Joaquim Bonifácio

Determinação gráfica da parábola conhecidos dois pontos da curva e a tangente no vértice (exemplo prático de geometria aplicada ao design)

Convergências n.º 2 - Jan., 2009

RESUMO

No âmbito da geometria euclidiana, abordada do ponto de vista gráfico, propõe-se um procedimento para obter a parábola, conhecidos dois pontos desta e a tangente no vértice. Os dois pontos podem estar a iguais ou a diferentes distâncias da tangente no vértice. Este problema tem solução através de uma construção incomum (Fig. 1), que divulgámos anteriormente em BONIFÁCIO, 2005, 64, e que consiste em determinar o ponto médio M entre a projecção ortogonal de um ponto P da parábola na tangente do vértice e o próprio vértice. PM é a tangente em P. A perpendicular à tangente em M intersecta o eixo da parábola no foco. É feita também aplicação do conceito que define que, do ponto de vista gráfico, as parábolas são todas semelhantes, assumindo tamanhos diferentes ao variar a distância focal. São utilizados conjuntamente métodos da geometria plana e da geometria descritiva.

Palavras-chave: Geometria, geometria euclidiana, parábola, curvas cónicas.

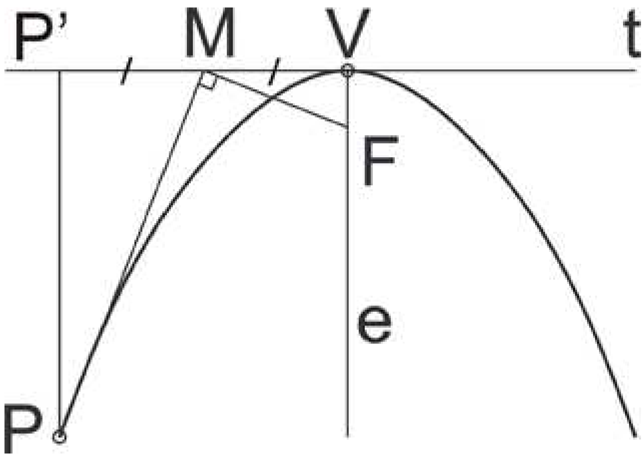

Figura 1

INTRODUÇÃO

Pretende este artigo contribuir para a fundamentação teórica e divulgação de conhecimentos na área da geometria aplicada às artes visuais e ao design, partindo da teoria para as aplicações práticas e para as relações com outras disciplinas.

Em diversas situações somos confrontados com o problema de determinar graficamente uma parábola conhecida a tangente no vértice e dois pontos da parábola, por exemplo, na construção do arco parabólico de apoio de uma ponte, ou seja, conhecida a largura entre os apoios nas duas margens e a respectiva diferença de altura ao tabuleiro da ponte (Fig. 2) e (Fig. 3). Também são problemas similares, por exemplo, se quisermos inscrever a parábola num rectângulo de dimensões conhecidas, o que pode ser aplicado na acústica, nomeadamente no design de campânulas difusoras de som numa direcção determinada, ou na electrónica na determinação do foco de pratos parabólicos, ou na área da óptica, na concepção de determinado tipo de espelhos, ou no design de fornos solares ou ainda na criação de equipamentos para a didáctica da geometria [1].

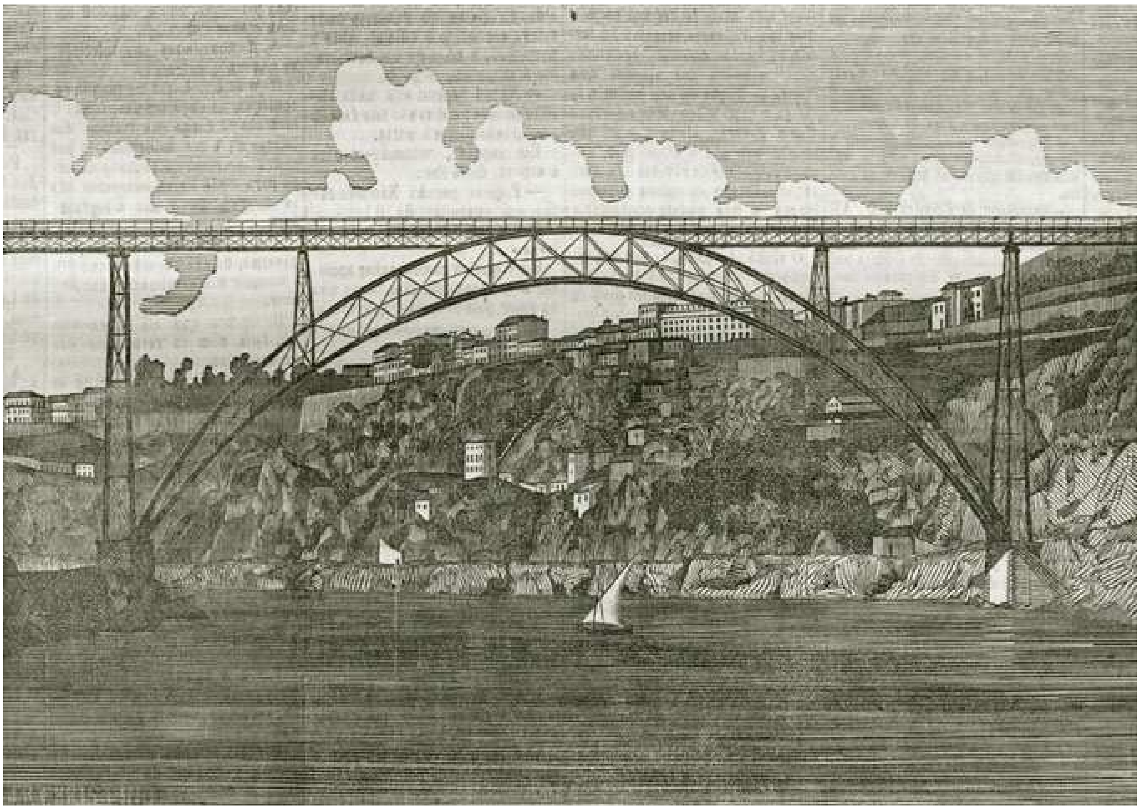

Figura 2. Gravura de 1877. Ponte de D. Maria Pia – Porto http://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_de_D._Maria_Pia em 11/11/08

