**Serdica**
Mathematical Journal
**Сердика**
Математическо списание

Serdica Math. J. **22** (1996), 293-306

**Serdica**
Mathematical Journal

Institute of Mathematics
and Informatics, Bulgarian
Academy of Sciences

# EPICONVERGENCE D'UNE SUITE DE SOMMES EN NIVEAUX DE FONCTIONS CONVEXES

S. Traore, M. Volle

*Communicated by R. Lucchetti*

Abstract. We consider the problem of minimizing the max of two convex functions from both approximation and sensitivity point of view.This lead up to study the epiconvergence of a sequence of level sums of convex functions and the related dual problems.

**1. Introduction.** Etant données deux fonctions convexes, propres, semicontinues inferieurement (s.c.i.) $f$ et $h$ sur l'espace $X = \mathbb{R}^p$ (ce que l'on note $f, h \in \Gamma_\circ(\mathbb{R}^p)$) on s'intéresse au problème d'optimisation,

$$(\mathcal{P}) : \text{ minimiser } (f(x) \vee h(x)) \text{ pour } x \in X$$

où $f(x) \vee h(x) = \max(f(x), h(x))$.

Nous supposons l'existence d'une suite de problèmes "approximant" le problème initial $(\mathcal{P})$ :

$$(\mathcal{P}_n) : \text{minimiser } f_n(x) \vee h_n(x) \;\text{ pour } x \in X.$$

1991 *Mathematics Subject Classification:* 52A41, 90C25, 90C31
*Key words:* variational convergence, convex duality, sensitivity analysis

Il s'agit alors d'étudier les relations entre la valeur des $(\mathcal{P}_n)$ et celle de $(\mathcal{P})$, ainsi que les relations entre les solutions optimales des $(\mathcal{P}_n)$ :

$$\operatorname{argmin}(f_n \vee h_n) = \{x \in X : f_n(x) \vee h_n(x) = \inf_X (f_n \vee h_n)\},$$

et les solutions optimales de $(\mathcal{P})$ :

$$\operatorname{argmin}(f \vee h) = \{x \in X : f(x) \vee h(x) = \inf_X (f \vee h)\}.$$

Pour cela il convient de faire appel à la notion d'épiconvergence dont nous rappelons ci-après la définition.

Etant donnée une suite $(C_n)$ de parties de $X = \mathbb{R}^p$, les notions de limite inférieure et de limite supérieure au sens de Kuratowski-Painlevé de la suite $(C_n)$ sont classiquement définies par

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to+\infty} C_n &= \{\lim_{n\to+\infty} x_n : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in C_n\} \\ \limsup_{n\to+\infty} C_n &= \{\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} : \forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \in C_{n_k}\}. \end{aligned}$$

On dit alors que $(C_n)$ converge vers $C$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = C$, si

$$\liminf_{n\to+\infty} C_n = \limsup_{n\to+\infty} = C_n = C\,.$$

Etant données des fonctions $\ell, \ell_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $(n \in \mathbb{N})$, on dit que la suite $(\ell_n)$ épiconverge vers $\ell$ si, dans l'espace produit $X \times \mathbb{R}$, la suite des épigraphes $\operatorname{epi} \ell_n = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : \ell_n(x) \leq r\}$ converge vers l'épigraphe de $\ell$. Cela se traduit par les relations suivantes ([1], [4], [6], ...) :

$$\begin{aligned} \forall x \in X,\ \forall (x_n) \to x \quad &: \quad \liminf_{n\to+\infty} \ell_n(x_n) \geq \ell(x) \\ \forall x \in X,\ \exists (x_n) \to x \quad &: \quad \limsup_{n\to+\infty} \ell_n(x_n) \leq \ell(x). \end{aligned}$$

On note alors $\ell = e - \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$.

**2. Approximation.** Au regard des problèmes $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{P}_n)$, une situation intéressante est celle où $(f_n \vee h_n)$ épiconverge vers $(f \vee h)$, ce qui se traduit par la relation $\lim\limits_{n\to+\infty} (\operatorname{epi} f_n \cap \operatorname{epi} h_n) = \operatorname{epi} f \cap \operatorname{epi} h$. Les épigraphes ci-dessus étant convexes, on sait que cette relation est vérifiée lorsque $f = e - \lim_{n\to+\infty} f_n$, $h = e - \lim_{n\to+\infty} h_n$ et que $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{epi} f - \operatorname{epi} h)$ (voir par exemple [2], [3], [9], [12]).

