As demonstrações da Vânia

Joana Porfírio

A Vânia, tal como os seus colegas de turma, inicialmente não sentia qualquer necessidade de demonstrar as conjecturas que tinha testado: verificava-se para uns *poucos*, verificava-se para todos. Mas, na sequência de um trabalho em que a justificação das descobertas e afirmações era valorizada, conseguiu ir tendo uma ideia mais rica do significado e da importância da demonstração em Matemática.

Há três anos desenvolvi, em colaboração com a Teresa Olga Duarte, um projecto de natureza curricular numa turma do 8º ano em que a exploração de investigações matemáticas ocupava um papel central.

Neste artigo, procuro partilhar um conjunto de reflexões que surgiram com o desenrolar desta experiência e que giram à volta da demonstração.

Começo por apresentar algumas das reacções/observações de uma aluna — a Vânia Alexandra — quando tentava validar as conjecturas que tinham sido formuladas e testadas a partir do trabalho desenvolvido pelo seu grupo de trabalho. Com base em três episódios referentes ao modo de pensar desta aluna, procuro argumentar que a demonstração é um meio importante de promover a compreensão da Matemática e que é um aspecto que deve ser trabalhado com todos os alunos.

As tentativas de demonstração da Vânia

Ao longo do ano lectivo, os alunos da turma com que trabalhámos, exploraram 13 tarefas de investigação. Com base nos dados recolhidos na altura, vou relatar três episódios que se passaram com a Vânia. Embora eles sejam apresentados cronologicamente, os motivos que me levaram a seleccioná-los, prenderam-se apenas com o facto de ilustrarem dificuldades e descobertas de vários alunos relativamente à demonstração das conjecturas que formulavam. Assim, estão longe de pretender corresponder a uma descrição da evolução da Vânia e, mais ainda, duma possível reflexão sobre padrões gerais de evolução dos alunos da turma.

Episódio 1: Porque é que um polígono regular de n lados tem n eixos de simetria?

Este é um episódio com três etapas. Numa primeira, a Vânia, tal como os seus colegas de turma, depois de investigar o número de eixos de simetria dos polígonos regulares com 3, 4, 5, 6, 7 e 8 lados concluiu que o número de eixos de simetria era sempre igual ao número de lados e, portanto, um polígono regular com n lados teria n eixos de simetria.
A professora, ao discutir as explorações realizadas pelos alunos, salientou a diferença entre afirmar que uma propriedade é válida para determinados casos em que se ela se verificou experimentalmente e afirmar que ela é válida para todos. Depois, desafiou os alunos a olharem para a forma como traçavam os eixos de simetria e pediu-lhes que pensassem, em casa, numa forma de validar a afirmação que tinham descoberto.

Na sequência deste desafio, ocorreu a segunda etapa deste episódio. A Vânia incluiu no seu dossier o seguinte texto:

> (...) Devia ser n; embora não o conseguisse provar sabia que era verdade (...) cheguei à conclusão que o número de lados é par ou ímpar. Quando é par juntamos lado com lado. Isto é $n/2$, e vértice com vértice, outra vez $n/2$, e a soma é n. Quando é ímpar juntamos vértice com lado e o total é n eixos. Por isso é sempre n e está provado.

A terceira e última etapa ocorreu quando o grupo da Vânia apresentou a sua exploração desta tarefa numa sessão a que assistiram alunos de uma ESE. Nessa altura, depois de desafiarem os participantes a pensarem numa justificação da relação descoberta, a Vânia comentou:

— Nós estávamos habituados a ver uma coisa e já está, era assim. Mas agora começámos a ter mais cuidado. Eu nunca tinha pensado nisto e gostei de conseguir.

Episódio 2: Porque é que os ângulos correspondentes, do mesmo lado da secante, são iguais?

Os alunos tinham construído, com o auxílio do *Sketchpad*, duas rectas paralelas cortadas por uma secante e chegado à conclusão experimental, por exemplo, de que os ângulos alternos internos eram sempre iguais. Mas hesitavam sobre o que deveriam fazer/pensar de modo a responderem ao *porquê* que estava no enunciado da ficha. Durante este impasse, passei pelo grupo e perguntei "Vocês percebem o que têm de tentar explicar?". A resposta da Vânia:

— Sim. Temos de ver porque é que quando se arrasta a recta, estes ângulos ficam sempre iguais.

Depois de pensarem um pouco mais:

— Isto é porque as linhas são paralelas é que dá isso. (Vânia)

— Olha isso já a gente sabia.

— Sim, mas se a gente pegar nesta linha pode pô-la em cima da outra. Fica só uma recta. (Vânia)

— Já sei. Já sei. Por isso é que os ângulos têm de ser iguais. Assim vê-se que são o mesmo ângulo.

