_i \cup \{(t_i, t_i'), (t_i', t_i^1)\} \cup \{(t_i^*, t_i') \mid t_i^* <_i t_i\} \cup \{(t_i', t_i^*) \mid t_i^1 <_i t_i^*\}$
- $\mathcal{F}_{n+1}$ y $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_{n+1}}$ se definen igual que en (*) y en (**), respectivamente.

De nuevo se preserva la linealidad de los órdenes temporales así como la coherencia de la nueva traza.

En el caso (ii.b.3) consideramos el sucesor inmediato de t_i^1, a saber, t_i^2, y procedemos de una manera similar.

Repitiendo esta operación a lo sumo s veces, determinamos la imagen de t_w asociando a la misma un conjunto-$m.c.$ y preservando la linealidad y la coherencia.

Finalmente, el caso (iii) es análogo al caso (ii), razonando ahora con los antecesores de t_i en T_i.

La figura siguiente resume la extensión realizada en el apartado (II.1).

Consideremos el caso (II.2), es decir, $\xrightarrow{w\,i}$ no está definida en $\mathcal{F}_n$.

Esto significa (dada la construcción de $\Sigma_n^{\mathfrak{I}}$, al habernos asegurado que cada flujo creado con una etiqueta de $\mathfrak{I}$ proviene de agotar un condicional ind-posibilista) que habrá algún flujo temporal, $T_{w'}$, con $w' \neq w$ y $\xrightarrow{w'\,i} \in \mathcal{F}_n$. Sea t_i el mínimo de $\xrightarrow{w'\,i} (T_{w'})$ y sea $t_{w'}$ tal que $\xrightarrow{w'\,i} (t_{w'}) = t_i$.

Así, $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_{w'}) \prec_i \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$. Ahora, de nuevo por la construcción de $\Sigma_n^{\mathfrak{I}}$, tenemos tres subcasos:

(II.2.1) $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w) \searrow \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_{w'})$

(II.2.2) $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_{w'}) \searrow \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w)$

(II.2.3) existe un flujo $T_{w''}$, con $w'' \neq w$ y $w'' \neq w'$, y existe $t_{w''} \in T_{w''}$ tal que:

$$\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_{w''}) \searrow \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w) \text{ y } \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_{w''}) \searrow \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_{w'})$$

En el caso (II.2.1), dado que $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w) \searrow \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w)$, por el Teorema del Diamante, existe un conjunto-*m.c.* Γ tal que $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w) \prec_i \Gamma$ y $\Gamma \sim_T \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$.

Así pues, podemos observar, de nuevo, que se cumple al menos una de las tres situaciones referidas en el parágrafo (II.1):

(i) $\Gamma = \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$;

(ii) $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i) \prec_T \Gamma$;

(iii) $\Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$.

y el razonamiento discurre de forma similar. [10]

En el caso (II.2.2), puesto que $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_{w'}) \searrow \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_{w'})$, el Teorema del Diamante nos asegura que existe un conjunto-*m.c.* Γ tal que $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w) \prec_i \Gamma$ y $\Gamma \sim_T \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$. Por lo tanto, llegamos a la misma situación que en los casos previos (i), (ii) y (iii) y podemos realizar el mismo razonamiento.

Por último, en el caso (II.2.3), de nuevo el Teorema del Diamante asegura la existencia de un conjunto-*m.c.* Γ tal que

$$\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w) \prec_i \Gamma \quad \text{ y } \quad \Gamma \sim_T \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$$

repitiendose el mismo razonamiento.

[10]Es suficiente considerar, en este caso, que $\xrightarrow{w\,i} \notin \mathcal{F}_n$ y, por tanto, en las extensiones de $\mathcal{F}_n$ para (i), (ii) y (iii), obtendremos que $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\xrightarrow{w\,i}\}$, siendo concretamente

$$\xrightarrow{w\,i} = \{(t_w, t_i)\}$$

en el subcaso (i). Respecto de los subcasos (ii) y (iii), obtendremos, respectivamente, que $\xrightarrow{w\,i} (t_w)$ se sitúa a la derecha o izquierda de t_i.

La siguiente figura recoge lo realizado en (II.2).

Podemos enunciar ahora el siguiente teorema:

Teorema 3.4.16 (Teorema de Completitud para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Parc*)
Si una fbf $A \in L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ *es válida (en la clase de todas las estructuras ind-funcionales), entonces* A *es un teorema de* $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Parc.*

3.4.2. Completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$No$-$Tot$

Para probar la completitud de este sistema necesitamos, además de los resultados utilizados para la prueba en el caso del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Parc*, el siguiente lema específico.

Lema 3.4.17 *Sea* Γ_1 *un conjunto-m.c. e* $i \in \mathfrak{I}$*, entonces existe* $\Gamma_2 \in \mathcal{MC}$*, tal que* $\Gamma_1 \sim_T \Gamma_2$ *y* $[\,i\,]\bot \in \Gamma_2$.

Demostración:

Obviamente, $P[\,i\,]\bot \vee [\,i\,]\bot \vee F[\,i\,]\bot \in \Gamma_1$ (por ser (No-Tot)-*ind* un axioma del sistema). Si $[\,i\,]\bot \in \Gamma_1$ el resultado es cierto. Si $F[\,i\,]\bot \in \Gamma$, basta considerar el ítem *2(a)* del lema 3.4.5. Análogamente, si $P[\,i\,]\bot \in \Gamma$, el ítem *2(b)* del mismo lema asegura el resultado.

El lema del agotamiento para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$No$-$Tot$ es claramente el mismo que para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Parc*. Sin embargo, es preciso advertir que no está garantizado que cada estructura finita en la construcción de la estructura final cumpla que toda función sea no total. Ahora bien, la consideración de los elementos de la disyunción en el axioma (No-Tot)-*ind* y el modo de construcción para el agotamiento de los condicionales (histórico y profético), garantiza que para cada estructura finita $\Sigma^{\mathfrak{I}}_n$ en la que exista una función total existe una estructura, $\Sigma^{\mathfrak{I}}_{n+1}$, que extiende $\Sigma^{\mathfrak{I}}_n$, en la cual hay una extensión de dicha función que no es total.

Podemos pues afirmar el resultado siguiente.

Teorema 3.4.18 (Teorema de Completitud para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$No$-$Tot$)
Si una fbf $A \in L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ es válida en la clase de estructuras ind-funcionales

$$\{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase de funciones no totales } \}$$

entonces A es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-No-Tot.

3.5. Completitud de sistemas para funciones totales

En esta sección estudiaremos la completitud de sistemas para funciones totales comenzando por el sistema minimal para tratar dicho tipo de funciones, denotado $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Tot$.

3.5.1. Completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Tot$

Para probar la completitud de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Tot$ necesitamos, además de los resultados utilizados anteriormente, el siguiente teorema y el siguiente lema, específicos de este sistema.

Teorema 3.5.1
Todas las fórmulas del siguiente conjunto son teoremas de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Tot$:

$$\{(P{<}i{>}A \vee F{<}i{>}A) \rightarrow {<}i{>}(PA \vee A \vee FA) \mid i \in \mathcal{I}\}$$

Demostración:

Por comodidad en el desarrollo de este apartado, vamos a denotar mediante α a la fórmula $H\neg A \wedge \neg A \wedge G\neg A$.

1. ${<}i{>}(H\neg\alpha \wedge \neg\alpha \wedge G\neg\alpha) \rightarrow H{<}i{>}\neg\alpha$	por (Tot)-ind y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
2. $F{<}i{>}(H\neg\alpha \wedge \neg\alpha \wedge G\neg\alpha) \rightarrow {<}i{>}\neg\alpha$	por 1 y $\mathcal{K}_l$
3. $[i]\alpha \rightarrow G[i](P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha)$	por 2 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
4. $(P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha) \rightarrow \neg A$	por $\mathcal{K}_l$
5. $G[i](P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha) \rightarrow G[i]\neg A$	por 4, $\mathcal{K}_l$ y $\mathcal{K}_i$
6. $[i]\alpha \rightarrow G[i]\neg A$	por 3, 5 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
7. $[i]\alpha \rightarrow H[i]\neg A$	similar a 1-6
8. $[i]\alpha \rightarrow (H[i]\neg A \wedge G[i]\neg A)$	por 6, 7 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
9. $(P{<}i{>}A \vee F{<}i{>}A) \rightarrow {<}i{>}(PA \vee A \vee FA)$	por 8 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$

Lema 3.5.2 *Sea $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathcal{MC}$. Entonces:*

(a) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ y $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$, entonces existe $\Gamma_4 \in \mathcal{MC}$ tal que $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_4$ y $\Gamma_3 \sim_T \Gamma_4$.

(b) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ y $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_3$, entonces existe $\Gamma_4 \in \mathcal{MC}$ tal que $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_4$ y $\Gamma_3 \sim_T \Gamma_4$.

Demostración:
Probaremos (a), la prueba de (b) es similar. Para ello, se requiere demostrar previamente que $\{A \mid <i> A \in \Gamma_2\} \neq \varnothing$:

Puesto que, por hipótesis, $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$, podemos asegurar que $<i> \top \in \Gamma_1$; y puesto que $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$, tenemos que $P <i> \top \in \Gamma_2$. Ahora bien, por el teorema 3.5.1, las fórmulas del conjunto

$$\{(P <i> A \vee F <i> A) \rightarrow <i> (PA \vee A \vee FA) \mid i \in \mathcal{I}\}$$

son teoremas de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Tot$, por lo tanto podemos asegurar que se verifica la fórmula $<i> (P\top \vee \top \vee F\top) \in \Gamma_2$. Así pues, $\{A \mid <i> A \in \Gamma_2\} \neq \varnothing$. A partir de aquí, la demostración sigue de modo análogo a la del lema 2.5.12.

Para este sistema, el enunciado y demostración del lema del agotamiento son los mismos que para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Parc$. En efecto, la consideración de índices tiene como consecuencia que, a diferencia de los sistemas tratados en el capítulo anterior, no necesitamos hacer uso de los condicionales totales (a pesar de que tendría sentido tal definición). La razón es que el lema 3.5.2 asegura que, en cualquier etapa de la construcción, si hay una función definida $\xrightarrow{w\ i}$ en una estructura finita, cualquier coordenada t_w llegará a tener una imagen en T_i y, para ello, es suficiente ir agotando los condicionales ind-posibilistas (concretamente, acudimos al caso (II.1) de la demostración del lema del agotamiento para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Parc$).

Como consecuencia de lo anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.5.3 (Teorema de Completitud para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Tot$)
Si una fbf $A \in L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ es válida en la clase de estructuras ind-funcionales

$$\{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \textit{ es una clase de funciones totales }\}$$

entonces A es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-Tot.

3.5.2. Completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Tot$-$Cons$

Comenzamos con el siguiente teorema y el siguiente lema específico.

Teorema 3.5.4
Todas las fórmulas del siguiente conjunto son teoremas de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Tot$-$Cons$:

$$\{(P <i> A \vee F <i> A) \rightarrow <i> A \mid i \in \mathcal{I}\}$$

Demostración:
Sea $i \in \mathfrak{I}$. Entonces:

1. $<i> A \rightarrow G <i> A$	por (Tot-$Cons$)-ind y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
2. $P <i> A \rightarrow PG <i> A$	por 1 y $\mathcal{K}_l$
3. $P <i> A \rightarrow <i> A$	por 2 y $\mathcal{K}_l$
4. $F <i> A \rightarrow <i> A$	similar a 1-3
5. $(P <i> A \vee F <i> A) \rightarrow <i> A$	por 3, 4 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$

Lema 3.5.5 *Si* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathcal{MC}$, *se tiene:*

(a) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$, *entonces* $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_3$.

(b) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_3$, *entonces* $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$.

Demostración:

Veamos (a), ya que la prueba de (b) es análoga.

Razonando igual que en el lema 3.5.2 llegamos a que $\{A \mid <i> A \in \Gamma_2\} \neq \varnothing$. Supongamos ahora que existe $A \notin \Gamma_3$ tal que $<i> A \in \Gamma_2$, lo que significa que $F <i> A \in \Gamma_1$. De donde se sigue, por el teorema 3.5.4, que $<i>A \in \Gamma_1$. Por otro lado, como $\neg A \in \Gamma_3$ y $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$, obtenemos que $<i>\neg A \in \Gamma_1$, lo cual conduce a una contradicción.

La prueba del lema del agotamiento para este sistema requiere la siguiente modificación con respecto a la de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Parc*:

Supongamos $i \in \mathfrak{I}$ y que está activo el condicional ind-posibilista para $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}$:

$$\text{si } <i> A \in \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w), \text{ entonces existe } t_i = \xrightarrow{w\,i} (t_w) \text{ tal que } A \in \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$$

Por tanto, se tiene que $<i> A \in \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w)$, pero no existe $t_i = \xrightarrow{w\,i} (t_w)$ tal que $A \in \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$. Ahora hemos de considerar de nuevo dos casos:

I) $i \notin W_n$. Entonces razonamos como en el mismo ítem para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Parc*.

II) $i \in W_n$. Ahora, teniendo en cuenta de nuevo el modo de construcción de $\Sigma_n^{\mathfrak{I}}$, tenemos que considerar las siguientes situaciones:

(II.1) $\xrightarrow{w\,i}$ está definida en $\mathcal{F}_n$.