Figura 3. Fotografia da Ponte Juscelino Kubitschek – Brasília http://pt.wikipedia.org/wiki/Imagem:Brasilia_JK_bridge_pano.jpg em 11/11/08

Tal problema não tem solução utilizando o procedimento mais usual de construção da parábola, que parte da definição da parábola como o conjunto dos pontos que distam igualmente do foco e da directriz. Como é exemplificado na Fig. 4 ao ser conhecida a directriz d, o eixo e e o foco F, para determinar um ponto P qualquer a uma distância r do foco, traçamos um arco com centro F e raio r e intersectamo-lo com uma paralela a d à distância r desta. Procedendo de forma idêntica, variando o valor de r, obteremos outros pontos da parábola. Ou seja, o caso proposto não tem solução por este método, porque não são conhecidos nem o foco nem a directriz.

Um outro processo não aplicável é a construção da parábola por feixes projectivos (Fig. 5), conhecida a distância focal (citada de ASENSI, 1985, 195, fig.10.33). Traça-se o quadrado [VABC]. De notar que VA e AB têm comprimentos iguais a 2p, ou seja o dobro da distância focal, medida do foco F à directriz d. Divide-se VA e AB num qualquer número de partes. Nos pontos de VA traçam-se paralelas ao eixo. Os pontos de AB unem-se ao vértice e onde a linha V1 cruza a paralela ao eixo que passa em 1 obtemos o primeiro ponto. Procedemos da mesma forma para os outros pontos e, se for necessário determinar mais, é só marcar espaços iguais ao longo das duas rectas e repetir o processo.

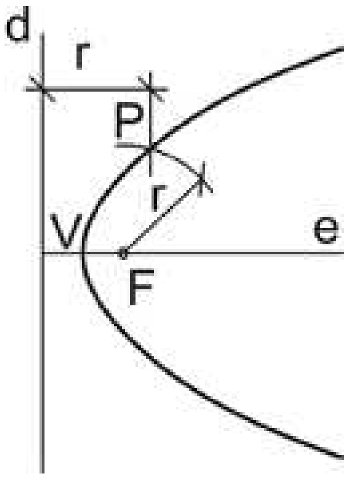

Figura 4

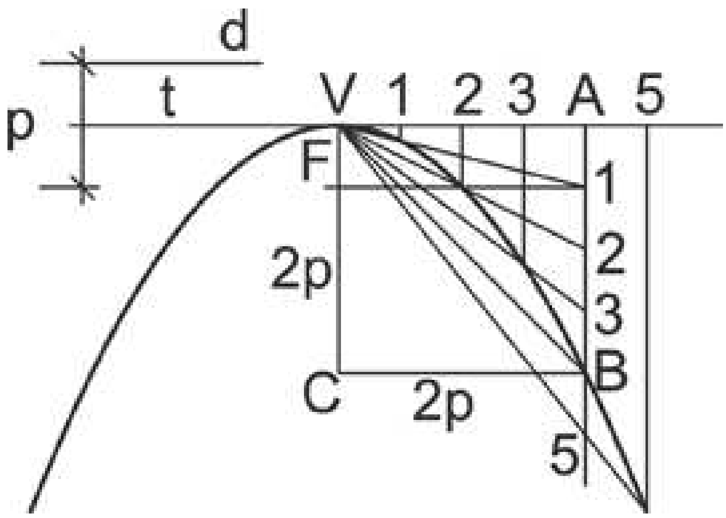

Figura 5

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

Vamos abordar o problema utilizando uma construção que documentámos em BONIFÁCIO, 2005, 64, a qual consiste em determinar o ponto médio M entre a projecção ortogonal de um ponto P da parábola na tangente no vértice e o próprio vértice, sendo que nesse ponto médio M passa a tangente em P e a perpendicular à tangente que igualmente passa no foco da parábola. Tal resulta da dedução de uma propriedade adaptada a partir das descritas em ASENSI, 1985, 189, fig. 10.25., RICCA, 2000, 335, fig. A-29, ou mais claramente com AKOPYAN, 2007, 19, mas que só encontramos completamente formalizada igualmente em DOWNS, 2003. Esta propriedade tem origem, entre outros contributos, no teorema de Fermat que enuncia que se por um ponto P da parábola traçarmos a sua tangente e a intersectarmos com o eixo da parábola, o ponto de intersecção é equidistante do vértice relativamente à projecção ortogonal do ponto P sobre o eixo.

1. Do ponto de vista prático o problema pode ser subdividido em dois outros:

1.1. Determinação gráfica da parábola conhecida a tangente no vértice e dois pontos da parábola a igual distância da tangente.

Dizer que se conhecem dois pontos equidistantes da tangente no vértice, é o mesmo que dizer que se conhece um ponto e o seu simétrico relativamente ao eixo e, consequentemente, o próprio vértice.

1.1.a) Sendo os dois pontos dados A e B equidistantes da tangente, determinar um ponto P da parábola a uma dada distância do eixo (Fig. 6).

