Serdica

Mathematical Journal

Сердика

Математическо списание

Serdica Math. J. **34** (2008), 489–508

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

SOLUTIONS GLOBALES RÉGULIÈRES POUR QUELQUES ÉQUATIONS LINEAIRES D'ÉVOLUTION DU TYPE PSEUDO-DIFFÉRENTIEL SINGULIER

D. Gourdin, H. Kamoun, O. Ben Khalifa

Communicated by T. Gramchev

Abstract. We give here examples of equations of type (1) $\partial^2_{tt}y - p(t, D_x)y = 0$, where p is a singular pseudo-differential operator with regular global solutions when the Cauchy data are regular, $t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^5$.

1. Introduction. a) Dans cet article, nous résolvons l'équation linéaire

$$Ly = 0 \tag{1.1}$$

où L est un opérateur du type pseudo différentiel singulier

$$L = \partial^2_{tt} - p(t, \nabla_x) \tag{1.2}$$

où $\nabla_x = (\partial_1, \dots, \partial_n) = grad_x, x = (x_1, \dots, x_n) \in\ \mathbb{R}^n$ et $D = (\partial_t, \partial_1, \dots, \partial_n) = grad_{t,x}, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$,

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35C15, 35D05, 35D10, 35S10, 35S99.
Key words: Linear Cauchy problem, global solution, Sobolev spaces, Integral Kirchhof solutions.

avec

$$p(t, \nabla_x)y = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\ v.p \int e^{ix\xi}\ p(t,\xi)\hat{y}(t,\xi)\ d\xi, \tag{1.3}$$

et $p(t,\xi)$ prolongeable en une fonction méromorphe $p(t,\zeta)$ $(\zeta \in \mathbb{C}^n)$.
Nous traitons complètement le cas où $n = 5$.

b) La résolution classique du problème de Cauchy par superposition d'ondes planes pour

$$\begin{cases} \Box y = 0 \\ y(t=0) = 0,\ y'_t(t=0) = g \end{cases} \tag{1.4}$$

permet d'obtenir des propriétés de décroissance lorsque $t \to +\infty$ de Dy dans les normes $L^p - L^q$, obtenues grâce aux représentations intégrales particulières de y $(n \geq 3)$:

$$y(t,x) = \frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} rQ(r,x)\ dr, \tag{1.5}$$

avec

$$Q(r,x) = \frac{1}{w_n}\int_{S^{n-1}(0,1)} g(x+rz)\ dz. \tag{1.6}$$

(1.5) et (1.6) se simplifient lorsque $n = 3$.

$$\begin{cases} y(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_0^t\ r\ Q(x,r)\ dr = tQ(t,x) \\ \\ y(t,x) = \dfrac{t}{w_n}\displaystyle\int_{S^{n-1}(0,1)} g(x+tz)\ dz. \end{cases} \tag{1.7}$$

Notre problème (1.2) (1.3) trouve un exemple d'opérateur L en exhibant $p_n(t,\nabla_x)$ de telle façon que la solution y du problème de Cauchy associée à (1.3).

$$\begin{cases} \partial^2_{tt} y - p_n(t,\nabla_x)y = 0 \\ y(t=0) = 0\ \ ,\ y'_t(t=0) = g \end{cases} \tag{1.8}$$

soit la fonction :

$$y(t,x) = \frac{t}{w_n}\int_{S^{n-1}(0,1)} g(x+tz)\ dz, \tag{1.9}$$

quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, w_n étant l'aire de la sphère $S^{n-1}(0,1)$.

c) L'équation d'Euler-Poisson-Darboux ([11]) comparée à notre équation. Nos opérateurs linéaires ne sont pas hyperboliques mais peuvent être comparés à l'opérateur de l'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux suivante :

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t} I(x,t) = \triangle_x I(x,t)$$

Elle a pour propriété d'avoir pour solution la moyenne sphérique de toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par l'expression

$$I(x,t) = \frac{1}{w_n} \int_{S^{n-1}(0,1)} f(x+t\xi)\; d\xi \tag{1.10}$$

pour tout $t \geq 0$, ou même de toute fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D étant un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ pour tout x de D ayant une distance à la frontière de D supérieure strictement à t.

Signalons que J. Leray et S. Delache ([9]) ont étudié la solution fondamentale de cette équation et d'une équation généralisée mettant en évidence des propriétés de lacune de la théorie de Gårding. (cf aussi [12]) .

Dans ce travail au lieu de $I(x,t)$, nous considérons

$$I'(x,t) = tI(x,t) = \frac{t}{w_n} \int_{S^{n-1}(0,1)} f(x+t\xi)\; d\xi \tag{1.11}$$

et nous cherchons une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} I' - N(t, D_x).I' = \triangle_x I' \tag{1.12}$$

dont la solution est I' satisfaisant les donneés de Cauchy

$$I'(x,0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} I'(x,0) = f(x).$$

Pour calculer N précisément, nous nous limitons au cas $n = 5$ et nous utilisons des fonctions $\sigma(t,\xi)$ attachés à des opérateurs singuliers et méromorphes en ξ . Nous utilisons des valeurs principales d'intégrales pour exprimer ensuite l'opérateur N sous forme $Nu = T(Qu)$ où T est un opérateur linéaire "convolution avec une fonction χ" et Q un opérateur pseudo-différentiel .

Signalons que nos opérateurs satisfont à la propriété de Huygens considéré par P.Günther ([10]) dans sa classification.

2. Enoncés des résultats.

Théorèm 2.1. *Les opérateurs $p(t, D_x)$ tels que le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} Ly = \partial^2_{tt} y - p(t, D_x)\, y = 0 \\ y(t=0) = 0, \quad y_t(t=0) = g \end{cases} \tag{2.1}$$

admette une solution de la forme :

$$y = \frac{t}{w_n} \int_C g(x+tz)\, dz, \tag{2.2}$$

où C est une hypersurface régulière compacte fermée de $\mathbb{R}^n$ paramétrable en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^n$, sont déterminés par l'expression intégrale avec valeur principale :

$$p(t, D_x)y = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{U_\xi} e^{ix\xi} p(t,\xi)\ \widehat{y}(t,\xi)\ d\xi$$

(modulo un espace vectoriel d'opérateurs de convolution q du type $qy = y *_x h$, h étant une fonction analytique transformée de Fourier inverse d'une distribution à support compact)
où

$$p(t,\xi) = \frac{\int_C e^{it(z.\xi)}\ (2i(z.\xi) - t(z.\xi)^2)\ dz}{t\int_C e^{it(z.\xi)}\ dz}$$

a un prolongement méromorphe $p(t,\zeta)$ sur $\mathbb{C}^n_\zeta$ et U_ξ est l'ouvert complémentaire dans $\mathbb{R}^n_\xi$ de

$$F = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n; \int_C\ e^{it(z.\xi)}\ dz = 0\right\}.$$

