PRINCIPIOS DE MATEMATICA DE LA REAL ACADEMIA DE SAN FERNANDO

POR DON BENITO BAILS.

SEGUNDA EDICION AÑADIDA.

TOMO I.

MADRID.
EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE IBARRA.
MDCCLXXXVIII.

PROLOGO.

Es tanto lo que he mudado y añadido á estos principios, que, conforme salen hoy dia á luz, mas deben llamarse obra nueva, que no segunda edicion de la primera. Su destino, los fines de la Academia que hace la costa, el favor de algunos inteligentes, preguntas de varios aficionados, doctrinas nuevas que han llegado á mi noticia, miras que algun dia cumpliré; todo me ha estimulado á darles quanta perfeccion podia en el corto tiempo que he tenido para su impresion.

Aun quando me ciñera á decir que por las alteraciones hechas en los diferentes tratados del tomo I. ha sido preciso dividirle en dos, podria el Público con esta noticia formar á vulto juicio de mi trabajo; pero por ella no sabrian los Principiantes quáles son

los

los puntos alterados ó añadidos, ni tampoco la calidad de los asuntos que ofrezco á su aplicacion. Tengo por oportuno especificarlos, y no los cansaré: voy á ceñirme á los principales; el índice bastante individual me proporciona ser muy corto.

De las adiciones, de las mejoras hechas á la Aritmética, la principal es la declaracion de la Teórica y Práctica de los logaritmos. Es esta una doctrina de mucha importancia por transcendental á todos los ramos de la Matemática; y sus fundamentos bien declarados facilitan no poco la inteligencia de remontadas investigaciones en que se han exercitado Escritores muy afamados de este siglo.

La Geometría Práctica es de todo punto nueva. Sírvele de preliminar la descripcion, y usos de los instrumentos que suele haber en los estuches de Matemática mas cabales. Cabales, se hallan aquí pocos; los instrumentos

tos de los mas, la Pantómetra (a) sobre todo, son toscos é imperfectos. Los mercaderes que los traen de fuera del Reyno hacen con

(a) Una Pantómetra tienen los Ingleses, llamada por ellos *Gunners Callipers*, que varias veces he encargado en Londres, y he recibido dos no mas, ambas diminutas aun en caxa remitida por el famoso fabricante Adams. Es instrumento que ha de tener por lo menos 9 pulgadas inglesas de largo y 2 de ancho; sirve para

1.° Valuar en pulgadas los diámetros de las superficies convexâs de los cuerpos; 2.° los diámetros de las superficies cóncavas; 3.° saber el peso de las balas de artillería de hierro de diámetro conocido; 4.° el peso de las balas para cañones de calibre señalado; 5.° medir ángulos; 6.° reducir unas á otras las libras de peso inglesas, llamadas *aves du pois* y de *Troy*; 7.° unos á otros los pies Ingleses y Franceses; 8.° medir figuras circulares y cuerpos esféricos; 9.° averiguar el peso de los cuerpos; 10.° señalar la pólvora necesaria para cargar las piezas de artillería; 11.° Contar las balas que hay en una pila de forma conocida; 12.° resolver cuestiones concernientes á la caida de los cuerpos; 13.° á sacar agua con hombres ó caballerías; 14.° á disparar morteros ó cañones; 15.° tiene lineas de pulgadas; 16.° todas las escalas logarítmicas; 17.° linea de partes iguales; 18.° de planos; 19.° de sólidos.

con este género lo que con todos; piden lo que venden, no lo mejor, ni acaso lo bueno. El Matemático, el aficionado que quiera un estuche de Matemáticas que le sirva, no debe regatear su precio; y es alhaja que bien merece encargarse con tanto cuidado como un puño de espadin, ó una cadena de relox.

IN-

INDICE
DEL TOMO I.

Va-

Prin-

Re-

Es-

Ad-

ERRATAS.

Pág.	*Lin.*	*Dice.*	*Léase.*
3	2	*las*	los
12	3	*siguientes*	siguiente
16	16	*un*	este
33	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{3}$
38	30	57	53
39	21	104	114
41	28	108	104
62	15	*por* 2	por 4
63	33	*entero por un quebrado*	quebrado por un entero
70	9	$\frac{1}{5+\frac{17}{10}}$	$\frac{1}{5+\frac{42}{100}}$
76	17	10003	1003
126	21	331 *&c*	131 &c.
127	3	14	12
131	última	*por partido*	partido por
134	32	*Razon*	proporcion
154	10	*proporcion*	progresion
156	8	$8\frac{4}{9}$. $10\frac{2}{9}$. 11	$8\frac{6}{9}$. $9\frac{4}{9}$. $10\frac{2}{9}$. 11
167	10	*el último y el exponente*	el exponente y el número de términos
191	1	$\frac{17}{157}$	$\frac{17}{187}$
191	2	1, 230549	1, 230449
191	8	$1\frac{3}{2}$	$1\frac{1}{3}$
208	33	35	37
208	última	35	37
209	28	*póngase 9 á la márgen*	
212	última	*cantidades*	mitades
214	24	( )	(328)
215	7	*arco*	ángulo
215	33	9	90
217	32	*DAF*	BAF

219	8 y 22	*póngase á la márgen 18*	
221	33	*los de*	desde
225	5	35 *á la márgen.*	*ha de ser* 25
226	14	*EB*	DE
232	28	*desde el centro*	*bórrese.*
251	28	*lados*	ángulos
256	7	*polígono*	polígono regular
270	31	60	20
272	15	*contrato*	contacto
273	25	*curva*	plana
279	19	*un plano*	en plano
286	32	*lados*	todos
288	márgen	122	222
292	9	*planos*	planos AP, QB
308	27 y 28	*conino*	cónica
334	12 y 13	1 1, 4707653 1	1 1, 4707653 1
349	5	*pie*	pic
365	32	*á otro*	ú otro
382	18	*y esta distancia.*	y la distancia transversal correspondiente
386	21	240	140.

PRIN-

PRINCIPIOS DE ARISMÉTICA.

Declárանse la naturaleza de los números, y sus diferentes especies.

1 LLámase, en general, *cantidad* todo lo que sufre aumento ó diminucion, ó todo lo que puede ser mayor ó menor, como la extension, la duracion, el peso, &c. La cantidad es el objeto de las Matemáticas; pero como estas consideran la cantidad expresada de varios modos, nacen de aquí los diferentes ramos de que se compone esta ciencia; llamándose *Arismética* ó *Aritmética* el ramo que considera la cantidad expresada con números.

2 Es, pues, la Arismética la ciencia de los números: considera su naturaleza, sus propiedades, y suministra medios fáciles, así para expresarlos, como para componerlos ó resolverlos, y esto es lo que llamamos *calcular.*

No es posible explicar ni entender que cosa es número, sin declarar ó saber primero que cosa es *unidad.*

3 Unidad llamamos una cantidad que se toma ó elige (las mas veces á arbitrio) para que sirva de término de comparacion respecto de todas las cantidades de su misma especie; quando decimos v. g. de un cuerpo que pesa cinco libras, la libra es la unidad, quiero decir la cantidad con la qual comparamos el peso de dicho cuerpo: hubiéramos podido tomar igualmente la onza por unidad, en cuyo caso *ochenta* hubiera expresado el peso del cuerpo propuesto; porque, segun se verá mas adelante, cinco libras componen ochenta onzas.

4 Expresa por consiguiente el *número de quantas* unidades ó partes de la unidad se compone una cantidad propuesta.

5 Si una cantidad consta de unidades enteras, el número que la expresa se llama *número entero*; si se compone de unidades enteras y partes de la unidad, se llama *número fraccionario*: y si se compone solamente de partes de la unidad, se llama *fraccion* ó *quebrado*: *tres y medio* es número fraccionario; *tres quartos* es número quebrado.

6 Llamamos *número abstracto* todo número que expresa unidades sin decir de que especie son, v. g. *tres*, ó *tres veces*, *quatro*, ó *quatro veces* son *números abstractos*; pero si el número dice tambien de que especie son las unidades que expresa, como quando decimos quatro pesos, seis hombres, el número se llama *concreto*.