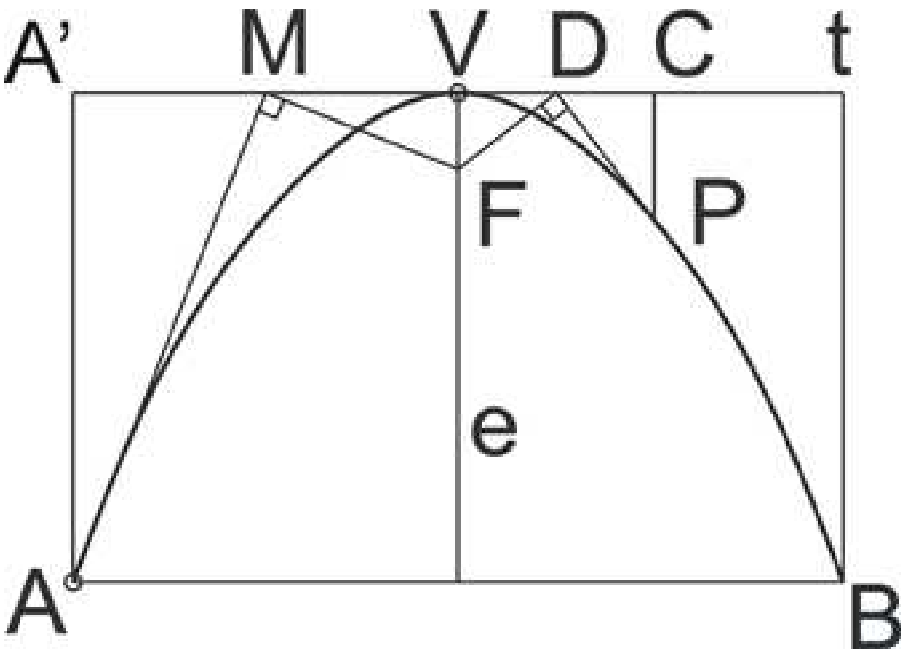

Figura 6

Marcar o ponto M, ponto médio da distância A'V sobre a tangente t ao vértice. Unir M a A, que é a tangente à parábola no ponto A, e traçar a perpendicular em M até cruzar o eixo obtendo F, que é o foco. Para obter um ponto P da parábola, passa-se uma paralela ao eixo no ponto C à distância do eixo a que pretendemos obter P, e determina-se D, ponto médio da distância na tangente t, que se une ao foco, traçando a seguir a perpendicular até cruzar a paralela ao eixo que passa em C.

1.1.b) Conhecidos um ponto A qualquer, o vértice V e o eixo e obter o ponto P a uma distância dada m da tangente t no vértice (Fig. 7).

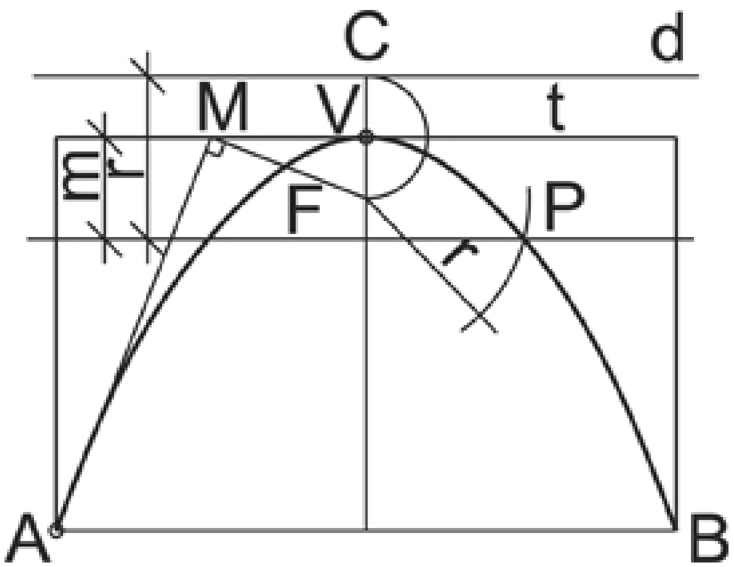

Figura 7

Proceder da mesma forma que no caso anterior para determinar o foco. Marcar a directriz d da parábola, paralela à tangente t sendo que a distância de V a C é igual à distância de V ao foco F. A obtenção do ponto P à distância m da tangente pode ser feita traçando uma paralela à directriz na posição pretendida, medindo a distância r entre as duas e com centro no foco e raio igual a essa distância traçar o arco que intersecta a paralela no ponto P.

1.2. Determinação gráfica da parábola conhecida a tangente no vértice e dois pontos da parábola a diferentes distâncias desta (Fig. 8).

