View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Bulgarian Digital Mathematics Library at IMI-BAS

Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Mathematical Journal

Сердика

Математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Mathematical Journal
which is the new series of
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

Serdica Math. J. **35** (2009), 195–206

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

COURBURE ET POLYGONE DE NEWTON

M. Hannachi, K. Mezaghcha

Communicated by V. Brînzanescu

Abstract. The object of this article relates to the study of the complex algebraic curves by using the concept of envelope convex. One proposes to characterize the points of a holomorphic complex curve (C) and to associate a metric invariant to them (generalized curvature), by using the equations of the various segments constituting the polygon of Newton associated with (C).

1. Introduction. On se propose dans cet article d'utiliser la notion d'enveloppe convexe (polygone de Newton) associée à une courbe algébrique complexe standard pour étudier la géométrie locale, caractériser les points de cette courbe et leur associer un invariant métrique généralisant l'idée de courbure.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 26E35, 14H05, 14H20.
Key words: Algebraic curve, curvature, non standard analysis.

2. Rappels. Soit Γ une courbe standard holomorphe définie paramétriquement dans $\mathbb{C}^2$

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}$$

Définition 1. *On dit qu'un point $M_0 = r(t_0) \in \Gamma$ est d'ordre (p,q) s'ils existent deux vecteurs dérivés non colinéaires $r^{[p]}(t_0)$ et $r^{[q]}(t_0)$ où*

– *$[p]$ est l'ordre de dérivation du premier vecteur non nul.*

– *$[q]$ est l'ordre de dérivation du premier vecteur non colinéaire avec $r^{[p]}(t_0)$.*

Définition 2. *Soit M_0 un point de la courbe Γ d'ordre (p,q). Sa courbure généralisée est définie par :*

$$Kg\,(t_0) = \frac{q\,(p!)^{\frac{q}{p}}}{pq!}\left|\frac{\begin{vmatrix} x^{[p]}(t_0) & x^{[q]}(t_0) \\ y^{[p]}(t_0) & y^{[q]}(t_0) \end{vmatrix}}{\left\|r^{[p]}\,(t_0)\right\|^{\frac{q}{p}+1}}\right|$$

3. Courbes algébriques complexes. Soit $f \in \mathbb{C}\,[x,y]$ un polynôme de degré $n \succeq 1$. On note par Γ la courbe complexe d'équation $f(x,y) = 0$. Nous allons écrire la fonction $f(x,y)$ sous la forme suivante

$$f(x,y) = \ f_n(x,y) + f_{n-1}(x,y) + \cdots + f_k(x,y) + \cdots + f_m(x,y)$$

où f_k est un polynôme homogène de degré k avec $f_k(x,y) = \sum\limits_{i+j=k} a_{i,j}x^iy^j$.

On supposera qu'aucun couple (i,j) n'est égal à $(0,0)$ avec $\inf(i) = \inf(j) = 0$ (en d'autres termes, on a $f(0,0) = 0$ et on ne peut mettre en facteur aucune puissance de x ni aucune puissance de y, de façon à éliminer les solutions triviales).

On représente alors graphiquement dans le plan, l'ensemble E des couples (i,j) et on considère l'enveloppe convexe inférieure, c'est le polygone de Newton constitué d'un ou plusieurs segments de droites, et d'aprés [9], il correspond à chaque segment de droite une ou plusieurs branches de la courbe Γ passant par l'origine.

Remarque 1. L'équation d'une droite, passant par deux points A et B de coordonnées entières (a_0, b_0), (a_1, b_1), a pour expression :

$$(a_1 - a_0)\, y + (b_0 - b_1)\, x = a_1\,(b_0 - b_1) + b_1\,(a_1 - a_0)\,.$$

Soit $p_1 = (b_1 - b_0)$, $q_1 = (a_0 - a_1)$, $r_1 = a_0\ (b_1 - b_0) + b_1\,(a_0 - a_1)$ avec $s = p\,\mathrm{gcd}(p_1, q_1) \Longrightarrow s$ divise r_1 ce qui nous donne finalement comme équation

$$px + qy = r$$

où p et q sont premiers entre eux et si $p = q$, on a nécessairement $p = q = 1$.

