Serdica

Mathematical Journal

Сердика

Математическо списание

Serdica Math. J. **22** (1996), 267-292

Serdica
Mathematical Journal

Institute of Mathematics
and Informatics, Bulgarian
Academy of Sciences

SOMME PONCTUELLE D'OPÉRATEURS MAXIMAUX MONOTONES*

H. Attouch, H. Riahi and M. Théra

Communicated by R. Lucchetti

Abstract. The primary goal of this paper is to shed some light on the maximality of the pointwise sum of two maximal monotone operators. The interesting purpose is to extend some recent results of Attouch, Moudafi and Riahi on the graph-convergence of maximal monotone operators to the more general setting of reflexive Banach spaces. In addition, we present some conditions which imply the uniform Brézis-Crandall-Pazy condition. Afterwards, we present, as a consequence, some recent conditions which ensure the Mosco-epiconvergence of the sum of convex proper lower semicontinuous functions.

1. Introduction. Ce travail, dans une première partie, porte principalement sur l'étude de la somme ponctuelle de deux opérateurs maximaux monotones. Nous donnons une condition suffisante pour que la somme ponctuelle de deux opérateurs maximaux monotones reste un opérateur maximal monotone (ce qui n'est pas bien sûr le cas en général). La condition obtenue est une hypothèse d'absorption portant sur la différence des domaines des opérateurs considérés. La preuve du résultat, qui constitue

1991 *Mathematics Subject Classification:* Primary : 47H05, 54A20, 54C60; Secondary : 26B25, 46B10

Key words: opérateur maximal monotone, convergence au sens des graphes, convergence au sens de Mosco, condition de Brézis-Crandall and Pazy.

*Cette recherche a été partiellement subventionnée, en ce qui concerne le premier et le dernier auteur, par la bourse OTAN CRG 960360 et pour le second auteur par l'Action Intégrée 95/0849 entre les universités de Marrakech, Rabat et Montpellier.

la partie principale de la troisième section, se fait en utilisant une méthode analogue à celle utilisée par H. Attouch [2]. Ce résultat, généralise et unifie les études entreprises par H. Attouch [2], E. Krauss [28], H. Riahi [35] et R. T. Rockafellar [39].

La seconde partie de l'article est consacrée à la convergence en graphe d'une somme d'opérateurs maximaux monotones. Cette question initialement considérée par H. Attouch en 1976, [1], a été ensuite étudiée dans le cadre hilbertien, pour la convergence de Hausdorff bornée, par H. Attouch, A. Moudafi et H. Riahi [9]. Dans la section 4 nous démontrons la convergence en graphe d'une somme d'opérateurs maximaux monotones, lorsque en addition à la convergence des deux suites d'opérateurs, on utilise la condition de Brézis-Crandall-Pazy uniforme (voir Théorème 5). Cela nous permet d'étendre des résultats de stabilité obtenus dans le cadre hilbertien (voir [9]) à un espace de Banach réflexif. On tente ensuite de formaliser cette condition uniforme (Théorème 6) en établissant dans le Théorème 6 un résultat plus simple où elle est vérifiée.

Dans la dernière section, on met en évidence l'utilité de cette condition uniforme. C'est pourquoi, on reprend et développe, en s'appuyant sur les théorèmes 5 et 6 (voir Théorème 7), des travaux récents ([31]) concernant la convergence au sens de Mosco d'une somme de deux suites de fonctions convexes semi continues inférieurement et propres.

2. Preliminaires, notations et définitions. Soit X un espace de Banach réflexif et X^* son dual topologique. Le crochet de dualité entre X et X^* sera noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et les normes dans X et X^* identiquement notées par $|\cdot|$. On désigne par $s-\lim$ ou $\overset{s}{\to}$ (resp. $w-\lim$ ou $\overset{w}{\to}$) la convergence forte (resp. convergence faible) dans X et X^*. On note $rU=\{x\in X|\ |x|\le r\}$, la boule fermée de X de rayon $r>0$ et $\operatorname{Int} A$ l'intérieur de $A\subset X$ pour la topologie forte.

L'application de dualité J de X dans X^* est l'application (en général multivoque) donnée par

$$Jx=\Big\{x^*\in X^*|\langle x,x^*\rangle\ =\ |x^*|^2=|x|^2\Big\}.$$

On rappelle que X est *localement uniformément convexe* si pour tout $x\in X$ et toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $|x|=|x_n|=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n+x|=2$, alors $x=s-\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$. D'après un théorème de John et Zizler ([29], [23], p. 182), tout espace de Banach réflexif X admet une norme équivalente, de telle sorte que X et X^* soient simultanément localement uniformément convexes. En particulier, X et X^* sont nécessairement *Kadec* :

$$x_n\overset{w}{\to}x\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}|x_n|=|x|\ \Longrightarrow\ x_n\overset{s}{\to}x$$

et *strictement convexes*, i.e., la frontière de leurs boules unité respectives ne contient pas de segment non trivial (cf. [23] par exemple).

Lorsque X et X^* sont tous les deux munis de normes localement uniformément convexes, l'application de dualité J est alors univoque, bijective et bicontinue de X sur X^* (c.f. [15]). L'application inverse $J^* = J^{-1}$ est l'application de dualité de X^* dans X.

Etant donné un opérateur (une application multivoque) $A : X \rightrightarrows X^*$, on identifie A avec son *graphe*

$$G(A) := \Big\{(x, x^*) \in X \times X^* | x^* \in Ax\Big\},$$

et on écrira indifféremment $(x, x^*) \in G(A)$, $(x, x^*) \in A$ ou $x^* \in Ax$. On désigne par

$$D(A) := \Big\{x \in X | Ax \neq \emptyset\Big\}$$

le *domaine* de A et par

$$R(A) := \bigcup_{x \in D(A)} Ax$$

l'image de A. L'*inverse* de A est défini par $A^{-1}y := \Big\{x \in X | y \in Ax\Big\}$.

Définition 1.

1. Un opérateur $A \subset X \times X^*$ de domaine non vide est *monotone* lorsque :

$$\langle x_2 - x_1, x_2^* - x_1^* \rangle \ \geq \ 0 \quad \text{pour tout} \quad (x_i, x_i^*) \in A, \ i = 1, 2.$$

2. A est *maximal monotone* si A est monotone et si de plus il n'existe aucun autre opérateur monotone contenant strictement A.

Dans ce qui suit, sauf mention du contraire, on suppose que X et X^* sont des espaces de Banach *strictement convexes.* Rappelons quelques définitions et propriétés relatives aux opérateurs maximaux monotones. Soit $A \subset X \times X^*$ un opérateur maximal monotone. D'après la maximalité de A, on déduit que pour tout $x \in D(A)$, alors Ax est un convexe fermé de X^*

$$Ax = \Big\{x^* \in X^* | \langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \ \ \forall (y, y^*) \in A\Big\}.$$

X^* étant strictement convexe, pour tout $x \in D(A)$, l'élément de norme minimal dans Ax sera uniquement déterminé. On le notera A^0x.

La caractérisation suivante de la maximale monotonie dûe à R. T. Rockafellar généralise le célèbre théorème de Minty :

Soit X un espace de Banach réflexif et strictement convexe. Un opérateur monotone $A \subset X \times X^*$ est maximal monotone si et seulement si $R(A + \lambda J) = X^*$ pour tout $\lambda > 0$.

En particulier, l'opérateur A_λ, appelé *régularisée Yosida* de A et défini pour tout $\lambda > 0$ par

$$A_\lambda := (\lambda J^{-1} + A^{-1})^{-1} \tag{1}$$

est un opérateur maximal monotone qui vérifie l'inclusion

$$A_\lambda x \in A(J_\lambda^A x), \tag{2}$$

où, $J_\lambda^A x := x - \lambda J^* A_\lambda x$ désigne la *résolvante* associée à A, c'est à dire l'unique solution x_λ de l'inclusion

$$J(x_\lambda - x) + \lambda A x_\lambda \ni 0.$$

Les propriétés suivantes ont lieu ([15] Proposition 1.1) :

Proposition 1. *X un espace de Banach réflexif et strictement convexe ainsi que son dual X^*, et soit $A \subset X \times X^*$ un opérateur maximal monotone. Alors,*

1. *A_λ est une application (univoque) partout définie de X dans X^*;*
2. *A_λ est monotone et borné ;*
3. *Pour tout $x \in D(A)$, on a $|A_\lambda x| \leq |A^0 x|$;*
4. *Pour tout $x \in D(A)$, $A_\lambda x$ tend faiblement dans X^* vers $A^0 x$, lorsque λ tend vers* 0.