— E por isso é que são iguais. (Vânia)

Episódio 3: Do prever onde fica um número até ao "temos que escrever a linha do n".

O grupo da Vânia tinha formulado e testado várias conjecturas a propósito das relações que descobriram entre os seguintes números:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
...	...	...	...

Quando a professora lhes perguntou as conclusões a que tinham chegado, uma colega de grupo da Vânia respondeu:

— Ainda não sabemos. Temos muitas conjecturas. Mas ainda não as provámos.

Quando começaram a tentar demonstrar algumas das conjecturas que tinham formulado e testado, a Vânia, começou por dizer:

— Então, temos que ter uma ideia que generalize, não é?

Depois, construiu uma tabela com bastantes linhas (que ocupava uma folha A_4) mas em que apenas a primeira linha estava preenchida com números.

O grupo começou, então, a tentar prever os números que iriam ficar em várias linhas, mas sem os escrever todos até lá:

— Agora explica lá. (Vânia)

— Se na linha 10 for 36, na linha 20 é 72.

— Mas isso não generaliza. Se a gente souber esta (a primeira coluna) é só somar 1, 2 ou 3. (Vânia)

A Vânia, desde o princípio, não parecia acreditar nas possibilidades deste processo de previsão. No entanto, durante algum tempo, colaborou com os colegas:

— Então aonde fica o 100?

— Vai ficar na primeira coluna.

— Sim. E vai ficar na linha ... espera então é de 4 em 4.

— Na linha 10 temos o 40.

— Não, o 40 está na linha 11. (Vânia)

(...)

— Então e agora onde fica outro? Onde fica o 89?

(...)

— Agora temos de parar. Isto dá para ajudar, mas agora temos mesmo que generalizar. Eu acho que já sei como fica a linha do *n*. (Vânia)

Na sequência de alguma discussão e troca de esclarecimentos com os colegas, a Vânia lidera a demonstração de conjecturas que envolviam operações com linhas e colunas. Assim, por exemplo, demonstraram que a soma da 2ª coluna com a 4ª vai dar múltiplos de 4, da seguinte forma (ver caixa).

Linha do n	$4(n-1)$	$4(n-1)+1$	$4(n-1)+2$	$4(n-1)+3$

$4(n-1)+1+4(n-1)+3=4n-4+1+4n-4+3=8n-4$ que é sempre um múltiplo de 4.

Um comentário dos episódios anteriores

A Vânia, tal como os seus colegas de turma, inicialmente não sentia qualquer necessidade de demonstrar as conjecturas que tinha testado: verificava-se para uns *poucos*, verificava-se para todos. Mas, na sequência de um trabalho em que a justificação das descobertas e afirmações era valorizada, conseguiu ir tendo uma ideia mais rica do significado e da importância da demonstração em Matemática. Embora o foco deste artigo não se situe ao nível da caracterização da experiência curricular desenvolvida com a turma da Vânia, é importante realçar que a demonstração foi objecto de um trabalho explícito com os alunos. Assim, depois de recolherem e organizarem dados, formularem e testarem conjecturas, a Teresa Olga sempre insistiu no *porquê*. Nalguns casos incentivou os alunos a pensarem e foi dando sugestões que os podiam apoiar. Noutros, organizou ela própria a demonstração e procurou ir discutindo as questões e opções que se colocavam a cada passo do processo que seguia. Nos casos, em que, por restrições impostas pelos conhecimentos matemáticos dos alunos, as conjecturas que tinham resistido a sucessivos testes não podiam ser demonstradas por eles, este aspecto sempre foi claramente vincado pela Teresa.

O episódio 1 pode ser interpretado como revelando uma primeira ideia comum antes de pensar numa demonstração. Está-se convencido de que uma coisa é verdade — *devia ser n* — mas, apesar disso, procura-se corresponder ao desafio que constitui organizar uma demonstração. No caso da Vânia, esta atitude pode ser entendida como uma tentativa de corresponder ao que a professora espera e valoriza. No entanto, mesmo que esta tenha constituído a motivação inicial, a verdade é que a Vânia considerou ter tido um certo prazer em pensar na demonstração.

No episódio 2, a Vânia realça um aspecto importante do significado de demonstrar: perceber porque é que determinada relação ou propriedade se verifica. Para além disso, consegue descobrir um processo que efectivamente justifica a relação de igualdade entre os ângulos considerados.

