Débora Pereira Marques

Estratégias adotadas por alunos do 2.º ano na resolução de problemas matemáticos

Relatório do Projeto de Investigação

Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Novembro de 2015

Débora Pereira Marques

N.º 130140013

Estratégias adotadas por alunos do 2.º ano na resolução de problemas matemáticos

Relatório do Projeto de Investigação

Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Unidade Curricular: Estágio III

Orientadora: Prof.ª Doutora Joana Maria Leitão Brocardo

Novembro de 2015

Agradecimentos

Antes de mais, gostaria de agradecer à minha tutora, Professora Doutora Joana Maria Leitão Brocardo, pelo seu apoio incondicional, pela disponibilidade, pelas críticas construtivas e por todos os momentos em que me levou a questionar o rumo das minhas escolhas e ações, tendo contribuído para uma prática mais refletida e fundamentada.

À minha mãe e avó, que sempre acreditaram e confiaram que esta seria mais uma etapa da minha vida na qual seria bem-sucedida. Sem elas esta vitória não seria possível.

Aos meus irmãos, por todo o carinho e amor que sempre me deram e por todos os sorrisos que me proporcionaram (mesmo nos momentos mais complicados).

Ao Miguel, que sempre me deu a força e motivação necessárias para seguir em frente.

Ao professor José Carvoeiro, por me ter aceitado na sua sala de aula e partilhado generosamente as aprendizagens de uma vida.

E aos alunos do 2.º B, por terem tornado esta experiência única e tão enriquecedora (terão sempre um lugar especial no meu coração).

A todos, o meu muito obrigada!

Resumo

Esta investigação tem como objetivos a identificação, o estudo e a exploração das diversas estratégias apresentadas por alunos do segundo ano de escolaridade na resolução de problemas matemáticos.

Desta forma, no decorrer da sua realização procurei encontrar respostas para três questões fundamentais: a) Quais as estratégias de resolução de problemas que os alunos usam?; b) O que pode influenciar a escolha de determinadas estratégias em detrimento de outras?; e c) Identificam-se alterações relativamente à seleção das estratégias adotadas pelos alunos no final do projeto?

Atendendo às caraterísticas e aos objetivos desta investigação, considerei adequada a adoção de uma perspetiva qualitativa, sob um paradigma interpretativo e com um design de investigação fortemente demarcado pela investigação-ação. Esta foi uma investigação desenvolvida numa turma de 2.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, constituída por vinte e seis alunos de uma escola pública nos Brejos de Azeitão.

De modo a proceder à recolha e à, posterior, análise dos dados reunidos, recorri à observação participante, à entrevista e às produções dos alunos. Assim, apresentei à turma um conjunto de catorze problemas ao longo de onze semanas, sendo que todos os alunos tiveram oportunidade de contribuir para a presente investigação.

Os resultados deste estudo evidenciam que as estratégias de resolução mais usadas pelos alunos são, neste caso, a escolha de uma operação e a elaboração de um desenho, tendo estas escolhas sido influenciadas maioritariamente pelos objetivos a que as tarefas se propunham, pelos hábitos de trabalho familiares à turma e pela metodologia de trabalho adotada no início do projeto. Através desta investigação foi possível perceber uma evolução na turma, sendo que alguns dos alunos passaram da representação icónica para a representação simbólica como meio para resolver os problemas propostos e outros compreenderam a existência de diversas estratégias de resolução de problemas mais pertinentes do que a escolha de uma operação (em função da tarefa em causa).

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Estratégias de Resolução de Problemas; 2.º Ano de Escolaridade.

Abstract

This investigation aims to identify, study and explore the various strategies presented by second grade students in solving mathematical problems.

Thus, in the course of its realization I tried to find answers to three key questions: a) What are the problem-solving strategies that students use?; b) What may influence the choice of certain strategies over others?; and c) Can we identify changes to the selection of the strategies adopted by students at the end of the project?

Given the characteristics and goals of this research, I considered appropriate to adopt a qualitative perspective, in an interpretive paradigm and a research design strongly marked by action research. This was a research carried out in a second grade class, consisting of twenty-six students from a public school in Brejos de Azeitão.

In order to collect and, later, analyze the data gathered, I resorted to participant observation, to interviews and to student productions. Therefore, I presented to the class a set of fourteen problems solved over the course of eleven weeks, giving all students an opportunity to contribute to this research.

The results of this study show that the problem-solving strategies most used by the students are, in this case, the choice of an operation and the elaboration of a drawing, being important to say that these choices have been mainly influenced by the goals to which the tasks were proposed, by the work habits most familiar to the class and by the work methodology adopted early in the project. Through this research it was revealed an evolution in the class, since some of the students evolved from the iconic representation to the symbolic representation as a means to solve the problems proposed and others understood the existence of many problem solving strategies more suitable than choosing an operation (depending on the task proposed).

Keywords: Problem-Solving; Problem-Solving Strategies; 2nd Grade.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Gráficos

Índice de Anexos

Capítulo I – Introdução

Neste capítulo começo por identificar o problema, os objetivos e as questões que orientaram o estudo desenvolvido. Exponho as motivações pessoais que me levaram a tratar o problema em causa, tal como alguns dos motivos pelos quais considerei pertinente a sua abordagem. Por último, apresento a organização geral do relatório realizado.

1.1) Objetivos e problema do estudo

Este estudo tem como contexto uma proposta pedagógica desenvolvida ao longo de onze semanas numa turma de 2.º ano do 1.º ciclo do Ensino Básico. Com esta proposta pretendi saber mais acerca do modo como os alunos lidam com a resolução de problemas, tendo focado maioritariamente a minha atenção no uso de diferentes estratégias de resolução de problemas. Assim, foram meus objetivos a identificação, o estudo e a exploração das diversas estratégias apresentadas por alunos do segundo ano de escolaridade na resolução de problemas.

De acordo com os objetivos mencionados, formulei as seguintes questões:

- Quais as estratégias de resolução de problemas que os alunos usam?
- O que pode influenciar a escolha de determinadas estratégias em detrimento de outras?
- Identificam-se alterações relativamente à seleção das estratégias adotadas pelos alunos no final do projeto?

1.2) Motivações pessoais e pertinência do estudo

A escolha do problema a estudar procurou dar resposta a uma necessidade real, advinda das observações e experiências vividas com a turma acompanhada ao longo de todo o período de estágio. Como tal, e partindo da realidade observada, considerei pertinente explorar a resolução de problemas por dois grandes motivos: o desinteresse e as dificuldades dos alunos na tarefa em causa.

Ao acompanhar a turma estudada verifiquei que grande parte dos alunos encaravam a Matemática, e particularmente a resolução de problemas, como algo desinteressante e sem qualquer utilidade no seu quotidiano, limitando-se a cumprir as tarefas propostas pelo professor sem aparente motivação. Por outro lado, pude constatar o quão condicionados os alunos se encontravam na escolha de estratégias adequadas no momento de resolução de um problema, já que, em inúmeras ocasiões, quando confrontados com uma dessas tarefas, a primeira questão a surgir era: “Resolvemos com uma conta de mais ou de menos?”, sem nunca ponderarem como opção qualquer estratégia que fosse para além da escolha de uma operação.

Neste contexto, acreditei que seria enriquecedor permitir a cada aluno a exploração de um vasto e diverso conjunto de problemas matemáticos, apoiando sempre o seu processo de resolução. Com isso, pretendi fomentar um novo olhar sob a Matemática e possibilitar a cada aluno o contato direto com as diversas estratégias de resolução de problemas existentes, concedendo-lhes um novo rol de ferramentas às quais poderiam recorrer na resolução de tarefas desse tipo.

Trabalhar a resolução de problemas era igualmente relevante já que esta é considerada um dos grandes pilares do ensino da Matemática. De acordo com o Programa de Matemática para o Ensino Básico (2013), a resolução de problemas apresenta-se tão importante quanto o conhecimento de factos e procedimentos, a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, o correto desenvolvimento de uma comunicação matemática (oral e escrita) e a apropriação de uma visão da Matemática enquanto disciplina una, articulada e coerente.

Vale e Pimentel (2004) consideram que a importância da resolução de problemas matemáticos vai além da preparação para resolver os problemas do dia-a-dia, afirmando que:

> a importância da resolução de problemas não é só utilitária mas sobretudo formativa, pois, além de nos ajudar a resolver os problemas do quotidiano, permite principalmente desenvolver processos e capacidades de pensamento que são o que de mais importante a matemática escolar pode desenvolver num individuo (p. 10).

Assim, depreende-se que a importância da resolução de problemas vá para além do seu apoio à análise de situações da vida de todos os dias, já que este tipo de tarefas são fundamentais para o desenvolvimento de competências únicas e imprescindíveis ao ser humano, tais como “analisar, interpretar, criticar ou escolher” (p. 10).

Mais do que um método de ensino destinado a introduzir conceitos, O’Connell (2007) apresenta a resolução de problemas como o derradeiro objetivo da Matemática, considerando essa prática um processo crítico, entrelaçado ao longo de todo o currículo matemático, sem o qual os alunos não seriam capazes de explorar e perceber verdadeiramente a Matemática. Assim, esta autora encara a resolução de problemas tanto como o ponto de partida quanto o ponto de chegada numa aula de Matemática bem estruturada.

Sabendo que muitos são os alunos que encaram a resolução de problemas como uma tarefa complexa e confusa, importa possibilitar-lhes o contato com um conjunto de estratégias que lhe permitam olhar essa prática de um modo diferente. Como tal, é essencial levá-los a explorar problemas matemáticos, de modo a desenvolverem um conjunto de capacidades essenciais à abordagem do enunciado, à organização de ideias e à simplificação do problema em si. Daí que se destaque a importância das estratégias de resolução de problemas enquanto "tools for simplifying and revealing the possible paths to solutions" (O'Connell, 2007, p. 26).

Segundo esta autora, será a compreensão destes processos de raciocínio, aliada ao desenvolvimento de capacidades e conhecimentos matemáticos, que permitirá ao aluno resolver problemas com sucesso. Assim, importa salientar que o objetivo do professor não deverá ser o de ensinar ou conduzir o aluno a utilizar determinada estratégia, mas sim o de o ajudar a desenvolver um conjunto de competências que lhe permitam encontrar e utilizar a estratégia mais adequada à resolução de determinado problema.

Em suma, este trabalho assume que a resolução de problemas e a exploração das diversas estratégias associadas devem ser encaradas como um aspeto central no processo de aprendizagem do aluno que necessita de ser explicitamente explorado.

1.3) Organização geral

O presente relatório está organizado em cinco capítulos. O primeiro capítulo corresponde à introdução, onde apresento o objetivo, as questões de estudo e as motivações pessoais que conduziram à escolha do tema abordado, à medida que argumento a sua pertinência e realizo uma breve apresentação da estrutura do trabalho.

No segundo capítulo apresento, de um modo sucinto, os temas centrais do presente estudo – a resolução de problemas e as estratégias de resolução de problemas, refletindo ainda acerca do papel do professor e do aluno ao longo do processo de resolução deste tipo de tarefas.

No terceiro capítulo descrevo as opções metodológicas gerais, passando em seguida para uma breve apresentação dos dispositivos e procedimentos de recolha e análise da informação e para uma descrição da intervenção desenvolvida na turma (contexto, duração e participantes no estudo; problemas propostos, intencionalidades e exploração dos mesmos).

O quarto capítulo apresenta uma análise dos dados recolhidos, consistindo numa apresentação e interpretação da minha intervenção, constituída por uma narrativa interpretativa da ação, ilustrada com evidências concretas recolhidas junto dos participantes.

Por último, o quinto capítulo expõe um conjunto de considerações finais, sendo evidente a abordagem integrada, crítica e sintética das inúmeras vertentes que constituíram as diversas modalidades da intervenção. Neste capítulo farei ainda uma abordagem às dificuldades sentidas ao longo da dinamização do presente estudo, tal como às estratégias desenvolvidas para as superar.

Capítulo II – Fundamentação teórica

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica associada ao desenvolvimento desta investigação. Encontra-se organizado em quatro secções distintas: a primeira, *Resolução de Problemas em Matemática*, discute o entendimento de "problema" e "resolução de problemas", analisa os distintos tipos de tarefas e problemas existentes, as fases de resolução de um problema e as estratégias de resolução associadas a esta tarefa. A segunda secção, *Resolução de Problemas e Ensino da Matemática*, analisa a importância da exploração deste tipo de tarefas e as diferentes perspetivas sob as quais se pode encarar a resolução de problemas, descrevendo também a evolução da resolução de problemas no currículo português. A terceira secção, *O Professor e a Resolução de Problemas*, discute o papel do professor, analisando fatores que influenciam a sua ação e alguns dos benefícios do trabalho em grupo e da discussão de resultados. Por último, a quarta secção, *O Aluno e a Resolução de Problemas*, centra-se na perspetiva e no papel do aluno, apresentando algumas das suas ideias face à resolução de problemas, nomeadamente no que diz respeito a dificuldades que identifica e ao modo como vê a importância de desenvolver uma atitude positiva relativamente à resolução de problemas.

2.1) A resolução de problemas em Matemática

2.1.1) Definição de problema

No âmbito da investigação em educação matemática, muitos estudos se têm centrado na resolução de problemas. Estes, para além de contribuírem com novos conhecimentos relativos à temática em causa, oferecem ainda diferentes interpretações dos termos "resolução de problemas" e "problema", conduzindo a uma crescente dificuldade na sistematização de uma só definição para cada um destes.

Para Vale e Pimentel (2004), a resolução de problemas em contexto social "é um processo através do qual o indivíduo ou o grupo de indivíduos identifica e descobre meios eficazes para resolver conflitos com os quais se confronta no dia-a-dia" (p. 11). Em contexto de matemática escolar, a definição acima apresentada não se altera profundamente, podendo especificar-se que, tal como acontece com os problemas do quotidiano, a resolução de problemas matemáticos envolve um processo onde se combinam, gerem e controlam elementos distintos, entre os quais: "a organização da informação, o conhecimento de estratégias, as diferentes formas de representação, a tradução de linguagens, a aplicação de vários conhecimentos, a tomada de decisões, a interpretação da solução, etc." (p. 11).

Kantowsky (1977, citada por Matos e Serrazina, 1996) afirma que "um individuo está perante um problema quando encontra uma questão a que não se pode dar resposta ou uma solução que não é capaz de resolver usando os conhecimentos imediatamente disponíveis" (p. 140). Já Lester (1980, citado por Matos e Serrazina, 1996) opta por evidenciar a dimensão pessoal do problema, acrescentando que "para que uma situação seja um problema para determinado individuo é preciso que esta lhe desperte necessidade e interesse em resolvê-la e que, consequentemente, este faça uma tentativa deliberada no sentido de a resolver" (p. 140). Assim, pode concluir-se que "ser ou não ser problema não depende apenas da tarefa que é proposta, mas também do indivíduo a quem se propõe" (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p.15).

Ainda que encontrar uma definição para "problema" seja uma tarefa ingrata, reúne consenso que, em qualquer dos casos, "um problema é uma situação para a qual não se dispõe, à partida, de um procedimento que nos permita determinar a solução, sendo a resolução de problemas o conjunto de ações tomadas para resolver essa situação" (Vale & Pimentel, 2004, p. 12).

2.1.2) Tipos de tarefas

Reconhecendo que uma diferenciação clara entre os distintos tipos de tarefas exploradas em contexto matemático permite um maior entendimento do conceito "problema matemático", importa colocar em evidência quais os diferentes tipos de tarefas existentes. Assim, e sabendo que as tarefas propostas aos alunos devem ir sempre ao encontro dos objetivos a que se destinam, Ponte (2005) propõe duas dimensões essenciais para as analisar: o seu grau de estruturação e o nível de desafio matemático que suscitam. Interligando estas duas dimensões surgem então quatro tipos de tarefas distintas: o exercício, o problema, a exploração e a investigação (Figura 1).

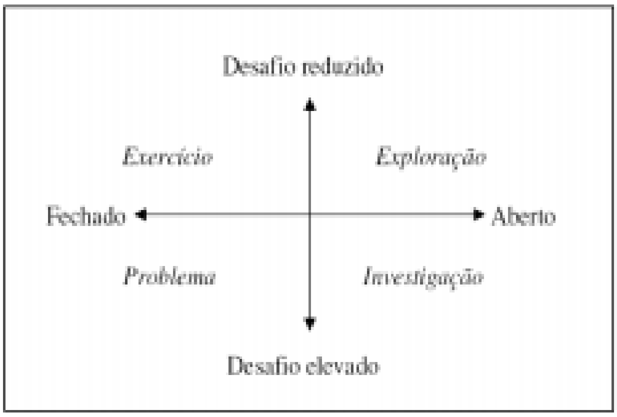


Figura 1 – Distribuição das tarefas quanto ao grau de estruturação e de desafio (Ponte, 2005)

Para este autor, "um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido" (Ponte, 2005, p. 8), em que o aluno aplica diretamente os conhecimentos e capacidades previamente desenvolvidos, devendo, como tal, ser apresentado de forma clara e concisa. Para Christiansen e Walther (1986), no campo das tarefas matemáticas pode facilmente compreender-se a existência de dois polos distintos: "tarefas para as quais um procedimento completo conduzindo à solução é conhecida (frequentemente chamados 'exercícios') e tarefas (com *Aporie*) para a qual tal procedimento é desconhecido (frequentemente chamadas 'problemas')" (p. 38), realçando o quanto o conhecimento/desconhecimento do caminho para a resolução é importante na distinção entre problema e exercício. Um exemplo de um exercício poderá ser: Determina o resultado da seguinte operação: 27 + 13 = ___

Um problema, de acordo com Ponte (2005) "é uma tarefa também fechada, mas com elevado desafio" (p. 8), caraterizada pelo facto do aluno não saber de imediato um modo de a resolver. Num problema, o caminho necessário à sua resolução nem sempre se encontra explicito inicialmente, exigindo que o aluno reflita e persista a fim de conseguir interpretar corretamente o enunciado e, desse modo, poder esboçar uma estratégia que lhe permita resolver o desafio lançado. Um exemplo de problema poderá ser: O Luís gastou 20 cêntimos num postal. Agora tem 53 cêntimos no seu mealheiro. Quanto dinheiro tinha o Luís antes de comprar o postal?

Ponte (2005) considera que as tarefas de exploração são "tarefas relativamente abertas e fáceis" (p. 8), sendo bastante semelhantes às tarefas de investigação mas diferenciáveis pelo seu menor grau de dificuldade/exigência. Tal como a tarefa que se encontra a seguir, também estas primam pelo "grau de abertura de estratégias e dos resultados" (Yeo, 2008, p.

16), apelando ao interesse e à curiosidade dos alunos. Um exemplo de uma tarefa de exploração poderá ser: A Joana vai pôr a secar no estendal lenços de pano. Como é bastante organizada, pendura todos os lenços usando o mesmo processo. Quantas molas serão necessárias para a Joana pendurar 20 lenços de pano?

Por último, a investigação é caraterizada como uma tarefa aberta "com grau de desafio elevado" (Ponte, 2005, p. 8), onde a questão não se encontra claramente definida e onde os pontos de partida e chegada poderão não ser necessariamente os mesmos para cada aluno. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) consideram que as investigações são tarefas nas quais o aluno é levado a agir como um matemático, formulando questões e conjeturas, realizando provas e refutações, apresentando resultados e argumentando a sua verificabilidade perante os seus colegas e professor. Dessa forma, Goldenberg (1999, citado por Yeo, 2008) defende que as funções da investigação em sala de aula são:

> a exploração, que dá a oportunidade aos alunos de experienciar […]; a ajuda ao aluno a estabelecer intuições e a desenvolver um sentido exploratório; a descoberta, que foca a criação de ideias ou factos matemáticos específicos; e o questionamento, que nasce da discussão das ideias matemáticas (pp. 16-17).

Um exemplo de uma tarefa de investigação poderá ser: (Partindo da tarefa anterior) Desta vez, a Joana quer pôr a secar no estendal 250 lenços de pano. De quantas molas precisará? E se forem 300, 400 ou 500 lenços? Consegues determinar alguma regra que te ajude a encontrar o número de molas necessárias para *n* lenços?

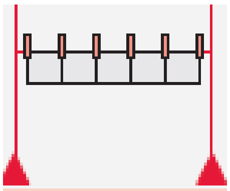
Quando o tema abordado é a resolução de problemas, a dicotomia mais explorada é a oposição exercício *versus* problema. Nessa perspetiva, Ponte (2005) defende a importância da abordagem pessoal dada à tarefa em causa, destacando o papel do aluno e do contexto na distinção entre problema e exercício. Com isso, defende que "a questão principal é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato para a resolver [a tarefa] " (p. 4), acrescentando que, nos casos em que o aluno conheça o processo e seja capaz de o utilizar se tratará de um exercício e que nos casos em que tal não aconteça se tratará de um problema. Assim pode concluir-se que "uma mesma questão pode ser exercício para uns e um problema para outros, e ainda para o mesmo individuo uma situação pode ser um problema numa fase de aprendizagem e exercício noutra fase posterior" (Vale & Pimentel, 2004, p. 14).

2.1.3) Tipos de problemas

Uma vez que o presente estudo se foca na resolução de problemas, apresento em seguida uma classificação proposta por Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008), em que se consideram as diferentes tipologias de problemas em função do enunciado e do processo de resolução. Estas autoras consideram três tipos de problemas:

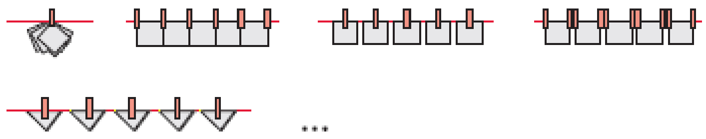
Os problemas de cálculo, que requerem do aluno a escolha de uma ou mais operações a aplicar nos dados disponibilizados e que se podem dividir entre problemas de um passo (quando apenas uma operação é necessária) e problemas de mais passos (quando é necessária a escolha de mais do que uma operação). Um exemplo deste tipo de problemas será: “A Catarina usou três molas para pendurar três guardanapos e a Ana usou duas molas para pendurar um guardanapo. As duas amigas usaram uma caixa com meia dúzia de molas. Descobre se as molas chegaram para pendurar os guardanapos.” (p. 20);

Os problemas de processo, em que a escolha da(s) operação(ões) necessária(s) não se revela suficiente para chegar à solução. Estes exigem do aluno a adoção de estratégias de resolução menos usuais, impondo “persistência, pensamento flexível e uma boa dose de organização” (p. 19). Um exemplo deste tipo de problemas será “A Catarina vai pôr a secar muitos guardanapos pendurando-os, ordenadamente, como se mostra. Ajuda a Catarina a descobrir quantas molas são necessárias para pendurar 5, 6, 7, 10 ou 20 guardanapos.” (p. 20);



Os problemas abertos (ou investigações), que permitem a formulação de questões e a possibilidade de explorações divergentes, conduzindo à hipótese de mais do que uma forma de chegar à solução e de mais do que uma resposta correta. Estes proporcionam ao aluno “o desenvolvimento do raciocínio, do espírito critico e da capacidade de reflexão” (p. 19), à medida que o conduzem a explorações destinadas a descobrir regularidades e a formular conjeturas. Um exemplo deste tipo de problemas será “A Catarina vai pôr a secar guardanapos. Porque é uma rapariga organizada, pendura, todos os guardanapos, usando o mesmo processo. Ajuda a Catarina a descobrir quantas molas são necessárias para pendurar 30 guardanapos.” (p. 21).

Neste último exemplo não se explicita o modo como a Catarina prendeu os guardanapos, pelo que pode variar como se ilustra, por exemplo, na figura que se segue:



2.1.4) Fases da resolução de problemas

De acordo com Vale e Pimentel (2004), “não existe um único método para resolver problemas nem para ensinar a resolver problemas” (p. 21). No entanto, o modelo de resolução de problemas descrito por Polya (1995) é considerado por muitos autores como sendo facilitador da resolução de problemas. Trata-se de um modelo organizado em quatro fases e que sugere o desenvolvimento de competências metacognitivas a partir de um questionamento que deverá ocorrer durante a resolução de cada problema. As quatro fases do modelo traduzem um “agrupar convenientemente das indagações e sugestões da nossa lista” (p. 3):

- Compreensão do problema: fase na qual se pretende que o aluno compreenda o problema e deseje resolvê-lo. Aqui a atenção deve centrar-se na leitura e entendimento do enunciado e na identificação das diversas partes que constituem o problema, tal como daquilo que se pretende saber, dos dados disponibilizados e das condições apresentadas. Algumas das questões associadas por Polya (1995) a esta fase são: “Qual é a incógnita?; Quais são os dados?; Qual é a condicionante?” (pp. XII-XIII);

- Estabelecimento de um plano: fase onde se reconhecem os passos a seguir de forma a obter a incógnita. Nesta etapa, a delineação de um plano deverá partir do aluno, tendo como base as suas experiências anteriores. Assim, poderá optar por procurar problemas já resolvidos com incógnitas semelhantes, decompor e reformular o problema em causa, formular um problema auxiliar, etc. No entanto, e nos casos em que os alunos apresentem maiores dificuldades, o professor poderá intervir, colocando-se no papel do aluno e “simulando” aquilo em que se poderá pensar. Algumas das questões associadas a esta fase poderão ser: “Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? (…) É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira?” (pp. XII-XIII);

- Execução do plano: fase em que se executa a ideia geral necessária à resolução. Polya (1995) sugere para esta fase o levantamento de questões como: “Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?" (pp. XII-XIII);

- Retrospeção: fase na qual o aluno reconsidera e reexamina o resultado final, tal como todos os passos que conduziram à solução, e que ajuda a "consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas" (p. 10). Nesta fase poderão surgir, entre outras, as seguintes questões: "É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?" (pp. XII-XIII).

2.1.5) Estratégias da resolução de problemas

A par da importância do modelo apresentado por Polya (1995), destaca-se a pertinência do recurso a um conjunto de estratégias destinadas a conceder ao aluno um maior domínio sobre o problema a resolver. De acordo com Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008), o conhecimento e domínio de um conjunto de estratégias pré-definidas poderá "ajudar os alunos a atacar o problema ou a caminhar no sentido de obter a solução, adquirindo, simultaneamente, destrezas úteis na resolução de outros problemas" (p. 22).

O'Connell (2007) refere-se às estratégias de resolução de problemas como ferramentas imprescindíveis à simplificação de um problema e à descoberta de possíveis caminhos para soluções, destacando a existência de oito estratégias distintas:

- Escolher uma operação: determinar qual a operação mais adequada à resolução de um problema. Nesta estratégia realça-se a necessidade de compreensão das diversas operações, tal como a importância de conceder ao aluno oportunidades de exploração das mesmas nos mais diversos contextos, a fim de possibilitar a construção de fortes bases que o auxiliem no processo de resolução de problemas. Exemplo de problema em que o uso desta estratégia se mostra adequado: *O Tiago chegou à escola às 7 horas. A festa de São Martinho só começou às 18 horas. Quantas horas esperou o Tiago para que a festa começasse?* De facto, trata-se de um problema aditivo e que pode ser resolvido recorrendo à subtração.

- Encontrar um padrão: reconhecer e repetir padrões (formas, cores, números, etc.), a fim de resolver problemas matemáticos. O domínio desta estratégia poderá conduzir à perceção de que os padrões se repetem de um modo previsível, levando o aluno a ser capaz de continuar determinado padrão, prevendo o que virá em seguida. Exemplo de problema em que o uso desta estratégia se mostra adequado: *Cinco alunos ganharam um concurso.*

Quando souberam da notícia telefonaram uns aos outros a felicitarem-se. Descobre quantas chamadas tiveram de fazer os cinco amigos para se felicitarem entre si… E se fossem seis amigos, quantas chamadas fariam? E se fossem sete amigos, quantas chamadas fariam? Consegues descobrir alguma regra para qualquer número de amigos? Neste caso, para encontrar o padrão e, consequentemente, o número de chamadas realizadas entre *n* amigos, é necessário que o aluno some todos os números (partindo do número um e progredindo de um em um) até chegar ao número anterior ao número total de amigos, ora veja-se: numa situação entre cinco amigos a operação a realizar-se seria: 1+2+3+4=10, correspondendo o dez ao total de chamadas efetuadas.

- Construir uma tabela: organizar dados (neste caso sob a forma de uma tabela) de modo a que se possa recorrer a estes no decorrer da resolução de um problema. A construção de tabelas não só possibilita uma visão mais clara dos dados disponibilizados, como fomenta o reconhecimento de padrões, aumenta a perceção das relações entre os dados e aumenta as hipóteses de encontrar dados em falta. Exemplo de problema em que o uso desta estratégia se mostra adequado: *Cada saqueta com cromos da Violetta custa 2 euros. Quanto custam 5 saquetas com cromos da Violetta?* Neste caso, espera-se a construção de uma tabela semelhante à que se segue:

1 Saqueta	2 Saquetas	3 Saquetas	4 Saquetas	5 Saquetas
2 Euros	4 Euros	6 Euros	8 Euros	10 Euros

- Fazer uma lista organizada: realizar por extenso uma lista dos dados disponibilizados, de modo a poder recorrer aos mesmos posteriormente. Neste caso específico, a elaboração de uma lista organizada deve ser aconselhada em problemas que necessitem da enumeração de todas as combinações possíveis para uma dada situação, já que a organização sistemática permite ao aluno um contato mais direto e constante com os dados de que dispõe. Exemplo de problema em que o uso desta estratégia se mostra adequado: *Guardados no frigorífico o Alexandre tem:*

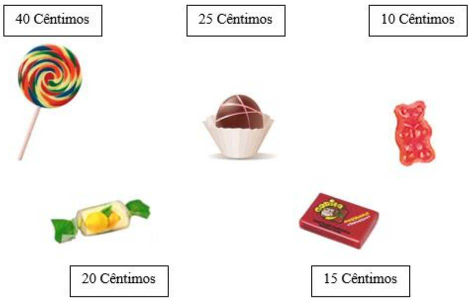
Bolos	Sumos
Bolo de Chocolate	Sumo de Limão
Bolo de Noz	Sumo de Laranja
Bolo de Leite	Sumo de Ananás

Encontra todas as combinações que o Alexandre pode fazer com o seu lanche.

