

ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ КЛИНИ И ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫЕ ЦЕПИ

Дмитрий Буй, Елена Шишацкая

Аннотация: Рассмотрена сильная и слабая трехзначные логики Клини. Показано возникновение сильной логики из обычной булевой логики путем применения общезначимой конструкции распространения операций с элементов на множества элементов в терминах полного образа. Проиллюстрировано компактное задание операций обеих логик Клини трехэлементными цепями.

Ключевые слова: сильная логика Клини, слабая логика Клини, цепь, полный образ.

ACM Classification Keywords: F.4.1 Theory of Computation – Mathematical Logic and Formal Languages - Mathematical Logic.

Conference: The paper is selected from XIVth International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2008, Varna, Bulgaria, June-July 2008

Введение

Работа посвящена сильной и слабой трехзначным логикам Клини, использующихся в теории рекурсии [1, с. 296-303]. Сильная логика используется в системах алгоритмических алгебр Глушкова [2, с. 117; § 4.2, с. 127], современных SQL-подобных языках реляционных баз данных [3, с. 169-170] и современных языках спецификаций UML/OCL при работе с булевым типом, пополненным третьим специальным значением [4, 5]. Заметим, что слабая логика Клини возникает путем естественного расширения в понимании [6] стандартных булевых операций, этот подход полностью отвечает принципам работы со специальным значением (UNDEFINED) стандарта объектных баз данных ODMG, в частности, языку запросов OQL [7, 8]. Далее под сильной и слабой логикой Клини будем понимать сильную и слабую трехзначную логику Клини.

Построение сильной логики Клини на основе обычной булевой логики

Применим общезначимую конструкцию распространения операций с элементов на множества элементов в терминах полного образа; именно такая конструкция применялась в [3, с. 23-24] при исследовании операций табличных алгебр, построенных на основе известных реляционных алгебр Кодда; общим свойствам полного образа посвящена работа [9].

Полный образ позволяет естественно распространять унарные (бинарные) операции на универсуме на булеан универсума. Через $[f]$ обозначим унарную тотальную операцию на булеане $P(D)$ универсума D ,

которая индуцируется частичной операцией f на универсуме и задается равенством $[f](X) \stackrel{\text{def}}{=} f[X]$; тут и

далее $f[X] \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid \exists x(x \in X \wedge y \simeq f(x))\}$ – полный образ множества X относительно операции f , где, учитывая частичность функции, \simeq – обобщенное равенство. Аналогично, пусть F – бинарная частичная операция на D ; она также порождает бинарную тотальную операцию $[F]$ на булеане универсума D ,

которая задается равенством $[F](X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} F[X \times Y]$.

Применим указанную схему расширения к сигнатурным операциям алгебры стандартной логики $\langle \{T, F\}; \wedge, \vee, \neg \rangle$, где T, F – логические значения истины и лжи соответственно. Результат расширения операции конъюнкции \wedge и отрицания \neg на булеан $P(\{T, F\})$ приведены в таблицах 1, 2 (расширение дизъюнкции строится аналогично).

Таблица 1. Операция $[\wedge]$ на булеане $P(\{T, F\})$

	\emptyset	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\{T\}$	\emptyset	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$
$\{F\}$	\emptyset	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$
$\{T, F\}$	\emptyset	$\{T, F\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$

Таблица 2. Операция $[\neg]$ на булеане $P(\{T, F\})$

аргумент	\emptyset	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$
значение	\emptyset	$\{F\}$	$\{T\}$	$\{T, F\}$

В таблице 1 первому аргументу отвечают столбцы, второму аргументу – строки. Расширения бинарных операций коммутативны; поэтому таблица 1 “симметрична” (относительно главной диагонали), и сопоставление аргументам столбцов или строк в действительности несущественно. Свойства коммутативности и ассоциативности расширений конъюнкции и дизъюнкции наследуются (что следует из общих результатов [3, утверждение 1.3.1; 9, утверждение 5]). Поскольку декартово произведение и полный образ сохраняют пустое множество, то и операции $[\wedge]$, $[\vee]$, $[\neg]$ сохраняют пустое множество. Поэтому в таблице 1, например, присутствуют константные строка и столбец, заполненные \emptyset .