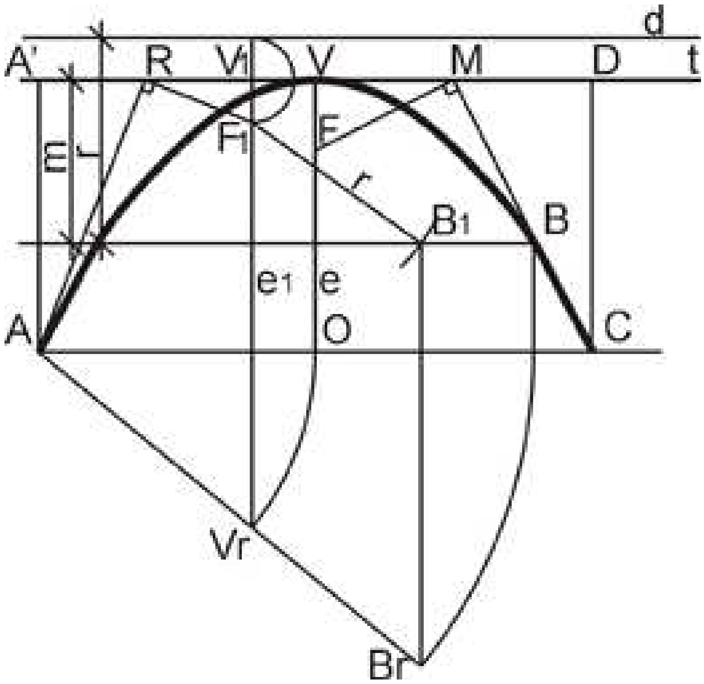

Figura 8

Os dados são os pontos A, B e a tangente t. Marca-se sobre t o vértice V1 de uma outra parábola que tem a mesma tangente no vértice. Procede-se como no ponto 1.b) para determinar o foco F1 desta outra parábola e o seu ponto B1, que se situa à mesma distância da tangente que B. Determina-se Br projectando B sobre AO e rodando essa projecção com centro em A até à perpendicular que passa em B1. ABr é a rotação do plano da parábola que passa em A e B até que esta coincida em projecção com a parábola que passa em B1. Se sobre ABr projectarmos V1 obtendo Vr e invertermos a rotação obtemos V que é o vértice da parábola pretendida. Para não sobrecarregar o desenho junto a A, optou-se por partir de C simétrico de A relativamente ao eixo e determinar o foco F.

2. O mesmo problema tem solução por outros processos mas com limitações no método ou na obtenção do resultado.

2.1. Determinação da parábola graficamente, conhecidos a tangente e dois pontos a igual distância desta.

O processo seguinte (Fig. 9) não está documentado e surgiu na exercitação prática do trabalho com a parábola.

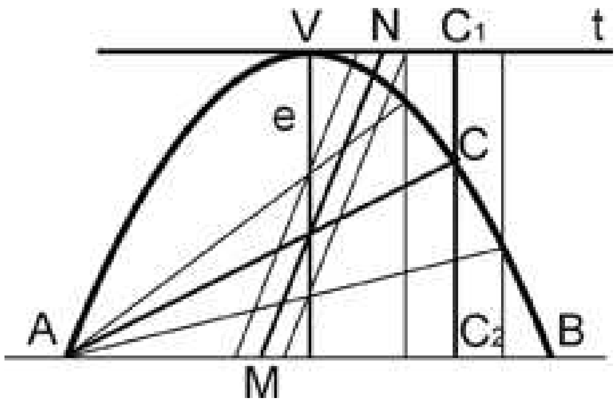

Figura 9

Determina-se o vértice da parábola na projecção ortogonal do ponto médio de AB sobre t. Para determinar um ponto C qualquer da parábola, a uma determinada distância do eixo, traça-se C1C2 paralelo ao eixo à distância pretendida, determina-se N, ponto médio de VC1 e M, ponto médio de AC2, e onde NM intersecta o eixo e faz-se passar uma recta a partir de A a qual intersecta C1C2 no ponto C. Para obter outros pontos procedeu-se da mesma forma. Este processo tem a limitação de por si só não permitir determinar o foco.

3. Determinação gráfica da parábola utilizando como auxiliar uma outra parábola que conhecemos graficamente.

Vai ser utilizada a propriedade de que graficamente todas as parábolas são semelhantes, isto é, graficamente são idênticas, apenas variando de tamanho se aumentarmos ou diminuirmos a distância focal, e podendo assumir posições diversas consoante a orientação do eixo. Contemporaneamente, sobretudo atendendo às possibilidades abertas pelo DAC (Desenho Assistido por Computador) ou CAD, se preferirmos utilizar a sigla em inglês, pudemos assumir que, se desenharmos uma parábola com um comprimento dos ramos suficientemente grande para garantir aproximação ao rigor (atendendo a que é impossível obter a forma real até ao infinito) poderemos aceitar que a parábola gráfica, pode ser utilizada como se de definição rigorosa se tratasse e, em aplicações gráficas, e só nestes casos, utilizá-la como linha auxiliar. Através de zoom, ou seja através de alterações de tamanho, ou até de posição do eixo, pudemos fazer corresponder essa parábola a qualquer outra.

3.1. Construção gráfica da parábola que é definida pela tangente no vértice e por dois pontos equidistantes desta, utilizando como auxiliar outra parábola (Fig. 10).

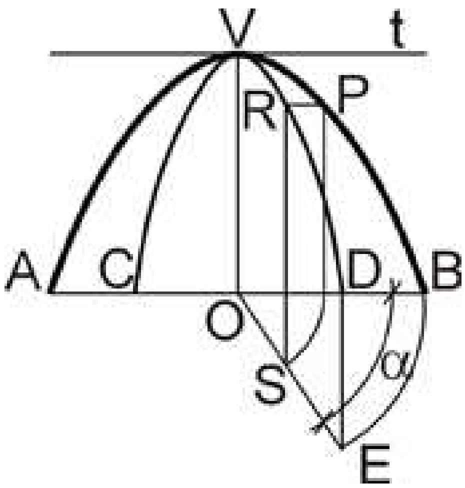

Figura 10

Se conhecermos a tangente no vértice e dois pontos da parábola equidistantes da tangente no vértice A e B utilizando uma parábola que já tenhamos graficamente, colocamo-la de tal forma que o seu eixo se situe sobre a perpendicular ao meio de AB e o seu vértice coincida com a projecção em t da meia distância de AB. A referida parábola auxiliar passa em C e D, sendo CD menor que AB. Se CD fosse maior que AB era só necessário inverter o processo seguidamente descrito. Rodando a parábola que passa em A e B em torno do seu eixo, com centro O obteremos em E a rotação de B que, em projecção, coincide com D. Logo, o ângulo da rotação que estabelece a relação entre as duas parábolas é α. Se na parábola que passa em C e D marcarmos um ponto R qualquer, o ponto P é o seu equivalente sobre a parábola que passa em A e B. Para obter mais pontos reproduziríamos os traçados as vezes necessárias.