Finalmente, no episódio 3, após uma fase que a Vânia e os seu colegas de grupo pareciam corresponder, inequivocamente, à formulação e teste de conjecturas que não tinham sido provadas, começaram um processo de *previsão* da tabela numérica: tentam saber em que linha e coluna fica um determinado número e constroem uma tabela com espaços em branco (só escrevem os números da primeira linha). A passagem de uma tabela com todos os espaços preenchidos com números para outra tabela em que há espaços que não estão preenchidos é a primeira tentativa que corresponde à procura de "uma ideia que generalize". De facto, seguem um caminho que os ajuda a abstrair dos números e que lhes irá permitir chegar à expressão geral de qualquer linha da tabela, revelando ter uma noção importante associada à demonstração: procurar olhar para o geral e não para casos particulares. Além disso, conseguem demonstrar várias das conjecturas que tinham formulado e testado.

Os episódios anteriores evidenciam dois aspectos. Um primeiro, diz respeito à demonstração como um meio para aprofundar o conhecimento dos alunos. A Vânia não teve apenas acesso ao conhecimento de determinadas relações matemáticas. Conseguiu desenvolver um conjunto de raciocínios que enriqueceram a compreensão dessas relações. Um segundo, diz respeito à compreensão do que é a Matemática. Embora com as limitações impostas pelo seu nível de conhecimentos, a Vânia teve uma experiência em que o raciocínio e a demonstração eram valorizados. Progressivamente, começou a entender o significado e a importância de justificar o que fazia e a perceber como isso era importante para ajudar a perceber o *porquê* de uma dada relação. Mostrou também perceber o *estatuto* de uma conjectura e de só se poder afirmar a sua validade depois de a demonstrar.

Uma nota final sobre a demonstração

Ao longo deste artigo usei sempre o termo demonstração. Em jeito de brincadeira, posso dizer que o fiz para *fazer a vontade* ao Eduardo Veloso. É que quando falei um pouquinho com ele sobre o tema deste artigo, ele disse-me mais ou menos textualmente:

— Se gostavas de escrever sobre esse tema parece-me muito bem. Desde que não chames prova à demonstração.

O principal argumento dele? Parece que começa a notar-se uma certa tendência de associar prova a uma demonstração de segunda categoria, o *tipo de coisa* que estará ao alcance dos alunos no Ensino Básico.

A verdade é que, depois de ter lido alguns artigos em que se distinguem os termos argumentação, prova e demonstração, fiquei com a convicção de que, quando pensamos nos alunos e no que podemos e devemos trabalhar com eles, há aspectos mais relevantes do que saber se é lícito considerar determinado tipo de justificação como constituindo uma demonstração, ou se pelo contrário será melhor dizer que se trata de um argumento ou de uma prova. Do meu ponto de vista, é mais importante conseguir, em todos os níveis de escolaridade, promover o hábito de justificar as afirmações que se fazem, desenvolver e criticar raciocínios e reconhecer que o raciocínio e a demonstração são fundamentais em Matemática.

Para que a Vânia, ou para que um outro aluno do Ensino Básico, seja capaz de perceber a necessidade de demonstrar e conseguir organizar uma demonstração matemática, entendida como "um modo formal de expressar determinados tipos de raciocínio e de justificação" (NCTM, 2000, p. 56), terá que ser preparado um caminho que passa, por exemplo, por reconhecer a importância de justificar uma afirmação e de usar raciocínios e justificações adequados em matemática.

Os dois primeiros episódios não relatam demonstrações matemáticas feitas pela Vânia. No entanto, com as limitações impostas pelos seus conhecimentos matemáticos ela demonstrou várias relações e entendeu o significado de o fazer. Sem este tipo de experiência, dificilmente teria conseguido tomar a iniciativa de usar o método mais formal que é descrito no episódio 3. Primeiro teve de perceber o *estatuto* de uma conjectura, que demonstrar também significa perceber o *porquê*, que para demonstrar é importante olhar para *o geral*. Mas também foi importante sentir-se desafiada e gostar de pensar nos *porquês*.

Em todos os episódios anteriores a Vânia descobriu um argumento convincente, ou seja, demonstrou as relações a que tinha chegado experimentalmente. Em certa medida, o que ela fez foi aquilo que os matemáticos fizeram e continuam a fazer: recorrer aos conhecimentos e ferramentas de que dispõem para justificar as suas descobertas. Nuns casos, demonstrações que foram consideradas como tal em determinada altura, são posteriormente reformuladas à luz do rigor matemático que se atingiu entretanto. Noutros casos, mais recentemente, recorre-se ao computador para realizar grande parte da demonstração.

Claro que é importante que a Vânia perceba e consiga usar um modo formal e característico da Matemática de demonstrar. Mas, ao nível do que era possível no 8º ano, ela conseguiu demonstrar.

Referência Bibliográfica

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Joana Porfírio
ESE de Setúbal