Рассмотрим отображение $\psi : \{T, F, \omega\} \rightarrow P(\{T, F\})$, где ω – третье логическое значение логики Клини (содержательно интерпретируется как неопределенность): $\psi(T) = \{T\}$, $\psi(F) = \{F\}$, $\psi(\omega) = \{T, F\}$. Очевидно, отображение инъективно, но не сюръективно (ведь пустое множество не входит в область значений отображения ψ). Операции алгебры сильной логики Клини будем обозначать как операции алгебры стандартной логики, вводя только нижний индекс k ; договоримся об одноименных операциях: операциям \wedge_k , \vee_k и \neg_k сопоставляются соответственно операции $[\wedge]$, $[\vee]$ и $[\neg]$.

Предложение 1 (построение алгебры сильной логики Клини). Отображение ψ – однозначный гомоморфизм алгебры сильной логики Клини $\langle \{T, F, \omega\}; \wedge_k, \vee_k, \neg_k \rangle$ в алгебру $\langle P(\{T, F\}); [\wedge], [\vee], [\neg] \rangle$, то есть это отображение является вложением алгебры сильной логики Клини в алгебру $\langle P(\{T, F\}); [\wedge], [\vee], [\neg] \rangle$. \square

Доказательство. Действительно, заменяя в таблицах 1-2 значения $\{T\}, \{F\}, \{T, F\}$ на T, F, ω соответственно (согласно отображения ψ) и удаляя константные столбец и строку, заполненные значением \emptyset , приходим к табличному заданию операций конъюнкции и отрицания алгебры сильной логики Клини. Случай сильной дизъюнкции рассматривается полностью аналогично. \square

Таким образом, алгебру сильной логики Клини можно получить путем применения к алгебре классической булевой логики конструкции расширения (в терминах полного образа) ее сигнатурных операций.

Компактное задание операций сильной логики Клини

Идея заключается в переходе от алгебры $\langle \{T, F, \omega\}; \wedge_k, \vee_k, \neg_k \rangle$ к соответствующей структуре (отметим, что сейчас чаще употребляется термин “решетка”, однако будем пользоваться термином “структура”, поскольку ссылаемся на результаты [10], где используется именно этот термин).

Действительно, непосредственно проверяется, что эти сигнатурные операции коммутативны, ассоциативны и идемпотентны; кроме того, выполняются два закона поглощения: $x \vee_k (x \wedge_k y) = x$ и $x \wedge_k (x \vee_k y) = x$ для всех $x, y \in \{T, F, \omega\}$. Следовательно, по стандартной процедуре, положив $x \leq_k y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = x \wedge_k y$ (эквивалентно $x \leq_k y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} y = x \vee_k y$), можно перейти к структуре, точные грани двухэлементных множеств которой находятся по формулам: $\mathbf{inf}\{x, y\} = x \wedge_k y$, $\mathbf{sup}\{x, y\} = x \vee_k y$ [10, теорема 3, с. 154]. Отношение \leq_k в общем случае является частичным порядком [10, теорема 1, с. 151-152]. Для алгебры сильной логики Клини оно проиллюстрировано в таблице 3 (значениям аргумента x

отвечают строки, y – столбцы; в следующих таблицах будем придерживаться этого же соглашения); знак "+" в ячейке означает, что соответствующие элементы находятся в отношении, знак "-" – не находятся.

Таблица 3. Порядок \leq_k на $\{T, F, \omega\}$

	$x = x \wedge_k y$	$y = x \vee_k y$	$x = x \wedge_k y$	$y = x \vee_k y$	$x = x \wedge_k y$	$y = x \vee_k y$
$x \backslash y$	T		F		ω	
T	+	+	-	-	-	-
F	+	+	+	+	+	+
ω	+	+	-	-	+	+

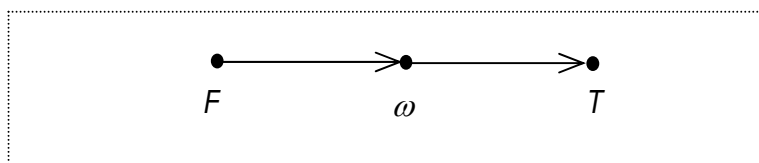


Рис.1. Линейный порядок \leq_k на множестве $\{T, F, \omega\}$

Для случая структуры, отвечающей алгебре сильной логики Клини, ее порядок является линейным (см. рис. 1, построенный на основе таблицы 3), а именно $F \leq_k \omega \leq_k T$ (для компактности на рис. 1 не приведена одна стрелка, возникающая ввиду транзитивности, и три петли, отвечающие рефлексивности порядка). Таким образом, общая ситуация существенно упрощается: структура в действительности является цепью и $x \wedge_k y$ является наименьшим ($x \vee_k y$ – наибольшим) из элементов x, y для всех $x, y \in \{T, F, \omega\}$. Анализ процедуры построения структуры показывает, что линейность в общем случае частичного порядка обеспечивается таким свойством сильных конъюнкции и дизъюнкции – $x \wedge_k y, x \vee_k y \in \{x, y\}$ для всех $x, y \in \{T, F, \omega\}$.