3.2. Construção gráfica da parábola que é definida pela tangente no vértice e por dois pontos a diferentes distâncias desta, utilizando como auxiliar outra parábola (Fig. 11).

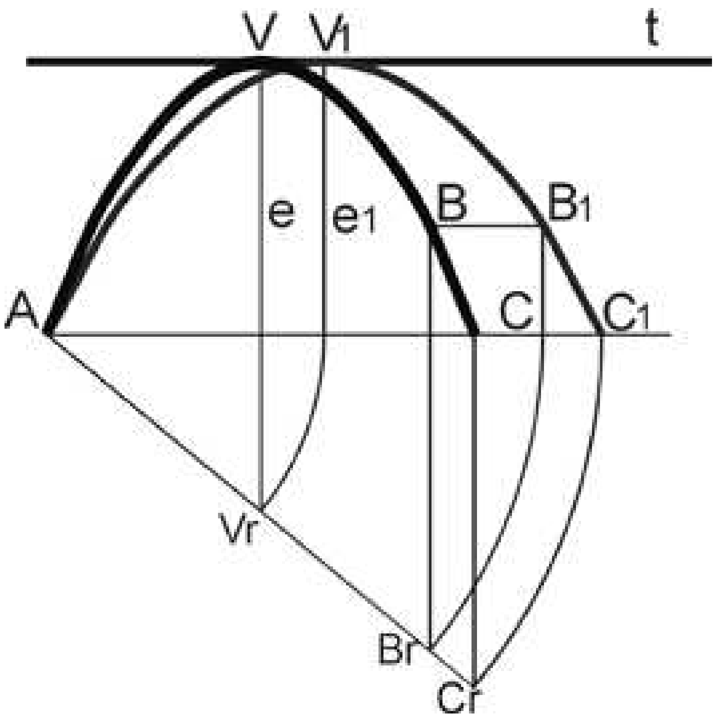

Figura 11

Dados os pontos A e B e a tangente t no vértice vamos utilizar como auxiliar a parábola que adaptamos de forma a passar em A, ter eixo perpendicular a t e que o vértice V1 se situe sobre t. Determinamos assim o ponto C1, intersecção da parábola com a paralela a t que passa em A. Se pelo ponto B dado, traçarmos uma paralela até intersectar a parábola auxiliar obtém-se B1. Rodando o plano da parábola com centro em A obtemos Br que estabelece a rotação de B1 até coincidir com a projecção de B. Fica assim definido por C1ABr o ângulo de rotação do plano da parábola auxiliar até coincidir com a parábola pretendida. A partir de V1 e projectando-o obtemos o eixo e1 o qual rodado permite conhecer o eixo e da nova parábola e o seu vértice V. Da mesma forma que se procedeu à determinação do ponto C pode-se determinar outros pontos da parábola.

4. Determinação do eixo e foco da parábola conhecida a parábola graficamente (Fig. 12).

Para se poder utilizar com facilidade uma parábola que temos graficamente é útil poder determinar-se o seu eixo e o foco respectivo.

