# Serdica
## Mathematical Journal
# Сердика
## Математическо списание

Serdica Math. J. **35** (2009), 217–250

**Serdica**
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

# INDICE DE POINT FIXE POUR LES MORPHISMES DE CHAÎNES

Robert Cauty

*Communicated by J. P. Revalski*

Abstract. The aim of this paper is to define a fixed point index for compact maps in the class of algebraic ANRs. This class, which we introduced in [2], contains all open subsets of convex subsets of metrizable topological vector spaces. In this class, it is convenient to study the fixed points of compact maps with the help of the chain morphisms that they induce on the singular chains. For this reason, we first define a fixed point index for a certain class of chain morphisms, and then define the fixed point index of compact maps as the fixed point index of the induced chain morphism. This fixed point index has all the usual properties of an index, including the mod $p$-theorem. The results of this paper are thus, in the metrizable case, a vast generalization of the Schauder conjecture.

## 1. Introduction.

L'indice de point fixe des fonctions compactes a de nombreuses applications, notamment en analyse fonctionnelle non linéaire. Malheureusement, dans son état actuel, cette théorie ne s'applique pas à tous les e.v.t.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54H25, 55M20.
*Key words:* fixed point index.

métrisables car son développement nécessite d'approximer les applications compactes par des fonctions dont l'image est contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie, ce qui n'est pas toujours possible, comme le montre l'exemple construit dans [1]. Nous avons introduit dans [2] la classe des rétractes absolus de voisinage algébriques, qui contient tous les rétractes de voisinage des sous-ensembles convexes métrisables des e.v.t. Nous nous proposons de développer ici une théorie de l'indice de point fixe pour les applications compactes des rétractes absolus de voisinage algébriques. Comme la définition des rétractes absolus de voisinage algébriques, notre approche de l'indice de point fixe repose sur les morphismes de chaînes, et nous avons besoin de quelques rappels et notations pour la décrire.

*Dans tout ce qui suit, $R$ désigne un anneau principal.* Pour tout espace topologique $X$, nous notons $S(X,R)$ le complexe des chaînes singulières de $X$ à coefficients $R$ et $H(X,R)$ son groupe gradué d'homologie. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de $X$, nous notons $S(X,\mathcal{U},R)$ le sous-complexe de $S(X,R)$ engendré par les simplexes singuliers $\sigma$ dont l'image est contenue dans un élément de $\mathcal{U}$. Il est connu que l'inclusion de $S(X,\mathcal{U},R)$ dans $S(X,R)$ est une équivalence homotopique, donc induit un isomorphisme sur l'homologie ; nous identifions l'homologie de $S(X,\mathcal{U},R)$ à $H(X,R)$ par cet isomorphisme. Nous identifions chaque simplexe singulier $\sigma$ de $X$ à l'élément $1.\sigma$ de $S(X,R)$. Le support d'une chaîne $c \in S(X,R)$ est noté $\|c\|$ ; en particulier, l'image du simplexe singulier $\sigma$ est notée $\|\sigma\|$. Si $f : X \to Y$ est une fonction continue, nous notons $f_\# : S(X,R) \to S(Y,R)$ et $f_* : H(X,R) \to H(Y,R)$ les homomorphismes qu'elle induit.

Pour tout complexe simplicial $K$, nous notons $C(K,R)$ le complexe des chaînes orientées de $K$ à coefficients $R$ (voir [6]), $C_q(K,R)$ le groupe des $q$-chaînes de ce complexe et $H(K,R)$ son groupe gradué d'homologie. Pour tout $q \geq 0$, nous identifions $C_q(K,R)$ au $R$-module libre engendré par les $q$-simplexes de $K$ en fixant un générateur de $C_{\dim\sigma}(\sigma,R)$ pour chaque simplexe $\sigma$ de $K$. Le symbole $\sigma$ désignera à la fois un simplexe de $K$ et l'élément correspondant de $C(K,R)$.

Tous les complexes de chaînes utilisés dans cet article sont naturellement augmentés, et *tous les morphismes de chaînes entre deux tels complexes seront supposés préserver l'augmentation.* Un tel complexe sera dit acyclique si son homologie réduite est triviale.

Soient $K$ un complexe simplicial, $X$ un espace topologique et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $X$. Une réalisation algébrique partielle de $K$ relativement à $\mathcal{U}$ est la donnée d'un sous-complexe $L$ de $K$ contenant tous les sommets de $K$ et d'un morphisme de chaînes $\mu : C(L,R) \to S(X,R)$ tel que, pour tout simplexe $\sigma$ de $K$, il existe un élément de $\mathcal{U}$ contenant $\|\mu(\tau)\|$ pour toute face $\tau$ de $\sigma$ appartenant à $L$. Si $L = K$, la réalisation est dite complète.

Un espace métrisable $X$ est appelé un *$R$-rétracte absolu de voisinage algébrique*, ou *$R$-RAV algébrique*, si, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de $X$, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de $X$ qui est plus fin que $\mathcal{U}$ et tel que, pour tout complexe simplicial $K$, toute réalisation algébrique partielle de $K$ relativement à $\mathcal{V}$ se prolonge en une réalisation complète relativement à $\mathcal{U}$.

Soient $X$ un espace topologique séparé, $A$ un sous-espace de $X$, $\mathcal{U}$ un recouvrement de $A$ par des ouverts de $A$ et $\varphi : S(A,\mathcal{U},R) \to S(X,R)$ un morphisme de chaînes. Un point $x$ de $A$ est appelé un *point fixe* de $\varphi$ si, pour tout voisinage $V$ de $x$ dans $X$, il existe une chaîne $c \in S(V,R) \cap S(A,\mathcal{U},R)$ telle que $\|\varphi(c)\| \cap V \neq \emptyset$. L'ensemble des points fixes de $\varphi$ est noté $\operatorname{Fix}\varphi$. Remarquons que si $\mathcal{U}'$ est un recouvrement ouvert de $A$ plus fin que $\mathcal{U}$ et si $\varphi'$ est la restriction de $\varphi$ à $S(A,\mathcal{U}',R)$, alors $\operatorname{Fix}\varphi' = \operatorname{Fix}\varphi$.

Si $f : A \to X$ est une fonction continue, alors un élément $x$ de $A$ est un point fixe de $f$ si, et seulement si, c'est un point fixe du morphisme induit $f_\# : S(A,R) \to S(X,R)$. L'étude des points fixes des fonctions peut donc aussi se faire au niveau des morphismes de chaînes. Guidés par cette remarque, nous commencerons par introduire, pour tout $R$-RAV algébrique $X$, tout ouvert $U$ de $X$ et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de $U$, une classe de morphismes admissibles $\varphi : S(U,\mathcal{U},R) \to S(X,R)$ et nous définirons l'indice de point fixe $\operatorname{ind}(\varphi,U)$ d'un tel morphisme. Cette définition est l'analogue algébrique d'une des approches de l'indice de point fixe des fonctions compactes dans les rétractes absolus de voisinage. Il est possible de construire cet indice en utilisant le fait que, pour tout rétracte absolu de voisinage $X$, on peut trouver un complexe simplicial $K$ et des fonctions continues $\psi : X \to |K|$ et $\zeta : |K| \to X$ telles que $\zeta\circ\psi$ soit arbitrairement proche de l'identité. Dans un $R$-RAV algébrique, il y a un analogue de cette propriété pour les morphismes de chaînes (théorème A ci-dessous) : il est possible de trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{W}$ de $X$, un complexe simplicial $K$ et des morphismes de chaînes $\psi : S(X,\mathcal{W},R) \to C(K',R)$ et $\zeta : C(K',R) \to S(X,R)$ tels que $\zeta \circ \psi$ soit « arbitrairement proche »de l'inclusion de $S(X,\mathcal{W},R)$ dans $S(X,R)$. Cela nous permet de construire un indice $\operatorname{ind}(\varphi,U)$ ayant des propriétés entièrement analogues à celles de l'indice de point fixe classique.

L'indice de point fixe d'une fonction compacte admissible $f : U \to X$ est alors défini comme l'indice $\operatorname{ind}(f_\#,U)$ du morphisme de chaînes qu'elle induit. Cet indice a toutes les propriétés habituelles de l'indice, bien que leurs démonstrations soient nettement différentes.

La théorie développée ici permet de généraliser toutes les applications de l'indice de point fixe aux e.v.t. arbitraires, mais aussi à certaines classes de groupes topologiques localement contractiles. Nous donnerons un exemple d'une telle généralisation dans la dernière section.

L'idée de travailler au niveau des complexes de chaînes pour définir un indice de point fixe a été utilisée par d'autres aueturs (voir par exemple [5]), mais leur approche est complètement différente de la nôtre, car ils utilisent l'homologie de Čech au lieu de l'homologie singulière.

**2. Préliminaires.** Nous notons $I$ l'intervalle $[0,1]$. Si $F : X \times I \to Y$ est une fonction, nous définissons $F_t : X \to Y$ par $F_t(x) = F(x,t)$. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert d'un espace $X$ et $A$ un sous-ensemble de $X$, nous posons $\mathrm{St}(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} \mid U \cap A \neq \emptyset\}$, et nous définissons le recouvrement ouvert $\mathrm{St}(\mathcal{U})$ par $\mathrm{St}(\mathcal{U}) = \{\mathrm{St}(U,\mathcal{U}) \mid U \in \mathcal{U}\}$. Pour tout sous-espace $Y$ de $X$, nous notons $\mathcal{U}|Y$ le recouvrement de $Y$ formé des ensembles $U \cap Y$ avec $U \in \mathcal{U}$. Si $X_1$, $X_2$ sont des espaces topologiques et $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ des recouvrements ouverts de $X_1$ et $X_2$ respectivement, nous notons $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ le recouvrement de $X_1 \times X_2$ formé des ensembles $U_1 \times U_2$ où $U_1$ parcourt $\mathcal{U}_1$ et $U_2$ parcourt $\mathcal{U}_2$.

Soit $K$ un complexe simplicial. Si les sommets $v_0, \dots, v_k$ de $K$ engendrent un simplexe, nous notons $[v_0, \dots, v_k]$ ce simplexe. Si $\tau$, $\sigma$ sont deux simplexes de $K$, la notation $\tau \leq \sigma$ signifie que $\tau$ est une face de $\sigma$. Nous notons $K'$ la subdivision barycentique de $K$. Pour tout simplexe $\sigma$ de $K$, nous notons $b_\sigma$ son barycentre et $\mathrm{Tr}(\sigma, K)$, ou simplement $\mathrm{Tr}(\sigma)$, le sous-complexe de $K'$ formé des simplexes $[b_{\sigma_0}, \dots, b_{\sigma_k}]$ tels que $\sigma \leq \sigma_0 \leq \cdots \leq \sigma_k$. Si $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont deux simplexes de $K$, alors $\mathrm{Tr}\,\sigma_1 \cap \mathrm{Tr}\,\sigma_2 \neq \emptyset$ si, et seulement si, $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est un simplexe de $K$ et, dans ce cas, $\mathrm{Tr}\,\sigma_1 \cap \mathrm{Tr}\,\sigma_2 = \mathrm{Tr}\,\sigma_1 \cup \sigma_2$. Pour toute chaîne $c \in C(K,R)$, le support de $c$ est le plus petit sous-complexe $L$ de $K$ tel que $C(L,R)$ contienne $c$.

Un sous-espace $A$ d'un espace $Y$ est appelé un rétracte de voisinage algébrique de $Y$ s'il existe un voisinage $U$ de $A$ dans $Y$, un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de $U$ et un morphisme de chaînes $\mu : S(U,\mathcal{U},R) \to S(A,R)$ vérifiant

(i) $\mu(c) = c$ pour $c \in S(A,R) \cap S(U,\mathcal{U},R)$,

(ii) pour tout $x \in A$ et tout voisinage $V$ de $x$ dans $A$, il existe un voisinage $W$ de $x$ dans $Y$ tel que $\mu\big(S(W,R) \cap S(U,\mathcal{U},R)\big) \subset S(V,R)$.

Un tel morphisme $\mu$ sera appelé une rétraction algébrique locale [1]. Il est prouvé dans [2] qu'un espace métrisable $X$ est un $R$-RAV algébrique si, et

[1]Cette notion dépend de l'anneau $R$ ; quand nous travaillerons avec un $R$-RAV algébrique, nous utiliserons le même anneau dans les rétractions algébriques locales

seulement si, c'est un rétracte de voisinage algébrique de tout espace métrisable le contenant comme fermé, et qu'alors tout ouvert de $X$ est aussi un rétracte de voisinage algébrique de $Y$.

Le résultat suivant joue un rôle fondamental dans cet article.

**Théorème A.** *Soient $X$ un $R$-RAV algébrique et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $X$. Il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de $X$ plus fin que $\mathcal{U}$, un complexe simplicial $K$, des morphismes de chaînes $\psi : S(X,\mathcal{V},R) \to C(K',R)$, $\zeta : C(K',R) \to S(X,R)$ et une homotopie $h : S(X,\mathcal{V},R) \to S(X,R)$ entre l'inclusion et $\zeta \circ \psi$ vérifiant*

(a) *Pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe un simplexe $s$ de $K$ tel que $\psi(S(V,R))$ soit contenu dans $C(\mathrm{Tr}\, s,R)$ et il y a un élément de $\mathcal{U}$ contenant $V$ et $\|\zeta(t)\|$ pour tout $t \in \mathrm{Tr}\, s$.*

(b) *$\zeta$ est une réalisation algébrique complète de $K'$ relativement à $\mathcal{U}$.*

(c) *Pour tout simplexe singulier $\sigma$ appartenant à $S(X,\mathcal{V},R)$, il existe $U \in \mathcal{U}$ contenant $\|\tau\| \cup \|\zeta \circ \psi(\tau)\| \cup \|h(\tau)\|$ pour toute face $\tau$ de $\sigma$.*

*En outre*

(d) *Si $C$ est un compact fixé de $X$, ces objets peuvent être choisis de façon qu'il existe un voisinage $O$ de $C$ dans $X$ et un sous-complexe fini $L$ de $K'$ tels que $\psi\big(S(X,\mathcal{V},R) \cap S(O,R)\big) \subset C(L,R)$.*

Seule la deuxième partie de (a) nécessite quelques explications, le reste étant contenu dans la démonstration du théorème 2 de [2] et la remarque qui le suit. Nous reprenons les notations utilisées dans la démonstration de ce théorème 2 ; en particulier, $K$ est le nerf de $\mathcal{U}_3$ et le recouvrement $\mathcal{V}$ est indexé par les simplexes de $K$. Il est établi dans la démonstration de ce théorème 2 que, pour tout simplexe $s$ de $K$, $\psi(S(V_s,R))$ est contenu dans $C(\mathrm{Tr}\, s,R)$ et que $\zeta(C(\mathrm{Tr}\, s,R))$ est contenu dans $S(\mathrm{St}(V_s,\mathcal{U}_2),R)$. Comme $St(V_s,\mathcal{U}_2)$ est contenu dans un élément de $\mathcal{U}$, (a) en résulte.

Si $\{e_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ est une base d'un $R$-module $C$, nous notons $\langle e_\alpha, c\rangle$ le coefficient d'un élément $c$ de $C$ sur le générateur $e_\alpha$. En particulier, si $\tau$ est un simplexe d'un complexe simplicial $K$, nous notons $\langle \tau, c\rangle$ le coefficient de la chaîne $c \in C(K,R)$ sur le générateur correspondant à $\tau$, et si $\sigma$ est un simplexe singulier de $X$, nous notons $\langle \sigma, c\rangle$ le coefficient d'une chaîne singulière $c \in S(X,R)$ sur le simplexe $\sigma$.

Une fonction continue $f : Y \to X$ est dite compacte si $f(Y)$ est contenu dans un compact de $X$. Un morphisme de chaînes $\varphi : S(Y,\mathcal{U},R) \to S(X,R)$, où $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de $Y$, est dit compact s'il existe un compact $C$ de $X$ tel que $S(C,R)$ contienne l'image de $\varphi$ ; la compacité d'une homotopie

$h : S(Y,\mathcal{U},R) \to S(X,R)$ se définit de façon analogue. Si $Y$ est un sous-espace de $X$, un point fixe d'une homotopie $h : S(Y,\mathcal{U},R) \to S(X,R)$ est un point $x \in Y$ tel que, pour tout voisinage $V$ de $x$ dans $X$, il existe une chaîne $c \in S(V,R) \cap S(Y,\mathcal{U},R)$ vérifiant $\|h(c)\| \cap V \neq \emptyset$.