De facto, nesta situação, a elaboração de uma lista onde conste cada combinação efetuada revela-se bastante benéfica para o aluno, já que lhe permite verificar visualmente o número de combinações possíveis.

- Desenhar uma imagem ou um diagrama: ilustrar pertinentemente o problema estudado. Esta estratégia ajuda o aluno a visualizar o problema, passando do universo abstrato para o concreto e tornando um problema, à partida, complexo, num problema fácil de resolver. Exemplo de problema em que o uso desta estratégia se mostra adequado: *Para celebrar o aniversário da Maria, convidámos alguns amigos para um jantar. As mesas estavam dispostas em fila e coladas umas nas outras.Se tivermos 10 mesas juntas e todos os lugares ocupados, quantas pessoas estarão sentadas? E se tivermos 12 mesas? E 20 mesas?* Neste caso, a ilustração da situação apresentada no problema revela-se fundamental, podendo inclusive conduzir à constatação de um padrão, ora veja-se: numa situação em que existissem dez mesas a operação a realizar seria: 4x10+2=42, sendo que o quatro representaria o número de pessoas em cada mesa, o dez o número de mesas ocupadas e o dois as duas pessoas sentadas na cabeceira das duas mesas das pontas.

- Estimar, verificar e rever: tal como o nome indica, consiste em dar um palpite inicial, verificar a sua plausibilidade e rever os resultados obtidos. Este palpite inicial tem como objetivo possibilitar ao aluno um modo de dar princípio ao processo de resolução do problema, sendo que, posterior ao palpite, deverá recorrer ao raciocínio lógico e a aptidões matemáticas para o ajustar até a resposta correta ser encontrada. O uso da estratégia em causa permite que o aluno "dive in and try an answer" (p. 88), à medida que o desafia a usar o seu conhecimento dos números e operações para gerir a resposta até que esteja correta. Exemplo de problema em que o uso desta estratégia se mostra adequado: *A Mariana comprou três doces diferentes. No total, custaram 75 cêntimos. Descobre quais foram os doces que a Mariana comprou e circunda-os.*



Nesta situação, pretende-se que o aluno realize um palpite inicial, comprovando-o ou refutando-o em seguida através do recurso a uma ou mais operações.

- Usar o raciocínio lógico: usar a lógica para encadear o raciocínio chegando à solução do problema. É uma estratégia que se acha subentendida em todas as outras, encontrando-se intimamente relacionada com o seu sucesso. Nesta estratégia revela-se necessário que o aluno analise pistas ou pequenas informações apresentadas no problema, de modo a usar essas mesmas informações na simplificação de um problema que, inicialmente, poderia apresentar-se como confuso devido ao excesso de dados. Exemplo de problema em que o uso desta estratégia se mostra adequado: *A Joana encontrou um saquinho com berlindes durante o lanche. Usa as pistas para descobrir quantos berlindes tinha o saquinho que a Joana encontrou: São menos de 10. São mais de 7. Não é um número par.* De facto, trata-se de um problema no qual o recurso ao raciocínio lógico se revela o único modo de chegar à solução.

- Trabalhar do fim para o início: surge quando o aluno analisa o problema do fim para o início. Nesta situação, o aluno conhece o fim de uma situação mas não o modo como começou e, como tal, pretende-se que seja capaz de reverter os seus passos até chegar a uma solução, lidando com problemas complexos e conciliando diversos conhecimentos matemáticos. Exemplo de problema em que o uso desta estratégia se mostra adequado: *A Andreia comeu metade das amoras que tinha na sua caixinha. No final, ainda ficou com 6 amoras. Quantas amoras tinha a Andreia na sua caixinha inicialmente?* Neste caso, a configuração e o objetivo do problema exigem que o aluno inverta o seu "modo de pensar habitual", refletindo acerca da conclusão apresentada de forma a conhecer os dados iniciais.

2.2) Resolução de problemas e ensino da Matemática

2.2.1) Importância da resolução de problemas

Numa sociedade em que as alterações quotidianas são crescentes e imprevisíveis, onde, dia após dia, o Homem é levado a interpretar e agir em situações de alta complexidade, vários autores realçam a importância de indivíduos que sejam bons resolvedores de problemas. Para Lopes, Bernardes, Loureiro, Varandas, Oliveira, Salgado, Bastos e Graça (1999) estes devem ser indivíduos "com grande capacidade de adaptação, aptos a aprender novas técnicas [e] capazes de formular problemas decorrentes de situações com que se deparem e de os resolver habilmente" (p. 7). Estes autores destacam a importância da resolução de problemas enquanto prática capaz de desenvolver capacidades básicas de pensamento que, a par com os conhecimentos específicos necessários, contribuirão para a criação de um bem-sucedido resolvedor de problemas.

Já Vale e Pimentel (2004) encaram a resolução de problemas como uma "oportunidade única de mostrar a relevância da matemática no quotidiano dos alunos" (p. 7), defendendo a importância dessa prática enquanto ferramenta para aprender "novas ideias e capacidades matemáticas" (p. 7).

O'Connell (2007) afirma que o foco central da educação matemática é, de facto, a resolução de problemas, defendendo a habilidade de resolver problemas como o derradeiro objetivo da Matemática. No entanto, mais do que o objetivo da aprendizagem matemática, a autora reafirma a resolução de problemas enquanto processo critico, interligado com todo o currículo matemático e capaz de conduzir o aluno a explorar e perceber a Matemática, desenvolvendo inúmeras capacidades e competências. Com isso, defende a resolução de problemas não enquanto uma atividade isolada, mas sim como parte integrante da aula, constituindo tanto o ponto de partida quanto o ponto de chegada para uma aula bem construída.

O National Council of Teachers of Mathematics (2007) defende a importância da familiarização com a resolução de problemas na medida em que, através desta, os alunos poderão adquirir "modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de matemática" (p. 57).

Ao ensinar matemática através da resolução de problemas, o professor permitirá ao aluno construir relações com o seu próprio quotidiano e até mesmo entre as diversas áreas do currículo, possibilitando que este transporte a matemática para fora do contexto escolar, aplicando-a aos problemas do seu dia-a-dia. Dessa forma, Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) defendem a importância da resolução de problemas, na medida em que esta prática:

> Proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação; fomenta o raciocínio e a justificação; permite estabelecer conexões entre vários

> temas matemáticos e entre a matemática e outras áreas curriculares; [e] apresenta a matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana (p. 14).

Em suma, pode concluir-se que a relevância da resolução de problemas "não é só utilitária mas sobretudo formativa, pois, além de nos ajudar a resolver os problemas do quotidiano, permite principalmente desenvolver processos e capacidades de pensamento que são o que de mais importante a matemática escolar pode desenvolver num individuo" (Vale & Pimentel, 2004, p. 10).

2.2.2) Perspetivas sobre a resolução de problemas

Atendendo ao facto da resolução de problemas ser o "motor do desenvolvimento da Matemática e da atividade matemática" (Abrantes, 1989, p. 7), revela-se pertinente expor claramente de que forma a prática referida se enquadra nos objetivos do ensino matemático. Assim, surge a perspetiva de Hatfield (1978, citado por Matos e Serrazina, 1996) que considera três tipos distintos de ensino da resolução de problemas: "(a) ensino para, (b) ensino acerca de e (c) ensino através da resolução de problemas" (p. 142). O primeiro tipo foca a sua atenção na aquisição e desenvolvimento de técnicas e conhecimentos que auxiliem o aluno no momento da escolha de uma ou mais estratégias necessárias à resolução de um problema. Assim, é caraterizado como "ensino para" a resolução de problemas, já que se concentra no processo anterior à resolução do problema em si. Já o segundo tipo foca a sua atenção na preparação de procedimentos e estratégias fundamentais para que o aluno seja capaz de resolver um problema. Dessa forma, é apelidado de "ensino acerca de", já que pretende modelar no aluno um conjunto de comportamentos que lhe deem autonomia e que fomentem o sucesso no processo de resolução de problemas. Por último, o terceiro tipo valoriza o processo de ensino/aprendizagem através da resolução de problemas, defendendo que todos os conteúdos programáticos do currículo matemático podem ser introduzidos e aprofundados a partir da resolução de problemas matemáticos.

O trabalho que realizei e que analiso neste relatório enquadra-se no "ensino acerca de", já que procura introduzir problemas de diferentes tipos e desenvolver nos alunos uma atitude de questionamento que lhes permita analisar os problemas e as possibilidades de que dispõem para os resolver, a par de um processo em que vão conhecendo e usando novas estratégias de resolução de problemas.

2.2.3) A resolução de problemas no Currículo Nacional

Analisando o modo como a resolução de problemas tem sido encarada no currículo de Matemática em Portugal, identificam-se visões diferentes relativamente ao modo como ela tem sido considerada ao longo do tempo.

De acordo com Fonseca (2014), "nos programas oficiais portugueses a resolução de problemas esteve sempre presente, mesmo que implicitamente" (p. 17). Segundo esta autora, no programa para o 1.º ciclo apresentado pelo Ministério da Educação em 1991, a resolução de problemas era já encarada como um dos grandes pilares da educação matemática. No entanto, neste mesmo programa, pouco se fez para explicitar de que se tratava concretamente o termo "problema". Anos mais tarde, e com a quarta reedição do programa apresentado em 1991, o Ministério da Educação (2004) apresentou um currículo nacional no qual indicava três grandes finalidades para a educação matemática: "desenvolver a capacidade de raciocínio, desenvolver a capacidade de comunicação [e] desenvolver a capacidade de resolver problemas" (p. 163), destacando a resolução de problemas como a "resolução de situações problemáticas (numéricas e não numéricas)" (p. 164). Constituindo a atividade central da disciplina matemática, defendia-se esta tarefa enquanto "promotora do desenvolvimento do raciocínio e da comunicação" (p.164), devendo ser colocada no centro de todo o processo de ensino e de todos os conteúdos curriculares (Figura 2):

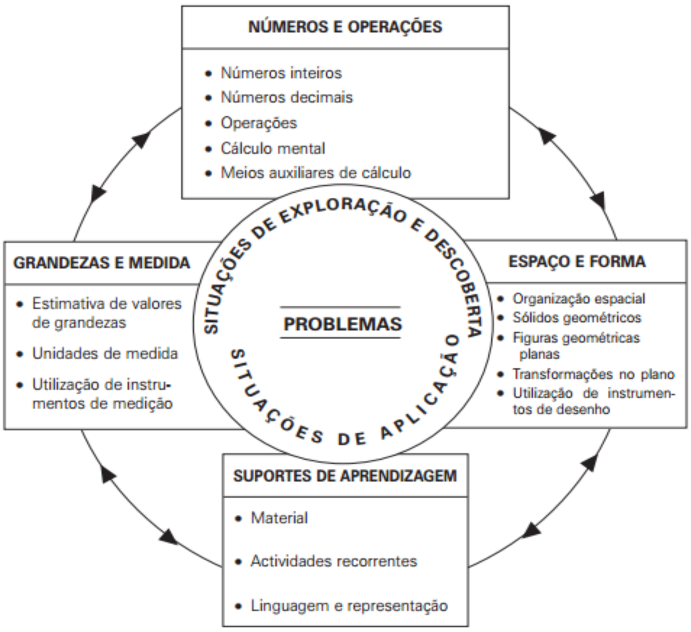


Figura 2 – Resolução de problemas no centro do currículo matemático (Ministério da Educação, 2004)

Procurando cada vez mais potenciar o papel enriquecedor da resolução de problemas no processo de aprendizagem, começaram também a surgir novos manuais escolares que, para além dos já conhecidos problemas de conteúdo, apresentavam também “problemas de processo, de aplicação [e] de aparato” (Fonseca, 2014, p. 18). Assim, e a fim de desafiar matematicamente tanto o aluno, quanto o professor, a resolução de problemas passou a ir para além dos típicos cálculos, passando a enquadrar a resolução através de esquemas, de listas, de desenhos, etc. e a equacionar situações nas quais se revelava necessário recolher dados reais, tomar decisões e usar novos materiais.

Nesse âmbito, e segundo a autora acima citada, “alargou-se o leque de problemas apresentados e explorados em sala de aula” (Fonseca, 2014, p. 19), passando a ser usual a variedade de processos de resolução, a diversidade de respostas (nos casos em que o problema assim o permitisse), o trabalho em pequenos grupos, a apresentação e argumentação dos resultados obtidos e a apreciação e questionamento das distintas resoluções. Como tal, a resolução de problemas passou a ser encarada como mais do que uma tarefa destinada à aprendizagem de conteúdos programáticos, sendo equacionada a vertente social da vida do aluno e os benefícios dessa tarefa enquanto fonte de autoconfiança e de ferramentas fulcrais à resolução de problemas quotidianos.

Por outro lado, e sabendo que o conhecimento de conteúdos matemáticos não se revelava suficiente para a resolução bem-sucedida de um problema, surgiu em 2007 um novo programa de matemática destinado ao ensino básico, no qual se focava a importância do desenvolvimento de novas aprendizagens e capacidades. Neste apresentava-se a relevância de desenvolver no aluno “as capacidades transversais de resolução de problemas, de comunicação e de raciocínio matemático” (Fonseca, 2014, p. 19), já que estas eram consideradas aspetos fundamentais da aprendizagem matemática. Com a homologação deste novo documento, tornou a ser realçado o papel importantíssimo da resolução de prolemas, afirmando-se a necessidade de conduzir os alunos a:

> compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas; apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam; monitorizar o seu trabalho e refletir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes; formular problemas (Ponte,

> Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Souza, Menezes, Martins & Oliveira 2007, p. 5).

Anos mais tarde, e com um novo programa de matemática para o ensino básico, surgiu em 2013 um novo documento que associa o programa às metas curriculares. Neste apresenta-se uma nova conceção sobre o professor e o aluno e a resolução de problemas passa a encontrar-se estritamente limitada aos problemas de cálculo. Dessa forma, o presente documento defende que a resolução de problemas deve envolver por parte dos alunos:

> a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais (Damião, Festas, Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013, p. 5).

Segundo Fonseca (2014), este é um documento que encara a resolução de problemas de um modo bastante limitador, já que "restringe" o aluno de experienciar situações novas e desafiantes, confrontando-o somente com questões resolúveis em "um, dois, três ou vários passos" (p. 20). Ao defender a importância de rotinas e automatismos no âmbito da aprendizagem matemática, o presente programa leva a que o aluno se habitue a determinado tipo de tarefa, "dificultando a mobilização de conhecimentos e capacidades para, de modo criativo e inovador, abordar problemas diferentes dos que treinou" (p. 20). Para além do referido, a autora acredita ainda que a limitação das tarefas propostas possa levar a que o aluno veja reduzidas as suas capacidades de "experimentar, de tentar, de analisar erros e situações novas, de delinear uma estratégia de resolução para uma situação desconhecida, [e] de raciocinar" (p. 20).

Sumariamente, pode concluir-se que, apesar de todos os progressos visíveis ao longo dos anos, o período que atualmente vivemos é, claramente, de retrocesso, tendo sido passado para segundo plano o valor da experiência e das oportunidades de exploração. No entanto, e sendo reconhecida a importância da aquisição de hábitos de raciocínio, acredita-se que esta será uma fase a ultrapassar.

2.3) O professor e a resolução de problemas

2.3.1) O papel do professor

Para além da importância dos conhecimentos matemáticos e do domínio das diversas estratégias de resolução de problemas, o papel do professor apresenta também uma grande importância no sucesso do aluno enquanto resolvedor de problemas. Isso dá-se pois, segundo Lopes, et al. (1999), em inúmeros casos, o aluno não tem consciência dos processos a que recorre para resolver um problema e, como tal, necessita da ação do adulto de forma a ganhar conhecimento das suas escolhas e ações. Segundo estes autores, o professor deverá, inicialmente, adotar o papel de modelo, "referindo-se a cada uma das etapas do processo, justificando as ações tomadas em cada uma delas [e] explicitando as razões que o levaram a optar por uma determinada estratégia" (p. 19). Dessa forma, o professor poderá colocar-se no papel do aluno, mostrando-lhe como geriu o desafio que lhe havia sido proposto, organizando os seus conhecimentos e justificando todas as suas escolhas e ações. Enquanto modelo, o professor deverá também procurar dissipar algumas das conceções erróneas que o aluno traga na sua "bagagem", para além de lhe conceder oportunidades e experiências que o levem a perceber que:

> mesmo os «bons resolvedores» de problemas encontram obstáculos, que o errar faz parte do processo de aprendizagem, que a maior parte dos problemas não se resolvem com a simples aplicação de um algoritmo, operação ou outro procedimento mecânico e que há problemas que podem ser resolvidos de maneiras diferentes (Lopes et al., 1999, p.20).

Segundo O'Connell (2007), o desenvolvimento de uma atitude positiva perante o ato de resolver um problema é algo crucial para o sucesso do resolvedor, sendo fundamental que o professor passe essa mesma ideia ao aluno.

Posteriormente, numa etapa em que o papel de modelo pareça desadequado, o professor deverá adotar o papel de "orientador e desbloqueador de situações de impasse", agindo de forma ponderada e pertinente, dando suficiente liberdade ao aluno para que o seu raciocínio não seja influenciado, embora oferecendo dicas para que este consiga progredir na resolução. Dessa forma, e reconhecendo que, em inúmeras ocasiões, o papel do professor é mesmo o de auxiliar o aluno a "desobstruir" o seu raciocínio, O'Connel (2007) apresenta um conjunto de estratégias a ter em mente de modo a fornecer ao aluno algum auxílio nos momentos mais frustrantes:

- Reformular o problema por palavras suas;
- Anotar ideias;
- Usar materiais manipuláveis;
- Falar acerca do problema;
- Pensar num problema semelhante;
- Excluir informação desnecessária;
- Experimentar uma estratégia diferente;
- Fazer uma pausa;
- E dar a si próprio um pequeno incentivo.

Assim, e sabendo o quão importante se revela que o aluno tome consciência da sua própria forma de pensar, o professor deverá ter sempre em perspetiva o desenvolvimento metacognitivo do mais jovem, concedendo ferramentas para que este reflita acerca da sua exclusiva maneira de refletir. Consequentemente, e de acordo com Matos e Serrazina (1996), será dever do professor:

> fazer perguntas que levem os alunos a reflectir sobre os seus conhecimentos de Matemática e sobre os seus comportamentos e maneiras de pensar, a analisá-los e a utilizá-los; transmitir aos alunos um conjunto de ideias, de factos e conceitos inerentes ao ensino e à aprendizagem da Matemática que parecem influenciar o rendimento nesta disciplina de forma significativa; e ajudar os alunos a avaliar e a regular os seus comportamentos e ações (p. 145).

O quadro abaixo, apresentado por Lopes, et al. (1999, p. 21), sugere um conjunto de indicações propícias ao desenvolvimento de bons resolvedores de problemas:

Ações do Professor		Intenções do Professor
Pedir a um aluno para ler o enunciado do problema em voz alta. Discutir palavras ou frases que possam levantar dúvidas.		Mostrar como é importante a leitura cuidadosa do problema e centrar a atenção em certas palavras que têm significado especial.

Pedir a um aluno para recontar o problema, usando palavras suas. Discutir com toda a turma a compreensão do problema, fazendo os comentários adequados. Discutir com toda a turma possíveis estratégias de resolução.	**A N T E S**	Realçar a importância que tem a compreensão do enunciado e do problema. Centrar a atenção em dados importantes e clarificar partes do problema. Fazer surgir ideias sobre possíveis maneiras de resolver o problema.
Observar e pôr questões aos alunos, no decurso do trabalho, dando sugestões, se necessário. Proporcionar extensões do problema, se necessário. Pedir aos alunos que resolveram o problema para «dar a resposta».	**D U R A N T E**	Identificar os pontos fracos dos alunos. Ajudar os alunos a ultrapassar situações de impasse. Desafiar e encorajar os alunos mais rápidos a generalizar a sua estratégia de resolução a um problema semelhante. Proporcionar o confronto das soluções e a discussão da sua plausibilidade.
Pedir aos alunos que expliquem e discutam as estratégias de resolução que utilizaram. Pedir aos alunos que relacionem o problema com problemas já resolvidos, ou que resolvam extensões desse problema.	**D E P O I S**	Identificar as diferentes estratégias que permitiram resolver o problema. Mostrar que as estratégias de resolução de problemas não são específicas de um dado problema e ajudar os alunos a reconhecer diferentes tipos de situações, onde essas estratégias podem ser úteis.

Atento à importância do papel do professor, Ponte (2005) destaca alguns dos elementos importantes nas escolhas e ações deste profissional:

- Objetivos de aprendizagem matemática a respeitar na unidade em causa (conteúdos a tratar e a sua prioridade);
- Objetivos curriculares fundamentais da unidade (capacidades transversais a ser desenvolvidas essenciais ao trabalho em aula);
- Capacidades e interesses dos alunos (diversidade existente em aula e resposta equilibrada do professor);
- Materiais disponíveis (existência, ou não, de materiais adequados e propícios à aprendizagem);
- Condições e recursos da escola e da comunidade (existência, ou não, de espaços e infraestruturas adequados e propícios à aprendizagem);
- Fatores do contexto escolar e social (elementos que influenciam o ambiente vivido em aula: interesse dos pais, existência de alternativas no período pós-letivo, ambiente de cooperação entre alunos, etc.);
- Avaliação (ferramenta de deteção de problemas e insuficiências no processo de ensino-aprendizagem).

Os elementos apresentados, não só condicionam a ação do profissional como a guiam, levando a que reflita individualmente ou com o apoio dos pares acerca da sua própria ação pedagógica, a fim de diversificar a sua prática, contornando ou ultrapassando problemas e criando situações de aprendizagem inovadoras, interessantes e benéficas para o aluno.

Articulando a perspetiva de Ponte (2005) com a resolução de problemas, importa ter bem claro de que modo o problema a explorar está integrado nos objetivos da unidade curricular e de que modo ele pode despertar o interesse dos alunos. Estes aspetos são, por exemplo, referidos por Mendes (2012) que salienta a importância de propor problemas cujos contextos acompanhem um caminho de desenvolvimento da multiplicação, favorecendo a análise de modelos retangulares progressivamente mais abstratos, integrados em contextos familiares aos alunos. Para além da integração nos objetivos da disciplina e da preocupação com os interesses e capacidades dos alunos, revela-se também importante ter em conta os materiais disponíveis e as condições e recursos da escola. Estes poderão desempenhar um papel fundamental na exploração do problema, permitindo aos alunos abordagens mais ricas e diversas e, eventualmente, uma maior compreensão do problema proposto. Segundo Pires e Amado (2013) os denominados recursos devem ser considerados para além dos objetos materiais tidos como "típicos", podendo incluir-se nesta terminologia recursos manipuláveis (como réguas, compassos, quadro ou manual escolar), recursos tecnológicos (como calculadoras gráficas, computadores, internet ou quadros interativos), *softwares* especializados (como o GeoGebra) e recursos humanos e culturais (como o professor, o próprio aluno ou visitas de estudo). Estes autores defendem também que "a existência de inúmeros recursos e materiais não é, por si só, garantia de melhores aprendizagens" (p. 473), no entanto, acreditam que, quando corretamente potencializados e aproveitados, estes elementos poderão constituir fortes ferramentas para o sucesso escolar dos alunos. Diretamente relacionada com os recursos humanos, destaca-se a importância dos fatores do contexto escolar e social, na medida em que estes influenciam fortemente não só as práticas de resolução de problemas do aluno, como toda a sua experiência educativa, dentro e fora da escola. Por último, a relação entre a avaliação e a prática de resolução de problemas é também bastante evidente, já que a segunda permite ao professor detetar pontos fortes e menos fortes na metodologia de trabalho adotada, tal como as áreas de conteúdo em que a turma necessita de mais e menos atenção, reformulando as suas práticas e, neste caso, os problemas propostos, em função das necessidades da turma.

2.3.2) O trabalho em grupo na resolução de problemas

Reconhecendo a relevância da cooperação e da experienciação do trabalho em equipa no desenvolvimento de capacidades essenciais à resolução de problemas, diversos autores defendem, consequentemente, a importância do trabalho em grupo. Segundo Matos e Serrazina (1996), a natureza da resolução de problemas apela fortemente ao trabalho em grupo, sendo que este "pode ajudar a promover mais reflexão, mais discussão entre os alunos e mais atividades de resolução de problemas, promovendo assim uma mudança da natureza das atividades que tradicionalmente têm sido dominantes na aula de Matemática" (p. 149). Dessa forma, os autores acima referidos não só defendem os impactos positivos do trabalho em grupo na compreensão de conceitos matemáticos, como defendem o seu papel crucial no aumento da motivação e no desenvolvimento de capacidades comunicativas por parte dos alunos.

Ao permitir que formulem e discutam livremente as conjeturas, argumentos e estratégias que os conduziram à resolução do problema, o professor permitirá aos alunos trabalhar em conjunto a fim de atingir um objetivo comum, fomentando a aprendizagem através da experiência pessoal e num contexto social. Nesse âmbito, Matos e Serrazina (1996) referem que a resolução de problemas em grupo poderá ser útil tanto aos "melhores alunos” quanto àqueles que apresentem mais dificuldades, já que permitirá aos primeiros “observar processos e refletir sobre eles a um nível superior” (p. 149), enquanto aos segundos permitirá colocar em prática as explicações previamente recebidas.

Tal como acontece no âmbito do trabalho individual, o papel do professor é igualmente determinante no apoio ao trabalho em grupo. Segundo os autores referidos anteriormente o professor deverá:

- Organizar corretamente os grupos em função do tipo de tarefa a propor e das caraterísticas da turma;
- Apoiar cada grupo, auxiliando-o a gerir dificuldades internas de funcionamento e estimulando a interação entre os diversos constituintes;
- Saber avaliar quando o trabalho de grupo é mais benéfico e quando deve mudar de formato (trabalho individual ou em turma);
- E considerar e conciliar os diferentes ritmos de trabalho dos diversos grupos.

Diretamente associados ao trabalho em grupo, surgem os momentos de discussão de resultados tidos como “oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento” (Ponte, 2005, p. 16). Segundo Ponte (2005), a discussão deverá ser encarada como um hábito imprescindível da comunicação matemática, já que permite aos alunos expor o seu trabalho, partilhar com os colegas as suas conjeturas e conclusões, apresentar os motivos que levaram a determinada escolha/resultado e questionar os processos por detrás de cada resolução. Já para o professor, o momento de discussão representará uma oportunidade única para conduzir os alunos à clarificação de conceitos matemáticos, potenciando a avaliação dos argumentos apresentados e o estabelecimento de relações entre a matemática e as restantes áreas de conteúdos (ou até mesmo vida real).

Reconhecendo a importância do professor nos momentos de discussão, este deverá apoiar as ideias, favorecer a discussão e incentivar os alunos a avançar ou a procurar novos caminhos. Ponte (2005) refere que cabe ao professor “assumir um papel de moderador, gerindo a sequência de intervenções e orientando, se necessário, o respetivo conteúdo” (p. 16), permitindo aos alunos intervir e influenciar o rumo dos acontecimentos. Possibilitando aos alunos uma intervenção direta, o professor proporcionar-lhes-á também a adoção do papel de crítico, levando a que estes aprendam a “questionar e a demonstrar o pensamento dos colegas, de modo a clarificarem ideias ainda não totalmente desenvolvidas" (National Council of Teachers of Mathematics, 2007, p. 69). Os alunos terão oportunidade não só de expor as suas ideias mas também de analisar os métodos e ideias apresentados pelos colegas, desenvolvendo a capacidade de discernir entre um processo de resolução mais ou menos pertinente, em função dos seus pontos fortes e das suas limitações.

Em suma, acredita-se que, ao possibilitar ao aluno a oportunidade de comunicar matematicamente, ouvindo cuidadosamente os pontos de vista apresentados pelos colegas e formulando opiniões fundamentadas acerca dos mesmos, fomentar-se-á o desenvolvimento de jovens críticos e observadores, devendo realçar-se que todo o momento de discussão deva possuir um objetivo pré-definido, permitindo aos intervenientes expor as suas ideias, ouvir as dos colegas e beneficiar tanto das afirmações proferidas como das questões levantadas.