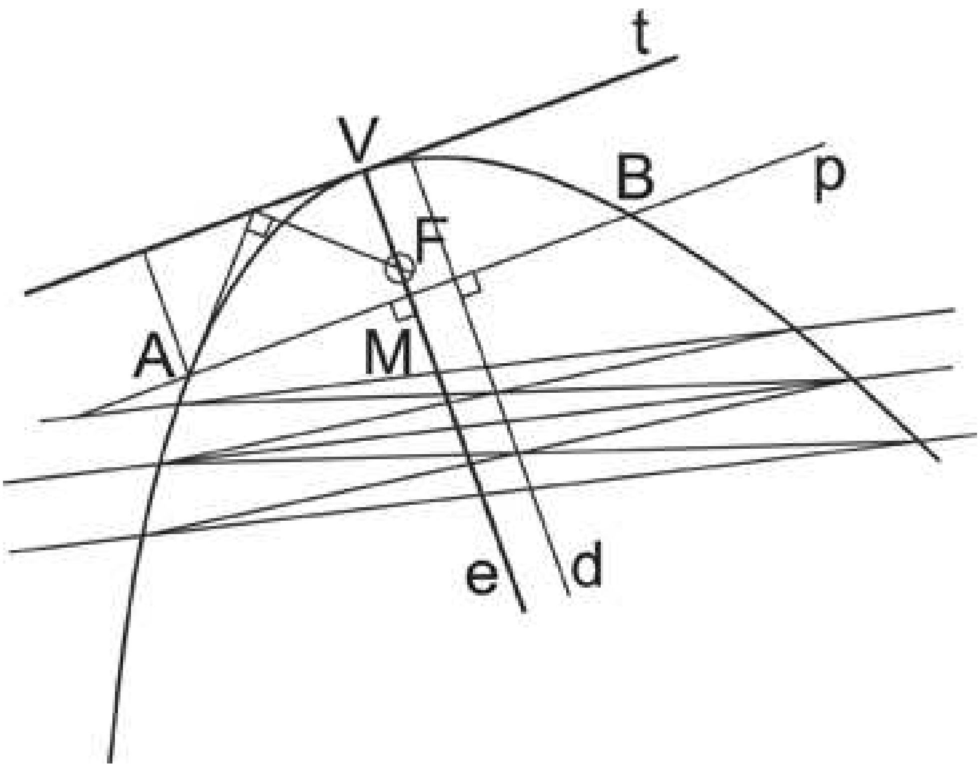

Figura 12

Vamos começar por utilizar uma construção com origem na geometria projectiva apresentada em BONIFÁCIO, 2005, 58 e 59 sugerida pela formulação teórica de ASENSI, 1985, designadamente pelos conceitos de pólo e polar. É graficamente apresentado que, relativamente a qualquer das curvas cónicas, elipses, parábolas ou hipérboles, se por um ponto exterior traçarmos um feixe de três rectas, ou se traçarmos três rectas paralelas quaisquer, e se intersectarmos estes feixes de três rectas com a cónica e traçarmos diagonais a partir dos pontos de intersecção, os pontos onde estas diagonais se cruzam definem um diâmetro conjugado da tangente ou tangentes que, ou partem do ponto exterior, ou são paralelas à direcção dada. No caso da parábola o diâmetro conjugado é paralelo ao eixo da parábola. Um desenvolvimento similar da determinação do eixo encontra-se em ASENSI, 2002, 150, pois com o mesmo campo de referência teórico, utiliza-se ali diferentemente duas paralelas secantes à parábola e as duas rectas que unem os dois pontos de intersecção da parábola de cada lado desta. As duas rectas cruzam-se num ponto que, unido ao ponto de cruzamento das diagonais resultantes das duas secantes definem a direcção do eixo da parábola.

Se traçarmos três rectas paralelas quaisquer e as diagonais das suas intersecções com a parábola, os cruzamentos dessas diagonais definem a direcção d, que é paralela ao eixo e. Se traçarmos qualquer perpendicular p a d e determinarmos a meia distância M entre os pontos A e B, de intersecção de p com a parábola, por M podemos traçar e paralelo a d. Para determinar o foco F, pode utilizar-se o processo já descrito, ou seja, por exemplo em A traçar uma paralela ao eixo, determinar a meia distância na tangente t entre esse ponto e o vértice V, e unir a meia distância a A. A perpendicular a esse segmento no mesmo ponto intersecta o eixo em F.

5. Problemas de resolução similar

5.1. Construção da parábola de vão dado AB e vértice V2 conhecida graficamente uma parábola com o mesmo vão e vértice V1 (Fig. 13).

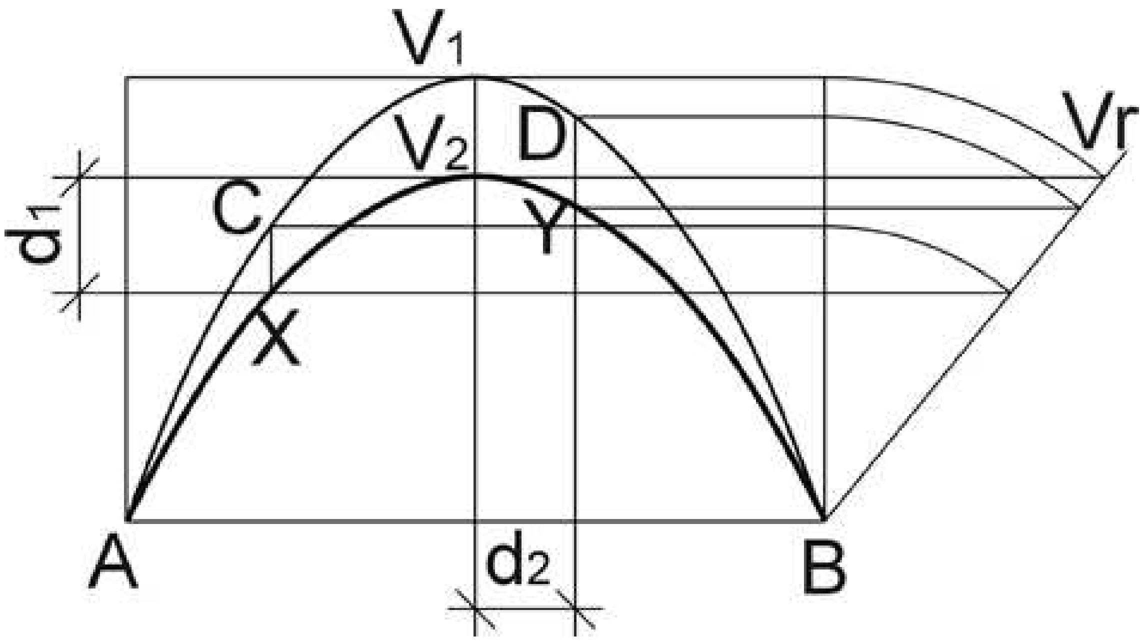

Figura 13

Projectamos V1 na perpendicular a AB no ponto B. Com centro em B rodamos até coincidir com a projecção de V2 em Vr. Fica assim determinado o ângulo de rotação do plano da parábola. Para determinarmos um ponto X da parábola a uma distância d1 à tangente no vértice, projectamo-lo sobre o plano da parábola rodada ABr e invertemos a rotação determinando C, o que permite encontrar X na mesma paralela ao eixo. A determinação de um ponto Y da parábola à distância d2 do eixo, faz-se marcando D na intersecção da parábola auxiliar com a paralela ao eixo que passa em P, projectando e rodando D até ao plano de BVr e projectando o ponto rodado obtemos Y na pretendida paralela ao eixo.