(II.2) $\xrightarrow{w\,i}$ no está definida en $\mathcal{F}_n$.

Consideremos el caso (II.1): Tomemos el mínimo de las imágenes de T_w en T_i; sea t_i dicha imagen y t'_w su antiimagen en T_w, es decir, $t_i = \xrightarrow{w\,i} (t'_w)$. Entonces, por el lema 3.5.5, se tiene que $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w) \prec_i \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$. Por lo tanto, basta extender nuestra estructura de forma que la imagen de t_w sea t_i. Definimos, entonces:

$$W_{n+1} = W_n$$
$$\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n$$
$$\mathcal{F}_{n+1} = (\mathcal{F}_n - \{\xrightarrow{w\,i}\}) \cup \{\xrightarrow{w\,i}{}'\}, \text{ con } \xrightarrow{w\,i}{}' = \xrightarrow{w\,i} \cup \{(t_w, t_i)\}$$
$$\Phi_{\Sigma_{n+1}^{\mathfrak{I}}} = \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}$$

Es obvio que $\Phi_{\Sigma_{n+1}^{\mathfrak{I}}}$ es coherente.

El caso (II.2) se razona como en el mismo caso de la prueba del lema 3.4.15. Así queda completada la demostración.

Como consecuencia de lo anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.5.6 (Teorema de Completitud para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Tot*-*Cons*)
Si $A \in L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ es válida en la clase de estructuras ind-funcionales

$$\{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase de funciones totales y constantes } \}$$

entonces A es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-Tot-Cons.

3.5.3. Completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Tot*-*Iny*

Para demostrar la completitud de este sistema comenzamos con un teorema y dos lemas específicos.

Teorema 3.5.7
Todas las fórmulas del siguiente conjunto son teoremas de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-Tot-Iny:

$$\{(P<i>A \vee F<i>A) \rightarrow <i>(PA \vee FA) \mid i \in \mathcal{I}\}$$

Demostración:

La demostración sigue paso a paso la del teorema 3.5.1, considerando en este caso que $\alpha = H\neg A \wedge G\neg A$.

Lema 3.5.8 *Sea $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4 \in \mathcal{MC}$. Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$, $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$ y $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_4$, entonces $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_4$ o bien $\Gamma_4 \prec_T \Gamma_3$.*

Demostración:

Supongamos que $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$, $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$ y $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_4$. Si $\Gamma_3 \not\prec_T \Gamma_4$ y $\Gamma_4 \not\prec_T \Gamma_3$, existirán fórmulas A y B tales que $GA \wedge \neg B \in \Gamma_3$ y $\neg A \wedge GB \in \Gamma_4$. Sea $\alpha = \neg A \wedge GB$, entonces, dado que $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ y $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_4$, se tiene que $F<i>\alpha \in \Gamma_1$. Por otro lado, por el teorema 3.5.7, las fórmulas del siguiente conjunto

$$\{(P<i>A \vee F<i>A) \rightarrow <i>(PA \vee FA) \mid i \in \mathfrak{I}\}$$

son teoremas de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Tot*-*Iny*. Por tanto, obtenemos que $<i>(P\alpha \vee F\alpha) \in \Gamma_1$, y dado que $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$, se tiene que $P\alpha \vee F\alpha \in \Gamma_3$ lo que conduce fácilmente a una contradicción.

Lema 3.5.9 *Sea $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathcal{MC}$, entonces se tiene:*

(a) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ y $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$, entonces existe $\Gamma_4 \in \mathcal{MC}$ tal que $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_4$ y además, $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_4$, o bien $\Gamma_4 \prec_T \Gamma_3$.

(b) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ y $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_3$, entonces existe $\Gamma_4 \in \mathcal{MC}$ tal que $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_4$ y además $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_4$, o bien $\Gamma_4 \prec_T \Gamma_3$.

Demostración:

Veamos la prueba de (a), ya que la de (b) es similar. La existencia de Γ_4 se obtiene a partir del lema 3.5.2 [11]. A partir del lema 3.5.8, obtenemos que $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_4$ o bien $\Gamma_4 \prec_T \Gamma_3$.

La prueba del lema del agotamiento requiere la siguiente modificación con respecto a la prueba de este mismo lema para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Parc$:

Supongamos que $i \in \mathfrak{I}$ y que está activo el siguiente condicional ind-posibilista para $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}$:

$$\text{si } <i> A \in \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w), \text{ entonces existe } t_i =\xrightarrow{w\ i} (t_w) \text{ tal que } A \in \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$$

Por tanto, se tiene que $<i> A \in \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w)$, pero no existe $t_i =\xrightarrow{w\ i} (t_w)$ con $A \in \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$. Ahora hemos de considerar dos casos:

I) $i \notin W_n$. Entonces, razonamos igual que en el item I) de la prueba para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Parc$.

II) $i \in W_n$, tenemos que distinguir dos posiblilidades:

(II.1) $\xrightarrow{w\,i}$ está definida en $\mathcal{F}_n$.

(II.2) $\xrightarrow{w\,i}$ no está definida en $\mathcal{F}_n$.

Consideremos el caso (II.1): Sea t_i el mínimo de $\xrightarrow{w\ i} (T_w)$ y sea t'_w tal que $t_i =\xrightarrow{w\ i} (t'_w)$. Se tiene pues que $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t'_w) \prec_i \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i)$. Por el lema 3.5.9, se tiene que existe un conjunto-mc Γ, tal que

$$\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_w) \prec_i \Gamma \quad \text{y, o bien} \quad \text{(i) } \Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i) \quad \text{o bien} \quad \text{(ii) } \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i) \prec_T \Gamma$$

Tanto en (i) como (ii) tenemos que $W_{n+1} = W_n$. Ahora,

– si se verifica (i), se razona como en el ítem (iii) del caso (II.1) de la prueba para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Parc$.

– si se verifica (ii), consideramos el número de sucesores s de t_i en T_i:

(ii.a) Si $s = 0$, razonamos como en el mismo ítem de la prueba para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Parc$.

(ii.b) Si $s > 0$, sea t_i^1 el sucesor inmediato de t_i en T_i. En este caso, pueden darse dos opciones:

(ii.b.1) $t_i^1 =\xrightarrow{w\ i} (t_w^1)$, para algún $t_w^1 \in T_w$. En este caso, por el lema 3.5.8 se obtiene que $\Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i^1)$ o bien $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i^1) \prec_T \Gamma$. En el primer caso, tendríamos que $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i) \prec_T \Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n}(t_i^1)$ y razonaríamos como en el ítem (ii.b.2) de la prueba para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Parc$. Por otro lado, si $\Phi_{\Sigma_n^{\mathfrak{I}}}(t_i^1) \prec_T \Gamma$, consideraríamos el sucesor de t_i^1 en T_i, sea t_i^2, razonando de forma similar a lo descrito para t_i^1.

[11] Basta tener en cuenta que cualquier teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)\text{-}\mathfrak{I}}$-$Tot$ es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)\text{-}\mathfrak{I}}$-$Tot$-$Iny$.

(ii.b.2) $t_i^1 \not\in \xrightarrow{w\,i} (T_w)$, entonces por el ítem 4 del lema 3.4.5, se da alguna de las siguientes posibilidades:

$$\Gamma = \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_i^1) \quad \text{o bien} \quad \Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_i^1) \quad \text{o bien} \quad \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_i^1) \prec_T \Gamma$$

Si se da la primera opción, razonamos como en el ítem (i) de la prueba para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-*Parc*. Si se da cualquiera de las otras dos opciones, razonamos como en los mismos casos del ítem (ii.b.1) anterior.

Repitiendo este proceso a lo sumo s veces, conseguiríamos lo deseado.

Si se da (II.2), razonamos como en el mismo ítem de la prueba para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-*Parc*.

Como consecuencia de lo anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.5.10 (Teorema de Completitud para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-$Tot$-$Iny$)
Si una fórmula $A \in L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\Im$ es válida en la clase de estructuras ind-funcionales

$$\{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \;\; \textit{es una clase de funciones totales e inyectivas}\;\}$$

entonces A es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-$Tot$-$Iny$.

3.5.4. Completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-$Tot$-$Crec$

Comenzamos con el siguiente teorema.

Teorema 3.5.11
Todas las fórmulas del siguiente conjunto son teoremas de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-$Tot$-$Crec$:

$$\{F <i> A \rightarrow <i> (A \vee FA),\; P <i> A \rightarrow <i> (PA \vee A) \mid i \in \Im\}$$

Demostración:

Sea $i \in \Im$. Consideremos $\alpha = \neg A \wedge G\neg A$. Entonces:

1. $<i> (H\neg\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow H <i> \neg\alpha$	por (Tot-$Crec$)-ind
2. $F <i> (H\neg\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow <i> \neg\alpha$	por 1 y $\mathcal{K}_l$
3. $[\,i\,]\alpha \rightarrow G[\,i\,](P\alpha \vee \alpha)$	por 2 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
4. $P\alpha \rightarrow \neg A$	por $\mathcal{K}_l$
5. $(P\alpha \vee \alpha) \rightarrow \neg A$	por 4 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
6. $G[\,i\,](P\alpha \vee \alpha) \rightarrow G[\,i\,]\neg A$	por 5, $\mathcal{K}_l$ y $\mathcal{K}_i$
7. $[\,i\,]\alpha \rightarrow G[\,i\,]\neg A$	por 3, 6 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$
8. $F <i> A \rightarrow <i> (A \vee FA)$	por 7 y $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$.

La prueba de $P <i> A \rightarrow <i> (PA \vee A)$ es similar.

Introducimos seguidamente dos lemas específicos similares a los contemplados para el estudio del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-$Tot$-$Iny$.

Lema 3.5.12 *Sean* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4 \in \mathcal{MC}$*. Si* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$*,* $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$ *y* $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_4$*, entonces* $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_4$ *o bien* $\Gamma_3 = \Gamma_4$*.*

Demostración:

Supongamos que $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$, $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$ y $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_4$. Si $\Gamma_3 \not\prec_T \Gamma_4$ y $\Gamma_3 \neq \Gamma_4$, entonces existen fórmulas A y B tales que $GA \wedge B \in \Gamma_3$ y $\neg A \wedge \neg B \in \Gamma_4$. Sea $\alpha = \neg A \wedge \neg B$, teniendo en cuenta que $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ y $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_4$, se obtiene $F <i> \alpha \in \Gamma_1$. Ahora, por el teorema 3.5.11, obtenemos que $<i> (\alpha \vee F\alpha) \in \Gamma_1$, lo cual, dado que $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$, supone una contradicción con $GA \wedge B \in \Gamma_3$.

Lema 3.5.13 *Sean* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathcal{MC}$*. Entonces se tiene que:*

(a) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$*, entonces existe* $\Gamma_4 \in \mathcal{MC}$ *tal que* $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_4$ *y además* $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_4$ *o bien* $\Gamma_3 = \Gamma_4$*.*

(b) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_3$*, entonces existe* $\Gamma_4 \in \mathcal{MC}$ *tal que* $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_4$ *y además* $\Gamma_4 \prec_T \Gamma_3$ *o bien* $\Gamma_3 = \Gamma_4$*.*

Demostración:

Veamos *(a)*. La existencia de Γ_4 se obtiene a partir del lema 3.5.2, y por el lema 3.5.12, obtenemos que $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_4$ o bien que $\Gamma_3 = \Gamma_4$.
La prueba de *(b)* es análoga.

Además de los dos lemas anteriores, en este caso necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.5.14 *Sean* $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathcal{MC}$*. Entonces, si* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma \prec_T \Gamma_2$*,* $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$*,* $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_3$ *y* $\Gamma_3 \not\prec_T \Gamma_3$*, se tiene que* $\Gamma \prec_i \Gamma_3$*.*

Demostración:
Supongamos que $\Gamma_1 \prec_T \Gamma \prec_T \Gamma_2$, $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$, $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_3$ y $\Gamma_3 \not\prec_T \Gamma_3$. Teniendo en cuenta que $\Gamma_1 \prec_T \Gamma$, por el lema 3.5.13 existe un m.c-conjunto, Γ_4 tal que $\Gamma \prec_i \Gamma_4$, verificando además que $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_4$ o bien $\Gamma_3 = \Gamma_4$ y, dado que $\Gamma \prec_T \Gamma_2$, por el lema 3.5.12, se tiene que $\Gamma_4 \prec_T \Gamma_3$, o bien $\Gamma_4 = \Gamma_3$. Si se diese que $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_4$ y que $\Gamma_4 \prec_T \Gamma_3$ llegaríamos, por la transitividad de $\prec_T$, a que $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_3$, lo cual supone una contradicción. Por consiguiente, $\Gamma_3 = \Gamma_4$, lo cual significa que $\Gamma \prec_i \Gamma_3$, como queríamos demostrar.

