Serdica

Mathematical Journal

Сердика

Математическо списание

Serdica Math. J. **32** (2006), 1–6

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

DOMAINE NUMÉRIQUE DU PRODUIT *AB* AVEC *A* NORMAL

Mohamed Chraïbi Kaadoud

Communicated by S. L. Troyanski

Abstract. Let A, B be two linear operators on a complex Hilbert space H. We extend a Bouldin's result (1969) conserning $W(AB)$ – the numerical range of the product AB. We show, when $AB = BA$ and A is normal, than

$$\overline{W(AB)} \subset \overline{\{\langle Ax, x\rangle \langle Bx, x\rangle \quad \|x\| = 1\}}$$

1. Introduction.

Soient H un espace de Hilbert complexe, $B(H)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés. Pour A dans $B(H)$, le rayon numérique $w(A)$ est défini par

$$w(A) = \sup\{|z|\,,\ z \in W(A)\}\,,$$

où le domaine numérique $W(A)$ est

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle\,,\ \ \|x\| = 1\}\,.$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 47A12.
Key words: Domaine numérique, opérateur normal.

Ce dernier ensemble est toujours un convexe du plan complexe $\mathbb{C}$ et son adhérence contient le spectre de A, voir [8] et [6]. L'application domaine numérique présente plus de souplesse que celle du spectre, la première est continue au sens de Hausdorff, ce qui n'est pas le cas pour la seconde. Le centre du plus petit disque contenant $W(A)$ est continue contrairement au centre de celui contenant le spectre de A, voir [4].

Marshall Stone (1932) a choisi pour $W(A)$ le nom domaine numérique. Toeplitz et Hausdorff l'ont appelé wertvorrat d'une forme bilinéaire. D'autre ont préféré dire le domaine de Hausdorff ou le corps des valeurs.

Pour A, B deux éléments de $B(H)$, la détermination du domaine numérique du produit AB soit $W(AB)$ vu sa difficulté n'a pas été assez développée depuis le résultat de Bouldin en 1969 (voir [1]). Ce dernier a démontré pour A, B dans $B(H)$, $AB = BA$ et A positif, c'est à dire que $W(A)$ est constitué de réels positifs que $W(AB)$ est dans $W(A)W(B)$. En 2003, Chraibi [3] a amélioré ce résultat en démontrant dans le cas où $AB = BA$ et $W(A)$ est constitué d'éléments strictements positifs que

$$W(AB) \subset \left\{ \frac{\langle Bx, x\rangle}{\langle A^{-1}x, x\rangle}, \ \ \|x\| = 1 \right\}.$$

Le cas général où A et B sont quelconques dans $B(H)$ (voir [3]), nous avons $W(AB)$ est l'ensemble des quantités $\langle Ax, x\rangle \langle Bx, x\rangle + \langle Ay, x\rangle \langle Bx, y\rangle$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$, $\langle x, y\rangle = 0$ et $Bx \in vect(x, y)$. Ceci permet de conclure que

$$W(AB) \subset I_{A,B} + S(A)S(B),$$

où

$$I_{A,B} = \{\langle Ax, x\rangle \langle Bx, x\rangle\,, \ \ \|x\| = 1\}\,,$$

et

$$S(A) = \{\langle Ax, y\rangle\,, \ \ \|x\| = \|y\| = 1, \ \ \langle x, y\rangle = 0\}\,.$$

La fermeture de $S(A)$ est également le disque fermé centré à l'origine et de rayon $d(A)$ (voir [2]), avec

$$d(A) = \inf\{\|A - \lambda I\|\,, \ \lambda \in \mathbb{C}\}\,.$$

Un opérateur A est dit normal si $AA^* = A^*A$ avec A^* est l'adjoint de A.

Le résultat essentiel dans ce travail est de montrer que si A, B sont dans $B(H)$, $AB = BA$ et A est normal, on a alors

$$\overline{W(AB)} \ \subset co\overline{I_{A,B}}.$$

Où la barre désigne l'adhérence et *co* est l'enveloppe convexe.

Ceci présente comme conséquence immédiate sous les mêmes hypothèses le résultat suivant de Holbrook en 1967 (voir [7])

$$w(AB) \leq W(A)w(B).$$

D'autres informations consernant le rayon numérique du produit et le domaine numérique sont à consulter sur le livre spécialisé [6] "The field of values of linear operators and matrices".

2. Domaine numérique du produit.

Les deux lemmes suivants sont utiles pour démontrer le théorème qui suit.

Lemma 1 [2]**.** *Soient C un convexe du plan complexe $\mathbb{C}$, (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{C}$ et (λ_n) une suite de réels positifs tels que $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \lambda_n = 1$, alors $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \lambda_n x_n$ est dans C.*

Lemma 2. *Soient A, B deux opérateurs de $B(H)$, avec A diagonalisable et $AB = BA$ alors*

$$W(AB) \subset coI_{A,B}$$

P r e u v e. A est diagonalisable, donc $H = \sum_{n=1}^{n=+\infty} H_n$ avec pour $n \neq m$, H_n est un sous espace vectoriel de H orthogonal à H_m et $Ay = \lambda_n y$ pour tout y dans H_n. Soit x dans H, x de norme 1, $x = \sum_{n=1}^{n=+\infty} x_n$, x_n dans H_n. Sans rien perdre de généralité de ce lemme, on peut supposer pour tout n, $x_n \neq 0$.