Définition 2. Soit $\{A^n, A \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble d'opérateurs maximaux monotones dans $X \times X^*$. La suite $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente *au sens des graphes* vers A (on dit aussi que $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ G-converge vers A), et on note $A^n \xrightarrow{G} A$, lorsque la suite $\{G(A^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Painlevé-Kuratowski vers $G(A)$. Sans rentrer dans les détails de la convergence au sens de Painlevé-Kuratowski, ceci équivaut à dire que

$$\text{pour tout} \quad (x, y) \in A, \quad \text{il existe} \quad (x_n, y_n) \in G(A^n) \ \text{ avec } \ x_n \xrightarrow{s} x \ \text{ et } \ y_n \xrightarrow{s} y. \tag{3}$$

La convergence au sens des graphes possède donc une version analytique qui, contrairement à la convergence simple où la variable est gelée, prend en compte le comportement des opérateurs en des points voisins. Cette notion de convergence pour des suites d'opérateurs maximaux monotones ou plus généralement d'opérateurs accrétifs a été particulièrement étudiée par H. Attouch en relation avec d'autres approches liées aux semi groupes de contraction associés et dûes à H. Brézis, A. Pazy, M. Crandall, Ph. Bénilan. Cette convergence s'est avérée être un outil majeur dans l'étude de problèmes d'évolution. Combinée par exemple avec l'approximation Yosida, la convergence au sens des graphes de suites d'opérateurs maximaux monotones a récemment permis à H. Attouch, J.-B. Baillon et M. Théra ([4] et [5]) de définir une notion de somme étendue (variationnelle) d'opérateurs. Combinée au concept d'opérateur asymptote introduit par P. L. Lions [30], elle a permis d'établir de nouveaux résultats concernant la solvabilité d'une équation généralisée gouvernée par un opérateur maximal monotone (cf. H. Attouch, Z. Chbani et A. Moudafi [8]).

Rappelons, pour conclure cette section, deux résultats importants. Le premier dû à H. Brézis, établit un lien entre la convergence en graphe des opérateurs et la convergence simple (ponctuelle) des régularisées Yosida des opérateurs.

Théorème 1. *Soit X un epace de Banach réflexif et strictement convexe. Soit $\{A^n, A : n \in \mathbb{N}\} \subset X \times X^*$ un ensemble d'opérateurs maximaux monotones. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $A^n \stackrel{G}{\to} A$;
2. $A^n_\lambda x \stackrel{s}{\to} A_\lambda x$, *pour tout* $x \in X$ *et tout* $\lambda > 0$ *;*
3. $A^n_{\lambda_0} x \stackrel{s}{\to} A_{\lambda_0} x$, *pour tout* $x \in X$ *et* $\lambda_0 > 0$ *fixé.*

La remarque suivante sera utilisée dans la suite :

Remarque 1. Observons d'après (3) que

$$A^n \stackrel{G}{\to} A \iff (A^n)^{-1} \stackrel{G}{\to} A^{-1}.$$

Par suite, d'après le Théorème 1 on a :

$$A^n \stackrel{G}{\to} A \iff (J + A^n)^{-1} x^* \stackrel{s}{\to} (J + A)^{-1} x^*, \quad \text{pour tout } x^* \in X^*. \tag{4}$$

Le second résultat concerne la condition de Brézis, Crandall et Pazy et donne une condition pour que la famille des opérateurs maximaux monotones reste stable par addition.

Théorème 2. *Soit X un epace de Banach réflexif et strictement convexe. Soient $A \subset X \times X^*$ et $B \subset X \times X^*$ deux opérateurs maximaux monotones tels que $D(A) \cap D(B)$ est non vide. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

1. $R(A + B + J) = X^*$, *i.e.,* $A + B$ *est un opérateur maximal monotone;*

2. *Soit* $x^* \in X^*$ *donné et désignons par* x_λ *la solution de l'inclusion*

$$x^* \in A_\lambda x_\lambda + Bx_\lambda + Jx_\lambda.$$

Alors la famille $\Big\{A_\lambda x_\lambda | \lambda > 0\Big\}$ *est bornée pour* $\lambda \to 0$. *Ceci implique en particulier que la famille* $\Big\{x_\lambda | \lambda > 0\Big\}$ *est bornée lorsque* $\lambda \to 0$.

Pour plus de détails le lecteur peut, par exemple, se reporter aux ouvrages [1], [15], [20], [21], [22], [43].

3. Maximale monotonie de la somme ponctuelle d'opérateurs maximaux monotones. Soit $A, B : X \rightrightarrows X^*$ deux opérateurs tels que $D(A) \cap D(B) \neq \emptyset$. On note $A + B$ la somme ponctuelle de A et B définie par

$$\begin{array}{rcl} (A+B)x & = & Ax + Bx \\ D(A+B) & = & D(A) \cap D(B), \end{array}$$

où la somme $Ax + Bx$ est comprise au sens de Minkovski :

$$Ax + Bx = \Big\{x_1^* + x_2^* | x_1^* \in Ax, x_2^* \in Bx\Big\}.$$

Notre objectif dans cette partie est d'étudier la maximale monotonie de $A+B$ lorsque A et B sont des opérateurs maximaux monotones. Commençons par rappeler le résultat classique dû à R. T. Rockafellar [39] :

Théorème 3. *Soient* X *un espace de Banach réflexif,* A *et* B *deux opérateurs maximaux monotones dans* $X \times X^*$ *tels que*

$$D(A) \cap \operatorname{Int} D(B) \neq \emptyset. \tag{5}$$

Alors $A + B$ *est un opérateur maximal monotone.*

Soit X un epace de Banach réflexif et strictement convexe. D'après le Théorème 3, on peut donc observer que : $A_\lambda + B$ est maximal monotone pour tout $\lambda > 0$.

Dans ce qui suit, pour toute partie A de X, on note

$$\mathcal{K}(A) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A,$$

le cône engendré par A.

Notre but, dans cette section est de montrer qu'on peut affaiblir la condition de qualification (5) de R. T. Rockafellar.

Enonçons à présent le résultat principal de cette section :

Théorème 4. *Soient X un espace de Banach réflexif, A et B deux opérateurs maximaux monotones dans $X \times X^*$ tels que zéro soit un point absorbant de $D(A) - D(B)$:*

(6) $$\bigcup_{\lambda>0} \lambda\Big(D(A) - D(B)\Big) = X.$$

Alors $A + B$ est un opérateur maximal monotone.

Preuve. Il est clair que $A+B$ est monotone. Pour avoir la maximalité de $A+B$, il suffit d'appliquer la condition de Brézis-Crandall-Pazy (Théorème 2). Pour cela, il suffit donc de montrer que si $x_\lambda = (J + A_\lambda + B)^{-1}x^*$, alors la famille $\{A_\lambda x_\lambda | \lambda > 0\}$ est bornée pour tout $x^* \in X^*$. Soit donc $y \in X = \mathcal{K}\Big(D(A) - D(B)\Big)$. Il existe alors $\alpha > 0, a \in D(A)$ et $b \in D(B)$ tels que $y = \alpha \cdot (a - b)$. Par suite,

$$\langle A_\lambda x_\lambda, y\rangle = \alpha\Big(\langle A_\lambda x_\lambda, a - x_\lambda\rangle + \langle A_\lambda x_\lambda, x_\lambda - b\rangle\Big).$$

Soit $y_\lambda \in Bx_\lambda$ tel que $A_\lambda x_\lambda = x^* - y_\lambda - Jx_\lambda$. A_λ et B étant monotones, on en déduit que :

$$\langle A_\lambda x_\lambda - A_\lambda a, x_\lambda - a\rangle \ \geq\ 0 \quad \text{ et } \quad \langle y_\lambda - B^0 b, x_\lambda - b\rangle \ \geq\ 0.$$

La dernière inégalité résulte du fait que $(b, B^0 b) \in B$, avec

$$|B^0 b| = \inf\Big\{|b^*| \ \ |b^* \in Bb\Big\}.$$

Par suite,

$$\langle A_\lambda x_\lambda, y\rangle \leq \alpha \cdot \Big(\langle A_\lambda a, a - x_\lambda\rangle + \langle x^* - B^0 b - Jx_\lambda, x_\lambda - b\rangle\Big).$$

On sait d'après la Proposition 1. 3) que $|A_\lambda a| \leq |A^0 a|$. Par suite,

(7) $$\langle A_\lambda x_\lambda, y\rangle \leq \alpha \cdot \Big(|A^0 a| \cdot |a - x_\lambda| + (|x^* - B^0 b| + |x_\lambda|)|x_\lambda - b|\Big).$$

L'hypothèse de qualification impliquant que $0 \in D(A) - D(B)$, nous pouvons toujours supposer, sans perte de généralité que $0 \in D(A) \cap D(B)$ et donc que $(0, 0) \in A, (0, 0) \in B, (0, 0) \in B_\lambda$.

En effectuant le produit de dualité de chaque membre de l'équation

$$x^* = Jx_\lambda + A_\lambda x_\lambda + Bx_\lambda$$

par x_λ et en utilisant que la monotonie de A_λ et de B (avec $(0, 0) \in A_\lambda \cap B$), on en déduit que la famille $\{x_\lambda | \lambda > 0\}$ est bornée. Par suite,

(8) $$\sup_{\lambda>0} \langle A_\lambda x_\lambda, y\rangle < +\infty.$$

La relation (8) étant réalisée pour tout $y \in X$, le théorème de Banach-Steinhaus nous permet de conclure que la famille $\{A_\lambda x_\lambda | \lambda > 0\}$ est bornée dans X^*, ce qui achève la démonstration. $\square$

Pour le corollaire suivant, nous avons besoin d'une hypothèse de qualification du type Attouch et Brézis (cf. [7]) utilisée dans le cas où les opérateurs considérés sont des sous-différentiels de fonctions convexes semi-continues inférieurement et propres :

Corollaire 1. *Soient X un espace de Banach réflexif, A et B deux opérateurs maximaux monotones dans $X \times X^*$ et supposons que*

$$E = \mathcal{K}\Big(D(A) - D(B)\Big) \text{ soit un sous-espace fermé de } X. \tag{9}$$

Alors $A + B$ est un opérateur maximal monotone.