La demostración del lema del agotamiento es similar a la del correspondiente lema para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Parc*. Sin embargo, en la construcción de la estructura $\Sigma^{\mathfrak{I}}$ para la fórmula consistente A inicial cuya satisfacibilidad se pretende demostrar, hemos de ser especialmente cuidadosos a la hora de definir las trazas correspondientes a cada una de las estructuras finitas $\Sigma^{\mathfrak{I}}_0, \Sigma^{\mathfrak{I}}_1, \ldots$. Cada $\Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_k}$, correspondiente a $\Sigma^{\mathfrak{I}}_k$ en la enumeración, ha de cumplir la siguiente propiedad (P):

(P) Para cualesquiera $w \in W$ e $i \in \mathfrak{I}$ tales que $\xrightarrow{w\ i} \in \mathcal{F}_w$ y cualesquiera $t_w, t'_w \in Dom(\xrightarrow{w\ i})$, se tiene que:

$$\text{si } \xrightarrow{w\ i} (t_w) = \xrightarrow{w\ i} (t'_w), \text{ entonces } \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_k}(\xrightarrow{w\ i} (t_w)) \not\prec_T \Phi_{\Sigma^{\mathfrak{I}}_k}(\xrightarrow{w\ i} (t'_w))$$

$\Phi_{\Sigma_0^{\Im}}$ cumple trivialmente esta propiedad. Supongamos que $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}$ la cumple. Razonaremos de manera que $\Phi_{\Sigma_{n+1}^{\Im}}$ preserve dicha propiedad al tiempo que agotamos el condicional elegido. En definitiva, tenemos que realizar la siguiente modificación respecto a la prueba de este mismo lema para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-*Parc*:

Supongamos que está activo el siguiente condicional ind-posibilista para $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}$:

$$\text{si } {<}i{>}\, A \in \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w), \text{ entonces existe } t_i \xrightarrow{w\ i} (t_w) \text{ tal que } A \in \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_i)$$

Por tanto, se tiene que ${<}i{>}\, A \in \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w)$, pero no existe $t_i \xrightarrow{w\ i} (t_w)$ con $A \in \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_i)$.

Ahora hemos de considerar dos casos:

I) $i \notin W_n$. Entonces, razonamos igual que en el mismo ítem de la prueba para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-*Parc*.

II) $i \in W_n$, tenemos que distinguir dos posiblilidades:

(II.1) $\xrightarrow{w\,i}$ está definida en $\mathcal{F}_n$.

(II.2) $\xrightarrow{w\,i}$ no está definida en $\mathcal{F}_n$.

Consideremos el caso (II.1). Vamos a distinguir tres posibilidades:

(a) sólo existen elementos de $(\leftarrow, t_w)$ con imagen en T_i.

(b) sólo existen elementos de $(t_w, \rightarrow)$ con imagen en T_i.

(c) existen elementos de $(t_w, \rightarrow)$ y de $(\leftarrow, t_w)$ con imagen en T_i.

Supongamos que se da la posibilidad (a), llamamemos t'_w al mayor de los elementos de $(\leftarrow, t_w)$ con imagen en T_i y sea $t'_i \xrightarrow{w\ i} (t'_w)$, entonces, teniendo en cuenta el lema 3.5.13, existe un conjunto-*m.c*, Γ, tal que $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w) \prec_i \Gamma$ y pueden darse los siguientes casos:

(a.1) $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_i) \prec_T \Gamma$.

(a.2) $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_i) = \Gamma$.

Si se da el caso (a.1), entonces $\Sigma_{n+1}^{\Im}$ extiende $\Sigma_n^{\Im}$ con un nuevo elemento a la derecha de t'_i, en la forma descrita en el apartado (ii) del mismo ítem para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-*Parc*.

Si se da el caso (a.2) y no se da (a.1) [12], entonces $\Sigma_{n+1}^{\Im}$ contiene una función que extiende $\xrightarrow{w\ i}$ de manera que t'_i sea imagen de t_w, como definimos en el apartado (i) del mismo ítem para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-*Parc*.

Si se da la posibilidad (b), razonamos como en (a).

[12] Como hemos comentado al inicio de la demostración, es importante para nuestra definición que razonemos como en (a.2) sólo si no se verifica (a.1).

Si se da la posibilidad (c) llamemos t'_w al mayor de los elementos de $(\leftarrow, t_w)$ con imagen en T_i y t''_w al menor de los elementos de $(t_w, \rightarrow)$ con imagen en T_i. Sean, además, $t'_i = \xrightarrow{w\ i} (t'_w)$ y $t''_i = \xrightarrow{w\ i} (t''_w)$. Es claro que se tiene que dar alguna de las siguientes circunstancias:

(c.1) $t'_i <_i t''_i$

(c.2) $t'_i = t''_i$

Si se da (c.1), por el lema 3.5.13 respecto a $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_w)$, $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_i)$ y $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w)$, concluimos que existe un m.c-conjunto Γ tal que $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w) \prec_i \Gamma$ y, además se da alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_i) \prec_T \Gamma$

(ii) $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_i) = \Gamma$.

Si se da la condición (i), por el lema 3.5.12, puede ocurrir además que, o bien $\Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t''_i)$ o bien $\Gamma = \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t''_i)$. Si se da la primera de estas alternativas, entonces $\Sigma_{n+1}^{\Im}$ extiende $\Sigma_n^{\Im}$ con un nuevo elemento en el intervalo (t'_i, t''_i) cuya introducción se define como en el apartado (ii.b.2) del mismo ítem de la prueba para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-*Parc*. En caso contrario, es decir si $\Gamma \not\prec_T \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t''_i)$ y, por consiguiente, $\Gamma = \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t''_i)$, extenderíamos $\xrightarrow{w\ i}$ de manera que la imagen de t_w sea t''_i, en la forma habitual.

Si se da la condición (ii), y $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_i) \not\prec_T \Gamma$ [13], extendemos $\xrightarrow{w\ i}$ de manera que la imagen de t_w sea t'_i.

Si se da (c.2), por hipótesis se cumple la propiedad (P) para $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}$, es decir, $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_i) \not\prec_T \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t''_i)$, por lo que podremos utilizar el lema 3.5.14, extendiendo $\xrightarrow{w\ i}$ de manera que la imagen de t_w sea t'_i.

Si se da el caso (II.2), razonamos como en el mismo caso para el sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-*Parc*.

Como consecuencia de lo anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.5.15 (Teorema de Completitud para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-*Tot*-*Crec*)
Si una fórmula $A \in L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\Im$ es válida en la clase de estructuras ind-funcionales

$$\{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase de funciones totales y crecientes } \}$$

entonces A es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-Tot-Crec.

El razonamiento requerido en la prueba de completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-*Tot*-*Decrec* es similar.

[13] ya que si no, razonaríamos como en (i).

3.5.5. Completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-$Tot$-$Estr$-$Crec$

Para demostrar la completitud de este sistema comenzamos con un teorema y dos lemas específicos.

Teorema 3.5.16
Todas las fórmulas del siguiente conjunto son teoremas de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$-*Tot-Estr-Crec:*

$$\{F{<}i{>}A \rightarrow {<}i{>}FA,\ P{<}i{>}A \rightarrow {<}i{>}PA \mid i \in \mathcal{I}\}$$

Demostración:
La demostración es similar a la del teorema 3.5.11, considerando sucesivamente que $\alpha = G\neg A$ y que $\alpha = H\neg A$.

Lema 3.5.17 *Sean* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4 \in \mathcal{MC}$. *Si* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$, $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$ *y* $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_4$, *entonces* $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_4$.

Demostración:

Supongamos que $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$, $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$ y $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_4$. Si $\Gamma_3 \not\prec_T \Gamma_4$, tendríamos que existe una fórmula A tal que $GA \in \Gamma_3$ y $\neg A \in \Gamma_4$. Teniendo en cuenta que $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ y $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_3$, se obtiene $F{<}i{>}\neg A \in \Gamma_1$. Utilizando ahora el teorema 3.5.16, llegamos a que ${<}i{>}F\neg A \in \Gamma_1$ y, por tanto, $F\neg A \in \Gamma_3$ lo que supone una contradicción con $GA \in \Gamma_3$.

Lema 3.5.18 *Sean* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathcal{MC}$. *Entonces se tiene que:*

(a) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_3$, *entonces existe* $\Gamma_4 \in \mathcal{MC}$ *tal que* $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_4$ *y* $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_4$.

(b) Si $\Gamma_1 \prec_T \Gamma_2$ *y* $\Gamma_2 \prec_i \Gamma_3$, *entonces existe* $\Gamma_4 \in \mathcal{MC}$ *tal que* $\Gamma_1 \prec_i \Gamma_4$ *y* $\Gamma_4 \prec_T \Gamma_3$.

Demostración:

Veamos *(a)*. La existencia de Γ_4 se obtiene utilizando el lema 3.5.2. A partir del lema 3.5.17, obtenemos que $\Gamma_3 \prec_T \Gamma_4$.
La prueba de *(b)* es análoga.

El siguiente lema es consecuencia inmediata de los dos lemas anteriores.

Lema 3.5.19 *Sea* $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{MC}$ *tales que* $\Gamma_1 \prec_T \Gamma \prec_T \Gamma_2$ *y sea* $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{MC}$ *tales que* $\Gamma_1 \prec_i \Delta_1$ *y* $\Gamma_2 \prec_i \Delta_2$. *Entonces existe un m.c.-conjunto,* Δ, *tal que* $\Gamma \prec_i \Delta$ *y* $\Delta_1 \prec_T \Delta \prec_T \Delta_2$.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_1 \arrow[r, "\prec_T"] \arrow[d, "\prec_i"'] & \Gamma \arrow[r, "\prec_T"] \arrow[d, "\prec_i"] & \Gamma_2 \arrow[d, "\prec_i"] \\
\Delta_1 \arrow[r, "\prec_T"] & \Delta \arrow[r, "\prec_T"] & \Delta_2
\end{tikzcd}$$

Para llevar a cabo la demostración del lema del agotamiento para este sistema es suficiente con realizar la siguiente modificación en la prueba de este mismo lema para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-$Parc.$

Supongamos que está activo el siguiente condicional ind-posibilista para $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}$:

$$\text{si } {<}i{>}\, A \in \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w), \text{ entonces existe } t_i \overset{w\ i}{=\!\!\longrightarrow} (t_w) \text{ tal que } A \in \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_i)$$

Por tanto, se tiene que ${<}i{>}\, A \in \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w)$, pero no existe una coordenada $t_i \overset{w\ i}{=\!\!\longrightarrow} (t_w)$ con $A \in \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_i)$.

Ahora basta con tener en cuenta el caso en que $i \in W_n$ y $\overset{w\,i}{\longrightarrow}$ está definida en $\mathcal{F}_n$. Vamos a distinguir tres posibilidades:

(a) existen elementos de $(t_w, \rightarrow)$ y $(\leftarrow, t_w)$ con imagen en T_i.

(b) existen sólo elementos de $(t_w, \rightarrow)$ con imagen en T_i.

(c) existen sólo elementos de $(\leftarrow, t_w)$ con imagen en T_i.

Supongamos que se cumple (a). Sea t'_w el mínimo de los elementos de $(t_w, \rightarrow)$ con imagen en T_i y t''_w el máximo de los elementos de $(\leftarrow, t_w)$ con imagen en T_i. Sea, además, $t'_i \overset{w\ i}{=\!\!\longrightarrow} (t'_w)$ y $t''_i \overset{w\ i}{=\!\!\longrightarrow} (t''_w)$. Por el lema 3.5.19 tenemos que existe un conjunto-$m.c.$ Γ tal que $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w) \prec_i \Gamma$ y $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t''_i) \prec_T \Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_i)$.

Ahora nos queda seleccionar una nueva coordenada t_i a la que asignaremos Γ y definir una extensión de $\Sigma_n^{\Im}$ y una extensión de $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}$ al modo habitual.

Supongamos que se cumple (b). Sea t'_w al mínimo de los elementos de $(t_w, \rightarrow)$ con imagen en T_i y sea $t'_i \overset{w\ i}{=\!\!\longrightarrow} (t'_w)$. Por el item (b) del lema 3.5.18 tenemos que existe un conjunto-$m.c.$ Γ tal que $\Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t_w) \prec_i \Gamma$ y $\Gamma \prec_T \Phi_{\Sigma_n^{\Im}}(t'_i)$. De nuevo podemos definir una nueva estructura finita de modo que asignemos Γ a alguna coordenada a la izquierda de t'_i en la forma habitual.

Por último, si se da (c), razonamos como en (b).

Como consecuencia de lo anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.5.20 (Teorema de Completitud para $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-$Tot$-$Estr$-$Crec$) *Si una fbf $A \in L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\Im$ es válida en la clase de estructuras ind-funcionales*

$$\{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase de funciones totales y estrictamente crecientes } \}$$

entonces A es un teorema de $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-$Tot$-$Estr$-$Crec$.

El razonamiento requerido en la prueba de completitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\Im}$-$Tot$-$Estr$-$Decrec$ es similar.

Por otro lado, también se demuestra de modo similar la completitud de los sistemas para funciones parciales correspondientes a los sistemas considerados en esta sección.

3.6. Un resultado de incompletitud

En el capítulo anterior mostrábamos la incompletitud de los sistemas funcionales que trataban con funciones totales e inyectivas y sobreyectivas, dejando pendiente la cuestión acerca de la completitud o incompletitud de los sistemas para funciones crecientes y decrecientes, tanto en sentido estricto como no estricto. En cambio, en este capítulo, hemos probado la completitud de los correspondientes sistemas ind-funcionales para tratar todas estas propiedades de funciones menos la sobreyectividad. Hemos mejorado, por tanto, el resultado para la propiedad de la inyectividad y hemos rellenado las lagunas pendientes respecto de las funciones crecientes y decrecientes. Aún así, por lo que se refiere a la sobreyectividad, mostraremos en esta sección que se mantiene el resultado de incompletitud del sistema ind-funcional correspondiente.