2.4) O aluno e a resolução de problemas

2.4.1) Perspetivas dos alunos

Ainda que inúmeros sejam os estudos onde se foca a importância do papel do professor no processo de resolução de problemas, existem também aqueles nos quais se explora a perspetiva do aluno na execução deste tipo de tarefas. Segundo Lopes, et al. (1999), "a maioria dos alunos tem uma experiência pouco agradável no campo da resolução de problemas, o que os leva a pensar que não gostam e, mais grave ainda, que não são capazes de os resolver" (p. 18). Para estes autores, a grande barreira que impede os alunos de apreciar esta tarefa é, grande parte das vezes, psicológica, sendo dever do professor "proporcionar-lhes experiências motivantes que os desinibam e nas quais experimentem sucesso" (p. 18). Já O'Connell (2007) refere que se revela necessário por parte do aluno o desenvolvimento de uma atitude positiva e de conhecimento face ao problema e à sua natureza, sendo essencial que este compreenda quatro importantes fatores:

- A resolução de problemas requer paciência e, como tal, não deve ser julgada pela rapidez de resposta, mas sim pela credibilidade da solução encontrada;
- A resolução de problemas requer persistência, podendo ser necessário o recurso a diversas estratégias até que uma seja bem-sucedida e, como tal, autoconfiança e empenho;
- A resolução de problemas envolve a tomada de riscos, sendo crucial que o aluno se sinta confortável em arriscar e em errar até atingir o seu objetivo;

- A resolução de problemas requer cooperação, sendo de valorizar a partilha de ideias e o trabalho em equipa.

Conscientes do peso de conhecer a opinião dos alunos, Porfírio, Semedo e Albuquerque (1993) apresentam um artigo no qual analisam a opinião dos alunos acerca da importância da resolução de problemas. Partindo de um conjunto de inquéritos, as autoras puderam adquirir uma visão mais abrangente daquilo que os alunos realmente pensam, sendo notória uma profunda mudança nas opiniões acerca da matemática e da resolução de problemas antes e após o estudo desenvolvido. De entre as constatações recolhidas podem destacar-se duas bastante comuns: a importância da resolução de problemas enquanto ferramenta de ensino-aprendizagem da matéria a lecionar e a importância da resolução de problemas enquanto fonte de motivação.

Para mais de metade dos estudantes questionados, a resolução de problemas enquanto metodologia para aprender as diversas matérias é tida como deveras importante, já que este hábito constitui uma "maneira diferente e melhor de lidar com a Matemática" (Porfírio, Semedo & Albuquerque, 1993, p. 8), permitindo aos alunos perceberem mais facilmente determinados conteúdos e aprenderem a pensar nas questões que lhes são propostas. De modo a ilustrar a constatação referida, as autoras apresentam algumas das respostas recolhidas, encontrando-se entre essas: "Esta experiência na resolução de problemas ajudou a perceber as questões da matéria com grande facilidade. Foi uma maneira diferente de aprender a lidar com a Matemática." (Porfírio, Semedo & Albuquerque, 1993, p. 8) ou "Temos que pensar bem no problema e arranjar maneiras para o resolver e isso faz com que a gente desenvolva o raciocínio e aprenda a pensar" (Porfírio, Semedo & Albuquerque, 1993, p. 8).

Já para uma minoria dos alunos questionados, a resolução de problemas apresenta uma faceta profundamente motivacional, dando-lhes confiança, motivação e interesse para "trabalharem" mais e melhor. Recolhidos alguns dos questionários pode ler-se: "Resolver problemas motiva os alunos a trabalhar. Temos que pensar bem no problema e podemos experimentar várias maneiras para resolver o problema. Isso faz com que a gente se entusiasme pelo trabalho que vai fazendo" (Porfírio, Semedo & Albuquerque, 1993, p. 8) ou "Apesar de para mim ter sido um bocado difícil fiquei entusiasmada porque tive que pensar em problemas que eram divertidos. Por isso fiquei mais interessada na matéria e gostava de trabalhar nas aulas" (Porfírio, Semedo & Albuquerque, 1993, p. 8).

Projetos como o referido ilustram claramente a importância da implementação de "bons" hábitos de resolução de problemas, tendo-se evidenciado no final do projeto uma significativa evolução na capacidade de resolver problemas por parte dos alunos, tal como uma profunda alteração nas suas atitudes, nomeadamente: uma crescente autonomia, um aumento da persistência e um créscimo na sua autoconfiança, encarando os problemas como desafios e demonstrando vontade de os ultrapassar.

Almeida e Almeida (2011) focam o papel dos próprios alunos na tarefa de resolução de problemas, destacando a importância de reconhecer os procedimentos dos "melhores alunos" como forma de criar possibilidades de resolução para os alunos com mais dificuldades. Estes autores acreditam que existem fatores concretos que permitem a diferenciação ao nível do desempenho dos alunos, originando alunos com melhores e alunos com mais fracos resultados. De entre os possíveis fatores, Almeida e Almeida (2011) destacam que os apelidados "melhores alunos apresentam estruturas mais complexas e melhor estruturadas de conhecimentos na sua área de proficiência, processando de forma mais eficiente essa informação e recorrendo mais facilmente a processos de raciocínio indutivo e dedutivo no seu manuseio" (p. 9). À parte disso, também os métodos de ensino são encarados como uma das fontes que fortemente influenciam o rendimento escolar dos alunos, apontando, mais uma vez, para a importância do papel do professor. Analisando o estudo apresentado pelos autores em causa, pode concluir-se que "os alunos com maior rendimento na disciplina de matemática, mesmo podendo apresentar um nível de raciocínio numérico similar a colegas com pior rendimento nesta disciplina, apresentam uma realização superior na resolução de problemas" (pp. 13-14). Esta diferença encontra-se visível não só no nível final de realização como também nos processos cognitivos subjacentes a todo o processo de resolução de problemas, podendo claramente deduzir-se a importância do desenvolvimento de processos cognitivos de resolução de problemas a fim de fomentar o número de "bons alunos" na disciplina de matemática.

2.4.2) Dificuldades associadas à resolução de problemas

Tratando-se de uma tarefa complexa como se tem procurado demonstrar ao longo do presente documento, a resolução de problemas desencadeia no aluno uma série de dúvidas e dificuldades. Como referem Vale e Pimentel (2004), esta tarefa "implica a coordenação de conhecimentos, experiências prévias, intuição, atitudes e conceções" (p. 16), revelando-se assim uma atividade intelectual de extrema complexidade.

De entre as maiores dificuldades expressas pelos alunos, destacam-se o peso das conceções prévias trazidas por estes na sua "bagagem" intelectual e a necessidade de compreensão exigida no ato de resolver um problema. Segundo Lester e Schroeder (1989, citados por Vale e Pimentel, 2004), esta última capacidade é fundamental ao ato de resolver problemas, na medida em que:

> Desenvolve o tipo de representação que o aluno pode construir; ajuda o aluno a coordenar a seleção e execução de procedimentos (estratégias, algoritmos, …); ajuda o aluno a julgar a razoabilidade dos resultados; promove a transferência do conhecimento para problema que com este estejam relacionados; promove a generalização para outras situações (p. 16).

Por sua vez, Mason, Burton e Stacey (1985, citados por Vale e Pimentel, 2004), destacam a sofisticação adjacente ao pensamento matemático, referindo três fatores que tendem a influencia-lo: "a capacidade de usar processos subjacentes ao pensamento matemático; a confiança para lidar com estados emocionais e psicológicos, para deles tirar o melhor proveito; a compreensão de conteúdos matemáticos" (p. 16).

Certo é que existem diversos elementos que possam condicionar o desenvolvimento da capacidade de pensar matemática e, consequentemente, a criação de um "bom resolvedor de problemas", no entanto, grande parte dos mesmos poderão ser ultrapassados através do fomento de uma prática reflexiva e introspetiva por parte do aluno.

Capítulo III – Metodologia

Neste capítulo apresenta-se a metodologia utlizada nesta investigação. Como tal, será exposto o paradigma em que se inscreve a presente investigação, os métodos adotados no seu desenvolvimento, o contexto e a posição dos participantes envolvidos, tal como os dispositivos de recolha e análise de informação e de intervenção.

3.1) Opções metodológicas

Tendo em conta os objetivos de estudo mencionados previamente, optei por adotar uma perspetiva qualitativa e um paradigma interpretativo, para além de um *design* de investigação fortemente demarcado pela investigação-ação.

3.1.1) Perspetiva qualitativa

Para Coutinho (2014), na perspetiva qualitativa "o objeto de estudo na investigação não são os comportamentos, mas as intenções e situações, ou seja, trata-se de investigar ideias, de descobrir significados nas ações individuais e nas interações sociais a partir da perspetiva dos atores intervenientes no processo" (p. 28). Assim, o objetivo do investigador é o de desvendar o propósito da ação, procurando compreender o fenómeno enquanto parte de determinado contexto, sem impor quaisquer expetativas prévias. Como tal, e ao contrário do que acontece na perspetiva quantitativa, a teoria surge *à posteriori*, à medida que o investigador recolhe e analisa os dados reunidos. A construção da teoria é processada de um modo indutivo e sistemático, partindo de factos e "da análise de dados, fundamentando-se na observação dos sujeitos, na sua interpretação e significados próprios" (Miles & Huberman, 1994, citados por Coutinho, 2014, p. 29).

Sabendo que nesta perspetiva se valoriza a riqueza da diversidade de cada interveniente em detrimento da uniformização de comportamentos e que, como tal, se valoriza a particularização em vez da generalização, pode afirmar-se que nesta:

> o interesse está mais no conteúdo do que no procedimento, razão pela qual a metodologia é determinada pela problemática em estudo, em que a generalização é substituída pela particularização, a relação causal e linear pela relação contextual e complexa, os resultados inquestionáveis pelos resultados questionáveis [e] a observação sistemática pela observação experiencial ou participante (Pacheco, 1993, citado por Coutinho, 2014, p. 29).

Tratando-se de uma perspetiva onde se apela, constantemente, à reflexão, considerei a sua articulação com a minha prática bastante natural, já que em diversos momentos senti necessidade de parar, refletir e então atuar, analisando a minha própria ação pedagógica a fim de evoluir e de ultrapassar situações de impasse. Para tal, revelaram-se ferramentas fundamentais os dados que fui recolhendo ao longo da investigação através da observação, entrevistas, notas de campo, documentos pessoais, etc., já que me permitiram "melhorar a prática individual, contribuindo para a descrição e compreensão de situações concretas" (Coutinho, 20014, p. 30).

3.1.2) Paradigma interpretativo

Dadas as caraterísticas da investigação, considerei pertinente a adoção de um paradigma interpretativo, na medida em que neste se defende que o papel do investigador é o de "penetrar no mundo pessoal dos sujeitos" (Coutinho, 2014, p. 18), de modo a saber a forma mais correta de interpretar determinadas situações, tal como o significado das mesmas para os sujeitos a estudar. Assim, e aliado a termos como "compreender, interpretar, descobrir significados [e] hipóteses de trabalho" (Coutinho, 2014, p. 23), depressa percebi que este seria o paradigma a seguir, já que ia ao encontro das minhas finalidades e permitia interpretar e compreender o significado de diversas situações num dado contexto social.

3.1.3) Investigação-ação

Tratando-se de uma investigação em contexto escolar, achei que seria adequado adotar um *design* de estudo com caraterísticas fortemente marcadas pela investigação-ação, na medida em que esta, segundo Altrichter et al. (1996, citado por Máximo-Esteves, 2008, p. 18), " tem como finalidade apoiar os professores e os grupos de professores para lidarem com os desafios e problemas da prática e para adotarem as inovações de forma refletida", algo que se assemelhou bastante ao meu papel enquanto investigadora. Assim, recorri à investigação-ação enquanto "recurso apropriado para a melhoria da educação e o desenvolvimento dos seus profissionais" (Máximo-Esteves, 2008, p.19).

Acredito que a adoção de um design com caraterísticas de investigação-ação tenha sido, de facto, a escolha mais pertinente, já que este procura "compreender, melhorar e reformular práticas" (Ebbut, 1985, citado por Coutinho, Sousa, Dias, Bessa, Ferreira & Vieira, 2009, p. 363), à medida que permite uma "intervenção em pequena escala no funcionamento de entidades reais e análise detalhada dos efeitos dessa intervenção" (Cohen & Manion, 1994, citado por Coutinho et al., 2009, p. 363).

3.2) Dispositivos e procedimentos de recolha e análise de informação

Dada a natureza da problemática em estudo e os objetivos a que se propôs a presente investigação, os dispositivos e procedimentos de recolha e análise de informação adotados foram a observação participante, a entrevista e a análise das produções dos alunos.

3.2.1) Observação participante

De acordo com Aires (2011) a observação consiste "na recolha de informação, de modo sistemático, através do contacto direto com situações específicas" (p. 24-25). Já Coutinho (2014) afirma que a observação se pode considerar de acordo com duas dimensões distintas: observação estruturada ou não-estruturada, podendo ainda subdividir-se em função do grau de participação do investigador: participante-pleno, participante observador, observador participante e simples observador.

Neste caso particular optei pela observação não-estruturada, tendo recorrido apenas ao registo do observado através de notas de campo durante a aula (enquanto os alunos resolviam as tarefas propostas). Por outro lado, recorri também à observação participante, já que, enquanto investigadora, assumi "um papel ativo e [atuei] como mais um membro do grupo que observava" (Coutinho, 2014, p. 138), de modo a "conseguir ter a perspetiva de um insider do grupo sem perder a credibilidade que assiste a um investigador social" (Angrosino, 2012, citado por Coutinho, 2014, p. 138).

Considero que a adoção da observação participante tenha sido oportuna já que esta me permitiu "documentar atividades, comportamentos e caraterísticas físicas sem ter de depender da vontade e capacidade de terceiras pessoas" (Coutinho, 2014, p. 136). Por outro lado, e atendendo à abordagem qualitativa caraterística da investigação realizada, esta técnica de recolha de dados enquadrou-se perfeitamente nos objetivos propostos, já que me permitiu observar o que acontece "naturalmente".

De entre as vantagens deste tipo de observação, Colás (1998, citado por Aires, 2011) destaca: "a facilidade na obtenção das informações internas aos grupos que não seriam detetáveis a partir de outras técnicas; (…) a garantia de credibilidade dos resultados ao permitir o trabalho com fontes próximas e em primeira mão [e] a facilidade no registo de informações não-verbais" (p. 27).

3.2.2) Entrevista

A entrevista "visa a obtenção de informação através de questões que são colocadas ao inquirido pelo investigador" (Coutinho, 2014, p. 141), podendo essas mesmas questões ser abertas, fechadas ou uma mistura de ambas.

Neste trabalho, recorri à entrevista com questões abertas (entrevista não-estruturada ou aberta), surgindo as questões "do contexto imediato e [sendo] levantadas no curso natural dos acontecimentos, ou seja, o investigador não leva consigo qualquer tipo de guião com os tópicos prévios a abordar" (Silverman, 2000 citado por Coutinho, 2014, p.141). Assim, optei por realizar um conjunto de vinte e três entrevistas (entre uma a duas entrevistas para cada problema), tendo escolhido os pares a entrevistar consoante a demonstração de um raciocínio pertinente e interessante no decorrer da resolução dos problemas propostos. Estas entrevistas foram realizadas no período imediatamente a seguir à execução da tarefa, tendo deslocado cada par até uma sala isolada e dialogado com os seus membros a fim de que me apresentassem o raciocínio exposto no enunciado. Primeiro registei em formato áudio cada entrevista tendo, posteriormente, procedido à sua transcrição integral para que fosse possível uma futura análise e interpretação do seu conteúdo.

Considerei a opção de recorrer a entrevistas bastante pertinente para a investigação a decorrer já que estas "são uma poderosa técnica de recolha de dados porque pressupõem uma interação entre o entrevistado e o investigador, possibilitando a este último a obtenção de informação que nunca seria conseguida através de um questionário" (Coutinho, 2014, p. 141). Ao contrário do questionário fechado, a entrevista possibilita a existência de explicações complementares ao sujeito no caso da resposta em causa não ir ao encontro da pergunta efetuada.

Tal como a observação-participante, também a adoção de entrevistas abertas se encontra fortemente relacionada com a abordagem qualitativa, podendo inclusive afirmar-se que "o seu objetivo básico consiste na recolha e aprofundamento de informação sobre acontecimentos, dinâmicas, conceções detetadas, ou não, durante a observação" (Aires, 2011, p. 29).

Uma vez que um dos objetivos da recolha e análise de dados se relacionava com a compreensão mais aprofundada das resoluções apresentadas pelos alunos no desenvolvimento das tarefas propostas, a entrevista pareceu ser uma técnica bastante pertinente, já que, na sua essência, esta “nasce da necessidade que o investigador tem de conhecer o sentido que os sujeitos dão aos seus atos” (Aires, 2011, p. 29).

3.2.3) Produções dos alunos

Para Britto (2013) a análise das produções escritas dos alunos pode revelar-se um poderoso instrumento de formação educacional, já que esta prática oferece ao professor um contexto de formação (inicial ou prolongada) único. Reconhecendo que “analisar produções escritas permite o diálogo entre o que foi aprendido e o que gostaríamos que fosse aprendido” (Britto, 2013, p.2), considerei adequado recolher as resoluções escritas dos problemas elaboradas pelos alunos de modo a analisá-las num futuro próximo. Desta forma, nas folhas disponibilizadas aos pares constavam duas áreas distintas: o enunciado do problema a resolver e um espaço em branco no qual deveriam apresentar por escrito o seu raciocínio e resolução.

A análise destas produções revelou-se muito importante na medida em que se destacou como a principal ferramenta de análise dos dados obtidos, permitindo-me estudar as ações e “comportamentos” dos alunos sem interferir diretamente, para além de beneficiar dos dados recolhidos por tempo indeterminado.

3.3) Intervenção desenvolvida na turma

3.3.1) Contexto, duração e participantes

A presente investigação foi desenvolvida ao longo de onze semanas numa turma de 2.º ano da Escola Básica de 1.º Ciclo e Jardim de Infância da Brejoeira. Esta é uma escola pública que se encontra situada em Brejos de Azeitão e que pertence ao Agrupamento Vertical de Escolas de Azeitão.

A turma é composta por vinte e seis alunos (11 meninas e 15 meninos), encontrando-se um deles a repetir o 2.º ano de escolaridade. Na data em que a presente investigação foi desenvolvida, não existiam alunos sinalizados com necessidades educativas especiais, planos de acompanhamento ou alunos com dificuldades ao nível do português por esta língua não ser a sua língua materna.

Analisando o contexto socioeconómico, educativo e cultural da maioria dos alunos, pode referir-se que estes descendem de famílias de classe social média-alta, sendo que grande parte dos encarregados de educação possuem habilitações académicas e se encontram empregados em áreas como engenharia, educação, medicina, etc..

Tratando-se de alunos que já completaram o 1.º ano de escolaridade juntos, é evidente um sentimento de coesão e de interajuda, podendo classificar-se os seus resultados escolares e ritmo de trabalho como bastante satisfatórios.

Por outro lado, e sabendo que a área da matemática era uma das que mais problemas levantava junto da turma, considerei pertinente debruçar-me sobre a mesma, mais concretamente, no âmbito da resolução de problemas. Com esta decisão foi notória a surpresa da turma, já que a inclusão de problemas no seu dia-a-dia levou a que fossem alteradas rotinas e, como tal, grande parte dos alunos respondeu com interesse e curiosidade àquilo que considerava uma novidade. Dessa forma, enquanto participante e, simultaneamente, observadora, pretendi possibilitar à turma a oportunidade de experienciar e lidar com problemas de tipos distintos, procurando surpreende-los de dia para dia, de modo a que encarassem as tarefas propostas com entusiasmo e prazer.

3.3.2) Recolha de dados

Ainda que a análise dos dados recolhidos tenha sido contante ao longo de todo o processo de investigação, importa ressalvar três grandes momentos essenciais para o sucesso do estudo a desenvolver: a observação prévia dos alunos e dos seus hábitos de trabalho, a análise e reflexão acerca do trabalho a ser desenvolvido por mim e a análise das produções dos alunos e das transcrições das entrevistas realizadas.

O primeiro momento que penso ter sido bastante importante foi a realização de uma observação prévia dos alunos e dos seus hábitos de trabalho (anterior à implementação da investigação), na medida em que esta permitiu não só a escolha de uma problemática adequada às necessidades da turma, como também a adoção de uma metodologia de trabalho pertinente em função das caraterísticas observadas. Ao observar a sua rotina de trabalho e a tipologia de tarefas a que se encontravam acostumados, pude constatar as áreas onde os alunos se encontravam mais "à vontade", tal como aquelas que aparentavam necessitar de uma maior exploração, organizando o estudo desenvolvido de modo a contribuir para a sua aprendizagem.

O segundo momento de recolha de dados incidiu mais sobre o meu papel na sala de aula, já que, através das planificações das tarefas efetuadas (objetivos programáticos, conteúdos de ensino-aprendizagem, descrição da tarefa, duração e possíveis estratégias de resolução) e das notas de campo recolhidas no decorrer da resolução das tarefas, pude refletir acerca do trabalho que vinha a desenvolver e analisar a minha própria prática, questionando se as metodologias adotadas e se as tarefas que pretendia implementar iam, ou não, originar respostas às questões que queria ver respondidas.

Por último, o terceiro momento revelou-se igualmente importante já que me permitiu analisar as produções dos alunos e as entrevistas gravadas, a fim de perceber quais as estratégias de resolução de problemas mais usadas e quais os motivos que os levavam a recorrer mais a determinadas estratégias do que a outras, respondendo assim a algumas das questões de partida.

Nesse âmbito, importa ressalvar que cada tarefa proposta procurava conduzir o aluno à utilização de determinada estratégia de resolução, sendo que a sua análise posterior foi efetuada em função da utilização, ou não, da estratégia esperada.

3.3.3) Dispositivos e procedimentos de intervenção

Atendendo às particularidades do trabalho a desenvolver, considerei que seria oportuno focar os seguintes dispositivos e procedimentos de intervenção: a tipologia das tarefas exploradas (problemas) e a modalidade de trabalho associada à sua exploração (trabalho a pares).

Tendo restringido a tipologia das tarefas propostas aos problemas, optei por promover a resolução de um conjunto de catorze problemas. Estes consistiram em problemas de cálculo e de processo, já que os problemas abertos tendem a conduzir a explorações mais demoradas e exaustivas, algo que seria bastante complicado dado o pouco tempo disponível. Desta forma, ao início tentei que se resolvessem entre um a dois problemas por semana, no entanto, devido a questões de logística, tal não foi possível tendo acabado por resolver um maior número de problemas num menor espaço de tempo, tal como a seguinte tabela ilustra:

Nome do Problema	**Data de resolução**
A Festa de São Martinho	17/11/2014 – Semana 1
Comprar Castanhas	17/11/2014 – Semana 1

Chamadas Telefónicas	24/11/2014 – Semana 2
Os Trabalhos da Catarina	01/12/2014 – Semana 3
Cozinhando um Bolo	09/12/2014 – Semana 4
Cromos da Violetta	09/12/2014 – Semana 4
O Aniversário da Maria	09/12/2014 – Semana 4
O Lanche do Alexandre	10/12/2014 – Semana 4
O Mealheiro do Luís	10/12/2014 – Semana 4
As Amoras da Andreia	10/12/2014 – Semana 4
Os Doces da Mariana	10/12/2014 – Semana 4
Os Berlindes da Joana	15/12/2014 – Semana 5
O que é o Almoço?	15/12/2014 – Semana 5
As Roupas do Alexandre	15/12/2014 – Semana 5

Tabela 1 – Calendarização das tarefas

Nota: As semanas indicadas correspondem ao período em que a resolução de problemas foi dinamizada e não ao período total de estágio.

Reconhecendo a importância de uma rotina de exploração de tarefas consistente e apropriada para a turma em causa, optei por dinamizar os primeiros dois problemas numa modalidade de trabalho individual já que esta era a mais conhecida da turma. No entanto, mais tarde, considerei que seria mais oportuna uma dinâmica de trabalho a pares, já que, segundo César (2000), nesta os alunos devem:

> ajudar-se mutuamente, devem formular conjeturas e testá-las, devem saber explicar aos colegas o que pensaram e como resolveram as tarefas que lhes foram propostas, devem pôr questões aos colegas que estão a explicar as resoluções que fizeram sempre que as tenham percebido (p.55).

Com a adoção de uma nova modalidade de trabalho, pretendi fomentar nos alunos o espírito cooperativo, conduzindo-os a trabalhar com um objetivo comum e ensinando-os a lidar com os benefícios e dificuldades do trabalho a pares. Dessa forma, e segundo o autor acima citado, procurei contribuir para o seu desenvolvimento sociocognitivo, promovendo em simultâneo a aquisição de novos conhecimentos e capacidades essenciais à aprendizagem matemática.

Através do trabalho a pares, os alunos foram levados a refletir, analisar, dialogar, decidir, argumentar e questionar, aprendendo a lidar com frustrações, dificuldades e situações de impasse, à medida que respeitavam e procuravam compreender opiniões diferentes das suas.

Dessa forma, e sabendo que a reorganização da sala retiraria muito do tempo destinado à exploração das tarefas, parti da organização em grupo preexistente e pedi que cada aluno se juntasse com o seu colega do lado. Tal organização, ainda que não tenha sido estruturada propositadamente, revelou-se bastante adequada, já que grande parte dos alunos se demonstrou interessada e entusiasmada em poder trabalhar com o colega do lado, levando a que se entreajudassem e aprendessem entre si.

Uma vez compostos os pares, optei por distribuir a cada dois alunos um enunciado, tendo este sido, em seguida, lido em voz alta, interpretado em turma, resolvido e discutido no quadro a pares. Nesta fase, importa referir que a ordem pela qual os procedimentos referidos foram dinamizados nem sempre foi a mesma, já que, com o decorrer da investigação, fui experimentando qual o modo mais eficaz para obter a atenção da turma durante a exploração inicial do problema (por exemplo: leitura por mim e posterior entrega dos enunciados; entrega dos enunciados virados para baixo e leitura por parte de aluno; entrega dos enunciados e leitura conjunta, etc.).

Tratando-se de problemas com diferentes objetivos, a duração destinada à exploração dos mesmos nunca foi igual, já que procurei adequar o tempo de resolução à dificuldade associada ao problema. Não obstante, procurei que o tempo de resolução de cada tarefa não ultrapassasse os vinte minutos, possibilitando os diversos ritmos de trabalho existentes na sala e, também, a manutenção do foco de interesse na tarefa proposta. Com isso, tentei que os alunos com um ritmo de trabalho mais vagaroso tivessem tempo suficiente para pensar e resolver a tarefa proposta e que os alunos com ritmo de trabalho e raciocínio mais rápidos não perdessem o interesse na mesma. Procurei, também, que a resolução de um problema não se arrastasse por demasiado tempo, de modo a que os alunos não se dispersassem e mantivessem o interesse pelo trabalho que estavam a realizar.

Terminada a resolução de cada tarefa, optei por solicitar aos pares com os raciocínios mais interessantes que os apresentassem no quadro, expondo o seu modo de pensar, representando por escrito a sua resolução perante os colegas e respondendo a eventuais dúvidas dos mesmos. Nesta etapa, a quantidade de pares "selecionados" foi determinada em função da diversidade e complexidade dos raciocínios apresentados, tendo tido o cuidado de proporcionar a oportunidade em causa a grande parte dos alunos. Denote-se que a possibilidade de explicarem a sua resolução aos restantes colegas, diversas vezes, serviu de motivação para os alunos, levando a que se esforçassem mais e apresentassem raciocínios elaborados de forma a poderem apresenta-los perante a turma.

Por último, e sabendo que cada tarefa proposta pretendia conduzir o aluno à exploração de determinada estratégia de resolução, importa realçar que a seleção dos problemas a apresentar à turma não se revelou ao acaso. Como tal, algumas das tarefas propostas foram construídas por mim, tendo as outras sido adaptadas ou retiradas em pleno de inúmeros materiais didáticos (ver subcapítulo 3.3.5 - Problemas propostos e suas intencionalidades).

3.3.4) Justificação dos problemas escolhidos

Sendo uma investigação com um objetivo bastante definido, a escolha dos problemas a serem explorados não foi ao acaso, já que, após diversas leituras, constatei que a sua seleção influenciaria fortemente o sucesso ou insucesso da proposta a ser desenvolvida.

Assim, antes de mais, considerei pertinente escolher um só autor que apresentasse um conjunto de estratégias de resolução de problemas estruturado e fundamentado. Nesse âmbito, optei pela obra *Introduction to Problem Solving: Grades PreK-2* de Susan O'Connell, onde a autora apresentava oitos estratégias distintas de resolução de problemas: escolher uma operação; encontrar um padrão; construir uma tabela; desenhar uma imagem ou um diagrama; fazer uma lista organizada; trabalhar do fim para o início; estimar, verificar e rever e usar o raciocínio lógico. Seguindo as estratégias mencionadas, construí um conjunto de catorze problemas, procurando dar oportunidade aos alunos de explorarem cada estratégia de resolução de modo igual. Assim, foram selecionados, adaptados ou construídos (consoante as situações) dois problemas destinados à exploração de cada estratégia (exceto para as estratégias *Desenhar uma Imagem ou um Diagrama* e *Estimar, Verificar e Rever* nas quais, por falta de tempo, foi dinamizado apenas um problema para cada).

Ao possibilitar aos alunos a exploração de um vasto conjunto de problemas pretendi, não só que estes beneficiassem com a diversificação das tarefas propostas, mas também que explorassem e considerassem a adoção de estratégias de resolução que, até à data, lhes eram desconhecidas. Assim, procurei que os problemas escolhidos se articulassem com os interesses da turma e com as temáticas a serem abordadas em aula, de modo a que os alunos os compreendessem com certa facilidade, lhes atribuíssem sentido e se sentissem motivados no decorrer da sua exploração. Foi igualmente importante que os problemas selecionados para iniciar a presente investigação não fossem nem muito complexos nem muito distintos daqueles a que a turma se havia acostumado, tendo reservado os problemas menos “familiares” à turma para uma etapa mais avançada da investigação. Com essa sequenciação, pretendi que os alunos não se sentissem, à partida, desmotivados nem assoberbados pela aparente complexidade dos problemas propostos, ainda que estes representassem um desafio.