5.2. Construção da parábola conhecido o eixo e e os pontos A e B da parábola e utilizando outra parábola cujo eixo fazemos coincidir com o da parábola que se pretende definir (Fig. 14).

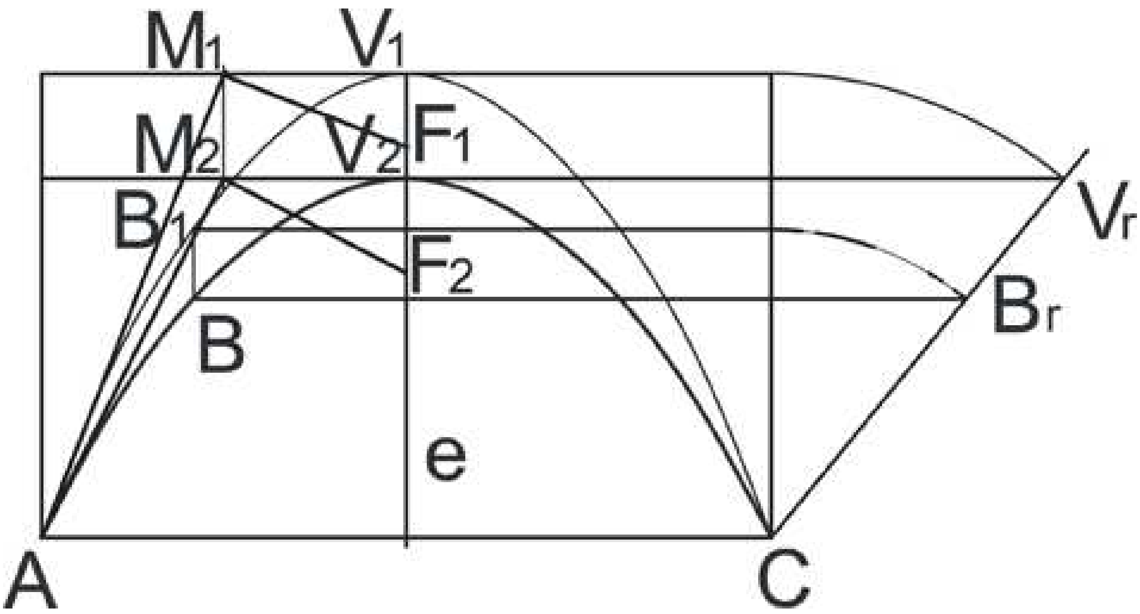

Figura 14

Os pontos dados são A e B. Escolhe-se V1 qualquer e constrói-se graficamente a parábola de vão AC e vértice V1. Para tal, determina-se o seu foco F1 a partir da perpendicular em M1 à tangente de A a M1. Marca-se B1 sobre a parábola na paralela ao eixo que passa em B. Determina-se seguidamente Br rodando a projecção da perpendicular ao eixo que passa em B1 em torno de C até cruzar a que passa em B. Prolongando a recta que une C a Br obtém-se Vr no cruzamento com o arco que descreve a perpendicular ao eixo que passa em V1. Na paralela a partir de Vr obtém-se V2. Para construir graficamente a parábola determina-se F2 pelo procedimento já descrito anteriormente.

GLOSSÁRIO

CONE – é o sólido compreendido entre uma superfície cónica e um plano que lhe define a base.

CORDA DA PARÁBOLA – é o segmento de recta resultante da união de dois quaisquer pontos da parábola.

CURVAS CÓNICAS – são as curvas resultantes de secções planas em superfícies cónicas, a elipse se o plano de secção for oblíquo a todas as geratrizes e o seu caso particular a circunferência quando os eixos da curva são iguais, a parábola quando o plano de secção é paralelo a uma só geratriz, a hipérbole quando o plano de secção é paralelo a duas geratrizes e as chamadas curvas degeneradas, o ponto quando o plano de secção só intersecta o vértice, duas rectas concorrentes quando o plano de secção intersectando o vértice intersecta igualmente a directriz da superfície e uma só recta quando o plano de secção é tangente a uma geratriz.

EIXO DA PARÁBOLA – o conceito de eixo implica os conceitos de simetria ou de rotação ou ambos, consoante se trate exclusivamente de geometria plana ou tridimensional ou aplicações de ambas. Sendo a parábola uma figura plana é o eixo de simetria da figura. É uma recta que, passando no vértice da parábola permite que, traçando perpendiculares em pontos dela, as perpendiculares intersectem a parábola em pontos equidistantes do eixo.

GERATRIZ DA SUPERFÍCIE CÓNICA – é qualquer recta que passa no vértice do cone e num ponto qualquer da base do cone.

GERATRIZ DO CONE – é qualquer segmento de recta que passa no vértice do cone e num ponto qualquer da base do cone.

PARÁBOLA – conhecida pelos gregos da antiguidade clássica inicialmente por Orthotome pode ser definida como a figura plana curva resultante da secção numa qualquer superfície cónica, recta ou oblíqua, desde que de directriz circular, sendo o plano de secção paralelo a uma só geratriz da superfície cónica.

SUPERFÍCIE – é o conjunto dos pontos que apresentando uma mesma propriedade comum ou pertencendo a uma mesma entidade, definam um plano ou uma sua deformação.

SUPERFÍCIE CÓNICA – é a superfície definida por rectas fixas num ponto, o vértice, deslocando-se em regra sobre uma linha plana circular, designada directriz.

TANGENTE À PARÁBOLA – é a recta que passando num ponto da curva não a intersecta em mais nenhum ponto.

VÉRTICE DO CONE – é o ponto do eixo do cone onde este intersecta as geratrizes.