Un module (gradué ou non) est de type fini s'il est engendré par un nombre fini d'éléments. Un morphisme $\varphi : C \to C'$ entre $R$-modules (gradués ou non) est de type fini si son image est de type fini. Si $X$ est un $R$-RAV algébrique et $\varphi : S(Y,\mathcal{U},R) \to S(X,R)$ est un morphisme de chaînes compact, la proposition 3 de [2] montre que l'homomorphisme $\varphi_*$ induit par $\varphi$ sur l'homologie est de type fini. Si $\varphi$ est un endomorphisme de type fini d'un $R$-module $C$, il est possible de définir sa trace. Dans le cas où $R$ est un corps, cela est expliqué au §15 de [4]. Si $R$ est un anneau principal de corps des fractions $Q$, la trace de $\varphi$ est définie comme la trace de l'endomorphisme $\varphi \otimes id$ du $Q$-espace vectoriel $Q \otimes_R C$. Si $C$ est libre de base $\{e_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$, alors $\mathrm{Trace}\,\varphi = \sum_\alpha \langle e_\alpha, \varphi(e_\alpha)\rangle$. Soient $C$, $C'$ deux $R$-modules et $\mu : C \to C'$, $\nu : C' \to C$ des homomorphismes. Si l'un des homomorphismes $\mu$ et $\nu$ est de type fini, alors $\mu \circ \nu$ et $\nu \circ \mu$ sont de type fini et $\mathrm{Trace}\,\mu \circ \nu = \mathrm{Trace}\,\nu \circ \mu$. Si $\varphi$ est un endomorphisme de degré zéro et de type fini du module gradué $C = \{C_n\}$, alors $\Lambda(\varphi) = \sum_n (-1)^n \,\mathrm{Trace}\,\varphi_n$ est le nombre de Lefschetz de $\varphi$. Comme $Q$ est un $R$-module plat, le produit tensoriel par $Q$ commute avec l'homologie. Cela entraîne que si $C$ est un complexe de chaînes, $\varphi$ un morphisme de chaînes de type fini de $C$ dans $C$ et $\varphi_*$ le morphisme qu'il induit sur l'homologie, la relation habituelle $\Lambda(\varphi) = \Lambda(\varphi_*)$ reste vraie. Le résultat élémentaire suivant nous sera très utile.

**Lemme 1.** *Soit $C = \{C_n\}$ un complexe de chaînes de $R$-modules libres et, pour tout $n$, soit $\{e_\alpha \,|\, \alpha \in A_n\}$ une base de $C_n$. Soient $f$, $g$ et $h$ des endomorphismes de type fini du module gradué $C$, $f$ et $g$ étant de degré zéro et $h$ de degré un. Supposons que, pour tout $n$ et tout $\alpha \in A_n$, on ait*

$$\langle e_\alpha, f_n(e_\alpha) - g_n(e_\alpha)\rangle = \langle e_\alpha, \partial_{n+1} h_n(e_\alpha) + h_{n-1}\partial_n(e_\alpha)\rangle.$$

*Alors $\Lambda(f) = \Lambda(g)$.*

Démonstration. La condition de l'énoncé garantit que, pour tout $n$,

$$\mathrm{Trace}(f_n - g_n) = \mathrm{Trace}(\partial_{n+1} h_n + h_{n-1}\partial_n),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Lambda(f) - \Lambda(g) = \Lambda(f-g) &= \sum_n (-1)^n \operatorname{Trace}(f_n - g_n) \\
&= \sum_n (-1)^n \operatorname{Trace}(\partial_{n+1} h_n + h_{n-1}\partial_n) \\
&= \sum_n (-1)^n \operatorname{Trace}(\partial_{n+1} h_n) + \sum_n (-1)^n \operatorname{Trace}(h_{n-1}\partial_n) \\
&= \sum_n (-1)^n \operatorname{Trace}(\partial_{n+1} h_n) + \sum_n (-1)^n \operatorname{Trace}(\partial_n h_{n-1}) = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Nous ferons grand usage des opérateurs de subdivision. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert d'un espace $X$, il existe (voir [6], §4.4) un morphisme de chaînes $Sd : S(X,R) \to S(X,\mathcal{U},R)$ tel que $Sd(c) = c$ pour $c \in S(X,\mathcal{U},R)$ et que $\|Sd(c)\| \subset \|c\|$ pour toute chaîne $c$. En outre, il existe une homotopie $h : S(X,R) \to S(X,R)$ entre l'identité et $Sd$ telle que $\|h(c)\| \subset \|c\|$ quelle que soit $c$. Un tel morphisme $Sd$ est appelé un opérateur de subdivision.

Pour simplifier les notations, lorsque une fonction $f : X \to Y$ envoie $A$ dans $B$, nous noterons encore $f$ la fonction de $A$ dans $B$ qu'elle induit chaque fois que cela n'entraîne aucune confusion.

**3. L'indice pour les morphismes de chaînes.** Soit $X$ un $R$-RAV algébrique. Un morphisme de chaînes $\varphi : S(U,\mathcal{U},R) \to S(X,R)$, où $U$ est un ouvert de $X$ et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $U$, sera dit admissible s'il est compact et si $\operatorname{Fix}\varphi$ est un sous-ensemble compact de $U$. De même, une homotopie $h : S(U,\mathcal{U},R) \to S(X,R)$ sera dite admissible si elle est compacte et si $\operatorname{Fix} h$ est un sous-ensemble compact de $U$.

Soit $\varphi : S(U,\mathcal{U},R) \to S(X,R)$ un morphisme admissible. Prenons des voisinages ouverts $A$ et $B$ de $X \setminus U$ et $\operatorname{Fix}\varphi$ respectivement tels que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, puis un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de $X$ vérifiant

($\alpha$) $\operatorname{St}(\overline{A},\mathcal{V}) \cap \operatorname{St}(\overline{B},\mathcal{V}) = \emptyset$,

($\beta$) tout élément de $\mathcal{V}$ rencontrant $X \setminus A$ est contenu dans un élément de $\mathcal{U}$,

($\gamma$) si $V$ est un élément de $\mathcal{V}$ tel que $V \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$, alors $\|\varphi(c)\| \cap \operatorname{St}(V, \operatorname{St}(\mathcal{V})) = \emptyset$ pour toute chaîne $c \in S(V,R)$.

La possibilité d'obtenir ($\gamma$) résulte du fait que tout point du fermé $X \setminus (A \cup B)$ appartient à $U \setminus \operatorname{Fix}\varphi$, donc a un voisinage $O$ qui est contenu dans un élément de $\mathcal{U}$ et tel que $\|\varphi(c)\| \cap O = \emptyset$ pour toute $c \in S(O,R)$.

Soit $C$ un compact de $X$ tel que $S(C,R)$ contienne l'image de $\varphi$. Prenons un recouvrement ouvert $\mathcal{W}$ de $X$, un complexe simplicial $K$, des morphismes de chaînes $\psi : S(X,\mathcal{W},R) \to C(K',R)$, $\zeta : C(K',R) \to S(X,R)$ et une homotopie $h : S(X,\mathcal{W},R) \to S(X,R)$ entre l'inclusion et $\zeta\circ\psi$ vérifiant les conditions (a)-(d) du théorème A relativement à $\mathcal{V}$ et $C$. Définissons un endomorphisme de module gradué $\vartheta_A : S(X,R) \to S(X,R)$ [2] en posant, pour tout simplexe singulier $\sigma$ de $X$,

$$\vartheta_A(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\sigma\| \cap A \neq \emptyset \\ \sigma & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'image de $\vartheta_A$ est contenue dans $S(U,R)$, donc si $Sd_1 : S(U,R) \to S(U,\mathcal{U},R)$ et $Sd_2 : S(X,R) \to S(X,\mathcal{W},R)$ sont des opérateurs de subdivision, alors

$$\xi = \psi \circ Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta$$

est un endomorphisme du module gradué $C(K',R)$. Comme $\operatorname{im}\varphi \subset S(C,R)$, il y a, d'après le choix de $\psi$, un sous-complexe fini $L$ de $K'$ tel que $\operatorname{im}\xi \subset C(L,R)$. Le nombre de Lefschetz $\Lambda(\xi)$ est donc défini. Posons $\operatorname{ind}(\varphi,U) = \Lambda(\xi)$.

**Lemme 2.** $(i)$ $\operatorname{ind}(\varphi,U)$ *ne dépend pas du choix de* $A$, $B$, $C$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, $K$, $\psi$, $\zeta$, $Sd_1$ *et* $Sd_2$.

$(ii)$ *Si* $\mathcal{U}'$ *est un recouvrement ouvert de* $U$ *plus fin que* $\mathcal{U}$ *et si* $\varphi'$ *est la restriction de* $\varphi$ *à* $S(U,\mathcal{U}',R)$, *alors* $\operatorname{ind}(\varphi',U) = \operatorname{ind}(\varphi,U)$.

Démonstration. I) Soient $O$ un voisinage de $C$ et $L$ un sous-complexe fini de $K'$ tels que $C(L,R)$ contienne $\psi\big(S(X,\mathcal{W},R)\cap S(O,R)\big)$. Soit $\mathcal{V}_0$ un recouvrement ouvert de $X$ plus fin que $\mathcal{W}$, donc aussi que $\mathcal{V}$, et tel que $\operatorname{St}(C,\mathcal{V}_0) \subset O$. Prenons des objets $\mathcal{W}_0$, $K_0$, $\psi_0 : S(X,\mathcal{W}_0,R) \to C(K_0',R)$, $\zeta_0 : C(K_0',R) \to S(X,R)$ et $h_0 : S(X,\mathcal{W}_0,R) \to S(X,R)$ vérifiant les conditions du théorème A relativement à $\mathcal{V}_0$ et $C$, et soit $Sd_2^0 : S(X,R) \to S(X,\mathcal{W}_0,R)$ un opérateur de subdivision. Montrons d'abord que si

$$\xi_0 = \psi_0 \circ Sd_2^0 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta_0,$$

alors $\Lambda(\xi) = \Lambda(\xi_0)$. Pour cela, définissons des morphismes de modules gradués $\nu : C(K',R) \to C(K_0',R)$ et $\mu : C(K_0',R) \to C(K,R)$ par

$$\nu = \psi_0 \circ Sd_2^0 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta$$
$$\mu = \psi \circ \zeta_0,$$

[2] La définition de $\vartheta_A$ s'applique à tout ouvert $A$ de $X$, et nous utiliserons systématiquement cette notation $\vartheta_A$ dans la suite.

la condition (b) du théorème A et le fait que $\mathcal{V}_0$ est plus fin que $\mathcal{W}$ garantissant que $\mu$ est bien défini.

D'après (d) du théorème A, il y a un sous-complexe fini $L_0$ de $K_0'$ tel que $C(L_0, R)$ contienne l'image de $\psi_0 \circ Sd_2^0 \circ \varphi$. Il en résulte que $\nu \circ \mu$ et $\mu \circ \nu$ sont de type fini, donc $\Lambda(\nu \circ \mu)$ et $\Lambda(\mu \circ \nu)$ sont définis et égaux. Il nous suffit donc de montrer que $\Lambda(\nu \circ \mu) = \Lambda(\xi_0)$ et $\Lambda(\mu \circ \nu) = \Lambda(\xi)$.

Définissons un morphisme $k_0$ de degré un du module gradué $C(K_0', R)$ dans lui-même par

$$k_0 = \psi_0 \circ Sd_2^0 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A \circ h \circ \zeta_0.$$

Ce morphisme est de type fini donc, pour prouver que $\Lambda(\nu \circ \mu) = \Lambda(\xi_0)$, il suffit, d'après le lemme 1, de montrer que, pour tout simplexe $\tau$ de $K_0'$,

$$\langle \tau, \nu \circ \mu(\tau) - \xi_0(\tau) \rangle = \langle \tau, \partial k_0(\tau) + k_0 \partial(\tau) \rangle. \tag{1}$$

Pour tout $W_0 \in \mathcal{W}_0$, la condition (a) du théorème A nous fournit un simplexe $s_{W_0}$ de $K_0$ tel que $C(\mathrm{Tr}(s_{W_0}, K_0), R)$ contienne $\psi(S(W_0, R))$ et un élément $V_{W_0}^0$ de $\mathcal{V}_0$ contenant $W_0$ et $\|\zeta_0(t)\|$ pour tout $t \in \mathrm{Tr}(s_{W_0}, K_0)$. Alors $M_0 = \bigcup\{\mathrm{Tr}(s_{W_0}, K_0) \mid W_0 \in \mathcal{W}_0\}$ est un sous-complexe de $K_0'$ tel que $C(M_0, R)$ contienne $\mathrm{im}\, \psi_0$, donc si $\tau \in K_0'$ n'appartient pas à $M_0$, les deux membres de (1) sont nuls.

Si $\tau$ appartient à $\mathrm{Tr}(s_{W_0}, K_0)$, alors $\zeta_0(\tau)$ appartient à $S(V_{W_0}^0, R)$ et, d'après (c) du théorème A, les chaînes $h(\zeta_0(\tau))$, $h(\zeta_0(\partial(\tau)))$ et $\zeta \circ \psi(\zeta_0(\tau))$ ont leurs supports contenus dans $\mathrm{St}(V_{W_0}^0, \mathcal{V})$. Si $V_{W_0}^0 \cap B \neq \emptyset$, il résulte de $(\alpha)$ et du fait que $V_{W_0}^0$ est contenu dans un élément de $\mathcal{V}$ que $\mathrm{St}(V_{W_0}, \mathcal{V}) \cap A = \emptyset$, donc $\vartheta_A$ laisse invariantes les chaînes $\zeta_0(\tau)$, $h(\zeta_0(\tau))$, $h(\zeta_0(\partial\tau))$ et $\zeta \circ \psi(\zeta_0(\tau))$. Comme $h$ est une homotopie entre l'identité et $\zeta \circ \psi$, nous avons

$$\begin{aligned}
\nu \circ \mu(\tau) - \xi_0(\tau) &= \psi_0 \circ Sd_2^0 \circ \varphi \circ Sd_1[\zeta \circ \psi(\zeta_0(\tau)) - \zeta_0(\tau)] \\
&= \psi_0 \circ Sd_2^0 \circ \varphi \circ Sd_1[\partial h(\zeta_0(\tau)) + h\partial(\zeta_0(\tau))] \\
&= \partial k_0(\tau) + k_0 \partial(\tau).
\end{aligned}$$

Pour finir de vérifier (1), montrons que si $\tau$ appartient à $\mathrm{Tr}(s_{W_0}, K_0)$ et si $V_{W_0}^0 \cap B = \emptyset$, alors les deux membres de (1) sont nuls. Pour cela, remarquons que, d'après (c) du théorème A, les quatre chaînes $\zeta_0(\tau)$, $\zeta \circ \psi(\zeta_0(\tau))$, $h(\zeta_0(\tau))$ et $h(\zeta_0(\partial\tau))$ sont des combinaisons linéaires de simplexes singuliers dont les supports sont contenus dans des éléments de $\mathcal{V}$ rencontrant $\|\zeta_0(\tau)\| \subset V_{W_0}^0$. Il nous suffit donc de montrer que, si $\sigma$ est un simplexe singulier dont le support est contenu dans un élément $V_\sigma$ de $\mathcal{V}$ tel que $V_\sigma \cap V^0_{W_0} \neq \emptyset$, alors le support de $\psi_0 \circ Sd^0_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A(\sigma)$ ne contient pas $\tau$. Cela est évident si $\vartheta_A(\sigma) = 0$.

Si $\vartheta_A(\sigma) \neq 0$, alors $\|\sigma\| \cap A = \emptyset$ et, d'après $(\beta)$, $V_\sigma$ est contenu dans un élément de $\mathcal{U}$, donc nous avons $Sd_1 \circ \vartheta_A(\sigma) = \sigma$. En outre, $V_\sigma \setminus (A \cap B) \neq \emptyset$ ; cela est évident si $V_\sigma \cap V^0_{W_0}$ n'est pas contenu dans $A$, et dans le cas contraire $V_\sigma$ est contenu dans $\mathrm{St}(A, \mathcal{V})$, donc disjoint de $B$, et $\emptyset \neq \|\sigma\| \subset V_\sigma \setminus (A \cup B)$. La chaîne $Sd^0_2 \circ \varphi(\sigma)$ est une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^m \lambda_i \sigma_i$ où $\sigma_i$ est un simplexe singulier dont le support est contenu dans $\|\varphi(\sigma)\|$ et dans un élément $W_i$ de $\mathcal{W}_0$. Le support de $\psi_0 \circ Sd^0_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A(\sigma) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \psi_0(\sigma_i)$ est donc contenu dans $\bigcup_{i=1}^m \mathrm{Tr}(s_{W_i}, K_0)$, et il suffit de montrer que $\tau$ n'appartient pas à cette réunion. Mais si $\tau$ appartient à $\mathrm{Tr}(s_{W_i}, K_0)$, alors $\mathrm{Tr}(s_{W_i}, K_0) \cap \mathrm{Tr}(s_{W_0}, K_0) \neq \emptyset$, donc $s_{W_0} \cup s_{W_i}$ est un simplexe de $K_0$, et le barycentre $b$ de ce simplexe appartient à $\mathrm{Tr}(s_{W_0}, K_0) \cap \mathrm{Tr}(s_{W_i}, K_0)$, donc $\zeta_0(b)$ appartient à $S(V^0_{W_0}, R) \cap S(V^0_{W_i}, R)$. Comme $\zeta_0$ conserve l'augmentation, $\|\zeta_0(b)\|$ est non vide et contenu dans $V^0_{W_0} \cap V^0_{W_i}$. Alors $V^0_{W_0} \cup V^0_{W_i}$ est contenu dans un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{V}_0)$, donc dans un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{V})$, rencontre $V_\sigma$ et contient $W_i \supset \|\sigma\| \subset \|\varphi(\sigma)\|$, ce qui contredit $(\gamma)$ puisque $V_\sigma \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$.