P r e u v e. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $0 \in D(A) \cap D(B)$. Par suite, d'après la condition (9), on peut toujours supposer que $D(A) \subset E$ et $D(B) \subset E$. Pour tout $x \in E$, définissons les opérateurs $A_0 : E \rightrightarrows E^*$ et $B_0 : E \rightrightarrows E^*$ de la manière suivante :

$$A_0(x) := \ \{z^* \in E^* | \exists x^* \in Ax, \quad \text{tel que } \ z^* = x^*|_E\}$$

et

$$B_0(x) := \ \{z^* \in E^* | \exists x^* \in Bx, \quad \text{tel que } \ z^* = x^*|_E\}.$$

Il est clair que A_0 et B_0 sont des opérateurs monotones. Etablissons leur maximale monotonie :

Soit $(z, z^*) \in E \times E^*$ et supposons que

$$\forall \ (s, t^*) \in A_0, \quad \langle s - z, t^* - z^* \rangle \geq 0.$$

On a par suite,

$$\forall \ (s, s^*) \in A, \quad \langle s - z, s^*|_E - z^* \rangle \geq 0.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, z^* admet un prolongement $y^* \in X^*$ tel que $y^*|_E = z^*$. On a alors :

$$\text{pour tout } (s, s^*) \in A, \quad \langle s - z, s^*|_E - y^*|_E \rangle \geq 0,$$

c'est à dire,

$$\text{pour tout } (s, s^*) \in A, \quad \langle s - z, s^* - y^* \rangle \geq 0.$$

D'après de la maximale monotonie de A, il en résulte que $(z, y^*) \in A$. Par suite, $(z, z^*) = (z, y^*|_E) \in A_0$ et par conséquent, A_0 est un opérateur maximal monotone.

Remarquons maintenant que la condition (6) est trivialement vérifiée. D'après le Théorème 4, on déduit que $C_0 := A_0 + B_0$ est un opérateur maximal monotone sur $E \times E^*$. Désignons par C la somme ponctuelle de A et B. Alors $D(C) = D(A) \cap D(B) = D(A_0) \cap D(B_0) = D(C_0)$. Montrons que C est un opérateur maximal monotone sur $X \times X^*$.

Fixons $(w, w^*) \in X \times X^*$. Il s'agit de montrer que si pour tout $(c, c^*) \in C$ on a

$$(*) \qquad \langle c - w, c^* - w^* \rangle \geq 0,$$

alors $(w, w^*) \in C$. Pour cela, utilisons une idée de S. Simons [41] :

Lemme 1. *Soit $A : X \rightrightarrows X^*$ un opérateur maximal monotone tel que $D(A) \subset E$. Alors, A vérifie la condition suivante :*

$$(u, u^*) \in A, \ \ v^* \in X^*, \ \ v^*|_E = u^*|_E \implies (u, v^*) \in A.$$

P r e u v e d u l e m m e 1. Soit $(u, u^*) \in A$, $v^* \in X^*$ et $v^*|_E = u^*|_E$. D'après la monotonie de A on obtient :

$$\text{pour tout } (s, s^*) \in A, \quad \langle s - u, s^* - u^* \rangle \geq 0.$$

Comme $s - u \in E$ et $v^*|_E = u^*|_E$, on a par conséquent,

$$\text{pour tout } (s, s^*) \in A, \quad \langle s - u, s^* - v^* \rangle \geq 0.$$

En utilisant la maximale monotonie de A, on obtient que $(u, v^*) \in A$, ce qui achève la preuve du lemme. □

Lemme 2. *Soit $A, B : X \rightrightarrows X^*$ des opérateurs de domaine inclus dans E, tels que l'un des opérateurs soit maximal monotone, alors $C = A + B$ vérifie la condition :*

$$(u, u^*) \in C, \ \ v^* \in X^*, \ \ v^*|_E = u^*|_E \implies (u, v^*) \in C.$$

P r e u v e d u l e m m e 2. Soit $(u, u^*) \in C$. Alors, $u^* = u_1^* + u_2^*$ avec $(u, u_1^*) \in A$ et $(u, u_2^*) \in B$. Si $v^* \in X^*$ vérifie $v^*|_E = u^*|_E$, alors $(v^* - u_1^*)|_E = u_2^*|_E$ et en vertu du Lemme 1 on a $(u, v^* - u_1^*) \in B$. Il s'en suit : $(u, v^*) \in A + B = C$. □

Remarquons d'abord que nécessairement, $w \in E$. Dans le cas contraire, d'après le théorème de Hahn-Banach, on pourrait trouver $y^* \in X^*$ tel que $y^*|_E = 0$. Pour λ réel assez grand on aurait alors :

$$\langle c - w, c^* - \lambda y^* - w^* \rangle = \langle c - w, c^* - w^* \rangle - \lambda \langle w, y^* \rangle < 0$$

et une contradiction, car comme $(c^* - \lambda y^*)|_E = c^*|_E$, on a nécessairement d'après le Lemme 2 que $(c, c^* - \lambda y^*) \in C$.

Soit $(c, t^*) \in C_0$ et soit $c^* \in X^*$ telle que $t^* = c^*|_E$. Comme $w \in E$, d'après $(*)$ on a alors :

$$\langle c - w, t^* - w^*|_E \rangle \geq 0,$$

et d'après la maximale monotonie de C_0, on en déduit que $(w, w^*|_E) \in C_0$. Par conséquent, il existe $z^* \in X^*$ tel que $z^*|_E = w^*|_E$ et $(w, z^*) \in C$. Par suite, d'après le Lemme 2 on obtient que $(w, w^*) \in C$ et le résultat. $\square$

Remarque 2. Les résultats précédents généralisent et unifient divers résultats sur la maximale monotonie d'une somme de deux opérateurs maximaux monotones ([2], [28], [35], [39]).

4. G–Convergence de la somme d'opérateurs maximaux monotones. On suppose à nouveau que X est un espace de Banach réflexif, et soit X^* son dual topologique. On se donne deux suites d'opérateurs maximaux monotones $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{B^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $X \times X^*$. Pour $x^* \in X^*$ et $\lambda > 0$ donnés, u_λ^n désigne la solution de l'inclusion

$$x^* \in Ju_\lambda^n + A^n u_\lambda^n + B_\lambda^n u_\lambda^n.$$

Nous dirons que la *condition de Brézis-Crandall-Pazy uniforme* est satisfaite lorsque les quantités $\alpha_n(x^*) := \sup\limits_{\lambda>0} |B_\lambda^n(u_\lambda^n)|$ associées aux couples (A^n, B^n) satisfont

$$\limsup_{n\to+\infty} \alpha_n(x^*) < +\infty, \qquad \text{pour tout} \qquad x^* \in X^*.$$

Enonçons le résultat principal de cette section dont la démonstration se fait en plusieurs étapes.

Théorème 5. *Soit X un espace de Banach réflexif tel que X et X^* soient localement uniformément convexes. Soient $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{B^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'opérateurs maximaux monotones dans $X \times X^*$ telles que $A^n \xrightarrow{G} A$ et $B^n \xrightarrow{G} B$. Supposons que la condition Brézis-Crandall-Pazy uniforme soit vérifiée. Alors,*

$$A^n + B^n \xrightarrow{G} A + B. \tag{10}$$

Dans une première étape on s'intéresse à la convergence au sens des graphes d'une approximation de la somme des deux suites d'opérateurs.

Proposition 2. *Soit X un espace de Banach réflexif tel que X et X^* sont localement uniformément convexes. Soient $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{B^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'opérateurs* *maximaux monotones dans* $X \times X^*$ *telles que* $A^n \xrightarrow{G} A$ *et* $B^n \xrightarrow{G} B$. *Alors pour tout* $\lambda > 0$ *et toute suite* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(\lambda_n > 0)$ *telle que* $\lambda_n \to \lambda$ *on a*

$$A^n + B^n_{\lambda_n} \xrightarrow{G} A + B_\lambda. \tag{11}$$

Preuve de la Proposition 2. Soit pour cela $(u, v^*) \in A + B_\lambda$. Alors $(u, v^* - B_\lambda u) \in A$. La convergence au sens des graphes de A^n vers A entraîne l'existence de (u_n, v_n^*) dans A^n telle que $u_n \xrightarrow{s} u$ et $v_n^* \xrightarrow{s} v^* - B_\lambda u$.

Pour obtenir (11), il suffit donc de montrer que $B^n_{\lambda_n}\, u_n \xrightarrow{s} B_\lambda u$. Pour ce faire, on utilise le fait que la norme duale est Kadec. Il suffit donc de démontrer la convergence normale ainsi que la convergence faible de la suite $\{B^n_{\lambda_n} u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vers $B_\lambda u$.