3.6.1. Incompletitud del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$ -Sob

Para demostrar la incompletitud de este sistema razonamos como hicimos en el capítulo anterior. Por tanto, es suficiente con probar los siguientes resultados:

1. Existe una fórmula X que es válida en la clase de todas las estructuras ind-funcionales con funciones sobreyectivas.
2. Existe un modelo del sistema $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$ -Sob en el que X no es válida.

Veamos 1: Sea X la fórmula

$$\begin{array}{lll} <i>F(A \wedge FB) & \rightarrow & \big[F(<i>A \ \wedge F<i>B) \vee \\ & & F(F<i>A \wedge <i>B) \ \ \vee \\ & & P(<i>A \ \ \wedge P<i>B) \vee \\ & & P(P<i>A \wedge <i>B) \ \ \vee \\ & & (P<i>A \ \wedge F<i>B) \ \vee \\ & & (F<i>A \ \wedge P<i>B)\big] \end{array}$$

Demostraremos que X es válida en la clase

$$\{\Sigma^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es una clase de funciones sobreyectivas } \}$$

Sea $\Sigma^{\mathfrak{I}}$ una estructura ind-funcional cualquiera de dicha clase y $(\Sigma^{\mathfrak{I}}, h)$ un modelo ind-funcional arbitrariamente elegido.

Sea $t_w \in h(<i>(F(A \wedge FB)))$, entonces existen $t_i <_i t'_i <_i t''_i$ en T_i tales que $t_i = \xrightarrow{w\ i} (t_w)$, $t'_i \in h(A)$ y $t''_i \in h(B)$. Puesto que $\xrightarrow{w\ i}$ es sobreyectiva, existen $t'_w, t''_w \in T_w$ (distintas de t_w) cuyas imágenes son, respectivamente t'_i y t''_i. Ahora tenemos las siguientes posibilidades respecto de t'_w y t''_w:

(a) $t'_w, t''_w \in (t_w, \rightarrow)$. Luego

$$t_w \in h(F(<i>A \wedge F<i>B) \vee F(F<i>A \wedge <i>B))$$

(b) $t'_w, t''_w \in (\leftarrow, t_w)$. Luego

$$t_w \in h(P(<i> A \wedge P <i> B) \vee P(P <i> A \wedge <i> B))$$

(c) una de dichas coordenadas pertenece a $(t_w, \rightarrow)$ y la otra a $(\leftarrow, t_w)$.
Luego

$$t_w \in h((P <i> A \wedge F <i> B) \vee (F <i> A \wedge P <i> B))$$

En consecuencia X es válida.

Veamos 2: Construyamos el modelo del sistema. Definiremos para ello una estructura especial para $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ similar a a las estructuras de *correspondencias* definidas en el capítulo 2, con algunas peculiaridades adaptadas al caso que seguidamente detallaremos. Sea, pues, una estructura $\Psi^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ (asociada a $\mathfrak{I}$) tal que:

- $W = \{w, i\}$; con $i \in \mathfrak{I}$
- $T = \{(T_w, <_w), (T_i, <_i)\}$, donde $T_w = \{1_w, 2_w\}, <_w = \{(1_w, 2_w)\}$;
  $T_i = \{3_i, 4_i\}, <_{w'} = \{(3_i, 4_i), (4_i, 3_i)\}$;

$\mathcal{C}$ es una clase de correspondencias (de accesibilidad) tal que $\mathcal{C} = \{c_{wi}\}$ con

$$c_{wi}(1_w) = c_{wi}(2_w) = T_i$$

Consideremos un modelo $(\Psi^{\mathfrak{I}}, h^c)$ sobre la estructura anterior, donde

$$h^c : \mathcal{V} \longrightarrow 2^{\{1_w, 2_w, 3_i, 4_i\}}$$

verifica que $h^c(p) = \mathcal{C}oord_{\Psi^{\mathfrak{I}}}$ [14]. Además, la semántica de las conectivas $<i>$ y $[\, i\,]$ es:

- $h^c(<i> A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\Psi^{\mathfrak{I}}} \mid c_{wi}(\{t_w\}) \cap h^c(A) \neq \varnothing\}$
- $h^c([\, i\,]A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\Psi^{\mathfrak{I}}} \mid c_{wi}(\{t_w\}) \subseteq h^c(A)\}$

Es fácil comprobar que los esquemas de axiomas del sistema son válidos en dicho modelo. Además, $\mathcal{M}$ falsea X en 1_w, debido a que T_w sólo tiene dos elementos. Esto prueba que X es válida en la clase de estructuras con funciones sobreyectivas, pero que no es un teorema del sistema, es decir, $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)-\mathfrak{I}}$ -*Sob* es incompleto.

[14] de donde podemos deducir que $3_i \in h(A)$ si, y sólo si $4_i \in h(A)$, para cualquier fórmula A del lenguaje. Esto es clave para probar la validez del axioma de funcionalidad en este modelo.

Capítulo 4

Enriqueciendo el lenguaje y la semántica

En este capítulo enriquecemos el estudio realizado en los dos capítulos anteriores. Por una parte, abordaremos nuevos aspectos de la definibilidad de propiedades de funciones en el marco de las lógicas *temporales*$\times$*modales* que inciden en la base modal de los sistemas funcionales. Así, contemplaremos operaciones en el conjunto de funciones de accesibilidad tales como la operación de composición, no contempladas en los capítulos anteriores y analizaremos la extensión natural de las propiedades reflexiva, transitiva, simétrica, euclídea y serial de las estructuras de Kripke en la lógica modal.

Por otra parte, hasta aquí hemos contemplado la extensión *Temporal* $\times$ *Modal* en su componente modal de forma excluyente, es decir, en el capítulo 2 hemos contemplado la posibilidad de especificar afirmaciones *en algún flujo accesible* (utilizando conectivas modales-funcionales) y en el capítulo 3 la posibilidad de especificar afirmaciones *en un flujo accesible determinado* (utilizando conectivas modales-funcionales indizadas). Nuestro siguiente objetivo es enriquecer nuestro estudio previo, para obtener mayor grado de expresividad; concretamente, para poder especificar ambos tipos de afirmaciones.

De nuevo, contemplar esta extensión, no sólo tiene un interés puramente teórico sino que viene reclamado por las aplicaciones. Así, en el estudio de Procesos (véase [Stirling(1996)]) podemos encontrar un ejemplo de la utilización de conectivas modales indizadas junto con otras no indizadas, utilizándose las conectivas con índices para propiedades de procesos que se mantienen tras la actuación de un conjunto de acciones (que es el que indiza la conectiva), mientras que las conectivas sin índices se utilizan para propiedades que se mantienen tras cualquier conjunto de acciones.

Comenzamos introduciendo esta extensión en el modo natural.

4.1. Las lógicas $\widehat{\mathcal{L}}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$

En esta sección definimos las lógicas

$$\widehat{\mathcal{L}}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}\text{-}\mathfrak{I} = (\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}\text{-}\mathfrak{I},\ \widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{F}}\text{-}\mathfrak{I})$$

donde $\mathfrak{I}$ es un conjunto de índices no vacío y numerable, cuya elección determina una lógica concreta, $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ denota el lenguaje y $\widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{F}}$-$\mathfrak{I}$ los modelos funcionales para $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$.

4.1.1. El Lenguaje $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ de $\widehat{\mathcal{L}}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$

El alfabeto de $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ será el de $L^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ (presentado en el capítulo anterior), añadiéndole la conectiva modal $\Box^{\mathcal{F}}$ (con su lectura informal habitual), es decir:

1. un conjunto numerable, $\mathcal{V}$, de variables proposicionales;

2. las constantes lógicas $\top$ y $\bot$, y las conectivas booleanas $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$;

3. las conectivas temporales G y H;

4. una familia de conectivas modales monarias de la forma $<i>^{\mathcal{F}}$, para $i \in \mathfrak{I}$.

5. la conectiva modal monaria $\Box^{\mathcal{F}}$.

6. un conjunto de símbolos de puntuación: $\{(,), [,], \ldots\}$

El conjunto de fórmulas bien formadas (fbfs) es la clausura inductiva libremente generada sobre el conjunto base $\mathcal{V} \cup \{\top, \bot\}$ y los constructores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, G, H, $\{<i> \mid i \in \mathfrak{I}\}$ y $\Box$ de aridades $1, 2, 2, 2, 1, 1, 1$ y 1 para todo $i \in \mathfrak{I}$, respectivamente. Consideraremos las conectivas F, P y $\Diamond$ definidas en el modo estándar. Además, se considera definida la conectiva $[\,i\,]$ tal como se presentó en el capítulo anterior, es decir, $[\,i\,]A = \neg <i> \neg A$, para toda fbf A y todo $i \in \mathfrak{I}$.

4.1.2. Semántica de $\widehat{\mathcal{L}}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$

Definición 4.1.1 *Una* **estructura funcional** *para* $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ *es una terna*

$$\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$$

tal que:

1. *W es un conjunto no vacío (conjunto de etiquetas para un conjunto de flujos temporales).*

2. *$\mathcal{T}$ es un conjunto no vacío de órdenes lineales estrictos, indizados por W* [1].

3. *$\mathcal{F}$ es un conjunto de funciones no vacías, llamadas* **funciones de accesibilidad** *tales que:*

   a) *cada función de $\mathcal{F}$ es una función parcial de T_w en $T_{w'}$, para algún par $(w, w') \in W \times W$.* [2]

   b) *dados $w, w' \in W$, existe (en $\mathcal{F}$) a lo sumo una función de T_w en $T_{w'}$, denotada por $\stackrel{w\ w'}{\longrightarrow}$.*

Como en los capítulos anteriores, para cada $w \in W$, denotaremos

$$\mathcal{F}_w = \{ \stackrel{w\ w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F} \mid w' \in W\}$$

Entonces, $\mathcal{F} = \bigcup_{w\in W} \mathcal{F}_w$. A los elementos t_w de la unión disjunta

$$\mathcal{C}oord_{\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}}} = \bigoplus_{w\in W} T_w$$

se les llama **coordenadas**.

Definición 4.1.2 *Un* **modelo funcional** *para $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ es un par $(\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}}, h)$, donde $\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}}$ es una estructura funcional para $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ y h es una función,*

$$h : \widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}\text{-}\mathfrak{I} \longrightarrow 2^{\mathcal{C}oord_{\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}}}}$$

llamada **interpretación funcional** *y que satisface las siguientes condiciones:*

- *La interpretación de las constantes, de las conectivas booleanas y de las conectivas temporales se define de modo estándar.*
- $h(<\!i\!>A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}}} \mid \stackrel{w\ i}{\longrightarrow} (\{t_w\}) \cap h(A) \neq \varnothing\}$ [3].
- $h(\Box A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}}} \mid \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \subseteq h(A)\}$

A partir de lo anterior, obtenemos que

$$h([\,i\,]A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}}} \mid \stackrel{w\ i}{\longrightarrow} (\{t_w\}) \subseteq h(A)\}$$

$$h(\Diamond A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_{\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}}} \mid \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \cap h(A) \neq \varnothing\}$$

---

[1] Advirtamos que no exigimos que $W \cap \mathfrak{I} = \varnothing$

[2] A diferencia de la definición dada en el capítulo 3, en la que $(w, w') \in W \times (W \cap \mathfrak{I})$.

[3] Esta definición es equivalente a

$$t_w \in h(<\!i\!>A) \text{ sii } \{\stackrel{w\ i}{\longrightarrow} (t_w)\} \subseteq h(A)$$

por lo que las utilizaremos indistintamente.

Ejemplo 4.1.1 *Consideremos la estructura funcional* $\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ *de la figura:*

donde:

- $\mathcal{I} = \{2, 4\}$
- $W = \{1, 2, 3\}$,
- $\mathcal{T} = \{(T_1, <_1), (T_2, <_2), (T_3, <_3)\}$, *siendo*

$$T_1 = \{t_1^1, t_1^2\},\ T_2 = \{t_2^1, t_2^2, t_2^3, t_2^4\},\ T_3 = \{t_3^1, t_3^2, t_3^3\}$$

  y $<_1, <_2, <_3$ *restricciones del orden natural en* $\mathbb{N}$ *a* T_1*,* T_2 *y* T_3*, respectivamente.*

- $\mathcal{F} = \{\xrightarrow{1\ 2}, \xrightarrow{1\ 3}, \xrightarrow{2\ 3}, \xrightarrow{3\ 2}\}$ *definidas por*
  $\xrightarrow{1\ 2} = \{(t_1^1, t_2^1)\}$, $\xrightarrow{1\ 3} = \{(t_1^1, t_3^1)\}$,
  $\xrightarrow{2\ 3} = \{(t_2^1, t_3^2), (t_2^2, t_3^2), (t_2^3, t_3^3), (t_2^4, t_3^2)\}$ *y* $\xrightarrow{3\ 2} = \{(t_3^3, t_2^4)\}$.