De la Numeracion.

7 Si á la unidad añadimos otra unidad, saldrá el número que llamamos *dos*, y compondremos los números siguientes *tres*, *quatro*, *cinco* &c. con añadir mas unidades á los números formados. Y como se pueden añadir hasta el infinito unidades unas á otras, es patente que puede haber una infinidad de números posibles todos diferentes: por consiguiente si cada número se hubiese de expresar con una figura ó caracter particular, serian infinitas en número estas figuras, y apenas bastaría la vida de un hombre para enseñarse á contar hasta veinte mil.

Fué, pues, preciso desde los principios buscar un modo de expresar todos los números posibles con un corto número de figuras ó caracteres, y en esto consiste el arte de la numeracion.

8 Los caracteres que sirven en la numeracion que

seguimos, y los nombres de los números que representan son los siguientes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cero	uno	dos	tres	quatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve

Para expresar con estas pocas figuras todos los números, se han convenido los Arisméticos en reducir diez unidades á sola una, que llaman *decena*; en contar por decenas del mismo modo que por unidades, esto es, en contar una decena, dos decenas, tres decenas &c. hasta nueve; y en servirse para representar estas nuevas unidades de los mismos guarismos con que pintan las unidades simples, pero distinguiéndolas por el lugar donde se asientan, á cuyo fin las ponen al lado de las unidades simples ácia la izquierda.

En virtud de esto, para representar *cinquenta y quatro*, que se compone de cinco decenas y quatro unidades, se escribe 54; para pintar *sesenta*, que se compone de un número cabal de decenas sin unidad alguna, escriben 60, poniendo un cero á la derecha del 6; lo que da á entender que no hay unidades simples, y hace que el guarismo 6 represente decenas. A este modo se puede contar hasta *noventa y nueve* inclusive.

9 Adviértase de paso una propiedad de la numeracion actual, y es que un guarismo puesto al lado izquierdo de otro, ó al lado izquierdo de un cero, expresa un número diez veces mayor que si estuviera solo.

10 Siguiendo el mismo sistema ó método, desde 99 se puede contar hasta novecientos noventa y nueve. Con diez decenas se compone una sola unidad llamada *centena* ó *centenar*, porque diez veces diez

diez son ciento; se cuentan estos centenares desde uno hasta nueve, y se representan con los mismos guarismos, pero colocándolos al lado izquierdo de las decenas.

En virtud de esto, para pintar *ochocientos cincuenta y nueve*, cuyo número se compone de ocho centenares, cinco decenas, y nueve unidades, se escribe 859. Si quisiéramos pintar *ochocientos y nueve*, cuyo número se compone de ocho centenares, ninguna decena, y nueve unidades, escribiríamos 809, quiero decir que pondríamos un cero en lugar de las decenas que no hay. Si tampoco hubiese unidades, pondríamos dos ceros, de modo que *ochocientos* se ha de escribir así 800.

11 Las ochocientas y nueve unidades se escriben de este modo 809, poniendo un cero en lugar de las decenas que faltan; porque si el que quiere pintar ochocientos y nueve, no pusiese figura alguna en lugar de las decenas que faltan, escribiría 89, donde el guarismo 8 expresa decenas (10) y no centenares, como debe; luego para que el 8 exprese centenares, ó valga ochocientos, ha de haber un cero entre el 8 y el 9. Esta consideracion se aplica á todos los casos parecidos al que acabamos de proponer.

12 De lo dicho hasta aquí se sigue, que un guarismo al qual se siguen otros dos, ó dos ceros, representa un número cien veces mayor que si estuviera solo.

13 Desde *novecientos noventa y nueve* contamos, siguiendo el mismo sistema, hasta *nueve mil novecientos noventa y nueve*, para lo qual juntamos unos con otros diez centenares, que componen la unidad llamada *mil* ó *millar*, porque diez veces ciento son mil, contando estas unidades como las otras, y figurándolas con los mismos guarismos puestos al lado izquierdo de los centenares.

14 *Siete mil ochocientos cinquenta y nueve* se escribe así 7859; *siete mil y nueve* deste modo 7009, *y siete mil* de estotro 7000: por donde se ve que un guarismo al qual se siguen otros tres ó tres ceros, vale mil veces mas que si estuviera solo.

Siguiendo constantemente el sistema de juntar diez unidades de cierta órden en sola una, y de colocar las nuevas unidades que de aquí se originan en lugares tanto mas adelantados ácia la izquierda, quanto mayor sea su órden, se pueden expresar, y expresamos con efecto todos los números enteros imaginables.

15 El que esté hecho cargo de lo dicho hasta aquí, entenderá con suma facilidad como se leen los números compuestos de muchos guarismos, por grandes que sean, v. g. el siguiente.

4 centenas de bicuentos
3 decenas de bicuentos
8 bicuentos
7 decenas de millar de cuentos
6 millares de cuentos
5 centenas de cuentos
4 decenas de cuentos
3 cuentos ó millones
8 centenas de millares
7 decenas de millares
6 millares
5 centenas
4 decenas
3 unidades

Se divide ó distingue el número propuesto, empezando por la derecha, en rebanadas ó periodos de seis guarismos, figuras ó caractéres cada una, que llamarémos *periodos mayores*. El primer periodo á mano derecha expresa unidades, el segundo cuentos ó millones, el tercero bicuentos, el quarto tricuentos, &c.

Cada periodo mayor se divide en dos menores de tres figuras cada uno; de modo que se escriben, ó suponen escritas las unidades en su primer guarismo á mano derecha, las decenas en el segundo, y los centenares en el tercero.

Se empieza leyendo por la izquierda, nombrando los centenares, decenas y unidades, cada una en su respectivo lugar donde estan las figuras que las expresan; al fin de cada primer periodo menor se pronuncia mil, y al fin del segundo, donde acaba el periodo mayor, se expresa el nombre que va señalado encima de su última figura.

Para leer, pues, el número 50765 que no tiene mas de cinco figuras, faltándole una para componer un periodo mayor, se le dividirá en dos periodos menores, empezando por la derecha, del mismo modo que si hubiera seis figuras, con lo que el periodo menor de la izquierda no tiene mas que dos guarismos, escribiendo *u* sobre las unidades, *d* sobre las decenas, y *c* sobre los centenares, en esta forma

du cdu
50 765

y dirémos cinquenta mil setecientas sesenta y cinco unidades.

Si el número propuesto fuese 350765, pondríamos

cdu cdu
350 765

y leeríamos trescientas cinquenta mil setecientas sesenta y cinco unidades.

Se me propone para que le lea el número.... 43876543876543; despues de dividirle conforme á lo enseñado, y aquí se ve

di-

du cdu cdu
43 876 543 876 543

digo quarenta y tres bicuentos, ochocientos setenta y seis mil, quinientos quarenta y tres cuentos, ochocientas setenta y seis mil, quinientas quarenta y tres unidades.

El número 2418579643219004613254768096 se escribirá y leerá como sigue,

cdu cdu cdu cdu cdu
2418 579643 219004 613254 768096

dos mil quatrocientos diez y ocho quatricuentos, quinientos setenta y nueve mil seiscientos quarenta y tres tricuentos,
doscientos diez y nueve mil y quatro bicuentos,
seiscientos trece mil doscientos cinquenta y quatro cuentos,
setecientos sesenta y ocho mil, y noventa y seis.

16 Del método ó sistema de numeracion que acabamos de declarar, y que por lo dicho (8) es de puro convenio, se infiere que yendo de la derecha á la izquierda, las unidades de que consta cada guarismo van siendo diez veces mayores; y que por consiguiente para hacer que un número sea diez veces, cien veces, mil veces &c. mayor, basta poner á continuacion del guarismo de sus unidades uno, dos, tres &c. ceros: al contrario, retrocediendo de la izquierda á la derecha, las unidades van siendo diez veces menores.

Esta numeracion es el fundamento de todos los demas modos de contar; bien que no todas las artes siguen siempre el método de contar solo por decenas, por decenas de decenas &c.