Théorème 1. *Au segment de droite d'équation $px + qy = r$, il peut correspondre une ou plusieurs branches.*

Démonstration 1. *On suppose que l'on a $p \leqslant q$, on utilise la paramétrisation suivante :*

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^p \\ z(t)\ t^q \end{pmatrix}.$$

En reportant cette paramétrisation dans l'expression $f(x, y) = 0$, on obtient :

$$f_n(t^p, zt^q) + \cdots + f_{m+1}(t^p, zt^q) + f_m(t^p, zt^q) = 0.$$

Comme les polynomes f_k sont homogènes, on a :

$$t^{np} f_n\left(1, zt^{q-p}\right) + \cdots + t^{(m+1)p} f_{m+1}\left(1, zt^{q-p}\right) + t^{mp} f_m\left(1, zt^{q-p}\right) = 0.$$

Après simplification

$$t^{(n-m)p} f_n(1, zt^{q-p}) + \cdots + t^p f_{m+1}(1, zt^{q-p}) + f_m(1, zt^{q-p}) = 0.$$

On a alors deux posssibilités :

a) $p < q$

Par passage à la limite ($t \to 0$), on obtient :

$$f_m(1,0) = 0.$$

Ainsi le vecteur $(1,0)$ est une direction tangentielle et il existe un entier positif s tel que :

$$f_m(1, zt^{q-p}) = t^s g(z,t)$$

ce qui nous permet de procéder encore à une simplification :

$$t^{(n-m)p-s} f_n(1, zt^{q-p}) + \cdots + t^{p-s} f_{n-1}(1, zt^{q-p}) + g(z,t) = 0.$$

Equation que l'on peut écrire sous la forme :

$$P_0(z) + t^{\beta} Q(z) = 0. \tag{1}$$

Soit $d = \deg P_0$, P_0 admet donc d racines, pour chaque racine z_0 non nulle de P_0, l'équation (1) a une racine infiniment proche de z_0 ce qui nous donne l'équivalence suivante :

$$z(t) \approxeq z_0.$$

On obtient ainsi le premier terme de la paramétrisation d'une branche de la courbe Γ associée à la racine z_0 :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \approxeq \begin{pmatrix} t^p \\ t^q z_0 \end{pmatrix}$$

Il reste à vérifier que l'origine est un point d'ordre (p,q).

$$r'(t) \approxeq \begin{pmatrix} pt^{p-1} \\ qz_0 t^{q-1} \end{pmatrix}$$

$$r''(t) \approxeq \begin{pmatrix} p(p-1)t^{p-2} \\ q(q-1)z_0 t^{q-2} \end{pmatrix}$$

De proche en proche, on trouve que le premier vecteur dérivé non nul est

$$r^{[p]}(0) = \begin{pmatrix} p! \\ 0 \end{pmatrix}$$

et le deuxième vecteur dérivé non colinéaire est égal à :

$$r^{[q]}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ q!z_0 \end{pmatrix}$$

b) $p = q = 1$
L'équation s'écrit

$$t^{n-m} f_n(1, z) + \cdots + t^{m+1} f_{m+1}(1, z) + f_m(1, z) = 0. \tag{2}$$

Le polynome $f_m(1, z)$ admet donc m zéros, pour toute racine z_0 non nulle, l'équation (2) a une racine infiniment proche de z_0, ce qui nous donne :

i) Si z_0 est un zéro simple de $f_m(1, z)$, dans ce cas $z(t)$ est développable en série entière

$$z(t) = z_0 + \sum_{i \geqslant 1} a_i t^i.$$

on a la paramétrisation

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t\left(z_0 + \sum\limits_{i \geqslant 1} a_i t^i\right) \end{pmatrix}$$