Proposition 2.1. *Lorsque $C = S^{n-1}$, $p(t,\xi)$ peut s'écrire :*

$$p(t,\xi) = -|\xi|^2 + \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[t|\xi|\sin\theta_1]\cos^n\theta_1\ d\theta_1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[t|\xi|\sin\theta_1]\ \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1}\ |\xi|^2$$

$$-\ \frac{2}{t}\ \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin[t|\xi|\sin\theta_1]\sin\theta_1\cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[t|\xi|\sin\theta_1]\ \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1}\ |\xi|.$$

De plus

$$\lim_{t\to 0} p(t,\xi) = -\frac{3}{n}\ |\xi|^2$$
$$\lim_{t\to +\infty} p(t,\xi) = -\ |\xi|^2$$

Proposition 2.2. *Lorsque* $C = S^{n-1}$ *, on a :*

- *pour* $n = 1$ $(C = \{-1, 1\})$, $p(t, \xi) = - \mid \xi \mid^2 + 2\ \dfrac{t \mid \xi \mid \sin t \mid \xi \mid}{t^2 \cos t \mid \xi \mid}$,
- *pour* $n = 3$ $p(t, \xi) = - \mid \xi \mid^2$,
- *pour* $n = 5$ $p(t, \xi) = - \mid \xi \mid^2 + \dfrac{6}{t^2} + 2\ \dfrac{\mid \xi \mid}{t}\ \dfrac{t \mid \xi \mid \sin t \mid \xi \mid}{t \mid \xi \mid \cos t \mid \xi \mid - \sin t \mid \xi \mid}$.

Remarque 1. La solution générale pour $n = 5$ est :

$$p(t, D_x) + \sum_{k \in I fini \subset N} c_k \left[\frac{-2 \frac{\lambda_k}{t} (\frac{\lambda_k}{t} \|x\| \cos \frac{\lambda_k}{t} \|x\| - \sin \frac{\lambda_k}{t} \|x\|)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \|x\|^3} \right] *$$

où $p(t, \xi)$ est donné par la proposition 2.2 et le théorème 2.1, c_k étant des constantes arbitraires.

Remarque 2. 1) On peut calculer les valeurs de $p(t, \xi)$ pour tout n impair par récurrence sur n à l'aide des fonctions élémentaires , comme cela a été donné par la proposition 2.2 pour $n = 1, 3, 5$.

2) Lorsque n est pair, on ne peut pas calculer $p(t, \xi)$ à l'aide des fonctions élémentaires .

3) Cependant par la méthode de descente, pour les mêmes valeurs de $p(t, \xi)$, que celles calculables à partir de la proposition 2.1 par les fonctions élémentaires dans le cas impair $n = 2m + 1$ on obtient, lorsque $n = 2m$, la résolution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} Ly = \partial_{tt}^2 y - p(t, D_x)\, y = 0 \\ y(t = 0) = 0, \quad y_t(t = 0) = g,\ g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

avec $p(t, D_x)y$ exprimée par des valeurs principales d'intégrales, sous la forme

$$y = \frac{t}{w_n} \int_{B^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n, |z| \leq 1\}} \frac{g(x + tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}}\ dz. \tag{2.3}$$

4) En particulier lorsque $n = 5$, on précisera par la suite l'expression de $p(t, D_x)u$ sous la forme $p(t, D_x)u = T(Qu)$ où Q est pseudo-différentiel en x d'ordre 8 et T est un opérateur linéaire de convolution par une fonction $\chi \in \cap_{s>5} L^s(\mathbb{R}^5)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^5)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^5)$ grâce à un calcul de résidus dans le domaine complexe.

Proposition 2.3. *Lorsque* $n = 5$*, l'opérateur* L *défini pour tout* $t > 0$ *et* $u \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^5))$ *(* $\wedge$ *étant l'opérateur pseudo-différentiel de symbole* $|\xi|$*)*

par l'expression :

$$\begin{aligned} Lu &= \square u - Nu = \square u - \left(\frac{6}{t^2}\, u - Mu \right) \\ &= \square u - \frac{6}{t^2}\, u - 2\frac{\wedge}{t}(2\pi)^{-\frac{5}{2}} v.p \int_{\mathbb{R}^5} \frac{e^{ix.\xi} t|\xi| \sin\ t|\xi|}{t|\xi| \cos\ t|\xi| - \sin\ t|\xi|} \widehat{u}(\xi)\, d\xi \\ &= \square u - \frac{6}{t^2}\, u - 2\frac{\wedge}{t}(2\pi)^{-\frac{5}{2}} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\complement \cup_{k=1}^{+\infty}]\lambda_{k-\epsilon}, \lambda_{k+\epsilon}[} \frac{e^{ix.\xi} t|\xi| \sin t|\xi|}{t|\xi| \cos t|\xi| - \sin t|\xi|} \widehat{u}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

où $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ *est l'ensemble dénombrable des zéros positifs de* $\lambda \cos\lambda - \sin\lambda$ *, existe, peut s'écrire sous la forme :*

$$\begin{aligned} Lu = \quad & \square u - \left(\frac{6}{t^2} u + (2\pi)^{-5} \int_{S^4_w(0,1)} d\omega \ \times \int_0^{+\infty} \{\log|t\rho\cos t\rho - \sin t\rho|\} \right. \\ & \left. \frac{d}{d\rho}\left[\frac{2\rho^5}{t^2 p(\rho)} \int_{\mathbb{R}^5_y} e^{i\|x-y\|\rho \sin\theta_1}\ p(|D_y|)\ u(t,y)\ dy \right] d\rho \right) \end{aligned}$$

(où intervient une intégrale absolument convergente au voisinage des zéros $\rho_k = \dfrac{\lambda_k}{t}$ *de* $t\rho\cos t\rho - \sin t\rho,\ k = 1, \cdots,\ +\infty$ *en* ρ *et au voisinage de l'infini en* ρ *)* *avec* $\omega = (\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4, \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_4, \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3,$ $\cos\theta_1 \sin\theta_2, \sin\theta_1)$, $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]^3$, $\theta_4 \in [0, 2\pi]$ *et* $p = p(\rho)$ *est un polynôme réel fixé, quelconque de degré* 8 *en* ρ *ayant ses zéros dans* $C_{\mathbb{C}}[0, +\infty[$*, et vérifie :*

$$L\left(\frac{t}{w_n} \int_{S^4} g(x+tz)\, dz \right) = 0 \quad (n=5) \quad \textit{pour tout}\ \ g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^5).$$

Ainsi L est donc indépendant du polynôme p ayant les propriétés énoncées précédement .
En particulier en prenant

$$p(\rho) = \rho^2\ (1+\rho^2)\ (4+\rho^2)\ (9+\rho^2).$$

On obtient la proposition suivante.