17 Siempre que hay empeño de determinar cada-

bales las diferentes especies de cantidades, es preciso, para facilitar el trato, subdividir las medidas principales de cada especie en otras menores, y estas en otras todavía menores, hasta llegar á subdivisiones tan pequeñas que puedan despreciarse en las cuentas prácticas. El que considere con cuidado las diferentes medidas que usamos, ya de pesos, ya de monedas, &c. pensará que son efecto de la casualidad sus subdivisiones. Pero si lo reflexíona con madurez echará de ver que cada una de ellas puede considerarse como otro sistema de numeracion; de donde se sigue que pues todo sistema es arbitrario, hubiera sido mas puesto en razon y mas acomodado seguir en las subdivisiones de las medidas el sistema de la numeracion actual de la progresion decupla, con lo que se hubieran escusado los quebrados y las operaciones hubieran sido mucho mas sencillas. Aunque no está en nuestra mano mudar las medidas, enseñarémos en adelante como todas las subdivisiones de nuestras medidas se pueden arreglar por el sistema de numeracion declarado.

18 En el cálculo de las cantidades, de qualquier modo que vengan expresadas, y por consiguiente en el cálculo de los números, se usan ciertos signos que sobre abreviar sus expresiones, indican las operaciones hechas ya ó por hacer. Explicarémos aquí los principales, dexando el dar á conocer los demas para quando declarémos los modos de calcular donde es estilo, y trahe conveniencia usarlos.

Las primeras operaciones que con los números se hacen son 1.° buscar uno que exprese el valor de muchos; 2.° restar de un número dado otro menor para saber que exceso lleva aquel á este. El signo con que señalamos el valor de dos ó mas números juntos es +, que se pronuncia *mas*: 3+4 v. g. se lee tres mas quatro, y está diciendo que el valor de 3 se junta con el de 4.

El signo con que señalamos que un número se resta de otro, ó la diferencia que hay entre los dos es —, y se pronuncia *menos*; 4—3, v. g. se lee 4 menos 3, y está diciendo que del 4 se ha rebajado ó debe rebajar el 3.

Para expresar el resultado final de todo cálculo se usa este signo = que se pronuncia *vale* ó es *igual* á; como 7 es lo que resulta de juntar 3 con 4, escribimos 3+4=7. Por ser 1 lo que queda ó resta despues de rebajar 3 de 4, escribimos 4—3=1; y decimos 4 menos 3 vale 1, ó es igual á 1.

Reglas de la Arismética.

19 El objeto de la Arismética es, segun llevamos dicho, dar reglas para calcular con facilidad los números, procurando reducir el cálculo de los números mas complicados al cálculo de los números mas sencillos, ó expresados con el menor número posible de figuras.

Las operaciones con que consigue esta ciencia su fin no son mas que dos, hablando con propiedad, y segun dexamos insinuado poco ha (18); pero contamos comunmente quatro, que son *sumar*, *restar*, *multiplicar* y *partir*, ó con otros nombres, *adicion*, *sustraccion*, *multiplicacion* y *division*.

Explicarémos como se practican estas quatro reglas primero con enteros, y despues con quebrados.

Adicion de los números enteros.

20 Quando se calculan muchos números con el fin de expresar con uno solo el valor de todos, la operacion se llama Adicion.

Los

Quando los números por sumar tienen solo un guarismo, no se necesita regla alguna para sacar su *suma*; pero si tienen muchos guarismos, se halla su suma prácticando la regla siguiente.

21 Escríbanse unos encima de otros todos los números por sumar, de modo que las unidades de todos esten en una misma linea de arriba abajo que llamarémos *columna*; lo propio digo de sus decenas, centenares &c. y tírese por debajo de todas las partidas escritas con este cuidado una linea.

Júntense primero unos con otros todos los valores de los números que ocupan la columna de las unidades: si la suma no pasa de 9, póngase debajo; si pasa de 9, tendrá decenas: escríbase debajo lo que hubiere ademas de las decenas; cuéntense las decenas que hubiere por otras tantas unidades, y júntense con los números de la columna inmediata: practíquese con los números de la segunda columna la misma regla que con los de la primera, y váyase prosiguiendo al mismo tenor de columna en columna hasta la última, debajo de la qual se escribirá la suma conforme saliere. Con los exemplos aclararémos esta regla.

22 Quiero saber qual es el valor de 54925+2023. Para sumar estos dos números los escribo como aquí se ve.

	54925
	2023
suma.......	56948

y despues de tirada la linea, empiezo por las unidades, diciendo: 5 y 3 son 8, pongo 8 debajo de la columna de las unidades. Paso á la columna de las decenas, y digo: 2 y 2 son 4, pongo, pues, 4 debajo. En la columna de los centenares digo: 9 y 0 son 9, escribo, pues, 9 debajo. En la columna de los millares, digo: 4 y 2 son 6, escribo, pues, 6 debajo de dicha columna. Finalmente, en la columna de las decenas de millar, digo: 5 y nada son 5, y escribo igualmente 5 debajo.

El número 56948 que saco por esta operacion es la suma de los dos números propuestos; porque se compone de las unidades, decenas, centenares y millares de ambos, que hemos ido juntando succesivamente unos con otros. Luego 54925+2023=56948.

23 Se me pide la suma de los quatro números siguientes 6903, 7854, 953, 7327.

Escríbolos como se ve,	6903
	7854
	953
	7327
suma.....	23037

Empezando como antes por la derecha, digo: 3 y 4 son 7, y 3 son 10, y 7 son 17; escribo las siete unidades debajo de la primer columna, y llevo la decena para añadirla como unidad á los números de la columna siguiente, que tambien expresan decenas.

Pasando á la segunda columna, digo: 1 que llevo y 0 son 1, y 5 son 6, y 5 son 11, y 2 son 13; pongo 3 debajo de esta columna, y en lugar de la decena, llevo una unidad que agrego á la columna inmediata, diciendo: 1 que llevo y 9 son 10, y 8 son 18, y 9 son 27, y 3 son 30; pongo 0 debajo de esta columna, y en lugar de las tres decenas, llevo tres unidades, que agrego á la columna siguiente diciendo igualmente: 3 que llevo y 6 son 9, y 7 son 16, y 7 son 23; pongo 3 debajo de esta columlumna; y como no se sigue otra, escribo mas adelante las dos decenas que me tocaria agregar á la columna siguiente si la hubiese. El número 23037 que saco manifiesta que 6903+7854+953+7327=23037.

24 Son á veces tantas las partidas por sumar, que es fácil equivocarse siguiendo al pie de la letra la regla dada. Entónces se dividen todas en tres partes v. g. se saca la suma de cada division, y se suman despues las tres sumas. Para sumar las doce partidas aquí puestas, las divido como

```
34567
62034
91502         235338
47235         220882
-----         259502
32180         ------
72467    ...  715722
87310
28925
-----
20074
97463
91089
50876
```

aquí se ve; saco la suma de cada division, asiento las tres sumas, y sumándolas todas tres sale 715722, suma de todas las doce partidas.

Sustraccion de los Números enteros.

25 La Sustraccion es una operacion en la qual se resta un número de otro. El resultado de cuya operacion se llama *resta*, *exceso* ó *diferencia*.

Pa-

26 Para practicar esta operacion, se escribe el número que se quiere restar debajo del otro, del mismo modo que si se hubieran de sumar; y tirando una linea, se quita yendo de la derecha á la izquierda cada número inferior del superior correspondiente, esto es, las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, &c. Se escribe cada resta debajo por el mismo órden, y cero quando no resta nada.

Quando el guarismo inferior es mayor que su correspondiente superior, se le añaden á este diez unidades, sacándolas con el pensamiento de su inmediato á la izquierda, el qual por esta razon se considera como una unidad menor, conforme se verá en el segundo exemplo, señalando con un punto el guarismo del qual se toma la decena.

27 Para restar 5432 de 8954, ó saber quanto vale 8954—5432, escribo las dos partidas como sigue,

```
             8954
             5432
             ----
resta......  3522
```

y empezando por las unidades, digo: si quito ó rebajo dos de 4, resta 2 que pongo debajo; pasando despues á las decenas, digo: si quito 3 de 5, resta 2 que pongo debajo de las decenas. Llegando á la tercer columna, digo: si quito 4 de 9, resta 5, póngole debajo de la misma columna. Finalmente, paso á la quarta columna, y digo: si quito 5 de 8, resta 3; pongo 3 debajo del 5, y hallo que despues de restar 5432 de 8954, queda la resta 3522, y que por consiguiente 8954—5432=3522.