Soit l le premier indice tel que $a_l \neq 0$, dans ce cas l'origine est un point d'ordre $(1, l + 1)$.

ii) Si z_0 est un zéro multiple de $f_m(1, z)$ d'ordre k, dans ce cas $z(t)$ est développable en série de Puiseux

$$z(t) = z_0 + \sum_{i \geqslant 1} a_i t^{\frac{i}{k}}.$$

Soit l le premier indice tel que $a_l \neq 0$, ce qui nous donne le développement suivant

$$\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & z_0 t + a_{li} t^{\frac{l}{k}+1} + \sum_{i>l} a_i t^{\frac{i}{k}+1}. \end{array}$$

On pose alors

$$t = s^k.$$

On obtient

$$\begin{array}{rcl} x & = & s^k \\ y & = & z_0 s^k + a_l s^{k+l} + \sum_{i\ >l} a_i s^{k+i}. \end{array}$$

L'origine est un point d'ordre $(k, k+l)$.

Théorème 2. *La courbure généralisée à l'origine de toute branche de la courbe associée au couple (p, q) est égale à :*

$* \ p < q$

$$K_g(0) = \frac{q}{p} \left| \lim_{x \to 0} z(x) \right|.$$

$* \ p = q = 1$

i) Si z_0 est un zéro simple de $f_m(1, z)$

$$K_g(0) = (l+1) \frac{|a_l|}{\left|1 + z_0^2\right|^{\frac{l}{2}+1}}$$

ii) Si z_0 est un zéro multiple de $f_m(1, z)$ d'ordre k

$$K_g(0) = \frac{(l+k)}{k} \frac{|a_l|}{\left|1 + z_0^2\right|^{\frac{l}{2k}+1}}$$

Démonstration 2. $* \; p < q$

$$on\ a : Kg\left(0\right) = \frac{q\left(p!\right)^{\frac{q}{p}}}{pq!} \frac{\begin{vmatrix} p! & 0 \\ 0 & q!z(0) \end{vmatrix}}{\left(p!\right)^{\frac{q}{p}+1}} = \frac{q\left(p!\right)^{\frac{q}{p}}\left(p!q!\right)\left|z(0)\right|}{pq!(p!)^{\frac{q}{p}+1}} = \frac{q}{p}\left|z(0)\right|$$

$* \; p = q = 1$

i) si z_0 *est un zéro simple de* $f_m(1,z)$ *:*

Il suffit d'écrire la paramétrisation de la branche correspondante comme suit :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t(z_0 + a_l t^l + \cdots) \end{pmatrix}$$

$$ce\ qui\ nous\ donne : Kg(0) = \frac{1}{l!} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z(0) & (l+1)!a_l \end{vmatrix}}{\left|1+z_0^2\right|^{\frac{l+2}{2}}} = \frac{(l+1)\left|a_l\right|}{\left|1+z_0^2\right|^{\frac{l}{2}+1}}$$

ii) Si z_0 *est un zéro multiple de* $f_m(1,z)$ *d'ordre* k *:*

On utilise la paramétrisation

$$\begin{aligned} x &= s^k \\ y &= z_0 s^k + a_l s^{k+l} + \sum_{i>l} a_i s^{k+i}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$Kg\left(0\right) = \frac{\left(l+k\right)\left(k!\right)^{\frac{k+l}{k}}}{k\left(k+l\right)!} \frac{\begin{vmatrix} k! & 0 \\ k!z_0 & (l+k)!a_l \end{vmatrix}}{\left|1+z_0^2\right|^{\frac{1}{2}\left(\frac{k+l}{k}+1\right)}} = \frac{(l+k)}{k} \frac{\left|a_l\right|}{\left|1+z_0^2\right|^{\frac{l}{2k}+1}}.$$

Exemple 1. Soit la courbe Γ définie par :

$$y^7 - xy^5 + x^4 = 0$$

on a $E = \left(\left(4,0\right), (1,5), (0,7)\right)$

$[(4,0), (1,5), (0,7)]$

Le polygone de Newton associé à Γ comprend deux segments de droites d'équation respective :

$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ 3y + 5x = 20 \end{cases}$$

Etude suivant le segment $3y + 5x = 20$.