Proposition 2.4. *N est un opérateur linéaire, continu sur* $C^2([0, +\infty[, \mathcal{S}(\mathbb{R}^5))$ *dans* $C^2([0, +\infty[, \mathcal{S}(\mathbb{R}^5))$ *qui peut s'écrire :*

$$N = T\ [\ -\Delta_x\ (1-\Delta_x)\ (4-\Delta_x)\ (9-\Delta_x)\ u\ ]$$

où T *est l'opérateur linéaire continu :*

$$\begin{aligned} T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^5) &\longrightarrow \cap_{r>5} W^{\infty,s}(\mathbb{R}^5) \subset \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^5) \\ \varphi &\longmapsto \chi * \varphi \end{aligned}$$

avec

$$\chi = \frac{2\pi}{t} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\rho_p^3}{p(\rho_p)} \frac{2t\rho_p}{t^2} \left[\frac{1}{\|x\|} - \frac{2\sin\|x\|\rho_p}{\|x\|^2\rho_p} - \frac{2(\cos\|x\|\rho_p - 1)}{\|x\|^3\rho_p^2} \right]$$

$$- \frac{\pi}{24} \left(\frac{6}{t^2} + \frac{2}{t} \frac{-t\sinh t}{t\cosh t - \sinh t} \right) \left[\frac{1}{\|x\|} + \frac{2}{\|x\|^2} e^{-\|x\|} + \frac{2}{\|x\|^3}(e^{-\|x\|} - 1) \right]$$

$$+ \frac{2\pi}{15} \left(\frac{6}{t^2} + \frac{4}{t} \frac{-2t\sinh 2t}{2t\cosh 2t - \sinh 2t} \right) \left[\frac{1}{2\|x\|} + \frac{1}{2\|x\|^2} e^{-2\|x\|} + \frac{1}{4\|x\|^3}(e^{-2\|x\|} - 1) \right]$$

$$- \frac{3\pi}{40} \left(\frac{6}{t^2} + \frac{6}{t} \frac{-3t\sinh 3t}{3t\cosh 3t - \sinh 3t} \right) \left[\frac{1}{3\|x\|} + \frac{2}{9\|x\|^2} e^{-3\|x\|} + \frac{2}{27\|x\|^3}(e^{-3\|x\|} - 1) \right]$$

et s'étend en un opérateur linéaire, continu sur $W^{8,1}$ *à valeurs dans* $\bigcap_{r>5} L^r(\mathbb{R}^5)$.

Remarque 3. Si on choisit $p(\rho)$ de degré inférieur à 8, on obtient une autre fonction χ représentée par une série non convergente.

Nous obtenons le théorème suivant :

Théorèm 2.2. *Soit* $1 \leq p \leq 2, q$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q \in [2, +\infty]$, $6\left(1 - \frac{2}{q}\right) \leq N_p \leq 6\left(1 - \frac{2}{q}\right) + 1$, $N = N_p + s$, $s \in \mathbb{N}$. *Pour tout* $g \in W^{N=N_p+s,p}\ (\mathbb{R}_x^5)$, *il existe une solution unique du système*

$$\begin{cases} Ly = 0, \\ y_{/t=0} = 0,\ y_{t/t=0} = g, \end{cases} \tag{2.4}$$

avec $y \in C^0(\mathbb{R}_t^+, W^{s,q}(\mathbb{R}_x^5)) \cap C^1(\mathbb{R}_t^+, W^{s-1,q}(\mathbb{R}_x^5)) \cap C^2(\mathbb{R}_t^+, W^{s-2,q}(\mathbb{R}_x^5))$.
où $Ly = \Box y - N(t, D_x)y$, $N(t, D_x)$ *est un opérateur défini par les propositions* 2.3 *et* 2.4, *en particulier*

$$N(t, D_x)u = \frac{6}{t^2}u + \frac{2}{t}(2\pi)^{-\frac{5}{2}} v.p \int_{\mathbb{R}^5} e^{ix.\xi} \frac{|\xi|\sin t|\xi|}{\cos t|\xi| - \dfrac{\sin t|\xi|}{t|\xi|}} \widehat{u}(t,\xi)\ d\xi.$$

Ces théorèmes et propositions se démontrent à l'aide de propositions et lemmes intermédiaires énoncés et démontrés dans les paragraphes suivants.

Nous explicitons les opérateurs $p(t, D_x)$ dans le cas n impair plus particulièrement pour $n = 5$.

Dans un travail ultérieur nous considérons le cas pair $n = 2$.

3. Les opérateurs singuliers $p(t, D_x)$ utilisés. Ce sont les opérateurs décrits au théorème 2.1 et de la proposition 2.1 et de 2.2 obtenue en utilisant la remarque suivante :

C est une hypersurface régulière compacte de $\mathbb{R}^n$ paramétrable en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$(3.1)\quad \begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1\ \cos\theta_2\ \cdots\cos\theta_{n-2}\ \cos\theta_{n-1} \\ x_2 = r\cos\theta_1\ \cos\theta_2\ \cdots\cos\theta_{n-2}\ \sin\theta_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = r\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ x_n = r\sin\theta_1 \\ \text{Avec } r = \rho(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}) \geq 0\ \ ,\theta_1,\cdots,\theta_{n-2} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ \theta_{n-1}\in[0,2\pi] \end{cases}$$

où

$$\rho : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]^{n-2}\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^+$$

est une fonction à valeurs strictement positives, périodique de période π par rapport à $\theta_1,\cdots,\theta_{n-2}$ et périodique de période 2π par rapport à θ_{n-1}, avec $w_n =$ aire de C.

$$dx_1\cdots dx_n = r^{n-1}\ \cos^{n-2}\theta_1\ \cos^{n-3}\theta_2\ \cdots\cos\theta_{n-2}dr\ d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}.$$

4. Existence de l'opérateur$L = \partial^2_{tt} - p(t, D_x)$ lorsque $n = 5$, sur l'espace $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^5))$.