Obsérvese que $\xrightarrow{1\ 3}$ *y* $\xrightarrow{2\ 3}$ *son elementos de* $\mathcal{F}$*, aunque* $3 \notin \mathfrak{I}$*. Además, si elegimos un modelo* $(\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}}, h)$ *tal que* $t_2^1 \in h(p)$ *y* $t_3^1 \notin h(p)$*, siendo* p *una variable proposicional, entonces:*

- $t_1^1 \in h([\,i\,]p)$ *para todo* $i \in \mathfrak{I}$ *y sin embargo* $t_1^1 \notin h(\Box p)$
- $t_1^1 \in h(\Diamond \neg p)$ *aunque* $t_1^1 \notin h(<\!i\!> \neg p)$*, para todo* $i \in \mathfrak{I}$*.*

El siguiente lema relaciona la semántica de las conectivas indizadas y no indizadas.

Lema 4.1.3 *Sea* $(\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}}, h)$ *un modelo funcional para* $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$*-*$\mathfrak{I}$ *y sea* A *una fórmula de* $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$*-*$\mathfrak{I}$*.*

$$(a)\quad h(\Box A) \subseteq \bigcap_{i\in\mathfrak{I}} h([\,i\,]A) \qquad (b)\quad h(\Diamond A) \supseteq \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} h(<\!i\!> A)$$ [4]

[4]En el ejemplo anterior se puede comprobar que los contenidos anteriores pueden ser estrictos

Demostración:

Veamos (a). Si $t_w \in h(\Box A)$, tenemos que $\mathcal{F}_w(\{t_w\}) \subseteq h(A)$. Sea $i \in \mathfrak{I}$, entonces pueden darse dos opciones:

- que $\xrightarrow{w\ i} \notin \mathcal{F}_w$, en cuyo caso $\xrightarrow{w\ i}(\{t_w\}) = \varnothing \subseteq h(A)$ y, por tanto, se verifica que $t_w \in h([\,i\,]A)$;
- que $\xrightarrow{w\ i} \in \mathcal{F}_w$, en cuyo caso se tiene que $\xrightarrow{w\ i}(\{t_w\}) \subseteq h(A)$, es decir, que $t_w \in h([\,i\,]A)$.

La prueba de (b) es consecuencia inmediata de (a) y de las definiciones de nuestra semántica.

Como consecuencia de lo anterior, tenemos que las siguentes fbfs son válidas, para todo $i \in \mathfrak{I}$:

$$\Box A \to [\,i\,]A \qquad <i> A \to \Diamond A$$

Observación 4.1.1 *Como se ha podido ver en el ejemplo anterior, la definición de estructura funcional permite, a diferencia de lo que ocurría en el capítulo 3, que las funciones de accesibilidad tengan sus imágenes en mundos no indizados por $\mathfrak{I}$. Por ello, hemos de destacar lo siguiente:*

1. *Toda estructura funcional para $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ se puede considerar como una estructura funcional para $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$ con $\mathfrak{I} = \varnothing$. Así mismo, toda estructura ind-funcional para un lenguaje $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$\mathfrak{I}$, puede considerarse una estructura funcional para el lenguaje $\widehat{L}^{\mathcal{F}}_{(T\times W)}$-$\mathfrak{I}$, obtenido extendiendo $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$-$\mathfrak{I}$ de forma natural.*
2. *El estudio de la definibilidad de las distintas propiedades de las funciones de accesibilidad podría hacerse con fórmulas no indizadas (como en el capítulo 1) pero no con las indizadas (como en el capítulo 2), ya que al permitir la existencia de funciones de accesibilidad que no tienen imagen en mundos indizados, la propiedad definida por fórmulas indizadas no afectaría necesariamente a todas las funciones de accesibilidad. Por ejemplo, si consideramos el conjunto $\mathfrak{I} = \{i\}$, la estructura funcional $\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}} = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, dada por:*

Es decir:

- $W = \{w, w'\}$, *siendo* $W \cap \mathfrak{I} = \varnothing$.
- $\mathcal{T} = \{(T_w, <_w); (T_{w'}, <_{w'})\}$, *siendo:*
  - $T_w = \{t_w, t'_w\}; <_w = \{(t_w, t'_w)\}$
  - $T_{w'} = \{t'_{w'}\}; <_{w'} = \varnothing$
- $\mathcal{F} = \{\overset{w\,w'}{\longrightarrow}\}$, *siendo:* $\overset{w\,w'}{\longrightarrow} = \{(t'_w, t_{w'})\}$

  Es evidente que:

  $$(Tot)\text{-}ind \quad \{<i>(HA \wedge A \wedge GA) \rightarrow (H<i>A \wedge G<i>A) \mid i \in \mathcal{I}\}$$

  es un conjunto (unitario en este caso) de fórmulas válidas en nuestra estructura $\widehat{\Sigma}^{\mathfrak{I}}$ *y, sin embargo* $\overset{w\,w'}{\longrightarrow}$ *no es una función total.*

3. *El enfoque presentado no se corresponde con la idea intuitiva de lo que ocurre en la lógica temporal lineal con flujo de tiempo discreto FNext con la semántica de* F *y* $\oplus$, *ya que, en dicha lógica temporal, el futuro indeterminado induce un futuro determinado, es decir, si se da* Fp, *podemos asegurar que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que también se verifica* $\oplus^n p$, *mientras que con esta definición podría darse* $\Diamond p$ *sin que necesariamente se diese* $<i>p$ *para algún* $i \in \mathfrak{I}$, *como ya vimos en el ejemplo 4.1.1.*

4.2. Nuevas clases de estructuras funcionales definibles en $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$

En esta sección volvemos a trabajar con la lógica $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$, presentada en el capítulo 2, contemplando nuevas propiedades en el conjunto de funciones de accesibilidad $\mathcal{F}$.

Comenzamos introduciendo la siguiente notación, que será de utilidad en el resto del capítulo.

Notación. Dada cualquier fórmula $A \in L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$, denotaremos por:

- ζA a la fórmula $\zeta A \equiv HA \wedge A \wedge GA$;
- $\zeta^* A$ a la fórmula $\zeta^* A \equiv HA \wedge GA$;
- τA a la fórmula $\tau A \equiv PA \vee A \vee FA$;
- $\tau^* A$ a la fórmula $\tau^* A \equiv PA \vee FA$.

Ahora, como consecuencia inmediata de la definición de la semántica para $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$, se tiene el resultado siguiente.

Proposición 4.2.1 *Si (Σ, h) es un modelo funcional para $L^{\mathcal{F}}_{T\times W}$, entonces:*

1. $h(\zeta A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma \mid T_w \subseteq h(A)\}$
2. $h(\zeta^* A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma \mid (\leftarrow, t_w) \cup (t_w, \rightarrow) \subseteq h(A)\}$
3. $h(\tau A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma \mid T_w \cap h(A) \neq \varnothing\}$
4. $h(\tau^* A) = \{t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma \mid ((\leftarrow, t_w) \cup (t_w, \rightarrow)) \cap h(A) \neq \varnothing\}$
5. $\mathcal{F}_w(T_w) \subseteq h(\zeta A)$ *si y sólo si* $\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_w) \subseteq h(A)$ [5]
6. *Sea $\Lambda \subseteq W$. Consideremos un único subconjunto $X_w \subseteq T_w$, para cada $w \in \Lambda$. Si denotamos $X = \bigcup\limits_{w\in\Lambda} X_w$* [6] *y*

   $$\mathcal{F}_{/X} = \bigcup_{w\in\Lambda} \mathcal{F}_{w/X_w}, \text{ siendo } \mathcal{F}_{w/X_w} = \{\xrightarrow{w\,w'} \in \mathcal{F}_w \mid Dom(\xrightarrow{w\,w'}) \cap X_w \neq \varnothing\}$$

   Entonces:

   a) $\mathcal{F}(X) \subseteq h(\zeta A)$ *si y sólo si* $\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/X}) \subseteq h(A)$.
   b) $X \subseteq h(\Box A)$ *si y sólo si* $\mathcal{F}(X) \subseteq h(A)$

4.2.1. Estructurando el conjunto $\mathcal{F}$ de funciones de accesibilidad

Recordemos que en las estructuras kripkeanas se establece una relación binaria entre los "mundos posibles" de un conjunto no vacío W, llamada *relación R de accesibilidad*. En cambio, en las estructuras funcionales introducimos W como un conjunto de etiquetas para flujos temporales (los flujos T_w, $w \in W$) asociados a cada mundo) y entre estos flujos una conexión descrita mediante funciones. Es obvio que esta conexión *funcional* induce una relación (de accesibilidad) entre las etiquetas (elementos de W) de los flujos conectados, como recoge la definición siguiente.

Definición 4.2.2 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Definimos la relación $R_\mathcal{F}$ sobre W de la siguiente forma:*

$$w\, R_\mathcal{F}\, w' \text{ si y sólo si existe } \xrightarrow{w\,w'} \in \mathcal{F}$$

En estas condiciones diremos que $\mathcal{F}$ **induce** *la relación $R_\mathcal{F}$.*

[5] Recordemos que:

- $\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_w) = \bigcup\limits_{\xrightarrow{w\,w'} \in \mathcal{F}_w} T_{w'}$. Y en consecuencia:
- $\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}) = \bigcup\limits_{w\in W} \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_w)$

[6] Advirtamos que X es una unión disjunta

Es natural, en consecuencia, plantearse estructurar el conjunto $\mathcal{F}$ de funciones de accesibilidad, dotándolo de propiedades análogas a las contempladas en la lógica modal y que dan lugar a los sistemas modales bien conocidos. Sin embargo, en este caso podemos establecer discriminaciones más finas conforme a las propiedades de las funciones. Más concretamente, podemos establecer por ejemplo, una relación transitiva entre flujos mediante composición o no. Esto nos lleva a que podamos definir la mencionada propiedad de transitividad (y otras propiedades) de la relación de accesibilidad inducida $R_{\mathcal{F}}$ de diferentes maneras, según las propiedades específicas que conlleve el conjunto de funciones, lo que dota al planteamiento funcional de mayor versatilidad.

Propiedad de reflexividad

Comenzamos contemplando la propiedad de reflexividad que, como veremos, puede ser capturada con nuestro planteamiento funcional de dos modos. En principio, podemos considerar una reflexividad "débil", como recoge la siguiente definición.

Definición 4.2.3 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Decimos que $\mathcal{F}$ es* **débilmente reflexiva** *si satisface la condición siguiente:*

$$\textit{para todo } w \in W \textit{ existe } \xrightarrow{w\, w} \in \mathcal{F}$$

Ahora son obvios los siguientes resultados.

Proposición 4.2.4 *Si $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una estructura funcional y $\mathcal{F}$ es débilmente reflexiva, entonces la relación binaria $R_{\mathcal{F}}$ inducida en W es reflexiva.*

Proposición 4.2.5 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. $\mathcal{F}$ es débilmente reflexiva si, y sólo si, para todo $w \in W$:*

$$(d\text{-}reflex) \qquad \mathcal{F}(T_w) \cap T_w \neq \varnothing$$

Como consecuencia de lo anterior, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.6

1. *$\mathbb{K}_{d\text{-}reflex} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ es débilmente reflexiva$\}$ es definible.*
2. *$\mathbb{K}_{tot\text{-}d\text{-}reflex} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ es de funciones totales y débilmente reflexiva $\}$ es definible en $\mathbb{K}_{tot}$ por la fórmula $\Box A \to \tau A$*

Demostración:

1. Veamos que la fórmula $\zeta\Box A \to \tau A$ define la clase $\mathbb{K}_{d\text{-}reflex}$.

Para ello, sea (Σ, h) un modelo tal que $\Sigma \in \mathbb{K}_{d\text{-}reflex}$. Para probar la validez de la fórmula $\zeta\Box A \to \tau A$, basta tener en cuenta que:

- $h(\zeta\Box A) = \{t_w \mid \mathcal{F}(T_w) \subseteq h(A)\}$,

- $h(\tau A) = \{t_w \mid T_w \cap h(A) \neq \varnothing\}$.
- (d-$reflex$) asegura que, $\mathcal{F}(T_w) \cap T_w \neq \varnothing$.

Recíprocamente, si $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \notin \mathbb{K}_{d\text{-}reflex}$, entonces, por la proposición 4.2.5, se tiene que, para algún $w \in W$:

$$\mathcal{F}(T_w) \cap T_w = \varnothing$$

Ahora es suficiente con definir un modelo (Σ, h) tal que $h(p) = \mathcal{C}oord_\Sigma - T_w$, para refutar $\zeta\Box p \to \tau p$ en cualquier coordenada de T_w.

2. Puede comprobarse fácilmente que la fórmula $\Box A \to \tau A$ define la clase $\mathbb{K}_{\text{-}tot\text{-}d\text{-}reflex}$ en la clase $\mathbb{K}_{tot}$.

Pasamos ya a dar una definición más restrictiva de reflexividad.

Definición 4.2.7 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Decimos que $\mathcal{F}$ es* **reflexiva** *si, para todo $w \in W$ se tiene que $id_{T_w} \in \mathcal{F}$.*

Obviamente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.2.8 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Entonces, si $\mathcal{F}$ es reflexiva también es débilmente reflexiva.*

Es igualmente trivial comprobar que el inverso no es cierto.