En désignant par $\operatorname{dom} \ell = \{x \in X : \ \ell(x) < +\infty\}$ le domaine d'une fonction $\ell : X \to \overline{\mathbb{R}}$, la condition $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{epi} f - \operatorname{epi} h)$ équivaut à $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} h)$. En appliquant les propriétés variationnelles usuelles de l'épiconvergence (cf. [1], [6], [7], ...) on obtient alors :

**Théorème 2.1** *Soient $f$, $f_n$, $h$, $h_n$, $(n \in \mathbb{N})$, des fonctions dans $\Gamma_\circ(X)$ telles que $f = e - \lim_{n\to+\infty} f_n$ et $h = e - \lim_{n\to+\infty} h_n$. On suppose en outre que*

$$0 \in \operatorname{int}\,(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} h). \tag{0}$$

*Alors $(f_n \vee h_n)$ épiconverge vers $f \vee h$ et on a donc :*

$$\limsup_{n\to+\infty} \inf_X (f_n \vee h_n) \leq \inf_X (f \vee h)$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \operatorname{argmin}(f_n \vee h_n) \subset \operatorname{argmin}(f \vee h).$$

**Remarque 1 :** Comme le montre l'exemple suivant, la condition (0) n'entraîne pas la convergence de $(\inf_X (f_n \vee h_n))$ vers $\inf_X (f \vee h)$. Prenons $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x+n)/n$, $h_n(x) = -(x+n)/n$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On voit que $e - \lim_{n\to+\infty} f_n = 1$, $e - \lim_{n\to+\infty} h_n = -1$, $e - \lim_{n\to+\infty} (f_n \vee h_n) = f \vee h = 1$; cependant, $\lim_{n\to+\infty} \inf_X (f_n \vee h_n) = 0 < 1 = \inf_X (f \vee h)$.

Pour avoir la convergence des valeurs des $(\mathcal{P}_n)$ vers la valeur de $(\mathcal{P})$ à partir de l'épiconvergence de $(f_n \vee h_n)$ vers $f \vee h$, une condition suffisante est que la suite $(f_n \vee h_n)$ soit équicoercive. Rappelons qu'une suite $(\ell_n)$ de fonctions numériques définies sur $X$ est équicoercive s'il existe une fonction coercive $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{\|x\|\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$) telle qu'on ait $\ell_n \geq \varphi$ pour $n$ assez grand. On sait que la coercivité d'une fonction appartenant à $\Gamma_\circ(X)$ se traduit à l'aide de la fonction conjuguée. A ce propos, rappelons que la conjuguée de Legendre-Fenchel d'une fonction $\ell : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est la fonction $\ell^*$ définie sur $X$ par $\ell^*(y) = \sup_{x\in X}(\langle x, y\rangle - \ell(x))$, pour tout $y \in X$. On sait que cette conjugaison est une involution sur $\Gamma_\circ(X)$. Un résultat fondamental que nous utiliserons est la continuité de cette involution relativement à l'épiconvergence ([11]).

La coercivité d'une fonction $\ell \in \Gamma_\circ(X)$ se traduit par le fait que $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} \ell^*)$ ([13, Cor. 14.2.2]). Nous allons voir qu'une telle caractérisation subsiste pour une suite de fonctions convexes épiconvergente et équicoercive. Nous aurons pour cela besoin du résultat suivant :

**Lemme 2.2** ([14, Cor 3 B], [13, Th 10.8]). *Soient $\ell$, $\ell_n$, $(n \in \mathbb{N})$, dans $\Gamma_\circ(X)$ telles que $\ell = e - \lim_{n\to+\infty} \ell_n$. Dès lors, $(\ell_n)$ converge uniformément vers $\ell$ sur tout compact inclus dans* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} \ell)$.

Voici maintenant le critère d'équicoercivité faisant intervenir la conjuguée de l'épi-limite.

**Proposition 2.3.** *Soient $\ell$, $\ell_n$, $(n \in \mathbb{N})$, dans $\Gamma_\circ(X)$ telles que $\ell = e - \lim_{n\to+\infty} \ell_n$. La suite $(\ell_n)$ est équicoercive si et seulement si*

$$0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} \ell^*). \tag{1}$$

Preuve. La condition est nécessaire car si $\varphi$ est une fonction coercive telle que $\ell_n \geq \varphi$ pour $n$ assez grand, alors $\ell \geq \varphi$ et de ce fait $\ell$ est aussi coercive, d'où $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} \ell^*)$. Montrons que la condition est suffisante. On a aussi $\ell^* = e - \lim_{n\to+\infty} \ell_n^*$, d'où il résulte que $\operatorname{dom} \ell^* \subset \liminf_{n\to+\infty} \operatorname{dom} \ell_n^*$. Puisque 0 est dans l'intérieur de $\operatorname{dom} \ell^*$ et que les ensembles $\operatorname{dom} \ell_n^*$, $\operatorname{dom} \ell^*$ sont convexes, on sait que l'inclusion ci-dessus implique l'existence de $\epsilon > 0$ tel que, pour $n$ assez grand, on ait $\{y \in X : \|y\| < 2\epsilon\} \subset \operatorname{dom} \ell_n^* \cap \operatorname{dom} \ell^*$. D'après le Lemme 2.2, $(\ell_n^*)$ converge uniformément vers $\ell^*$ sur $\varepsilon B = \{y \in X : \|y\| \leq \varepsilon\}$. Ainsi, $c_n = \sup_{\varepsilon B} \ell_n^*$ tend vers $c = \sup_{\varepsilon B} \ell^*$, de sorte que, pour $n$ assez grand et pour tout $y \in \varepsilon B$, $\ell_n^*(y) \leq c + 1$ ; il en résulte que, pour tout $x \in X$,