Сформулируем общий результат для коммутативных идемпотентных полугрупп. В формулировке следующего утверждения считаем известной связь между коммутативными идемпотентными полугруппами и нижними полуструктурами [10, теорема 1, с. 151-152].

Предложение 2 (критерий линейности порядка полуструктуры, построенной по коммутативной идемпотентной полугруппе). Пусть $\langle D, + \rangle$ – коммутативная идемпотентная полугруппа, а \leq – частичный порядок, соответствующей нижней полуструктуре, то есть $x \leq y \stackrel{def}{\Leftrightarrow} x = x + y$. Порядок \leq линейный (т.е. $\langle D, \leq \rangle$ является цепью) тогда и только тогда, когда $x + y \in \{x, y\}$ для всех $x, y \in D$. □

Доказательство. Необходимость. Пусть порядок \leq линеен, установим принадлежность $x + y \in \{x, y\}$ для всех $x, y \in D$. Пусть x, y – произвольные элементы; поскольку порядок линеен, то $x \leq y$ или наоборот $y \leq x$. В первом случае $x = x + y$, во втором – $y = y + x$. Поскольку операция коммутативна, то в обоих случаях выполняется принадлежность $x + y \in \{x, y\}$.

Достаточность. Пусть $x + y \in \{x, y\}$ для всех x, y ; покажем, что порядок линейен. Пусть x, y – произвольные элементы, тогда по предположению $x + y = x$ или $x + y = y$. В первом случае $x \leq y$ по определению порядка, во втором – $y \leq x$ (действительно $y = x + y = y + x$). □

Из этого предложения и следует линейность порядка структуры, ассоциируемой с алгеброй сильной логики Клини. Кроме того, то, что структура $\langle \{T, F, \omega\}; \leq_k \rangle$ является цепью, можно показать и другим элементарным путем. Действительно, указанная структура конечна, значит, она имеет наименьший (нуль) и наибольший (единицу) элементы, которые

обозначим $0_k, 1_k$ соответственно. Поскольку структура трехэлементная, то, очевидно, что $0_k <_k 1_k$ и для третьего элемента z (отличного от наименьшего и наибольшего элементов) выполняется строгое неравенство $0_k <_k z <_k 1_k$. Следовательно, структура $\langle \{T, F, \omega\}; \leq_k \rangle$ является цепью. Таким образом, линейность порядка структуры, ассоциируемой с алгеброй сильной логики

Таблица 4. Операция \wedge_ω на $\{T, F, \omega\}$, сохраняющая ω

\wedge_ω	T	F	ω
T	T	F	ω
F	F	F	ω
ω	ω	ω	ω

Клини, следует, с одной стороны, из свойств операций (из принадлежностей $x \wedge_k y, x \vee_k y \in \{x, y\}$), а, с другой стороны, просто из трехэлементности структуры. Именно трехэлементность здесь существенна, ибо каждая n -элементная структура будет цепью при $n = 1, 2, 3$, что не выполняется, в общем случае, при $n \geq 4$ (самый простой пример – булеан двухэлементного множества со стандартным порядком \subseteq). Подытожим вышеприведенную информацию.

Предложение 3 (компактное задание бинарных операций алгебры сильной логики Клини). Отношение \leq_k превращает множество $\{T, F, \omega\}$ в цепь (а, значит, и в структуру), причем $x \wedge_k y$ является наименьшим (соответственно, $x \vee_k y$ – наибольшим) из элементов x, y для всех $x, y \in \{T, F, \omega\}$ согласно этого (линейного) порядка. □

Доказательство вытекает из общих результатов теории структур (интерпретации структуры как алгебры, каждая из двух сигнатурных операций которой идемпотентна, коммутативна и ассоциативна, а сами эти операции связаны законами поглощения) и линейности соответствующего порядка (см. рис. 1). □

Симптоматично, что по сути такое компактное задание операций (алгебры) сильной логики Клини используется в популярной программистской литературе по языку SQL: F интерпретируется как число 0,

T – как 1, ω – как $\frac{1}{2}$; тогда $x \wedge_k y = \min(x, y)$, $x \vee_k y = \max(x, y)$ при естественном порядке –

$0 < \frac{1}{2} < 1$; более того $\neg x = 1 - x$ (см., например, [11]).