On a la paramétrisation :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zt^5 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

en reportant ces valeurs dans l'équation de la courbe (Γ), on a :

$$t^{21} - zt^{20} + z^4 t^{20} = 0.$$

Aprés simplification par t^{20}, on a : $t - z + z^4 = 0$ et par passage à la limite, on obtient :

$$P_0(z) = z^4 - z = 0$$

Ce qui nous donne comme racines non nulles : les racines cubiques de l'unité : $1, j$ et j^2.

Donc on a trois branches complexes passant par l'origine dans la direction tangentielle $(0, 1)$, l'origine étant un point d'ordre $(3, 5)$ (point d'inflexion) avec une courbure généralisée égale à $\frac{5}{3}$.

Etude suivant le segment $y + 2x = 7$.

La branche associée à ce segment de droite est birégulière à l'origine (point d'ordre $(1, 2)$), elle est définie par

$$x = z(y)y^2 \Longrightarrow y^7 - z(y)y^7 + z^4(y)y^8 = 0 \Longrightarrow 1 - z(y) + z^4(y)y = 0 \Longrightarrow z(0) = 1$$

ce qui nous donne une courbure égale à 2.

Exemple 2. Soit la courbe (Γ) définie par :

$$x^5 - x^4y + y^3 - 2xy^2 + x^2y = 0$$

$E = ((5, 0), (4, 1), (0, 3), (1, 2), (2, 1))$
$[((5, 0), (2, 1), (0, 3)]$

Le polygone de Newton associé à Γ comprend deux segments de droites d'équation respective :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3y + x = 5 \end{cases}$$

Etude suivant le segment $y + x = 3$.
On a la paramétrisation :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ zt \end{pmatrix}$$

en reportant ces valeurs dans l'équation de la courbe (Γ), on a :

$$(3) \qquad t^5 - zt^5 + z^3t^3 - 2z^2t^3 + z(t)t^3 = 0 \Longrightarrow t^2 - zt^2 + z^3 - 2z^2 + z = 0$$

$$P_0(z) = z^3 - 2z^2 + z = 0,$$

$P_0(z)$ a une racine double non nulle $z = 1$.

Dans l'équation (3), faisons le changement de variable :

$$Z = z - 1.$$

On obtient :

$$Z\left(Z + Z^2 - t^2\right) = 0 \Longrightarrow Z = 0 \;\text{ et }\; Z + Z^2 - t^2 = 0$$

où Z et t sont des infiniment petits, on divise par t^2 :

$$\frac{Z}{t^2} + \frac{Z^2}{t^2} - 1 = 0 \Longrightarrow Z \approx t^2$$

On a alors deux solutions :

$$z(t) = 1 \text{ et } z(t) = 1 + t^2 + \cdots$$

Ainsi, au segment :

$$y + x = 3$$

sont associées une droite d'équation $y = x$ et une branche dont le développement est la suivant :

$$y = x + x^3 + \cdots$$

Pour cette branche, l'origine est un point d'inflexion (point d'ordre $(1, 3)$) avec une courbure généralisée égale à $\dfrac{3}{4}$.