$$\ell_n(x) \geq \sup_{y\in\varepsilon B} \langle x, y\rangle - c - 1 = \varepsilon\|x\| - c - 1,$$

ce qui montre que $(\ell_n)$ est équicoercive. $\square$

La coercivité d'une fonction $\ell \in \Gamma_\circ(X)$ se traduit aussi à l'aide de sa fonctionnelle asymptote. Rappelons que celle ci est la fonction $\ell 0^+$ définie sur $X$ par $(\ell 0^+)(x) = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{\ell(a + tx)}{t}$ pour tout $x$ dans $X$, où $a$ peut être choisi arbitrairement dans $\operatorname{dom} \ell$.
Dès lors le cône convexe

$$\{\ell 0^+ \leq 0\} := \{x \in X : (\ell 0^+)(x) \leq 0\}$$

coïncide avec le cône polaire négatif du cône engendré par dom $f^*$([13, Th 14.2]). Vu que $X$ est de dimension finie, il en résulte que la condition (1) équivaut à $\{\ell 0^+ \leq 0\} = \{0\}$. Ceci étant on peut énoncer le résultat suivant :

**Théorème 2.4.** *Soient $f$, $f_n$, $h$, $h_n$, $(n \in \mathbb{N})$, des fonctions dans $\Gamma_\circ(X)$ telles que $f = e-\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ et $h = e-\lim\limits_{n\to+\infty} h_n$. On suppose en outre que les conditions ci-dessous sont satisfaites :*

$$0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f - \mathrm{dom}\, h) \tag{2}$$

$$\{f0^+ \leq 0\} \cap \{h0^+ \leq 0\} = \{0\}. \tag{3}$$

*On a alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_X (f_n \vee h_n) = \inf_X (f \vee h).$$

*De plus, pour $n$ assez grand, les ensembles* $\mathrm{argmin}(f_n \vee h_n)$ *et* $\mathrm{argmin}(f \vee h)$ *sont convexes non vides et compacts. Enfin, pour tout ouvert $\Omega$ contenant* $\mathrm{argmin}(f \vee h)$ *on a, pour $n$ assez grand,* $\mathrm{argmin}(f_n \vee h_n) \subset \Omega$.

P r e u v e. D'après le Théorème 2.1, $(f_n \vee h_n)$ épiconverge vers $f \vee h$. Il reste à prouver que la suite $(f_n \vee h_n)$ est équicoercive, c'est-à-dire, d'après le Lemme 2.3, que $0 \in \mathrm{int\,dom}\, (f \vee h)^*$, ou encore que $\{(f \vee h)0^+ \leq 0\} = \{0\}$. Or, d'après (2), il existe $a \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h$. Dès lors, pour tout $x =\in X$, $[(f \vee h)0^+](x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{(f \vee h)(a+tx)}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(a+tx) \vee h(a+tx)}{t} = (f0^+)(x) \vee (h0^+)(x)$. Ainsi, $\{(f \vee h)0^+ \leq 0\} = \{f0^+ \leq 0\} \cap \{h0^+ \leq 0\} = \{0\}$, et $(f_n \vee h_n)$ est bien équicoercive. Les résultats annoncés découlent alors des proprietés variationnelles classiques de l'épiconvergence ([6, Th. 7.8, Th. 7.23]). $\square$

**3. Sensibilité.** Un schéma de perturbation classique du problème $(\mathcal{P})$ nous conduit à considérer, pour tout $z$ dans $X$, le problème

$$(\mathcal{P}_z)\ :\ \text{minimiser} f(x) \vee h(x-z) \quad \text{pour} \quad x \in X,$$

et la fonction valeur $v$ correspondante,

$$z \in X \mapsto v(z) = \inf_{x\in X} (f(x) \vee h(x-z)) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

En introduisant la fonction $g$ définie par

$$g(x) = h(-x) \quad \text{pour tout} \quad x \in X,$$

la fonction valeur $v$ n'est autre que la somme en niveaux de $f$ et de $g$, à savoir,

$$v(z) = (f \triangle g)(z) := \inf_{x \in X} (f(x) \vee g(z - x)) \tag{4}$$

pour tout $z \in X$. Pour justifier l'appelation de somme en niveaux introduisons les notations suivantes : étant donnés une fonction $\ell := X \to \overline{\mathbb{R}}$ et un nombre réel $t$ posons $\{\ell < t\} = \{x \in X : \ell(x) < t\}$, $\{\ell \leq t\} = \{x \in X : \ell(x) \leq t\}$. On a alors ([13, p. 40])

$$\{f \triangle g < t\} = \{f < t\} + \{g < t\} := \{u + v : f(u) < t, \quad g(v) < t\}$$

pour tout réel $t$, ainsi que

$$\operatorname{dom}(f \triangle g) = \operatorname{dom} f + \operatorname{dom} g. \tag{5}$$

Lorsque $f \triangle g$ est exacte, c'est à dire lorsque dans (4) la borne inférieure est atteinte pour chaque $z \in X$, on a de plus ([16, Prop. 2.2])

$$\{f \triangle g \leq t\} = \{f \leq t\} + \{g \leq t\}$$

pour tout réel $t$.