La proposición siguiente es consecuencia inmediata de la definición anterior.

Proposición 4.2.9 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. $\mathcal{F}$ es reflexiva si, y sólo si, para todo $w \in W$ y toda $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene*

$$(reflex) \qquad t_w \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})$$

Como consecuencia de lo anterior, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.10 *La clase $\mathbb{K}_{reflex} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ es reflexiva $\}$ es definible.*

Demostración:
Es inmediato comprobar que la fórmula $\Box A \to A$ define $\mathbb{K}_{reflex}$.

Propiedad de transitividad

Abordamos ahora la propiedad de la transitividad que, como en el caso de la reflexividad, puede ser capturada con nuestro planteamiento funcional de dos modos. En principio, consideramos una transitividad "débil" como recoge la siguiente definición.

Definición 4.2.11 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Decimos que $\mathcal{F}$ es* **débilmente transitiva** *si satisface la condición siguiente:*

$$\textit{para todo par } \overset{w\,w'}{\longrightarrow}, \overset{w'w''}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}, \ \textit{existe } \overset{w\,w''}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$$

Ahora es obvio el siguiente resultado.

Proposición 4.2.12 *Si $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una estructura funcional y $\mathcal{F}$ es débilmente transitiva, entonces la relación binaria $R_{\mathcal{F}}$ inducida en W es transitiva.*

Proposición 4.2.13 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. $\mathcal{F}$ es débilmente transitiva si y sólo si, para toda coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$:*

$$(d\text{-}trans) \qquad \mathcal{F}(\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\{t_w\}})) \subseteq \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/T_w})$$

Demostración:

Supongamos que $\mathcal{F}$ es débilmente transitiva y sea $T_{w'} \subseteq \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\{t_w\}})$. Entonces existe $\xrightarrow{w\,w'} \in \mathcal{F}_{/\{t_w\}}$. Bastará demostrar que $\mathcal{F}_{w'}(T_{w'}) \subseteq \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/T_w})$.

Si $\mathcal{F}_{w'} = \varnothing$ el resultado es obvio.

Supongamos que $\mathcal{F}_{w'} \neq \varnothing$ y sea $\xrightarrow{w'w''} \in \mathcal{F}_{w'}$. Por ser $\mathcal{F}$ débilmente transitiva, existe $\xrightarrow{w\,w''} \in \mathcal{F}$ y, obviamente, se tiene que:

$$\xrightarrow{w'w''} (T_{w'}) \subseteq T_{w''} = \mathcal{R}ecorrido(\xrightarrow{w\,w''}) \subseteq \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/T_w})$$

que asegura el resultado.

Recíprocamente, supongamos que se verifica la inclusión (*d-trans*). Entonces, si $\xrightarrow{w\,w'}$, $\xrightarrow{w'w''} \in \mathcal{F}$, se tiene que $\varnothing \neq \xrightarrow{w'w''} (T_{w'}) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{R}\text{ecorrido}(\mathcal{F}_{/\{t_w\}}))$, para algún $t_w \in Dom(\xrightarrow{w\,w'})$. La inclusión (*d-trans*) asegura que $\varnothing \neq \xrightarrow{w'w''} (T_{w'}) \subseteq \mathcal{R}\text{ecorrido}(\mathcal{F}_{/T_w})$ y, en consecuencia, que existe $\xrightarrow{w\,w''} \in \mathcal{F}$. Es decir, $\mathcal{F}$ es débilmente transitiva.

Ahora tenemos todos los elementos para asegurar el siguiente resultado.

Teorema 4.2.14

1. *$\mathbb{K}_{d\text{-}trans} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ es débilmente transitiva$\}$ es definible.*
2. *$\mathbb{K}_{u\text{-}dom\text{-}d\text{-}trans} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ es* `(U-Dom)` *y débilmente transitiva $\}$ es definible en $\mathbb{K}_{u\text{-}dom}$ por la fórmula $\Box\zeta A \to \Box\zeta\Box A$*
3. *$\mathbb{K}_{tot\text{-}d\text{-}trans} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ es de funciones totales y débilmente transitiva $\}$ es definible en $\mathbb{K}_{tot}$ por la fórmula $\Box\zeta A \to \Box\Box A$*

Demostración:

1. Veamos que la fórmula $\zeta\Box\zeta A \to \Box\zeta\Box A$ define la clase $\mathbb{K}_{d\text{-}trans}$.

Para ello, sea $\Sigma \in \mathbb{K}_{d\text{-}trans}$ y (Σ, h) un modelo funcional. Para probar la validez de la fórmula $\zeta\Box\zeta A \to \Box\zeta\Box A$ basta tener en cuenta que:

- $h(\zeta\Box\zeta A) = \{t_w \mid \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/T_w}) \subseteq h(A)\}$.
- $h(\Box\zeta\Box A) = \{t_w \mid \mathcal{F}(\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\{t_w\}})) \subseteq h(A)\}$.

- (d-$trans$) asegura que, para toda coordenada t_w, se tiene:

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\{t_w\}})) \subseteq \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/T_w})$$

Recíprocamente, si $\Sigma \notin \mathbb{K}_{d\text{-}trans}$, entonces, de nuevo por la proposición 4.2.13, tenemos que existe t_w tal que:

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\{t_w\}})) \nsubseteq \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/T_w})$$

Ahora basta con definir un modelo (Σ, h) tal que $h(p) = \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/T_w})$, para refutar $\zeta\Box\zeta p \rightarrow \Box\zeta\Box p$ en t_w.

Análogamente se demuestran los ítemes 2 y 3.

Pasamos ya a dar una definición más restrictiva de transitividad.

Definición 4.2.15 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Decimos que $\mathcal{F}$ es* **transitiva** *si es cerrada por composición, es decir, si $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}$ y $\stackrel{w'w''}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$, se tiene que*

$$\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}(T_w) \subseteq Dom(\stackrel{w'w''}{\longrightarrow}) \ y \ (\stackrel{w'w''}{\longrightarrow} \circ \stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}) \in \mathcal{F}$$

Obviamente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.2.16 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Entonces, si $\mathcal{F}$ es transitiva también es débilmente transitiva.*

Es igualmente trivial comprobar que el inverso no es cierto.

Es inmediato que la definición de transitividad dada asegura el resultado siguiente [7].

Proposición 4.2.17 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. $\mathcal{F}$ es transitiva si, y sólo si se verifica:*

$$(trans) \quad \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$$

La siguiente proposición es consecuencia de lo anterior y será útil en lo que sigue.

Proposición 4.2.18 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Entonces se cumple que $\mathcal{F}$ es transitiva si y sólo si para toda coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ se verifican*

$$(trans)(i) \quad \mathcal{F}(\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\{t_w\}})) \subseteq \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\mathcal{F}(\{t_w\})})$$

$$(trans)(ii) \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}(\{t_w\}) \subseteq \mathcal{F}(\{t_w\})$$

[7] Que extiende de forma natural la caracterización de relación binaria transitiva R en un conjunto X como aquella que satisface la condición $R \circ R \subseteq R$.

Teorema 4.2.19

1. $\mathbb{K}_{trans} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es transitiva*$\}$ *es definible.*

2. $\mathbb{K}_{u\text{-}dom\text{-}trans} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es* `(U-Dom)` *y transitiva* $\}$ *es definible en* $\mathbb{K}_{u\text{-}dom}$ *por el conjunto de fórmulas*

$$\{\Box\Box\bot \to \Box\zeta\Box\bot, \Box A \to \Box\Box A\}$$

3. $\mathbb{K}_{tot\text{-}trans} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es de funciones totales y transitiva*$\}$ *es definible en* $\mathbb{K}_{tot}$ *por la fórmula* $\Box A \to \Box\Box A$

Demostración:

Veamos 1. El conjunto de fórmulas $\{\Box\Box\zeta A \to \Box\zeta\Box A, \Box A \to \Box\Box A\}$ define $\mathbb{K}_{trans}$.

Sea $\Sigma \in \mathbb{K}_{trans}$ y (Σ, h) un modelo funcional. Tenemos entonces que

$$h(\Box\Box\zeta A) = \{t_w \mid \mathcal{R}ecorrido\big(\mathcal{F}_{/\mathcal{F}(\{t_w\})}\big) \subseteq h(A)\}$$

Por otra parte, ya sabemos que

$$h(\Box\zeta\Box A) = \{t_w \mid \mathcal{F}(\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\{t_w\}})) \subseteq h(A)\}$$

De donde se sigue, utilizando $(trans)(i)$ de la proposición 4.2.18, que si se verifica $t_w \in h(\Box\Box\zeta A)$, entonces $t_w \in h(\Box\zeta\Box A)$. Eso nos proporciona la validez de la fórmula $\Box\Box\zeta A \to \Box\zeta\Box A$. Respecto de la fórmula $\Box A \to \Box\Box A$, su validez es consecuencia inmediata de $(trans)(ii)$ de la proposición 4.2.18, es decir, de $\mathcal{F}(\mathcal{F}_w(\{t_w\}) \subseteq \mathcal{F}_w(\{t_w\})$, para cualquier coordenada t_w.

Recíprocamente, si $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \notin \mathbb{K}_{trans}$, entonces, de nuevo por la proposición 4.2.18, se tiene al menos una de las dos situaciones siguientes:

(a) $\mathcal{F}(\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\{t_w\}})) \nsubseteq \mathcal{R}ecorrido\big(\mathcal{F}_{/\mathcal{F}(\{t_w\})}\big)$

(b) $\mathcal{F}(\mathcal{F}(\{t_w\}) \nsubseteq \mathcal{F}(\{t_w\})$

Si se da (a), entonces es suficiente con definir un modelo (Σ, h) tal que

$$h(p) = \mathcal{R}ecorrido\big(\mathcal{F}_{/\mathcal{F}(\{t_w\})}\big)$$

para refutar $\Box\Box\zeta p \to \Box\zeta\Box p$.
Si, se da (b), entonces definimos un modelo (Σ, h) tal que

$$h(p) = \mathcal{F}(\{t_w\})$$

para refutar $\Box p \to \Box\Box p$.

Veamos 2. Probaremos que el conjunto de fórmulas

$$\{\Box\Box\bot \to \Box\zeta\Box\bot, \Box A \to \Box\Box A\}$$

define $\mathbb{K}_{u\text{-}dom\text{-}trans}$ en $\mathbb{K}_{u\text{-}dom}$.

Para la validez de $\Box\Box\bot \to \Box\zeta\Box\bot$ es suficiente con tener en cuenta lo siguiente:

- $h(\Box\Box\bot) = \{t_w \mid \mathcal{F}(\mathcal{F}(\{t_w\})) = \varnothing\}$
- $h(\Box\zeta\Box\bot) = \{t_w \mid \mathcal{F}(\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\{t_w\}})) = \varnothing\}$
- utilizando la proposición 4.2.18, para cualquier coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene lo siguiente:

$$\text{si } \mathcal{F}(\mathcal{F}_w(\{t_w\})) = \varnothing, \text{ entonces } \mathcal{F}(\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\{t_w\}})) = \varnothing$$

El resto de la demostración es idéntica a la del apartado 1.

Veamos 3. Se demuestra, de forma similar, que la fórmula $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ define $\mathbb{K}_{tot\text{-}trans}$ en $\mathbb{K}_{tot}$.

Propiedad de simetría

Igual que en los apartados anteriores, podemos capturar la noción de simetría de dos maneras.

Definición 4.2.20 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Decimos que $\mathcal{F}$ es* **débilmente simétrica** *si satisface la condición siguiente:*

$$si \ \stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}, \ existe \ \stackrel{w'w}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$$

El siguiente resultado es obvio.

Proposición 4.2.21 *Si $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una estructura funcional y $\mathcal{F}$ es débilmente simétrica, entonces la relación binaria $R_\mathcal{F}$ inducida en W es simétrica.*

Proposición 4.2.22 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. $\mathcal{F}$ es débilmente simétrica si, y sólo si, para toda coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ tal que $\mathcal{F}_w \neq \varnothing$, se tiene que*

$$(d\text{-}sim) \qquad t_w \in \bigcap_{\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w} \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{w'})$$

Demostración:

Supongamos que $\mathcal{F}$ es débilmente simétrica y sea $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$. Si $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$, como nuestra estructura es débilmente simétrica, existe $\stackrel{w'w}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$ y, por ello, se tiene que $t_w \in \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{w'})$, verificándose así (*d-sim*).

Recíprocamente, si $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$, por (*d-sim*), tenemos que, para todo $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se verifica que $t_w \in \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{w'})$ y, por tanto, existe $\stackrel{w'w}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$.

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.23

1. $\mathbb{K}_{d\text{-}sim} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es débilmente simétrica* $\}$ *es definible.*

2. $\mathbb{K}_{tot\text{-}d\text{-}sim} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es de funciones totales y débilmente simétrica* $\}$ *es definible en* $\mathbb{K}_{tot}$ *por la fórmula* $A \to \Box\Diamond\tau A$.

Demostración:

Veamos 1. La fórmula $A \to \zeta\Box\tau\Diamond\tau A$ define la clase $\mathbb{K}_{d\text{-}sim}$. Para ello, si tenemos que $\Sigma \in \mathbb{K}_{d\text{-}sim}$ y (Σ, h) es un modelo tal que $t_w \in h(A)$. Por la proposición 4.2.22, tenemos que, para todo $\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}_w$, se verifica $\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{w'}) \cap h(A) \neq \varnothing$, que es equivalente a $t_w \in h(\zeta\Box\tau\Diamond\tau A)$.