Por último, e sendo que tinha já algum conhecimento dos pontos fortes e menos fortes da turma, foi necessária uma certa preocupação com os números envolvidos nos problemas escolhidos. A título de exemplo, posso referir o problema A Festa de São Martinho (primeiro problema proposto), onde os valores a trabalhar foram pensados de modo a que a turma não tivesse necessidade de realizar uma subtração com “empréstimo”, algo que no momento ainda não dominava.

3.3.5) Problemas propostos e suas intencionalidades

3.3.5.1) Problema 1 – A Festa de São Martinho e Problema 2 – Comprar Castanhas (anexo 1)

Tratando-se dos primeiros problemas a serem explorados, tanto a *A Festa de São Martinho* como *Comprar Castanhas* foram pensados de modo a irem ao encontro da tipologia de problemas mais familiar à turma. Dessa forma, são ambos Problemas de Cálculo, destinados à exploração da estratégia de resolução de problemas *Escolher uma Operação*. No entanto, distinguem-se um do outro na medida em que o primeiro envolve a subtração com sentido retirar, enquanto que o segundo envolve a adição com o sentido juntar.

3.3.5.2) Problema 3 – Chamadas Telefónicas e Problema 4 – Os Trabalhos da Catarina (anexo 2)

Ao contrário dos problemas anteriormente propostos, tanto *Chamadas Telefónicas*[1] como *Os Trabalhos da Catarina*[2] podem ser considerados Problemas de Processo, pertinentes para o recurso à estratégia *Encontrar um Padrão.* Com a sua exploração, pretendi possibilitar aos alunos o desenvolvimento do pensamento algébrico, através da descoberta, reconhecimento e generalização de padrões e da descoberta de leis de formação e elaboração de conjeturas.

3.3.5.3) Problema 5 – Cozinhando um Bolo e Problema 6 – Cromos da Violetta (anexo 3)

Tal como os dois primeiros problemas propostos à turma, *Cozinhando um Bolo*[3] e *Cromos da Violetta* podem também ser considerados Problemas de Cálculo, embora, desta vez, destinados à exploração da estratégia *Construir uma Tabela*. Assim, os seus objetivos principais encontravam-se relacionados com o desenvolvimento de capacidades no âmbito da interpretação e organização de dados, à medida que possibilitavam ainda a exploração da adição com o sentido acrescentar.

3.3.5.4) Problema 7 – O Aniversário da Maria (anexo 4)

O Aniversário da Maria[4] é um Problema de Processo, enquadrado na estratégia *Desenhar uma Imagem ou um Diagrama*. Com este problema pretendi colocar a turma em contato com estratégias de resolução de problemas que fossem para além da escolha de uma operação, tendo sido trabalhada a interpretação de um problema e a reflexão acerca do modo mais oportuno de chegar à solução. À parte disso, o presente problema foi ainda pensado com o intuito de possibilitar uma introdução breve à multiplicação envolvendo números naturais maiores que dez e de promover a perceção de leis de formação.

[1] Problema retirado de Programa de Formação Contínua de Professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico (2010-2011). A propósito de telefonemas: um episódio de sala de aula.
[2] Problema retirado de Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008). A experiência matemática no ensino básico: programa de formação contínua em matemática para professores do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.
[3] Problema retirado de O'Connell (2007). Introduction to problema solving: grades preK-2.
[4] Problema adaptado de O'Connell (2007). Introduction to problema solving: grades preK-2.

3.3.5.5) Problema 8 – O Lanche do Alexandre e Problema 14 – As Roupas do Alexandre (anexo 5)

Ainda que tenham sido dinamizados em datas distintas, tanto *O Lanche do Alexandre* como *As Roupas do Alexandre* têm caraterísticas idênticas, tendo a sua resolução sido proposta em dias diferentes apenas por motivos logísticos. Assim, os presentes problemas caraterizam-se como Problemas de Processo, enquadrados na estratégia *Fazer uma Lista Organizada*. Com a sua exploração e resolução pretendi, mais uma vez, apresentar à turma problemas cuja resolução fosse para além da escolha de uma operação, levando a que cada aluno interpretasse os enunciados e refletisse acerca do modo mais pertinente de chegar à resposta pretendida. Para além disso, e tal como a temática em que se engloba demonstra, possibilitei à turma a exploração da listagem enquanto estratégia de resolução de problemas, algo que, até à data, lhes era desconhecido.

3.3.5.6) Problema 9 – O Mealheiro do Luís e Problema 10 – As Amoras da Andreia (anexo 6)

Tal como havia sucedido anteriormente, também os presentes problemas foram realizados em conjunto, apresentando os mesmos objetivos e caraterísticas. Dessa forma, *O Mealheiro do Luís*[5] e *As Amoras da Andreia*[6] caraterizam-se como Problemas de Cálculo, enquadrando-se, simultaneamente, na exploração da estratégia *Trabalhar do Fim para o Início*. Com estes pretendeu-se a exploração dos dados de um problema do fim para o início, sendo crucial a interpretação exímia do enunciado. Tratando-se de Problemas de Cálculo, outro dos objetivos prendeu-se com a exploração da adição com o sentido juntar.

3.3.5.7) Problema 11 – Os Doces da Mariana (anexo 7)

Os Doces da Mariana[7] é um Problema de Cálculo, destinado à exploração da estratégia de resolução de problemas *Estimar, Verificar e Rever*. Com este problema pretendi conduzir os alunos ao desenvolvimento de capacidades no âmbito da estimativa, da verificação e da revisão, possibilitando, simultaneamente, a exploração da adição com o sentido juntar.

[5] Problema adaptado de O'Connell (2007). Introduction to problema solving: grades preK-2.
[6] Problema adaptado de O'Connell (2007). Introduction to problema solving: grades preK-2.
[7] Problema adaptado de O'Connell (2007). Introduction to problema solving: grades preK-2.

3.3.5.8) Problema 12 – Os Berlindes da Joana e Problema 13 – O que é o Almoço? (anexo 8)

Os Berlindes da Joana[8] e *O que é o Almoço*[9] caraterizam-se como Problemas de Processo, enquadrados na estratégia *Usar o Raciocínio Lógico*. Tal como a própria estratégia em que se engloba deixa transparecer, estes tiveram como principal objetivo o fomento de capacidades de raciocínio lógico junto dos alunos, levando-os, mais uma vez, a explorar as estratégias de resolução de problemas que vão para além das operações.

[8] Problema adaptado de O'Connell (2007). Introduction to problema solving: grades preK-2.
[9] Problema adaptado de O'Connell (2007). Introduction to problema solving: grades preK-2.

Capítulo IV – Análise de dados

Este capítulo tem como finalidade apresentar uma análise dos dados recolhidos, constituindo assim uma apresentação e interpretação da intervenção pedagógica desenvolvida. Como tal, começarei por apresentar o modo como cada problema foi explorado em aula, analisando em seguida os dados reunidos, tal como as diversas estratégias de resolução apresentadas pela turma. Repare-se que a investigação desenvolvida foi realizada com toda a turma e todos os enunciados recolhidos foram contabilizados. Desta forma, todos os alunos puderam participar no estudo, sendo que, para fins estatísticos, considerei oportuno contabilizar todas as estratégias de resolução apresentadas em cada problema e não apenas aquelas que conduziram a uma resposta correta. Ainda assim, e não podendo apresentar detalhadamente todas as resoluções recolhidas, optei por destacar as estratégias de resolução mais adotadas em cada tarefa, evidenciando os raciocínios com excertos de pequenas entrevistas.

4.1) Exploração dos problemas em aula e análise dos dados recolhidos

4.1.1) Problema 1 – A Festa de São Martinho

Tratando-se do primeiro problema a explorar, procurei que este não se distanciasse muito das tarefas resolvidas pela turma até à data. Assim, a sua exploração teve início com a leitura (feita por mim) do enunciado, tendo sido seguida pela entrega dos enunciados aos alunos. Neste primeiro problema, assumi um papel mais "dominante" já que a turma estava habituada a que fosse o professor a ler as tarefas e a entregá-las em mão e não considerei pertinente alterar imediatamente toda a metodologia de trabalho com que os alunos se encontravam familiarizados. Por outro lado, e uma vez que estes nunca haviam trabalhado a pares, neste e no problema 2 mantive a metodologia de trabalho individual.

Com este problema, pretendi que o aluno calculasse o número de horas que a personagem retratada teria de esperar para que a festa a que desejava ir começasse (sabendo que eram sete horas da manhã e que a festa só teria início às dezoito horas). Assim, cada aluno dispôs de dez minutos para reler o problema, pensar sobre este, representar o seu raciocínio e elaborar uma resposta por escrito. Nesta etapa, a minha função foi a de "guiar" os alunos, acompanhando o seu raciocínio ao longo da resolução e colocando questões que os levassem a refletir acerca da interpretação do enunciado ou do rumo a tomar na sua exploração.

Sabendo tratar-se de um problema no qual a estratégia de resolução privilegiada era a mais familiar à turma (a escolha de uma operação), as resoluções apresentadas pelos alunos não se revelaram muito distintas daquelas que havia previsto inicialmente, já que grande parte deles recorreram a uma operação para ilustrar o raciocínio adotado:

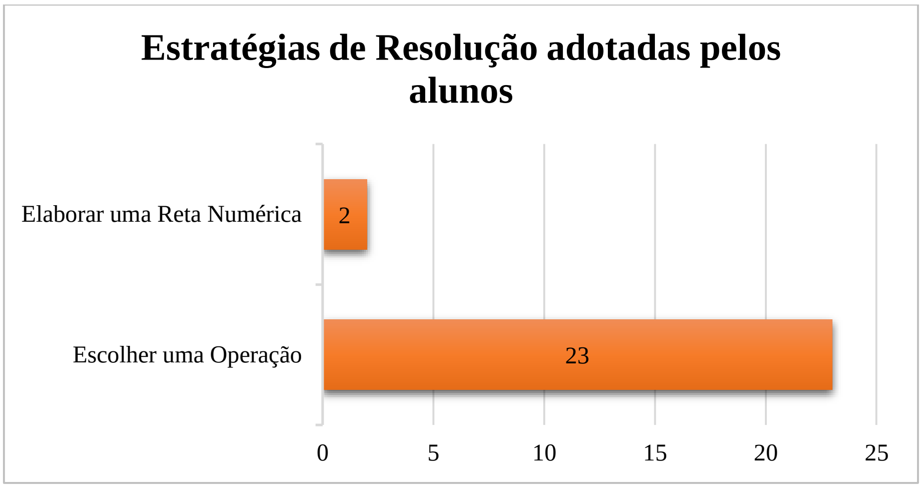


Gráfico 1 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 1

De modo a exemplificar, apresento a resolução de Matilde que representa a estratégia mais adotada pela turma:

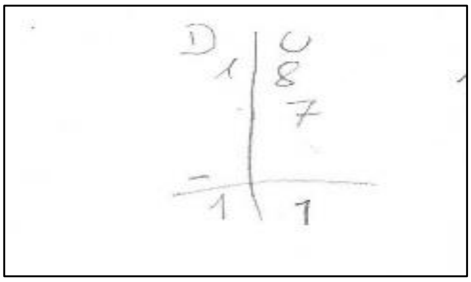


Figura 3 – Resolução de Matilde

Matilde usa o algoritmo da subtração, separando verticalmente as dezenas das unidades. No entanto, na entrevista realizada após a resolução da tarefa, o discurso da aluna leva a crer que não tenha verdadeiramente necessitado de recorrer à representação vertical do cálculo, já que, quando lhe pedi para que explicasse oralmente como havia pensado, explicou o seu raciocínio fazendo referência ao cálculo mental e afirmando ter calculado dezoito menos sete em vez de oito menos sete (primeira operação a executar na coluna das unidades). O excerto que se segue evidencia o raciocínio usado por Matilde:

Matilde – Então eu fiz assim: pensei que sete horas era de manhã e que dezoito horas era quase de noite. Como sabia que dezoito é maior que sete, fiz uma operação de menos.

Débora – Então e que números colocaste na tua operação?

Matilde – Coloquei as dezenas, as unidades e depois fiz dezoito menos sete e deu onze.

Olhando em retrospetiva, creio que este poderá ter sido o raciocínio mais adotado pela turma, já que a operação em causa não exigia necessariamente o recurso à representação vertical do cálculo, podendo facilmente ser resolvida através do cálculo mental. Ainda assim, acredito que os hábitos de trabalho desenvolvidos até à data tenham levado a que grande maioria dos alunos representassem o seu raciocínio através do algoritmo, tal como o professor cooperante vinha a solicitar.

Contrastando com a representação evidenciada por Matilde, destacam-se as resoluções adotadas por seis alunos que recorreram à adição para resolver o problema:

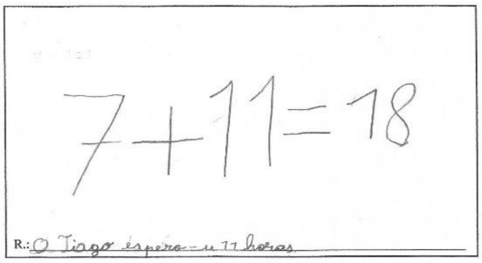


Figura 4 – Resolução de João

Estes alunos optaram por adicionar onze ao número sete, a fim de calcular a diferença entre sete e dezoito. Contudo, ao entrevistar João (um dos alunos que havia apresentado a resolução mencionada), percebi a existência de um passo que este não havia representado na folha: a exposição primária dos dados conhecidos: 7 + __ = 18, seguida do preenchimento (posterior) da parcela em falta: 7 + **11** = 18. Esta explicitação ilustra um raciocínio no qual se questiona qual deverá ser o número que adicionado a 7 vá permitir obter 18. Note-se que este raciocínio ilustra a compreensão da relação inversa entre a subtração e a adição, pois para resolver a – b = ? se pensa em b + ? = a.

Terminada a fase de resolução do problema, considerei benéfico dinamizar uma breve discussão em grande grupo. Para tal, solicitei que dois alunos voluntários se dirigissem ao quadro, sendo o seu objetivo apresentar à turma o modo como haviam resolvido o problema em causa. Aqui, destaco a importância de ter escolhido duas resoluções distintas que evidenciavam níveis de compreensão diferentes da subtração.

4.1.2) Problema 2 – Comprar Castanhas

Tendo sido dinamizado no mesmo dia que o problema *A Festa de São Martinho*, também este não proporcionou à turma grandes alterações no modo de explorar a resolução de problemas.

Assim, o problema *Comprar Castanhas* foi introduzido através da leitura (mais uma vez feita por mim) dos enunciados tendo, em seguida, sido realizada a distribuição dos problemas por toda a turma e a sua exploração autónoma. Tal como o problema anterior, também este foi resolvido individualmente, esperando-se que os alunos calculassem a quantidade de castanhas adquiridas pelos professores para a festa de São Martinho, sabendo que haviam sido comprados dez cartuxos e que cada cartuxo continha quinze castanhas.

Analisando os enunciados recolhidos, percebe-se que a estratégia de resolução mais adotada pela turma foi a escolha de uma operação, neste caso a operação adição ou a operação multiplicação, havendo apenas três alunos a sentir necessidade de resolver o problema através da estratégia *Desenhar uma Imagem ou um Diagrama*:

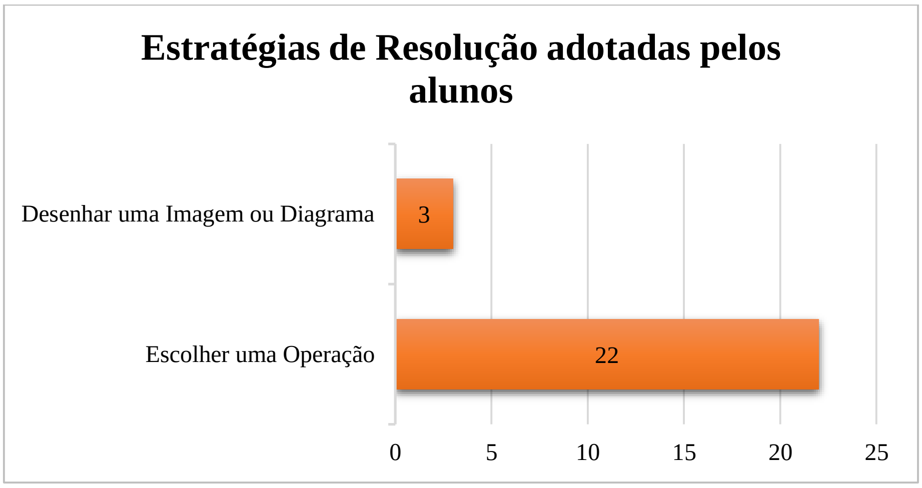


Gráfico 2 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 2

Em seguida apresenta-se a resolução de Mafalda que exemplifica o raciocínio mais adotado pela turma:

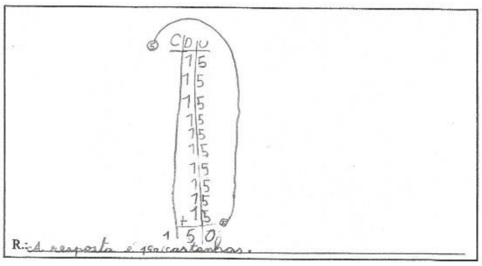


Figura 5 – Resolução de Mafalda

Mafalda recorreu à adição, usando o respetivo algoritmo. Para tal, organizou verticalmente as parcelas, assinalando as colunas das centenas, dezenas e unidades, tal como está habituada a fazer.

Evidenciando o seu raciocínio, segue-se abaixo um excerto da entrevista à aluna:

Mafalda – Então eu pensei em fazer uma operação vertical de mais.

Débora – Porquê?

Mafalda – Porque assim era mais fácil e fiz: centenas, dezenas e unidades. Depois escrevi: quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze e deu-me cento e cinquenta.

Débora – Então e por que é que fizeste essa operação?

Mafalda – Porque era assim que dizia no problema.

Débora – Então mas o problema dizia-te para adicionares tudo?

Mafalda – Sim, dizia que eram dez cartuxos com quinze. Então eu fiz quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze, mais quinze.

Débora – E porquê tantas vezes o quinze?

Mafalda – Porque eram dez cartuxos, diz aqui! *(Afirma apontando para o enunciado)*

Débora – Sim, tens toda a razão. E depois de fazeres dez vezes o quinze o que fizeste?

Mafalda – Fiz cinco, mas cinco, mais cinco, mais cinco, mais cinco, mais cinco, mais cinco, mais cinco, mais cinco, mais cinco e deu cinquenta. Aqui pus o zero *(apontando para a coluna das unidades)* e passei o cinco para as dezenas.

Débora – Sim, e depois?

Mafalda – Depois fiz um, mais um, mais um, mais um, mais um, mais um, mais um, mais um, mais um e mais um e deu dez, mas como ainda estava ali o cinco à espera, deu quinze. Então escrevi quinze e ficou cento e cinquenta.

Afonso, ainda que tivesse optado por resolver o problema através de uma operação, apresentou um raciocínio bastante distinto, uma vez que se serviu da operação multiplicação com grande eficácia:

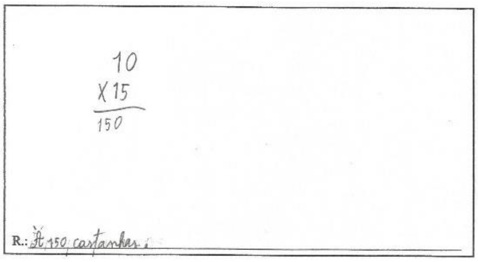


Figura 6 – Resolução de Afonso

Assim, calculou o resultado da multiplicação de dez cartuxos com quinze castanhas cada um chegando, com sucesso, ao resultado cento e cinquenta. Destaco que este foi um raciocínio impar, não existindo mais nenhum aluno a ter seguido a mesma lógica. Conversando com Afonso, percebi que este havia aprendido a resolver operações de multiplicar em casa, com os pais, motivo pelo qual nenhum dos seus colegas o sabia fazer.

Por último, e a título de exemplo dos três alunos que haviam recorrido ao desenho para resolver o problema proposto, destaca-se a resolução apresentada por Alexandra que se socorreu da representação icónica para calcular o resultado final, desenhando dez caixas com quinze castanhas em cada uma:

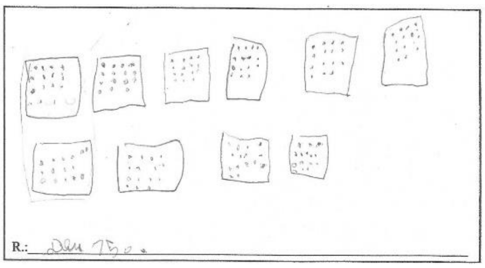


Figura 7 – Resolução de Alexandra

Tendo sido uma das alunas selecionadas para explicar o seu raciocínio em entrevista, Alexandra demonstrou sempre alguma confusão, tornando evidente a necessidade que havia sentido em transmitir através do desenho o seu raciocínio:

Alexandra – Então eu fiz assim: desenhei uma caixa e pus... *(Começa a contar a quantidade de castanhas desenhadas)* E pus catorze castanhas. Espera! *(Torna a contar a quantidade de castanhas desenhadas)* Pus quinze castanhas.

Débora – Sim, e depois?

Alexandra – E depois deu este número! *(Afirma apontando para o cento e cinquenta)*

Débora – Espera lá. Tu desenhaste uma caixa com quinze castanhas e deu cento e cinquenta castanhas?

Alexandra – Não, eu desenhei estas todas.

Débora – Então tenta lá explicar melhor…

Alexandra – Então eu desenhei esta com quinze castanhas e depois fiz mais.

Débora – No total desenhaste quantas caixas?

Alexandra – Fiz dez.

Débora – E quantas castanhas tinha cada caixa?

Alexandra – *(Volta a contar a quantidade de castanhas nas duas primeiras caixas)* Tinha quinze.

Débora – Então deixa-me ver se percebi bem: desenhaste dez caixas, cada uma com quinze castanhas. E depois?

Alexandra – Depois contei.

Débora – Contaste o total de castanhas foi?

Alexandra – Sim.

Débora – E quanto te deu?

Alexandra – Deu este número. *(Afirma apontando para o cento e cinquenta)*

Com a adoção desta estratégia a aluna pareceu sentir necessidade de representar no papel os diversos elementos que compunham o problema, deixando transparecer a existência de algumas dificuldades no domínio das operações apreendidas.

Posteriormente, e reconhecendo a importância de promover a discussão de resultados entre alunos, terminada a fase de resolução do problema solicitei a dois alunos que se dirigissem ao quadro a fim de exporem o seu raciocínio. Mais uma vez, foram escolhidos alunos com raciocínios distintos, tendo considerado importante proporcionar à turma, em primeiro lugar, o contato com a estratégia de resolução considerada menos formal e, posteriormente, com a estratégia de resolução mais formal. Essa decisão foi tomada para que todos os alunos tivessem oportunidade de acompanhar o raciocínio dos colegas, partindo das “explicações” mais básicas para as mais complexas e desafiantes. Nesta etapa, surgiram bastantes questões relacionadas com a resolução através da multiplicação, tendo o aluno em causa tido algumas dificuldades em partilhar com os colegas a lógica adjacente ao algoritmo da multiplicação.

4.1.3) Problema 3 – Chamadas Telefónicas

Ao contrário do que havia sucedido com os problemas anteriores, a dinamização do problema *Chamadas Telefónicas* foi orquestrada de um modo distinto. Desta vez, a exploração do problema teve início com a leitura por parte de um aluno do enunciado, procurando possibilitar um maior envolvimento e interesse por parte da turma na fase "inicial" da resolução do problema. Posteriormente a esta leitura, procurei organizar uma breve interpretação da tarefa, levantando questões que pudessem clarificar o enunciado, sem nunca desvendar a solução do problema (por exemplo: "De que fala o problema?"; "O que se quer saber?"; "Será possível saber a resposta logo à partida?").

Aproveitando o clima de trabalho "diferente" que se fazia sentir, informei a turma de que a tarefa apresentada deveria ser resolvida a pares (com o colega do lado). Essa informação pareceu ser muito bem recebida, já que os alunos aparentaram ficar bastante entusiasmados, tendo pedido para começarem de imediato a resolução. Assim, procedi à distribuição dos enunciados, dando, em seguida, liberdade aos pares para que relessem o problema, pensassem sobre este, representassem o seu raciocínio e elaborassem uma reposta por escrito e possíveis conjeturas. Nessa etapa, cada par dispôs de cerca de vinte minutos para resolver a tarefa autonomamente, sendo a minha função, mais uma vez, a de "orientar" o seu raciocínio.

Tratando-se de um problema que procurava retirar o aluno da sua "zona de conforto", o seu objetivo era também bastante distinto dos anteriores, tendo procurado que a turma explorasse a estratégia de resolução *Encontrar um Padrão*. Neste problema, solicitei aos alunos que calculassem quantas chamadas haviam sido realizadas entre um determinado número de amigos e que, com base nessas constatações, descobrissem uma regra que permitisse calcular o número de chamadas efetuadas entre qualquer número de amigos.

Como havia previsto, talvez pelo facto de não ir ao encontro dos problemas de cálculo resolvidos até à data, grande parte da turma demonstrou algumas dificuldades na resolução do presente problema. Assim, destaco que não existiu nenhum aluno que tivesse conseguido encontrar o padrão esperado, sendo que apenas uma pequena minoria da turma foi capaz de resolver parcialmente o problema. O gráfico que se segue ilustra todas as estratégias adotadas pelos alunos na tentativa de resolução desta tarefa:

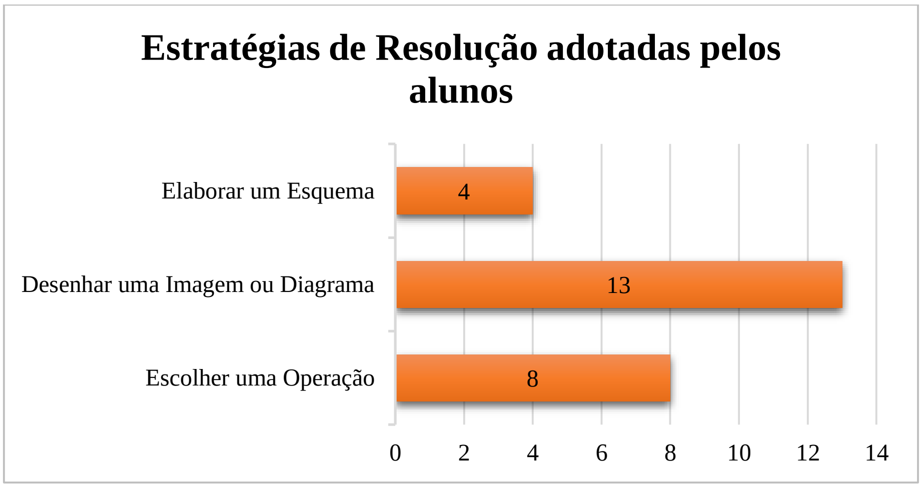


Gráfico 3 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 3

Procurando evidenciar as estratégias de resolução que permitiram a alguns alunos responder a parte do problema posso destacar o raciocínio apresentado pelo par que se segue:

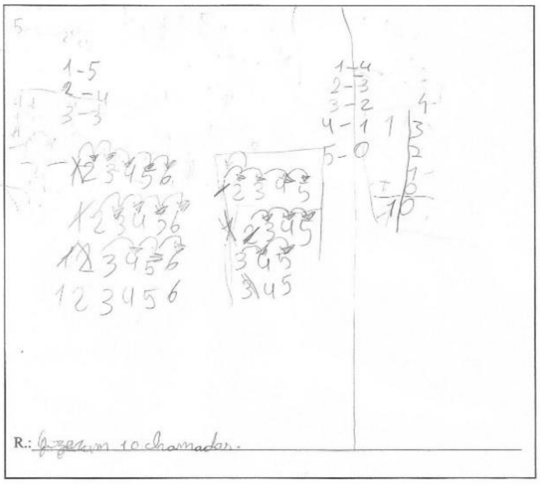


Figura 8 – Resolução de Diana e Inês

Diana e Inês optaram por atribuir um número a cada amigo, correspondendo o número um ao primeiro amigo, o número dois ao segundo amigo, o número três ao terceiro amigo e por aí em diante. Posto isso, distribuíram na folha o número de amigos em linha horizontal, ligando o amigo número um aos que se encontravam do seu lado direito (amigos dois, três, quatro e cinco), o amigo número dois aos que se encontravam do seu lado direito (amigos três, quatro e cinco), o amigo número três aos que se encontravam também do seu lado direito (amigos quatro e cinco) e assim sucessivamente até perceberem que o amigo número um realizava quatro chamadas, o número dois realizava três, o número três realizava duas, o número quatro realizava uma e o número cinco não realizava nenhuma chamada. Ao verificarem tais valores, recorreram a uma adição para determinar o número total de chamadas entre os amigos, adicionando quatro, mais três, mais dois, mais um, mais zero até chegarem ao resultado dez. Partindo dessa mesma lógica foram capazes de calcular o número de chamadas telefónicas entre seis e sete amigos, embora não tenham conseguido encontrar um padrão e proceder à generalização para qualquer número de amigos.