Les deux lemmes suivants (Lemme 3 et 4) vont nous servir :

Lemme 3. *Les suites* $\{|B^n_{\lambda_n} u_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\{|B^n_{\lambda_n} u|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sont bornées.*

Preuve du lemme 3. Il suffit de donner la preuve pour la suite $\{|B^n_{\lambda_n} u_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$. Supposons que $(x, y) \in B$. En vertu de la G-convergence de B^n vers B, on peut trouver une suite $(x_n, y_n) \in B^n$ convergente vers (x, y). Des relations

$$y_n \in B^n x_n \quad \text{et} \quad B^n_{\lambda_n} u_n \in B^n(u_n - \lambda_n J^*(B^n_{\lambda_n} u_n))$$

et de la monotonie de B^n, on tire

$$\langle B^n_{\lambda_n} u_n - y_n, u_n - \lambda_n J^*(B^n_{\lambda_n} u_n) - x_n \rangle \geq 0.$$

Par suite on en déduit,

$$\lambda_n |B^n_{\lambda_n} u_n|^2 - |B^n_{\lambda_n} u_n| \Big[|u_n - x_n| + \lambda_n |y_n| \Big] \leq \langle y_n, x_n - u_n \rangle,$$

et la bornitude de la suite $\{|B^n_{\lambda_n} u_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Etape 1 : La suite $\{|B^n_{\lambda_n} u_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|B_\lambda u|$.

En effet, des relations

$$B^n_{\lambda_n} u_n \in B^n(u_n - \lambda_n J^*(B^n_{\lambda_n} u_n)) \quad \text{et} \quad B^n_\lambda u \in B^n(u - \lambda J^*(B^n_\lambda u))$$

et de la monotonie de B^n on obtient :

$$\langle B^n_{\lambda_n} u_n - B^n_\lambda u, u_n - u \rangle \geq \langle B^n_{\lambda_n} u_n - B^n_\lambda u, \lambda_n J^*(B^n_{\lambda_n} u_n) - \lambda J^*(B^n_\lambda u) \rangle.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \Big(\sqrt{\lambda_n} |B^n_{\lambda_n} u_n| - \sqrt{\lambda} |B^n_\lambda u|\Big)^2 \;\; &\leq \;\; \Big(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_n}\Big)^2 |B^n_{\lambda_n} u_n|.|B^n_\lambda u| \\ &\quad + \Big(|B^n_{\lambda_n} u_n| + |B^n_\lambda u|\Big) |u_n - u|. \end{aligned} \tag{12}$$

Par suite, en utilisant la convergence de u_n vers u, de λ_n vers λ, et la bornitude des suites $\{|B^n_{\lambda_n}u_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{|B^n_\lambda u|\}_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit de (12) que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\lambda_n}|B^n_{\lambda_n}u_n|-\sqrt{\lambda}|B^n_\lambda u|\right)^2=0.$$

Comme d'autre part, la suite $\{B^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ G-converge vers B on a aussi que $|B^n_\lambda u|\to|B_\lambda u|$ et par suite, $|B^n_{\lambda_n}u_n|\to|B_\lambda u|$.

Etape 2 : La suite $\{B^n_{\lambda_n}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $B_\lambda u$.
Soit pour cela une sous-suite, que par commodité nous noterons encore $\{B^n_{\lambda_n}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $B^n_{\lambda_n}u_n\xrightarrow{w}\gamma$ dans X^*. Vérifions que $\gamma=B_\lambda u$.
Considérons $y\in X$; on a alors d'après (2),

$$B_\lambda y\in B(y-\lambda J^*(B_\lambda y)).$$

et

$$B^n_{\lambda_n}u_n\in B^n(u_n-\lambda_n J^*(B^n_{\lambda_n}u_n)).$$

Comme $B^n\xrightarrow{G}B$, il existe $(y_n,y_n^*)\in B^n$ tel que $y_n^*\xrightarrow{s}B_\lambda y$ et $y_n\xrightarrow{s}y-\lambda J^*(B_\lambda y)$. Par conséquent en utilisant la monotonie de B^n et de J^* on a

$$\begin{array}{rcl}\langle B^n_{\lambda_n}u_n-y_n^*,u_n-y_n-\lambda_nJ^*(B_\lambda y)\rangle & \geq & \lambda_n\langle B^n_{\lambda_n}u_n-y_n^*,J^*(B^n_{\lambda_n}u_n)-J^*(B_\lambda y)\rangle\\ & = & \lambda_n\langle B^n_{\lambda_n}u_n-y_n^*,J^*(B^n_{\lambda_n}u_n)-J^*(y_n^*)\rangle\\ & & +\lambda_n\langle B^n_{\lambda_n}u_n-y_n^*,J^*(y_n^*)-J^*(B_\lambda y)\rangle\\ & \geq & \lambda_n\langle B^n_{\lambda_n}u_n-y_n^*,J^*(y_n^*)-J^*(B_\lambda y)\rangle.\end{array}$$

Par ailleurs, $B^n_{\lambda_n}u_n-y_n^*\xrightarrow{w}\gamma-B_\lambda y$. Par passage à la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, il résulte :

$$\langle\gamma-B_\lambda y,u-y\rangle\geq\lambda\liminf_{n\to\infty}\langle B^n_{\lambda_n}u_n-y_n^*,J^*(y_n^*)-J^*(B_\lambda y)\rangle\ =\ 0.$$

Ceci résulte du fait que X étant localement uniformément convexe on a $J^*(y_n^*)\xrightarrow{s}J^*(B_\lambda y)$. On a montré ainsi que pour tout $y\in X$,

$$\langle\gamma-B_\lambda y,u-y\rangle\ \geq\ 0.$$

De la maximale monotonie de B_λ, on déduit que $\gamma=B_\lambda u$. On a ainsi établi que toute sous-suite de $\{B_{\lambda_n}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant faiblement a pour limite faible $B_\lambda u$. Il en résulte que la suite $\{B_{\lambda_n}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $B_\lambda u$, ce qui achève la démonstration. □

Lemme 4. *Supposons que l'espace X soit localement uniformément convexe. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et soit $x \in X$ fixé. Si*

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Jx_n - Jx, x_n - x\rangle \;\le\; 0,$$

alors $x_n \xrightarrow{s} x$.

P r e u v e d u l e m m e 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation :

$$\langle Jx_n - Jx, x_n - x\rangle = \Big(|x_n| - |x|\Big)^2 + \Big(|x|.|x_n| - \langle Jx, x_n\rangle\Big) + \Big(|x_n|.|x| - \langle Jx_n, x\rangle\Big).$$

Les trois derniers termes intervenant dans la précédente décomposition étant positifs, on peut déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = |x| \qquad \lim_{n\to+\infty}\langle Jx, x_n\rangle \;=\; |x|^2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\langle Jx, x + x_n\rangle = 2|x|^2.$$

On a par conséquent,

$$\begin{aligned} 2|x|^2 \;=\; \lim_{n\to+\infty}\langle Jx, x+x_n\rangle \;&\le\; |Jx| \liminf_{n\to+\infty} |x + x_n| \\ &\le\; |Jx| \limsup_{n\to+\infty} |x + x_n| \\ &\le\; |Jx| \lim_{n\to+\infty} (|x| + |x_n|) \;=\; 2|x|^2. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} |x_n + x| = 2|x|$, d'où en utilisant la locale uniforme convexité de X, on en déduit que $x_n \xrightarrow{s} x$. $\square$

P r e u v e d u T h é o r è m e 5. Soient $x^* \in X^*$ et $\lambda > 0$: posons

$$x^n = (J + A^n + B^n)^{-1}x^*,$$

$$x = (J + A + B)^{-1}x^*,$$

$$x^n_\lambda = (J + A^n + B^n_\lambda)^{-1}x^* \quad \text{et} \quad x_\lambda = (J + A + B_\lambda)^{-1}x^*.$$

D'après la Remarque 1, il suffit d'établir la convergence forte de la suite $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vers x.

(i) Soit $\mu > 0$; on a $x^* - Jx_\mu - B_\mu x_\mu \in Ax_\mu$. Soit $y^* \in Bx$ tel que $x^* - Jx - y^* \in Ax$. En vertu de la monotonie de A, on a

$$\langle (x^* - Jx_\mu - B_\mu x_\mu) - (x^* - Jx - y^*), x_\mu - x\rangle \;\ge\; 0.$$

D'où

$$\langle Jx_\mu - Jx, x_\mu - x\rangle \;\le\; \langle y^* - B_\mu x_\mu, x_\mu - x\rangle.$$

De même B est monotone, $B_\mu x_\mu \in B(x_\mu - \mu J^*(B_\mu x_\mu))$ et $y^* \in Bx$. Par suite,

$$\langle B_\mu x_\mu - y^*, x_\mu - \mu J^*(B_\mu x_\mu) - x\rangle \ \geq\ 0,$$

ce qui entraîne

$$\langle Jx_\mu - Jx, x_\mu - x\rangle \ \leq\ \langle y^* - B_\mu x_\mu, \mu J^*(B_\mu x_\mu)\rangle.$$

D'après la condition Brézis-Crandall-Pazy uniforme, la famille $\{B_\mu x_\mu\}$ est bornée. Il en résulte que

$$\limsup_{\mu\to 0^+}\langle Jx_\mu - Jx, x_\mu - x\rangle \ \leq\ \limsup_{\mu\to 0^+} \mu|B_\mu x_\mu|\Big(|y^*| + |B_\mu x_\mu|\Big) \ =\ 0.$$

Du Lemme 4 on déduit que $x_\mu \xrightarrow{s} x$ si $\mu \to 0^+$.