Les fonctions $f$ et $g$ étant convexes, on sait aussi que $f \triangle g$ est convexe. Pour d'autres propriétés de la somme en niveaux on pourra consulter [15].

L'étude de la sensibilité du problème $(\mathcal{P})$ nous conduit à nous demander quand est-ce-qu'une somme en niveaux est s.c.i. et exacte. La réponse est fournie par le résultat suivant ([17, Cor. V-1]) :

**Théorème 3.1.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions dans $\Gamma_\circ(X)$. On suppose que*

$$\{f0^+ \leq 0\} \cap (-\{g0^+ \leq 0\}) \quad \text{est un sous} - \text{espace vectoriel.} \tag{6}$$

*Alors $f \triangle g$ est convexe, s.c.i., propre et exacte.*

Pour étudier l'épiconvergence d'une suite de sommes en niveaux nous ferons appel au résultat ci-après, qui découle immédiatement de [10, Th. 7] (voir aussi [5, Th. 4.1.1.]).

**Théorème 3.2.** *Soient $F$, $F_n$, $(n \in \mathbb{N})$, dans $\Gamma_\circ(X \times X)$ telles que $F = e - \lim\limits_{n\to+\infty} F_n$. On suppose que $\{x \in X : (F0^+)(x,0) \leq 0\} = \{0\}$. Dans ces conditions, les fonctions marginales $z \in X \mapsto \mu(z) := \inf\limits_{x\in X} F(x,z)$ et, pour $n$ assez grand, $z \in X \mapsto \mu_n(z) := \inf\limits_{x\in X} F_n(x,z)$ sont convexes, s.c.i., propres et exactes ; de plus la suite $(\mu_n)$ épiconverge vers $\mu$.*

Nous allons ici considérer le cas où les fonctions $F$, $F_n$ sont données par

$$F(x,z) = f(x) \vee g(z-x) \tag{7}$$

$$F_n(x,z) = f_n(x) \vee g_n(z-x). \tag{8}$$

Le lemme suivant fournit l'expression de la fonctionnelle asymptote de $F$.

**Lemme 3.3.** *Soient $f$, $g$ dans $\Gamma_\circ(X)$ et $F$ la fonction définie en* (7). *On a alors*

$$(F0^+)(u,v) = (f0^+)(u) \vee (g0^+)(v-u)$$

*pour tout $(u,v) \in X \times X$.*

P r e u v e. Choisissons $x \in \operatorname{dom} f$ et $z \in x + \operatorname{dom} g$. On a alors

$$\begin{aligned}(F0^+)(u,v) &= \lim_{t\to+\infty} \frac{f(x+tu) \vee g(z-x+t(v-u))}{t} = \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{f(x+tu)}{t} \vee \lim_{t\to+\infty} \frac{g(z-x+t(v-u))}{t} = \\ &= (f0^+)(u) \vee (g0^+)(v-u). \qquad \square\end{aligned}$$

On doit maintenant étudier l'épiconvergence des fonctions de perturbation. Cela fait l'objet de la proposition suivante où, d'une manière assez inattendue, la convexité des fonctions n'intervient pas.

**Proposition 3.4.** *Soient $f$, $g$, $f_n$, $g_n$, $(n \in \mathbb{N})$, des fonctions de $X$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ telles que $f = e - \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ et $g = e - \lim\limits_{n\to+\infty} g_n$. Dans ces conditions, la suite $(F_n)$ définie en* (8) *épiconverge vers la fonctions $F$ définie en* (7).