28 Para restar 7987 de 27646, escribo las dos partidas como se ve

res-

$$\begin{array}{r} \dot{2}\dot{7}\dot{6}\dot{4}6 \\ 7987 \\ \hline \end{array}$$

resta. 19659

como no puedo restar 7 de 6, añado al 6 diez unidades quitando una unidad al guarismo 4 que está inmediatamente á la izquierda, porque una unidad de la segunda columna vale diez unidades de la primera (9), y digo: si resto 7 de 16 resta 9, que pongo debajo del 7. En este exemplo cada uno de los guarismos 2764 de la partida superior va señalado con un punto para recordar que á cada uno se le ha quitado una unidad.

Paso despues á las decenas; pero no diré ya: si resto 8 de 4, pero diré: si resto 8 de 3 no mas, porque el 4 tiene de menos la unidad que añadí al 6: como no se puede restar 8 de 3, añadiré tambien al 3 diez unidades sacando una del guarismo 6 que está inmediato á la izquierda; y digo: si resto 8 de 13, queda 5; pongo, pues, 5 debajo del 8.

Paso á la tercer columna, y digo igualmente: si resto 9 de 5 ó (practicando lo que poco ha) si resto 9 de 15, queda 6, y pongo 6 debajo del 9.

Llego á la quarta columna, y digo por la misma razon: si resto 7 de 6, ó por mejor decir, de 16, quedan 9, y le pongo debajo del 7; y como no hay nada que restar de la quinta columna, pongo debajo de ella no 2, porque al 2 se le ha quitado una unidad, sino 1, y saco la resta 19659; de modo que 27646—7987=19659.

29 Si la figura á la qual se ha de quitar una unidad fuese cero, se tomará la unidad, no del cero, sino de la primer figura significativa inmediata á la izquierda del cero; pero aunque entonces se toma 100 ó 1000, ó 10000, conforme hay uno, dos ó tres ceros seguidos, no por eso dexará de practicarse lo enseñado; quiero decir que no se le añadirá mas de 10 al guarismo necesitado: y porque estos 10 se toman de los 100, ó de los 1000 &c. para emplear los 90 ó los 990 restantes, se cuentan los ceros que se siguen por otros tantos 9, como lo declara el caso siguiente.

De. 20064
quiero restar. 17489

resta. 2575

Digo desde luego: si resto 9 de 4 ó de 14 (quitando para añadirla al 4 una unidad al guarismo siguiente 6) resta 5. Para proseguir la operacion, considero que como no se puede restar 8 de 5, ni tampoco se puede pedir unidad alguna á ninguno de los dos caracteres inmediatos que son dos ceros, he de sacar una unidad del 2, la qual vale mil respecto del guarismo 6, pues contando desde el 6 ácia la izquierda, diciendo: unidad, decena &c. el 2 vale millares. De cuyo millar no le añado sino 10 unidades al 6 que ahora no vale sino 5, y digo: si resto 8 de 15 queda 7.

Como del millar de unidades quitado al 2 he agregado solas 10 al guarismo 5, de las 990 restantes resto los números que hay debajo de los ceros, lo que viene á ser lo propio que si tomara cada cero por 9, digo, pues: si resto 4 de 9 queda 5; si resto 7 de 9, queda 2, y finalmente: si resto 1 de 1 no queda nada.

30 Siempre que ocurre restar un número menor de otro mayor, la regla no tiene dificultad; pero parece impractible quando hay que restar de un número menor otro mayor, como quando hay que averiguar el haber de un hombre que debe mas de lo que tiene. Entonces la operacion se hace al reves, quie-

quiero decir que el número *menor* se *resta* del *mayor*, y se señala la resta con este signo —, el qual expresa la naturaleza del caso, y es causa de llamarse *negativo* el número al qual acompaña.

31 De aquí se sigue que hay cantidades *negativas* contrapuestas á las que llamamos *positivas*, y se señalan estas con el signo +; con efecto, el haber de un hombre que nada debe y tiene 6 reales, es positivo + 6; el haber de un hombre que nada tiene y nada debe, es nada ó cero; el haber de un hombre que no solo nada tiene, sino que ademas debe 6 reales, es menos que nada, es negatico —6, porque los 6 reales que debe destruyen 6 reales que se le dieran; por manera que dándole 6 reales, ó lo que es todo uno, perdonándole la deuda, su haber seria nada ó cero. Por consiguiente el haber de [redacted] esta hombre es +6, o —6; sobre cuyas expresiones conviene hacer una consideracion de mucha importancia, y es que cero es el término desde donde empiezan las cantidades positivas y negativas, siendo las primeras mas que cero, y las otras menos que cero.

Supongamos ahora, para dar un exemplo del caso que ha dado motivo á estas consideraciones, que se nos ofrezca ajustar las cuentas á un hombre que tiene 3 reales y debe 6; claro está, por lo dicho, que su haber es —3, pues le faltan 3 reales para que su haber sea o. En lugar de restar la deuda 6 del haber 3, haré lo contrario, y restaré 3 de 6, la resta con el signo negativo —3 será el haber del tal hombre.

32 De la naturaleza de las cantidades negativas se sigue que se han de calcular al reves de las positivas; quiero decir, que quando ocurra sumar una cantidad negativa con otra positiva, se ha de restar aquella de esta; porque si quiero sacar lo que suman las deudas de un hombre con su caudal, he de rebajar aquellas de este; si quiero restar una cantidad negativa de otra positiva, he de sumar aquella con esta; porque rebajar ó quitar deudas á uno es aumentar su caudal, es darle dinero.

33 Luego por lo mismo que las cantidades positivas son patentemente mayores que nada, y las negativas son menores, los números positivos se formarán añadiendo 1 á o, esto es, á nada, y continuando con añadir succesivamente mas unidades á cero. De aquí nace la serie de los números llamados naturales, cuyos primeros términos son los siguientes

o, +1, +2, +3, +4 +5 +6.

Si en vez de añadir succesivamente unidades á o, las fuésemos restando, resultará la serie de los números negativos cuyos primeros términos son los siguientes.

o, —1, —2, —3, —4.

Síguese de aquí que 1 —1 es nada ó cero, 2 —2, lo mismo, 3 —3 es tambien cero, &c.; que 4—7 es — 3; porque si un hombre tiene 4 pesos y debe 7, no solo no tiene nada, sino que todavia debe 3 pesos; por lo mismo 8 — 13 es — 5, y 30—48 es—18.

Prueba de la Adicion y Sustraccion.

34 Probar una operacion es hacer otra que dé á conocer con evidencia que la primera está bien hecha, y que en su práctica no se cometió ni descuido ni error, lo que en muchas ocasiones se consigue haciendo otra operacion contraria á la primera. Porque si la primera fué bien hecha, la segunda, que deshace la que aquella hizo, ha de reponer las cosas en el primer estado que estaban antes de executarse la primera.

Demostrar una operacion es hacer patente que las reglas por las quales se executa concuerdan con la razon, esto es con principios ciertos y evidentes. Su-

Supuesta esta distincion, *dirémos* como se averigua si la regla de sumar, y la de restar estan bien hechas.