(ii) Par raisonnement identique on justifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence forte de x_μ^n vers x^n lorsque $\mu \to 0^+$.

(iii) Soit $\lambda > 0$ et $\mu \in]0, \lambda[$. Comme précédemment, dans (i), il résulte de la monotonie de A^n que

$$\langle Jx_\lambda^n - Jx_\mu^n, x_\lambda^n - x_\mu^n\rangle \ \leq\ -\langle B_\lambda^n x_\lambda^n - B_\mu^n x_\mu^n, x_\lambda^n - x_\mu^n\rangle \tag{13}$$

D'autre part, en utilisant la monotonie de B^n et la relation :

$$\begin{aligned}\langle B_\lambda^n x_\lambda^n - B_\mu^n x_\mu^n, x_\lambda^n - x_\mu^n\rangle \ &=\ \Big\langle B_\lambda^n x_\lambda^n - B_\mu^n x_\mu^n, x_\lambda^n - \lambda J^*(B_\lambda^n x_\lambda^n) - \Big(x_\mu^n - \mu J^*(B_\mu^n x_\mu^n)\Big)\Big\rangle \\ &\quad +\langle B_\lambda^n x_\lambda^n - B_\mu^n x_\mu^n, \lambda J^*(B_\lambda^n x_\lambda^n) - \mu J^*(B_\mu^n x_\mu^n)\rangle,\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}-\langle B_\lambda^n x_\lambda^n - B_\mu^n x_\mu^n, x_\lambda^n - x_\mu^n\rangle \ &\leq\ -\langle B_\lambda^n x_\lambda^n - B_\mu^n x_\mu^n, \lambda J^*(B_\lambda^n x_\lambda^n) - \mu J^*(B_\mu^n x_\mu^n)\rangle \\ &\leq\ -\lambda|B_\lambda^n x_\lambda^n|^2 - \mu|B_\mu^n x_\mu^n|^2 + \frac{\lambda+\mu}{2}\Big(|B_\lambda^n x_\lambda^n|^2 + |B_\mu^n x_\mu^n|^2\Big) \\ &\leq\ \frac{\lambda}{2}|B_\mu^n x_\mu^n|^2 + \frac{\mu}{2}|B_\lambda^n x_\lambda^n|^2.\end{aligned}$$

Combinant (13) avec cette dernière relation, et tenant compte de la condition Brézis-Crandall-Pazy uniforme, il s'en suit que pour $\lambda > 0$ fixé et $\mu \in]0, \lambda[$ on a :

$$\langle Jx_\lambda^n - Jx_\mu^n, x_\lambda^n - x_\mu^n\rangle \ \leq\ \frac{\lambda+\mu}{2}\alpha_n^2(x^*). \tag{14}$$

En faisant tendre respectivement μ vers 0^+ et n vers $+\infty$ dans (14), on déduit que

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle Jx_\lambda^n - Jx^n, x_\lambda^n - x^n\rangle \ \leq\ \lambda C. \tag{15}$$

(iv) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$ on a :

$$\Big(|x_\lambda^n| - |x^n|\Big)^2 \leq \langle Jx_\lambda^n - Jx^n, x_\lambda^n - x^n\rangle.$$

D'après (15) on en déduit que

$$\limsup_{n\to\infty} \Big(|x_\lambda^n| - |x^n|\Big)^2 \leq \lambda C. \tag{16}$$

Fixons $\mu > 0$ arbitrairement. Comme $x_\mu^n \to x_\mu$ (d'après la Proposition 2 et la Remarque 1), la suite $\{x_\mu^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'après (16), la suite $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée. Par suite, pour tout $\lambda \in (0, \mu]$ on a :

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |x^n| &\leq \limsup_{n\to\infty} \Big(|x_\lambda^n| - |x^n|\Big) + \limsup_{n\to\infty} |x^n| \\ &\leq \sqrt{\lambda C} + \limsup_{n\to\infty} |x^n| \leq \sqrt{\mu C} + \limsup_{n\to\infty} |x^n|. \end{aligned}$$

Par conséquent les nombres

$$\alpha := \sup\Big\{|x^n - x_\lambda^n| \;\mid\; n \in \mathbb{N},\ \lambda \in (0,\mu]\Big\}, \quad \beta := \sup\Big\{|Jx^n - Jx| \;\mid\; n \in \mathbb{N}\Big\}$$

sont finis. Un calcul élémentaire donne :

$$\begin{aligned} \langle Jx^n - Jx, x^n - x\rangle &= \langle Jx^n - Jx_\lambda^n, x^n - x_\lambda^n\rangle + \langle Jx_\lambda^n - Jx, x^n - x_\lambda^n\rangle \\ &+ \langle Jx^n - Jx, x_\lambda^n - x\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant (15) et la dernière relation on obtient :

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}\langle Jx^n - Jx, x^n - x\rangle &\leq \limsup_{n\to\infty}\langle Jx^n - Jx_\lambda^n, x^n - x_\lambda^n\rangle + \alpha \limsup_{n\to\infty} |Jx_\lambda^n - Jx| \\ &\quad + \beta \limsup_{n\to\infty} |x_\lambda^n - x| \\ &\leq \lambda C + \alpha|Jx_\lambda - Jx| + \beta|x_\lambda - x|. \end{aligned} \tag{17}$$

Comme $x_\lambda^n \xrightarrow{s} x_\lambda$ et $Jx_\lambda^n \xrightarrow{s} Jx_\lambda$, en faisant tendre λ vers 0 dans (17), on obtient

$$\limsup_{n\to\infty}\langle Jx^n - Jx, x^n - x\rangle \leq 0.$$

En appliquant à nouveau le Lemme 2, on conclut finalement que $x^n \xrightarrow{s} x$. $\square$

Pour conclure cette section, nous allons examiner sous quelles hypothèses, la condition de Brézis-Crandall-Pazy uniforme est vérifiée. Pour cela, nous avons besoin de la proposition suivante, qui peut être considérée comme une version non-linéaire du théorème de Banach-Steinhaus. La formulation que nous en donnons est un cas particulier d'un résultat plus général établi par L. Veselý ([42] (Corollaire 2, p. 1301)) pour le cas des familles ϵ-monotones.

Proposition 3. *Soit X un espace de Banach réflexif tel que X et X^* soient localement uniformément convexes et soit $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs maximaux monotones dans X. Supposons que*

$$\mathcal{U} = \mathrm{Int}\Big(\bigcap_{n\geq k} D(A^n)\Big) \neq \emptyset$$

pour $k \in \mathbb{N}$, et que pour tout $x \in \mathcal{U}$

$$\limsup_{n\to+\infty} d(0, A^n x) < +\infty. \tag{18}$$

Alors $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément localement bornée sur $\mathcal{U}$: pour tout $\overline{x} \in \mathcal{U}$, il existe $r > 0$ et $c > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \overline{x} + rU \subset \mathcal{U}$ on ait

$$|A^n u| := \sup_{v\in A^n u} |v| \leq c.$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 6. *Soit X un espace de Banach réflexif tel que X et X^* soient localement uniformément convexes. Soient $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{B^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'opérateurs maximaux monotones qui convergent en graphe vers A et B, respectivement. Supposons que l'hypothèse* (19) *ci-dessous soit satisfaite :*

$\exists x_0 \in D(A) \cap D(B)$, $\exists r > 0$ *tels que*

$$\forall z \in x_0 + rU,\ z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n) \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} d(0, A^n(z)) < +\infty. \tag{19}$$

Alors la suite d'opérateurs maximaux monotones $\{A^n + B^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens des graphes vers $A + B$.

Preuve. Par translation, on peut se ramener[1] au cas où $x_0 = 0$ et $(0,0) \in B^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le Théorème 5, il suffit de montrer que la condition Brézis-Crandall-Pazy uniforme est satisfaite.

[1] En effet, soit $x_0 \in D(A) \cap D(B)$. On a pour $y_0 \in Bx_0$ et $y_0' \in Ax_0$. Puisque $\{B^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en graphe vers B, il existe $(x_n, y_n) \in B^n$ tel que $x_n \xrightarrow{s} x_0$ et $y_n \xrightarrow{s} y_0$. Considérons les opérateurs

$$\overline{A}^n x = A^n(x + x_n) - y_n \text{ et } \overline{B}^n x = B^n(x + x_n) - y_n.$$

On aura effectivement que $0 \in \overline{B}^n 0$.

D'après la Proposition 3, l'hypothèse (19) assure que la suite $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément localement bornée sur rU :

$$\exists r_0 > 0,\ \ \exists c_0 > 0 \ \text{ tels que } \ \forall u \in r_0U,\ \forall n \geq 0 \quad |A^n u| \leq c_0.$$

Fixons alors $x^* \in X^*$. Soit u_λ^n la solution de l'inclusion

$$x^* \in Ju_\lambda^n + A^n u_\lambda^n + B_\lambda^n u_\lambda^n.$$

Soit $y_\lambda^n \in A^n u_\lambda^n$ tel que $x^* = Ju_\lambda^n + y_\lambda^n + B_\lambda^n u_\lambda^n$.