P r e u v e. Pour toute suite $(x_n, z_n)$ dans $X \times X$ on a :

$$\liminf_{n\to+\infty} F_n(x_n, z_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} f_n(x_n) \vee \liminf_{n\to+\infty} g_n(z_n - x_n).$$

Supposons maintenant que $\lim_{n\to+\infty}(x_n, z_n) = (x, z)$. On obtient alors :

$$\liminf_{n\to+\infty} F_n(x_n, z_n) \geq f(x) \vee g(z - x) = F(x, z).$$

Soit maintenant $(x, z)$ dans $X \times X$. Par hypothèse il existe $(x_n) \to x$ et $(u_n) \to (z - x)$ telles que

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n(x_n) \leq f(x) \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} g_n(u_n) \leq g(z - x).$$

Dès lors,

$$\limsup_{n\to+\infty} F_n(x_n, x_n + u_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} f_n(x_n) \vee \limsup_{n\to+\infty} g_n(u_n) \leq f(x) \vee g(z - x) = F(x, z). \quad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

**Théorème 3.5.** *Soient $f$, $g$, $f_n$, $g_n$, $(n \in \mathbb{N})$, dans $\Gamma_\circ(X)$ telles que $f = e-\lim_{n\to+\infty} f_n$ et $g = e-\lim_{n\to+\infty} g_n$. Supposons que*

$$\{f0^+ \leq 0\} \cap -\{g0^+ \leq 0\} = \{0\}. \tag{9}$$

*Dans ces conditions, $(f_n \triangle g_n)$ épiconverge vers $f \triangle g$, et, pour $n$ assez grand, $f_n \triangle g_n$ est convexe, s.c.i., propre et exacte.*

P r e u v e. Résulte sans difficulté du Théorème 3.2, du Lemme 3.3, et de la proposition 3.4. $\square$

**Remarque 2 :** Si, dans le Théorème 3.5, on remplace l'hypothèse (9) par (6), le résultat n'est plus vrai. Pour le voir, reprenons l'exemple de la Remarque 1, ce qui donne $g_n(x) = h_n(-x) = (x - n)/n$, et $e-\lim_{n\to+\infty} g_n = -1$, d'où $g0^+ = f0^+ = 0$, de sorte que $\{f0^+ \leq 0\} \cap -\{g0^+ \leq 0\} = \mathbb{R}$. Par ailleurs, $(f_n \triangle g_n)(z) = z/2n$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. Dès lors, la suite $(f_n \triangle g_n)$ épiconverge vers 0, alors que $f \triangle g = 1$.

**Corollaire 3.6.** *Soient $f$, $g$, $f_n$, $g_n$, $(n \in \mathbb{N})$, comme dans le Théorème* 3.5. *Alors, pour tout $z \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f + \operatorname{dom} g)$, on a $\lim_{n\to+\infty}(f_n \triangle g_n)(z) = (f \triangle g)(z)$.*

P r e u v e. Cela résulte de (5) et du fait qu'en tout point intérieur au domaine de l'épilimite d'une suite de fonctions convexes, on a la convergence simple (cf. Lemme 2.2). $\square$

**Remarque 3 :** Dans le cas où $z = 0$, le Corollaire 3.6 permet de retrouver une des conclusions du Théorème 2.4, à savoir que $\lim_{n\to+\infty} \inf_X (f_n \vee h_n) = \inf_X (f \vee h)$ (rappelons que $h_n(x) = g_n(-x), h(x) = g(-x)$).

**4. Approche duale.** Soient $f$, $f_n$, $h$, $h_n$, $(n \in \mathbb{N})$, dans $\Gamma_\circ(X)$. A l'aide de la fonction de perturbation $\Phi$ (resp. $\Phi_n$)

$$(x, z) \in X \times X \mapsto \Phi(x, z) := f(x) \vee h(x - z) \tag{10}$$

$$(\text{resp. } \Phi_n(x, z) = f_n(x) \vee h_n(x - z)) \tag{11}$$

la théorie de la dualité permet d'associer au problème

$$(\mathcal{P}) \quad : \quad \text{minimiser } f(x) \vee h(x) \text{ pour } x \in X$$

$$(\text{resp.}(\mathcal{P}_n) \quad : \quad \text{minimiser } f_n(x) \vee h_n(x) \text{ pour } x \in X)$$

le problème dual

$$(\mathcal{Q}) \quad : \quad \text{maximiser } -\Phi^*(0, y) \text{ pour } y \in X$$

$$(\text{resp.}(\mathcal{Q}_n) \quad : \quad \text{maximiser } -\Phi_n^*(0, y) \text{ pour } y \in X).$$

La fonction marginale primale $\mu$ (resp. $\mu_n$) est donnée par $\mu(z) = \inf_{x\in X} \Phi(x, z)$ (resp. $\mu_n(z) = \inf_{x\in X} \Phi_n(x, z)$) pour tout $z \in X$. On a donc, avec $g(x) = h(-x)$ (resp. $g_n(x) = h_n(-x)$),

$$\mu = f \triangle g \ \ (\text{resp. } \mu_n = f_n \triangle g_n).$$

Pour expliciter les problèmes duaux il nous faut calculer les fonctions conjuguées $\Phi^*$, $\Phi_n^*$. Dans ce but nous introduisons les notations suivantes. Etant donnée une fonction $\ell \in \Gamma_\circ(X)$ et un réel $a \geq 0$ on pose, pour tout $x \in X$,

$$(\ell a)(x) = a\ell\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{si } a > 0$$

$$\ell 0 = \ell 0^+ \quad \text{si } a = 0.$$

Moyennant un théorème de minimax on obtient alors, en notant $S = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1\}$ :