Evidenciando o seu raciocínio, segue-se abaixo um excerto da entrevista realizada a Diana e Inês (dizendo respeito ao número de chamadas entre seis amigos):

> Diana – (…) fizemos assim: outra vez a linha mas foi só uma a representar um esquema. Então o um ligava-se… O um (que é o menino um) ligava a cinco pessoas, o dois ligava a quatro pessoas, quatro amigos. O três ligava a três amigos, o quatro ligava a dois amigos e o cinco ligava a um amigo. E o seis ligava a zero amigos. Já tinham telefonado todos ao seis…
>
> Débora – E por que é que pararam no seis?
>
> Diana e Inês – Porque era só de seis amigos.
>
> Diana – Depois a conta era: cinco, mais quatro, mais três, mais dois, mais um e… *(Inês interrompe e sussurra)*
>
> Inês – Mais zero.
>
> Diana – Mais zero e depois a conta deu quinze.
>
> Inês – Fizeram quinze chamadas. Tens que explicar. *(Diz a Diana)*

Afonso e Dorin optaram por resolver o problema recorrendo ao desenho. Assim desenharam cinco amigos em linha vertical, atribuindo o número um ao primeiro, o número dois ao segundo, o número três ao terceiro, o número quatro ao quarto e o número cinco ao quinto:

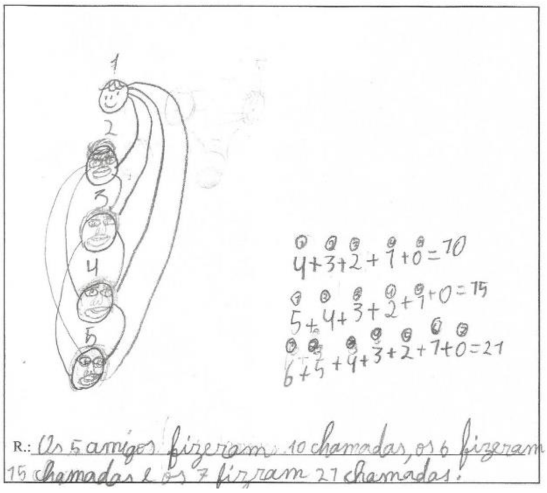


Figura 9 – Resolução de Afonso e Dorin

Este par começou por ligar com traços o amigo um a todos os que se encontravam abaixo dele, o amigo dois a todos os que se encontravam abaixo dele, o amigo três a todos os que se encontravam abaixo dele e assim sucessivamente até concluírem que não havia ninguém com quem ligar o amigo cinco. Ao perceberem que o amigo um realizava quatro chamadas, o dois realizava três chamadas, o três realizava duas chamadas e assim sucessivamente, acharam necessário, tal como o par anterior, realizar uma operação a fim de comprovarem o número total de chamadas efetuadas. Assim, realizaram a operação: quatro, mais três, mais dois, mais um, mais zero, tendo chegado ao valor dez. Mais uma vez, tal como o par anterior, também este par seguiu a sua lógica inicial no restante problema tendo conseguido calcular com sucesso o número de chamadas entre seis e sete amigos, mas não entre *n* amigos.

Segue-se abaixo um excerto da entrevista realizada a Afonso e Dorin (dizendo respeito ao número de chamadas entre cinco amigos):

> Afonso – Então nós fizemos assim: no (problema) que era com cinco, fizemos: o um telefonou a quatro, o amigo dois telefonou a três, o amigo três telefonou a dois, o amigo quatro telefonou a um e o amigo cinco a zero. O resultado daí são dez. Fizeram dez chamadas.

Como forma de complementar as aprendizagens pretendidas, após a realização da tarefa em causa por cada par, dois pares vieram ao quadro expor o seu raciocínio e os resultados a que chegaram perante a restante turma (começando o par com o raciocínio menos formal e seguindo-se o par com o raciocínio mais formal). Terminada a apresentação dos casos concretos enunciados na tarefa, procurei introduzir a generalização dos raciocínios utilizados pelos alunos. Para tal, desenhei no quadro uma tabela onde constava a informação que a turma já continha do problema, tal como alguns espaços em branco destinados àquela que gostaria de vir a ter. A fim de facilitar o preenchimento dessa tabela, recorri ao desenho como forma de melhor ilustrar o pretendido:

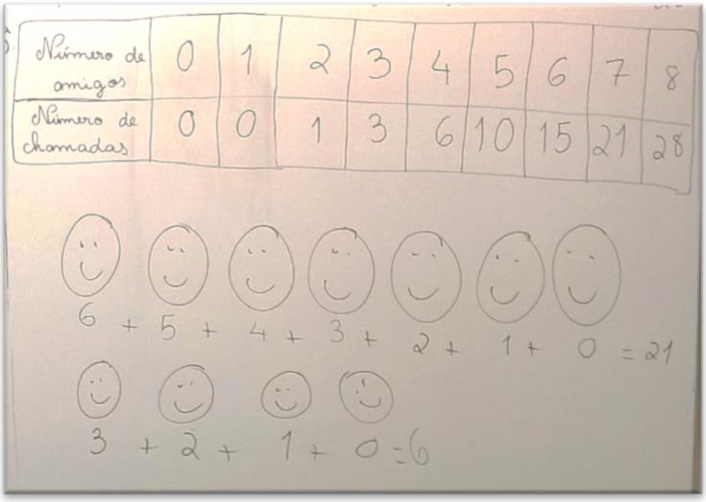


Figura 10 – Tabela construída e desenhos realizados

De modo a consolidar as regularidades constatadas através da tabela, procurei a elaboração de regras que permitissem resolver a tarefa sem recorrer a todo o processo de exploração inicial. Assim, foram formuladas oralmente (pelos alunos) algumas conjeturas que, posteriormente, foram testadas através de uma breve discussão final. De entre algumas das regras de formação formuladas destaco as seguintes pela sua coerência: “Vamos somando por ordem decrescente” e “O número de telefonemas do primeiro menino é sempre igual ao número total de meninos menos um [porque ele não telefona a si próprio]”.

Assim, e com o intuito de despistar quaisquer dúvidas mais persistentes, considerei pertinente realizar uma série de questões relativas a telefonemas entre *n* amigos. Por exemplo: “Em que número começaríamos a nossa série de adições se quiséssemos saber o número de telefonemas trocados entre cento e dez amigos? E em que número terminaríamos?”; “E se fosse entre quinhentos amigos? E dezassete?”. Estas questões foram prontamente respondidas pela turma, revelando uma compreensão da tarefa explorada e até mesmo um interesse em prosseguir com tarefas da mesma tipologia.

4.1.4) Problema 4 – Os Trabalhos da Catarina

Dado tratar-se de uma tarefa de desenvolvimento do raciocínio algébrico e em que a formulação de conjeturas era tida como algo importante, adotou-se para *Os Trabalhos da Catarina*, uma exploração semelhante à do problema anterior. Assim, a tarefa foi iniciada com a leitura do enunciado (por parte de um aluno), tendo, em seguida, esse mesmo aluno, distribuído os enunciados aos seus colegas. Esta distribuição precoce dos enunciados não tinha sido adotada na exploração do problema anterior, já que a turma tinha revelado, em ocasiões passadas, dificuldade em prestar atenção ao professor ou colegas uma vez que tivesse o trabalho a ser realizado à sua frente. Ainda assim, como forma de permitir aos alunos uma participação mais ativa na interpretação dos enunciados, procedeu-se à entrega dos mesmos antes do levantamento de questões realizado por mim. Dessa forma, quando confrontei a turma com questões como: "De que fala o problema?"; "O que se quer saber?"; "Será possível saber a resposta logo à partida?",etc., puderam ouvir-se muitas mais opiniões.

No entanto, à parte das alterações no momento de distribuição dos enunciados, toda a exploração do problema coincidiu com a exploração adotada no problema anterior, tendo a tarefa sido realizada a pares e com uma duração de vinte minutos.

Nesta tarefa solicitei aos alunos que procurassem perceber qual o número de molas necessário para pendurar determinada quantidade de guardanapos, questionando-os se, no final, seria possível determinar o número de molas necessárias para pendurar qualquer quantidade de guardanapos (segundo o modo ilustrado). Surpreendentemente, tendo em conta as dificuldades identificadas na resolução do problema anterior, grande parte da turma foi capaz de resolver a primeira metade do problema em causa (ignorando apenas o pedido de generalização para *n* guardanapos). O gráfico que se segue ilustra o número de alunos que adotou cada estratégia de resolução:

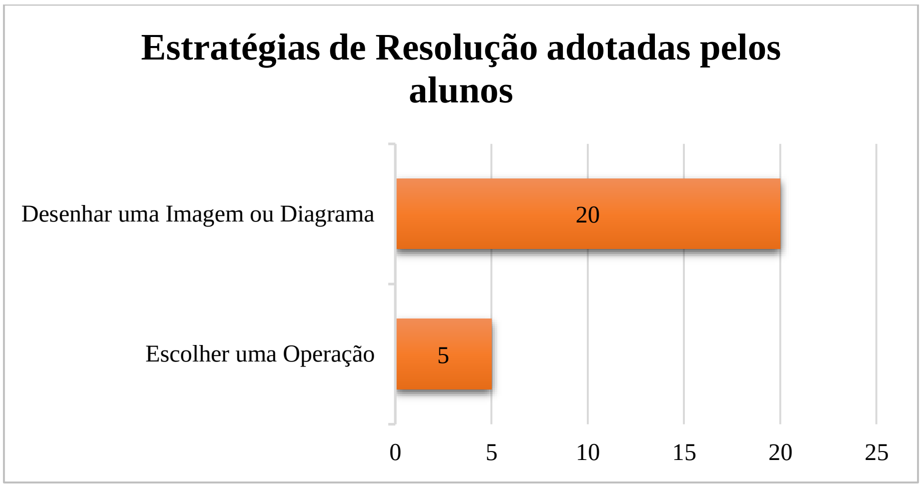


Gráfico 4 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 4

Ainda que grande parte da turma tenha optado por resolver o problema com recurso ao desenho, podem destacar-se duas representações bastante distintas: a primeira - adotada pela maioria dos alunos (e exemplificada pela resolução de Helena e Tiago) e a segunda - adotada por Sara e David.

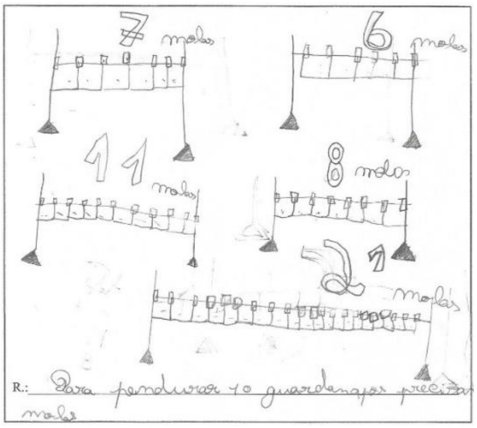


Figura 11 – Resolução de Helena e Tiago

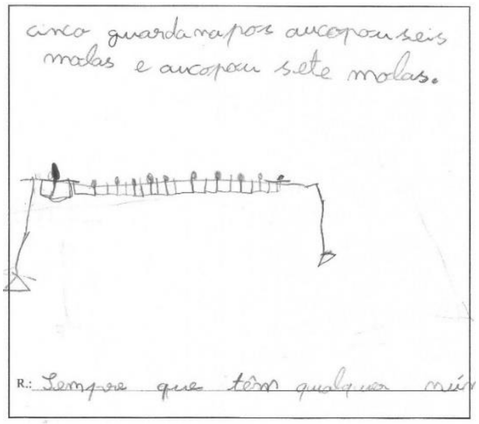


Figura 12 – Resolução de Sara e David

Ao contrário da estratégia adotada pela restante turma que consistia em desenhar cinco estendais diferentes (um com cinco guardanapos, outro com seis, outro com sete, outro com dez e um último com vinte), Sara e David expuseram um raciocínio bastante interessante, tendo optado por desenhar um único estendal com vinte guardanapos pendurados. Partindo daí, o par conseguiu contar as molas necessárias para estender as diversas quantidades de guardanapos que lhes eram pedidas, ainda que também não tenha sido capaz de detetar o padrão existente no problema.

De modo a exemplificar o raciocínio adotado por grande parte da turma, segue-se abaixo a entrevista realizada ao par Helena e Tiago:

> Helena – Nós começámos por fazer estendais e depois desenhámos quadradinhos que eram os guardanapos e as molas eram risquinhos.
>
> Débora – Ok.
>
> Helena – Para cinco (guardanapos) foi seis (molas) porque foi mais uma mola. (*Referindo-se ao total de molas quando existem cinco guardanapos)*
>
> Débora – Sim…
>
> Tiago – No outro foi sete foi porque era mais uma mola. (*Referindo-se ao total de molas quando existem seis guardanapos)*
>
> Débora – Então e onde é que estava essa mola?
>
> Tiago – No último!
>
> Débora – No último? Ok… Mais?
>
> Tiago – Para dez (guardanapos) foi onze (molas) porque era mais uma mola. (*Referindo-se ao total de molas quando existem dez guardanapos)*
>
> Tiago – E para vinte (guardanapos) foi vinte e uma (molas) porque é mais um! Vinte mais um é vinte e um. (*Referindo-se ao total de molas quando existem vinte guardanapos)*

Sendo já habitual uma discussão dos problemas no grupo turma, solicitei a dois pares que viessem ao quadro expor o seu raciocínio tendo, em seguida, construído com o auxílio dos alunos uma tabela onde constava a informação que já detínhamos acerca do problema, tal como aquela que desejávamos vir a ter:

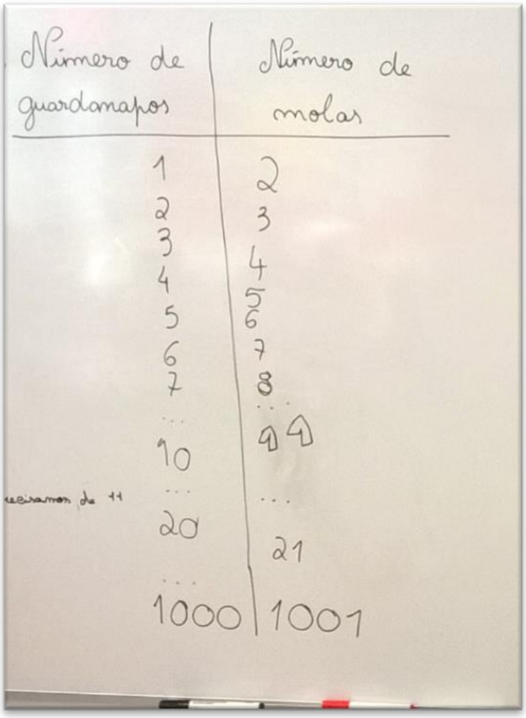


Figura 13 – Tabela construída

Com esta tabela, foi possível observar algumas regularidades, descobrir algumas regras de formação e conduzir os alunos à formulação de algumas conjeturas, tais como: “O número de molas é sempre mais um do que o número de guardanapos que pusemos a estender”.

À semelhança daquilo que havia sido feito na exploração do problema anterior, com o intuito de despistar quaisquer dúvidas mais persistentes, foram realizadas uma série de questões relativas ao número de molas necessárias para pendurar *n* guardanapos. Por exemplo: “De quantas molas necessitarias para pendurar trinta guardanapos?”; “E se fossem quinhentos e dez guardanapos, de quantas molas precisarias?”; “Se tivesses quarenta e três molas, quantos guardanapos terias pendurado?”. Novamente, a turma revelou uma grande capacidade de compreensão da tarefa explorada, tendo respondido prontamente e de um modo interessado e correto às questões levantadas.

Abaixo segue-se o excerto de uma entrevista onde as alunas demonstram dominar a regra de formação encontrada:

Débora – Porque é assim... Vimos que se fossem mil guardanapos, quantas molas seriam?

Daniela e Mafalda – Mil e uma!

Débora – Duzentos guardanapos?

Daniela e Mafalda – Duzentas e uma!

Débora – Trinta e sete?

Daniela e Mafalda – Trinta e oito!

Débora – Quarenta e nove?

Daniela e Mafalda – Quarenta e…

Daniela – Aaaaai, cinquenta!

4.1.5) Problema 5 – Cozinhando um Bolo e Problema 6 – Cromos da Violetta

Estes problemas foram dinamizados em conjunto, tendo primeiro sido apresentado e resolvido o problema 5 e, em seguida, o problema 6. Desta forma, e por terem caraterísticas em tudo semelhantes, parece-me pertinente que também a sua descrição e análise sejam feitas em simultâneo.

Assim, começo por referir que a exploração dos problemas teve início com a distribuição dos enunciados por parte de um aluno voluntário tendo, em seguida, um outro aluno procedido à leitura do primeiro e segundo problemas. No seguimento da leitura realizou-se uma breve discussão com os alunos, a fim de clarificar a interpretação de ambos os problemas, evitando sempre dar algum tipo de pistas que pudessem deslindar a sua resolução. Nessa etapa fizeram-se as perguntas habituais, primeiro no âmbito do problema *Cozinhando um Bolo* e, em seguida, no âmbito do problema *Cromos da* Violetta, tendo sido algo difícil evitar que os alunos partilhassem de imediato em voz alta a resposta aos problemas.

Concluída a etapa de interpretação dos enunciados, foram dados vinte minutos para que, a pares, os alunos pudessem reler cada problema, pensar acerca dos mesmos, representar os seus raciocínios e compor as suas respostas por escrito.

Tendo sido o primeiro problema a ser resolvido, *Cozinhando um Bolo* solicitava ao aluno que calculasse o número de ovos necessários para confecionar quatro bolos, sabendo que cada bolo levaria quatro ovos. Este foi um problema destinado à exploração da estratégia *Construir uma Tabela*. No entanto, olhando em retrospetiva, acredito que a escolha deste problema não tenha sido a mais adequada (talvez por ser pouco complexo), já que nenhum dos pares necessitou de organizar os dados numa tabela para chegar a uma resposta válida, tal como se pode constatar:

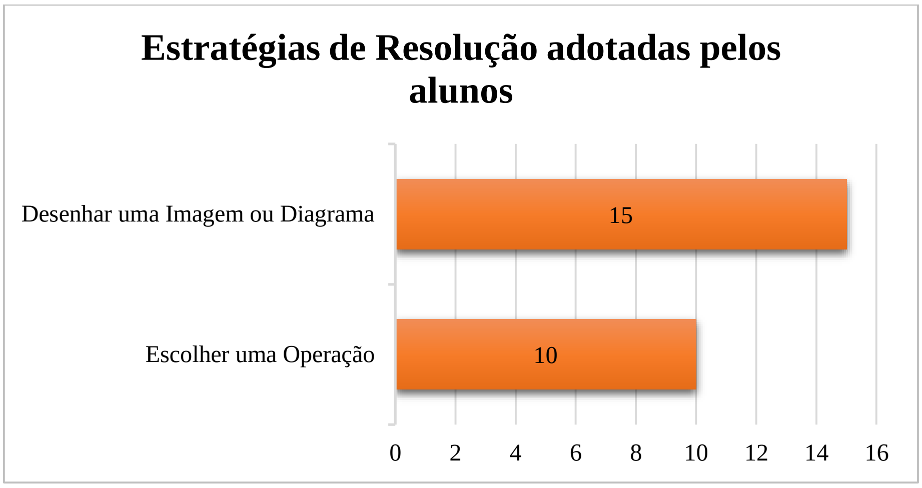


Gráfico 5 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 5

Analisando os enunciados entregues pelos alunos, considero importante realçar que, na minha opinião, a adoção maioritária do desenho enquanto estratégia de resolução não se deva à existência de diferentes níveis de desenvolvimento intelectual. Creio que, nesta etapa, a adoção maioritária de uma representação icónica se deva à recente descoberta dos alunos das diferentes estratégias de resolução existentes. Assim, acredito que a turma tenha tentado resolver o problema recorrendo a uma estratégia de resolução "alternativa" à escolha de uma operação, demonstrando um conhecimento crescente das estratégias existentes e uma vontade de resolver os problemas propostos de modos mais "criativos".

Assim, destaco o par Mafalda e Daniela que (tal como mais de metade da turma) optaram por recorrer ao desenho:

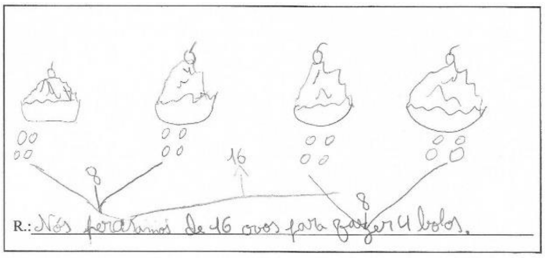


Figura 14 – Resolução de Daniela e Mafalda

Estas alunas desenharam os quatro bolos e, por baixo de cada um, os quatro ovos necessários à sua confeção. Posterior ao desenho dos ovos, este par contou-os, agrupou-os em dois grupos (cada um com oito ovos) e calculou oito mais oito (através do cálculo mental) a fim de chegar ao resultado dezasseis. Tal como acontecera com outros pares em problemas diversos, acredito que a elaboração de um desenho não tenha apresentado um papel fulcral na resolução do problema, tendo representando para o par apenas o modo mais prático e criativo de expor o seu resultado final. O breve excerto da entrevista que se segue revela o raciocínio do par em causa:

> Mafalda – Sim, eu desenhei quatro bolos e a Daniela os quatro ovos em cada.
>
> Daniela – Como aqui estava a dizer… *(Mafalda interrompe)*
>
> Mafalda – Fizemos umas setinhas e cada uma tinha oito, então oito mais oito era dezasseis. Então foi: *(lê a resposta escrita)* Nós precisámos de dezasseis ovos para fazer quatro bolos.

Por sua vez, João e Telmo optaram por recorrer a uma adição de oito mais oito, a fim de chegarem ao resultado pretendido. Para tal, representaram o seu cálculo verticalmente, através do algoritmo da adição e com a operação estruturada em duas colunas: dezenas e unidades:

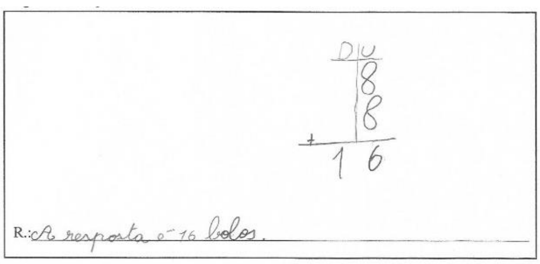


Figura 15 – Resolução de João e Telmo

Ainda que os valores apresentados no enunciado do problema não incluíssem o número oito (evidente na adição apresentada) o par referiu que o oito dizia respeito ao número de ovos necessários para cozinhar dois bolos. Assim, afirmaram ter calculado a quantidade de ovos necessária para cozinhar dois bolos (oito ovos) e que, em seguida, como ainda faltavam mais dois bolos (oitos ovos), voltaram a adicionar mais oito. Tal, não se encontra explícito na sua resolução por escrito mas sim na entrevista realizada posteriormente, tal como se pode constatar:

Telmo – Quatro ovos para cada bolo. Para um bolo foi preciso quatro, para outro foi preciso mais quatro. Que deu…

João – Que deu dezasseis.

Telmo – *(Corrigindo o colega)* Que deu oito. Depois quatro, depois mais quatro dá outra vez oito. E depois oito mais oito dá dezasseis.

Débora – Ah, então vocês juntaram… Aqui *(apontando para o algarismo oito)* estão dois bolos e aqui *(apontando para o segundo oito)* estão outros dois. É?

Telmo – Sim. E deu dezasseis. E eu depois disse: *(lê a resposta escrita)* "A resposta é dezasseis…

Por último, e representando uma minoria na turma, Artur e João demonstram ter recorrido à multiplicação para resolver o problema. Dessa forma, a operação apresentada foi quatro vezes quatro igual a dezasseis, indicando a multiplicação de quatro ovos por quatro bolos:

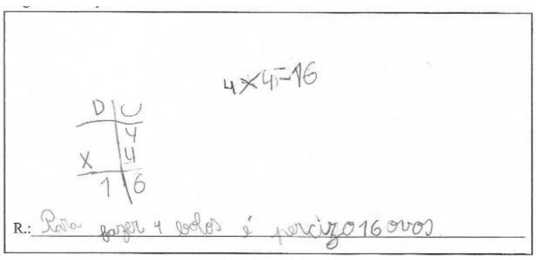


Figura 16 – Resolução de Artur e João

Esta operação foi apresentada através da representação algorítmica da multiplicação, ainda que, no decorrer da entrevista, se tenha vindo a perceber que o algoritmo não foi utilizado, já que o par sabia à partida o resultado da operação em causa:

Artur – Eu sabia que quatro vezes o quatro era dezasseis, depois fiz as dezenas e unidades vertical, fiz em vertical e também fiz em…

Débora – Assim? *(Apontando para a ficha)* Na horizontal?

Artur – Na vertical e horizontal.

Débora – Então e explica-me lá por que é que fizeste quatro vezes quatro. Por que é que não foi quatro vezes dois, por exemplo?

Artur – Quatro vezes dois então era oito. E oito…

Débora – Por que é que fizeram quatro vezes o quatro?

Artur – Porque quatro vezes o quatro eram os quatro ovos e os quatro bolos.

Débora – Ah, então fizeram os quatro ovos vezes os quatro bolos, foi?

Artur – Sim.

Relativamente ao problema *Cromos da Violetta*, pedi que os alunos calculassem o preço de cinco saquetas de cromos, sabendo que o preço de uma saqueta seria de dois euros. À semelhança do que havia sucedido com o problema anterior, também este se revelou algo ineficaz para trabalhar a estratégia de resolução *Construir uma* Tabela. Assim, pude constatar o recurso a apenas uma estratégia de resolução:

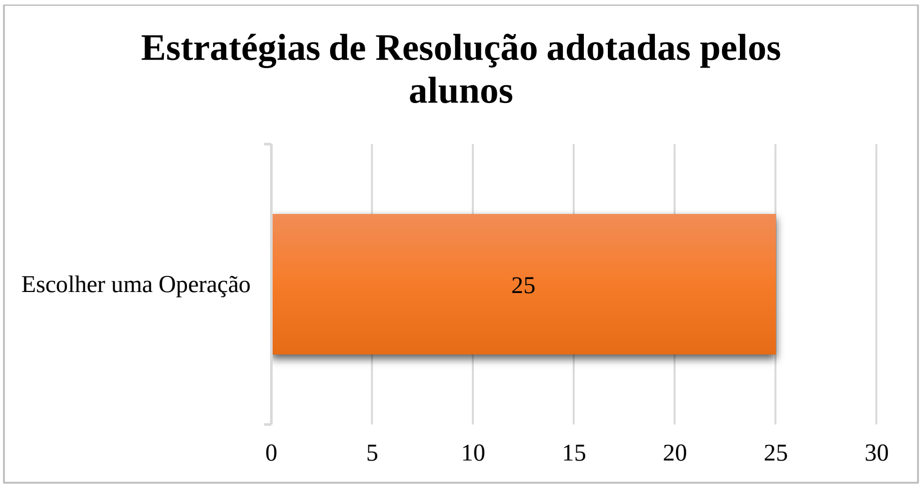


Gráfico 6 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 6

A estratégia em causa foi *Escolher uma Operação*, tendo esta sido representada de três modos distintos.

João e Telmo apresentaram a resolução mais adotada pela turma, ao recorrerem à adição para calcular dois, mais dois, mais dois, mais dois, mais dois até atingirem o resultado dez.

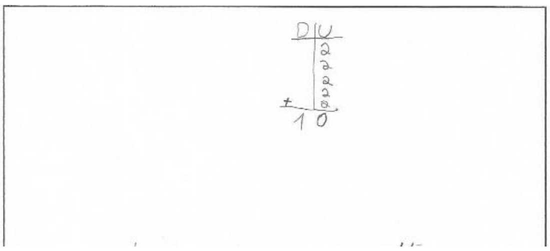


Figura 17 – Resolução de João e Telmo

Tal como todos os outros, este par expôs o seu raciocínio através da representação vertical do cálculo, ainda que, quando entrevistados, tenham admitido que recorreram ao cálculo mental e não ao algoritmo que estruturaram e apresentaram:

João – Fizemos dois, mais dois, mais dois, mais dois, mais dois e deu-nos dez.

Débora – Então e o que é que é esse dois aí?

Telmo – É dois euros.

Débora – Dois euros…

Telmo – Cada saqueta. Porque era cinco saquetas.

Ainda que grande parte da turma pareça ter recorrido ao cálculo mental para chegar à resolução do problema, poucos foram os pares que expuseram a sua adoção na ficha de resolução, ignorando a representação vertical do cálculo. Entre os pares referidos encontram-se Mafalda e Daniela que recorreram ao cálculo mental (e não ao algoritmo) para resolver o seu problema. Na sua resolução, optaram por desenhar cinco retângulos (cinco saquetas de cromos), cada um com o valor de dois euros indicado em baixo:

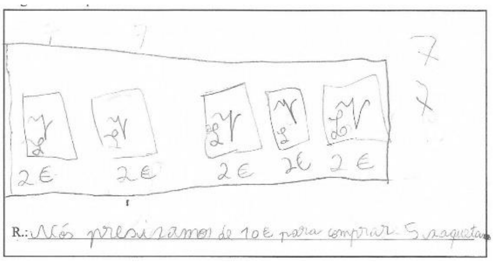


Figura 18 – Resolução de Daniela e Mafalda

Partindo dessa organização dos dados, as alunas afirmaram ter realizado contagens mentais de dois em dois até atingirem o valor que pretendiam: cinco saquetas/dez euros.