Assertion 1. *Pour tous $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_\lambda^n| \leq |x^*| + c_0$.*

P r e u v e d e l'a s s e r t i o n 1. En vertu de l'uniforme bornitude de la suite $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on a $0 \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$ et $|y_n| \leq c_0$ pour $y_n \in A^n 0$. De la monotonie de A^n, on tire

$$\langle x^* - Ju_\lambda^n - B_\lambda^n u_\lambda^n - y_n, u_\lambda^n\rangle \ \geq \ 0.$$

Par suite

$$|u_\lambda^n|^2 \leq |x^* - y_n| \cdot |u_\lambda^n| - \langle B_\lambda^n u_\lambda^n, u_\lambda^n > .$$

Puisque $0 = B_\lambda^n 0$ et B_λ^n est monotone, il s'en suit que

$$|u_\lambda^n| \leq |x^* - y_n| \leq |x^*| + c_0 \cdot \tag{20}$$

Assertion 2. $\forall\lambda > 0$ *et* $\forall n \geq 0$ *on a*

$$|y_\lambda^n| \leq c_0 + \frac{1}{r_0}\Big(|x^*| + c_0\Big)^2.$$

P r e u v e d e l'a s s e r t i o n 2. On sait déjà que

$$\begin{aligned}
\langle x^*, u_\lambda^n\rangle &= \langle Ju_\lambda^n + y_\lambda^n + B_\lambda^n u_\lambda^n, u_\lambda^n\rangle \\
&= |u_\lambda^n|^2 + \langle y_\lambda^n, u_\lambda^n\rangle + \langle B_\lambda^n u_\lambda^n, u_\lambda^n\rangle \ \geq \ \langle y_\lambda^n, u_\lambda^n\rangle.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\langle y_\lambda^n, u_\lambda^n\rangle \ \leq \ \langle x^*, u_\lambda^n\rangle \ \leq \ |x^*| \cdot |u_\lambda^n| \ \leq \ |x^*|\Big(|x^*| + c_0\Big). \tag{21}$$

Soient $u \in r_0U \subset D(A^n)$ et $v \in A^n u$. Comme $u_\lambda^n \in D(A^n)$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle y_\lambda^n, u\rangle &= -\langle y_\lambda^n - v, u_\lambda^n - u\rangle + \langle y_\lambda^n, u_\lambda^n\rangle + \langle v, u - u_\lambda^n\rangle \\
&\leq \langle y_\lambda^n, u_\lambda^n\rangle + c_0\Big(|u_\lambda^n| + r_0\Big).
\end{aligned}$$

En combinant (21) et l'assertion 1, on déduit que

$$\langle y_\lambda^n, u\rangle \;\le\; r_0 c_0 + \Big(|x^*| + c_0\Big)^2.$$

Comme $|y_\lambda^n| = \dfrac{1}{r_0}\sup\Big\{\langle y_\lambda^n, u\rangle| \;\; |u| \le r_0\Big\}$, nous en déduisons donc l'assertion 2.

En utilisant les deux assertions précédentes, nous avons pour tous $n \ge 0$ et $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} |B_\lambda^n u_\lambda^n| \;=\; |x^* - y_\lambda^n - J u_\lambda^n| \;&\le\; |x^*| + |u_\lambda^n| + |y_\lambda^n| \\ &\le\; \Big(c_0 + |x^*|\Big)\cdot\Big(2 + \frac{c_0 + |x^*|}{r_0}\Big) = k. \end{aligned}$$

Par suite la condition Brézis-Crandall-Pazy uniforme est satisfaite, ce qui permet de déduire que la suite $\{A^n + B^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens des graphes vers $A + B$. $\square$

Remarque. La conclusion du Théorème 6 est préservée si on suppose que X est un espace de Hilbert et si on remplace (19) par

$$\liminf_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}} \left[\inf_{y_\lambda^n \in A^n u_\lambda^n} \langle B_\lambda^n u_\lambda^n, A^n u_\lambda^n\rangle\right] \;>\; -\infty.$$

En effet, soit $y_\lambda^n \in A^n u_\lambda^n$ tel que $y_\lambda^n = x^* - B_\lambda^n u_\lambda^n - u_\lambda^n$; on a alors l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 > 0$ et $\alpha_0 > 0$ tels que pour tous $n \ge n_0$ et $\lambda \in]0, \lambda_0]$

$$\langle B_\lambda^n u_\lambda^n, y_\lambda^n\rangle \;=\; \langle B_\lambda^n u_\lambda^n, x^* - B_\lambda^n u_\lambda^n - u_\lambda^n\rangle \;\ge\; -\alpha_0.$$

Donc,

$$|B_\lambda^n u_\lambda^n|^2 \le \alpha_0 + \langle B_\lambda^n u_\lambda^n, x^*\rangle - \langle B_\lambda^n u_\lambda^n, u_\lambda^n\rangle \;\le\; \alpha_0 + |x^*|\cdot|B_\lambda^n u^n|,$$

car les opérateurs B^n sont monotones et supposés contenir $(0,0)$. On conclut que la suite $\{B_\lambda^n u_\lambda^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée; ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

Nous terminons ce paragraphe par un corollaire où apparaît d'une manière simple l'utilité de la condition (19).

Corollaire 2. *Soit X un espace de Banach réflexif tel que X et X^* soient localement uniformément convexes. Soit $\{B^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs maximaux monotones qui converge en graphe vers B. Soit A un opérateur maximal monotone satisfaisant*

$$D(B) \cap \operatorname{Int} D(A) \ne \emptyset. \tag{22}$$

Alors la suite $\{A + B^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en graphe vers $A + B$.

P r e u v e. On applique le Théorème 6 après avoir remarqué que (22) entraîne (18). $\square$

5. Mosco-epiconvergence d'une somme de fonctions convexes. Nous allons consacrer la dernière partie du travail à étudier la convergence au sens de Mosco d'une somme de fonctions convexes semi-continues inférieurement et propres. Nous nous plaçons, comme précédemment, sur un espace de Banach réflexif X tel que X et X^* soient localement uniformément convexes (ce qui, comme on l'a déjà remarqué, ne restreint pas la généralité, compte tenu du théorème de John et Zizler).

Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; on désigne par

$$D(f) = \{x \in X; f(x) < +\infty\}$$

le *domaine* de f et par

$$\text{epi } f = \Big\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} | f(x) \leq t\Big\}$$

son *épigraphe.*

Nous pouvons caractériser une fonction réelle par son épigraphe : f est semi-continue inférieurement, convexe et propre si epi f est fermé, convexe et non vide dans $X \times \mathbb{R}$.

On définit la *fonction conjuguée* f^* de f par :

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \Big\{\langle x, x^* \rangle - f(x)\Big\}.$$

Notons par $\Gamma_0(X)$ l'ensemble des fonctions convexes, semi continues inférieurement et propres. D'après un résultat classique d'analyse convexe, pour toute fonctionnelle $f \in \Gamma_0(X)$, alors $f^* \in \Gamma_0(X^*)$, et f est identique à sa biconjuguée f^{**}.

On appelle *sous-différentiel* de f en $x \in D(f)$, l'opérateur $\partial f \subset X \times X^*$, défini par

$$\begin{array}{ll} \partial f(x) = \Big\{x^* \in X^* | f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle \quad \forall y \in X\} & \text{si } x \in D(f) \\ \partial f(x) = \emptyset & \text{sinon.} \end{array}$$

De manière équivalente, $\partial f(x)$ peut être caractérisé en fonction de la conjuguée de f de la manière suivante :

$$\partial f(x) = \Big\{x^* \in X^* | f^*(x^*) + f(x) \;=\; \langle x, x^* \rangle\Big\}.$$

Il est facile de vérifier que ∂f est un opérateur monotone. Il est plus difficile de montrer que dans un espace de Banach général, ∂f est un opérateur maximal monotone. Ce résultat est dû à R. T. Rockafellar [38] et a été récemment redémontré de manière élégante par S. Simons [40].

Définition 3. Soit X un epace de Banach réflexif et strictement convexe et soit $f \in \Gamma_0(X)$. On note f_λ *l'approximée de Moreau-Yosida* de f; il s'agit de l'application définie par

$$f_\lambda(x) := \inf_{y \in X} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 \right\}.$$

Rappelons la relation importante liant le sous-différentiel de l'approximée de Moreau-Yosida de f à l'approximée Yosida du sous-différentiel de f :

$$\partial(f_\lambda) = (\partial f)_\lambda.$$

Définition 4. Rappelons à présent la définition de la convergence au sens de Mosco d'une suite de fonctions convexes ([32], Lemma 1.10). Cette convergence s'est avérée être une notion de grand intérêt dans les espaces de Banach réflexifs.

Nous dirons qu'une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma_0(X)$ converge au sens de Mosco vers f et on écrit $f_n \xrightarrow{M} f$, si pour tout $x \in X$

— il existe $\zeta_n \xrightarrow{s} x$ tel que $\limsup_{n \to +\infty} f_n(\zeta_n) \leq f(x)$,

— pour tout $x_n \xrightarrow{w} x$ on a $\liminf_{n \to +\infty} f_n(x_n) \geq f(x)$.