Soit $h' : S(X, R) \to S(X, R)$ une homotopie entre $Sd_2$ et $Sd^0_2$ telle que $\|h'(c)\| \subset \|Sd_2(c)\|$ pour toute chaîne $c \in S(X, R)$. Alors $\tilde{h} = h_0 \circ Sd^0_2 + h'$ est une homotopie entre $Sd_2$ et $\zeta_0 \circ \psi_0 \circ Sd^0_2$ dont l'image est contenue dans $S(X, \mathcal{W}, R)$ (d'après (c) du théorème A et le fait que $\mathcal{V}_0$ est plus fin que $\mathcal{W}$). Nous pouvons donc définir un morphisme $k$ de degré un du module gradué $C(K', R)$ dans lui-même par

$$k = \psi \circ \tilde{h} \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta.$$

D'après (c) du théorème A, $S(\mathrm{St}(C, \mathcal{V}_0), R)$ contient l'image de $\tilde{h} \circ \varphi$ et, comme $\mathrm{St}(C, \mathcal{V}_0)$ est contenu dans $O$, l'image de $k$ est contenue dans $C(L, R)$, donc de type fini. Pour prouver que $\Lambda(\mu \circ \nu) = \Lambda(\xi)$, il suffit de montrer que, pour tout simplexe $\tau$ de $K$,

$$\langle \tau, \mu \circ \nu(\tau) - \xi(\tau) \rangle = \langle \tau, \partial k(\tau) + k\partial(\tau) \rangle \tag{2}$$

Pour tout $W \in \mathcal{W}$, il y a un simplexe $s_W$ de $K$ tel que $C(\mathrm{Tr}(s_W, K), R)$ contienne $\psi(S(W, R))$ et un élément $V_W$ de $\mathcal{V}$ contenant $W$ et $\|\zeta(t)\|$ pour tout $t \in \mathrm{Tr}(s_W, K)$. Si $\tau$ n'appartient pas à $M = \bigcup \{\mathrm{Tr}(s_W, K) \mid W \in \mathcal{W}\}$, alors les deux membres de (2) sont nuls.

Si $\tau$ appartient à $\mathrm{Tr}(s_W, K)$ et si $V_W \cap B \neq \emptyset$, alors $V_W \cap A = \emptyset$ d'après

$(\alpha)$ et, comme $\tilde{h}$ est une homotopie entre $Sd_2$ et $\zeta_0 \circ \psi_0 \circ Sd_2^0$, nous avons

$$\begin{aligned}\mu \circ \nu(\tau) - \xi(\tau) &= \psi \circ (\zeta_0 \circ \psi_0 \circ Sd_2^0 - Sd_2) \circ \varphi \circ \ Sd_1 \circ \zeta(\tau)\\ &= \psi \circ (\partial \tilde{h} + \tilde{h}\partial) \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \zeta(\tau)\\ &= \partial k(\tau) + k\partial(\tau).\end{aligned}$$

Nous achèverons de vérifier (2) en montrant que si $V_W \cap B = \emptyset$ et si $\tau$ appartient à $\mathrm{Tr}(s_W, K)$, alors les deux membres de (2) sont nuls. Cela est évident si $\vartheta_A \circ \zeta(\tau) = 0$ et $\vartheta_A \circ \zeta(\partial\tau) = 0$. Si $\vartheta_A \circ \zeta(\tau) \neq 0$ ou $\vartheta_A \circ \zeta(\partial\tau) \neq 0$, alors $\emptyset \neq V_W \setminus A = V_W \setminus (A \cup B)$. Les chaînes $Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta(\tau)$ et $Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta(\partial\tau)$ étant dans $S(V_W, R)$, il suffit de montrer que, pour toute $c \in S(V_W, R)$, les supports des chaînes $\psi \circ \zeta_0 \circ \psi_0 \circ Sd_2^0 \circ \varphi(c)$, $\psi \circ Sd_2 \circ \varphi(c)$ et $\psi \circ \tilde{h} \circ \varphi(c)$ ne contiennent pas $\tau$.

$Sd_2 \circ \varphi(c)$ (resp. $Sd_2^0 \circ \varphi(c)$) est combinaison linéaire de simplexes singuliers dont les supports sont contenus dans $\|\varphi(c)\|$ et dans des éléments de $\mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{W}_0$). Comme $h'$ n'augmente pas les supports, $h' \circ \varphi(c)$ est combinaison linéaire de simplexes singuliers dont les supports sont contenus dans $\|Sd_2 \circ \varphi(c)\| \subset \|\varphi(c)\|$ et dans des éléments de $\mathcal{W}$. D'après (c) du théorème A, $\zeta_0 \circ \psi_0 \circ Sd_2^0 \circ \varphi(c)$ et $h_0 \circ Sd_2^0 \circ \varphi(c)$ sont combinaisons linéaires de simplexes singuliers dont les supports sont contenus dans des éléments de $\mathcal{V}_0$ rencontrant $\|Sd_2^0 \circ \varphi(c)\|$. Comme $\mathcal{V}_0$ est plus fin que $\mathcal{W}$, nous voyons que les chaînes $\zeta_0 \circ \psi_0 \circ Sd_2^0 \circ \varphi(c)$, $Sd_2 \circ \varphi(c)$ et $\tilde{h} \circ \varphi(c) = h_0 \circ Sd_2^0 \circ \varphi(c) + h' \circ \varphi(c)$ sont des combinaisons linéaires $\sum_{r=1}^{p} \lambda_r \sigma_r$, où le support de $\sigma_r$ est contenu dans un élément $W_r$ de $\mathcal{W}$ tel que $W_r \cap \|\varphi(c)\| \neq \emptyset$ et, puisque $\psi(\sigma_r)$ est contenu dans $\mathrm{Tr}(s_{W_r}, K)$, il suffit de montrer que $\tau$ n'appartient à aucun des $\mathrm{Tr}(s_{W_r}, K)$. Mais si $\tau$ appartenait à $\mathrm{Tr}(s_{W_r}, K)$, alors, notant $b$ le barycentre de $s_W \cup s_{W_r}$, $V_W \cap V_{W_r}$ contiendrait $\|\zeta(b)\| \neq \emptyset$, donc $V_W \cup V_{W_r}$ serait contenu dans $\mathrm{St}(V_W, \mathcal{V})$. Puisque $W_r \cap \|\varphi(c)\| \neq \emptyset \neq V_W \setminus (A \cup B)$, cela contredit $(\gamma)$.

II) Soit $A'$ un voisinage ouvert de $X \setminus U$ contenu dans $A$, et soit

$$\xi' = \psi \circ Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_{A'} \circ \zeta.$$

Nous allons montrer que $\Lambda(\xi) = \Lambda(\xi')$ si $\mathcal{V}$ vérifie

$(\gamma')$ si $V$ est un élément de $\mathcal{V}$ tel que $V \setminus (A' \cup B) \neq \emptyset$, alors $\|\varphi(c)\| \cap \mathrm{St}(V, \mathrm{St}(\mathcal{V})) = \emptyset$ pour toute chaîne $c \in S(V, R)$,

Pour cela, il suffit de vérifier que

$$\langle \tau, \xi(\tau) \rangle = \langle \tau, \xi'(\tau) \rangle \tag{3}$$

pour tout simplexe $\tau$ de $K$. Reprenant les notations $s_W$, $V_W$ et $M$ définies ci-dessus, les deux membres de (3) sont nuls si $\tau$ n'appartient pas à $M$, et il suffit de montrer que les deux membres de (3) sont encore nuls quand $\tau$ appartient à $\mathrm{Tr}(s_W, K)$ et $\vartheta_A(\zeta(\tau)) \neq \vartheta_{A'}(\zeta(\tau))$. Comme $\zeta(\tau)$ est contenu dans $S(V_W, R)$, si $\vartheta_A(\zeta(\tau)) \neq \vartheta_{A'}(\zeta(\tau))$, alors $V_W$ rencontre $A \setminus A'$, donc est disjoint de $B$ d'après $(\alpha)$. La chaîne $c = Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta(\tau)$ appartient à $S(V_W, R)$ et $Sd_2 \circ \varphi(c)$ est une combinaison linéaire $\sum_{s=1}^q \lambda_s \sigma_s$ de simplexes singuliers où le support de $\sigma_s$ est contenu dans $\|\varphi(c)\|$ et dans un élément $W_s$ de $\mathcal{W}$. Alors $\psi(\sigma_s)$ est contenu dans $C(\mathrm{Tr}(s_{W_s}, R))$ et un argument utilisé plus haut garantit que, pour tout $s$, $\tau$ n'appartient pas à $\mathrm{Tr}(s_{W_s}, K)$, d'où l'égalité $\langle \tau, \xi(\tau) \rangle = 0$. Le même raisonnement s'applique à $\xi'(\tau)$.

Pour $j = 1, 2$, soient $A_j$ et $B_j$ des voisinages ouverts de $X \setminus U$ et $\mathrm{Fix}\,\varphi$ respectivement tels que $\overline{A}_j \cap \overline{B}_j = \emptyset$, et soit $C_j$ un compact de $X$ tel que $S(C_j, R)$ contienne l'image de $\varphi$. Soit $\mathcal{V}_j$ un recouvrement ouvert de $X$ vérifiant les conditions $(\alpha)$-$(\beta)$ relativement à $A_j$ et $B_j$, et soient $\mathcal{W}_j$, $K_j$, $\psi_j$, $\zeta_j$ et $h_j$ des objets vérifiant les conditions (a)–(d) du théorème A relativement à $\mathcal{V}_j$ et $C_j$. Prenant un opérateur de subdivision $Sd_2^j : S(X, R) \to S(X, \mathcal{W}_j, R)$, définissons un endomorphisme $\xi_j$ de $C(K'_j, R)$ par

$$\xi_j = \psi_j \circ Sd_2^j \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_{A_j} \circ \zeta_j.$$

Alors $C = C_1 \cup C_2$ est compact et les ensembles $A = A_1 \cap A_2$ et $B = B_1 \cup B_2$ sont des voisinages de $X \setminus U$ et $\mathrm{Fix}\,\varphi$ respectivement. Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert de $X$ plus fin que $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$, tel que les ensembles $\mathrm{St}(C_j, \mathcal{V})$ soient assez petits, et vérifiant $(\alpha)$, $(\beta)$ et $(\gamma)$. Prenons des objets $\mathcal{W}$, $K$, $\psi$, $\zeta$ et $h$ vérifiant les conditions (a)-(d) du théorème A relativement à $\mathcal{V}$ et $C$, et un opérateur de subdivision $Sd_2 : S(X, R) \to S(X, \mathcal{W}, R)$. Il résulte alors de I) que

$$\Lambda(\xi_j) = \Lambda(\psi \circ Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_{A_j} \circ \zeta),$$

et nous pouvons ensuite appliquer II) pour conclure que

$$\Lambda(\psi \circ Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_{A_j} \circ \zeta) = \Lambda(\psi \circ Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta),$$

donc $\Lambda(\xi_1) = \Lambda(\xi_2)$. Ceci montre que la définition de $\mathrm{ind}(\varphi, U)$ ne dépend pas de $A$, $B$, $C$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, $K$, $\psi$, $\zeta$ et $Sd_2$.

Il ne reste donc plus qu'à vérifier (ii) et l'indépendance de la définition de $\mathrm{ind}(\varphi, U)$ relativement à $Sd_1$. Soient $\mathcal{U}'$ un recouvrement ouvert de $U$ plus fin que $\mathcal{U}$, $\varphi'$ la restriction de $\varphi$ à $S(U, \mathcal{U}', R)$ et $Sd'_1 : S(U, R) \to S(U, \mathcal{U}', R)$ un opérateur de subdivision. Prenons un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de $X$ vérifiant $(\alpha)$, $(\gamma)$ et

$(\beta')$ tout élément de $\mathcal{V}$ rencontrant $X \setminus A$ est contenu dans un élément de $\mathcal{U}'$.

Les autres notations étant comme dans la définition de $\mathrm{ind}(\varphi, U)$, il nous faut montrer que $\Lambda(\xi) = \Lambda(\xi')$ où $\xi = \psi \circ Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta$ et $\xi' = \psi \circ Sd_2 \circ \varphi' \circ Sd_1' \circ \vartheta_A \circ \zeta$. Soit $h^\dagger : S(U, R) \to S(U, \mathcal{U}, R)$ une homotopie entre $Sd_1$ et $Sd_1'$ telle que $\|h^\dagger(c)\| \subset \|Sd_1(c)\|$ pour toute chaîne $c \in S(U, R)$. Définissons un morphisme $k^\dagger$ de degré un du complexe de chaînes $C(K', R)$ dans lui-même par

$$k^\dagger = \psi \circ Sd_2 \circ \varphi \circ h^\dagger \circ \vartheta_A \circ \zeta.$$

D'après le lemme 1, il suffit de montrer que, pour tout $\tau \in K'$,

$$\langle \tau, \xi'(\tau) - \xi(\tau) \rangle = \langle \tau, \partial k^\dagger(\tau) + k^\dagger \partial(\tau) \rangle \tag{4}$$

La vérification de (4) suit le schéma déjà utilisé trois fois. Si $\tau$ n'appartient pas à $M$, les deux membres de (4) sont nuls. Si $\tau$ appartient à $\mathrm{Tr}(s_W, K)$ et si $V_W \cap B \neq \emptyset$, alors, notant que $\varphi \circ Sd_1' = \varphi' \circ Sd_1'$, nous avons

$$\xi'(\tau) - \xi(\tau) = \partial k^\dagger(\tau) + k^\dagger \partial(\tau).$$

Si $\tau$ appartient à $\mathrm{Tr}(s_W, K)$ et $V_W \cap B = \emptyset$, il suffit de montrer que si $\vartheta_A \circ \zeta(\tau) \neq 0$ ou $\vartheta_A \circ \zeta(\partial\tau) \neq 0$, alors les deux membres de (4) sont nuls, ce qui se fait encore en montrant que $(\gamma)$ garantit que $\tau$ n'appartient au support d'aucune des quatre chaînes de $C(K', R)$ apparaissant dans (4). $\square$

Les principales propriétés de l'indice que nous venons de construire sont contenues dans le théorème suivant.

**Théorème 1.** *L'indice de point fixe pour les morphismes admissibles $\varphi : S(U, \mathcal{U}, R) \to S(X, R)$, où $U$ est un ouvert d'un $R$-RAV algébrique $X$, a les propriétés suivantes :*

(I) (Normalisation) *Si $U = X$, alors* $\mathrm{ind}(\varphi, X) = \Lambda(\varphi_*)$.

(II) (Additivité) *Si $V_1$, $V_2$ sont deux ouverts disjoints contenus dans $U$ tels que* $\mathrm{Fix}\,\varphi \subset V_1 \cup V_2$, *alors* $\mathrm{ind}(\varphi, U) = \mathrm{ind}(\varphi, V_1) + \mathrm{ind}(\varphi, V_2)$.

(III) (Existence) *Si* $\mathrm{ind}(\varphi, U) \neq 0$, *alors* $\mathrm{Fix}\,\varphi \neq \emptyset$.

(IV) (Homotopie) *Si $\varphi_0, \varphi_1 : S(U, \mathcal{U}, R) \to S(X, R)$ sont admissibles et s'il existe une homotopie admissible $\mu : S(U, \mathcal{U}, R) \to S(X, R)$ entre $\varphi_0$ et $\varphi_1$, alors* $\mathrm{ind}(\varphi_0, U) = \mathrm{ind}(\varphi_1, U)$.

(V) (Contraction) *Soit $Y$ un sous-espace de $X$ qui est aussi un $R$-RAV algébrique. Supposons qu'il existe un compact $C$ de $Y$ tel que $S(C,R)$ contienne* $\operatorname{im}\varphi$. *Si $\varphi_Y : S(U\cap Y, \mathcal{U}|U\cap Y, R) \to S(Y,R)$ est induit par $\varphi$, alors* $\operatorname{ind}(\varphi,U) = \operatorname{ind}(\varphi_Y, U\cap Y)$.

Démonstration. (I) Si $U = X$, nous pouvons prendre $A = \emptyset$; alors $\vartheta_A$ est l'identité, $\pi = \psi\circ Sd_2\circ\varphi\circ Sd_1$ est un morphisme de chaînes de type fini de $S(X,\mathcal{U},R)$ dans $C(K',R)$ et nous avons

$$\operatorname{ind}(\varphi,X) = \Lambda(\pi\circ\zeta) = \Lambda(\pi_*\circ\zeta_*) = \Lambda(\zeta_*\circ\pi_*).$$

Mais $\zeta\circ\psi$ et $Sd_2$ sont homotopes à l'identité de $S(X,R)$ et $Sd_1$ induit l'isomorphisme naturel de $H(X,R)$ sur l'homologie de $S(X,\mathcal{U},R)$, donc

$$\zeta_*\circ\pi_* = (\zeta\circ\psi\circ Sd_2\circ\varphi\circ Sd_1)_* = \varphi_*,$$

d'où $\Lambda(\zeta_*\circ\pi_*) = \Lambda(\varphi_*)$.

(II) Nous pouvons prendre pour $A$ un voisinage de $X\setminus(V_1\cup V_2)$. Alors $A_1 = A\cup V_2$ et $A_2 = A\cup V_1$ sont des voisinages ouverts de $X\setminus V_1$ et $X\setminus V_2$ respectivement et $\vartheta_A = \vartheta_{A_1}+\vartheta_{A_2}$, donc posant, pour $i=1,2$,

$$\xi_i = \psi\circ Sd_2\circ\varphi\circ Sd_1\circ\vartheta_{A_i}\circ\zeta,$$

nous avons $\xi = \xi_1+\xi_2$, d'où

$$\operatorname{ind}(\varphi,U) = \Lambda(\xi) = \Lambda(\xi_1)+\Lambda(\xi_2) = \operatorname{ind}(\varphi,V_1)+\operatorname{ind}(\varphi,V_2).$$

(III) résulte de (II) comme dans le cas des fonctions (voir [4], § 12.2).