**Lemme 4.1** ([16, Lemme 3.2]). *Soient $f$ et $h$ dans $\Gamma_\circ(X)$. La conjuguée de la fonction $\Phi$ définie en* (10) *est donnée par*

$$\Phi^*(w, y) = \min_{(\alpha,\beta)\in S}((f^*\alpha)(w + y) + (h^*\beta)(-y))$$

*pour tout $(w, y) \in X \times X$.*

Ainsi le problème dual de $(\mathcal{P})$ (resp. $(\mathcal{P}_n)$) s'écrit

$$(\mathcal{Q}) \quad : \quad \text{maximiser } - \min_{(\alpha,\beta)\in S}(f^*\alpha)(y) + (h^*\beta)(-y) \text{ pour } y \in X$$

$$(\text{resp.}(\mathcal{Q}_n) \quad : \quad \text{maximiser } - \min_{(\alpha,\beta)\in S}(f_n^*\alpha)(y) + (h_n^*\beta)(-y) \text{ pour } y \in X).$$

Les fonctions marginales duales sont respectivement définies pour tout $w \in X$ par

$$\nu(w) = \inf_{y\in X}\min_{(\alpha,\beta)\in S}((f^*\alpha)(w + y) + (h^*\beta)(-y)) \tag{12}$$

$$\nu_n(w) = \inf_{y\in X}\min_{(\alpha,\beta)\in S}((f_n^*\alpha)(w + y) + (h_n^*\beta)(-y)). \tag{13}$$

Voici un premier résultat de stabilité primale-duale.

**Proposition 4.2.** *Soient $f,\ h,\ f_n,\ h_n,\ (n \in \mathbb{N})$ dans $\Gamma_\circ(X)$ telles que $f = e\!-\lim_{n\to+\infty} f_n$ et $h = e\!-\lim_{n\to+\infty} h_n$. On suppose que*

$$\{f0^+ \leq 0\} \cap \{h0^+ \leq 0\} = \{0\}.$$

*Dans ces conditions, les problèmes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ ( resp. $(\mathcal{P}_n)$ et $(\mathcal{Q}_n)$ pour $n$ assez grand) ont des valeurs égales, et les problèmes $(\mathcal{P})$ (resp. $(\mathcal{P}_n)$ pour $n$ assez grand) ont des solutions optimales :*

$$-\infty < \min(\mathcal{P}) = \sup(\mathcal{Q}) \leq +\infty$$

$$(\text{resp. } -\infty < \min(\mathcal{P}_n) = \sup(\mathcal{Q}_n) \leq +\infty).$$

P r e u v e. D'après le Théorème 3.1 (resp. Théorème 3.5), la fonction marginale $\mu$ (resp. $\mu_n$ pour $n$ assez grand) est exacte et appartient à $\Gamma_\circ(X)$. Le résultat découle alors de la relation classique $\sup(\mathcal{Q}) = \mu^{**}(0)$ (resp. $\sup(\mathcal{Q}_n) = \mu_n^{**}(0)$). $\square$

En complément du Théorème 2.4 nous avons le résultat suivant.

**Théorème 4.3.** *Soient $f$, $h$, $f_n$, $h_n$, $(n \in \mathbb{N})$, vérifiant les mêmes hypothèses que dans le Théorème 2.4. On a alors $\min(\mathcal{P}) = max(\mathcal{Q}) \in \mathbb{R}$ et, pour $n$ assez grand, $\min(\mathcal{P}_n) = max(\mathcal{Q}_n) \in \mathbb{R}$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} max(\mathcal{Q}_n) = max(\mathcal{Q})$. Enfin, tout ouvert contenant l'ensemble (convexe compact non vide) des solutions optimales de $(\mathcal{Q})$ contient, pour $n$ assez grand, l'ensemble (convexe compact non vide) des solutions optimales de $(\mathcal{Q}_n)$.*

P r e u v e. Considérons les fonctions $\Phi$ et $\Phi_n$ définies en (10), (11). En vertu du Théorème 2.4 et de la Proposition 4.2, il suffit de montrer que la suite $(\Phi_n^*(0,\cdot))$ est équicoercive et épiconverge vers $\Phi^*(0,\cdot)$. Or, $\Phi_n^*(0,\cdot) = \mu_n^*$ et $\Phi^*(0,\cdot) = \mu^*$. Du Théorème 3.5 résulte alors que $(\Phi_n^*(0,\cdot))$ épiconverge vers $\Phi^*(0,\cdot)$. Enfin, l'équicoercivité de la suite $(\mu_n^*)$ résulte de la Proposition 2.3 moyennant (2). $\square$

Nous terminons par l'étude de l'épiconvergence des fonctions marginales duales.