Слабая логика Клини, возникающая при естественном расширении булевой логики

Рассмотрим слабую логику Клини и начнем с алгебры (группоида) $\langle \{T, F, \omega\}; \wedge_\omega \rangle$, где операция конъюнкции отлична от рассмотренной выше сильной конъюнкции Клини и задана следующим образом: в случаях, когда хотя бы один аргумент равен третьему (новому) значению ω , результатом будет именно это значение; во всех других случаях операция ведет себя как операция \wedge стандартной логики (таблица 4). Такую операцию \wedge_ω будем называть слабой конъюнкцией Клини [1].

Следовательно, речь идет о расширении стандартной конъюнкции, сохраняющем третье логическое значение. Операции конъюнкции и дизъюнкции алгебры сильной логики Клини, в отличие от операции отрицания этой же алгебры, третье логическое значение ω не сохраняют (см. таблицы 1, 2; например,

$T \vee \omega = T$, $F \wedge \omega = F$, но $\neg \omega = \omega$). Так определенная операция ассоциативна, коммутативна и идемпотентна (что проверяется непосредственно); то есть $\langle \{T, F, \omega\}; \wedge_\omega \rangle$ – коммутативная идемпотентная полугруппа и можно применить общую процедуру построения по ней полуструктуры (верхней или нижней).

Определим два бинарных отношения $x \leq^{(\wedge_\omega)} y \stackrel{def}{\Leftrightarrow} x = x \wedge_\omega y$ и $x \preceq^{(\wedge_\omega)} y \stackrel{def}{\Leftrightarrow} y = x \wedge_\omega y$. Будем использовать обозначение вида $\leq^{(\wedge_\omega)}$, желая подчеркнуть, что отношение \leq индуцируется операцией \wedge_ω , аналогично, для инверсного отношения. Иногда в таких обозначениях операцию явно указывать не будем. Тогда каждое из этих отношений является порядком, и множество $\{T, F, \omega\}$ с

порядком $\leq^{(\wedge_\omega)}$ (с порядком $\preceq^{(\wedge_\omega)}$) является нижней (верхней) полуструктурой, причем $\mathbf{inf}_{\leq} \{x, y\} = x \wedge_\omega y$ (соответственно $\mathbf{sup}_{\preceq} \{x, y\} = x \wedge_\omega y$) [10, с. 152, теорема 1].

Очевидно, порядки $\leq^{(\wedge_\omega)}$ и $\preceq^{(\wedge_\omega)}$ взаимноинверсны, то есть $x \leq y \Leftrightarrow y \preceq x$.

Следовательно, согласно принципа двойственности, не суть важно, какой именно порядок из этих двух рассматривать [12, с. 10]).

Порядки $\leq^{(\wedge_\omega)}$ и $\preceq^{(\wedge_\omega)}$ проиллюстрированы в таблице 5 и на рис. 2.

Таблица 6. Операция \vee_ω на $\{T, F, \omega\}$, сохраняющая ω

\vee_ω	T	F	ω
T	T	T	ω
F	T	F	ω
ω	ω	ω	ω

Таблица 5. Порядки $\leq^{(\wedge_\omega)}$ и $\preceq^{(\wedge_\omega)}$ на $\{T, F, \omega\}$