(IV) Pour calculer $\operatorname{ind}(\varphi_0,U)$ et $\operatorname{ind}(\varphi_1,U)$, prenons un ouvert $B$ contenant $\operatorname{Fix}\varphi_0\cup\operatorname{Fix}\varphi_1\cup\operatorname{Fix}\mu$ et pour $C$ un compact tel que $S(C,R)$ contienne les images de $\varphi_0$, $\varphi_1$ et $\mu$. Posons

$$\xi_i = \psi\circ Sd_2\circ\varphi_i\circ Sd_1\circ\vartheta_A\circ\zeta$$

pour $i=0,1$, de sorte que $\operatorname{ind}(\varphi_i,U) = \Lambda(\xi_i)$. Définissons un endomorphisme $\hat\mu$ de degré un du module gradué $C(K',R)$ par

$$\hat\mu = \psi\circ Sd_2\circ\mu\circ Sd_1\circ\vartheta_A\circ\zeta.$$

Alors $\hat\mu$ est de type fini et, pour prouver (IV), il suffit de montrer que

$$\langle\tau,\xi_1(\tau)-\xi_0(\tau)\rangle = \langle\tau,\partial\hat\mu(\tau)+\hat\mu\partial(\tau)\rangle \tag{5}$$

pour tout $\tau \in K'$, ce qui se fait selon le schéma utilisé dans la démonstration du lemme précédent. Si $\tau$ n'appartient pas à $M$, les deux membres de (5) sont nuls. Si $\tau$ appartient à $\mathrm{Tr}(s_W, K)$ et si $V_W \cap B \neq \emptyset$, alors

$$\xi_1(\tau) - \xi_0(\tau) = \partial\hat{\mu}(\tau) + \hat{\mu}\partial(\tau).$$

Si $\tau$ appartient à $\mathrm{Tr}(s_W, K)$ et $V_W \cap B = \emptyset$, il suffit de montrer que si $\vartheta_A \circ \zeta(\tau) \neq 0$ ou $\vartheta_A \circ \zeta(\partial\tau) \neq 0$, alors les deux membres de (5) sont nuls, ce qui résulte du fait que $(\gamma)$ garantit que $\tau$ n'appartient au support d'aucune des quatre chaînes apparaissant dans (5).

(V) s'obtient en adaptant la démonstration de la partie I) du lemme précédent. Les raisonnements restant les mêmes, nous nous contenterons d'indiquer les modifications nécessaires, en reprenant les notations de cette démonstration. Nous prenons pour $\mathcal{V}_0$ un recouvrement ouvert de $Y$ plus fin que $\mathcal{W}|Y$ et tel que $\mathrm{St}(C, \mathcal{V}_0)$ soit assez petit, puis un recouvrement ouvert $\mathcal{W}_0$ de $Y$, un complexe simplicial $K_0$, des morphismes $\psi_0 : S(Y, \mathcal{W}_0, R) \to C(K_0', R)$, $\zeta_0 : C(K_0', R) \to S(Y, R)$ et une homotopie $h_0 : S(Y, \mathcal{W}_0, R) \to S(Y, R)$ vérifiant les conditions du théorème A relativement à $\mathcal{V}_0$ et $C$. Enfin, $Sd_2^0 : S(Y, R) \to S(Y, \mathcal{W}_0, R)$ est un opérateur de subdivision. Remarquons que $\vartheta_A$ envoie $S(Y, R)$ dans $S(U \cap Y, R)$ et que $Sd_1$ envoie $S(U \cap Y, R)$ dans $S(U \cap Y, \mathcal{U}|U \cap Y, R)$, donc l'image de $Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta_0$ est contenue dans $S(Y, R)$, et comme $\mathrm{im}\, \varphi$ est contenue dans $S(Y, R)$, la formule définissant $\xi_0$ a un sens et nous avons

$$\xi_0 = \psi_0 \circ Sd_2^0 \circ \varphi_Y \circ Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta_0,$$

donc $\mathrm{ind}(\varphi_Y, U \cap Y) = \Lambda(\xi_0)$. De même, les morphismes $\nu$ et $\mu$ sont bien définis. Enfin, pour vérifier l'égalité $\Lambda(\mu \circ \nu) = \Lambda(\xi)$, il faut prendre pour $h'$ une homotopie de $S(Y, R)$ dans $S(Y, \mathcal{W}|Y, R)$ entre la restriction de $Sd_2$ à $S(Y, R)$ et $Sd_2^0$. Aucune autre modification n'est nécessaire. $\square$

L'indice de point fixe pour les morphismes admissibles a une autre propriété importante correspondant à la multiplicativité de l'indice de point fixe des fonctions, mais nous avons besoin de quelques résultats auxiliaires pour l'établir.

Soit $\varphi : S(U, \mathcal{U}, R) \to S(X, R)$ un morphisme admissible dont l'image est de type fini. Conservant les notations introduites au début de cette section, la restriction $\varkappa$ de $Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A$ à $S(X, \mathcal{W}, R)$ est alors un endomorphisme de type fini du module gradué $S(X, \mathcal{W}, R)$ qui permet de calculer $\mathrm{ind}(\varphi, U)$ :

**Lemme 3.** *Si $\varphi : S(U, \mathcal{U}, R) \to S(X, R)$ est un morphisme admissible dont l'image est de type fini, alors* $\mathrm{ind}(\varphi, U) = \Lambda(\varkappa)$.

D é m o n s t r a t i o n. Définissons un morphisme de modules gradués $\mu : C(K', R) \to S(X, \mathcal{W}, R)$ par

$$\mu = Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta$$

Alors $\psi \circ \mu = \xi$ et, comme $\operatorname{im} \varphi$ est de type fini, $\Lambda(\psi \circ \mu)$ et $\Lambda(\mu \circ \psi)$ sont définis et égaux. Il suffit donc de montrer que $\Lambda(\mu \circ \psi) = \Lambda(\varkappa)$. Définissons un endomorphisme $k$ de degré un du module gradué $S(X, \mathcal{W}, R)$ par

$$k = Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A \circ h.$$

Comme $k$ est de type fini, il suffit d'après le lemme 1 de montrer que

$$\langle \sigma, \mu \circ \psi(\sigma) - \varkappa(\sigma) \rangle = \langle \sigma, \partial k(\sigma) + k\partial(\sigma) \rangle \tag{6}$$

pour tout simplexe singulier $\sigma$ appartenant à $S(X, \mathcal{W}, R)$. Considérons les quatre chaînes $\sigma$, $\zeta \circ \psi(\sigma)$, $h(\sigma)$ et $h(\partial\sigma)$ et distinguons deux cas :

a) $\vartheta_A$ laisse invariantes ces quatre chaînes. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \mu \circ \psi(\sigma) - \varkappa(\sigma) &= Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1(\zeta \circ \psi(\sigma) - \sigma) \\ &= Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1(\partial h(\sigma) + h\partial(\sigma)) \\ &= \partial k(\sigma) + k\partial(\sigma). \end{aligned}$$

b) L'une au moins des quatre chaînes n'est pas invariante par $\vartheta_A$.D'après (c) du théorème A, il y a un élément $V_0$ de $\mathcal{V}$ contenant ces quatre chaînes, et la définition de $\vartheta_A$ implique que $V_0 \cap A \neq \emptyset$. Nous allons montrer que les deux membres de (6) sont nuls et, pour cela, il suffit de vérifier que si $c$ est l'une des chaînes $Sd_1 \circ \vartheta_A(\sigma)$, $Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta \circ \psi(\sigma)$, $Sd_1 \circ \vartheta_A(\partial h(\sigma))$ et $Sd_1 \circ \vartheta_A(h\partial(\sigma))$, alors $\langle \sigma, Sd_2 \circ \varphi(c) \rangle = 0$. Cela est évident si $c = 0$. Si $c \neq 0$, alors $\|c\|$ est contenu dans $V_0$ puisque $Sd_1 \circ \vartheta_A$ n'augmente pas les supports, et la définition de $\vartheta_A$ garantit que $V_0 \setminus A \neq \emptyset$. Comme $V_0$ est contenu dans $\operatorname{St}(A, \mathcal{V})$, il est disjoint de $B$, donc $\|Sd_2 \circ \varphi(c)\| \subset \|\varphi(c)\|$ est disjoint de $V_0$ d'après $(\gamma)$. A fortiori, $\|\sigma\| \cap \|Sd_2 \circ \varphi(c)\| = \emptyset$, d'où la relation $\langle \sigma, Sd_2 \circ \varphi(c) \rangle = 0$. □

**Lemme 4.** *Soient $U$ un ouvert d'un espace normé $E$ et $\varphi : S(U, \mathcal{U}, R) \to S(E, R)$ un morphisme admissible. Soit $U'$ un ouvert de $E$ vérifiant* $\operatorname{Fix} \varphi \subset U'$ *et $\overline{U'} \subset U$. Il existe un morphisme admissible $\varphi' : S(U', \mathcal{U}|U', R) \to S(E, R)$ tel que* $\operatorname{im} \varphi$ *soit de type fini et une homotopie admissible $\chi : S(U', \mathcal{U}|U', R) \to S(E, R)$ entre $\varphi'$ et la restriction de $\varphi$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $C$ un compact de $E$ tel que $S(C,R)$ contienne l'image de $\varphi$, et soit $O$ un voisinage ouvert de $\operatorname{Fix}\varphi$ tel que $\overline{O}$ soit contenu dans $U'$. Prenons un recouvrement ouvert $\mathcal{G}$ de $E$ vérifiant

(7) si $G$ est un élément de $\mathcal{G}$ rencontrant $\overline{U'}\setminus O$, alors $\|\varphi(c)\|\cap \operatorname{St}(G,\mathcal{G})=\emptyset$ pour toute chaîne $c\in S(G,R)\cap S(U,\mathcal{U},R)$.

Soit $\widetilde{E}$ le complété de $E$ et soit $\tilde{d}$ la distance sur $\widetilde{E}$ définie par la norme. Nous notons $d$ la distance que $\tilde{d}$ induit sur $E$. La compacité de $C$ nous permet de trouver un $\epsilon>0$ tel que, pour tout $x\in C$, la $d$-boule de centre $x$ et de rayon $6\epsilon$ soit contenue dans un élément de $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{B}$ le recouvrement de $E$ par les $d$-boules ouvertes de rayon $\epsilon$. Le théorème A nous permet de trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{K}$ de $C$, un complexe simplicial fini $L$ et des morphismes de chaînes $\rho: S(C,\mathcal{K},R)\to C(L,R)$ et $\pi: C(L,R)\to S(E,R)$ tels que, pour tout simplexe singulier $\sigma$ appartenant à $S(C,\mathcal{K},R)$, il existe $B\in\mathcal{B}$ contenant $\|\tau\|\cup\|\pi\circ\rho(\tau)\|$ pour toute face $\tau$ de $\sigma$.

Comme $L$ est fini, l'image de $\pi$ est de type fini. En particulier, il y a un compact $C_1$ de $E$ tel que $S(C_1,R)$ contienne $\operatorname{im}\pi$. Soit $D\subset E$ l'enveloppe convexe de $C\cup C_1$. La fermeture $\widetilde{D}$ de $D$ dans l'espace de Banach $\widetilde{E}$ est l'enveloppe convexe fermée du compact $C\cup C_1$, donc est compacte. Pour tout simplexe singulier $\sigma$ de $S(C,\mathcal{K},R)$, soit $D_\sigma$ l'enveloppe convexe de $\|\sigma\|\cup\bigcup\{\|\pi\circ\rho(\tau)\|\mid\tau\le\sigma\}$. Si $\tau\le\sigma$, alors $D_\tau\subset D_\sigma$ et, comme les $D_\sigma$ sont contractiles, nous pouvons trouver une homotopie $\tilde{\omega}$ entre $\pi\circ\rho$ et l'inclusion $\iota$ de $S(C,\mathcal{K},R)$ dans $S(E,R)$ telle que $\|\tilde{\omega}(\sigma)\|\subset D_\sigma$ pour tout simplexe singulier $\sigma$ de $S(C,\mathcal{K},R)$.

Puisque l'ensemble convexe $D$ est dense dans $\widetilde{D}$, nous pouvons trouver une fonction continue $r:\widetilde{D}\to D$ telle que $r(x)=x$ si $x$ appartient à $C\cup C_1$ et $\tilde{d}(x,r(x))<\epsilon$ pour tout $x\in\widetilde{D}$. Alors $r(\widetilde{D})$ est un compact de $E$ et $\omega=r_\#\circ\tilde{\omega}$ est une homotopie entre $\pi\circ\rho$ et $\iota$ dont l'image est contenue dans $S(r(\widetilde{D}),R)$.

Soit $Sd: S(C,R)\to S(C,\mathcal{K},R)$ un opérateur de subdivision, et soit

$$\varphi'=\pi\circ\rho\circ Sd\circ\big(\varphi|S(U',\mathcal{U}|U',R)\big).$$

L'image de $\varphi'$ est contenue dans $\operatorname{im}\pi\subset S(C_1,R)$, donc $\varphi'$ est compact et de type fini. Il y a une homotopie entre l'identité de $S(C,R)$ et $Sd$ qui n'augmente pas les supports ; elle induit une homotopie $\chi_1$ entre $\varphi|S(U',\mathcal{U}|U',R)$ et $\varphi_1=Sd\circ\big(\varphi|S(U',\mathcal{U}|U',R)\big)$ telle que $\|\chi_1(c)\|\subset\|\varphi(c)\|$ pour toute chaîne $c\in S(U',\mathcal{U}|U',R)$. Cette homotopie est évidemment admissible.

D'autre part, $\chi_2=\omega\circ\rho$ est une homotopie compacte entre $\varphi'$ et $\varphi_1$, son image étant contenue dans $S(r(\widetilde{D}),R)$. Nous achèverons la démonstration en montrant que $\varphi'$ et $\chi_2$ sont admissibles. Pour cela, il ne nous reste plus qu'à prouver que $\operatorname{Fix}\varphi'$ et $\operatorname{Fix}\chi_2$ sont des sous-ensembles compacts de $U'$ ; comme ces sous-ensembles sont fermés dans $U'$ et contenus dans le compact $r(\widetilde{D})$, il suffit de montrer qu'ils sont contenus dans $O \subset \overline{O} \subset U'$.

Soit $x \in U' \setminus O$, et soit $G$ un élément de $\mathcal{G}$ contenant $x$. Si $c$ appartient à $S(G,R) \cap S(U',\mathcal{U}|U',R)$ et si $\varphi_1(c)$ n'est pas nulle, alors $\varphi_1(c)$ est de la forme $\sum_{i=1}^m \lambda_i\sigma_i$ où $\sigma_i$ est un simplexe singulier de $C$ dont le support est contenu dans $\|\varphi(c)\|$ et dans un élément de $\mathcal{W}$. Pour tout $i$, il existe $B_i \in \mathcal{B}$ contenant $\|\sigma_i\| \cup \bigcup\{\|\pi\circ\rho(\tau)\| \mid \tau \le \sigma_i\}$. Comme $B_i$ est convexe, il contient $D_{\sigma_i}$, donc aussi $\|\tilde{\omega}(\sigma_i)\|$. Le diamètre de $\|\sigma_i\| \cup \|\pi\rho(\sigma_i)\| \cup \|\tilde{\omega}(\sigma_i)\|$ est donc au plus $2\epsilon$. D'après le choix de $r$, nous avons $r(x) = x$ si $x \in \|\sigma_i\|$ et $\tilde{d}(x, r(x)) < \epsilon$ pour tout $x$, donc le diamètre de l'ensemble $\|\sigma_i\| \cup \|\pi \circ \rho(\sigma_i)\| \cup \|\omega(\sigma_i)\|$ est inférieur à $6\epsilon$, et cet ensemble est contenu dans un élément $G_i$ de $\mathcal{G}$. Comme $\emptyset \ne \|\sigma_i\| \subset G_i \cap \|\varphi(c)\|$, (7) garantit que $G_i \cap G = \emptyset$. Cela étant vrai pour tout $i$, nous avons $G \cap \|\varphi'(c)\| = G \cap \|\chi_2(c)\| = \emptyset$ pour toute chaîne $c \in S(G,R) \cap S(U',\mathcal{U}|U',R)$, donc $x$ n'est pas un point fixe de $\varphi'$ ou de $\chi_2$. $\square$

Soient $\Phi : S(\cdot\times\cdot, R) \to S(\,\cdot\,,R) \otimes S(\,\cdot\,,R)$ et $\Psi; S(\,\cdot\,,R) \otimes S(\,\cdot\,,R) \to S(\cdot\times\cdot,R)$ des morphismes d'Eilenberg-Zilber ([3], VI.12). Pour $j = 1,2$, soient $X_j$ un $R$-RAV algébrique, $U_j$ un ouvert de $X_j$ et $\varphi_j : S(U_j,\mathcal{U}_j,R) \to S(X_j,R)$ un morphisme admissible. Le produit $X_1 \times X_2$ est encore un $R$-RAV algébrique ([2], théorème 4). Comme $\Phi$ envoie $S(U_1 \times U_2, \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2, R)$ dans $S(U_1,\mathcal{U}_1,R) \otimes S(U_2,\mathcal{U}_2,R)$, nous pouvons définir un morphisme de chaînes $\varphi : S(U_1 \times U_2, \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2, R) \to S(X_1 \times X_2, R)$ par $\varphi = \Psi \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Phi$. Si $C_j$ est un compact de $X_j$ tel que $S(C_j,R)$ contienne $\operatorname{im}\varphi_j$, alors $\operatorname{im}\varphi$ est contenue dans $S(C_1 \times C_2, R)$. Si $x$ appartient à $U_1 \setminus \operatorname{Fix}\varphi_1$, il existe un voisinage $V$ de $x$ tel que $\varphi_1$ envoie $S(V,R) \cap S(U_1,\mathcal{U}_1,R)$ dans $S(X_1 \setminus V, R)$. Comme $\Phi$ envoie $S(V \times X_2, R)$ dans $S(V,R) \otimes S(X_2,R)$ et $\Psi$ envoie $S(X_1 \setminus V, R) \otimes S(X_2,R)$ dans $S((X_1 \setminus V) \times X_2, R)$, $\varphi$ envoie $S(V \times X_2, R) \cap S(U_1 \times U_2, \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2, R)$ dans $S((X_1 \setminus V) \times X_2, R)$, ce qui montre que $(U_1 \setminus \operatorname{Fix}\varphi_1) \times U_2$ ne contient aucun point fixe de $\varphi$. De même, $U_1 \times (U_2 \setminus \operatorname{Fix}\varphi_2)$ ne contient aucun point fixe de $\varphi$. L'ensemble $\operatorname{Fix}\varphi$, étant fermé dans $U_1 \times U_2$ et contenu dans le compact $\operatorname{Fix}\varphi_1 \times \operatorname{Fix}\varphi_2$, est un sous-ensemble compact de $U_1 \times U_2$. Le morphisme $\varphi$ est donc admissible. Nous conservons ces notations dans le théorème suivant.