P r e u v e d e l a p r o p o s i t i o n 2.3. La preuve repose sur les deux importants lemmes suivants :

Lemme 4.1. *Pour tout $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^5))$ l'intégrale :*

$$K(t,x) = \int_0^{+\infty} \{\log|t\rho\cos t\rho - \sin t\rho|\}\frac{d}{d\rho}\Bigg[\frac{2\rho^3}{t^2\ (1+\rho^2)(4+\rho^2)(9+\rho^2)} \int_{\mathbb{R}^5_y} e^{i\|x-y\|\rho\sin\theta_1}\ (-\Delta)(1-\Delta)(4-\Delta)(9-\Delta)\ u(t,y)dy\Bigg]d\rho$$

est absolument convergente au voisinage des zéro ρ_k de la fonction $t\rho\cos t\rho - \sin t\rho$ en ρ $(k = 0,\cdots,\infty)$ et au voisinage de l'infini en ρ.

Lemme 4.2. *On a l'égalité suivante :*

$$K = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\complement_{[0,+\infty[}\cup_{k=1}^{+\infty}B(\rho_k,\frac{\epsilon}{t})} [\log(t\rho\cos t\rho - \sin t\rho)] \times \frac{d}{d\rho}\Bigg[\frac{2\rho^3}{t^2(1+\rho^2)(4+\rho^2)(9+\rho^2))} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\|x-y\|\rho\sin\theta_1}\ (-\Delta)(1-\Delta)(4-\Delta)(9-\Delta)u(t,y)\ dy\ \Bigg]\ d\rho$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\complement_{[0,+\infty[}\, \cup_{k=1}^{+\infty} B(\rho_k, \frac{t}{\epsilon})} \frac{-2\rho\rho^4}{t^2\rho^2(1+\rho^2)(4+\rho^2)(9+\rho^2)} \frac{-t^2\rho\sin t\rho}{(t\rho\cos t\rho - \sin t\rho)} \times$$
$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\|x-y\|\rho\sin\theta_1} (-\Delta)(1-\Delta)(4-\Delta)(9-\Delta)\ u(t,y)\ dy \right] d\rho$$

De plus

$$Mu = (2\pi)^{-5} \int_{S^4_w} K(t,x,w)dw,\ \ Lu = \Box u - \frac{6}{t^2}u - Mu.$$

vérifie

$$L\left(\frac{t}{w_5} \int_{S^4} g(x+tz)\ dz \right) = 0$$

Plus généralement :

Lemme 4.3. *Pour toute polynôme réel* $p\ (\rho)$ *ayant zéros sur* $]-\infty, 0\,] \cup \{i\mathbb{R}\}$ *de degré* 8*, l'intégrale*

$$K_p(t,x) = \int_0^{+\infty} \{\log|t\rho\cos t\rho - \sin t\rho|\ \}\times$$
$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{2\rho^5}{t^2 p(\rho)} \int_{\mathbb{R}^n_y} e^{i\|x-y\|\rho\sin\theta_1}\ p(|D_y|)\ u(t,y)\ dy \right] d\rho$$

est absolument convergente au voisinage des zéro ρ_k *de la fonction* $t\rho\cos t\rho - \sin t\rho$ *en* ρ $(k = 0, \cdots, \infty)$ *et au voisinage de l'infini en* ρ *.*

Lemma 4.4. *On a l'égalité suivante :*

$$K_p(t,x) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\complement_{[0,+\infty[}\, \cup_{k=1}^{+\infty} B(\rho_k, \frac{\epsilon}{t})} [\ \log(t\rho\cos t\rho - \sin t\rho)\ ] \times$$
$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{2\rho^5}{t^2 p(\rho)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\|x-y\|\rho\sin\theta_1}\ p(|D_y|)u(t,y)\ dy \right] d\rho$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\complement_{[0,+\infty[}\, \cup_{k=1}^{+\infty} B(\rho_k, \frac{t}{\epsilon})} \frac{-2\rho\rho^4}{t^2 p(\rho)} \frac{-t^2\rho\sin t\rho}{(t\rho\cos t\rho - \sin t\rho)} \times$$
$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\|x-y\|\rho\sin\theta_1}\ p(|D_y|)\ u(t,y)\ dy \right] d\rho$$

De plus

$$Mu = (2\pi)^{-5} \int_{S^4_w} K(t,x,w)dw,\ \ Lu = \Box u - \frac{6}{t^2}u - Mu.$$

vérifie

$$L\left(\frac{t}{w_5} \int_{S^4} g(x+tz)\ dz \right) = 0$$

5. Inégalités du type Strichartz et extension de L. On a pour tout $t>0$

$$Lu=\Box u-\left(\frac{6}{t^2}u-Mu\right)=\Box u-Nu$$

avec (d'aprés le lemme 4.4)

$$Nu=\frac{6}{t^2}\ u+(2\pi)^{-5}\int_{S_w^4(0,1)}dw\ \int_0^{+\infty}\Bigg[\frac{2\rho^5 t}{t^2\ p(\rho)}\ \ \frac{t\rho\sin t\rho}{t\rho\cos t\rho-\sin t\rho}$$

$$\times\int_{\mathbb{R}_y^5}\ e^{i\|x-y\|\rho\sin\theta_1}\ p(|D_y|)\ u(t,y)\ dy\ \Bigg]\ d\rho$$

$$=(2\pi)^{-5}\int_{\mathbb{R}_y^5}\ e^{i\|x-y\|\rho\sin\theta_1}\ p(|D_y|)\ u(t,y)\ dy$$

$$\times\Bigg[\Bigg(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta_1 d\theta_1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta_2\ \cos\theta_3\ d\theta_2\ d\theta_3\int_0^{2\pi}d\theta_4$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^3\theta_1\ d\theta_1\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta_2\ \cos\theta_3\ d\theta_2\ d\theta_3\int_0^{2\pi}\ d\theta_4\Bigg)$$

$$\times\Bigg(\int_0^{+\infty}e^{i\|x-y\|\rho\sin\theta_1}\ \left(\frac{6}{t^2}+\frac{2\rho t}{t^2}\ \frac{t\ \rho\ \sin t\rho}{t\ \rho\ \cos t\rho-\sin t\rho}\right)\ \frac{1}{p(\rho)}\ \rho^4\ d\rho\Bigg)\Bigg].$$

Or

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta_2\ \cos\theta_3\ d\theta_2\ d\theta_3\int_0^{2\pi}\ d\theta_4=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta_2\ +1}{2}\ d\theta_2=2\pi^2.$$