On a

$$ABx_n = BAx_n = \lambda_n Bx_n.$$

Donc Bx_n est dans H_n. Parsuite,

$$\begin{aligned} \langle ABx, x \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{n=+\infty} ABx_n, \sum_{m=1}^{m=+\infty} x_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{n=+\infty} \lambda_n \left\langle Bx_n, \sum_{m=1}^{m=+\infty} x_m \right\rangle \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=+\infty} \lambda_n \langle Bx_n, x_n \rangle$$
$$= \sum_{n=1}^{n=+\infty} \|x_n\|^2 \langle Ay_n, y_n \rangle \langle By_n, y_n \rangle .$$

Où $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$ et $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \|x_n\|^2 = 1$. Du lemme précédent, $\langle ABx, x \rangle$ est dans $coI_{A,B}$. $\square$

Théorèm 3. *Soient A, B deux opérateurs de $B(H)$, avec A normal et $AB = BA$. Alors*

$$(*) \qquad \overline{W(AB)} \subset co\overline{I_{A,B}}$$

P r e u v e. Le théorème spéctral permet d'approximer l'opérateur normal A par une suite d'opérateurs de type $A_n = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k$, $(P_1, P_2, \dots$ sont des projections orthogonales, $\sum_{k=1}^{m} P_k = I$ et I est l'opérateur identité) telle que chaque λ_k est dans le spectre de A. Par le théorème de Fuglede (voir [5], ou pour une simple preuve voir Rosemplum [9]), nous pouvons affirmer que A_n et chaque P_k commuttent avec B puisque A commute avec B. Le lemme 1 permet d'affirmer que

$$W(A_n B) \subset coI_{A_n,B}.$$

On peut vérifier facilement que $\overline{W(A_n B)}$ et $co\overline{I_{A_n,B}}$ convergent au sens de Hausdorff respectivement vers $\overline{W(AB)}$ et $co\overline{I_{A,B}}$. $\square$

Remarque 4. 1. Dans le théorème précédent, nous avons supposé que A est normal et $AB = BA$ pour avoir l'inclusion $(*)$. Ces deux conditions sont indispensables comme le montrent les deux exemples suivants :

i. Cet exemple se trouve dans [6]. Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = A^2.$$

On a $w(A) = \cos(\frac{\pi}{5}) = 0{,}80901699$. $w(A^2) = w(A^3) = 0,5$. $AB = BA$. $w(AB) = w(A^3) = 0{,}5$. $w(A)w(B) = 0{,}4045085$.

ii. Pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $AB \neq BA$ et A est positif, donc A est normal. $w(A) = 1$, $w(B) = \dfrac{1}{2}$, $w(AB) = 1$

2. L'inclusion $(*)$ est une égalité si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A.$$

Pour z dans $I_{A,B}$, $z = \langle Au, u\rangle^2$ avec $u = (x, y)$, $|x|^2 + |y|^2 = 1$. Donc $z = |x|^4$. Posons $v = (\ |x|^2, \sqrt{1 - |x|^4})$. Nous avons alors $z = \langle ABv, v\rangle$. Puisque $W(AB)$ est un convexe donc il contient $coI_{A,B}$.

3. On constate par l'exemple suivant que l'inclusion $(*)$ ne peut pas être toujours une égalité.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a A et B sont normaux, $AB = BA = 0$, $W(AB) = 0$ et $I_{A,B} \neq 0$.

REFERENCES

[1] Bouldin. The numerical range of a product. *J. Math. Anal. Appl.* **32** (1970), 459–467.

[2] M. Chraibi Kaadoud. Domaine numérique de l'opérateur produit $M_{2,A,B}$ et de la dérivation généralisée $\delta_{2,A,B}$. *Extracta mathematica* **17**, *1* (2002), 59–68.

[3] M. Chraibi Kaadoud. Domaine numérique du produit et de la bimultiplication $M_{2,A,B}$. *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2004), 2421–2428.

[4] M. Chraibi Kaadoud. Géometrie du spectre dans une algèbre de Banach et domaine numérique. *Stud. Math.* **161**, *1* (2004), 1–14.

[5] B. Fuglede. A commutativity theorem for normal operators. *Proc. N. A. S.* **36** (1950), 35–40.

[6] K. E. Gustafson, D. K. M. Rao. The field of valuesof linear operators and matrices. Springer, 1996.

[7] J. Holbrook. Multiplicative properties of the numerical radius in operator theory. *J. Reine Angew. Math.* **237** (1969), 166–174.

[8] C. K. Li. C-Numerical range and C-Numerical radii. *Linear and multilinear algebra* **31**, (1994), 51–82.

[9] M. Rosemblum. On a Theorem of Fuglede and Putnam. *J. London Math. Soc.* **33** (1958), 376–377.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département des Mathématiques
Marrakech, Maroc

Received July 9, 2004