35 La adicion se prueba sumando otra vez las mismas partidas, pero al reves, quiero decir empezando por la izquierda. La suma de la primer columna se quita ó resta de la parte que le corresponde en la suma inferior, debajo de la qual se escribe la resta; esta se reduce con el pensamiento á decenas para juntarla con el guarismo siguiente de la misma suma á la derecha, y del total se resta la suma de la columna superior. Se prosigue al mismo tenor hasta la última columna, que es la primera de la derecha, cuya suma se resta del número inferior correspondiente; y si la adicion fué bien hecha, no ha de quedar nada.

```
 6903
 7854
  953
 7327
-----
23037
 3110
```

En virtud de esto, para asegurarme de que la partida puesta debajo de la raya es la verdadera, suma de las quatro partidas de encima, sumo otra vez las quatro partidas empezando por la izquierda, y digo: 6 y 7 son 13 y 7 son 20; réstolos de 23, queda 3, ó 3 decenas de la columna siguiente, las quales añadidas con el pensamiento al 0 que le corresponde componen 30. Paso á la segunda columna y digo: 9 y 8 son 17, y 9 son 26, y 3 son 29; réstolos de 30, y queda 1, ó una decena, la qual añadida con el pensamiento al guarismo siguiente 3, compone 13. Sumo unos con otros todos los núme-

ros

ros de la columna que está encima de este 3, diciendo: 5 y 5 son 10, y 2 son 12; réstolos de 13, queda 1, ó una decena, la qual añadida con el pensamiento al 7 que se sigue compone 17. Sumo todos los guarismos de la quarta columna, diciendo: 3 y 4 son 7, y 3 son 10, y 7 son 17; réstolos de 17, no queda nada; de lo que infiero que la suma sacada es la verdadera.

Porque es patente que si se quitan succesivamente de una suma todos los millares, centenares, decenas, &c. de que se compuso, no ha de quedar nada; pues claro está que quitando de un todo todas las partes de que se compone, no ha de quedar resta alguna.

36 Para probar la sustraccion, se suma la resta con el número menor, ó el que se restó; la suma ha de ser igual al número mayor si la sustraccion fué bien hecha.

```
20054
17489
-----
 2565
-----
20054
```

El exemplo de sustraccion aquí puesto es bien hecho, porque la suma de la resta 2565 y del número menor 17489, es igual al número mayor 20054. Y claro está que si á un número menor que otro se le añade el exceso que este le lleva, han de salir iguales uno con otro ambos números.

Multiplicacion de los Números enteros.

37 *Multiplicar* un número por otro es tomar ó sumar el primero tantas veces quantas unidades hay

en

en el segundo. Multiplicar v. g. 4 por 3 es tomar tres veces el número 4.

El número por multiplicar se llama *multiplicando*; el número por el qual se le multiplica, se llama *multiplicador*; y lo que sale de la multiplicacion se llama *producto*.

El multiplicando y el multiplicador se llaman tambien los *factores* del producto; 3 y 4 v. g. son los factores de 12, porque 3 veces 4 son 12, y 4 veces 3 son tambien 12.

38 De aquí se deduce que, en la multiplicacion, quanto la unidad es menor que el multiplicador, tanto el multiplicando es menor que el producto; ó al reves, quanto el producto es mayor que el multiplicando, tanto el multiplicador es mayor que la unidad: v. g. 1 cabe tres veces en 3 del mismo modo que 4 en 12; y como en 12 cabe 4 tres veces, tambien 1 cabe tres veces en 3. Y como podemos tomar por multiplicando el que queramos de los dos factores, tambien es cierto que 1 es menor que 4, del mismo modo que 3 es menor que 12.

39 Por lo que hemos dicho que es multiplicar un número por otro, queda manifiesto que esta operacion podria practicarse, escribiendo tantas veces el multiplicando quantas unidades hay en el multiplicador; y sacando despues la suma. Para multiplicar v. g. 7 por 3 se podria escribir,

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

y la suma que sale de esta adicion seria el producto.

Pero quando el multiplicador es grande, la opera-

con 1; la segunda, sumando del mismo modo 2 con 2; la tercera, sumando del mismo modo 3 con 3, &c.

Para hallar con el socorro de esta tabla el producto de dos números de un solo guarismo cada uno, se busca el uno de los dos números, v. g. el multiplicando, en la fila superior de la izquierda á la derecha, y desde el mismo número se baja en linea perpendicular hasta llegar al quadro que está enfrente del multiplicador, el qual se halla en la primer columna á mano izquierda; el número que está en dicho quadro es el producto. Para hallar v. g. el producto de 9 por 6, ó quanto valen 6 veces 9, voy bajando desde el 9 de la primer fila hasta llegar al quadro que está enfrente del 6 de la primer columna; el número 54, que está en dicho quadro, me está diciendo que 6 veces 9 son 54.

44 La señal de la multiplicacion es esta ×, que se pronuncia *multiplicado por*; de modo que $3\times4=12$, quiere decir que 3 multiplicado por 4 vale 12. En lugar del signo × sirve tambien un punto: v. g. $3\cdot4$ es lo mismo que 3×4. Si alguna de las dos partidas por multiplicar, ó ambas tienen muchas figuras, se escribe dentro de un paréntesis, para dar á entender que toda ella, ó todos sus guarismos se han de multiplicar; $(3+4)\times3$ ó $(3+4)\cdot3$ ó $\overline{3+4}\times3$ significan que el 3 y el 4 se han de multiplicar por 3, ó que el multiplicando es la suma de 3 y $4=7$. Si la multiplicacion se señalara de estotro modo $3+4\cdot3$ daria á entender que al 3 del multiplicado se le ha de añadir el producto de 4 por 3, de lo que saldria una cantidad muy diferente de la que representa $\overline{3+4}\cdot3$, pues esta es 21, y la otra ó $3+4\cdot3$ no es mas que 15.

Multiplicacion de un número de muchos guarismos por otro de solo un guarismo.

45 Póngase el multiplicador que, segun suponemos, no tiene mas de una figura, debajo del multiplicando, donde se quiera; bien que lo mejor será sentarle siempre debajo de las unidades del multiplicando.

Multiplíquese desde luego el guarismo de las unidades por el multiplicador, y si el producto no pasa de unidades, pónganse debajo; si tiene unidades y decenas, siéntense solas las unidades, y contando las decenas por otras tantas unidades, llévense.

Multiplíquese igualmente el guarismo de las decenas del multiplicando, y añádase al producto el número de decenas que se lleva: póngase la suma debajo si puede espresarse con un guarismo solo; si no, pónganse solas las unidades de este producto, y llévense las decenas, que serán centenares, para juntarlas con el producto siguiente, que tambien expresará centenares.

Prosígase multiplicando por la misma regla succesivamente todos los guarismos del multiplicando, los guarismos puestos debaxo expresarán el producto.

46 En el supuesto de que la vara tiene 3 pies, se me pregunta ¿quantos pies componen 2864 varas? claro está que he de tomar 2864 veces el número 3, ó, lo que es todo uno, 3 veces 2864 pies.

Escribo, pues, ...	2864	multiplicando.
	3	multiplicador.
	8592	producto.

Y empezando por las unidades, 1.° digo: 3 veces 4 son 12, pongo 2, y llevo una unidad por la decena; 2.° 3 veces 6 son 18, y una que llevo son 19; pongo 9, y llevo 1; 3.° 3 veces 8 son 24, y 1 que llevo son 25; pongo 5, y llevo 2; 4.° 3 veces 2 son 6, y 2 que llevo son 8, y pongo 8. El número 8592 es el producto, ó los pies que componen las 2864 varas, pues se compone de 3 veces las 4 unidades, de 3 veces las 6 decenas, 3 veces los 8 centenares, y 3 veces los 2 millares, y por consiguiente de 3 veces todo el número 2864.

Multiplicacion de los números que tienen muchos guarismos cada uno.

47 Quando el multiplicador tiene muchos guarismos, debe practicarse succesivamente con cada uno de ellos lo que acabamos de enseñar para quando tiene solo uno; pero empezando siempre por la derecha. Por esta regla se multiplicarán primero todos los guarismos del multiplicando por el guarismo de las unidades del multiplicador, despues por el de las decenas, asentando este segundo producto debajo del primero; pero como ha de expresar decenas, pues el guarismo multiplicador expresa decenas, se escribirá la primer figura de este segundo producto debajo, ó en la columna de las decenas, y los demas guarismos ácia la izquierda, cada uno en la correspondiente columna.

El tercer producto, que se sacará multiplicando por el guarismo del multiplicador que expresa centenares, se pondrá debajo del segundo, pero adelantándole una columna ácia la izquierda. La misma regla se practicará con los demas productos particulares.

Una vez hechas todas estas multiplicaciones particulares, se sumarán unos con otros sus productos, y su suma será el producto total.