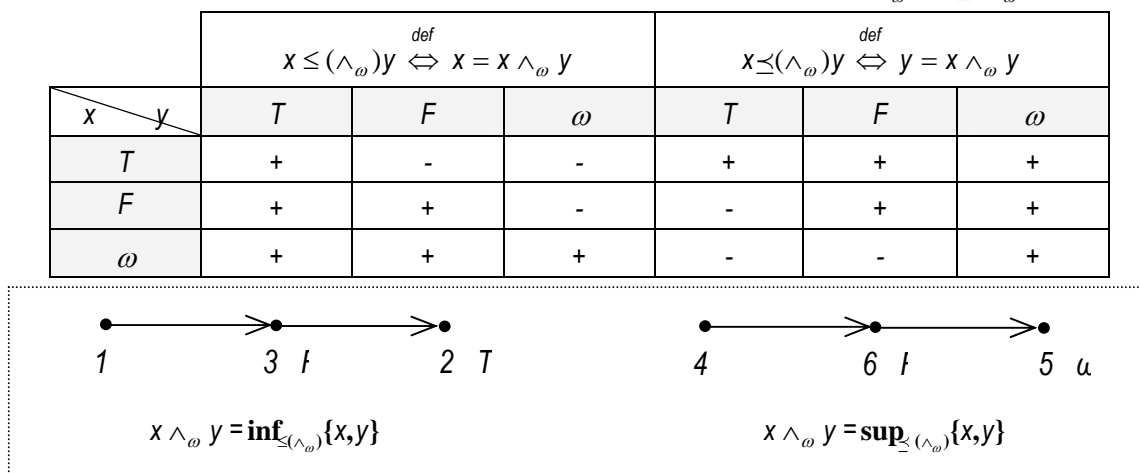


Рис. 2. Порядки $\leq^{(\wedge_\omega)}$ (слева) и $\preceq^{(\wedge_\omega)}$ (справа) на $\{T, F, \omega\}$

Аналогично, группоид $\langle \{T, F, \omega\}; \vee_\omega \rangle$, операция которого есть расширением стандартной операции дизъюнкции и сохраняет третье логическое значение ω (таблица 6), является коммутативной идемпотентной полугруппой. Снова можно применить общую процедуру построения полуструктуры.

Определим два отношения $x \leq^{(\vee_\omega)} y \stackrel{def}{\Leftrightarrow} x = x \vee_\omega y$ и $x \preceq^{(\vee_\omega)} y \stackrel{def}{\Leftrightarrow} y = x \vee_\omega y$ (как и для случая конъюнкции эти два отношения взаимноинверсны). Тогда каждое из этих отношений есть порядком, и множество $\{T, F, \omega\}$ с порядком $\leq^{(\vee_\omega)}$ ($\preceq^{(\vee_\omega)}$) является нижней (верхней) полуструктурой, причем

$\inf_{\leq} \{x, y\} = x \vee_{\omega} y$ (соответственно $\sup_{\leq} \{x, y\} = x \vee_{\omega} y$) [10, с. 151, теорема 1]. Порядки проиллюстрированы в таблице 7 та на рис. 3.

Таблица 7. Порядки $\leq(\vee_{\omega})$ и $\preceq(\vee_{\omega})$ на $\{T, F, \omega\}$

		$x \leq(\vee_{\omega})y \Leftrightarrow x = x \vee_{\omega} y$			$x \preceq(\vee_{\omega})y \Leftrightarrow y = x \vee_{\omega} y$		
		T	F	ω	T	F	ω
$x \backslash y$	T	+	+	-	+	-	+
	F	-	+	-	+	+	+
	ω	+	+	+	-	-	+

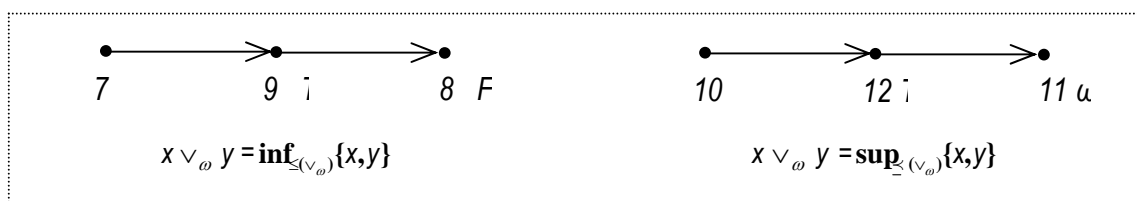


Рис. 3. Порядки $\leq(\vee_{\omega})$ (слева) и $\preceq(\vee_{\omega})$ (справа) на $\{T, F, \omega\}$