Donc

(5.1)

$$Nu=\frac{1}{16\pi^3}\int_{\mathbb{R}_y^5}\ p(|D_y|)\ u(t,y)\ dy\times\left[\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta_1\ d\theta_1\ +\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^3\theta_1\ d\theta_1\ \right]$$

$$\times\left\{\ \int_0^{+\infty}e^{i\|x-y\|\rho\sin\theta_1}\left(\frac{6}{t^2}+\frac{2\rho t}{t^2}\ \frac{t\ \rho\ \sin t\rho}{t\ \rho\ \cos t\rho-\sin t\rho}\right)\ \frac{\rho^4}{p(\rho)}\ d\rho\right\}.$$

Notons

$$I=\int_0^{+\infty}e^{i\|x-y\|\rho\sin\theta_1}\ \frac{\rho^4}{p(\rho)}\ \left[\ \frac{6}{t^2}+\frac{2\rho t}{t^2}\ \frac{t\ \rho\ \sin t\rho}{t\ \rho\ \cos t\rho-\sin t\rho}\ \right]\ d\rho,$$

et effectuons un calcul de résidus sur I en supposant que $p(\rho) = \rho^2\ (1+\rho^2)$ $(4+\rho^2)(9+\rho^2)$.

Si ρ tend vers 0, alors $\dfrac{\rho^4}{p(\rho)}\left[\dfrac{6}{t^2} + \dfrac{2\rho t}{t^2}\dfrac{t\rho \sin t\rho}{t\rho\cos t\rho - \sin t\rho}\right]$ tend vers 0;

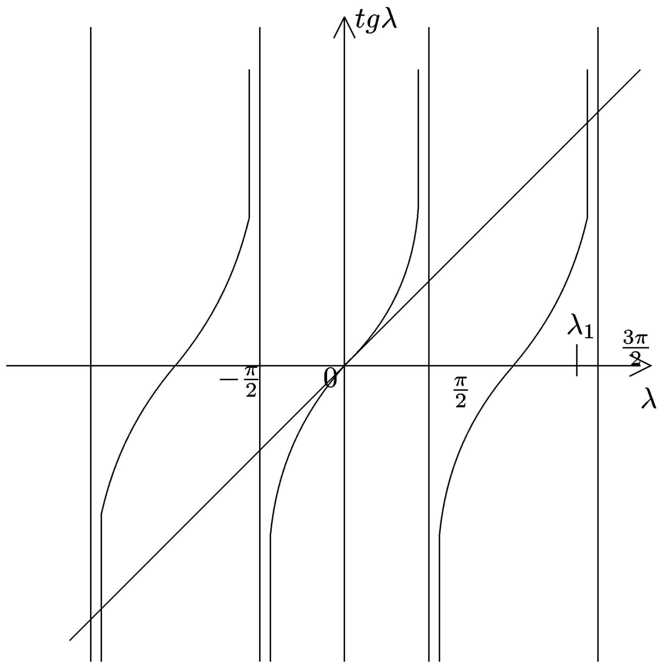
si ρ tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{\rho^4}{p(\rho)}\left[\dfrac{6}{t^2} + \dfrac{2\rho t}{t^2}\ \dfrac{t\ \rho\ \sin t\rho}{t\ \rho\ \cos t\rho - \sin t\rho}\right]$ tend vers 0;

donc I est semi convergente (cf H. Cartan Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieures variables complexes).

Selon que $0 \le \theta_1 \le \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta_1 \le 0$ on notera : $I = I_1$ ou I_2.

Appelons λ_k les solutions réelles de l'équation $\lambda\ \cos\lambda - \sin\lambda = 0$.

D'aprés le lemme de l'appendice 1, les seules solutions complexes de cette équation sont réelles et forme une suite croissante $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ avec $\lambda_{-k} = -\lambda_k$, $\lambda_k \in \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(\forall k \in \mathbb{Z}), \lambda_k - k\pi$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ lorsque k tend vers $+\infty$. On a : $\lambda_k = t\rho_k$, en notant ρ_k la solution correspondante de l'équation $t\rho\ \cos t\rho - \sin t\rho = 0$ d'inconnue ρ, d'après le graphe :



Les résultats des calculs de résidus sont donnés par les deux lemmes suivants :

Lemme 5.1. *Pour* $0 \leq \theta_1 \leq \dfrac{\pi}{2}$ *et* $t > 0$, *on a*

$$
\begin{aligned}
I_1 = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} & e^{-\frac{\|x-y\|}{t}\mu\sin\theta_1}\frac{(\frac{\mu}{t})^4}{p(i\frac{\mu}{t})}\left[\frac{6i}{t^2}-\frac{2i\mu}{t^2}\frac{\mu\sinh\mu}{\mu\cosh\mu-\sinh\mu}\right]d\mu \\
& -\frac{i\pi}{t}\sum_{p=1}^{+\infty} e^{i\|x-y\|\ \rho_p\sin\theta_1}\ \frac{\rho_p^4}{p(\rho_p)}\frac{2\ t\rho_p}{t^2} \\
& -\frac{\pi}{t}\left\{e^{-\|x-y\|\sin\theta_1}\ \left[\frac{t}{48}\left(\frac{6}{t^2}+\frac{2}{t}\ \frac{-t\sinh t}{t\cosh t-\sinh t}\right)\right]\right. \\
& + e^{-2\|x-y\|\sin\theta_1}\left[-\frac{t}{15}\left(\frac{6}{t^2}+\frac{4}{t}\ \frac{-2t\sinh 2t}{2t\cosh 2t-\sinh 2t}\right)\right] \\
& \left. + e^{-3\|x-y\|\sin\theta_1}\left[\frac{3t}{80}\left(\frac{6}{t^2}+\frac{6}{t}\ \frac{-3t\sinh 3t}{3t\cosh 3t-\sinh 3t}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Lemme 5.2. *Pour* $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$ *et* $t > 0$, *on a*