Quie-

48 Quiero multiplicar. 65487
por. 6958

523896
327435
589383
392922
455658546

Multiplico primero 65487 por el guarismo 8 del multiplicador, que expresa unidades, y pongo unos despues de otros á medida que van saliendo, los guarismos del producto 523896, que saco por la regla dada (16).

Multiplico despues 65487 por el guarismo 5 del multiplicador, escribiendo su producto debajo del primero; pero como dicho 5 expresa decenas, pongo el primer guarismo del producto que da en la columna, ó debajo de las decenas del primer producto.

Multiplico tambien 65487 por el tercer guarismo 9 del multiplicador, poniendo su producto 589383 debajo del segundo, pero escribo su primer guarismo 3 en la columna de los centenares, porque el multiplicador 9 expresa centenares.

Finalmente, multiplico 65487 por el último guarismo 6 del multiplicador, cuyo producto 392922 escribo debajo del antecedente, adelantándole tambien una columna á la izquierda, á fin de que su primer guarismo esté en la columna de los millares, porque el guarismo multiplicador expresa millares. Sumo por fin todos los productos particulares, y saco 455658546, producto verdadero de 65487 por 6958, esto es el valor cabal de 65487 tomado 6958 veces. En lo que no puede haber duda, porque en la primer multiplicacion particular se ha tomado 65487, 8 veces, 50 en la segunda, 900 en la tercera, y 6000 veces en la última.

49 He de multiplicar. 6500
por. 350

325
195
2275000

Multiplico solo 65 por 35, y saco 2275, á continuacion de cuyo número pongo los tres ceros, suma de los que hay en el multiplicando y el multiplicador.

La razon de esta práctica es patente, pues el multiplicando 6500 expresa 65 centenares; luego quando se multiplica 65, debe tenerse presente que el producto ha de expresar centenares. El multiplicador 350 expresa 35 decenas; luego quando se multiplica por 35, debe tenerse presente que el producto habrá de expresar decenas; por consiguiente el producto ha de expresar decenas de centenares, esto es millares, y por lo mismo ha de llevar tres ceros al último. Del mismo modo se discurrirá en todos los casos parecidos á este.

50 Siempre que entremedias de los guarismos del multiplicador haya ceros; como la multiplicacion por estos ceros no puede dar sino cero, pues tomando un número cero veces sale cero, se escusará sentarlos en el producto, y pasando á executar la multiplicacion por el primer caracter significativo que se siga al cero, ó á los ceros, se adelantará su producto tantas columnas á la izquierda mas una.

una, quantos ceros hubiese seguidos en el multiplicador; esto es, dos columnas si hubiese un cero, tres columnas si hubiese dos ceros, &c.

Se me ofrece multiplicar. 42052
por................ 3006

252312
126156

126408312

Despues de multiplicar por 6 y sentar el producto 252312, multiplico inmediatamente por 3, pero escribo el producto de modo que exprese millares como corresponde. Por cuyo motivo le adelanto tres columnas á la izquierda, pues hay dos ceros entremedias de las figuras significativas del multiplicador.

51 Multiplicar un número por 10 es hacerle diez veces mayor, multiplicarle por 100 es hacerle cien veces mayor; y como lo primero se logra con añadir al número propuesto un cero, lo segundo con añadirle dos ceros, es patente que para multiplicar un número por 10, ó por 100, ó, lo que es todo uno, para hacerle diez veces mayor, se ha de añadir un cero; dos ceros para hacerle cien veces mayor.

De aquí se sigue (49), que quando el multiplicando tenga muchos ceros, y el multiplicador tambien, basta multiplicar las figuras significativas del uno por las figuras significativas del otro, y añadir á continuacion de su producto tantos ceros quantos hay en ambos factores juntos. Si se me ofrece multiplicar v. g. 30 por 500, multiplicaré 5 por 3, y al producto 15 añadiré tres ceros, de modo que el producto será 15000.

La

La razon es muy obvia, porque el producto de 3 por 5 ha de ser 15; el producto de 30 por 5 ha de ser diez veces mayor, porque el factor 30 es diez veces mayor que 3; el producto de 3 por 500 ha de ser cien veces mayor que el primero, porque 500 es cien veces mayor que 5; luego el producto de 30 por 500 ha de ser mil veces mayor que 3×5, lo que se logra con añadir tres ceros al producto 3×5.

52. Quando el multiplicador es alguno de los números que estan entre diez y veinte, basta multiplicar el multiplicando por el último guarismo del multiplicador, y sentar el producto debajo del mismo multiplicando una columna mas adelantado á mano derecha; la suma de las dos partidas será el producto de los dos números propuestos.

547
4376

9846

Para multiplicar v. g. 547 por 18, pongo una columna mas adelantado á mano derecha el producto 4376 del multiplicando por 8 último guarismo del multiplicador 18, y la suma 9846 de este producto y el multiplicando es el producto de los números propuestos.

Algunos usos de la multiplicacion.

53 La multiplicacion sirve para hallar el valor de muchas unidades, quando se conoce el valor de cada una. 1.º Si quiero saber v. g. quanto importarán 5843 varas de obra, á razon de 54 rs. la vara, he de multiplicar 54 rs. por 5843, ó (40) 5843 por 54; el producto que busco será 315522 rs.

Si

2.° Se me pregunta quanto pesan juntos 5954 maderos, en el supuesto de que cada uno de ellos pesa 72 libras. Para responder, multiplico 72 libras por 5954, ó 5954 por 72, y saco que los 5954 maderos pesan entre todos 428688 libras.

54 Sirve tambien la multiplicacion para reducir unidades de determinada especie á otras unidades de especie menor; v. g. los pesos á reales, y los reales á maravedises; las varas á pies, estos á pulgadas, las pulgadas á lineas; los dias á horas, estas á minutos, los minutos á segundos; cuyas reducciones son indispensables en muchos casos.

Se me ofrece reducir 8 pesos 13 reales y 9 mrs. á maravedises. Ya que un peso vale 15 reales, multiplico los 8 pesos por 15 (53), de cuya operacion saco 120 rs. con los quales junto los 13, y saco 133 rs. Multiplico esta cantidad por 34, porque cada real vale 34 mrs. y saco 4522 mrs. sumo con ellos los 9 mrs. propuestos, y saco 4531 mrs. los mismos que componen cabales los 8 pesos 13 rs. y 9 mrs.

Si se me pregunta quantos minutos hay en un año comun, ó en 365 dias, 5 horas y 48 minutos; ya que el dia tiene 24 horas, multiplico 24 por 365; y al producto 8760 horas añado 5 horas; multiplico la suma 8765 por 60, (54) porque la hora tiene 60 minutos, y me salen 525900 minutos: añádoles los 48 minutos propuestos, y saco 525948 minutos, que son los que componen cabal un año comun.

55 Aquí es el lugar de prevenir, que duplicar, triplicar, quadruplicar &c. un número, es multiplicarle por 2, por 3, por 4 &c.

56 Quando alguno de los dos números por multiplicar tiene muchos guarismos, es muy acertado formar una tabla de los productos del multiplicando por cada uno de los nueve guarismos; con cuyo auxilio la operacion se reduce á sentar debajo de la raya los productos respectivos que dan los guarismos del multiplicador, cada uno en su correspondiente lugar, y sacar despues la suma.

1	70500768
2	141001536
3	211502304
4	282003072
5	352503840
6	423004608
7	493505376
8	564006144
9	634506912

Multiplicando. 70500768
Multiplicador. 50431

70500768
211502304
282003072
352503840

producto. 3555424231908

Para multiplicar v. g. uno por otro los dos números aquí sentados, saco de la adjunta tabla los productos del multiplicando por cada figura del multiplicador, y los pongo unos debajo de otros, teniendo presente á que columna ha de corresponder el primer guarismo de cada uno, conforme exprese unidades, decenas, centenares, &c. su suma es el producto que busco.

Division de los Números enteros.

57 *Dividir* ó *partir* un número por otro es buscar quantas veces en el primero de los dos números cabe el segundo.