Анализ процедуры построения полуструктур (напомним, что, например, $x \leq(\wedge_{\omega})y \Leftrightarrow x = x \wedge_{\omega} y$), показывает, что линейность, в общем случае, частичного порядка обеспечивается таким свойством слабой конъюнкции и слабой дизъюнкции – $x \wedge_{\omega} y, x \vee_{\omega} y \in \{x, y\}$ для всех $x, y \in \{T, F, \omega\}$. Следовательно, ситуация с линейностью порядков аналогична сильной логике Клини и даже упрощается: принадлежности $x \wedge_{\omega} y, x \vee_{\omega} y \in \{x, y\}$ в случае, когда хотя бы один из аргументов x, y есть ω , автоматически следуют из сохранения значения ω операциями. Отличие заключается в том, что установить линейность порядка как следствие трехэлементности нельзя, поскольку работаем в полуструктурах (заметим, что существует простой пример трехэлементной полуструктуры, которая не является цепью; вместе с тем понятно, что двухэлементные полуструктуры являются цепями).

Подытожим информацию о полуструктурах (в действительности, структурах, поскольку порядок линейен), индуцированных двумя рассмотренными коммутативными идемпотентными полугруппами.

Предложение 4 (структуры, индуцируемые слабой конъюнкцией и слабой дизъюнкцией). Отношения $\leq(\wedge_{\omega})$ и $\preceq(\wedge_{\omega})$ превращают множество $\{T, F, \omega\}$ в цепь (а, значит, и в структуру), причем $x \wedge_{\omega} y$ является наименьшим (наибольшим) из элементов x, y согласно порядка $\leq(\wedge_{\omega})$ (соответственно $\preceq(\wedge_{\omega})$) для всех $x, y \in \{T, F, \omega\}$. Отношения $\leq(\vee_{\omega})$ и $\preceq(\vee_{\omega})$ также превращают множество $\{T, F, \omega\}$ в цепь (а, значит, и в структуру), причем $x \vee_{\omega} y$ является наименьшим (наибольшим) из элементов x, y согласно порядка $\leq(\vee_{\omega})$ (соответственно $\preceq(\vee_{\omega})$) для всех $x, y \in \{T, F, \omega\}$. □

Доказательство следует из указанных результатов теории полуструктур (взгляда на полуструктуру как на коммутативную идемпотентную полугруппу) и линейности соответствующих порядков (см. рис. 2-3). □

Очевидно, что в последнем предложении два (взаимоинверсные) порядка для слабой конъюнкции отличаются от двух (взаимоинверсных) порядков для слабой дизъюнкции. Следовательно, среди указанных четырех порядков нет порядка, отвечающего одновременно слабой конъюнкции и слабой дизъюнкции (в отличие от сильной логики Клини, где такой “общий порядок” существует, см. рис. 1). Для алгебры $\langle \{T, F, \omega\}; \wedge_{\omega}, \vee_{\omega} \rangle$ сформулируем общий вопрос: существует ли на множестве $\{T, F, \omega\}$ порядок (обозначим его \triangleleft), превращающий его в структуру, причем для произвольных x, y выполняются

равенства $x \wedge_{\omega} y = \inf_{\omega} \{x, y\}$, $x \vee_{\omega} y = \sup_{\omega} \{x, y\}$ (либо, согласно принципа двойственности, в эквивалентной форме $x \wedge_{\omega} y = \sup_{\omega} \{x, y\}$, $x \vee_{\omega} y = \inf_{\omega} \{x, y\}$)? Допустим, что такой порядок существует, тогда должны выполняться законы поглощения для операций слабой конъюнкции и слабой дизъюнкции [10, с. 152-153, теорема 2]. Но результаты непосредственной проверки этих законов, приведенные в таблице 8, показывают, что в случаях, когда только y совпадает с ω , оба закона поглощения не выполняются. Следовательно, такого порядка не существует.

Таблица 8. Выполнимость законов поглощения для операций $\vee_{\omega}, \wedge_{\omega}$

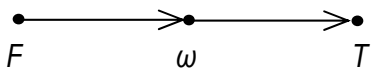
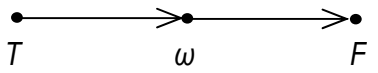
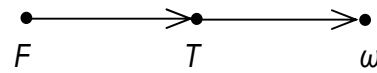
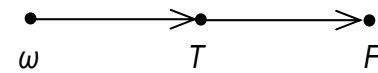
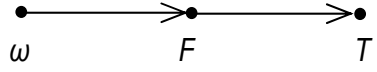
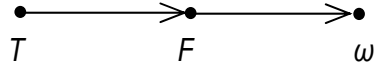
$x \backslash y$		$(x \vee_{\omega} y) \wedge_{\omega} x = x$			$(x \wedge_{\omega} y) \vee_{\omega} x = x$		
		T	F	ω	T	F	ω
T		+	+	-	+	+	-
F		+	+	-	+	+	-
ω		+	+	+	+	+	+