L'intérêt de cette convergence, pour l'optimisation et l'analyse variationnelle est qu'elle possède des propriétés remarquables que nous résumons dans la Proposition suivante :

Proposition 4. *Soient X un espace de Banach réflexif et $\{f_n, f | n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de fonctions dans $\Gamma_0(X)$. Alors*

1. $f_n \xrightarrow{M} f$ *dans* $\Gamma_0(X) \iff f_n^* \xrightarrow{M} f^*$ *dans* $\Gamma_0(X^*)$ *(Mosco,* 1971*);*
2. $f_n \xrightarrow{M} f \iff \partial f_n \xrightarrow{G} \partial f +$ *condition de normalisation (CN) (Attouch,* 1977*);*
3. $f_n \xrightarrow{M} f \iff \forall \lambda > 0, \forall x \in X \ \partial f_{n,\lambda}(x) \xrightarrow{s} \partial f_\lambda(x) + (CN)$,

$$\iff \exists \lambda_0 > 0, \forall x \in X \ \partial f_{n,\lambda_0}(x) \xrightarrow{s} \partial f_{\lambda_0}(x) + (CN).$$

La condition de normalisation (CN) signifie qu'il existe $(x, y) \in \partial f$ et $(x_n, y_n) \in \partial f_n$ tels que $x_n \xrightarrow{s} x, y_n \xrightarrow{s} y$ et $f_n(x_n) \to f(x)$.

Proposition 5. *Soient $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions dans $\Gamma_0(X)$ qui Mosco-épiconvergent respectivement vers ϕ et ψ. On suppose que les couples*

*$(\partial\phi_n, \partial\psi_n)$ satisfont la condition Brézis-Crandall-Pazy uniforme :
si $u_\lambda^n = (J + \partial\phi_n + \partial\psi_{n,\lambda})^{-1}(x^*)$ on a*

$$\limsup_{\substack{n\to+\infty\\ \lambda\to 0}} |\partial\psi_{n,\lambda}(u_\lambda^n)| < +\infty \text{ pour tout } x^* \in X^*. \tag{23}$$

Alors $\partial(\phi_n + \psi_n)$ converge au sens des graphes vers $\partial(\phi + \psi)$.

Si, en plus, la condition de normalisation pour $(\phi_n + \psi_n)$ est satisfaite, alors $\{\phi_n + \psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Mosco-épiconverge vers $\phi + \psi$.

P r e u v e. On remarquera que la condition de Brézis-Crandall-Pazy uniforme implique la maximalité de $\partial\phi_n + \partial\psi_n$ (Théorème 2). Par suite, comme $\partial(\phi_n + \psi_n)$ est un opérateur maximal monotone on a

$$\partial(\phi_n + \psi_n) = \partial\phi_n + \partial\psi_n.$$

Pour conclure, il suffit alors d'appliquer le Théorème 5 et la Proposition 4. □

Dans le Théorème 6, la condition de Brézis-Crandall-Pazy uniforme joue un rôle crucial. Nous allons donner dans ce qui suit un résultat où l'une des conditions récentes (voir [31]) sur la Mosco-épiconvergence d'une somme de fonctions convexes est une conséquence de cette condition uniforme.

Théorème 7. *Soit X un espace de Banach réflexif tel que X et X^* soient localement uniformément convexes. Soit $\{\varphi_n, \varphi, \psi_n, \psi | n \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble de $\Gamma_0(X)$ tel que $\varphi_n \xrightarrow{M} \varphi$ et $\psi_n \xrightarrow{M} \psi$. Supposons qu'il existe $x_0 \in D(\varphi)$, $\rho_0 > 0$, $M \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall u \in x_0 + \rho_0 U \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(u) \le M. \tag{24}$$

Alors la suite $\{\varphi_n + \psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Mosco-épiconverge vers $\varphi + \psi$.

P r e u v e. Elle est une conséquence du Théorème 6 (appliqué aux sous-différentiels) et de la Proposition 4. Elle se fait en plusieurs étapes.

Etape 1 : La suite $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-bornée sur $\mathcal{U} = x_0 + \rho_0 U$:

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \quad m \le \varphi_n(u) \le M \quad \text{sur } \mathcal{U}. \tag{25}$$

P r e u v e d e l'é t a p e 1. Fixons pour cela $u \in \rho_0 U$. Par convexité de φ_n on a :

$$\varphi_n(x_0) = \varphi_n(\frac{1}{2}(x_0 + u) + \frac{1}{2}(x_0 - u)) \le \frac{1}{2}(\varphi_n(x_0 + u) + \varphi_n(x_0 - u)).$$

Par suite,

$$\varphi_n(x_0 + u) \ge 2\varphi_n(x_0) - \varphi_n(x_0 - u).$$

Comme $\liminf_{n\to+\infty} \varphi_n(x_0) \geq \varphi(x_0)$, on peut trouver un réel L tel que $\varphi_n(x_0) \geq L$ pour tout n. Par conséquent,

$$\varphi_n(x_0+u) \geq 2\varphi_n(x_0) - \varphi_n(x_0-u) \geq 2L - M = m;$$

ce qui donne (25).

Etape 2 : Soit f une fonction convexe telle que

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{pour tout } \; x \in x_0 + \rho_0 U.$$

Alors, f est Lipschitzienne sur $x_0 + \left(\frac{\rho_0}{2}\right) U$ avec une constante de Lipschitz égale à $\frac{2(M-n)}{\rho_0}$. En particulier,

$$\partial f(x) \subset \left[\frac{2(M-n)}{\rho_0}\right] U \quad \text{pour tout} \quad x \in x_0 + \left(\frac{\rho_0}{2}\right) U.$$

Preuve de l'étape 2. Soit $u_i \in x_0 + \rho_0 U$ pour $i = 1, 2$. Posons $t = |u_2 - u_1|$, alors $v = u_2 + \frac{\rho_0}{2t}\Big(u_2 - u_1\Big) \in x_0 + \frac{1}{2}\rho_0 U$. Puisque $u_2 = sv + (1-s)u_1$, si $s = \frac{2t}{2t+\rho_0}$, on déduit de l'étape 1 et de la convexité de φ_n que

$$\varphi_n(u_2) - \varphi_n(u_1) \leq s(\varphi_n(v) - \varphi_n(u_1)) \leq s(M-m) \leq \frac{2(M-m)}{\rho_0}|u_2 - u_1|.$$

u_1 et u_2 jouant un rôle symétrique, pour tout $n \geq n_0$ on a donc

$$|\varphi_n(u_2) - \varphi_n(u_1)| \leq \frac{2(M-m)}{\rho_0}|u_2 - u_1|.$$

L'inclusion

$$\partial f(x) \subset \left[\frac{2(M-n)}{\rho_0}\right] U \quad \text{pour tout} \quad x \in x_0 + \left(\frac{\rho_0}{2}\right) U.$$

est bien connue et résulte de la définition même de la sous-différentiabilité. En combinant (24) et le fait que $\operatorname{Int} D(\varphi_n) = \operatorname{Int} D(\partial\varphi_n)$ ([15], Prop. 2.5), et en utilisant le Théorème 6, on en déduit que $\partial\varphi_n + \partial\psi_n = \partial(\varphi_n + \psi_n)$ converge au sens des graphes vers $\partial\varphi + \partial\psi = \partial(\varphi + \psi)$. Pour conclure que la suite $\{\varphi_n + \psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Mosco-épiconverge vers $\varphi + \psi$, la Proposition 4, b) nous impose une condition de normalisation.

Soit $\varepsilon > 0$ donné; d'après le Théorème de Brøndsted et Rockafellar, $D(\partial(\varphi+\psi))$ est dense dans $D(\varphi + \psi)$ et par suite, soit $u_0 \in D(\partial(\varphi + \psi))$ tel que

$$|x_0 - u_0| < \varepsilon \;\text{ et }\; y_0 \in \partial(\varphi + \psi)(u_0).$$

Alors, il existe

$$(u_n, y_n) \in \partial(\varphi_n + \psi_n) \text{ tel que } u_n \xrightarrow{s} u_0, y_n \xrightarrow{s} y_0.$$

Etape 3 : On a $\lim\limits_{n\to\infty} (\varphi_n + \psi_n)(u_n) = (\varphi + \psi)(u_0)$.