**Théorème 2.** $\operatorname{ind}(\varphi, U_1 \times U_2) = \operatorname{ind}(\varphi_1, U_1) \cdot \operatorname{ind}(\varphi_2, U_2)$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons d'abord que l'image de $\varphi_j$ est de dimension finie pour $j = 1,2$. Composer avec un opérateur de subdivision ne change ni l'image ni l'indice (lemme 2(ii)), donc nous pouvons supposer $\varphi_j$ définie sur

$S(U_j, R)$ tout entier. Nous calculons $\operatorname{ind}(\varphi_j, U_j)$ à l'aide du lemme 3. Fixant des voisinages convenables $A_j$ et $B_j$ de $X \setminus U_j$ et $\operatorname{Fix}\varphi_j$ respectivement, il y a un recouvrement ouvert $\mathcal{W}_j$ de $X_j$ tel que $\operatorname{ind}(\varphi_j, U_j)$ soit égal au nombre de Lefschetz de la restriction $\varkappa_j$ de $Sd_2^j \circ \varphi_j \circ \vartheta_{A_j}$ à $S(X_j, \mathcal{W}_j, R)$. Ici, $Sd_2^j$ est un opérateur de subdivision de $S(X_j, R)$ dans $S(X_j, \mathcal{W}_j, R)$, et l'opérateur de subdivision $Sd_1^j$ a été supprimé de la définition de $\varkappa_j$, étant l'identité puisque $\varphi_j$ est défini sur $S(U_j, R)$ tout entier. Le recouvrement $\mathcal{W}_j$, étant construit comme indiqué au début de cette section, a la propriété suivante : si $W \in \mathcal{W}_j$ vérifie $W \cap A_j \neq \emptyset \neq W \setminus A_j$, alors $W \cap B_j = \emptyset$ et $\|c\| \cap W = \emptyset$ pour toute chaîne $c \in S(W, R)$.

Pour calculer $\operatorname{ind}(\varphi, U_1 \times U_2)$, prenons $A = (A_1 \times X_2) \cup (X_1 \times A_2)$ et $B = B_1 \times B_2$ comme voisinages de $X_1 \times X_2 \setminus (U_1 \times U_2)$ et $\operatorname{Fix}\varphi$ respectivement. Comme $\varphi$ est définie sur $S(U_1 \times U_2, R)$ et a une image de type fini, il y a un recouvrement ouvert $\mathcal{W}$ de $X_1 \times X_2$ tel que $\operatorname{ind}(\varphi, U_1 \times U_2)$ soit égal au nombre de Lefschetz de la restriction $\varkappa$ de $Sd_2 \circ \varphi \circ \vartheta_A$ à $S(X_1 \times X_2, \mathcal{W}, R)$, où $Sd_2$ est un opérateur de subdivision. En outre, le lemme 2(i) nous permet de supposer que $\mathcal{W}$ est plus fin que $\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$.

Comme $\mathcal{W}$ est plus fin que $\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$, $\Phi$ envoie $S(X_1 \times X_2, \mathcal{W}, R)$ dans $S(X_1, \mathcal{W}_1, R) \otimes S(X_2, \mathcal{W}_2, R)$, donc $\mu = (\varkappa_1 \otimes \varkappa_2) \circ \Phi : S(X_1 \times X_2, \mathcal{W}, R) \to S(X_1, \mathcal{W}_1, R) \otimes S(X_2, \mathcal{W}_2, R)$ est bien défini. Soit $\nu = Sd_2 \circ \Psi : S(X_1, \mathcal{W}_1, R) \otimes S(X_2, \mathcal{W}_2, R) \to S(X_1 \times X_2, \mathcal{W}, R)$. Comme l'image de $\varkappa_1 \otimes \varkappa_2$ est de type fini, $\Lambda(\mu \circ \nu)$ et $\Lambda(\nu \circ \mu)$ sont définis et égaux et, puisque $\Lambda(\varkappa_1 \otimes \varkappa_2) = \Lambda(\varkappa_1) \cdot \Lambda(\varkappa_2)$, il nous suffit de vérifier que $\Lambda(\mu \circ \nu) = \Lambda(\varkappa_1 \otimes \varkappa_2)$ et $\Lambda(\nu \circ \mu) = \Lambda(\varkappa)$.

Soit $H : S(X_1 \times X_2, R) \to S(X_1 \times X_2, R)$ une homotopie entre $Sd_2$ et l'identité telle que $\|H(c)\| \subset \|c\|$ pour toute chaîne $c \in S(X_1 \times X_2, R)$. Il existe une homotopie $\Theta : S(X_1, R) \otimes S(X_2, R) \to S(X_1, R) \otimes S(X_2, R)$ entre $\Phi \circ \Psi$ et l'identité telle que $\Theta\big(S(Y_1, R) \otimes S(Y_2, R)\big) \subset S(Y_1, R) \otimes S(Y_2, R)$ quels que soient les sous-ensembles $Y_1$ et $Y_2$. Alors $\widetilde{H} = \Theta + \Phi \circ H \circ \Psi$ envoie $S(X_1, \mathcal{W}_1, R) \otimes S(X_2, \mathcal{W}_2, R)$ dans lui-même et est une homotopie entre $\Phi \circ Sd_2 \circ \Psi$ et l'identité telle que $\widetilde{H}\big(S(W_1, R) \otimes S(W_2, R)\big) \subset S(W_1, R) \otimes S(W_2, R)$ quels que soient $W_1 \in \mathcal{W}_1$ et $W_2 \in \mathcal{W}_2$. Soit $\tilde{k} = (\varkappa_1 \otimes \varkappa_2) \circ \widetilde{H}$ ; c'est un endomorphisme de degré un et de type fini du module gradué $S(X_1, \mathcal{W}_1, R) \otimes S(X_2, \mathcal{W}_2, R)$ et, comme les $\sigma_1 \otimes \sigma_2$, où $\sigma_j$ est un simplexe singulier appartenant à $S(X_j, \mathcal{W}_j, R)$, forment une base de ce module, il suffit, pour vérifier que $\Lambda(\mu \circ \nu) = \Lambda(\varkappa_1 \otimes \varkappa_2)$, de montrer que, pour chaque tel $\sigma_1 \otimes \sigma_2$,

$$(8)\quad \langle \sigma_1\otimes\sigma_2, (\varkappa_1\otimes\varkappa_2)(\sigma_1\otimes\sigma_2)-\mu\circ\nu(\sigma_1\otimes\sigma_2)\rangle = \langle \sigma_1\otimes\sigma_2, \partial\tilde{k}(\sigma_1\otimes\sigma_2)+\tilde{k}\partial(\sigma_1\otimes\sigma_2)\rangle$$

Soit $W_j$ un élément de $\mathcal{W}_j$ contenant $\|\sigma_j\|$. Les quatre chaînes $\sigma_1\otimes\sigma_2$, $\Phi\circ Sd_2\circ\Psi(\sigma_1\otimes\sigma_2)$, $\widetilde{H}\partial(\sigma_1\otimes\sigma_2)$ et $\partial\widetilde{H}(\sigma_1\otimes\sigma_2)$ sont contenues dans $S(W_1,R)\otimes S(W_2,R)$, donc si $W_1\times W_2$ est contenu dans $(X_1\setminus A_1)\times(X_2\setminus A_2)$, alors

$$\begin{aligned}(\varkappa_1\otimes\varkappa_2-\mu\circ\nu)(\sigma_1\otimes\sigma_2)&\\ &=(Sd_2^1\otimes Sd_2^2)\circ(\varphi_1\otimes\varphi_2)\big(\sigma_1\otimes\sigma_2-\Phi\circ Sd_2\circ\Psi(\sigma_1\otimes\sigma_2)\big)\\ &=(Sd_2^1\otimes Sd_2^2)\circ(\varphi_1\otimes\varphi_2)\big(\partial\widetilde{H}(\sigma_1\otimes\sigma_2)+\widetilde{H}\partial(\sigma_1\otimes\sigma_2)\big)\\ &=\partial\tilde{k}(\sigma_1\otimes\sigma_2)+\tilde{k}\partial(\sigma_1\otimes\sigma_2).\end{aligned}$$

Si $W_1$ est contenu dans $X_1\setminus A_1$, alors $\vartheta_{A_1}$ annule $S(W_1,R)$, donc les deux membres de (8) sont nuls. Si $W_1\cap A_1\neq\emptyset\neq W_1\setminus A_1$, alors $\vartheta_{A_1}$ envoie $S(W_1,R)$ dans lui-même et $\varphi_1$ envoie $S(W_1,R)$ dans $S(X_1\setminus W_1,R)$, donc les quatre chaînes apparaissant dans (8) appartiennent à $S(X_1\setminus W_1,R)\otimes S(W_2,R)$, et les deux membres de (8) sont encore nuls. Le cas où $W_2\cap A_2\neq\emptyset$ se traite de façon analogue.

Nous avons

$$\nu\circ\mu=Sd_2\circ\Psi\circ(Sd_2^1\otimes Sd_2^2)\circ(\varphi_1\otimes\varphi_2)\circ(\vartheta_{A_1}\otimes\vartheta_{A_2})\circ\Phi$$

et

$$\varkappa=Sd_2\circ\Psi\circ(\varphi_1\otimes\varphi_2)\circ\Phi\circ\vartheta_A.$$

Il existe une homotopie $H_j$ entre l'identité de $S(X_j,R)$ et $Sd_2^j$ telle que $\|H(c)\|\subset\|c\|$ pour toute $c\in S(X_j,R)$. Alors $\hat{H}=H_1\otimes Sd_2+(-1)^{deg}id\otimes H_2$ est une homotopie entre l'identité et $Sd_2^1\otimes Sd_2^2$ telle que $H\big(S(Y_1,R)\otimes S(Y_2,R)\big)\subset S(Y_1,R)\otimes S(Y_2,R)$ quels que soient les sous-espaces $Y_1$ et $Y_2$. Définissons un endomorphisme $\hat{k}$ de degré un du module gradué $S(X_1\times X_2,\mathcal{W},R)$ par

$$\hat{k}=Sd_2\circ\Psi\circ\hat{H}\circ(\varphi_1\otimes\varphi_2)\circ\Phi\circ\vartheta_A.$$

Comme $\hat{k}$ est de type fini, pour prouver que $\Lambda(\nu\circ\mu)=\Lambda(\varkappa)$, il suffit de montrer que

$$(9)\qquad \langle\sigma,\nu\circ\mu(\sigma)-\varkappa(\sigma)\rangle=\langle\sigma,\partial\hat{k}(\sigma)+\hat{k}\partial(\sigma)\rangle$$

pour tout simplexe singulier $\sigma$ appartenant à $S(X_1 \times X_2, R)$. Soit $W$ un élément de $\mathcal{W}$ contenant $\|\sigma\|$, et soit $W_1 \times W_2$ un élément de $\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$ contenant $W$. Alors $\Phi(S(W, R))$ est contenu dans $S(W_1, R) \otimes S(W_2, R)$, donc si $W_1 \times W_2$ est disjoint de $A$, nous avons

$$\begin{aligned}\nu \circ \mu(\sigma) - \varkappa(\sigma) &= Sd_2 \circ \Psi \circ (Sd_2^1 \otimes Sd_2^2 - id) \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Phi(\sigma) \\ &= Sd_2 \circ \Psi \circ (\partial \hat{H} + \hat{H}\partial) \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Phi(\sigma) \\ &= \partial \hat{k}(\sigma) + \hat{k}\partial(\sigma).\end{aligned}$$

Si $W_1$ est contenu dans $A_1$, alors $\vartheta_A$ annule $S(W_1 \times X_2, R)$ et $\vartheta_{A_1}$ annule $S(W_1, R)$, donc les deux membres de (9) sont nuls. Si $W_1 \cap A_1 \neq \emptyset \neq W_1 \setminus A_1$, alors $\Phi \circ \vartheta_A$ et $(\vartheta_{A_1} \otimes \vartheta_{A_2}) \circ \Phi$ envoient $S(W, R)$ dans $S(W_1, R) \otimes S(W_2, R)$, que $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ envoie dans $S(X_1 \setminus W_1, R) \otimes S(W_2, R)$. Les supports des quatre chaînes apparaissant dans (9) sont alors contenus dans $(X_1 \setminus W_1) \times X_2$, donc disjoints de $\|\sigma\|$, et les deux membres de (9) sont encore nuls. Le cas où $W_2 \cap A_2 \neq \emptyset$ est analogue.

Dans le cas général, nous pouvons encore supposer $\varphi_j$ défini sur $S(U_j, R)$ tout entier. Plongeons $X_j$ comme fermé dans un espace normé $E_j$. Alors $U_j$ est un rétracte de voisinage algébrique de $E_j$ ; soit $\omega_j : S(G_j, \mathcal{G}_j, R) \to S(U_j, R)$ une rétraction algébrique, où $G_j$ est un ouvert de $E_j$ tel que $G_j \cap X_j = U_j$. Soit $\tilde{\varphi} = \varphi_j \circ \omega_j$ ; alors $\tilde{\varphi}_j | S(U_j, R) = \varphi_j$, $\operatorname{im} \tilde{\varphi}_j \subset \operatorname{im} \varphi_j$ et $\operatorname{Fix} \tilde{\varphi}_j = \operatorname{Fix} \varphi_j$, donc $\tilde{\varphi}_j$ est admissible et $\operatorname{ind}(\tilde{\varphi}_j, G_j) = \operatorname{ind}(\varphi_j, U_j)$ d'après la propriété de contraction. Posant $\tilde{\varphi} = \Psi \circ (\tilde{\varphi}_1 \otimes \tilde{\varphi}_2) \circ \Phi : S(G_1 \times G_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2, R) \to S(E_1 \times E_2, R)$, nous avons $\tilde{\varphi} | S(U_1 \times U_2, R) = \varphi$ et $\operatorname{im} \tilde{\varphi} \subset \operatorname{im} \varphi$, donc $\operatorname{ind}(\tilde{\varphi}, G_1 \times G_2) = \operatorname{ind}(\varphi, U_1 \times U_2)$.

D'après le lemme 4, il y a un ouvert $G'_j$ contenu dans $G_j$ et contenant $\operatorname{Fix} \tilde{\varphi}_j$, un recouvrement ouvert $\mathcal{G}'_j$ de $G'_j$ plus fin que $\mathcal{G}_j | G'_j$, un morphisme admissible $\varphi_j^\dagger : S(G'_j, \mathcal{G}'_j, R) \to S(E_j, R)$ dont l'image est de type fini et une homotopie admissible $\Xi_j : S(G'_j, \mathcal{G}'_j, R) \to S(E_j, R)$ entre $\varphi_j^\dagger$ et la restriction de $\tilde{\varphi}_j$. Nous avons alors

$$\operatorname{ind}(\tilde{\varphi}_j, G_j) = \operatorname{ind}(\tilde{\varphi}_j, G'_j) = \operatorname{ind}(\varphi_j^\dagger, G'_j).$$

Soit $\varphi^\dagger = \Psi \circ (\varphi_1^\dagger \otimes \varphi_2^\dagger) \circ \Phi : S(G'_1 \times G'_2, \mathcal{G}'_1 \times \mathcal{G}'_2, R) \to S(E_1 \times E_2, R)$. Alors

$$\Xi = \Psi \circ \big(\Xi_1 \otimes \varphi_2^\dagger + (-1)^{deg} \tilde{\varphi}_1 \otimes \Xi_2\big) \circ \Phi$$

est une homotopie entre $\varphi^\dagger$ et $\tilde{\varphi}$ que l'on peut vérifier être admissible de la même façon que l'on a vérifié l'admissibilité de $\varphi$ avant l'énoncé du théorème. Nous avons donc

$$\operatorname{ind}(\tilde{\varphi}, G_1 \times G_2) = \operatorname{ind}(\tilde{\varphi}, G_1' \times G_2') = \operatorname{ind}(\varphi^\dagger, G_1' \times G_2'),$$

d'où, en utilisant le cas particulier déjà démontré :

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(\varphi, U_1 \times U_2) &= \operatorname{ind}(\varphi^\dagger, G_1' \times G_2') \\ &= \operatorname{ind}(\varphi_1^\dagger, G_1') \cdot \operatorname{ind}(\varphi_2^\dagger, G_2') \\ &= \operatorname{ind}(\varphi_1, U_1) \cdot \operatorname{ind}(\varphi_2, U_2). \qquad \square\end{aligned}$$

**4. L'indice de point fixe pour les fonctions.** Soit $U$ un ouvert d'un espace topologique $X$. Une fonction continue $f : U \to X$ est dite admissible si elle est compacte et si $\operatorname{Fix} f$ est un sous-ensemble compact de $U$. De même, une homotopie $F : U \times I \to X$ est dite admissible si elle est compacte et si $\bigcup_{t \in I} \operatorname{Fix} F_t$ est un sous-ensemble compact de $U$.