**Théorème 4.4.** *Soient $f$, $h$, $f_n$, $h_n$, $(n \in \mathbb{N})$, dans $\Gamma_\circ(X)$ telles que $f = e\!-\!\lim_{n\to+\infty} f_n$ et $h = e\!-\!\lim_{n\to+\infty} h_n$. On suppose que $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} h)$. Alors les fonctions marginales duales $\nu$ et, pour $n$ assez grand, $\nu_n$, sont convexes, s.c.i., propres, exactes, et on a $\nu = e\!-\!\lim_{n\to+\infty} \nu_n$.*

P r e u v e. D'après la Proposition 3.4, la suite de fonctions $(\Phi_n)$ définies en (10), (11) épiconverge vers $\Phi$ dans $\Gamma_\circ(X \times X)$. Il en résulte que $\Phi^* = e - \lim_{n\to+\infty} \Phi_n^*$. Appliquons maintenant la version duale du Théorème 3.2. Pour cela on doit vérifier que $\{y \in X : (\Phi^*0^+)(0,y) \le 0\} = \{0\}$. Mais $\Phi^*0^+$ n'est autre que la fonction d'appui ([13, Th. 3.3]) de $\operatorname{dom}\Phi = \{(x,z) \in X \times X : x \in \operatorname{dom} f \text{ et } x - z \in \operatorname{dom} h\}$ : $(\Phi^*0^+)(0,y) = \sup(\langle 0,x\rangle + \langle y,z\rangle : x \in \operatorname{dom} f, x - z \in \operatorname{dom} h) = \sup(\langle y,z\rangle : z \in \operatorname{dom} f - \operatorname{dom} h)$. Du fait que $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} h)$ résulte alors que, pour tout $y \neq 0$, $(\Phi^*0^+)(0,y) > 0$. $\square$

**5. Etude d'un exemple.** Considérons deux suites $(A_n)$ et $(B_n)$ d'opérateurs linéaires symétriques semi-définis positifs de l'espace euclidien $X$, ainsi que deux suites $(v_n)$ et $(w_n)$ d'éléments de $X$ convergeant respectivement vers $v$ et $w$, et enfin deux suites de nombres réels $(r_n)$ et $(s_n)$ convergeant vers $r$ et $s$ respectivement. On suppose que les suites d'opérateurs $(A_n)$ et $(B_n)$ convergent simplement. Il existe donc deux opérateurs (linéaires, symétriques, semi-définis positifs) $A$ et $B$ tels que, pour tout $x \in X$, $\lim_{n\to+\infty} A_n(x) = A(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} B_n(x) = B(x)$. Les suites de fonctions $(f_n)$ et $(h_n)$ définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{2}\langle A_n x, x\rangle - \langle v_n, x\rangle - r_n = q_{A_n}(x) - \langle v_n, x\rangle - r_n,$$

$$h_n(x) = \frac{1}{2}\langle B_n x, x\rangle - \langle w_n, x\rangle - s_n = q_{B_n}(x) - \langle w_n, x\rangle - s_n$$

convergent donc simplement vers les fonctions $f$ et $h$ données par

$$f(x) = q_A(x) - \langle v, x\rangle - r, \quad h(x) = q_B(x) - \langle w, x\rangle - s, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Soient alors les problèmes d'optimisation $(\mathcal{P}_n)$ et $(\mathcal{P})$ correspondants :

$$(\mathcal{P}_n) \quad : \quad \text{minimiser } (q_{A_n}(x) - \langle v_n, x\rangle - r_n) \vee (q_{B_n}(x) - \langle w_n, x\rangle - s_n) \text{ pour } x \in X$$

$$(\mathcal{P}) \quad : \quad \text{minimiser } (q_A(x) - \langle v, x\rangle - r) \vee (q_B(x) - \langle w, x\rangle - s) \text{ pour } x \in X.$$

**Proposition 5.1.** *Soient $A$, $A_n$, $B$, $B_n$ $v$, $v_n$, $w$, $w_n$, $r$, $r_n$, $s$, $s_n$ comme ci-dessus.*

*Supposons en outre que*

$$ImA + ImB + R_+v + R_+w = X. \tag{14}$$

*Alors* $\lim_{n\to+\infty} \inf(\mathcal{P}_n) = \inf(\mathcal{P})$. *D'autre part,* argmin$(\mathcal{P})$ *et, pour $n$ assez grand,* argmin $(\mathcal{P}_n)$ *sont compacts non vides ; enfin, tout ouvert contenant* argmin $(\mathcal{P})$ *contient* argmin $(\mathcal{P}_n)$ *pour $n$ assez grand.*

P r e u v e. Comme les fonctions $f$, $f_n$, $(n \in \mathbb{N})$, sont convexes et à valeurs finies, la convergence simple de $(f_n)$ vers $f$ équivaut à l'épiconvergence de $(f_n)$ vers $f$ ; on a de même $e-\lim_{n\to+\infty} h_n = h$. La condition (2) du Théorème 2.4 est évidemment vérifiée. Pour ce qui est de la condition (3) observons que

$$\{f0^+ \leq 0\} \cap \{h0^+ \leq 0\} = KerA \cap \{v \geq 0\} \cap KerB \cap \{w \geq 0\}.$$