Recíprocamente, si $\Sigma \notin \mathbb{K}_{d\text{-}sim}$, de nuevo por la proposición 4.2.22, tenemos que existe $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ tal que

$$t_w \notin \bigcap_{\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}_w} \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{w'})$$

luego existe $\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}_w$ tal que $t_w \notin \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{w'})$.

Ahora basta tomar un modelo (Σ, h) tal que $h(p) = \{t_w\}$ para refutar la fórmula $p \to \zeta\Box\tau\Diamond\tau p$ en t_w.

El razonamiento para probar que la fórmula $A \to \Box\Diamond\tau A$ define la clase $\mathbb{K}_{tot\text{-}sim}$ en $\mathbb{K}_{tot}$ es similar al de 1.

A continuación presentamos la versión fuerte de la simetría.

Definición 4.2.24 *Sea* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ *una estructura funcional. Diremos que* $\mathcal{F}$ *es* **simétrica** *si, para toda* $\xrightarrow{w\ w'} \in \mathcal{F}$*, se tiene que* $(\xrightarrow{w\ w'})^{-1} \in \mathcal{F}$ [8].

Observación 4.2.1 *De la definición anterior se deduce que las funciones de accesibilidad de este tipo de estructuras deben ser inyectivas.*

Obviamente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.2.25 *Sea* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ *una estructura funcional. Entonces, si* $\mathcal{F}$ *es simétrica también es débilmente simétrica.*

Es igualmente trivial comprobar que el inverso no es cierto.

[8] Entendemos que $(\xrightarrow{w\ w'})^{-1} : T_{w'} \to T_w$ tal que

$$(\xrightarrow{w\ w'})^{-1} \circ \xrightarrow{w\ w'} = id_{Dom(\xrightarrow{w\ w'})} \text{ y } \xrightarrow{w\ w'} \circ (\xrightarrow{w\ w'})^{-1} = id_{\xrightarrow{w\ w'}(T_w)}$$

por lo que no exigimos totalidad.

Proposición 4.2.26 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Entonces $\mathcal{F}$ es simétrica si, y sólo si, para toda $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$, se tiene que*

$$(sim) \qquad t_w \in \bigcap_{t_{w'} \in \mathcal{F}_w(t_w)} \mathcal{F}_{w'}(\{t_{w'}\})$$

Demostración:

Sea $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$. Supongamos que $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(t_w)$, es decir, $\xrightarrow{w\,w'}(t_w) = t_{w'}$. Como $\mathcal{F}$ es simétrica, se tiene que $(\xrightarrow{w\,w'})^{-1} \in \mathcal{F}$ y, por ello, $t_w \in \mathcal{F}_{w'}(t_{w'})$.

Recíprocamente, sean $\xrightarrow{w\,w'} \in \mathcal{F}$ y $t_w, t_{w'} \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, tales que $\xrightarrow{w\,w'}(t_w) = t_{w'}$, lo que significa que $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(t_w)$. Ahora, por (sim), obtenemos que $t_w \in \mathcal{F}_{w'}(t_{w'})$, es decir, que $(\xrightarrow{w\,w'})^{-1} \in \mathcal{F}$.

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.27 $\mathbb{K}_{sim} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es simétrica*$\}$ *es definible.*

Demostración:

La fórmula $A \to \Box\Diamond A$ define la clase $\mathbb{K}_{sim}$. Para probarlo, procederemos como sigue. Si $\Sigma \in \mathbb{K}_{sim}$ y (Σ, h) es un modelo tal que $t_w \in h(A)$, pueden darse dos posibilidades:

(i) Si $t_w \notin Dom(\mathcal{F}_w)$, se tiene que $t_w \in h(\Box\Diamond A)$ de forma evidente.

(ii) Si $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$, utilizando la proposición anterior, tenemos que, para todo $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(t_w)$, $\mathcal{F}_{w'}(t_{w'}) \cap h(A) \neq \varnothing$, es decir, $t_w \in h(\Box\Diamond A)$.

Recíprocamente, si $\Sigma \notin \mathbb{K}_{sim}$ significa, según la proposición 4.2.26, que no se verifica (sim), es decir, que existen coordenadas $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$ y $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(t_w)$ tales que $t_w \notin \mathcal{F}_{w'}(t_{w'})$. Ahora basta tomar un modelo (Σ, h) tal que $h(p) = \{t_w\}$ para refutar $p \to \Box\Diamond p$ en t_w.

Propiedad euclídea

Igual que en los apartados anteriores, daremos dos definiciones de esta propiedad. Comenzamos por la más débil.

Definición 4.2.28 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Diremos que $\mathcal{F}$ es* **débilmente euclídea** *si, siempre que existen $\xrightarrow{w\,w'}$, $\xrightarrow{w\,w''} \in \mathcal{F}$, se tiene que existe $\xrightarrow{w'w''} \in \mathcal{F}$.*

El siguiente resultado es consecuencia directa de la definición.

Proposición 4.2.29 *Si $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una estructura funcional y $\mathcal{F}$ es débilmente euclídea, entonces la relación binaria $R_{\mathcal{F}}$ inducida en W es euclídea.*

Proposición 4.2.30 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. $\mathcal{F}$ es débilmente euclídea si, y sólo si, para toda coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, se tiene que*

$$(d\text{-}eucl) \qquad \mathcal{F}_w(\{t_w\}) \subseteq \bigcap_{\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w} \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{w'})$$

Demostración:

Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional tal que $\mathcal{F}$ es débilmente euclídea. Sea $t_{w''} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})$, es decir, que existe $\stackrel{w\,w''}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$ tal que $\stackrel{w\,w''}{\longrightarrow}(t_w) = t_{w''}$. Por otro lado, sea $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}_w$, esto significa que existen coordenadas t'_w y $t'_{w'}$ tales que $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}(t'_w) = t'_{w'}$. Como $\mathcal{F}$ es débilmente euclídea, existe una función $\stackrel{w'w''}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$ y, por ello, $t_{w''} \in \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{w'})$, probándose así ($d$-$eucl$).

Recíprocamente, si $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}, \stackrel{w\,w''}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$, entonces existen $t_w, t_{w''} \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ tales que $t_{w''} \in \mathcal{F}_w(\{t_w\})$. Ahora, por ($d$-$eucl$), se verifica que $t_{w''} \in \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{w'})$ y, por tanto, $\stackrel{w'w''}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$, probándose que $\mathcal{F}$ es débilmente euclídea.

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.31

1. $\mathbb{K}_{d\text{-}eucl} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es débilmente euclídea*$\}$ *es definible.*

2. $\mathbb{K}_{tot\text{-}d\text{-}eucl} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es de funciones totales y débilmente euclídea*$\}$ *es definible en* $\mathbb{K}_{tot}$ *por la fórmula* $\Diamond A \to \Box\Diamond\tau A$.

Demostración:

Veamos 2. Si $\Sigma \in \mathbb{K}_{tot\text{-}d\text{-}eucl}$ y (Σ, h) es un modelo tal que $t_w \in h(\Diamond A)$, entonces se verifica que $\mathcal{F}_w(t_w) \cap h(A) \neq \varnothing$. Ahora, por la proposición 4.2.30 y utilizando la totalidad de las funciones de accesibilidad, tenemos que, para toda coordenada $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(t_w)$, se verifica

$$\mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\{t_{w'}\}}) \cap h(A) \neq \varnothing, \text{ es decir, } t_w \in h(\Box\Diamond\tau A)$$

Recíprocamente, si $\Sigma \notin \mathbb{K}_{tot\text{-}d\text{-}eucl}$, de nuevo la proposición 4.2.30, tenemos que existen $t_{w'}, t_{w''} \in \mathcal{F}_w(t_w)$, tales que

$$t_{w''} \notin \mathcal{R}ecorrido(\mathcal{F}_{/\{t_{w'}\}})$$

Ahora basta tomar un modelo (Σ, h) tal que $h(p) = \{t_{w''}\}$ para refutar la fórmula $\Diamond p \to \Box\Diamond\tau p$ en t_w.

Análogamente se prueba 1. La fórmula $\Diamond A \to \zeta\Box\tau\Diamond\tau A$ define la clase $\mathbb{K}_{d\text{-}eucl}$.

Pasamos ya a la definición más fuerte.

Definición 4.2.32 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Diremos que $\mathcal{F}$ es* **euclídea** *si es débilmente euclídea y, además, para toda coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, tal que existen $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}(t_w) = t_{w'}$ y $\stackrel{w\,w''}{\longrightarrow}(t_w) = t_{w''}$, entonces $\stackrel{w'w''}{\longrightarrow}(t_{w'}) = t_{w''}$.*

Observación 4.2.2 *Si $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una estructura funcional tal que $\mathcal{F}$ contiene funciones con dominio uniforme, la definición anterior queda simplificada de la forma siguiente: $\mathcal{F}$ es* **euclídea** *si, y sólo si, para toda coordenada $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$, tal que existen $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}(t_w) = t_{w'}$ y $\stackrel{w\,w''}{\longrightarrow}(t_w) = t_{w''}$, entonces se tiene que $\stackrel{w'w''}{\longrightarrow}(t_{w'}) = t_{w''}$.*

Obviamente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.2.33 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Entonces, si $\mathcal{F}$ es euclídea también es débilmente euclídea.*

Es igualmente trivial comprobar que el inverso no es cierto.

Proposición 4.2.34 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Entones, $\mathcal{F}$ es euclídea si, y sólo si, verifica (d-eucl) y, además, para todo $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$, se tiene:*

$$(eucl) \qquad \mathcal{F}_w(t_w) \subseteq \bigcap_{t_{w'} \in \mathcal{F}_w(t_w)} \mathcal{F}_{w'}(\{t_{w'}\})$$

Demostración:
Supongamos que $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional, donde $\mathcal{F}$ es euclídea. Dado que es débilmente euclídea, por la proposición 4.2.30, se verifica (*d-eucl*). Sea $t_{w''} \in \mathcal{F}_w(t_w)$, es decir, existe $\stackrel{w\,w''}{\longrightarrow} \in \mathcal{F}$ tal que $\stackrel{w\,w''}{\longrightarrow}(t_w) = t_{w''}$. Sea también $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(t_w)$, lo cual significa que $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}(t_w) = t_{w'}$. Como $\mathcal{F}$ es euclídea , se tiene que $\stackrel{w'w''}{\longrightarrow}(t_{w'}) = t_{w''}$ y, por ello, $t_{w''} \in \mathcal{F}_{w'}(\{t_{w'}\})$, lo que prueba (*eucl*).

Recíprocamente, de nuevo por la proposición 4.2.30 y por verificarse (*d-eucl*), tenemos que $\mathcal{F}$ es débilmente euclídea. Veamos ahora que es euclídea.

Sea $t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma$ tal que existen $\stackrel{w\,w'}{\longrightarrow}(t_w) = t_{w'}$ y $\stackrel{w\,w''}{\longrightarrow}(t_w) = t_{w''}$, lo que nos lleva a que $t_{w''} \in \mathcal{F}_w(t_w)$. Ahora, utilizando (*eucl*), tenemos que $t_{w''} \in \mathcal{F}_{w'}(t_{w'})$, es decir $\stackrel{w'w''}{\longrightarrow}(t_{w'}) = t_{w''}$.

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.35

1. $\mathbb{K}_{eucl} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F}$ *es euclídea*$\}$ *es definible.*

2. $\mathbb{K}_{u\text{-}dom\text{-}eucl}$ *es definible en* $\mathbb{K}_{u\text{-}dom}$ *(respectivamente,* $\mathbb{K}_{tot\text{-}eucl}$ *es definible en* $\mathbb{K}_{tot}$*) por la fórmula* $\Diamond A \to \Box\Diamond A$.

Demostración:

Veamos 1. Probaremos que el conjunto de fórmulas

$$\{\Diamond A \to \zeta\Box\tau\Diamond\tau A, \Diamond A \to \Box\Diamond A\}$$

define la clase $\mathbb{K}_{eucl}$. Para ello, supongamos que $\Sigma \in \mathbb{K}_{eucl}$, entonces tenemos que $\Sigma \in \mathbb{K}_{d\text{-}eucl}$ y, según el apartado 1 del teorema 4.2.31, tenemos que es válida la fórmula $\Diamond A \to \zeta\Box\tau\Diamond\tau A$.

Por otro lado, si (Σ, h) es un modelo tal que $t_w \in h(\Diamond A)$, tenemos que se verifica $\mathcal{F}_w(t_w) \cap h(A) \neq \varnothing$. Ahora, por la proposición 4.2.34, se tiene que, para toda coordenada $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(t_w)$, se verifica que $\mathcal{F}_{w'}(t_{w'}) \cap h(A) \neq \varnothing$, lo que es equivalente a que $t_w \in h(\Box\Diamond A)$. Por tanto, también es válida la fórmula $\Diamond A \to \Box\Diamond A$.