P r e u v e d e l'é t a p e 3. Il est clair que

$$\liminf_{n\to+\infty} (\varphi_n + \psi_n)(u_n) \ \geq \ \liminf_{n\to\infty} \varphi_n(u_n) + \liminf_{n\to+\infty} \psi_n(u_n) \geq \varphi(u_0) + \psi(u_0).$$

Pour l'autre inégalité revenons à $y_n \in \partial(\varphi_n + \psi_n)(u_n)$.
Puisque $\varphi = M - \lim \varphi_n$ et $\psi = M - \lim \psi_n$, il existe alors $x_n \xrightarrow{s} u_0$ et $\overline{x}_n \xrightarrow{s} u_0$ tels que

$$\limsup_{n\to+\infty} \varphi_n(\overline{x}_n) \leq \varphi(u_0), \qquad \limsup_{n\to+\infty} \psi_n(x_n) \leq \psi(u_0)$$

et

$$(\varphi_n + \psi_n)(u_n) \leq \varphi_n(x_n) + \psi_n(x_n) + \langle y_n, u_n - x_n \rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to+\infty} (\varphi_n + \psi_n)(u_n) \ &\leq \ \limsup_{n\to+\infty} \varphi_n(x_n) + \limsup_{n\to+\infty} \psi_n(x_n) \\ &\leq \ \limsup_{n\to+\infty} \varphi_n(x_n) + \psi(u_0) \end{aligned}$$

De l'étape 2, pour n suffisamment grand de telle sorte que

$$|\overline{x}_n - u_0| < r_0 \text{ et } |x_n - u_0| < r_0,$$

on déduit

$$\varphi_n(x_n) \leq \Big(\varphi_n(x_n) - \varphi_n(\overline{x}_n)\Big) + \varphi_n(\overline{x}_n) \leq \varphi_n(\overline{x}_n) + \frac{M-m}{r_0}|x_n - \overline{x}_n|.$$

Passant à la limite supérieure on obtient :

$$\limsup_{n\to+\infty} \varphi_n(x_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} \varphi_n(\overline{x}_n) \leq \varphi(u_0).$$

On déduit que $\limsup\limits_{n\to+\infty} (\varphi_n + \psi_n)(u_n) \ \leq \ \varphi(u_0) + \psi(u_0)$; ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

Corollaire 3. *Soit X un espace de Banach réflexif. Soit $\{\varphi_n, \psi_n, \varphi, \psi | n \in \mathbb{N}\}$ une famille de $\Gamma_0(X)$ telle que $\varphi_n \xrightarrow{M} \varphi$ et ψ est continue en un point de son domaine. Alors la suite $\{\varphi_n + \psi\}_{n\in\mathbb{N}}$ Mosco-épiconverge vers $\varphi + \psi$.*

P r e u v e. La continuité de ψ en $x_0 \in \mathrm{Dom}\ \psi$ reste vérifiée lorsqu'on renorme X de façon à ce qu'il soit uniformément convexe ainsi que son dual. Il suffit par suite de remarquer que la condition (24) est satisfaite au point $x_0 \in \mathrm{Dom}\ \psi$. $\square$

Remerciements. Les auteurs tiennent à remercier le rapporteur anonyme qui a porté à leur connaissance la référence [42] et leur a fourni de nombreuses remarques, ainsi que le professeur S. Simons pour ses suggestions concernant le Corollaire 1 [41].

RÉFÉRENCES

[1] H. Attouch. E.D.P associées à des sous-différentiels. Thèse d'Etat, Paris VI, 1976.

[2] H. Attouch. On the maximality of the sum of two maximal monotone operators. *Nonlinear Anal., T. M. A.* **5**, *2* (1981), 143-147.

[3] H. Attouch. Variational Convergence for Functions and Operators. Maths. Series, Pitman, London, 1984.

[4] H. Attouch, J.-B. Baillon and M. Théra. Somme variationnelle d'opérateurs maximaux monotones. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **317** (1993), 485-490.

[5] H. Attouch, J.-B. Baillon and M. Théra. Sum of maximal monotone operators revisited. The variational sum. *J. Convex Analysis* **1**, *1* (1994), 1-25.

[6] H. Attouch, J.-B. Baillon and M. Théra. Weak solutions of evolution equations and variational sum of maximal operators. *S.E.A, Bulletin Math.* **19** (1995), 117-126.

[7] H. Attouch and H. Brézis. Duality for the Sum of Convex Functions in General Banach Spaces, Aspects of Math. and its Applications. J. Barroso, Elsevier Science, Amsterdam, 1986, 125-133.

[8] H. Attouch, Z. Chbani and A. Moudafi. Recession operators and solvability of variational problems. Preprint Laboratoire d'Analyse Convexe, Université de Montpellier II, 1993.

[9] H. Attouch, A. Moufadi and H. Riahi. Quantitative stability analysis for maximal monotone operators and semigroups of contration. *Nonlinear Analysis, T. M. A.* **21**, *9* (1993), 697-723.

[10] H. Attouch, J. L. Ndoutoume and M. Théra. Epigraphical convergence of functions and convergence of their derivatives in Banach spaces. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, vol. **20**, 1990, exp. n^o 09, pp. 9.1-9.45.

[11] H. Attouch and M. Théra. A general duality principle for the sum of two operators, (à paraître dans *J. Convex Analysis*).

[12] H. Attouch and M. Théra. Convergences en analyse multivoque et variationnelle. *MATAPLI* **36** (1993), 22-39.

[13] J.-P. Aubin. L'Analyse Non-linéaire et ses Motivations Economiques. Masson, Paris 1984.

[14] D. Azé and J.-P. Penot. Operations on convergent families of sets and functions. *Optimization* **21**, *4* (1990), 521-534.

[15] V. Barbu. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces. Nordhoff International Publishing, Leyden The Netherlands, 1976.

[16] G. A. Beer. Topologies on Closed and Closed Convex Sets, Kluwer, 1993.

[17] P. Bénilan, M. Crandall and A. Pazy. Evolution Equations Governed by Accretive Operators, (livre à paraître).

[18] J. M. Borwein. A note on ε-subgradients and maximal monotonicity. *Pacific J. Math.* **103** (1982), 307-314.

[19] J. M. Borwein and S. Fitzpatrick. Local boundedness of monotone operators under minimal hypotheses. *Bull. Austral. Math. Soc.* **39** (1988), 439-441.

[20] H. Brézis. Opérateurs maximaux monotones et semi groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North Holland, 1973.

[21] H. Brézis, M. Crandall and A. Pazy. Perturbations of nonlinear maximal monotone sets. *Comm. Pure Appl. Math.* **23** (1970), 123-144.

[22] K. Deimling. Nonlinear Functional Analysis. Springer-Verlag, 1985.

[23] J. Diestel. Geometry of Banach space, Selected Topics. *Lecture Notes in Math.* **485**, Springer-Verlag, 1975.

[24] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler. Renorming and Smoothness in Banach Spaces. Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math., Longman, 1993.

[25] I. Ekeland and R. Temam. Analyse Convexe et Problèmes Variationnels. Etudes Mathématiques, Gauthier-Villars, 1974.

[26] S. Fitzpatrick and R. R. Phelps. Bounded approximants to monotone operator on Banach spaces. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **9** (1992), 573-595.

[27] J.-P. Gossez. Opérateurs monotones non linéaires dans les espaces de Banach non réflexifs. *J. Math. Anal. Appl.* **34** (1971), 371-395.

[28] E. Krauss. A representation of maximal monotone operator by saddle functions. *Rev. Roumaine Math. Pure Appl.* **30** (1985), 823-837.

[29] K. John and V. Zizler. A renorming of a dual space. *Israel J. Math.* **12** (1972), 331-336.

[30] P. L. Lions. Two remarks on the convergence of convex functions. *Nonlinear Anal. T. M. A.* **2**, *5* (1978), 553-562.

[31] J. Lahrache. Stabilité et convergence dans les espaces non réflexifs. Séminaires d'Analyse Convexe, Montpellier II, vol. **21**, 1991, exp. n^o 10, pp. 10.1-10.50.

[32] U. Mosco. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequality. *Adv. Math.* **3** (1969), 510-585.

[33] R. R. Phelps. Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability. Lect. Notes in Math. vol. **1364**, Springer-Verlag 1989, Second Edition 1993.

[34] R. R. Phelps. Lectures on maximal monotone operators. 2nd Summer School on Banach Spaces, Related Areas and Applications, Prague and Paseky, August 15–28, 1993. (Preprint, 30 pages.) TeX file: phelpsmaxmonop.tex, Banach space bulletin board archive: ftp.math.okstate.edu. Posted Nov. 1993.

[35] H. Riahi. On the maximality of the sum of two maximal monotone operators. *Publ. Math.* **34** (1990), 269-271.

[36] H. Riahi. Graph-convergence of the sum of maximal monotone operators, preprint.

[37] H. Riahi. Thèse d'Etat, Université Mohammed V, Rabat, 1993.

[38] R. T. Rockafellar. On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. *Pacific J. Math.* **44** (1970), 209-216.

[39] R. T. Rockafellar. On the maximality of sums of nonlinear monotone operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* **149** (1970), 75-88.

[40] S. Simons. The least slope of a convex function and the maximal monotonicity of its subdifferential. *J. Optim. Theory Appl.* **71**, *1* (1991), 127-136.

[41] S. Simons. Communication personnelle.

[42] L. Veselý. Local uniform boundedness priciple for families of ε-monotone operators. *Nonlinear Anal., T. M. A.* **24**, (1993), 1299-1304.

[43] E. Zeidler. Nonlinear Functional Analysis and its Applications, vol. II/B. Nonlinear Monotone Operators, Springer-Verlag, 1990.

H. Attouch
Université Montpellier II
67085 Montpellier Cedex
France
e-mail: attouch@math.univ.montp2.fr

H. Riahi
Université Cadi Ayyad, BP. S 15
Faculté des Sciences, Mathématiques
40000 Marrakech, Maroc

M. Théra
URA-CNRS 1586
Université de Limoges
87060 Limoges Cedex
France
e-mail: thera@cict.fr

Received September 25, 1995
Revised February 7, 1996