$$
\begin{aligned}
I_2 = -\frac{1}{t}\int_0^{+\infty} & e^{\frac{\|x-y\|}{t}\mu\sin\theta_1}\frac{(\frac{\mu}{t})^4}{p(i\frac{\mu}{t})}\left[\frac{6i}{t^2}-\frac{2i\mu}{t^2}\frac{\mu\sinh\mu}{\mu\cosh\mu-\sinh\mu}\right]d\mu \\
& +\frac{i\pi}{t}\sum_{p=1}^{+\infty} e^{i\|x-y\|\ \rho_p\sin\theta_1}\ \frac{\rho_p^4}{p(\rho_p)}\frac{2\ t\rho_p}{t^2} \\
& +\frac{\pi}{t}\left\{e^{\|x-y\|\sin\theta_1}\left[-\frac{t}{48}\left(\frac{6}{t^2}+\frac{2}{t}\ \frac{-t\sinh t}{t\cosh t-\sinh t}\right)\right]\right. \\
& + e^{2\|x-y\|\sin\theta_1}\left[\frac{t}{15}\left(\frac{6}{t^2}+\frac{4}{t}\ \frac{-2t\sinh 2t}{2t\cosh 2t-\sinh 2t}\right)\right] \\
& \left. + e^{3\|x-y\|\sin\theta_1}\left[-\frac{3t}{80}\left(\frac{6}{t^2}+\frac{6}{t}\ \frac{-3t\sinh 3t}{3t\cosh 3t-\sinh 3t}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Nous utiliserons dans la suite les lemmes 5.1 et 5.2 pour calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_1\cos^3\theta_1\ d\theta_1$ et $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^0 I_2\cos^3\theta_1\ d\theta_1$.

En effet en remplaçant θ_1 par $\theta_1 = -\ \theta_1'$ lorsque $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta_1 \le 0$ ainsi $\theta_1' \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et en notant θ_1' par θ_1 on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_1 \cos^3\theta_1\ d\theta_1 + \int_{\frac{-\pi}{2}}^0 I_2 \cos^3\theta_1\ d\theta_1$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta_1 \int_0^{+\infty} e^{\frac{\|x-y\|}{t}\rho\sin\theta_1} \frac{\rho}{(1+\rho)^5}\left[\frac{6}{t^2} + \frac{2t\rho}{t^2}\frac{t\rho\ \sin t\rho}{(t\rho\cos t\rho - \sin t\rho)}\right] d\rho$$

$$= \frac{\pi}{t}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\rho_p^4}{p(\rho_p)}\ \frac{2t\rho_p}{t^2}\ \left(2Re\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\|x-y\|\rho_p\sin\theta_1}}{i}\cos 3\theta_1\ d\theta_1\right)$$

$$-\ \frac{\pi}{24}\ \left(\frac{6}{t^2} + \frac{2}{t}\frac{-t\sinh t}{t\cosh t - \sinh t}\right)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\|x-y\|\sin\theta_1}\cos^3\theta_1\ d\theta_1$$

$$+\ \frac{2\pi}{15}\ \left(\frac{6}{t^2} + \frac{4}{t}\frac{-2t\sinh 2t}{2t\cosh 2t - \sinh 2t}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\|x-y\|\sin\theta_1}\cos^3\theta_1\ d\theta_1$$

$$-\ \frac{3\pi}{40}\ \left(\frac{6}{t^2} + \frac{6}{t}\frac{-3t\sinh 3t}{3t\cosh 3t - \sinh 3t}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-3\|x-y\|\sin\theta_1}\ \cos^3\theta_1\ d\theta_1\ .$$

On calcule donc, en annexe :

$$P\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\|x-y\|\rho_p\sin\theta_1}\cos 3\theta_1\ d\theta_1,$$

$$Q_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\|x-y\|\sin\theta_1}\ \cos^3\theta_1\ d\theta_1,$$

$$Q_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\|x-y\|\sin\theta_1}\ \cos^3\theta_1\ d\theta_1,$$

$$Q_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-3\|x-y\|\sin\theta_1}\ \cos^3\theta_1\ d\theta_1\ .$$

$$P\ = \frac{i}{\|x-y\|\rho_p} - \frac{2e^{i\|x-y\|\rho_p}}{\|x-y\|^2\rho_p^2} - 2i\ \frac{e^{i\|x-y\|\rho_p} - 1}{\|x-y\|^3\rho_p^3},$$

$$Q_1 = \frac{1}{\|x-y\|} + \frac{2}{\|x-y\|^2}\ e^{-\|x-y\|} + \frac{2}{\|x-y\|^3}\ (e^{-\|x-y\|} - 1),$$

$$Q_2 = \frac{1}{2\|x-y\|} + \frac{1}{2\|x-y\|^2}\ e^{-2\|x-y\|} + \frac{1}{4\|x-y\|^3}\ (e^{-2\|x-y\|} - 1),$$

$$Q_3 = \frac{1}{3\|x-y\|} + \frac{2}{9\|x-y\|^2}\ e^{-3\|x-y\|} + \frac{2}{27\|x-y\|^3}\ (e^{-3\|x-y\|} - 1)\ .$$

D'après la formule (5.1) nous obtenons une expression de Nu donnée par la proposition 2.4 enoncée dans le paragraphe 2.

6. Inégalités $\mathcal{L}^p - \mathcal{L}^q$ pour le système (6.1).

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
Ly & = (\Box - N)y = 0 \\
y_{/t=0} & = 0, y_{t/t=0} = g
\end{array}
\right.
\tag{6.1}
$$

6.1. Inégalité $\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^2$ pour (6.1). On a

$$y(t,x) = \frac{t}{w_n} \int_S g(x+tz)\, dz.$$

Donc

$$\|y\|_{\mathcal{L}^2} \leq \ t\, \|g\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Et par transformation de Fourier on obtient :

$$\|Dy\|_{\mathcal{L}^2} = \|\nabla y\|_{\mathcal{L}^2} + \|\partial_t y\|_{\mathcal{L}^2} \leq \ c\ [\ \|g\|_{\mathcal{L}^2}\ ],\ \forall\ t \geq 0.$$

On conjecture que $c = 1$.

6.2. Inégalité $\mathcal{L}^1 - \mathcal{L}^\infty$ pour (6.1). On s'intéresse à

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
Ly & = (\Box - N)y = 0 \text{ dans } \ \mathbb{R}^{n+1}_+ \ \ (n=5) \\
y_{/t=0} & = 0 \quad\ y_{t/t=0} = g \text{ dans } \ \mathbb{R}^n \ \ (n=5)
\end{array}
\right.
$$

$$y = \frac{t}{w_n} \int_{S^4} \ g(x+tz)\, dz \ = \Omega(t)\ g$$

1. On a

$$
\begin{aligned}
-\int_{S^4} \ g(x+tz)\, dz &= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{d}{ds} g(x+sz)\, ds\, dz \\
&= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} (\nabla g)(x+sz).z\, ds\, dz \\
&= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{s^4}{s^5} (\nabla g)(x+sz)(sz)\, ds\, dz \\
&\text{(On pose } Z = sz) \\
&= \int_{|Z|>t} |Z|^{-5}\ (\nabla g)(x+Z).Z\, dZ \\
&(\text{car } \ s = |Z| \ \text{ et } s^4\, dz = dZ \text{ sur } \ S^4(0,s)\ )
\end{aligned}
$$