Recíprocamente, si $\Sigma \notin \mathbb{K}_{eucl}$, se verifica alguna de las circunstancias siguientes:

- $\Sigma \notin \mathbb{K}_{d\text{-}eucl}$, en cuyo caso construimos un contramodelo para $\Diamond p \to \zeta\Box\tau\Diamond\tau p$, tal como hicimos en la prueba del teorema 4.2.31;

- no se verifica (*eucl*) para alguna coordenada $t_w \in Dom(\mathcal{F}_w)$, lo que significa que existe $t_{w''} \in \mathcal{F}_w(t_w)$ tal que $t_{w''} \notin \mathcal{F}_{w'}(\{t_{w'}\})$ para algún $t_{w'} \in \mathcal{F}_w(t_w)$. Ahora basta tomar un modelo (Σ, h) tal que $h(p) = \{t_{w''}\}$ para refutar la fórmula $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ en t_w.

El razonamiento para 2, es similar al de 1, utilizando la proposición 4.2.34 y la observación 4.2.2.

Propiedad de serialidad

Igual que para las propiedades anteriores, comenzamos con una noción débil de serialidad.

Definición 4.2.36 *Sea* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ *una estructura funcional. Decimos que* $\mathcal{F}$ *es* **débilmente serial** *si satisface la condición siguiente:*

$$\textit{para todo } w \in W, \textit{ se tiene que } \mathcal{F}_w \neq \varnothing$$

Los dos resultados siguientes son consecuencia de la definición 4.2.36.

Proposición 4.2.37 *Si* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ *es una estructura funcional y* $\mathcal{F}$ *es débilmente serial, entonces la relación binaria* $R_{\mathcal{F}}$ *inducida en* W *es serial.*

Teorema 4.2.38
La clase $\mathbb{K}_{d\text{-}serial} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \textit{ es débilmente serial}\}$ *es definible.*

Demostración:
Es fácil comprobar que la fórmula $\zeta\Box A \to \tau\Diamond A$ define $\mathbb{K}_{d\text{-}serial}$.

Pasamos ahora a la definición más fuerte.

Definición 4.2.39 *Sea* $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ *una estructura funcional. Decimos que* $\mathcal{F}$ *es* **serial** *si satisface la condición siguiente:*

$$\textit{para toda } t_w \in \mathcal{C}oord_\Sigma, \textit{ se tiene que } \mathcal{F}_w(t_w) \neq \varnothing$$

Obviamente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.2.40 *Sea $\Sigma = (W, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ una estructura funcional. Entonces, si $\mathcal{F}$ es serial también es débilmente serial.*

Es igualmente trivial comprobar que la proposición recíproca no es cierta.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de la definición 4.2.39.

Teorema 4.2.41
La clase $\mathbb{K}_{serial} = \{(W, \mathcal{T}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ es serial}\}$ es definible.

Demostración:
Es de fácil comprobación que la fórmula $\Box A \to \Diamond A$ define $\mathbb{K}_{serial}$.

Trabajo futuro

En este último apartado describimos el trabajo futuro tras la investigación realizada.

Para el futuro nos planteamos diversas cuestiones como las siguientes:

- Nuevas caracterizaciones algebraicas basadas en los siguientes puntos:
    1. Usar correspondencias en lugar de funciones como tipo de conexión entre flujos temporales (trabajo que ya hemos iniciado).
    2. Estudiar la definibilidad de propiedades funcionales usando tipos de flujos temporales lineales específicos (discreto –a corto plazo– y continuo –a medio plazo–) y flujos de tiempos distintos del orden lineal.
    3. Utilizar familias de funciones que partan de cada flujo y no una única función a lo sumo.
- Avanzar en el estudio de la completitud de los sistemas introducidos:
    1. Es una tarea pendiente determinar la completitud/incompletitud de los sistemas que extienden $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}_{T\times W}$ y que tratan con funciones crecientes y decrecientes (tanto totales como parciales de dominio uniforme, y en sentido amplio o estricto).
    2. Estudiar la posibilidad de lograr sistemas completos en todos los casos (incluyendo la sobreyectividad) usando nombres no sólo para especificar el recorrido de las funciones sino igualmente el origen de las mismas.
- Estudiar la decidibilidad de los sistemas funcionales y desarrollar métodos de demostración automática siguiendo la metodología TAS introducida por nuestro grupo de investigación (a corto plazo).
- Hacer uso de lenguajes temporales de mayor potencia expresiva que los lenguajes de Prior, más apropiados para la computación, en particular, considerar el lenguaje completamente expresivo para tiempo lineal y discreto [Burrieza and P. de Guzmán(1992)].
- Abordar problemas concretos en las aplicaciones a sistemas multiagentes y control de procesos.

Bibliografía

[Aguilera and P. de Guzmán(1993)] Aguilera, G. and P. de Guzmán, I.: *Lógica para la Computación I (vol. 1: Lógica Proposicional)*, Editorial Librería Ágora, Málaga 1993.

[Aqvist(1999)] Aqvist, L: *The logic of historical necessity as founded on two-dimensional modal tense logic*, Journal of Philosophical Logic, 28: 329-369, 1999.

[Belnap(1996)] Belnap, N: *Agents in branching time*, *Logic and Reality: Essays in Pure and Applied Logic, in Memory of Arthur Prior*, editado por B. J. Copeland, pp. 239-71 Oxford University Press, Oxford, 1996.

[Belnap and Perloff(1990)] Belnap, N. and Perloff, M: *A canonical form of agentives.* Knowledge Representation and Defeasible Reasonings, ed. by H.E. Kyburg, R.P. Loui, and G.N. Carlson, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[Benthem(1998)] Benthem, J. van.: *Temporal Patterns and Modal Structure*, A. Montarani, A. Policriti and Y. Venema eds, Special issue on Temporal Logic. Logic Journal of the IGPL, 7: 1, 7-26.

[Blackburn(1993)] Blackburn, P.: *Nominal Tense Logic.* Notre Dame Journal of Formal Logic, 34(1), pp. 56-83.

[Blackburn, de Rijke and Y Venema(2001)] Blackburn, P. Rijke, M. de and Venema, Yde.: *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[Brown and Goranko(1999)] Brown, M. and Goranko, V.: *An Extended Branching-Time Ockhamist Temporal Logic*, Journal of Logic, Language and Information, 8, pp. 143-166.

[Burgess(1979)] Burgess, J. P.: *Logic and Time*, Journal of Symbolic Logic, 44, pp. 556-582.

[Burgess(1984)] Burgess, J. P.: *Basic Tense Logic. Handbook of Philosophical Logic, vol 2: Extensions of Classical Logic*, edited by D. Gabbay and F. Guenthner, pp. 89-133. Reidel, Dorchecht, 1984.

[Burrieza and P. de Guzmán(1992)] Burrieza, A. and P. de Guzmán, I.: *A new algebraic semantic approach and some adequate connectives for computation with temporal logic over discrete time.* Journal of Applied Non-Classical Logics, 2, pp. 181-200,1992.

[Burrieza and P. de Guzmán(2002)] Burrieza, A. and P. de Guzmán, I.: *A Temporal $\times$ Modal Approach to the Definability of Properties of Functions*, Lecture Notes 2309, pp. 239-254, 2002.

[Burrieza and P. de Guzmán(2003)] Burrieza, A. and P. de Guzmán, I.: *A functional approach for temporal $\times$ modal logics.* Acta Informática 39, 71-96 (2003).

[Burrieza, P. de Guzmán and Muñoz(2002)] Burrieza, A. P. de Guzmán, I. and Muñoz, E.: *Indexed Flows in Temporal$\times$Modal Logic with Functional Semantics*, Proceedings Ninth International Symposium on Temporal Representation and Reasoning (TIME 02) pp. 146-153, 2002. Published by IEEE Computer Society Press.

[Cordero(1999)] Cordero, P: *Ideales y filtros de implicados/implicantes en lógicas temporales con tiempo lineal y discreto*, Tesis doctoral. Universidad de Málaga. España.

[Chellas(1992)] Chellas, B: *Time and Modality in the Logic of Agency.* Studia Logica, 51: 485-517, 1992.

[De Bakker(1980)] De Bakker, J.: *Mathematical Theory of Program Correctness*, Prentice-Hall

[Di Maio and Zanardo(1998)] Di Maio and Zanardo, A.: *A Gabbay-rule free axiomatization of $T \times W$ validity.* Journal of Philosophical Logic,27, pp. 435-487.

[Emerson and Clarke(1980)] Emerson, E. and Clarke, E.: *Characterizing correctness properties of parallel programs using fixpoints*, Lecture Notes in Comp. Sci 85, 169-181

[Enciso(1995)] Enciso, M.: *Lógica temporal y demostración automática de teoremas. Eficiencia y paralelismo*, Tesis doctoral. Universidad de Málaga. España.

[Fagin, Halpern, Moses and Vardi(1995)] Fagin, M., Halpern, J. Y., Moses, Y. and Vardi, M.: *Reasoning about Knowledge*, Mit Press. Cambridge, Massachusets, London, 1995.

[Gabbay, Hodkinson and Reynolds(1994)] Gabbay, D. M., Hodkinson, I. and Reynolds, M.: *Temporal Logic. Mathematical Foundations and Computational Aspects. Volume 1*, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[Gargov and Goranko(1993)] Gargov, G and Goranko, V.: *Modal Logic with names* Journal of Philosophical Logic,22, pp. 607-636.

[Guzman(PrePrint)] . de Guzmán, I.: *Lógicas no Clásicas Computacionales* PrePrint

[Haak(1978)] Haak, S.: *Philosofhy of Logics* Cambridge University Press, 1978.

[Halpern(2001)] Halpern, J. Y.: *Alternative semantics for unawareness*, Games and Economic Behavior, 37, 2001, pp. 321-339.

[Hughes and Cresswell(1996)] Hughes, G. E. and Cresswell, M. J. *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London and New York, 1996.

[Jansana(1990)] Jansana, R. *Una introducción a la lógica modal*, Tecnos, Madrid, 1990.

[Kozen(1983)] Kozen, D.: *Results on the propositional mu-calculus*, Theoret. Comput. Sci, 27, 239-248.

[Kutschera(1993)] Kutschera, V.F: *Causation*, Journal of Philosophical Logic, 22: 563-88, 1993.

[Larsen(1990)] Larsen, K.: *Proof systems for satisfiability in Hennessy-Milner logic with recursion*, Theoret. Comput. Sci., 72, 265-288.

[Lewis(1918)] Lewis, C. I.: *A Survey of Symbolic Logic*, University of California Press, Berkeley.

[Martin-Löf(1987)] Martin-Löf, P. : *Truth of a proposition, evidence of a juedgement, validity of a proof.* Synthese, 73. 1987

[Park(1969)] Park, D.: *Fixpoint induction and proof of program properties.*, Machine inteligence, 5, 59-78. Edinburgh University Press.

[Passy and Tinchev(1991)] Passy, S. and Tinchev, T.: *An essay in combinatory dinamic logic.* Information and Computation, 93, pp. 263-322.

[Peirce(1967)] Peirce, C. S.: *Annotated Catalogue of the Papers of Charles S. Peirce.* Robin, Richard S. Amherst: University of Massachusetts Press, 1967.

[Pratt(1982)] Pratt, V.: *A decidable mu-calculus.* 22nd IEEE Symp. on Found. of Comp. Sci., 421-427.

[Prior(1967)] Prior, A.: *Past, Present and Future.* Oxford University Press, Oxford.

[Ojeda and P. de Guzmán] Ojeda, M. and P. de Guzmán, I.: *Lógica para la Computación (vol. 2: Lógica de Primer Orden)*, Editorial Librería Ágora, Málaga 1997.

[Reynolds(1997)] Reynolds, M: *A decidable temporal logic of parallelism*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 38: 419-36, 1997.

[Segerberg(1970)] Segerberg, K.: *Modal logics with linear alternative relations.* Theoria, 36, 301-322.

[Stirling(1996)] Stirling, C.: *Modal and Temporal Logics for Processes.* Lecture Notes in Computer Science 1043, 149-237, 1996.

[Thomason(1984)] Thomason, R.H: *Combinations of tense and modality*, Handbook of Philosophical Logic, Vol.2: Extensions of Classical Logic, edited by D. Gabbay and F. Guenthner, pp. 135-165. Reidel, Dordrecht, 1984.

[Thomason and Gupta(1981)] Thomason, R.H. and Gupta, A: *A theory of conditionals in the context of branching time.* Ifs: Conditionals, Belief, Decision, Chance and Time, edited by W. Harper, R. Stalnaker, and G. Pearce, pp. 299-322. Reidel, Dordrecht, 1981.

[Van Fraassen(1981)] Van Fraassen, B: *A temporal framework for conditional and chance*, Ifs: Conditionals, Belief, Decision, Chance and Time, editado por W. Harper, R. Stalnaker, and G. Pearce, pp. 323-40. Reidel, Dordrecht, 1981.

[Wölfl(1999)] Wölfl, S: *Combinations of Tense and Modality for Predicate Logic*, Journal of Philosophical Logic, 28: 371-398, 1999

[Zanardo(1986)] Zanardo, A: *On the Characterizability of the frames for the Unpreventability of the Present and the Past*, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 27: 556-64, 1986.

[Zanardo(1996)] Zanardo, A: Branching-time logic with quantification over branches: the point of view of modal logic, *The Journal of Symbolic Logic*, 61: 1-39, 1996.

Índice alfabético