Por sua vez, dois pares recorreram à multiplicação para resolver o problema, tendo, em ambos os casos, a operação sido estruturada do mesmo modo: disposição do algoritmo vertical da multiplicação, divisão em dezenas e unidades e multiplicação do número cinco por dois:

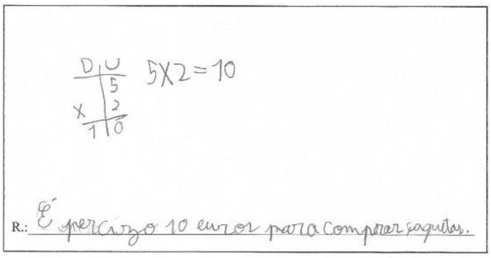


Figura 19 – Resolução de Artur e João

A título de exemplo, apresenta-se a entrevista e a resolução apresentada por Artur e João onde se evidencia o raciocínio desenvolvido:

Débora – Então vocês fizeram…

João – Cinco vezes o dois que deu dez euros.

Artur – E depois fizemos… *(Aponta para as representações vertical e horizontal do cálculo que apresenta na ficha)*

Débora – Esse é o vertical. Em pé.

Artur – Fizemos também em vertical, com as dezenas e unidades. Depois queríamos fazer de outra maneira. A horizontal, a vertical e a outra que eu fiz da outra vez.

Débora – E mais uma vez, vocês já sabiam que cinco vezes dois era dez?

Artur – Por causa que era cinco… Era…. Quase a mesma coisa que o cinco mais cinco.

Por fim, e posteriormente à etapa da resolução dos problemas a pares, seguiu-se a sua exploração no quadro. Para tal, começou-se pela análise do primeiro problema, tendo sido selecionados três pares com estratégias distintas. Assim, o primeiro par a expor o seu raciocínio apresentou uma representação icónica da resolução do problema, tendo recorrido ao desenho para representar a sua resolução. Já o segundo par a expor o seu raciocínio optou por recorrer a uma adição para encontrar a resposta ao que lhe era proposto, enquanto o último par apresentou um raciocínio mais complexo através de uma multiplicação. Terminada a exploração do primeiro problema, passou-se para a exploração do segundo. Esta seguiu exatamente a mesma lógica da exploração anterior: dois pares selecionados, cada um com estratégias de resolução distintas a serem apresentadas e confrontadas no quadro partindo da resolução menos formal (a adição) e culminando na multiplicação (a resolução mais formal). Nesse âmbito, em ambos os problemas, cada par pôde explicar o seu raciocínio e responder às dúvidas dos restantes colegas.

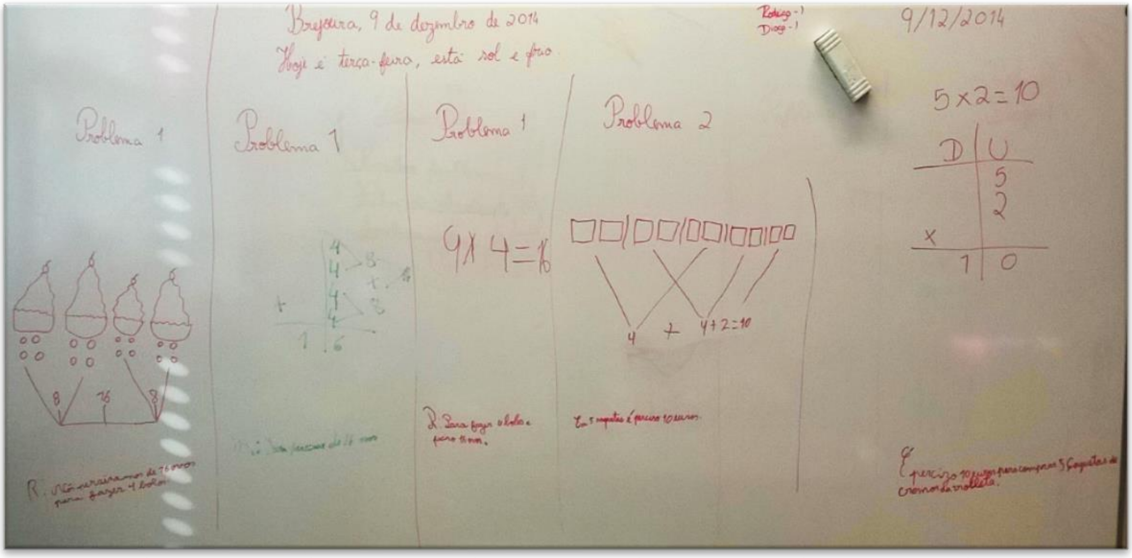


Figura 20 – Hipóteses de resolução apresentadas

4.1.6) Problema 7 – O Aniversário da Maria

A exploração deste problema teve início com a distribuição dos enunciados por parte de um aluno, sendo que, em seguida, um outro aluno procedeu à sua leitura. Posteriormente a esta primeira leitura, realizou-se uma breve interpretação do mesmo através de questões como: “De que fala o problema?”; “O que se quer saber?”; “Será possível saber a resposta logo à partida?”, etc.. Através destas questões procurei dissipar algumas dúvidas de compreensão do enunciando, tal como suscitar o interesse e a curiosidade dos alunos relativamente ao problema a ser resolvido.

Terminada a etapa de interpretação do enunciado em grande grupo, os alunos foram informados de que o problema seria resolvido a pares (tal como os anteriores) e de que poderiam dar início à sua exploração com o colega do lado. Esta exploração decorreu ao longo de vinte minutos e teve como objetivo conduzir os alunos a recorrerem ao desenho de uma imagem ou diagrama de modo a calcular o número de pessoas que se poderiam sentar ao redor de dez, doze ou vinte mesas de acordo com as condições impostas. Aparte deste objetivo inicial, procurei também encorajar os alunos a recorrerem a uma generalização, para que estes pudessem constatar a regra necessária para sentar *n* pessoas ao redor de *n* mesas, sem que fosse necessário recorrer ao desenho.

Curiosamente, o problema em causa levantou bastantes dúvidas e dificuldades na turma, quer ao nível da interpretação, quer da escolha da estratégia a utilizar, sendo notória a adoção de estratégias distintas na tentativa de resolução do problema:

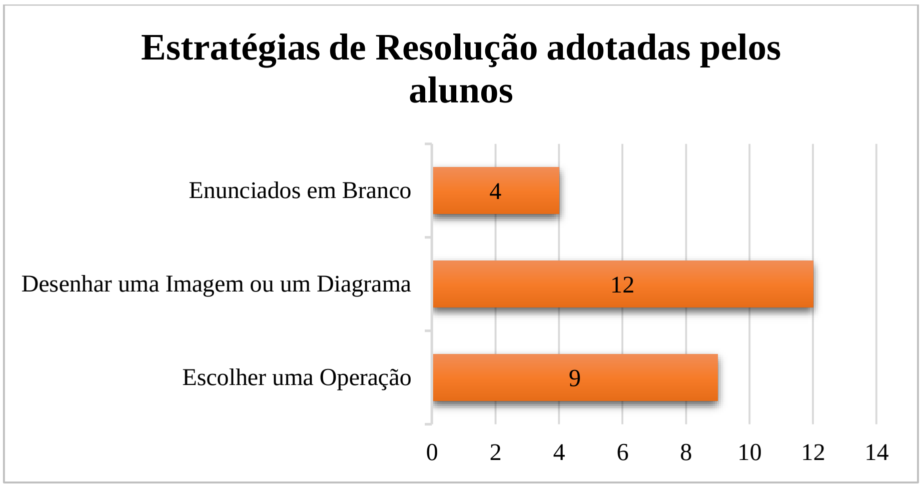


Gráfico 7 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 7

Ainda assim, e de entre as estratégias apresentadas, apenas uma conduziu à resposta correta, tendo esta sido adotada pelos dois únicos pares que conseguiram resolver o problema proposto. Esta consistiu na representação através do desenho de dez, doze e vinte mesas, seguida do preenchimento (representado por pequenos círculos) do número de pessoas sentadas ao redor das mesas:

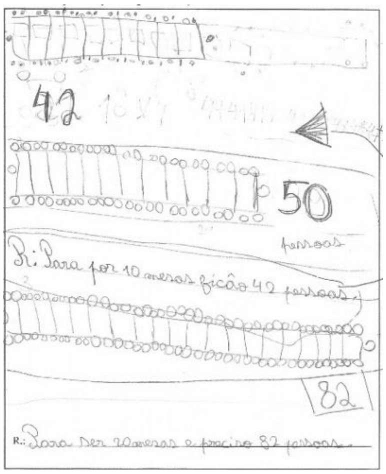


Figura 21 – Resolução de Alexandra e João

Assim, no caso das dez mesas, foram desenhados quarenta e dois círculos ao seu redor, sendo que no caso das doze mesas foram desenhados cinquenta círculos e, por fim, no caso das vinte mesas foram desenhados oitenta e dois círculos (dois círculos em cada lateral das mesas e um círculo extra nas mesas situadas nas extremidades.

Exemplificando o raciocínio demonstrado, segue-se abaixo um excerto da entrevista realizada a Alexandra e João:

Débora – O que é que começaram por fazer?

Alexandra – Aqui desenhámos dez mesas.

Débora – Assim ao calhas? Desenharam as mesas de uma maneira qualquer?

Alexandra – Não. Fizemos assim um quadrado, depois dividimos assim (*referindo-se às linhas que delimitam cada mesa*) e depois pomos… pusemos… pusemos as pessoas assim duas de um lado, duas no outro *(apontando para a ilustração feita na ficha)* e uma aqui *(referindo-se à cabeceira das mesas situadas nas extremidades).*

Débora – Então explica lá. Começaste por colocar… duas pessoas aqui em cima, foi?

Alexandra – Sim, aqui *(referindo-se à metade de cima da sua primeira ilustração)* duas, duas, duas, duas, duas, duas, duas, duas e duas. Depois aqui fica uma e aqui também. *(Referindo-se às cabeceiras)*

Débora – Em cada lado fica uma, é?

Alexandra – Depois aqui *(referindo-se à metade de baixo da sua primeira ilustração)* também ficam sempre duas.

Débora – Então ficam sempre duas a duas, é?

Alexandra – Sim.

Débora – Então quantas pessoas se poderão sentar em dez mesas?

Alexandra – Quarenta e oito. Ai, quarenta e dois!

Atendendo às dúvidas e dificuldades levantadas por grande parte dos alunos, considerei fundamental a dinamização de uma discussão em turma que possibilitasse uma melhor compreensão daquilo que era proposto no problema. Assim, desenhei no quadro a representação de dez, doze e vinte mesas de acordo com o indicado no enunciado, tendo, em seguida, pedido o auxílio da turma para preencher todos os lugares possíveis nas referidas mesas. Contei com o apoio dos pares que melhor tinham compreendido o problema, a fim de possibilitar à restante turma uma maior compreensão do modo como este poderia ser resolvido.

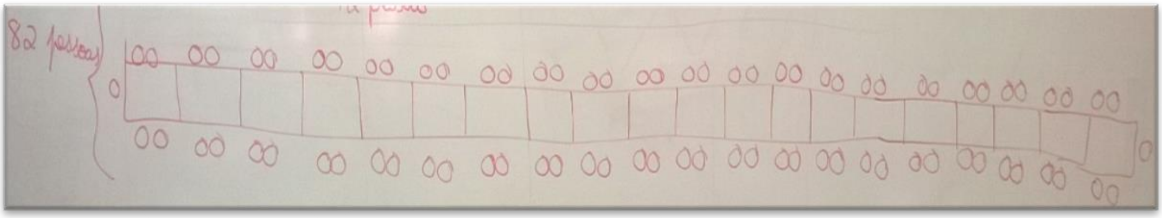


Figura 22 – Representação do número de pessoas sentado à volta de vinte mesas

Uma vez preenchidos os três conjuntos de mesas e encontrado o número de pessoas necessárias para ocupar todos os lugares, procurou-se encontrar operações que transmitissem os cálculos realizados em cada caso. Neste âmbito, as operações escolhidas para traduzir as ações em causa foram: 4 x 10 + 2 = 42 (para o conjunto de dez mesas), 4 x 12 + 2 = 50 (para o conjunto de doze mesas) e 4 x 20 + 2 = 82 (para o conjunto de vinte mesas). Nesta etapa, considero importante referir que, por lapso meu, as operações evidenciadas não se encontravam corretas, já que a forma mais adequada de traduzir a situação em causa seria 10 x 4 + 2 = 42; 12 x 4 + 2 = 50 e 20 x 4 + 2 = 50, representando dez, doze e vinte mesas com quatro lugares cada uma. Ainda assim, e sabendo que o pretendido era levar a turma a encontrar uma lei de formação que lhe permitisse calcular o número de lugares disponíveis numa situação com *n* mesas, os resultados revelaram-se bastante satisfatórios. Os alunos demonstraram-se bastante interessados, não precisando de muito incentivo para constatar de imediato três regularidades: "A nossa operação começa sempre pelo número quatro (que é o número de pessoas em cada mesa)"; "A seguir ao quatro multiplicamos sempre pelo número de mesas" e "No final da conta adicionamos sempre mais dois (as duas pessoas que ficam nas cabeceiras)". Aqui, volto a realçar que o meu engano deu origem a que os alunos fossem induzidos em erro nas suas constatações, ainda que acredite que o lapso em causa não tenha afetado grandemente o sucesso da tarefa.

Posto isto, e com o intuito de verificar se os alunos haviam, de facto, compreendido as regras de formação enumeradas pelos colegas, procedi a uma breve discussão final, na qual levantei questões como: "Não quero saber o resultado mas, se quisesse saber o número de pessoas que se poderiam sentar em 50 mesas, como poderia sabê-lo sem desenhar?"; "E se em vez de cinquenta mesas tivesse cem mesas, como resolveria sem desenhar?"; "E se cada mesa levasse só duas pessoas, poderia resolver do mesmo modo? Teria de alterar alguma coisa? O quê?", etc.. Estas questões levantaram grande interesse junto da turma, sendo que até os alunos que haviam revelado maiores dificuldades na exploração do problema procuraram intervir e participar, demonstrando compreender as conclusões a que havíamos chegado.

4.1.7) Problema 8 – O Lanche do Alexandre

Tal como vinha sendo hábito, o presente problema teve início com a distribuição dos enunciados por parte de um aluno, sendo que, em seguida, um outro aluno procedeu à leitura do problema. Posteriormente a esta primeira leitura do problema, realizou-se uma breve interpretação do mesmo através de questões como: “De que fala o problema?”; “O que se quer saber?”; “Será possível saber a resposta logo à partida?”, etc.

Terminada a etapa de interpretação do enunciado, os alunos foram informados de que o presente problema seria resolvido a pares e de que poderiam dar início à sua exploração com o colega do lado. Esta exploração decorreu ao longo de dez minutos e teve como objetivo levar o aluno a, com base nos dados fornecidos, encontrar todas as combinações que a personagem em causa poderia fazer com o lanche disponível. Assim, e com a análise das resoluções obtidas, pude constatar o recurso às seguintes estratégias de resolução:

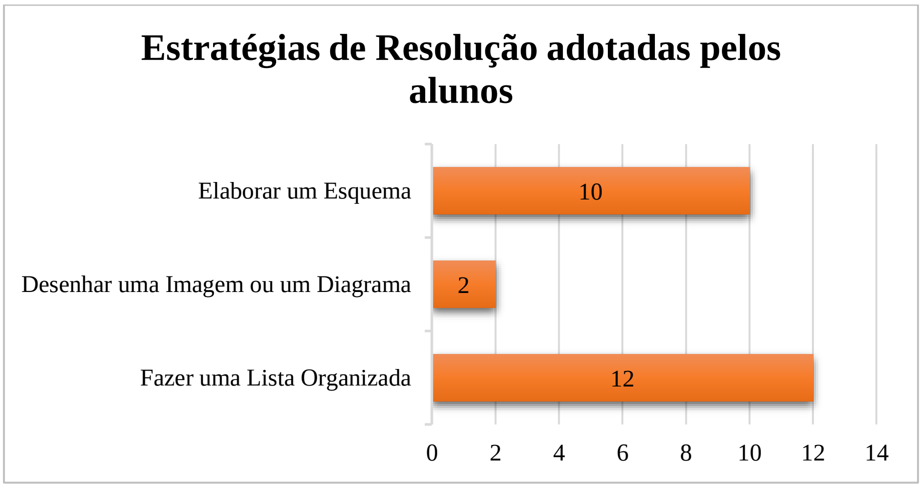


Gráfico 8 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 8

De entre as estratégias bem-sucedidas destaco: a elaboração de um esquema e a elaboração de uma lista organizada (adotada pela maioria dos alunos, tal como era pretendido).

Exemplificando, apresento a resolução de Afonso e Dorin, na qual optaram por transcrever a tabela fornecida, desenhando uma série de ligações entre a coluna dos bolos e a coluna dos sumos:

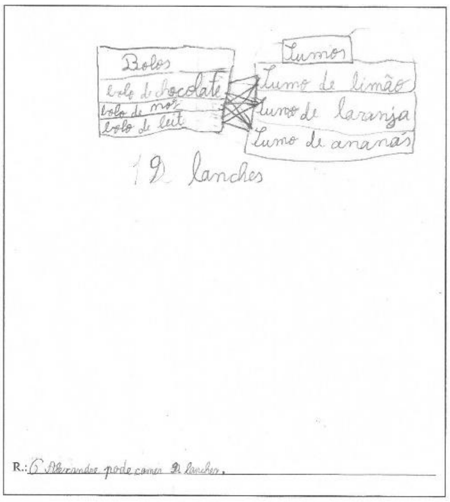


Figura 23 – Resolução de Afonso e Dorin

Assim, ligaram cada um dos bolos aos três sumos apresentados na coluna ao lado, acabando com um conjunto de nove linhas/ligações, ou seja, nove lanches diferentes.

Por sua vez, Alexandra e João revelaram também haver recorrido a um esquema, ainda que tenham organizado o seu raciocínio de modo distinto:

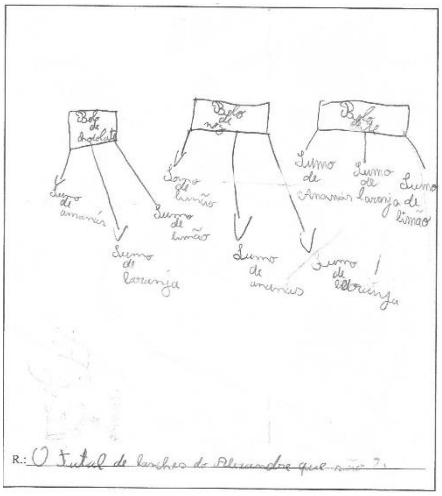


Figura 24 – Resolução de Alexandra e João

Escreveram o nome dos três bolos em três retângulos separados, colocando, em seguida, abaixo de cada retângulo, as três hipóteses de sumo que poderiam acompanhar o bolo em causa. Com isso, demonstraram também as nove combinações diferentes existentes com os dados fornecidos. Neste caso em particular, importa realçar que Alexandra era uma das alunas cuja resolução de um problema passava sempre pela elaboração de um desenho. O facto de, junto com João, ter resolvido um problema através da elaboração de um esquema demonstra que se encontra em movimento dentro da fase de representação icónica, tendo passado do desenho para a exposição do seu raciocínio através de esquemas.

Por último, e evidenciando a estratégia de resolução mais adotada pela turma, destaco a resolução apresentada por Daniela e Mafalda, na medida em que estas optaram por elaborar uma listagem organizada das diferentes combinações possíveis:

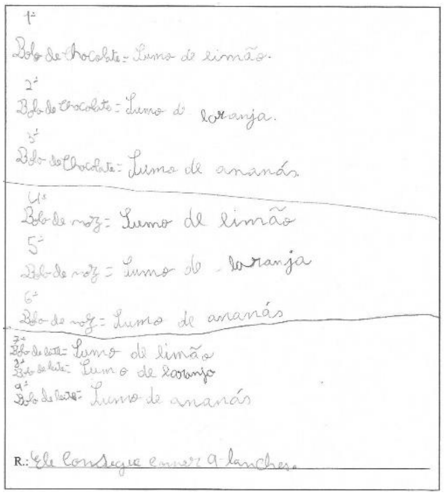


Figura 25 – Resolução de Daniela e Mafalda

Começaram por enumerar as três combinações possíveis de realizar com o bolo de chocolate, partindo em seguida para as três combinações possíveis de realizar com o bolo de noz e terminando com as três combinações possíveis de realizar com o bolo de leite. Ao numerarem as suas combinações de um a nove, conseguiram, no final, perceber que existiam nove combinações exequíveis. De forma a exemplificar o raciocínio mencionado, segue-se abaixo um excerto da entrevista dinamizada:

Débora – Então como é que vocês fizeram?

Daniela – Pegámos num bolo e pusemos os três.

Débora – Os três sumos, foi?

Daniela – Sim, porque eles podem fazer um bolo com os três sumos.

Débora – Ah, ok. E o bolo a seguir, como é que fizeram?

Mafalda – Igual.

Daniela – Foi a mesma coisa.

Débora – Igual? E no último?

Mafalda – Também.

Débora – E deu quanto então?

Daniela – Nove.

Débora – Nove combinações.

Mafalda – Sim e eu e o meu amigo Afonso já tínhamos feito um problema assim, só que com caminhos.

Uma vez que o hábito de discussão em turma vinha já a ser uma constante, posteriormente ao momento de resolução a pares do problema realizou-se o momento de discussão, acompanhado de registos, no quadro. Dois pares dirigiram-se ao quadro a fim de exporem as suas estratégias de resolução, tendo o primeiro recorrido a uma listagem organizada e o segundo a uma representação por esquema. Neste âmbito, cada par explicou o seu raciocínio, não tendo existido grandes dúvidas por parte dos restantes colegas.

4.1.8) Problema 9 – O Mealheiro do Luís e Problema 10 – As Amoras da Andreia

À semelhança dos problemas 5 e 6, também estes foram explorados em conjunto por apresentarem objetivos e caraterísticas bastante semelhantes. Desta forma, optei por explorar primeiramente o problema 9 e, em seguida, o problema 10.

A exploração dos problemas teve início com a distribuição dos enunciados por parte de um aluno voluntário tendo, em seguida, um outro aluno procedido à leitura do primeiro e segundo problemas. No seguimento da leitura, realizou-se uma breve discussão com os alunos, a fim de clarificar a interpretação de ambos os problemas, evitando sempre dar algum tipo de pistas que pudessem deslindar a sua resolução. Nesta etapa, fizeram-se as perguntas habituais, primeiro no âmbito do problema *O Mealheiro do Luís* e, em seguida, no âmbito do problema *As Amoras da Andreia*, tendo sido estas: “De que fala o problema?”; “O que se quer saber?”; “Será possível saber a resposta logo à partida?”, Etc..

Concluída a etapa de interpretação dos enunciados, foram dados vinte minutos para que, a pares, os alunos pudessem reler cada problema, pensar acerca dos mesmos, representar os seus raciocínios e compor as suas respostas por escrito.

Sabendo que com o problema *O Mealheiro do Luís* se pretendia que os alunos calculassem quanto dinheiro possuía a personagem antes de ter realizado determinada compra (sendo forçados a “trabalhar” do fim para o início), revelou-se bastante interessante constatar que este foi o primeiro problema onde toda a turma foi bem-sucedida. A sua exploração foi a primeira na qual todos os pares, sem exceção, foram capazes de atingir o objetivo esperado, interpretando corretamente o problema e processando o seu raciocínio do fim para o início de modo a chegar a uma conclusão correta. O gráfico que se segue confirma a afirmação acima:

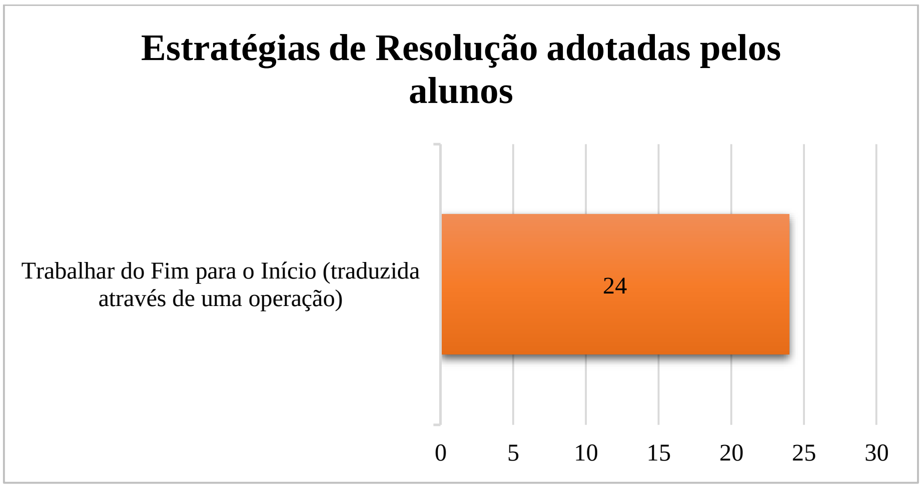


Gráfico 9 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 9

No entanto, e ainda que todos os alunos tenham sido capazes de recorrer à estratégia *Trabalhar do Fim para o Início* para resolver a tarefa proposta, o modo como organizaram o seu raciocínio revelou-se distinto, podendo destacar-se os seguintes pares:

Telmo e João adotaram a estratégia mais usada pelos alunos da turma, já que recorreram ao algoritmo da adição para apresentar o seu raciocínio:

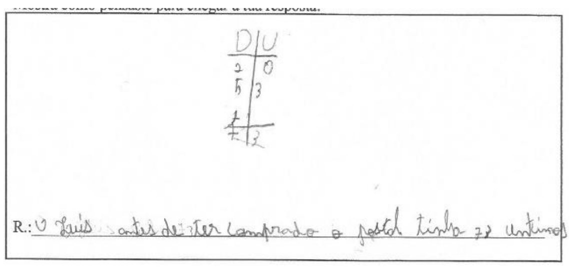


Figura 26 – Resolução de João e Telmo

Este par representou o seu o seu cálculo através do algoritmo vertical da adição, organizado com o apoio das colunas das dezenas e das unidades. Para tal, adicionaram o número vinte ao número cinquenta e três a fim de chegarem ao resultado pretendido, setenta e três, tal como se pode constatar abaixo:

Telmo – A gente fez: vinte cêntimos mais cinquenta e três dá setenta e três.

Débora – E o que é que é esse setenta e três?

Telmo – É setenta e três cêntimos. A resposta final é: “o Luís antes de ter comprado o postal tinha setenta e três cêntimos.”

Por sua vez, Diana e Inês, para além de recorrerem à adição, representaram também a operação inversa, como forma de garantirem que o resultado obtido na operação anterior (adição) se encontrava correto:

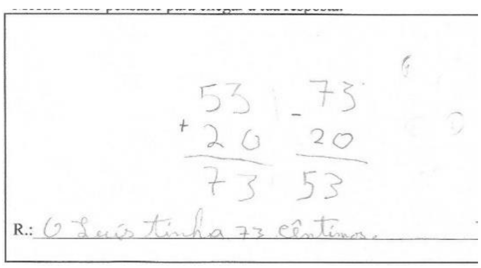


Figura 27 – Resolução de Diana e Inês

Dessa forma, realizaram a operação setenta e três menos vinte, chegando ao resultado cinquenta e três. Ainda assim, após conversa com o par, percebei que o resultado cinquenta e três serviu apenas para verificar a veracidade do resultado atingido na operação anterior, não sendo sequer mencionado na sua resposta escrita.

Relativamente ao problema que se seguiu, *As Amoras da Andreia* pretendia conduzir o aluno a calcular a quantidade de amoras que a personagem teria inicialmente na sua caixinha, sabendo que esta já havia comido metade e que, no final, teria apenas seis amoras.

Tal como havia acontecido com o problema precedente, também neste se verificaram resultados bastante satisfatórios, tendo a turma recorrido, mais uma vez à estratégia *Trabalhar do Fim para o Início* de forma a resolver com sucesso a tarefa. No entanto, e ao contrário do problema anterior onde todos os pares traduziram o seu raciocínio através de operações, neste problema os alunos expuseram as suas ideias de dois modos distintos:

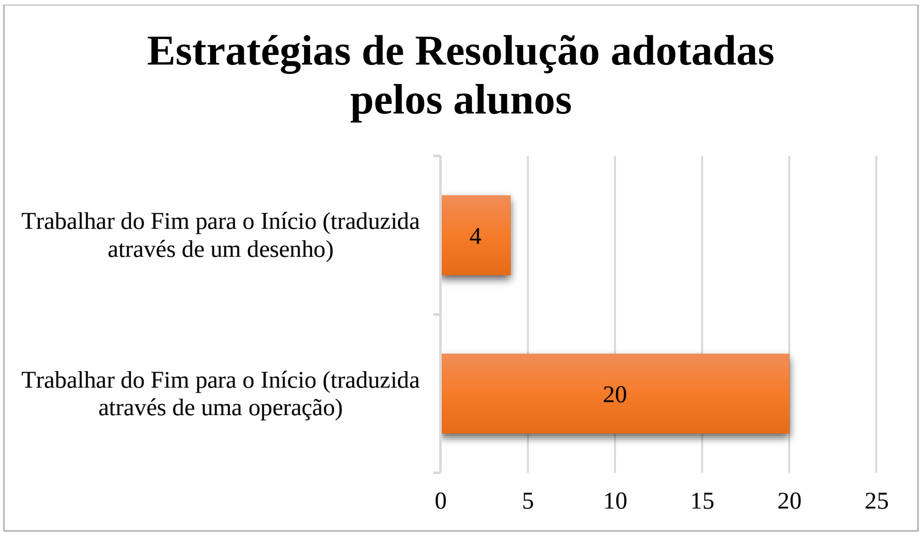


Gráfico 10 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 10

Nesse âmbito, refiro a estratégia adotada apenas por dois pares e que consistiu no desenho de dozes amoras, separadas em dois “lados”:

Figura 28 – Resolução de Leonardo e Diogo

Conversando com um dos pares (Leonardo e Diogo), pude perceber que o lado esquerdo representava o número de amoras que a Andreia tinha no final (seis) e que o lado direito representava a quantidade de amoras que a Andreia havia comido ao início (seis). Quando somados, ambos os lados permitiram ao par concluir que a Andreia possuía, inicialmente, doze amoras.