El número por partir se llama *Dividendo*, el número que parte *Divisor*, y el que expresa quantas veces en el dividiendo cabe el partidor se llama *Cociente*.

No siempre se lleva en la division la mira de saber quantas veces un número cabe en otro; pero en todos los casos se practica la operacion como si se se llevara esta mira; por cuyo motivo se puede y debe decir, que en la division se busca quantas veces cabe el divisor en el dividiendo.

Si busco v. g. quantas veces en 12 cabe 3, hallo que cabe 4 veces; es, pues, 12 el dividendo, 3 el divisor, y 4 el cociente. De aquí se sigue que, en la division, quanto el dividendo es mayor que el divisor, tanto el cociente es mayor que la unidad, pues así como en 12 cabe 3 quatro veces, tambien en 4 cabe 1 quatro veces.

58 Infiérese de aquí 1.° que quanto mayor sea el divisor, siendo uno mismo el dividendo, tanto menor será el cociente: 2.° que si se multiplica el divisor por el cociente, el producto será el dividendo, porque esto es tomar cabalmente el divisor tantas veces quantas cabe en el dividendo; lo que se verifica igualmente, bien sea el cociente un número entero, bien sea fraccionario.

59 Por lo que mira á la especie de las unidades del cociente, no debe apreciarse ni por las que expresa el dividendo, ni por las que expresa el divisor: el cociente, que siempre será un mismo número, podrá expresar unidades de muy distinta especie, segun sea la pregunta que diere motivo á la operacion. Si se trata de saber v. g. quantas veces en 8 pesos caben 4 pesos, el cociente será un número abstracto, que expresará dos veces. Pero si se pregunta quantas varas de obra se podrán hacer por 8 pesos, á 4 pesos la vara, el cociente será 2 varas, número concreto, cuyas unidades ninguna relacion tienen ni con las del dividendo ni con las del divisor. Pero bien se echa de ver que la pregunta que da motivo á la division determina por sí la naturaleza de las unidades del cociente.

60 Para señalar la division de un número por otro, se escribe el primero encima del otro, tirando

do una raya entremedias; ó se escriben al lado uno de otro con dos puntos entremedias, uno encima de otro; v. g. $\frac{6}{3}$ señala la division de 6 por 3, y lo propio significa 6 : 3.

61 Todo lo que dejamos dicho acerca de la regla de partir quedará mas claro si lo cotejamos con lo que pasa en las particiones que se hacen de los bienes de un padre, despues de su muerte, entre sus hijos. En estas particiones hay los bienes ó el caudal del padre que repartir, varios particionarios, y la hijuela de cada uno. El caudal es un verdadero dividendo; el número de los hijos, un verdadero divisor; y la hijuela de cada uno, el cociente. Quanto mayor es el caudal, tanto mayor es la hijuela; pero esta es tanto menor, quanto mayor es el número de los hijos; y la hijuela de cada uno será la misma aunque crezca, ó mengue el caudal, como el número de los particionarios crezca, ó mengue en la misma proporcion.

Esto es cabalmente lo que pasa en la division; el cociente crece, ó mengua como el dividendo: pero mengua tanto mas, quanto mas crece el divisor, y crece tanto mas, quanto menor se hace el divisor; pero queda siempre el mismo, crezcan ó menguen el dividendo y el divisor, con tal que ambos se multipliquen ó partan por un mismo número.

Division de un número de muchos guarismos por otro de un guarismo solo.

62 Para la operacion que vamos á declarar, es necesario saber hallar quantas veces en un número de uno ó dos guarismos cabe otro número de solo un guarismo; en lo que no puede menos de estar corriente el que sepa de memoria los productos de los números de solo un guarismo de dos en dos. Tambien se puede saber por la tabla de antes si

(43); si quiero saber v. g. quantas veces en 74 cabe 9, busco el divisor 9 en la fila superior, y bajo perpendicularmente hasta encontrar el quadro donde está el número que mas se acerca á 74, que es el quadro del 72; el número 8 que está enfrente de 72 en la primer columna, expresa las veces que 9 cabe en 74, ó el cociente que busco.

63 Esto supuesto, la division de un número de muchos guarismos por otro número de solo un guarismo, se practica del modo siguiente.

Se escribe el divisor al lado del dividendo, *tirando* entre los dos una raya de arriba abajo: desde esta se tira otra ácia la derecha debajo del divisor, y debajo de ella se ponen los guarismos del cociente al paso que se van sacando.

Se busca quantas veces el divisor cabe en el primer guarismo del dividendo, ó en los dos primeros quando no cabe en el primero; y debajo del divisor se escribe este número de veces, que es el cociente. Por este cociente se multiplica el divisor, y se pone el producto debajo del dividendo particular, que, por lo dicho poco ha, es el primer guarismo, ó los dos primeros de todo el dividendo.

Finalmente, el producto que sale se resta del dividendo particular, al qual corresponde, y se apunta la resta, si la hay.

Al lado de esta resta se baja al guarismo siguiente del dividendo principal, cuyo guarismo solo, ó con la resta, si la hubo, forma el segundo dividendo particular, con el qual se practica lo propio que con el primero, poniendo el cociente que sale al lado del que ya se puso á la derecha; se multiplica igualmente el divisor por el nuevo cociente, se escribe y resta el producto conforme se dijo.

Si queda una resta, se baja á su lado derecho el guarismo del dividendo que se sigue al último

que

que se bajó, y se prosigue á este tenor hasta el último guarismo inclusivè del dividendo total.

Los exemplos declararán la regla.

64 Se me ofrece dividir 8769 por 7.

Escribo los dos números como se ve.

dividendo	7 divisor
8,7,6,9	$1252\frac{5}{7}$ cociente.
7	
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

Empezando por la izquierda del dividendo, deberia decir: ¿en 8 mil quantas veces 7? pero digo solamente: ¿en 8 quantas veces 7? cabe 1 vez. Este 1 es naturalmente millar; pero los guarismos que se le seguirán en el cociente le darán su verdadero valor; por lo que me contento con escribir 1 debajo del divisor.

Multiplico el divisor 7 por el cociente 1, y pongo el producto 7 debajo del dividendo particular 8, executo la sustraccion, y queda la resta 1.

Esta resta 1 es la parte de 8 que no se ha podido dividir, y vale una decena respecto del siguiente guarismo 7, por cuyo motivo bajo el guarismo 7 al lado, y prosigo la operacion, diciendo: ¿en 17 quantas veces 7? 2 veces. Pongo, pues, 2 al lado derecho del primer cociente que salió de la primer division.

 Mul-

Multiplico como en aquella el divisor 7 por el último cociente 2, escribo el producto 14 debajo del dividendo particular 17, y despues de executar la sustracion queda la resta 3, la qual es la parte que no se ha podido partir.

Al lado de la resta 3 bajo 6, tercer guarismo del dividendo, y digo: ¿en 36 quantas veces 7? 5 veces. Pongo 5 al cociente.

Multiplico el divisor 7 por 5, y despues de escribir el producto 35 debajo del nuevo dividendo particular, hago la sustraccion, y queda la resta 1.

Finalmente, al lado de esta resta 1 bajo el guarismo 9 del dividendo, y digo: ¿en 19 quantas veces 7? 2 veces, pongo pues 2 al cociente.

Multiplico el divisor 7 por el nuevo cociente 2, y despues de escribir el producto 14 debajo del último dividendo particular 19, y de executar la sustraccion, queda la resta 5.

Hallo, pues, que en 8769 cabe 7 tantas veces quantas expresa el cociente sentado, esto es, 1252 veces, y que resta 5.

Por lo que mira á esta resta, basta decir por ahora que se pone al lado del cociente, conforme se ve, esto es poniendo el divisor debajo de dicha resta, y tirando una raya entre los dos, cuya cantidad se pronuncia *cinco septimos*. Mas adelante declararémos la naturaleza de esta especie de números.

65 Quando el divisor no cabe en alguno de los dividendos particulares, se pone cero al cociente, y omitiendo la multiplicacion, se baja inmediatamente otro guarismo al lado de dicho dividendo particular, y se prosigue la division.