Невыполнение законов поглощения вполне естественно. Ведь суть этих законов заключается в том, что значения выражений, $(x \vee_{\omega} y) \wedge_{\omega} x$, $(x \wedge_{\omega} y) \vee_{\omega} x$ не зависят от значения y , а определяются только значением x . Понятно, что это требование не выполняется, если операции сохраняют значение ω , y совпадает с ним, а x , наоборот, отличный от ω .

Заключение

На множестве $\{T, F, \omega\}$ существует $6=3!$ возможных линейных порядков, связь которых с операциями дизъюнкции и конъюнкции двух рассмотренных логик Клини приведена в таблице 9.

Таблица 9. Всевозможные цепи на $\{T, F, \omega\}$ и их связь с логиками Клини

<p>1.</p>  <p>$x \wedge_k y = \min(x, y)$ $x \vee_k y = \max(x, y)$</p>	<p>2.</p>  <p>$x \wedge_k y = \max(x, y)$ $x \vee_k y = \min(x, y)$</p>
<p>3.</p>  <p>$x \vee_{\omega} y = \max(x, y)$</p>	<p>4.</p>  <p>$x \vee_{\omega} y = \min(x, y)$</p>
<p>5.</p>  <p>$x \wedge_{\omega} y = \min(x, y)$</p>	<p>6.</p>  <p>$x \wedge_{\omega} y = \max(x, y)$</p>

Порядок 1 (инверсный ему порядок 2) отвечает одновременно дизъюнкции и конъюнкции сильной логики Клини. Это порядки структуры, ассоциируемой с алгеброй сильной логики Клини. Порядок 3 (инверсный ему порядок 4) отвечает дизъюнкции, но не конъюнкции слабой логики Клини. Дуально, порядок 5 (инверсный ему порядок 6) – отвечает конъюнкции, но не дизъюнкции слабой логики Клини. Это порядки полуструктур, ассоциируемых с двумя полугруппами слабой логики Клини (сигнатура одной полугруппы состоит из слабой дизъюнкции, сигнатура другой – из слабой конъюнкции).

Литература

- [1] Клини С.К. Введение в метаматематику. – Москва: ИЛ, 1957. – 526 с.
- [2] Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра. Языки. Программирование. – К.: Наукова думка, 1978. – 318 с.
- [3] Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б., Поляков С.А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – К.: Видавничий дім “Академперіодика”, 2001. – 198 с.
- [4] Cook S., Kleppe A., Mitchell R., Rumpe B., Warmer J., Wills A. The Amsterdam Manifesto on OCL. – UML 2.0 Request for information response: OMG Analysis & Design PTF, 1999 / http://www.trireme.com/whitepapers/design/components/OCL_manifesto.PDF.
- [5] www.omg.org // 05-06-06.pdf.
- [6] Манна З. Теория неподвижной точки программ // Кибернетический сборник. Вып. 15. – М.: Мир, 1978. – С. 38-100.
- [7] The Object Data Standard: ODMG 3.0/ Edited by R.G.G. Cattel, Douglas K.Barry. – Morgan Kauffmann Publishers, 2000.
- [8] <http://www.omg.org/docs/omg/04-07-02.pdf>.
- [9] Буй Д.Б., Кахута Н.Д. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232-240.
- [10] Скорняков Л.А. Элементы алгебры. – Москва: Наука, 1986. – 240с.
- [11] <http://www.sql-ex.ru/help/select2.php>.
- [12] Скорняков Л.А. Элементы теории структур. – Москва: Наука, 1982. – 160 с.

Информация об авторах

Буй Дмитрий Борисович – заведующий лабораторией проблем программирования, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, Киев, 03680, пр. Глушкова 2, корп.6; e-mail: buy@unicyb.kiev.ua

Шишацкая Елена Владимировна – инженер-программист лаборатории проблем программирования, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, Киев, 03680, пр. Глушкова 2, корп.6; e-mail: shyshatskaja@unicyb.kiev.ua