Como alternativa ao raciocínio acima descrito, apresenta-se a estratégia adotada pela maioria da turma, recorrendo à resolução do par Diana e Inês para a exemplificar:

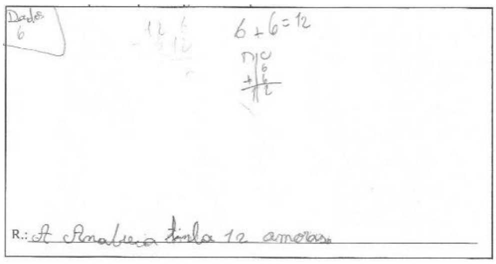


Figura 29 – Resolução de Diana e Inês

Este par optou por resolver o problema através da escolha de uma operação, tendo escolhido organizar o seu cálculo através do algoritmo vertical da adição, adicionando seis mais seis a fim de chegar ao número inicial de amoras, doze. Tal como vinha a ser já habitual nesta turma, grande parte dos alunos optaram por apresentar na sua folha um conjunto de cálculos, mantendo a ideia errónea de que um problema corretamente resolvido deve apresentar sempre uma operação (mesmo que esta não seja necessária à resolução ou até mesmo a estratégia mais pertinente). Neste caso, acredito que as alunas se tenham limitado a recorrer aos conhecimentos que já possuíam acerca da relação dobro-metade, tendo transcrito para a folha de resolução uma operação porque tal prática era já um hábito.

De modo a ilustrar o raciocínio mencionado, segue-se abaixo um excerto da entrevista ao par onde se pode perceber que a operação apresentada não explica o modo como as alunas resolveram o problema, gerando inclusive alguma confusão:

Inês – Nós fizemos assim: havia seis amoras. Se era metade de seis é três… Mas três mais três é seis e mais seis é doze. Por isso o resultado era doze. *(Perde-se nos dados e no raciocínio apresentado na ficha)*

Débora – Então deixem-me ver se percebi: então nós sabemos que no final a Andreia ficou com seis amoras, é?

Diana – Sim.

Débora – E o que é que nós sabemos mais desse problema? Se ela ficou com metade das amoras, isso quer dizer que, ao início, tinha o…

Inês – Doze. Doze amoras…

Débora – Que é o quê? O dobro.

Inês – É dois vezes seis.

Diana – Nós respondemos assim: "a Andreia tinha doze amoras".

Débora – Então e por que é que ela tinha doze e não tinha onze, nem dez?

Diana – Porque seis mais seis são doze. Porque primeiro ela tinha comido seis e depois sobraram-lhe seis. E seis mais seis são doze.

Posteriormente à etapa de resolução dos problemas, seguiu-se a sua exploração no quadro. Para tal, começou-se pela exploração do primeiro problema, tendo sido selecionados dois pares com estratégias distintas: a resolução através da adição e a resolução através da subtração. Terminada a exploração do primeiro problema, passou-se para a exploração do segundo, tendo essa seguido exatamente a mesma lógica: foi escolhido um par cujo raciocínio representasse o adotado por grande parte da turma. Dessa forma, em ambos os problemas, cada par pôde explicar o seu raciocínio e responder às dúvidas dos restantes colegas.

4.1.9) Problema 11 – Os Doces da Mariana

A exploração deste problema teve início com a distribuição e, posterior, leitura dos enunciados por parte de dois alunos voluntários. No seguimento dessa leitura foi dinamizada uma breve discussão acerca da interpretação do enunciado. Nesta discussão, antes de serem lançadas por mim as habituais questões, a turma tomou iniciativa e explicou, brevemente, o que lhes era pedido no enunciado, esclarecendo as dúvidas iniciais.

Concluída a etapa de interpretação dos enunciados, foram dados dez minutos para que, a pares, os alunos pudessem reler o problema, pensar acerca do mesmo, representar o seu raciocínio e compor a sua resposta por escrito.

Neste problema pretendia-se conduzir o aluno a recorrer à estratégia de resolução *Estimar, Verificar e Rever,* solicitando-lhe que descobrisse quais os doces comprados pela personagem, sabendo o preço de cada doce e o valor gasto por esta para os comprar (setenta e cinco cêntimos).

Tal como acontecera com o problema anterior, também neste problema a turma se revelou bem-sucedida, tendo estimado, verificado a credibilidade e revisto a sua resposta de modo a chegar à conclusão mais acertada. Assim, em todos os enunciados analisados pude constatar o recurso à operação adição, caraterística da etapa de verificação desta estratégia. O gráfico que se segue confirma a adoção da estratégia mencionada:

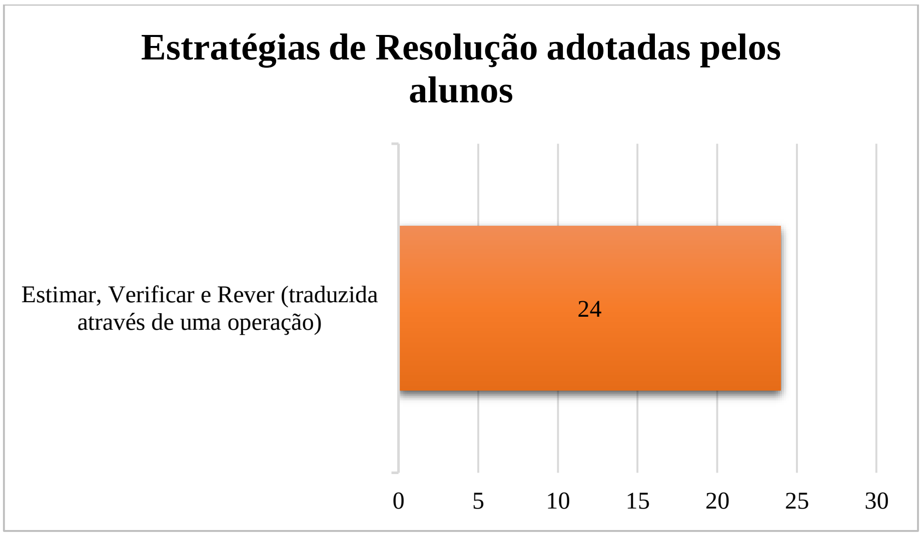


Gráfico 11 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 11

Neste problema todos os pares recorreram à adição para chegar ao resultando pretendido, podendo, neste momento, tomar-se como exemplo o par Sara e Rodrigo:

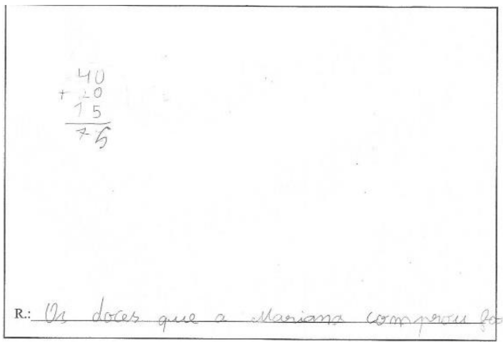


Figura 30 – Resolução de Sara e Rodrigo

Este par recorreu ao algoritmo da adição para resolver o problema, adicionando quarenta, mais vinte, mais quinze a fim de comprovar se os três brinquedos que tinham selecionado inicialmente correspondiam ao pedido, ou seja, se quando adicionados perfaziam um total de setenta e cinco cêntimos. Abaixo segue-se um excerto da entrevista ao par que pretende ilustrar o seu raciocínio:

> Sara – Nós circundámos o chupa-chupa porque… O chupa-chupa, o rebuçado e a pastilha. E depois fizemos a conta tipo quarenta e mais vinte e mais quinze.
>
> Débora – E mais quinze… E deu o quê?
>
> Sara e Rodrigo – Setenta e cinco.
>
> Débora – Então acertaram logo à primeira? Não experimentaram com mais nenhum?

Rodrigo – Não…

Ainda que o presente problema tivesse duas hipóteses de resposta, tanto nos alunos que selecionaram uma, como nos alunos que selecionaram outra, a estratégia de resolução foi sempre idêntica.

Posteriormente à etapa de resolução do problema, seguiu-se a sua exploração no quadro. Para tal, dirigiram-se ao quadro dois pares distintos, tendo ambos recorrido à adição para explicitar o raciocínio desenvolvido. Neste caso, e ainda que ambos os pares tenham revelado raciocínios idênticos, revelou-se importante que ambos fossem ao quadro, já que o presente problema apresentava duas hipóteses corretas de resolução e cada um dos pares apresentou uma hipótese diferente.

4.1.10) Problema 12 – Os Berlindes da Joana

O problema em causa teve início com a distribuição dos enunciados por parte de um aluno, sendo que, em seguida, um outro aluno procedeu à leitura do problema. Posteriormente a essa primeira leitura do problema, realizou-se uma breve interpretação do mesmo através de questões como: “De que fala o problema?”; “O que se quer saber?”; “Será possível saber a resposta logo à partida?”, etc.

Terminada a etapa de interpretação do enunciado, os alunos foram informados de que o problema seria resolvido a pares e de que poderiam dar início à sua exploração com o colega do lado. Esta exploração decorreu ao longo de dez minutos e pretendia que o aluno recorresse à estratégia *Usar o Raciocínio Lógico* de modo a determinar o número de berlindes que a personagem detinha através das pistas que lhe eram dadas. Com a análise das resoluções elaboradas pelos pares, pude perceber que esta foi uma tarefa bastante bem-sucedida, já que todos os alunos recorreram ao raciocínio lógico para chegar à conclusão esperada. Ainda assim, e sabendo que o modo de expor o raciocínio varia de aluno para aluno, pude constatar a adoção de quatro modos diferentes de explicar as respostas obtidas:

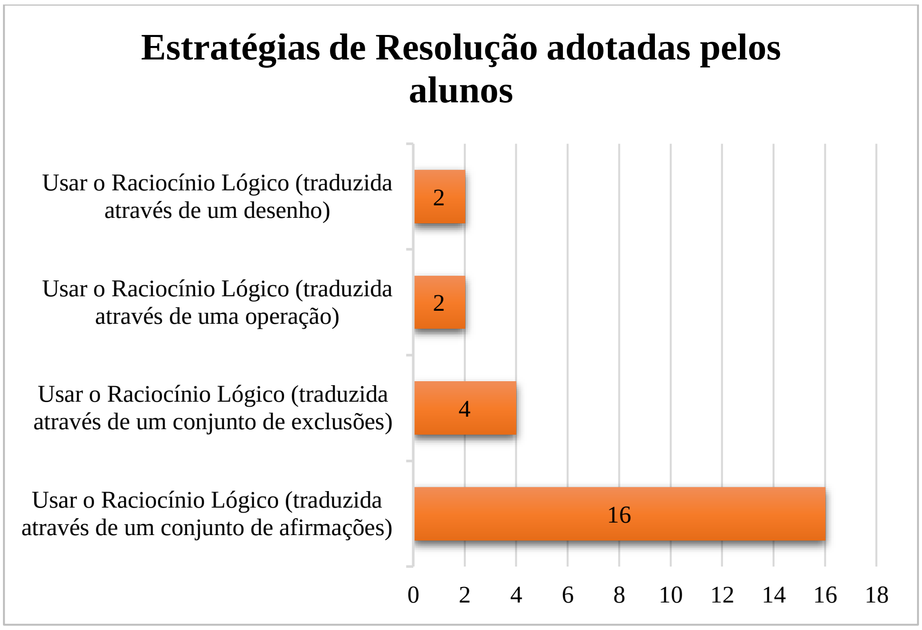


Gráfico 12 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 12

De entre os raciocínios mais adotados pela turma, destaco o de Matilde e Christian que representaram na ficha um conjunto de afirmações:

Figura 31 – Resolução de Matilde e Christian

Estes optaram por escolher mentalmente o único número capaz de preencher os requisitos mencionados no enunciado tendo, em seguida, transcrito para a ficha os motivos que levavam o número selecionado a ser o correto (tendo em conta as pistas fornecidas).

Já Afonso e Dorin, optaram por representar na ficha os quatros números possíveis de acordo com os dados fornecidos no enunciado, tendo procedido em seguida à exclusão dos mesmos (até chegarem ao correto), tal como se pode constatar:

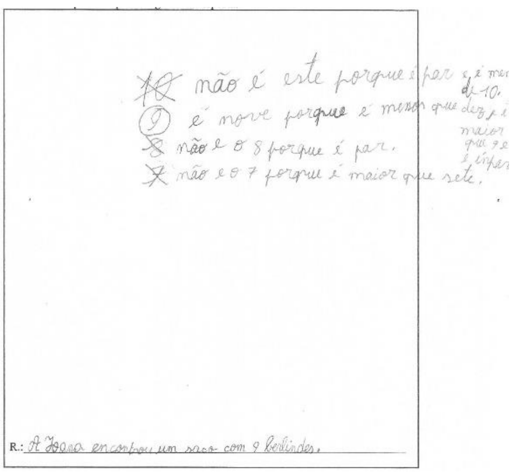


Figura 32 – Resolução de Afonso e Dorin

Afonso – Não é este porque… Não é o dez porque é par e tem de ser menos de dez. É o nove porque é menos que dez, é maior que sete e é impar.

Dorin – Eu agora leio isso! *(Referindo-se às afirmações relativas aos números oito e sete)* Não é o oito porque é par. Não é sete porque é maior que sete.

Débora – Então deixem-me lá ver se eu percebi…

Dorin – Mas espera, espera, espera Afonso! Se é "é", então tem de levar aqui acento!

Débora – É, exatamente! Nós tínhamos três pistas, não era? Tinha de ser um número menor do que dez… Quais foram os números que escolheram então?

Afonso – Só podia ser o nove ou o oito porque tinha de ser maior do que sete.

Débora – Então tinha de ser menor do que dez e maior do que sete. Podia ser o nove ou o oito. É isso?

Afonso – Mas como diz aqui "não é um número par", não podíamos por o oito, porque oito é par. Porque dá para dividir quatro por quatro.

Dorin – É para meter um número impar.

Débora – Exatamente, tinham de colocar um número impar. E escolheram o…

Afonso – Nove.

Sendo já habitual uma exposição no quadro posterior à fase de resolução, um par dirigiu-se ao quadro a fim de mostrar a estratégia a que havia recorrido para conseguir resolver o problema apresentado. Neste caso, apenas um par foi escolhido para apresentar a sua resolução já que toda a turma resolveu o problema de um modo muito semelhante.

4.1.11) Problema 13 – O que é o Almoço?

Tal como os problemas anteriores, a exploração do presente problema também teve início com a distribuição dos enunciados por parte de um aluno, sendo que, em seguida, um outro aluno procedeu à leitura do problema. No seguimento desta primeira leitura, realizou-se uma breve interpretação do mesmo através de questões como: "De que fala o problema?"; "O que se quer saber?"; "Será possível saber a resposta logo à partida?", etc.

Terminada a etapa de interpretação do enunciado, os alunos foram informados de que o presente problema seria resolvido a pares e de que poderiam dar início à sua exploração com o colega do lado. Essa exploração decorreu, mais uma vez, ao longo de dez minutos e pretendi com ela levar o aluno recorrer à estratégia *Usar o Raciocínio Lógico*, usando as pistas fornecidas com o intuito de adivinhar com segurança o prato que a personagem havia comido ao almoço.

Mais uma vez, os resultados obtidos revelaram-se bastante satisfatórios, tendo toda a turma recorrido ao raciocínio lógico para resolver a tarefa proposta:

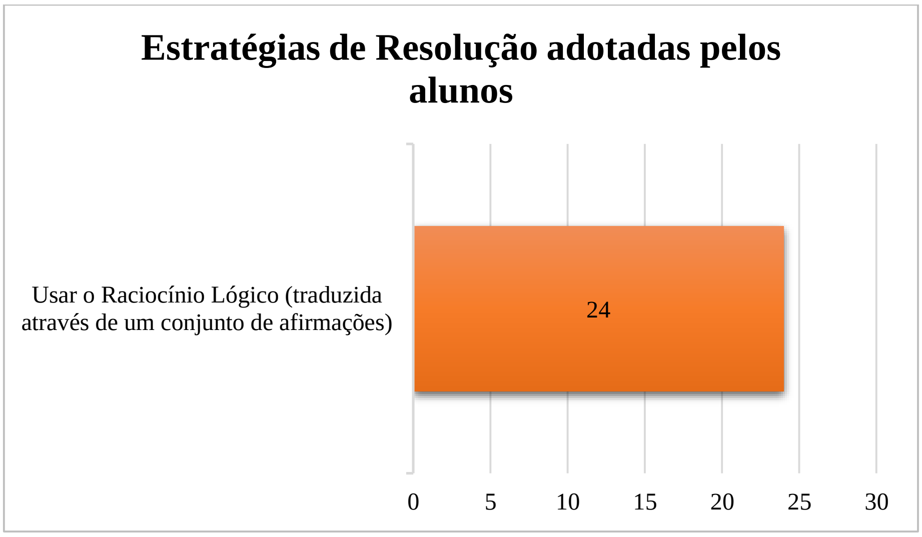


Gráfico 13 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 13

Desta forma, todos os pares resolveram o problema em causa tendo, em seguida, criado um conjunto de frases destinadas a provar que o prato escolhido era o único que se enquadrava nas pistas fornecidas. Como tal, apresento em seguida a resolução de Sara e Rodrigo, onde se pode ver com clareza o modo como resolveram o presente problema:

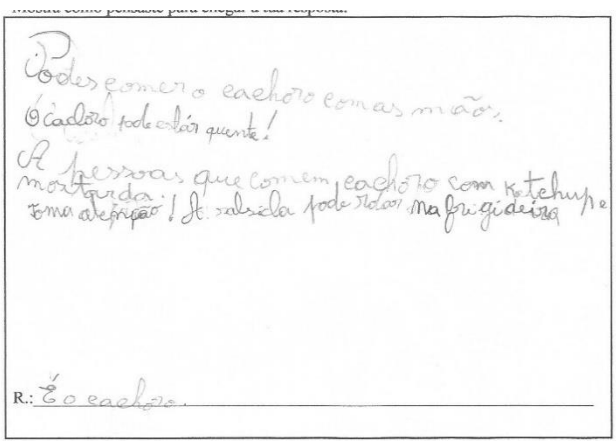


Figura 33 – Resolução de Sara e Rodrigo

Sabe-se que o par leu cada pista uma a uma, excluindo com a leitura de cada pista um prato que não correspondesse às caraterísticas apresentadas. No final, e após a leitura de todas as pistas e a exclusão de todos os pratos que não correspondessem ao pretendido, sobrou apenas um prato – o cachorro quente. Com base nesse mesmo prato, o par elaborou na ficha quatro afirmações distintas (uma para cada pista), explicitando o modo como a comida escolhida era a única que se enquadrava nas pistas fornecidas. Assim, pôde ler-se: “Podes comer o cachorro com as mãos. O cachorro pode estar quente. Há pessoas que comem cachorro com *ketchup* e mostarda. Toma atenção! A salsicha pode rolar na frigideira.”

Em seguida, segue-se um trecho da entrevista onde se pode constatar o raciocínio desenvolvido pelo par:

Rodrigo – Então pensámos: a primeira dizia que se podia comer com as mãos. E nós…

Débora – Pode ser… Quais é que podem ser?

Rodrigo – A pizza, o hambúrguer, a sandes e o cachorro. Depois a massa não se pode comer com as mãos…

Débora – Então a massa temos a certeza que já não é?

Sara – Sim!

Débora – Ok, esquecer a massa. Próximo…

Sara – A segunda… “Tem cuidado, pode estar quente.”

Débora – Ok, já sabemos que não é a massa. Pois não?

Rodrigo – Pois não.

Débora – Então? Pode ser o hambúrguer…

Sara – O hambúrguer, o pão, o cachorro e a pizza.

Débora – O pão é qual? A sandes?

Rodrigo – Sim.

Débora – Ok. E qual é que não pode ser? Qual é que não é quente?

Rodrigo – A sandes.

Débora – A sandes, pronto. A sandes não pode ser porque não é quente. Já sabemos que a massa e a sandes não são, certo?

Rodrigo – Sim.

Sara – A seguir é a pizza.

Débora – "Algumas pessoas gostam dela com mostarda e *ketchup*". Só sobram estas três. *(Referindo-me à pizza, ao hambúrguer e ao cachorro)* Quais é que…

Sara – A pizza.

Débora – A pizza come-se com mostarda e *ketchup*?

Sara – Não… O cachorro e o hambúrguer.

Débora – Ah… Então cortamos a pizza, é isso que querias dizer?

Sara – Sim.

Débora - Então já não pode ser nem a pizza, nem a massa e nem a sandes. Ótimo!

Rodrigo – Nem a pizza.

Débora – Sim, nem a pizza. Próxima pista.

Sara – "Toma atenção, o seu interior pode rolar da frigideira quando está a ser cozinhado".

Rodrigo – Isto pode andar às voltas. *(Referindo-se à salsicha)*

Débora – E o que é que é isto?

Sara – É um cachorro. Por isso o hambúrguer já não vale!

Débora – O hambúrguer já não vale e é o cachorro.

Rodrigo – "É o cachorro."

Posteriormente à etapa de resolução surgiu a fase de discussão em turma na qual solicitei a um par que se dirigisse ao quadro e desse a conhecer a sua estratégia de resolução à turma. Destaca-se que, tal como no problema anterior, apenas um par foi escolhido para apresentar a sua resolução já que toda a turma resolveu o problema de um modo muito semelhante.

4.1.12) Problema 14 – As Roupas do Alexandre

Seguindo exatamente a mesma lógica que o problema *O Lanche do Alexandre,* o presente problema teve início com a distribuição e leitura dos enunciados por parte dos alunos. Seguidamente, deu-se um breve momento de interpretação do enunciado, sucedido de um período de dez minutos destinado à resolução a pares do mesmo.

Com este problema pretendi proporcionar à turma a exploração da estratégia de resolução *Fazer uma Lista Organizada*, solicitando ao aluno que encontrasse todas as combinações que a personagem poderia fazer com as roupas indicadas. Tratando-se do último problema a ser proposto, as estratégias de resolução adotadas pelos alunos foram diversas, podendo destacar-se a elaboração de um desenho, a elaboração de um esquema e a elaboração de uma lista organizada:

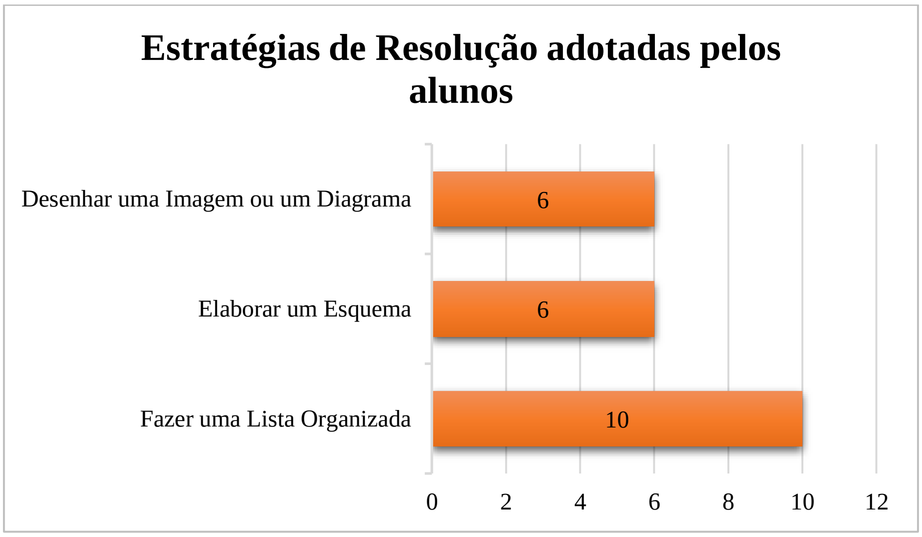


Gráfico 14 – Estratégias de resolução adotadas pelos alunos no Problema 14

Isis e Tiago optaram por desenhar todas as combinações possíveis, desenhando assim seis combinações diferentes (camisola vermelha – calças pretas; camisola vermelha – calças castanhas; camisola azul – calças castanhas; camisola azul – calças pretas; camisola verde – calças pretas; camisola verde – calças castanhas):

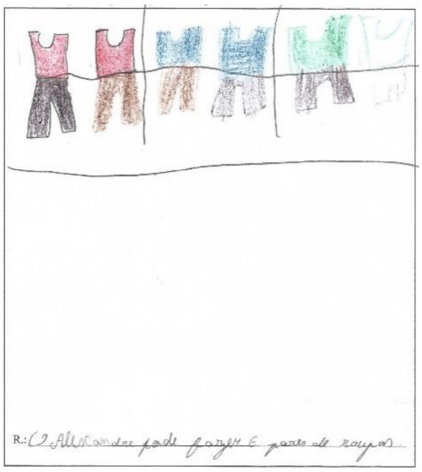


Figura 34 – Resolução de Isis e Tiago

O seguinte excerto da sua entrevista demonstra o modo como desenvolveram o raciocínio:

Isis – Então nós fizemos assim: fizemos duas camisolas vermelhas.

Tiago – Duas camisolas azuis.

Isis – E duas camisolas…

Tiago – Verdes.

Isis – Verdes. E depois nós pensámos: “encontra todas as combinações que o Alexandre pode fazer com a sua roupa”. Nós tínhamos feito um exercício parecido, mas só que tinha três bolos e três sumos. Aqui só tem três camisolas e duas calças.

Débora – Exatamente. Então como é que fizeram? Desenharam as camisolas e depois?

Isis – Nós desenhámos as camisolas e…

Tiago – Dividimos ao meio.

Isis – Dividimos ao meio. Fizemos riscos a separar as camisolas vermelhas, as verdes e as azuis e depois fizemos um risco a separar as camisolas das calças. E fizemos assim: o vermelho foi camisola vermelha…*(Espera que Tiago complete o discurso)*

Tiago – Calças pretas.

Isis – Camisola vermelha…*(Espera que Tiago complete o discurso)*

Tiago – Calças castanhas.

Isis – Camisola azul…*(Espera que Tiago complete o discurso)*

Tiago – Calças castanhas.

Isis - Camisola azul…*(Espera que Tiago complete o discurso)*

Tiago – Calças pretas.

Isis – Camisola verde…*(Espera que Tiago complete o discurso)*

Tiago – Calças pretas.

Isis – E camisola verde…*(Espera que Tiago complete o discurso)*

Tiago – Calças castanhas.

Isis – E a reposta foi assim: "O Alexandre pode fazer seis pares de roupas".

João e Mafalda optaram por organizar o seu raciocínio através de um esquema, desenhando três retângulos (cada um representando uma cor de camisola diferente) e ligando cada retângulo a duas cores diferentes (preto e castanho), representando as calças mencionadas:

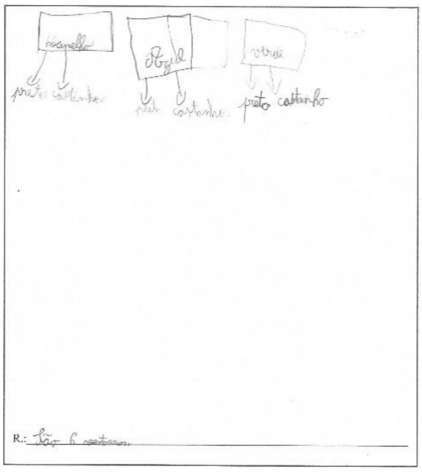


Figura 35 – Resolução de João e Mafalda

Com isso, bastou que contassem o número de ligações/setas representado, a fim de concluírem quantas combinações seriam possíveis, tal como se pode constatar:

João: Nós olhámos pra tabela e fizemos um retângulo e depois escrevemos vermelho com as calças pretas e castanhas, e depois escrevemos azul com as calças pretas e castanhas e verde escrevemos calças pretas e castanhas. E depois era pra somar isso tudo e deu-nos seis.

Inês e Diana recorreram também ao desenho mas de um modo distinto, podendo este assemelhar-se a um esquema:

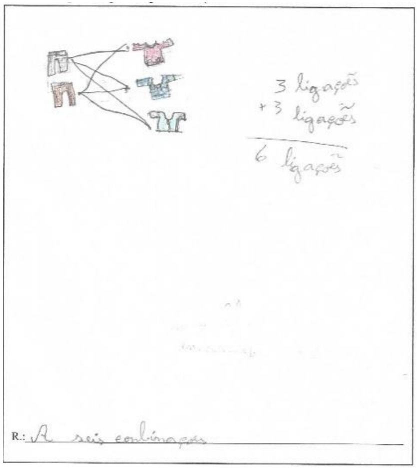


Figura 36 – Resolução de Diana e Inês

Assim, desenharam dois pares de calças de um lado (pretos e castanhos) e três camisolas do outro (vermelha, azul e verde) tendo, em seguida, ligado cada par de calças às três camisolas. Com isso, realizaram, tal como o par anterior um conjunto de seis ligações, equivalentes a seis combinações distintas.