Cela implique

$$\left| \int_{S^4} g(x+tz)\, dz \right| \leq t^{-4} \int_{|Z|>t} (\nabla g)(x+Z)\, dZ$$
$$\leq t^{-4}\, \|g\|_{1,1}\ .$$

2. De façon analogue on a :

$$\begin{aligned} -t \int_{S^4} (\nabla g)(x+tz)\, z\, dz &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} \frac{d}{ds}(\nabla g)(x+sz)\, z\, ds\, dz \\ &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} (\nabla\nabla g)(x+sz)(z,z)\, ds\, dz \\ &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} \frac{s^4}{s^5}\frac{s^4}{s^5}(\nabla\nabla g)(x+sz)(sz,sz)\, ds\, dz \\ &\text{(et en posant } Z = sz) \\ &= t \int_{|Z|>t} \frac{1}{|Z|^6}\, (\nabla\nabla g)(x+Z)(Z,Z)\, dZ \end{aligned}$$

on déduit que

$$|\ t \int_{S^4} (\nabla g)(x+tz).z\, dz\ | \leq t^{-3} \int_{|Z|>t} |\ \nabla\nabla g(x+Z)\ |\ dZ$$
$$|\ t \int_{S^4} (\nabla g)(x+tz).z\, dz\ | \leq t^{-3}\, \|g\|_{2,1}\ .$$

De même on a

$$\begin{aligned} -t \int_{S^4} (\nabla g)(x+tz)\, dz &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} \frac{d}{ds}(\nabla g)(x+sz)\, ds\, dz \\ &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} (\nabla\nabla g)(x+sz).z\, ds\, dz \\ &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} \frac{s^4}{s^5}(\nabla\nabla g)(x+sz)(sz)\, ds\, dz \\ &\text{(et on pose } Z = sz) \\ &= t \int_{|Z|>t} \frac{1}{|Z|^5}\, (\nabla\nabla g)(x+Z)(Z)\, dZ \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left|\ t \int_{S^4} (\nabla g)(x+tz)\, dz\ \right| \leq t^{-3} \int_{|Z|>t} |\ \nabla\nabla g(x+Z)\ |\ dZ$$
$$\left|\ t \int_{S^4} (\nabla g)(x+tz)\, dz\ \right| \leq t^{-3}\, \|g\|_{2,1}\ .$$

Rappelons que,

$$\begin{cases} w_n\, y_t(t,x) & = \int_{S^4} g(x+tz)\, dz + t \int_{S^4} \nabla g(x+tz)\, z\, dz \\ w_n\, \nabla y(t,x) & = t \int_{S^4} \nabla g(x+tz)\, dz \end{cases}$$

Par conséquent nous obtenons pour $t \geq 1$:

$$\|D\Omega(t)g\|_\infty \leq \frac{1}{w_n t^3} \left[\frac{1}{t} \|g\|_{1,1} + \|g\|_{2,1} \right]$$

$$\|D\Omega(t)g\|_\infty \leq \frac{1}{w_n t^3} \left[\frac{1}{t} + 1 \right] \|g\|_{2,1} \leq \frac{2}{w_n t^3} \|g\|_{2,1} \quad \text{car } \|g\|_{1,1} \leq \|g\|_{2,1}.$$

3. Maintenant soit $0 \leq t \leq 1$.
On a

$$\begin{aligned} -\int_{S^4} g(x+tz)\, dz &= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{d}{ds} g(x+sz)\, ds\, dz \\ &= -\int_{S^4} \int_t^{+\infty} (s-t) \frac{d^2}{ds^2} g(x+sz)\, ds\, dz \\ &= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{(s-t)^2}{2} \frac{d^3}{ds^3} g(x+sz)\, dz\, ds \\ &\left(= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{(s-t)^2}{2} \sum_{ijklm} \partial_i \partial_j \partial_k g(x+sz)(z,z,z) dz ds \right) \\ &\left(= \int_{|Z|>t} \frac{(|Z|-t)^2}{2|Z|^7} \sum_{ijklm} Z_i Z_j Z_k (\partial_i \partial_j \partial_k g)(x+Z) dZ \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{(s-t)^3}{6} \frac{d^4}{ds^4} g(x+sz)\, dz\, ds \\ &\left(= \int_{|Z|>t} \frac{(|Z|-t)^3}{6|Z|^8} \sum_{ijklm} Z_i Z_j Z_k Z_l (\partial_i \partial_j \partial_k \partial_l g)(x+Z) dZ \right) \\ &= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{(s-t)^4}{24} \frac{d^5}{ds^5} g(x+sz)\, dz\, ds \\ &\left(= \int_{|Z|>t} \frac{(|Z|-t)^4}{24|Z|^9} \sum_{ijklm} Z_i Z_j Z_k Z_l Z_m (\partial_i \partial_j \partial_k \partial_l \partial_m g)(x+Z) dZ \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\left| -\!\!\!\!\!\!\int_{S^4} g(x+tz)\,dz \right| \le \sum_{ijklm} \int |(\partial_i\partial_j\partial_k\partial_l\partial_m g)(x+Z)|\,dZ$$

$$\left| -\!\!\!\!\!\!\int_{S^4} g(x+tz)\,dz \right| \le g_{5,1}.$$

De façon analogue, on a les mêmes résultats pour les autres termes discutés dans le cas $t > 1$.
Ainsi nous avons obtenu pour $0 \le t \le 1$:

$$\|D\Omega(t)g\|_\infty \le c\,\|g\|_{6,1}\ .$$

Donc on a prouvé que pour tout $t \ge 0$:

$$\|D\Omega(t)g\|_\infty(t) \le c\,(1+t)^{-3}\,\|g\|_{6,1}\ .$$

Par interpolation on obtient le théorème suivant.

Théorème 6.1. *Soit* $2 \le q \le +\infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $\forall N_p > 6\left(1 - \dfrac{2}{q}\right)$ *alors* $\exists\, c = c(q)\ \ \forall\, g \in W^{N_p,p},\ \ \forall\, t \ge 0$ *:*

$$\|D\Omega(t)g\|_q \le c\,(1+t)^{-3(1-\frac{2}{q})}\,\|g\|_{N_p,p}$$

$N_p = 6\left(1 - \dfrac{2}{q}\right)$ *est possible lorsque* $q \in \{2, +\infty\}$.