VÉRTICE DA PARÁBOLA – é o ponto de inflexão da curva, o ponto que a divide em duas partes iguais.

VÉRTICE DA SUPERFÍCIE CÓNICA – é o ponto fixo a partir do qual se passam rectas que definem a superfície cónica ao descreverem um movimento contínuo sobre outra linha, em regra linha plana, a directriz.

NOTAS

[1] Para inscrever a parábola num rectângulo, traçamos uma corda paralela à tangente no vértice, sendo o lado oposto do rectângulo a própria tangente no vértice e sendo os outros dois lados segmentos perpendiculares passando nos extremos da corda. É de notar que tal pode ser utilizado na construção de modelos para a demonstração prática do valor 2/3 como relação da área compreendida entre uma parábola e uma corda desta e o rectângulo em que se inscreve nas condições descritas. Da mesma forma, pode demonstrar-se genericamente que a área compreendida entre uma parábola e uma qualquer corda é 2/3 da área de qualquer paralelogramo definido pela corda e uma tangente à parábola que lhe seja paralela, sendo os outros dois lados quaisquer segmentos paralelos entre si que, partindo dos extremos da corda, intersectem a tangente (Fig.NR1a) e (Fig.NR1b). Segundo BOYER, 2005, 88 tal foi

demonstrado por Arquimedes na obra Quadratura da Parábola, embora referindo-se à relação 4/3 entre a área do sector de parabólico relativamente ao triângulo que tem por base a corda e por terceiro vértice o ponto de tangência da paralela à corda, o que na prática é o mesmo que a relação 2/3 referida.

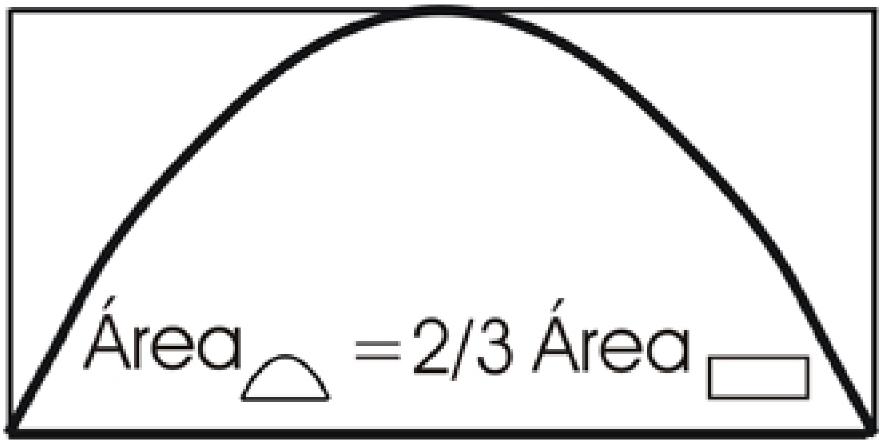

Fig.NR1a

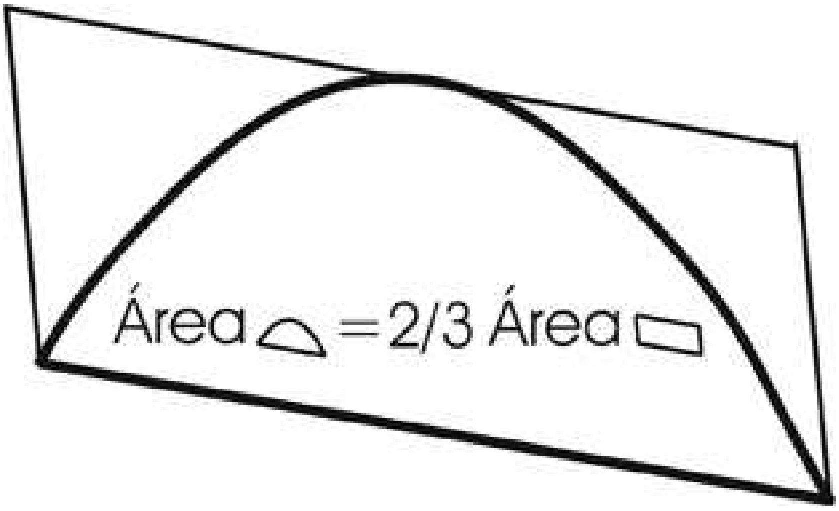

Fig.NR1b

BIBLIOGRAFIA

ASENSI, Fernando Izquierdo. Geometría Descriptiva Superior y Aplicada. 3ª ed.,Madrid, Ed. Dossat, 1985.

ASENSI, Fernando Izquierdo. Construcciones Geométricas. Madrid, Ed. autor, 2002.

AKOPYAN, Arseny V. e ZASLAVSKY, A. A. . Geometry of Conics. Rhode Island, The American Mathematical Society, 2007. Trad. da ed. Russa, Moscovo, Centro Moscovita de Educação Contínua na Matemática, 2000.

BOYER, Carl B.. História da Matemática. São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda, 2005 (ed. orig. A History of Mathematics. John Wiley & Sons, Inc, 1991).

BONIFÁCIO, Joaquim. Intersecção de Superfícies não Planas em Dupla Projecção Ortogonal. Castelo Branco, Instituto Politécnico de Castelo Branco, Escola Superior de Artes Aplicadas, 2005. (Estudo para Concurso de Provas Públicas para Professor-Adjunto).

DOWNS, J. W.. Practical Conic Sections. Palo Alto, California, Dover Publications, Inc., 2003.

RICCA, Guilherme. Geometria Descritiva – Método de Monge. 2ª ed., Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian,2000.