Si $X$ est un $R$-RAV algébrique et si la fonction $f$ est admissible, il en est de même du morphisme de chaînes $f_\# : S(U, R) \to S(X, R)$ induit par $f$, et nous pouvons définir l'indice de point fixe en posant $\operatorname{ind}(f, U) = \operatorname{ind}(f_\#, U)$.

**Théorème 3.** *L'indice de point fixe ainsi défini a les propriétés suivantes :*

(I) (Normalisation) *Si* $U = X$, *alors* $\operatorname{ind}(f, X) = \Lambda(f)$.

(II) (Additivité) *Si* $V_1$, $V_2$ *sont deux ouverts disjoints contenus dans* $U$ *tels que* $\operatorname{Fix} f \subset V_1 \cup V_2$, *alors* $\operatorname{ind}(f, U) = \operatorname{ind}(f, V_1) + \operatorname{ind}(f, V_2)$.

(III) (Existence) *Si* $\operatorname{ind}(f, U) \neq 0$, *alors* $f$ *a un point fixe.*

(IV) (Homotopie) *Si* $F : U \times I \to X$ *est une homotopie admissible, alors* $\operatorname{ind}(F_0, U) = \operatorname{ind}(F_1, U)$.

(V) (Contraction) *Soit* $Y$ *un sous-espace de* $X$ *qui est aussi un* $R$*-RAV algébrique. Si* $f(U)$ *est contenu dans un compact de* $Y$ *et si* $f_Y : U \cap Y \to Y$ *est induite par* $f$, *alors* $\operatorname{ind}(f, U) = \operatorname{ind}(f_Y, U \cap Y)$.

(VI) (Multiplicativité) *Si* $f_1 : U_1 \to X_1$ *et* $f_2 : U_2 \to X_2$ *sont admissibles, où* $U_1$ *et* $U_2$ *sont des ouverts des* $R$*-RAV algébriques* $X_1$ *et* $X_2$, *alors* $\operatorname{ind}(f_1 \times f_2, U_1 \times U_2) = \operatorname{ind}(f_1, U_1) \cdot \operatorname{ind}(f_2, U_2)$.

(VII) (Commutativité) *Soient* $U_0$ *et* $U_1$ *des ouverts des* $R$*-RAV algébriques* $X_0$ *et* $X_1$, *et soient* $f_0 : U_0 \to X_1$ *et* $f_1 : U_1 \to X_0$ *des fonctions continues. Si les fonctions* $f_1 f_0 : U_0' = f_0^{-1}(U_1) \to X_0$ *et* $f_0 f_1 : U_1' = f_1^{-1}(U_0) \to X_1$ *sont admissibles et si* $f_1$ *est compacte, alors* $\operatorname{ind}(f_1 f_0, U_0') = \operatorname{ind}(f_0 f_1, U_1')$.

D é m o n s t r a t i o n. Les propriétés (I)–(V) résultent immédiatement du théorème 1.

(VI) Soient $\Phi$, $\Psi$ des morphismes d'Eilenberg-Zilber comme au théorème 2. Les morphismes $(f_1 \times f_2)_\#$ et $\varphi = \Psi \circ (f_{1\#} \otimes f_{2\#}) \circ \Phi$ de $S(U_1 \times U_2, R)$ dans $S(X_1 \times X_2, R)$ sont homotopes par une homotopie $h : S(U_1 \times U_2, R) \to S(X_1 \times X_2, R)$ telle que $h(S(Y_1 \times Y_2, R)) \subset S(f_1(Y_1) \times f_2(Y_2), R)$ quels que soient les sous-ensembles $Y_1$ et $Y_2$ de $X_1$ et $X_2$ resp. (voir [3], VI.12.1). Si $C_j$ est un compact de $X_j$ contenant $f_j(U_j)$, alors $S(C_1 \times C_2, R)$ contient $\operatorname{im} h$. Si $x$ est un point de $X_1 \setminus \operatorname{Fix} f_1$, il y a un voisinage $V$ de $x$ tel que $f_1(V) \cap V = \emptyset$, donc $h(S(V \times U_2, R)) \subset S((X \setminus V) \times X_2, R)$, ce qui montre que $\{x\} \times U_2$ ne contient aucun point fixe de $h$. Raisonnant de même avec la deuxième variable, nous voyons que $\operatorname{Fix} h$ est contenu dans le compact $\operatorname{Fix} f_1 \times \operatorname{Fix} f_2 \subset U_1 \times U_2$ et, étant fermé dans $U_1 \times U_2$, est un sous-ensemble compact de $U_1 \times U_2$. L'homotopie $h$ est donc admissible et nous avons $\operatorname{ind}((f_1 \times f_2)_\#, U_1 \times U_2) = \operatorname{ind}(\varphi, U_1 \times U_2)$, d'où, d'après le théorème 2,

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(f_1 \times f_2, U_1 \times U_2) &= \operatorname{ind}(f_{1\#}, U_1) \cdot \operatorname{ind}(f_{2\#}, U_2)\\ &= \operatorname{ind}(f_1, U_1) \cdot \operatorname{ind}(f_2, U_2).\end{aligned}$$

(VII) Dans toute la suite de cette démonstration, $j = 0, 1$ et $j+1$ est réduit modulo 2. Soit $A_j$ un voisinage ouvert de $X_j \setminus U'_j$ dont la fermeture est disjointe de $\operatorname{Fix} f_{j+1} f_j$. Puisque $f_j(\operatorname{Fix} f_{j+1} f_j) = \operatorname{Fix} f_j f_{j+1}$, nous pouvons trouver un voisinage ouvert $B_j$ de $\operatorname{Fix} f_{j+1} f_j$ vérifiant $\overline{A}_j \cap \overline{B}_j = \emptyset$ et $\overline{f_j(B_j)} \cap \overline{A}_{j+1} = \emptyset$. Soit $\mathcal{G}_j$ un recouvrement ouvert de $X_j$ vérifiant

(10) si $G$ est un élément de $\mathcal{G}_j$ rencontrant $X_j \setminus (A_j \cup B_j)$, alors $\operatorname{St}(G, \mathcal{G}_j) \subset U'_j$ et $\operatorname{St}(G, \mathcal{G}_j) \cap \operatorname{St}(f_{j+1} f_j(G), \mathcal{G}_j) = \emptyset$.

Nous construirons un recouvrement ouvert $\mathcal{V}_j$ de $X_j$ plus fin que $\mathcal{G}_j$ et vérifiant

(11) $\operatorname{St}(\overline{A}_j, \mathcal{V}_j) \cap \operatorname{St}(\overline{B}_j \cup \overline{f_{j+1}(B_{j+1})}, \mathcal{V}_j) = \emptyset$,

(12) tout élément de $\mathcal{V}_j$ rencontrant $X_j \setminus A_j$ est contenu dans $U'_j$,

(13) pour tout $V \in \mathcal{V}_j$, $f_j(V)$ est contenu dans un élément de $\mathcal{G}_{j+1}$.

Alors $\mathcal{V}_j$ vérifie les conditions ($\alpha$)-($\gamma$) de la section précédente pour $\varphi = (f_{j+1} f_j)_\#$ et $\mathcal{U} = \{U'_j\}$ (($\gamma$) résulte de (10) puisque $\mathcal{V}_j$ est plus fin que $\mathcal{G}_j$).

Soit $C_0$ un compact de $X_0$ contenant $f_1(U_1)$, et soit $C_1$ un compact de $X_1$ contenant $f_0 f_1(U_1')$. Nous construirons un recouvrement ouvert $\mathcal{W}_j$ de $X_j$, un complexe simplicial $K_j$, des morphismes de chaînes $\psi_j : S(X_j, \mathcal{W}_j, R) \to C(K_j', R)$, $\zeta_j : C(K_j', R) \to S(X_j, R)$ et une homotopie $h_j : S(X_j, \mathcal{W}_j, R) \to S(X_j, R)$ vérifiant les conditions du théorème A relativement à $\mathcal{V}_j$ et $C_j$.

Nous construisons d'abord $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{W}_1$. La condition (d) du théorème A nous donne un voisinage $O_1$ de $C_1$ et un sous-complexe fini $L_1$ de $K_1$ tel que $C(L_1, R)$ contienne $\psi_1\big(S(X_1, \mathcal{W}_1, R) \cap S(O_1, R)\big)$. Nous avons alors $f_0 f_1(U_1') \subset C_1 \subset O_1$, et nous pouvons prendre $\mathcal{V}_0$ assez fin pour qu'il vérifie aussi

(14) si un élément $V$ de $\mathcal{V}_0$ rencontre $(X_0 \setminus A_0) \cap \overline{f_1(U_1')}$, alors $f_0(V) \subset O_1$.

Aucune condition supplémentaire n'est imposée à $\mathcal{W}_0$.

Alors $\operatorname{ind}(f_{j+1} f_j, U_j')$ est le nombre de Lefschetz de l'endomorphisme

$$\xi_j = \psi_j \circ Sd_2^j \circ (f_{j+1} f_j)_\# \circ \vartheta_{A_j} \circ \zeta_j$$

de $C(K_j', R)$, où $Sd_2^j$ est un opérateur de subdivision de $S(X_j, R)$ dans $S(X_j, \mathcal{W}_j, R)$ (l'opérateur correspondant à $Sd_1$ est omis, étant l'identité). Définissons un morphisme de modules gradués $\mu_j : C(K_j', R) \to C(K_{j+1}', R)$ par

$$\mu_j = \psi_{j+1} \circ Sd_2^{j+1} \circ f_{j\#} \circ \vartheta_{A_j} \circ \zeta_j.$$

L'image de $f_{1\#}$ étant contenue dans $S(C_0, R)$, la condition (d) du théorème A garantit que $\operatorname{im} \mu_1$ est de type fini, donc les nombres de Lefschetz $\Lambda(\mu_1 \circ \mu_0)$ et $\Lambda(\mu_0 \circ \mu_1)$ sont définis et égaux. Pour achever de prouver (VII), il suffit de montrer que $\Lambda(\xi_j) = \Lambda(\mu_{j+1} \circ \mu_j)$. Nous avons

$$\mu_{j+1} \circ \mu_j = \psi_j \circ Sd_2^j \circ f_{(j+1)\#} \circ \vartheta_{A_{j+1}} \circ \zeta_{j+1} \circ \psi_{j+1} \circ Sd_2^{j+1} \circ f_{j\#} \circ \vartheta_{A_j} \circ \zeta_j.$$

Soit $\tilde{h}_j : S(X_j, R) \to S(X_j, R)$ une homotopie entre l'identité et $Sd_2^j$ telle que $\|\tilde{h}_j(c)\| \subset \|c\|$ pour toute chaîne $c$. Alors $h_j^\dagger = h_j \circ Sd_2^j + \tilde{h}_j$ est une homotopie entre l'identité de $S(X_j, R)$ et $\zeta_j \circ \psi_j \circ Sd_2^j$ qui, d'après (c) du théorème A, envoie $S(Y, R)$ dans $S(\mathrm{St}(Y, \mathcal{V}_j), R)$ pour tout $Y \subset X_j$. Définissons un endomorphisme $k_j^\dagger$ de degré un du module gradué $C(K_j', R)$ par

$$k_j^\dagger = \psi_j \circ Sd_2^j \circ f_{(j+1)\#} \circ \vartheta_{A_{j+1}} \circ h_{j+1}^\dagger \circ f_{j\#} \circ \vartheta_{A_j} \circ \zeta_j.$$

L'image de $Sd_2^0 \circ f_{1\#} \circ \vartheta_{A_0}$ est contenue dans $S(C_0, R)$, donc (d) du théorème A garantit que l'image de $k_0^\dagger$ est de type fini. L'image de $f_{1\#} \circ \vartheta_{A_1} \circ$

$\zeta_1$ est contenue dans $S(f_1(U_1'), R)$, que $h_0^\dagger$ envoie dans $S(\mathrm{St}(f_1(U_1'), \mathcal{V}_0), R)$. Si un élément $V$ de $\mathcal{V}_0$ est contenu dans $A_0$, alors $\vartheta_{A_0}$ annule tous les simplexes singuliers dont le support rencontre $V$, et si $V$ n'est pas contenu dans $A_0$ et rencontre $f_1(U_1')$, alors $f_0(V)$ est contenu dans $O_1$ d'après (14). Il en résulte que $f_{0\#} \circ \vartheta_{A_0}$envoie $S(\mathrm{St}(f_1(U_1'), \mathcal{V}_0), R)$ dans $S(O_1, R)$, donc l'image de $k_1^\dagger$ est contenue dans $C(L_1, R)$ et est aussi de type fini.

D'après le lemme 1, il suffit, pour montrer que $\Lambda(\xi_j) = \Lambda(\mu_{j+1} \circ \mu_j)$, de vérifier que, pour tout simplexe $\tau$ de $K_j'$,

$$\langle \tau, \mu_{j+1} \circ \mu_j(\tau) - \xi_j(\tau)\rangle = \langle \tau, \partial k_j^\dagger(\tau) + k_j^\dagger \partial(\tau)\rangle. \tag{15}$$

Pour tout $W \in \mathcal{W}_j$, il y a un simplexe $s_W$ de $K_j$ tel que $C(\mathrm{Tr}(s_W, K_j), R)$ contienne $\psi_j(S(W, R))$, et un élément $V_W$ de $\mathcal{V}_j$ contenant $W$ et $\|\zeta(t)\|$ pour tout $t \in \mathrm{Tr}(s_W, K_j)$. Si $\tau$ n'appartient pas à $M_j = \bigcup\{\mathrm{Tr}(s_W, K_j) \mid W \in \mathcal{W}_j\}$, alors les deux membres de (15) sont nuls.

Supposons que $\tau$ appartienne à $\mathrm{Tr}(s_W, K_j)$. Alors $f_{j\#} \circ \vartheta_{A_j} \circ \zeta_j$ envoie $C(\mathrm{Tr}(s_W, K_j), R)$ dans $S(f_j(V_W), R)$. La condition (c) du théorème A garantit que $h_{j+1}^\dagger$ et $\zeta_{j+1} \circ \psi_{j+1} \circ Sd_2^{j+1}$ envoient $S(f_j(V_W), R)$ dans $S(\mathrm{St}(f_j(V_W), \mathcal{V}_{j+1}), R)$, donc si $V_W \cap A_j = \emptyset = \mathrm{St}(f_j(V_W), \mathcal{V}_{j+1}) \cap A_{j+1}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mu_{j+1} \circ \mu_j(\tau) - \xi_j(\tau)& \\
&= \psi_j \circ Sd_2^j \circ f_{(j+1)\#} \circ \big(\zeta_{j+1} \circ \psi_{j+1} \circ Sd_2^{j+1} - id\big) \circ f_{j\#} \circ \zeta_j(\tau) \\
&= \psi_j \circ Sd_2^j \circ f_{(j+1)\#} \circ (\partial h_{j+1}^\dagger + h_{j+1}^\dagger \partial) \circ f_{j\#} \circ \zeta_j(\tau) \\
&= \partial k_j^\dagger(\tau) + k_j^\dagger \partial(\tau).
\end{aligned}$$

Pour achever de vérifier (15), nous allons montrer que les deux membres de (15) sont nuls si $V_W \cap A_j \neq \emptyset$ ou si $\mathrm{St}(f_j(V_W), \mathcal{V}_{j+1}) \cap A_{j+1} \neq \emptyset$. Si $V_W$ est contenu dans $A_j$, alors $\vartheta_{A_j}$ annule $\zeta_j(\tau)$ et $\zeta_j(\partial\tau)$, donc les deux membres de (15) sont nuls. Supposons maintenant $V_W \setminus A_j \neq \emptyset$. Alors $V_W \setminus (A_j \cup B_j) \neq \emptyset$, car sinon $V_W$ rencontre $B_j$ puisqu'il n'est pas contenu dans $A_j$ et, d'après (11), $V_W$ est disjoint de $A_j$, donc contenu dans $B_j$, et (11) entraîne que $\mathrm{St}(f_j(V_W), \mathcal{V}_{j+1}) \subset \mathrm{St}(f_j(B_j), \mathcal{V}_{j+1})$ est disjoint de $A_{j+1}$, ce qui contredit nos hypothèses sur $V_W$.