Por último, Alexandra e João adotaram o procedimento escolhido por grande parte da turma, tendo recorrido a uma listagem das combinações existentes e, dessa forma, constatado um total de seis combinações diferentes:

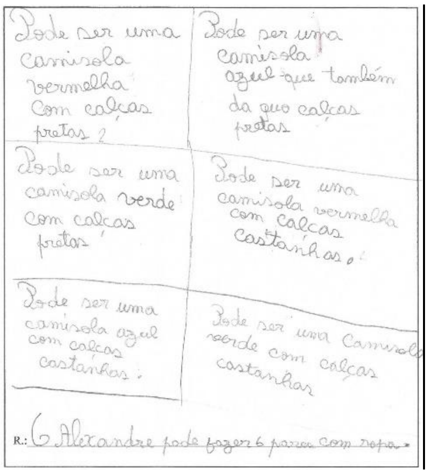


Figura 37 – Resolução de Alexandra e João

Mais uma vez, considero oportuno realçar brevemente a evolução de Alexandra, já que esta era uma aluna que, no início deste projeto, dependia fortemente do desenho enquanto estratégia de resolução dos seus problemas e que, neste momento, se revelou capaz de escolher outra estratégia que lhe parecesse mais pertinente à resolução do problema em causa. Com isto, confirmou a minha ideia de que vinha a evoluir ao longo do presente projeto, tendo comprovado também um domínio satisfatório das diferentes estratégias de resolução com as quais foi tomando contacto.

A fim de partilhar a diversidade de estratégias de resolução encontradas pelos alunos, solicitei aos quatro pares acima referidos que partilhassem com os colegas as suas resoluções. Estes dirigiram-se ao quadro, transcreveram a sua resolução e partilharam o seu raciocínio com os colegas, respondendo a eventuais dúvidas que fossem surgindo.

Capítulo V – Conclusão

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma reflexão final acerca da intervenção dinamizada, relacionando de modo integrado e crítico as diversas vertentes que a constituíram. Como tal, começo por apresentar algumas das conclusões resultantes deste estudo, tendo em conta o seu objetivo central e as questões que o orientaram: "Quais as estratégias de resolução de problemas que os alunos usam?"; "O que pode influenciar a escolha de determinadas estratégias em detrimento de outras?" e "Identificam-se alterações relativamente à seleção das estratégias adotados pelos alunos no final do projeto?". Para terminar, exponho algumas das dificuldades com as quais me deparei ao longo do estudo, tal como determinados aspetos que considero relevantes acerca do trabalho desenvolvido.

5.1) Conclusões do estudo

De modo a responder às questões que orientaram este estudo, optei por organizar as minhas conclusões em três pontos distintos: (i) estratégias de resolução de problemas mais usadas pelos alunos; (ii) fatores que influenciam a escolha de determinadas estratégias em detrimento de outras; e (iii) evolução das estratégias de resolução usadas pelos alunos ao longo do projeto.

5.1.1) Estratégias de resolução de problemas mais adotadas pelos alunos

Os resultados deste estudo sugerem que o modo como os alunos representam as suas ideias matemáticas se encontra intimamente interligado com o modo como estes as compreendem e utilizam, confirmando aquilo que Ponte e Serrazina (2000) indicam.

Analisando as estratégias de resolução de problemas mais adotadas pelos alunos no decorrer deste estudo, depressa se constata a adoção maioritária de duas estratégias distintas: a escolha de uma operação (adotada em 102 situações) e o desenho de uma imagem ou diagrama (adotada em 71 situações).

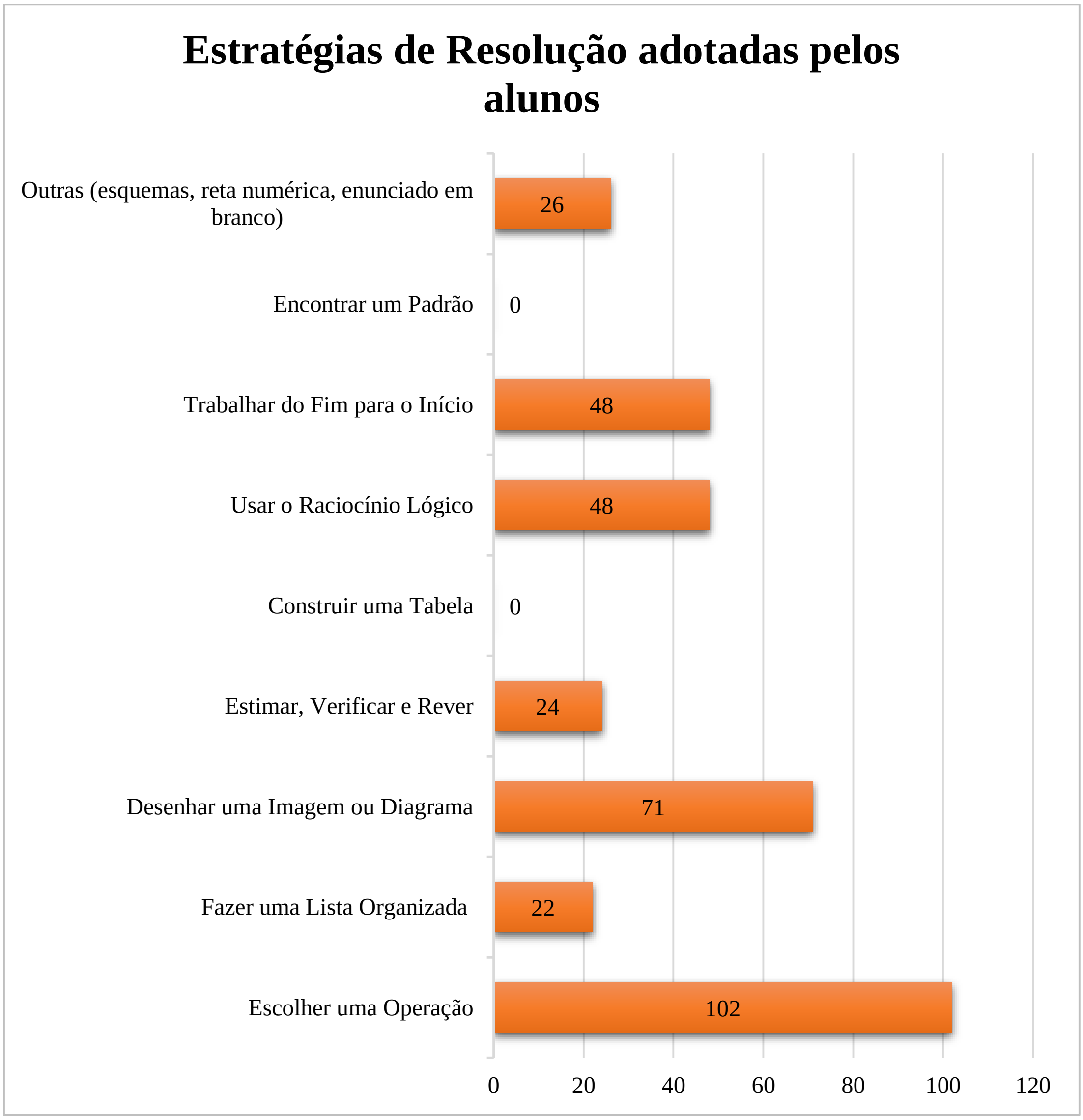


Gráfico 15 – Estratégias de resolução mais adotadas pelos alunos

Esta clara divisão vem reforçar uma das conceituadas teorias de Bruner, já que permite constatar claras disparidades ao nível do desenvolvimento intelectual entre os alunos estudados. De acordo com este autor existem três tipos distintos de representação do raciocínio (a representação ativa, a representação icónica e a representação simbólica), correspondendo cada tipo de representação a uma fase distinta do desenvolvimento mental da criança. Ao analisar o gráfico acima, pode afirmar-se que grande parte dos alunos recorreram a uma representação simbólica (ao adotarem a estratégia *Escolher uma Operação),* enquanto uma margem menor recorreu a uma representação icónica (ao adotar a estratégia *Desenhar uma Imagem ou um Diagrama*), deixando transparecer que nem todos se encontram na mesma etapa de desenvolvimento intelectual. Tal como afirmam Pinto e Canavarro (2000) os três sistemas de representação mencionados "operam durante o desenvolvimento da inteligência humana" (p. 4), sendo a sua interação um fator crucial para o desenvolvimento de cada indivíduo. Assim, considero importante realçar que as disparidades observadas não devem ser encaradas como "motivo para alarme", já que o desenvolvimento de cada criança não implica necessariamente uma série de etapas fixas, podendo caraterizar-se mais como um domínio gradual e progressivo destes três tipos de representação. Como tal, importa perceber que o desenvolvimento de cada indivíduo se dá de modo diferente e a ritmos distintos, sendo fundamental para o professor conceder aos alunos oportunidades de contactar, explorar e experimentar a linguagem escrita matemática de modo a que estes, eventualmente, a dominem, reconhecendo "as funções e as potencialidades de uma forma mais convencional de resolver problemas" (Pinto e Canavarro, 2000, p. 5).

Observando os comportamentos da turma e levantando questões junto do professor titular e dos próprios alunos, pude perceber que a escolha maioritária de uma operação como estratégia de resolução em muito se deve aos hábitos de trabalho implementados previamente pelo professor. Ou seja, procurando fomentar junto dos alunos a adoção gradual de estratégias de resolução mais formais, acredito que o professor tenha privilegiado a escolha de uma operação ao nível da resolução de problemas numéricos. Esta prática terá levado os alunos a acreditarem que a escolha de uma operação proporcionaria a resposta a qualquer que fosse o problema, sendo esta a única estratégia correta e esperada. Tal crença pode explicar o facto de que muitos dos alunos revelassem dificuldades em abandonar a escolha de uma operação como estratégia de eleição, desconsiderando qualquer outra estratégia que lhes fosse apresentada.

Por sua vez, e sabendo que o desenho de uma imagem ou diagrama foi também uma das estratégias de resolução mais adotadas pelos alunos, considerei necessário procurar saber os motivos por detrás desta escolha. Assim, através do diálogo com a turma e da análise das resoluções apresentadas facilmente percebi que a elaboração de um desenho, ainda que tenha tido um papel fundamental nas suas resoluções, apresentou diversas funcionalidades entre eles. Para uns, o ato de desenhar serviu para representar os diversos elementos que compunham o problema, enquanto para outros se revelou o modo mais prático de apresentar a sua resposta final. Tal constatação confirma a ideia prévia de que o desenvolvimento intelectual da criança se dá de um modo fluído e gradual, existindo pequenas "metas" mesmo dentro de cada tipo de representação. Assim, ainda que a representação no enunciado seja percecionada como bastante semelhante, cada desenho apresentado pelos alunos representou para o seu autor uma funcionalidade distinta, comprovando a diversidade de raciocínios existentes e as diferentes “fases” do desenvolvimento intelectual em que os alunos se encontram.

Olhando em retrospetiva, creio que a forte adoção do desenho enquanto estratégia de resolução indique que grande parte dos alunos da turma ainda apresentam dificuldades na representação de um raciocínio mais formal, sendo necessária uma atividade continuada no âmbito da exploração de problemas, tal como bastante apoio por parte do professor e dos colegas com raciocínios mais elaborados.

Desta forma, e ainda que os resultados obtidos no âmbito do presente projeto tenham sido bastante satisfatórios, importa referir que existem ainda casos nos quais os alunos não recorrem à estratégia de resolução tida como a “mais pertinente”.

5.1.2) Fatores que influenciam a escolha de determinadas estratégias em detrimento de outras

Ao iniciar o presente projeto, questionei-me acerca da existência de fatores que pudessem vir a influenciar a escolha de estratégias de resolução por parte dos alunos. Depois de analisar o projeto implementado, constatei a existência de três fatores que fortemente influenciaram as suas escolhas: os diferentes objetivos dos problemas, os hábitos de trabalho implementados até à data e a nova metodologia de trabalho implementada.

Sabendo que cada problema proposto pretendia conduzir o aluno a adotar determinada estratégia, creio que o objetivo inicial do problema tenha sido um fator decisivo na escolha de uma estratégia de resolução por parte dos alunos. Através da leitura e correta interpretação dos enunciados, muitos dos alunos perceberam o objetivo do problema e, consequentemente, viram as suas escolhas serem “influenciadas”, adotando a estratégia mais pertinente (e pensada inicialmente por mim) para resolver o problema em causa.

No entanto, e tal como já referi acima, os hábitos de trabalho implementados até à data representaram também um forte fator influenciador na escolha das estratégias de resolução, já que os alunos iniciaram o projeto com a ideia de que a escolha de uma operação seria o único raciocínio válido a apresentar e o único capaz de os conduzir à resposta correta. Esta ideia levou a que muitos dos alunos procurassem resolver qualquer problema através da escolha de uma operação, não equacionando qualquer outra estratégia para além da referida.

Por último, e reconhecendo que a metodologia de trabalho individual foi um dos pontos a ser alterado numa fase inicial do projeto (passando a turma a trabalhar a pares), considero que este tenha sido também um fator que, de algum modo, influenciou a adoção de estratégias por parte dos alunos. Fomentando a reflexão, a discussão acerca dos problemas e a troca de ideias e opiniões, o trabalho a pares possibilitou aos alunos lucrarem com um segundo ponto de vista. Com isto, cada par foi forçado a equacionar as ideias de cada elemento, refletindo acerca das suas opiniões e procurando os benefícios e "malefícios" de cada estratégia de resolução a fim de chegarem à mais pertinente.

5.1.3) Evolução das estratégias de resolução usadas pelos alunos ao longo do projeto

Reconhecendo o processo de desenvolvimento da criança como algo gradual e em constante evolução, depressa se percebe que também o desenvolvimento do raciocínio matemático se processa lentamente e através de diversas experiências e aprendizagens. Neste caso, e atendendo às peculiaridades da turma acompanhada, pude perceber uma evolução das estratégias usadas pelos alunos a dois níveis distintos: passagem (por parte de alguns alunos) da representação icónica para a representação simbólica e adoção de diversas estratégias de resolução de problemas (para além da escolha de uma operação).

No que concerne à passagem da representação icónica para a representação simbólica, pude verificar que grande parte dos alunos que no início do projeto recorriam ao desenho para resolver os problemas propostos começaram (com o tempo, a experiência e o contato com as diversas estratégias) a adotar outras estratégias que não o desenho. Esta evolução foi-se manifestando através de algumas oscilações nas subcategorias da representação icónica (nomeadamente na passagem para a representação de esquemas), tendo sido visível uma passagem de representações concretas para representações cada vez mais abstratas. Segundo Bruner (1999), esta é uma evolução expectável, já que a partir de determinado momento a criança adquire a capacidade de representar a realidade recorrendo a uma linguagem simbólica, abstrata e sem qualquer dependência direta daquilo que observa. Assim, esta passa a ser capaz de conjugar os símbolos em causa, fazendo a sua própria leitura da realidade, mas também transformando aquilo que considera a sua realidade.

Quanto à adoção de outras estratégias de resolução de problemas que não a escolha de uma operação, pude perceber que se tratou de um processo moroso e complexo. Aos poucos, a ideia generalizada de que qualquer estratégia de resolução era menos importante que a escolha de uma operação foi desaparecendo, levando a que os alunos se apercebessem da existência de um vasto leque de estratégias de resolução e dos benefícios de cada uma destas face aos problemas propostos. Graças ao diálogo com os alunos e às experiências com os diversos tipos de problemas, a turma foi-se revelando cada vez mais interessada em conhecer, perceber e experimentar as diversas estratégias de resolução de problemas. Tal evolução revelou-se percetível graças às resoluções apresentadas pelos alunos ao longo de todo o projeto, sendo evidente uma alteração na diversidade de estratégias apresentadas no início e no final da proposta implementada.

5.2) Reflexão sobre o desenvolvimento do projeto

Reconhecendo a importância de ações como questionar, pensar e refletir, facilmente se depreende que estas são parte fundamental do Agir Educativo. Acompanhando o docente ao longo da sua carreira, a prática reflexiva proporciona oportunidades para progredir e evoluir enquanto pessoa e profissional, dando origem a professores aptos, interessados e com vontade de mudar/aprender. Consciente da importância do ato de autoquestionamento, Dewey (1959, citado por Pinazza, 2007, p. 78) defende o pensamento reflexivo, enunciando que este:

> envolve um processo de investigação que afasta o indivíduo da impulsividade e das ações rotineiras (…) supõe a previsão e o planejamento de ação a partir do reconhecimento de fins ou propósitos, representando a atividade deliberada e intencional em direção a objetivos.

Desta forma, e procurando evidenciar o modo como a prática reflexiva se revelou uma constante ao longo de todo o processo desenvolvido, considero importante dar a conhecer, de um modo sucinto, algumas das dificuldades e limitações com as quais me fui deparando ao longo deste projeto. Em primeiro lugar, ao analisar a minha própria intervenção, depressa percebi a existência de determinadas dificuldades ao nível da escolha de tarefas. Tratando-se de uma tarefa complexa, a escolha, reformulação e criação de problemas para propor aos alunos revelou-se um dos aspetos onde senti algumas dificuldades e onde, posteriormente, percebi que não tinha sido bem-sucedida. Em ocasiões distintas senti dificuldade em adaptar o grau de complexidade das tarefas apresentadas aos alunos em causa, tendo acabado por dinamizar tarefas demasiado fáceis (que depressa desinteressaram os alunos ou não me permitiram atingir o objetivo esperado [ex.: problemas destinados à construção de tabelas]] ou tarefas com aspetos demasiado complexos (como as que envolviam generalizações). Estas últimas, dado o seu elevado grau de sofisticação, não representaram um desafio para a turma, levando a que os alunos se sentissem desmotivados logo no início e nem tentassem resolvê-las. Tais resultados reforçam aquilo que diversos autores já haviam afirmado, realçando o valor da escolha de "boas" tarefas, tal como a importância de adaptar a tarefa e a linguagem apresentada em função da faixa etária e das particularidades e interesses da turma. Outra das dificuldades com a qual me deparei está relacionada com a gestão de aula. Relembrando as dinâmicas adotadas no decorrer das aulas, parece-me neste momento que algumas das opções que tomei se revelaram um "desperdício de tempo". Tome-se como exemplo os casos nos quais toda a turma havia resolvido determinado problema do mesmo modo e, ainda assim, eu solicitava que um aluno se dirigisse ao quadro de modo a apresentar o seu raciocínio. Olhando em retrospetiva, tanto estas ações, quanto o facto de relembrar constantemente os alunos de que a resolução de problemas seria dinamizada a pares, podem ser encaradas como desnecessárias, já que os alunos não necessitavam de tais informações e poderiam ter beneficiado do tempo "perdido" de outro modo. Por outro lado, e analisando as entrevistas que recolhi junto da turma, percebi que diversas foram as situações nas quais cometi erros, chegando inclusive a induzir os alunos erroneamente. Tome-se como exemplo a ocasião na qual, por lapso, cometi um erro ao criar a expressão geradora para o problema *O Aniversário da Maria*, tendo acabado por induzir os alunos em erro na sua própria conclusão. Lamentavelmente, o facto de só tomar consciência de alguns dos meus erros numa análise posterior leva a que desperdice boas oportunidades junto dos alunos, explorando a origem do erro e até mesmo a importância do ato de errar no processo de aprendizagem.

Ainda assim, olhando para a minha trajetória ao longo deste projeto, acredito que tanto os erros quanto as atividades menos bem-sucedidas tenham também representando aprendizagens deveras importantes, na medida em que me permitiram repensar a minha ação, reformulando aspetos menos corretos e adaptando o meu agir pedagógico à turma estudada. Neste âmbito, acredito também que o confronto entre as experiências de sala de aula e os estudos e ideias defendidas pelos autores consultados tenha sido uma prática bastante benéfica, na medida em que me permitiu tirar dúvidas, criar novas dúvidas, repensar a minha prática e realizar novas experiências.

Em suma, considero importante realçar que através do contato direto, ativo e participativo no quotidiano de uma turma, tive a possibilidade de ver evoluir profissionalmente, desenvolvendo competências essenciais à ação educativa no âmbito do *Ser*, do *Saber-Ser* e do *Saber-Fazer* e podendo assim concluir que “ninguém nasce feito, é experimentando-nos no mundo que nós nos fazemos” (Freire, 1993, p. 40).

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e matemática, n.º8, 1.º trimestre*, pp. 7-35.

Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Unversidade Aberta.

Almeida, A. R., & Almeida, L. S. (2011). Processos cognitivos e resolução de problemas em alunos com elevado raciocínio númerico: diferenças entre alunos de maior e menor rendimento escolar. *Quadrante, Vol. XX, N.º2,* pp. 7-16.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico.* Lisboa: Governo de Portugal: Ministério da Educação e Ciência.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico: programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Britto, M. L. (2013). Um estudo sobre conhecimentos de professores de matemática que analisam produções escritas em matemática. *XVII Encontro Nacional de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática* (pp. 1-8). Mato Grosso do Sul: Instituto Federal de Espírito Santo.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação.* Lisboa: Relógio D'Água Editores.

César, M. (2000). Interacções sociais e matemática: ventos de mudança nas práticas de sala de aula. Em C. Monteiro, L. Menezes, F. Tavares, J. P. Ponte, J. Almiro, & J. M. Matos, *Interacções na aula de matemática* (pp. 47-84). Viseu: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. Em B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte, *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Coutinho, C. P. (2014). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: teoria e prática.* Coimbra: Almedina.

Coutinho, C., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M., & Vieira, S. (dezembro de 2009). Investigação-acção: metodologia preferencial nas práticas educativas. *Psicologia, Educação e Cultura, Volume XIII, N.º 2*, pp. 355-380.

Damião, H., Festas, I., Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de matemática para o ensino básico.* Ministério da Educação e Ciência.

Fonseca, L. (Novembro-Dezembro de 2014). Resolução de problemas de matemática: regresso ao passado. *Educação e Matemática, n.º130*, pp. 17-21.

Freire, P. (1993). *Política e educação.* São Paulo: Cortez.

Lopes, A. V., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J. M., Oliveira, M. J., Salgado, M. J., . . . Graça, T. (1999). *Actividades matemáticas na sala de aula.* Lisboa: Texto Editora.

Matos, J. M., & Serrazina, M. d. (1996). *Didáctica da matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da investigação-ação.* Porto: Porto Editora.

Mendes, M. d. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo. (Tese de doutoramento).* Lisboa: Universidade de Lisboa - Instituto de Educação. Obtido em 2 de julho de 2015, de http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/5893/1/ulsd062295_td_Maria_Mendes.pdf

Ministério da Educação. (2004). *Organização curricular e programas, ensino básico - 1.º Ciclo.* Lisboa: Departamento da Educação Básica.

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

O'Connell, S. (2007). *Introduction to problem solving: grades preK-2.* United States of America: Emily Michie Birch.

Pinazza, M. A. (2007). John Dewey: inspirações para uma pedagogia em infância . Em J. Formosinho, T. Kishimoto, & M. Pinazza, *Pedagogia(s) da infância: dialogando com o passado: construindo o futuro* (pp. 65-94). Artmed.

Pinto, M. E., & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. Em O. Magalhães,

& A. Folque, *Práticas de Investigação em Educação.* Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.

Pires, M. V., & Amado, N. (2013). Materiais didáticos e recursos no ensino e aprendizagem da matemática. *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 473-478). Braga: Universidade do Minho. Obtido em 2 de julho de 2015, de http://www.apm.pt/files/_S5-0TI_529d2b38dc5ea.pdf

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. Em G. -A. Matemática, *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: GTI - Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2009). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Souza, H., . . . Oliveira, P. A. (2007). *Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação - Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Obtido de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_npmeb/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf

Ponte, J., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Porfírio, J., Semedo, O., & Albuquerque, T. O. (4.º trimestre de 1993). Uma experiência de resolução de problemas no 7.º ano de escolaridade. *Educação e Matemática, N.º28,* pp. 5-8.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. Em P. Palhares, *Elementos de matemática para professores do ensino básico* (pp. 7-52). Lidel.

Yeo, J. (2008). Secondary school students investigating mathematics. Em M. Groos, R. Brown, & K. Makar, *Proceedings of the 31st annual conference of the mathematics education* (pp. 613-619). Research group of Australasia MERGA.

Anexos

Anexo 1

Problema 1 – A Festa de São Martinho

O Tiago chegou à escola às 7 horas. A festa de São Martinho só começou às 18 horas. Quantas horas esperou o Tiago para que a festa começasse?

Problema 2 – Comprar Castanhas

Para a festa de São Martinho, os professores compraram 10 cartuxos de castanhas, cada um com 15 castanhas. Quantas castanhas compraram os professores?

Anexo 2

Problema 3 – Chamadas Telefónicas

Cinco alunos ganharam um concurso. Quando souberam da notícia telefonaram uns aos outros a felicitarem-se.

Descobre quantas chamadas tiveram de fazer os cinco amigos para se felicitarem entre si…

E se fossem seis amigos, quantas chamadas fariam?

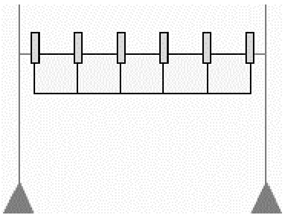
E se fossem sete amigos, quantas chamadas fariam?

Consegues descobrir alguma regra para qualquer número de amigos?

Problema 4 – Os Trabalhos da Catarina

A Catarina vai pôr a secar muitos guardanapos pendurando-os, ordenadamente, como se mostra.

Ajuda a Catarina a descobrir quantas molas são necessárias para pendurar 5, 6, 7, 10 ou 20 guardanapos.



Anexo 3

Problema 5 – Cozinhando um Bolo

Para fazer 1 bolo precisei de 4 ovos. De quantos ovos precisarei para fazer 4 bolos?

Problema 6 – Cromos da Violetta

Cada saqueta com cromos da Violetta custa 2 euros. Quanto custam 5 saquetas com cromos da Violetta?

Anexo 4

Problema 7 – O Aniversário da Maria

Para celebrar o aniversário da Maria, convidámos alguns amigos para um jantar.

As mesas estavam dispostas em fila e coladas umas nas outras.

Se tivermos 10 mesas juntas e todos os lugares ocupados, quantas pessoas estarão sentadas? E se tivermos 12 mesas? E 20 mesas?

Anexo 5

Problema 8 – O Lanche do Alexandre

Guardados no frigorifico o Alexandre tem:

Bolos	Sumos
Bolo de Chocolate	Sumo de Limão
Bolo de Noz	Sumo de Laranja
Bolo de Leite	Sumo de Ananás

Encontra todas as combinações que o Alexandre pode fazer com o seu lanche.

Problema 14 – As Roupas do Alexandre

No seu armário o Alexandre tem:

Camisolas	Calças
Vermelha	Pretas
Azul	Castanhas
Verde	

Encontra todas as combinações que o Alexandre pode fazer com a sua roupa.

Anexo 6

Problema 9 – O Mealheiro do Luís

O Luís gastou 20 cêntimos num postal. Agora tem 53 cêntimos no seu mealheiro.

Quanto dinheiro tinha o Luís antes de comprar o postal?

Problema 10 – As Amoras da Andreia

A Andreia comeu metade das amoras que tinha na sua caixinha. No final, ainda ficou com 6 amoras.

Quantas amoras tinha a Andreia na sua caixinha inicialmente?

Anexo 7

Problema 11 – Os Doces da Mariana

A Mariana comprou três doces diferentes. No total, custaram 75 cêntimos. Descobre quais foram os doces que a Mariana comprou e circunda-os.

40 Cêntimos

25 Cêntimos

10 Cêntimos

20 Cêntimos

15 Cêntimos

Anexo 8

Problema 12 – Os Berlindes da Joana

A Joana encontrou um saquinho com berlindes durante o lanche. Usa as pistas para descobrir quantos berlindes tinha o saquinho que a Joana encontrou.

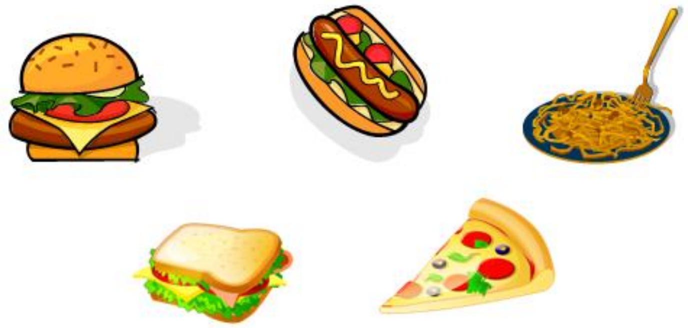
São menos de 10.

São mais de 7.

Não é um número par.

Problema 13 – O que é o almoço?

Usa as pistas para descobrir o que o André comeu ao almoço e circunda a comida certa.



1) Podes pegar nela e comê-la com as mãos.

2) Tem cuidado. Pode estar quente!

3) Algumas pessoas gostam dela com mostarda e *ketchup*.

4) Toma atenção! O seu interior pode rolar da frigideira enquanto está a ser cozinhado.