Le passage aux cônes polaires permet alors d'obtenir (3) à partir de (14). On conclut en appliquant le Théorème 2.4. $\square$

Pour écrire les problèmes duaux rappelons que, pour tout $y \in X$,

$$f^*(y) = q_{A^{-1}}(v+y) + r \ \text{ si } \ v+y \in ImA, \ f^*(y) = +\infty \ \text{ si } \ y \in X \setminus ImA,$$

où $A^{-1}$ désigne le pseudoinverse de $A$ ([8, Th. 3]).

On obtient ainsi

$$(\mathcal{Q}) : \text{maximiser} - \min_{\substack{(\alpha,\beta)\in S \\ \alpha v + y \in ImA \\ \beta w - y \in ImB}} \left\{ \frac{1}{\alpha} q_{A^{-1}}(\alpha v + y) + \frac{1}{\beta} q_{B^{-1}}(\beta w - y) + r + s \right\} \text{ pour } y \in X$$

et de même pour $(\mathcal{Q}_n)$.

Précisons que dans l'écriture de $(\mathcal{Q})$ on doit, pour $\alpha = 0$, remplacer $\dfrac{1}{\alpha} q_{A^{-1}}(\alpha v + y)$ par 0 si $y = 0$ et par $+\infty$ si $y \neq 0$. De même pour la valeur de $\dfrac{1}{\beta} q_{B^{-1}}(\beta w - y)$ lorsque $\beta = 0$.

**Proposition 5.2.** *Soient $A$, $A_n$, $B$, $B_n$, $v$, $v_n$, $w$, $w_n$ $r$, $r_n$, $s$, $s_n$ comme dans la Proposition* 5.1. *Alors les conclusions du Théorème* 4.3 *ont lieu.*

Preuve. Il suffit d'observer que les conditions (2) et (3) sont satisfaites. □

## REFERENCES

[1] H. Attouch. Variational Convergence for Functions and Operators. Pitman, 1984.

[2] D. Aze, J.-P. Penot. Operations on convergent families of sets and functions. *Optimization* **21** (1990), 521-534.

[3] D. Aze, M. Volle. A stability result in quasiconvex programming. *J. Optim. Theory Appl.* **67** (1990), 175-184.

[4] G. Beer. Topologies on Closed and Closed Convex Sets. Kluwer Academic Publishers, 1993.

[5] R. C. Bergstrom. Optimization, convergence and duality. Thesis,1980.

[6] G. Dal Maso. An Introduction to Γ-Convergence. Birkhäuser, 1993.

[7] A. L. Dontchev, T. Zolezzi. Well-Posed Optimization Problems. Lecture Notes in Mathematics vol. **1543**, 1993.

[8] J.-B. Hiriart-Urruty, M.-L. Mazure. Formulations variationnelles de l'addition paralléle et de la soustraction paralléle d'opérateurs semi-définis positifs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, No *15* (1986), 527-530.

[9] R. Lucchetti, F. Patrone. Closure and upper semicontinuity results in mathematical programming, Nash and economic equilibria. *Optimization* **17** (1986), 619-628.

[10] Mc. Linden, R. C. Bergstrom. Preservation of convergence of sets and functions in finite dimensions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **268** (1981), 127-142.

[11] V. Mosco. On the continuity of the Young-Fenchel transform. *J. Math. Anal. Appl.* **35** (1971), 518-535.

[12] J.-P. Penot. Preservation of persistence and stability under intersections and operations, Part 1 : persistence. *J. Optim. Tteory Appl.* **79**, No *3* (1993), 525-550.

[13] R. T. Rockafellar. Convex Analysis. Princeton, 1970.

[14] G. Salinetti, R. J.-B. Wets. On the relations between two types of convergence for convex functions. *J. Math. Anal. Appl.* **60**, (1977) 211-226.

[15] A. Seeger, M. Volle. On a convolution operation obtained by adding level sets : classical and new results. *Oper. Res.* **29**, No *2* (1995), 131-154.

[16] S. Traore, M. Volle. Subdifferentiability, lower semicontinuity and exactness of the level sum of two convex functions on a locally convex space. Proceedings of the $7^{th}$, French-German Conference on Optimization, Dijon 1994. In Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, R. Durier, C. Michelot (eds.), v. **429**, 1995, 346-356.

[17] S. Traore, M. Volle. On the level sum of two convex functions on Banach spaces. J. Convex Anal. **3**, *1* (1996), Part II of the Special Issue in Honor of R. T. Rockafellar, (to appear).

*Université d'Avignon*
*Faculté des Sciences*
*Département de Mathématiques*
*33, Rue Louis Pasteur*
*84000 Avignon*
*France*

*Received November 27, 1995*