Etude suivant le segment $3y + x = 5$.
On a la paramétrisation :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ zt^3 \end{pmatrix}$$

en reportant ces valeurs dans l'équation de la courbe Γ, on a :

$$(4) \qquad t^5 - zt^7 + z^3t^9 - 2z^2t^7 + zt^5 = 0 \Longrightarrow 1 - zt^2 + z^3t^4 - 2z^2t^2 + z = 0$$

$$P_0(z) = 1 + z = 0 \Longrightarrow z(0) = -1$$

Dans (4), posons : $Z = z + 1 \Longrightarrow 1 - (Z - 1)\,t^2 + (Z - 1)^3t^4 - 2(Z - 1)^2t^2 + Z - 1 = 0$
On a :

$$Z - t^2 + t^2(Z^3t^2 - 3Z^2t^2 + 3Zt^2 - t^2 - 2Z^2 + 3Z) = 0 \Longrightarrow Z \approx t^2.$$

On obtient finalement le développement suivant :

$$y = -x^3 + x^5 + \cdots$$

Pour cette branche de Γ, l'origine est un point d'inflexion (point d'ordre $(1, 3)$) avec un courbure égale à 3.

Exemple 3. Soit la courbe Γ définie par $x^4 - 2xy^3 + x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 0$.

Le polygone de Newton associé à Γ comprend un segment de droite d'équation :

$$x + y = 3.$$

On pose :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ zt \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous donne aprés simplification :

$$t\left(1 - 2z^3\right) - (z-1)^3 = 0$$

$z_0 = 1$ est un zéro d'ordre 3 de $f_3(1,z)$, on pose donc :

$$\begin{aligned} t &= s^3 \\ z - 1 &= Z. \end{aligned}$$

On obtient :

$$s^3(1 - 2\,(Z+1)^3) - Z^3 = 0$$

On a alors l'équivalence :

$$Z \approxeq -s.$$

On obtient ainsi les premiers termes d'une paramétrisation :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^3 \\ -s^3 - s^4 + \cdots \end{pmatrix}.$$

En conclusion, l'origine est un point ordinaire d'ordre $(3,4)$ et sa courbure est égale :

$$K_g(o) = \frac{1}{3\sqrt[6]{2}}.$$

REFERENCES

[1] F. Diener, G. Reeb. Cours d'analyse non standard. Hermann, Paris 1989.

[2] J. Dieudonne. Calcul infinitésimal. Hermann, Paris, 1980.

[3] M. Goze. Etude locale des courbes algébriques. IRMA, Strasbourg 1982.

[4] M. Goze, R. Lutz.Non standard analysis, A practical guide with application. Lecture Notes in Math. vol. **88**, Springer-Verlag, 1981.

[5] M. Hannachi. Invariants métriques associés aux points singuliers d'une courbe réelle, IRMA. Strasbourg, 1985.

[6] M. Hannachi. Enveloppes, coniques et développées. *Maghreb Math. Rev.* **5**, *1–2* (1996), 47–55.

[7] M. Hannachi. Invariants métriques associés aux points singuliers à distance finie ou infinie, d'une courbe réelle. Thèse de doctorat d'état, Sétif, 1996.

[8] M. Hannachi. Géométrie asymptotiquedes courbes algébriques. *Ann. Math. Blaise Pascal* **6**, *2* (2000), 21–28.

[9] M. Hannachi. Généralisation de la notion de courbure. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **70** (2000), 43–50.

[10] M. Hannachi, K. Mezaghcha. Invariants métriques associés à une courbe holomorphe. *Maghreb Math. Rev.* **3**, *3* (1994), 65–68.

[11] K. Mezaghcha. Étude dans le halo d'un point standard d'une courbe réelle. *Maghreb Math. Rev.* **5**, *1–2* (1996), 123–128.

[12] K. Mezaghcha. Application de l'analyse non standard aux courbes et surfaces. Thèse de Doctorat d'état, Université Ferhat Abbas, sétif, décembre 2007.

LMFN
Université Ferhat Abbes-Sétif
Route de Scipion
19000 Sétif, Algeria
e-mail : `M_Hannachi@yahoo.fr`
`khelifa.Mezaghcha@UHA.fr`

Received December 8, 2008