Les quatre chaînes apparaissant dans la formule (15) appartiennent à $\psi_j \circ Sd_2^j\big(S(f_{j+1}(\mathrm{St}(f_j(V_W), \mathcal{V}_{j+1})), R)\big)$, donc sont des combinaisons linéaires $\sum_{p=1}^n \lambda_p \psi_j(\sigma_p)$, où $\sigma_p$ est un simplexe singulier de $X_j$ dont le support est contenu dans $f_{j+1}(\mathrm{St}(f_j(V_W), \mathcal{V}_{j+1}))$ et dans un élément $W_p$ de $\mathcal{W}_j$. Pour terminer de vérifier que les deux membres de (15) sont nuls, il suffit de constater que le support de $\psi_j(\sigma_p)$ ne contient pas $\tau$. Mais ce support est contenu dans $\mathrm{Tr}(s_{W_p}, K_j)$, et si $\mathrm{Tr}(s_{W_p}, K_j)$ contenait $\tau$, alors, comme nous l'avons remarqué dans la démonstration du lemme 2, $V_W \cap V_{W_p}$ serait non vide, donc $\mathrm{St}(V_W, \mathcal{V}_j)$ contiendrait $\|\sigma_p\|$. Soit $G_W$ un élément de $G_j$ contenant $V_W$ ; alors $\mathrm{St}(V_W, \mathcal{V}_j)$ est contenu dans $\mathrm{St}(G_W, \mathcal{G}_j)$ et la condition (13) entraîne que $f_{j+1}(\mathrm{St}(f_j(V_W), \mathcal{V}_{j+1}))$ est contenu dans $\mathrm{St}(f_{j+1}f_j(G_W), \mathcal{G}_j)$, et nous avons alors

$$\emptyset \neq \|\sigma_p\| \subset \mathrm{St}(G_W, \mathcal{G}_j) \cap \mathrm{St}(f_{j+1}f_j(G_W), \mathcal{G}_j),$$

ce qui contredit (10) puisque $\emptyset \neq V_W \setminus (A_j \cup B_j) \subset G_W \setminus (A_j \cup B_j)$. $\square$

Si $U$ est un ouvert de $X$, $f : U \to X$ une fonction continue et $m \geq 1$ un entier, nous notons $f^m$ la composée de $m$ copies de $f$ ; cette fonction est définie sur un sous-ensemble de $U$. Nous avons la généralisation suivante du théorème mod $p$ :

**Théorème 4.** *Soient $X$ un $\mathbb{Z}$-RAV algébrique, $U$ un ouvert de $X$, $f : U \to X$ une fonction compacte et $U'$ un ouvert contenu dans $U$ sur lequel $f^m$ est définie, où $m = p^k$ avec $p$ premier. Supposons que $S = \{x \in U' \mid f^m(x) = x\}$ soit compact et que $f(S) \subset S$. Alors* $\mathrm{ind}(f^m, U') \equiv \mathrm{ind}(f, U') \mod p$.

D é m o n s t r a t i o n. Dans toute cette démonstration, $\varphi^n$ désignera la composée de $n$ copies d'une fonction $\varphi$ et $\varphi^0$ l'identité. Notons que les points fixes de $f$ sont contenus dans $S$. Soit $A$ un voisinage ouvert de $X \setminus U'$ tel que $\overline{A} \cap S = \emptyset$. Posons $B_{m+1} = X \setminus \overline{A}$. Puisque $f(S)$ est contenu dans $S$, nous pouvons construire inductivement des voisinages ouverts $B_m, \ldots, B_0$ de $S$ tels que $\overline{B}_n \cup f(B_n) \subset B_{n+1}$ pour $0 \leq n \leq m$. Posons $B = B_0$. Soit $\mathcal{V}_m$ un recouvrement ouvert de $X$ vérifiant

(16) $\mathrm{St}(\overline{B}_n, \mathcal{V}_m) \subset B_{n+1}$ pour $0 \leq n \leq m$,

(17) si $V$ est un élément de $\mathcal{V}_m$ tel que $V \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$, alors $V$ est contenu dans $U'$ et $\mathrm{St}(V, \mathrm{St}(\mathcal{V}_m)) \cap f(V) = \emptyset = \mathrm{St}(V, \mathrm{St}(\mathcal{V}_m)) \cap f^m(V)$.

Partant de $\mathcal{V}_m$, construisons inductivement des recouvrements ouverts $\mathcal{V}_n$, $m \geq n \geq 0$ de façon que, pour $0 \leq n < m$, $\mathrm{St}(\mathcal{V}_n)$ soit plus fin que $\mathcal{V}_{n+1}$ et vérifie

(18) si $V$ est un élément de $\mathcal{V}_n$ tel que $\mathrm{St}(V, \mathcal{V}_n) \setminus A \neq \emptyset$, alors $\mathrm{St}(V, \mathcal{V}_n)$ est contenu dans $U'$ et $f(\mathrm{St}(V, \mathcal{V}_n))$ est contenu dans un élément de $\mathcal{V}_{n+1}$.

Posons $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$. Puisque $\mathrm{St}(\mathcal{V})$ est plus fin que $\mathcal{V}_m$, il résulte de (16)–(18) qu'il vérifie les conditions ($\alpha$)-($\gamma$) de la section 3 relativement à $A$, $B$ et $\varphi = f_\#$

ou $\varphi = (f_m)_\#$. Soit $C$ un compact de $X$ contenant $f(U)$. Prenons $\mathcal{W}$, $K$, $\psi : S(X,\mathcal{W},\mathbb{Z}) \to C(K',\mathbb{Z})$, $\zeta : C(K',\mathbb{Z}) \to S(X,\mathbb{Z})$ et $h : S(X,\mathcal{W},\mathbb{Z}) \to S(X,\mathbb{Z})$ vérifiant les conditions (a)-(d) du théorème A relativement à $\mathcal{V}$ et $C$. Définissant, pour $n = 1, m$ des endomorphismes $\xi_n$ du groupe gradué $C(K',\mathbb{Z})$ par

$$\xi_n = \psi \circ Sd_2 \circ (f^n)_\# \circ \vartheta_A \circ \zeta,$$

où $Sd_2 : S(X,\mathbb{Z}) \to S(X,\mathcal{W},\mathbb{Z})$ est un opérateur de subdivision, nous avons alors $\mathrm{ind}(f,U') = \Lambda(\xi_1)$ et $\mathrm{ind}(f^m,U') = \Lambda(\xi_m)$.

Il y a un sous-complexe fini $L$ de $K'$ tel que $C(L,\mathbb{Z})$ contienne l'image par $\psi$ de $S(C,\mathbb{Z})$. Si $\varphi$ est un endomorphisme d'un groupe abélien libre de rang fini, alors la trace de $\varphi^m$ est congrue à la trace de $\varphi$ modulo $p$ (voir la démonstration du théorème 9.3.4 de [4]). Appliquant cela à l'endomorphisme de $C(L,\mathbb{Z})$ induit par $\xi_1$, nous obtenons

$$\Lambda(\xi_1^m) \equiv \Lambda(\xi_1) \qquad \mathrm{mod}\ p,$$

et il nous suffit de montrer que $\Lambda(\xi_m) = \Lambda(\xi_1^m)$. Soit $\tilde{h} : S(X,\mathbb{Z}) \to S(X,\mathbb{Z})$ une homotopie entre l'identité et $Sd_2$ telle que $\|\tilde{h}(c)\| \subset \|c\|$ pour toute chaîne $c$. Alors $\hat{h} = h \circ Sd_2 + \tilde{h}$ est une homotopie entre l'identité et $\zeta \circ \psi \circ Sd_2$ vérifiant $\hat{h}(S(Y,\mathbb{Z})) \subset S(\mathrm{St}(Y,\mathcal{V}),\mathbb{Z})$ pour tout sous-ensemble $Y$ de $X$. Définissons un endomorphisme $k$ du groupe gradué $C(K',\mathbb{Z})$ par

$$k = \sum_{n=1}^{m-1} \xi_1^{m-n-1} \circ (\psi \circ Sd_2 \circ f_\# \circ \vartheta_A) \circ \hat{h} \circ (f_\# \circ \vartheta_A)^n \circ \zeta.$$

L'image de $k$ est contenue dans $C(L,\mathbb{Z})$, donc $k$ est de type fini, et il nous suffit de montrer que, pour tout simplexe $\tau$ de $K'$,

$$\langle \tau, \xi_1^m(\tau) - \xi_m(\tau)\rangle = \langle \tau, \partial k(\tau) + k\partial(\tau)\rangle \tag{19}$$

Pour tout $W \in \mathcal{W}$, soit $s_W$ un simplexe de $K$ tel que $C(\mathrm{Tr}(s_W,K),\mathbb{Z})$ contienne $\psi(S(W,\mathbb{Z}))$, et soit $V_W$ un élément de $\mathcal{V}$ contenant $W$ et $\|\zeta(t)\|$ pour tout $t \in \mathrm{Tr}(s_W,K)$. Si $\tau$ n'appartient pas à la réunion des $\mathrm{Tr}(s_W,K)$, alors les deux membres de (19) sont nuls.

Pour traiter le cas où $\tau$ appartient à $\mathrm{Tr}(s_W,K)$, définissons des endomorphismes $\chi_0,\dots,\chi_{m-1}$ du groupe gradué $S(X,\mathbb{Z})$ par

$$\chi_0 = Sd_2 \circ (f_\# \circ \vartheta_A \circ \zeta \circ \psi \circ Sd_2)^{m-1} \circ f_\# \circ \vartheta_A$$

et, pour $1 \le n \le m-1$,

$$\chi_n = Sd_2 \circ (f_\# \circ \vartheta_A \circ \zeta \circ \psi \circ Sd_2)^{m-n-1} \circ f_\# \circ \vartheta_A \circ \hat{h} \circ (f_\# \circ \vartheta_A)^n,$$

de sorte que $\xi_1^m = \psi \circ \chi_0 \circ \zeta$ et $k = \sum_{n=1}^{m-1} \psi \circ \chi_n \circ \zeta$. Remarquons que ou bien toutes les fonctions $\chi_n$ annulent $S(V_W, \mathbb{Z})$, ou bien il existe $V_m \in \mathcal{V}_m$ contenant $f^m(V_W)$ tel que $S(V_m, \mathbb{Z})$ contienne les images de toutes les fonctions $\chi_n$. En effet, si $V_W$ est contenu dans $A$, alors $S(V_W, \mathbb{Z})$ est annulé par $\vartheta_A$, donc par toutes les $\chi_n$. Si $V_W$ n'est pas contenu dans $A$, il existe, d'après (18), un élément $V_1$ de $\mathcal{V}_1$ contenant $f(V_W)$, et $S(V_1, \mathbb{Z})$ contient l'image de $S(V_W, \mathbb{Z})$ par $f_\# \circ \vartheta_A$. Supposons que, pour un certain $q < m$, il existe un élément $V_q \in \mathcal{V}_q$ contenant $f^q(V_W)$ et tel que $S(V_q, \mathbb{Z})$ contienne les images de $S(V_W, \mathbb{Z})$ par les fonctions

$$\chi_{0,q} = (f_\# \circ \vartheta_A \circ \zeta \circ \psi \circ Sd_2)^{q-1} \circ f_\# \circ \vartheta_A$$

et

$$\chi_{n,q} = (f_\# \circ \vartheta_A \circ \zeta \circ \psi \circ Sd_2)^{q-n-1} \circ f_\# \circ \vartheta_A \circ \hat{h} \circ (f_\# \circ \vartheta_A)^n$$

où $1 \leq n < q$. Alors $\zeta \circ \psi \circ Sd_2$ et $\hat{h}$ envoient $S(V_q, \mathbb{Z})$ dans $S(\mathrm{St}(V_q, \mathcal{V}), \mathbb{Z}) \subset S(\mathrm{St}(V_q, \mathcal{V}_q), \mathbb{Z})$. Si $\mathrm{St}(V_q, \mathcal{V}_q) \subset A$, alors $\vartheta_A$ annule $S(\mathrm{St}(V_q, \mathcal{V}_q), \mathbb{Z})$, donc toutes les $\chi_n$ annulent $S(V_W, \mathbb{Z})$. Si $\mathrm{St}(V_q, \mathcal{V}_q)$ n'est pas contenu dans $A$, il y a un élément $V_{q+1}$ de $\mathcal{V}_{q+1}$ contenant $f(\mathrm{St}(V_q, \mathcal{V}_q))$, donc $f^{q+1}(V_W)$, et $S(V_{q+1}, \mathbb{Z})$ contient les images de $S(V_W, \mathbb{Z})$ par les fonctions $\chi_{n,q+1}$ $(0 \leq n < q+1)$. Comme $\chi_{n,m} = \chi_n$, l'ensemble $V_m$ a les propriétés souhaitées.

Plusieurs cas sont maintenant à distinguer. Si $V_W \cap B \neq \emptyset$, alors $\emptyset \neq f^n(V_W \cap B) \subset B_n \cap V_n$ pour $n < m$. D'après (16), $\mathrm{St}(V_n, \mathcal{V}_n)$ est disjoint de $A$, donc la restriction de $\vartheta_A$ à $S(\mathrm{St}(V_n, \mathcal{V}_n), \mathbb{Z})$ est l'identité, ce qui justifie le calcul suivant, où nous utilisons aussi le fait qu'alors $\xi_1 = \psi \circ Sd_2 \circ f_\# \circ \zeta$.

$$\begin{aligned}
\partial k(\tau) + k\partial(\tau) &= \sum_{n=1}^{m-1} \xi_1^{m-n-1} \circ (\psi \circ Sd_2 \circ f_\#) \circ (\partial\hat{h} + \hat{h}\partial) \circ (f_\#)^n \circ \zeta(\tau) \\
&= \sum_{n=1}^{m-1} \xi_1^{m-n-1} \circ (\psi \circ Sd_2 \circ f_\#) \circ (\zeta \circ \psi \circ Sd_2 - id) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \circ (f_\#)^n \circ \zeta(\tau) \\
&= \sum_{n=1}^{m-1} \xi_1^{m-n} \circ \psi \circ Sd_2 \circ (f_\#)^n \circ \zeta(\tau) \\
&\qquad\qquad - \sum_{n=1}^{m-1} \xi_1^{m-n-1} \circ \psi \circ Sd_2 \circ (f_\#)^{n+1} \circ \zeta(\tau) \\
&= \xi_1^{m-1} \circ \psi \circ Sd_2 \circ f_\# \circ \zeta(\tau) - \psi \circ Sd_2 \circ (f_\#)^m \circ \zeta(\tau) \\
&= \xi_1^m(\tau) - \xi_m(\tau).
\end{aligned}$$

Si $V_W \cap B = \emptyset$, nous allons montrer que les deux membres de (19) sont nuls. Si les quatre chaînes apparaissant dans (19) ne sont pas toutes nulles, alors $V_W$ n'est pas contenu dans $A$, donc $V_W \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$. Si les fonctions $\chi_n$ n'annulent pas toutes $S(V_W, \mathbb{Z})$, alors les quatre chaînes apparaissant dans (19) appartiennent à $\psi \circ Sd_2(S(V_m, \mathbb{Z}))$, donc il suffit de montrer que, pour toute chaîne $c \in S(V_m, \mathbb{Z})$, le support de $\psi \circ Sd_2(c)$ ne contient pas $\tau$. Mais $Sd_2(c)$ est une combinaison linéaire $\sum_{r=1}^{p} \lambda_r \sigma_r$, où $\sigma_r$ est un simplexe singulier dont le support est contenu dans $\|c\|$ et dans un élément $W_r$ de $\mathcal{W}$. Le support de $\psi(\sigma_r)$ est contenu dans $\mathrm{Tr}(s_{W_r}, K)$, et si $\mathrm{Tr}(s_{W_r}, K)$ contenait $\tau$, nous aurions $V_W \cap W_r \neq \emptyset$, et comme $V_{W_r} \cap V_m$ contient $\|\sigma_r\| \neq \emptyset$, $V_m$ serait contenu dans $\mathrm{St}(V_W, \mathrm{St}(\mathcal{V}_m))$, ce qui contredirait (17) appliqué à un élément de $\mathcal{V}_m$ contenant $V_W$.

Le dernier cas non trivial à vérifier est celui où toutes les fonctions $\chi_n$ annulent $S(V_W, \mathbb{Z})$ mais où $\xi_m(\tau) \neq 0$. Il faut alors constater que $\langle \tau, \xi_m(\tau) \rangle = 0$, mais comme $\xi_m(\tau)$ appartient à $\psi \circ Sd_2(S(f^m(V_W), \mathbb{Z}))$, l'argument précédent s'applique encore. $\square$

**5. Involutions et indice.** Un théorème connu de Borsuk affirme que si $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ symétrique par rapport à l'origine et $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue admissible telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x$ appartenant à la frontière de $U$, alors $\mathrm{ind}(f, U)$ est impair. Nous généraliserons ce résultat ici à une classe de groupes topologiques contenant tous les e.v.t. métrisables.

Soit $G$ un groupe topologique. Nous notons $e$ l'identité de $G$ et, pour $x \in G$, $x^2$ le produit $x.x$ et $x^{-1}$ l'inverse de $x$. Si $V$ est un voisinage de $e$ et si $H : V \times I \to G$ est une homotopie telle que $H_0(x) = x$ et $H_1(x) = e$ pour tout $x \in V$, alors $O = \{(x, y) \in G \times G \,|\, xy^{-1} \in V\}$ est un voisinage de la diagonale de $G \times G$ et la fonction $\lambda : O \times I \to G$ définie par

$$\lambda(x, y, t) = H(e, t)^{-1}.H(x.y^{-1}, t).y$$

vérifie $\lambda(x, y, 0) = x$, $\lambda(x, y, 1) = y$ et $\lambda(x, x, t) = x$ ; si $G$ est contractile, $\lambda$ est définie sur $G \times G \times I$ tout entier. Avec le théorème 8 de [2], cela entraîne que tout groupe métrisable localement contractile est un $R$-RAV algébrique pour tout anneau $R$.