7. Existence d'une solution de l'équation linéaire (n=5) $Ly = 0$, $y_{/t=0} = 0$, $y'_{t/t=0} = g$.

P r e u v e d u t h é o r è m e 2.2. Soit $g \in W^{N,p}(\mathbb{R}^5_x)$ $(N = N_p + s, s \in \mathbb{N})$. Considérons $(\chi_n)_n$ les fonctions régularisantes de Friedrichs ; $\chi_n * g \to_{n\to\infty} g$ dans $W^{N,p}(\mathbb{R}^5)$ et $\chi_n * g = g_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^5)$.
Alors la solution de

$$\begin{cases} Ly_n & = 0 \\ y_{n/t=0} & = 0, \quad y_{n\backslash t/t=0} = g_n \end{cases}$$

est

$$y_n = \frac{t}{w_5} \int_{S(0,1)} g_n(x+tz)\,dz.$$

En utilisant le théorème 6.1, on montre que la suite $(y_n)_n$ est de Cauchy et converge vers la solution cherchée.

8. Remarques. On a $Ly = (\Box - N)y = \partial^2_{tt}y - p(t, Dy)$

a)

$$p(t,\xi) = \frac{\int_C \; e^{itz.\xi} \; (2i(z.\xi) - t(z.\xi)^2)dz}{t \int_C e^{itz.\xi} \; dz}$$

puisque,

$$e^{itz.\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k t^k z^k \xi^k}{k!} = 1 + itz.\xi + \frac{i^2 t^2 z^2 \xi^2}{2} + \cdots$$

alors

$$e^{itz.\xi}(2i(z.\xi) - t(z.\xi)^2) = 2iz.\xi + (2i^2 t - t)(z.\xi)^2 + \cdots$$

D'où

$$\begin{aligned} p(t,\xi) \to_{t\to 0} &= \frac{-3\int_C (z.\xi)^2 dz}{\int_C \; dz} \quad \text{si } \int_C (z.\xi)dz = 0 \Leftrightarrow \int_C z dz = 0 \; \forall \xi \\ &= \frac{-3|\xi|^2}{n} \qquad\qquad \text{si } C = S^{n-1}(0,1) \end{aligned}$$

b)

$$p(t,\xi) \to_{t\to\infty} -|\xi|^2 \quad \text{si} \;\; C = S^{n-1}(0,1)$$

c) On conjecture que l'on peut avoir un théorème analogue au théorème 2.2 du paragraphe 2 lorsque $n \geq 5$ et $C = S^{n-1}$; dans ce cas $p_n(t,\xi) = T_1(t,\xi) + T_2(t,\xi)$ avec $T_1(t,\xi) \sim_{|\xi|\to\infty} -|\xi|^2$ ($\forall\; t > 0$) et $T_2(t,\xi) = \dfrac{2}{t}\,\dfrac{D'_t}{D_0}$ avec $D = \displaystyle\int_S e^{itz.\xi}\; dz$ ($= t|\xi| \cos t|\xi| - \sin t|\xi|$ lorsque $n = 5$), on a en effet

$$\begin{aligned} p(t,\xi) &= -\frac{\int_S e^{itz.\xi}(z.\xi)^2 dz}{\int_S e^{itz.\xi}\; dz} + \frac{2}{t}\frac{\int_S i e^{itz.\xi}(z.\xi)dz}{\int_S e^{itz.\xi}\; dz}, \\ T_1(t,\xi) &= -\frac{\int_S e^{itz.\xi}(z.\xi)^2 dz}{\int_S e^{itz.\xi}\; dz}, \\ T_2 &= \frac{2}{t}\frac{D'_t}{D} \qquad \text{avec } \; D = \int_S e^{itz.\xi} dz \end{aligned}$$

d) $T_2(t,\xi)$ est un symbole singulier car $D(t,|\xi|)$ admet une infinité de zéros relativement à $|\xi|$.

Cependant on peut donner un sens à l'opérateur singulier correspondant $T_2(t, D_x)$ comme on l'a fait aux paragraphes 4 et 5 dans le cas $n = 5$.

Nous examinerons ces généralisations dans un travail ultérieur.

Les auteurs remercient les professeurs Pietro d'Ancona, Todor Gramchev, Satyanad Kichenassamy et Jean Vaillant pour leurs remarques judicieuses.

REFERENCES

[1] Robert A. Adams. Sobolev Spaces. Pure Appl. Math. vol.**65**, Academic Press, 1975.

[2] R. Courant, D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics, Volume II. Partial differential equations. Transl. and rev. from the German Original. Reprint of the 1st Engl. ed. 1962, Wiley Classics Edition, John Wiley & Sons, New York 1989.

[3] J. Dieudonné. Calcul Infinitésimal . 2 ed, rev. et corr., Collection Methodes, Hermann, Paris, 1980 (in French).

[4] J. Ginibre, G. Velo. Inégalités de Strichartz généralisées de l'équation des ondes. Séminaire sur les Equations aux Dérivées partielles. Ecole Polytecnique Palaiseau, Exp No 17, 1995.

[5] R. Racke. Lectures on Non lineair Evolution Equations. Initial Value Problems. Aspects Math. vol. **19**, Fried. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.

[6] R. S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solution of wave equations. *Duke Math. J.* **44**, *3* (1977), 705–714.

[7] M. E. Taylor. Partial differential equations III. Non linear Equations. Appl. Math. Sci. vol. **117**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.

[8] M. Berger, D. Gauduchon, E. Mazet. Le spectre d'une Variété Riemanienne. Lecture Notes in Math. vol. **194**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.

[9] S. Delache, J. Leray. Calcul de la solution élémentaire de l'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux et de l'opérateur de Triciomi-Clairaut, hyperbolique d'ordre 2. *Bull. Soc. Math. France* **99** (1971), 313–336.

[10] P. Günther. Ûber einige spezialle probleme aus der theorie des linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ber. Verh. Sächs. Akad, Wiss.leipzig. Math. Nat. Kl **102**, *1* (1957), 50 (in German).

[11] F. John. Plane waves and spherical means applied to partial differential equation. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No 2.

[12] G. Beylkin. The fundamental identity for iterated spherical means and the inversion formula for diffraction tomography and inverse scattering. *J. Math. Phys.* No 24 6pp (1983), 1399–1400.

Laboratoire d'Analyse complexe
l'Institut de Maths de Jussieu
Université Pierre et Marie Curie
Paris VI
175, rue du Chevaleret
75013 Paris, France
e-mail : `gourdin@math.jussieu.fr`

Received June 13, 2007
Revised November 5, 2007