**Théorème 5.** *Soient $G$ un groupe topologique métrisable contractile tel que la fonction $x \mapsto x^2$ soit un homéomorphisme de $G$ sur $G$. Soient $U$ un voisinage ouvert symétrique de $e$ dans $G$ et $f : \overline{U} \to G$ une fonction continue compacte sans point fixe sur $\overline{U} \setminus U$. Si $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ pour tout $x \in \overline{U} \setminus U$, alors* $\mathrm{ind}(f, U)$ *est impair.*

Pour prouver ce théorème, nous utiliserons un résultat auxiliaire. Une involution $\mu : X \to X$ est une fonction continue telle que $\mu \circ \mu = id$. Un sous-ensemble $U$ de $X$ est dit $\mu$-invariant si $\mu(U) = U$, une famille $\mathcal{U}$ de sous-ensembles de $X$ est $\mu$-invariante si $\mu(U)$ appartient à $\mathcal{U}$ pour tout $U \in \mathcal{U}$. Enfin, un morphisme de chaînes $\varphi : S(U,\mathcal{U}, R) \to S(X, R)$ est $\mu$-invariant si $U$ et $\mathcal{U}$ sont $\mu$-invariants et si $\varphi \circ \mu_\# = \mu_\# \circ \varphi$ (l'invariance de $U$ et $\mathcal{U}$ garantit que $\mu_\#(S(U,\mathcal{U}, R)) = S(U,\mathcal{U}, R)$ donc $\varphi \circ \mu_\#$ est défini).

**Lemme 5.** *Soient $X$ un $\mathbb{Z}$-RAV algébrique, $\mu : X \to X$ une involution et $\varphi : S(U,\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \to S(X, \mathbb{Z})$ un morphisme de chaînes admissible $\mu$-invariant. Si $\mu$ n'a pas de point fixe, alors* $\mathrm{ind}(\varphi, U)$ *est pair.*

D é m o n s t r a t i o n. Nous choisirons de façon particulière les objets intervenant dans la définition de l'indice. Nous reprenons les notations utilisées au début de la section 3. Puisque $U$ est $\mu$-invariant, nous pouvons prendre l'ouvert $A$ $\mu$-invariant. Nous prenons $\mathcal{V}$ $\mu$-invariant et tel que $\mu(\mathrm{St}(V, \mathcal{V})) \cap \mathrm{St}(V, \mathcal{V}) = \emptyset$ pour tout $V \in \mathcal{V}$. Nous allons montrer qu'il est possible de choisir $K$ de façon qu'il existe une involution simpliciale $\hat{\mu}$ de $K$ telle que $\hat{\mu}(s) \neq s$ pour tout simplexe $s$ de $K$. Cette involution induit une involution de $K'$, que nous notons encore $\hat{\mu}$. Notant $\hat{\mu}_\#$ l'automorphisme de $C(K', \mathbb{Z})$ induit par $\hat{\mu}$, nous prendrons pour $\mathcal{W}$ un recouvrement $\mu$-invariant et construirons $\psi$ et $\zeta$ de façon que $\hat{\mu}_\# \circ \psi = \psi \circ \mu_\#$ et $\mu_\# \circ \zeta = \zeta \circ \hat{\mu}_\#$. Puisque $A$ est $\mu$-invariant, nous avons $\mu_\# \circ \vartheta_A = \vartheta_A \circ \mu_\#$. Puisque $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ sont $\mu$-invariants, $Sd_1$ et $Sd_2$ commutent avec $\mu_\#$ (cela résulte de la formule définissant l'opérateur de subdivision dans la démonstration du théorème 4.4.14 de [6] ; avec les notations de ce théorème, si le recouvrement est $\mu$-invariant, alors $m(\sigma) = m(\mu \circ \sigma)$ pour tout simplexe singulier $\sigma$). Tout cela garantit que

$$\hat{\mu}_\# \circ \xi = \hat{\mu}_\# \circ \psi \circ Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta = \psi \circ Sd_2 \circ \varphi \circ Sd_1 \circ \vartheta_A \circ \zeta \circ \hat{\mu}_\# = \xi \circ \hat{\mu}_\#.$$

Choisissons les générateurs associés aux simplexes de $K'$ de façon que ceux associés à $s$ et $\hat{\mu}(s)$ se correspondent par $\mu_\#$. Nous avons alors (en utilisant la convention qu'un simplexe est identifié au générateur correspondant)

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mu}(s), \xi(\hat{\mu}(s))\rangle &= \langle \hat{\mu}_\#(s), \xi(\hat{\mu}_\#(s))\rangle = \langle \hat{\mu}_\#(s), \hat{\mu}_\#(\xi(s))\rangle \\ &= \langle s, \xi(s)\rangle,\end{aligned}$$

et, puisque $s \neq \hat{\mu}(s)$ pour tout $s$, cela entraîne la parité de $\Lambda(\xi) = \mathrm{ind}(\varphi, U)$.

Soit $Y = X/\mu$ le quotient de $X$ par $\mu$. Puisque $\mu$ n'a pas de point fixe, la projection $\pi$ de $X$ sur $Y$ est un revêtement, et le théorème 3 de [2] garantit que

$Y$ est un RAV algébrique. Les ensembles $\pi(V)$, $V \in \mathcal{V}$, forment un recouvrement ouvert $\mathcal{V}_Y$ de $Y$. Procédant comme dans la démonstration du théorème 2 de [2], construisons un complexe simplicial $K_Y$, un recouvrement ouvert $\mathcal{W}_Y$, des morphismes de chaînes $\psi_Y : S(Y, \mathcal{W}_Y, \mathbb{Z}) \to C(K'_Y, \mathbb{Z})$, $\psi : C(K'_Y, \mathbb{Z}) \to S(Y, \mathbb{Z})$ et une homotopie $h_Y : S(Y, \mathcal{W}_Y, \mathbb{Z}) \to S(Y, \mathbb{Z})$ vérifiant les conditions (a)-(d) du théorème A relativement à $\mathcal{V}_Y$ et $\pi(C)$.

$K_Y$ est le nerf d'un recouvrement ouvert $\mathcal{G}_Y = \{G_j \mid j \in J\}$ (noté $\mathcal{U}_3$ dans la démonstration du théorème 2 de [2]) plus fin que $\mathcal{V}_Y$. Pour tout $j \in J$, il y a un élément $V_j$ de $\mathcal{V}_Y$ contenant $G_j$, et il y a exactement deux éléments $V_{j^+}$, $V_{j^-}$ de $\mathcal{V}'$ que $\pi$ envoie homéomorphiquement sur $V_j$ ; chacun d'eux contient une copie de $G_j$ ; soient $G_{j^+}$, $G_{j^-}$ ces copies. La condition $\mu(\mathrm{St}(V, \mathcal{V})) \cap \mathrm{St}(V, \mathcal{V}) = \emptyset$ garantit que les ensembles $G_{j^+}$ et $G_{j^-}$ ne dépendent pas du choix de l'élément $V_j$ de $\mathcal{V}_Y$ contenant $G_j$. Le complexe $K$ est le nerf du recouvrement $\{G_{j^\pm} \mid j \in J\}$ de $X$. Si $[j_0, \dots, j_k]$ est un simplexe de $K_Y$ et si, pour $0 \le i \le k$, $V_{j_i}$ est un élément de $\mathcal{V}_Y$ contenant $G_{j_i}$, il y a exactement un des deux ensembles $V_{j_i^+}$, $V_{j_i^-}$ qui rencontre $V_{j_0^+}$ ; soit par exemple $V_{j_i^+}$ cet ensemble. Alors $\pi$ envoie $V_{j_0^+} \cup \dots \cup V_{j_k^+}$ et $V_{j_0^-} \cup \dots \cup V_{j_k^-}$ homéomorphiquement sur $V_{j_0} \cup \dots \cup V_{j_k}$ et $V_{j_r^+} \cap V_{j_s^-} = \emptyset$ pour $0 \le r, s \le k$, donc $[j_0^+, \dots, j_k^+]$ et $[j_0^-, \dots, j_k^-]$ sont des simplexes de $K$ et les sommets $j_r^+$, $j_s^-$ ne sont pas adjacents pour $0 \le r, s \le k$. Il en résulte que l'application $\hat{\mu}$ qui envoie $j^\pm$ sur $j^\mp$ est une involution simpliciale de $K$ telle que $\hat{\mu}(s) \ne s$ pour tout simplexe $s$ de $K$. En outre, la fonction $\rho$ qui envoie $j^\pm$ sur $j$ est une application simpliciale de $K$ sur $K_Y$ dont la restriction à chaque simplexe est un isomorphisme ; elle induit donc une application simpliciale de $K'$ sur $K'_Y$, que nous noterons encore $\rho$.

Le recouvrement ouvert $\mathcal{W}_Y$ est indexé par les simplexes de $K_Y$, et si $s_Y = [j_0, \dots, j_k]$ est un simplexe de $K_Y$, alors $W_{s_Y} = G_{j_0} \cap \dots \cap G_{j_K}$, et $\psi_Y$ envoie $S(W_{s_Y}, \mathbb{Z})$ dans $C(\mathrm{Tr}(s_Y, K_Y), \mathbb{Z})$. Si $s = [j_0^{\epsilon_0}, \dots, j_k^{\epsilon_k}]$, où $\epsilon_i = \pm$, est un simplexe de $K$, posons $W_s = G_{j_0}^{\epsilon_0} \cap \dots \cap G_{j_k}^{\epsilon_k}$. Les ensembles $W_s$, où $s$ parcourt les simplexes de $K$, forment un recouvrement ouvert $\mathcal{W}$ de $X$. Si $s_Y = \rho(s)$, alors $\pi$ envoie $W_s$ homéomorphiquement sur $W_{s_Y}$ et $\rho$ envoie $\mathrm{Tr}(s, K)$ isomorphiquement sur $\mathrm{Tr}(s_Y, K_Y)$, et l'on définit sans ambiguité un morphisme de chaînes $\psi : S(X, \mathcal{W}, \mathbb{Z}) \to C(K', \mathbb{Z})$ en posant, pour tout $s \in K$,

$$\psi | S(W_s, \mathbb{Z}) = (\rho_\# | \mathrm{Tr}(s, K))^{-1} \circ \psi_Y \circ \pi_\#.$$

Cette définition garantit que $\hat{\mu}_\# \circ \psi = \psi \circ \mu_\#$. La première partie de la condition (a) est vérifiée, ainsi que (d), car si $L_Y$ est un sous-complexe fini de $K'_Y$ et $O_Y$ est un voisinage de $\pi(C)$ tels que $C(L_Y, \mathbb{Z})$ contienne $\psi_Y\big(S(O_Y, \mathbb{Z}) \cap$

$S(Y, \mathcal{W}_Y, \mathbb{Z})\big)$, alors $L = \rho^{-1}(L_Y)$ est un sous-complexe fini de $K'$, $O = \pi^{-1}(O_Y)$ est un voisinage de $C$ et $C(L, \mathbb{Z})$ contient $\psi\big(S(O, \mathbb{Z}) \cap S(X, \mathcal{W}, \mathbb{Z})\big)$.

Soit $t = [b_{s^0}, \ldots, b_{s^n}]$ un simplexe de $K'$. Alors $\rho(t) = [b_{s^0_Y}, \ldots, b_{s^n_Y}]$, où $s^i_Y = \rho(s^i)$, est un simplexe de $K'_Y$. Par construction de $\zeta_Y$, il y a un élément $V_Y$ de $\mathcal{V}_Y$ tel que $V_Y \cap W_{s^n_Y} \neq \emptyset$ et que $S(V_Y, \mathbb{Z})$ contienne $\zeta_Y(C(\rho(t), \mathbb{Z}))$. Il y a un unique élément $V_t$ de $\mathcal{V}$ tel que $V_t \cap W_{s^n} \neq \emptyset$ et que $\pi$ envoie $V_t$ homéomorphiquement sur $V_Y$, et nous pouvons définir $\zeta$ sans ambiguité en posant, pour tout simplexe $t$ de $K'$,

$$\zeta | C(t, \mathbb{Z}) = (\pi | V_t)^{-1}_{\#} \circ \zeta_Y \circ \rho_{\#}.$$

Cette définition garantit que $\mu_{\#} \circ \zeta = \zeta \circ \hat{\mu}_{\#}$ et que la condition (b) est vérifiée. Soit $W_s \in \mathcal{W}$, et soit $s_Y = \rho(s)$. Il existe $V_Y \in \mathcal{V}_Y$ contenant $W_{s_Y}$ et tel que $S(V_Y, \mathbb{Z})$ contienne $\zeta_Y(C(\mathrm{Tr}(s_Y, K_Y), \mathbb{Z}))$. Si $V$ est l'unique élément de $\mathcal{V}$ contenant $W_s$ et tel que $\pi(V) = V_Y$, alors $S(V, \mathbb{Z})$ contient $\zeta(C(\mathrm{Tr}(s, K), \mathbb{Z}))$, donc la deuxième partie de (a) est vérifiée.

Enfin, si $\sigma$ est un simplexe singulier appartenant à $S(X, \mathcal{W}, \mathbb{Z})$, il existe un élément $V_Y \in \mathcal{V}_Y$ contenant $\|\pi(\tau)\| \cup \|\zeta_Y \circ \psi_Y(\pi(\tau))\| \cup \|h_Y(\pi(\tau))\|$ pour toute face $\tau$ de $\sigma$. Si $V$ est l'élément de $\mathcal{V}$ contenant $\|\sigma\|$ tel que $\pi(V) = V_Y$, posons

$$h(\sigma) = (\pi | V)^{-1}_{\#} \circ h(\pi(\sigma)).$$

Cette définition ne dépend pas du choix de $V_Y$ et garantit que la condition (c) est vérifiée. $\square$

D é m o n s t r a t i o n  d u  t h é o r è m e 5. Puisque $x \mapsto x^2$est un homéomorphisme de $G$, l'involution $\mu(x) = x^{-1}$ a $e$ pour seul point fixe. Soit $V$ un voisinage symétrique de $e$ tel que $\overline{V} \subset U$, et soit $\alpha : G \to [0,1]$ une fonction continue nulle sur $\overline{U} \setminus U$ et égale à un sur $\overline{V}$. La fonction

$$g(x) = \lambda(f(x), f(e), \alpha(x))$$

est homotope à $f$ par l'homotopie

$$F(x,t) = \lambda(f(x), f(e), t\alpha(x)).$$

Si $x$ appartient à $\overline{U} \setminus U$, alors $F(x,t) = f(x)$ pour tout $t$, et si $C$ est un compact contenant $f(\overline{U})$, alors le compact $C_1 = \lambda(C \times C \times I)$contient l'image de $F$. L'homotopie $F$ est donc admissible, d'où $\mathrm{ind}(f, U) = \mathrm{ind}(g, U)$.

Soit $\rho$ l'homéomorphisme inverse de $x \mapsto x^2$. Définissons $h : \overline{U} \to G$ par

$$h(x) = \rho\big(g(x).g(x^{-1})^{-1}\big).$$

Alors $h$ est homotope à $g$ par l'homotopie

$$G(x,t) = \lambda(g(x), h(x), t).$$

Si $x$ appartient à $\overline{U} \setminus U$, alors $g(x^{-1})^{-1} = f(x^{-1})^{-1} = f(x) = g(x)$, donc $h(x) = \rho(g(x)^2) = g(x)$ et $G(x,t) = g(x)$ pour tout $t$. Le compact $C_2 = \lambda(C_1 \times \rho(C_1.C_1) \times I)$ contient l'image de $G$, donc $G$ est une homotopie admissible, d'où $\mathrm{ind}(g, U) = \mathrm{ind}(h, U)$. Nous avons $\rho(x^{-1})^2 = x^{-1} = [\rho(x)^2]^{-1}$, donc $\rho(x^{-1}) = \rho(x)^{-1}$, d'où

$$h(x^{-1}) = \rho\big(g(x^{-1}).g(x)^{-1}\big) = \rho\big((g(x).g(x^{-1})^{-1})^{-1}\big).$$

Si $x$ appartient à $V$, alors $x^{-1}$ aussi, d'où $g(x) = g(x^{-1}) = e$ et $h(x) = \rho(e) = e$. Le seul point fixe de $h$ sur $\overline{V}$ est donc $e$ et les autres points fixes appartiennent à l'ouvert $\mu$-invariant $W = U \setminus h^{-1}(\overline{V})$, d'où

$$\mathrm{ind}(h, U) = \mathrm{ind}(h, V) + \mathrm{ind}(h, W) = 1 + \mathrm{ind}(h, W).$$

L'ensemble $h(\overline{W})$ est contenu dans le compact $C_2 \setminus V \subset G \setminus \{e\}$, donc, si $h'$ est la fonction de $W$ dans $G \setminus \{e\}$ induite par $h$, alors $\mathrm{ind}(h, W) = \mathrm{ind}(h', W)$ (théorème 3(V)). Puisque $h'$ est $\mu$-invariante et que $\mu | G \setminus \{e\}$ est une involution sans point fixe, le lemme précédent, appliqué à $h'_{\#}$, montre que $\mathrm{ind}(h', W)$ est pair, d'où le résultat. $\square$

## RÉFÉRENCES

[1] R. Cauty. Un espace métrique linéaire qui n'est pas un rétracte absolu. *Fund. Math.* **146** (1994), 85–99.

[2] R. Cauty. Rétractes absolus de voisinage algébriques., *Serdica Math. J.* **31** (2005), 309–354.

[3] R. Dold. Lectures on algebraic Topology. Springer Verlag, Berlin, 1972.

[4] A. Granas, J. Dugundji. Fixed Point Theory. Springer Verlag, Berlin, 2003.

[5] H. W. Siegberg, G. Skordev. Fixed point index and chain approximations. *Pacific J. Math.* **102** (1982), 455–486.

[6] E. H. Spanier. Algebraic Topology. Mc Graw Hill, New York, 1966.

*Université Paris 6*
*Institut de Mathématiques de Jussieu*
*case 247, 4 place Jussieu*
*75252 Paris Cedex 05*
*e-mail :* `cauty@math.jussieu.fr`

*Received February 27, 2009*
*Revised September 9, 2009*