Los guarismos del dividendo que sirven de dividendos particulares se separan de los demas con una coma, conforme se ve en el exemplo, para que no se equivoque el calculador.

Voy

Voy á partir 14464 por 8.

$$
\begin{array}{r|l}
14,4,6,4 & 8 \\ \cline{2-2}
8 & 1808 \\ \cline{1-1}
64 & \\
64 & \\ \cline{1-1}
0064 & \\
64 & \\ \cline{1-1}
00 &
\end{array}
$$

Aquí sirven de primer dividendo particular los dos primeros guarismos del dividendo principal, porque en el primero solo no cabe el divisor.

Hallo que en 14 cabe 8, 1 vez; pongo 1 al cociente; multiplico 8 por 1, y resto de 14 el producto 8; resta 6, á cuyo lado bajo el tercer guarismo 4 del dividendo.

Prosigo diciendo: ¿en 64 quantas veces 8? 8 veces, pongo 8 al cociente; y executando la multiplicacion, saco el producto 64; réstole del dividendo particular 64, resta 0, á cuyo lado bajo 6, quarto guarismo del dividendo; como en 6 no cabe 8, pongo 0 al cociente; y bajo inmediatamente al lado del 6 el 4, último guarismo del dividendo: y digo: ¿en 64 quantas veces 8? cabe 8 veces; pongo, pues, 8 al cociente, hago la multiplicacion, y resto el producto 64; y como no queda resta alguna, infiero que en 14464 cabe 1808 veces cabales el 8.

Division por un número de muchos guarismos.

66 Quando el divisor tiene muchos guarismos, la division se hace del modo siguiente.

Se toman á la izquierda del dividendo tantos guarismos, para dividendo particular, quantos son menesnester para que en ellos quepa el divisor.

Hecho esto, en vez de buscar, como en los casos antecedentes, quantas veces en el dividendo particular cabe todo el divisor, se busca solamente quantas veces el primer guarismo del divisor cabe en el primer guarismo del dividendo, ó en los dos primeros, si no basta el primero, se pone debajo del divisor el cociente que sale, del mismo modo que antes.

Se multiplican succesivamente segun la regla dada (45) todos los guarismos del divisor por el cociente puesto, y á medida que se va executando esta operacion, se escriben los guarismos del producto debajo de los guarismos correspondientes del dividendo particular: se hace la sustraccion, y al lado de la resta se baja el guarismo siguiente del dividendo para proseguir la operacion del mismo modo que se empezó.

Vamos á aclarar esta regla con algunos exemplos, y expresarémos los casos en que puede ofrecerse alguna dificultad.

67 Se me propone que parta 75347 por 53

75,3,4,7	53
53	$1421\frac{34}{53}$
223	
212	
114	
106	
87	
53	
34	

To-

Tomo por dividendo particular los dos primeros guarismos no mas del dividendo total, porque cabe en ellos el divisor: y en vez de decir: ¿en 75 quantas veces 53? busco solamente quantas veces en las 7 decenas de 75 caben las 5 decenas de 53, esto es, quantas veces cabe 5 en 7; hallo que 1 vez, pongo, pues, 1 al cociente.

Multiplico 53 por 1, y siento el producto 53 debajo de 75; hago la sustraccion, resta 22, á cuyo lado bajo el guarismo 3 del dividendo, y prosigo diciendo, para mayor facilidad: ¿en 22 quantas veces 5? (y no: ¿en 223 quantas veces 53?); cabe 4 veces, pongo, pues, 4 al cociente.

Multiplico por 4 uno despues de otro los dos guarismos del divisor, y pongo el producto 212 debajo del dividendo particular 223: hecha la sustraccion resta 11, á cuyo lado bajo el guarismo 4 del dividendo, y digo, como antes: ¿en 11 quantas veces 5? 2 veces; pongo 2 al cociente, y multiplico 53 por 2, sale el producto 106, que escribo debajo del dividendo particular 114; hago la sustraccion, queda la resta 8, á cuyo lado bajo el último guarismo 7; parto del mismo modo 87 por 53, y siguiendo el mismo método sin variar en nada, hallo el cociente 1, y queda la resta 34, que escribo al lado del cociente, del modo que dixe antes (64).

68 Mas seguro parece que seria buscar quantas veces en cada dividendo particular cabe todo el divisor; pero como esta investigacion seria las mas veces larga y penosa, basta buscar, conforme lo hemos practicado, quantas veces en la parte mayor de dicho dividendo cabe la parte mayor del divisor. El cociente que se halla por este camino suele no ser el verdadero, porque solo es aproximado; pero sobre que este valor siempre encamina al fin, y quando no le alcanza se aparta poco; la multiplica-

 cion

cion que sigue despues enmienda los defectos que puede padecer esta práctica ; y de hecho , si en el dividendo particular cupiere realmente el divisor tres veces no mas v. g. y si por la probatura que se hace halláramos que cabe 4 veces , se viene á los ojos que multiplicando el divisor por 4, saldria un producto mayor que el dividendo , pues se tomaria el divisor mas veces que las que cabe en dicho dividendo , por consiguiente no seria posible hacer la sustraccion. En este caso se le quitarán succesivamente al cociente una , dos &c. unidades hasta hallar un producto que se pueda restar. Al contrario , si se pusiese 2 no mas al cociente , la resta de la sustraccion seria mayor que el divisor, lo que daria á conocer que cabria todavia en el dividendo , y que por lo mismo no es bastante grande el cociente.

Sin embargo de esto , no tienen por que desalentarse los principiantes , pues en poco tiempo tendrán suficiente conocimiento para saber lo que habrán de quitar ó añadir al cociente.

He de partir 189492 por 375.

1894,9,2	375
1875	$505\frac{117}{375}$
1992	
1875	
117	

El primer dividendo particular se compone de los quatro primeros guarismos del dividendo total; porque en los tres primeros no cabe el divisor.

Digo , pues : ¿en 18 quantas veces 3? cabe en realidad 6 veces ; pero si multiplico 375 por 6 , saldrá un

un número mayor que el dividendo 1894, por lo que pongo 5 no mas al cociente. Multiplico 375 por 5, pongo el producto 1875 debajo de 1894; hago la sustraccion , y queda la resta 19.

Al lado de esta resta bajo el guarismo siguiente 9 del dividendo ; y como en 199 , que es ahora el dividendo particular , no cabe 375 , pongo 0 al cociente , y bajo al lado de 199 el guarismo 2 del dividendo , lo que compone 1992 ; digo , pues : ¿en 19 quantas veces 3? , 6 veces. Pero por la misma razon de antes pongo 5 no mas al cociente , y practicando lo que siempre , queda la resta 117.

69 Harémos de paso una consideracion que en muchos casos ahorra pruebas inútiles. Puede un calculador hallarse en el caso de hacer estas pruebas dudosas , particularmente quando el segundo guarismo del divisor es mucho mayor que el primero. Entónces , en vez de buscar quantas veces el primer guarismo del divisor cabe en la parte correspondiente del dividendo , debe buscar quantas veces dicho primer guarismo despues de añadirle una unidad , cabe en la parte correspondiente del dividendo. Esta prueba siempre le encaminará mas que la primera al verdadero cociente.

Partamos 1832 por 288.

1832	288
1728	6
104	

En vez de decir : ¿en 18 quantas veces 2? diré: ¿en 18 quantas veces 3? porque el divisor 288 se acerca mucho mas á 300 que no á 200 : hallo 6 que es el verdadero cociente ; siendo así que por el método ordinario hubiera hallado 9 para cociente , y por

por lo mismo hubiera tenido que hacer tres operaciones inútiles.

Modo de abreviar el método declarado.

70 Con la mira de facilitar la inteligencia de la regla, hemos dicho que se asiente debajo de cada dividendo particular el producto del divisor por el cociente; pero como el fin principal debe ser abreviar las operaciones, nos parece oportuno prevenir que se puede escusar asentar dichos productos, haciendo la sustraccion á medida que se va multiplicando cada guarismo del divisor. Con el exemplo siguiente nos darémos á entender.

Quiero partir 756984 por 932.

```
7569.8.4 |932
 1138    |812 200/932
 ----
  2064
  ----
   200
```

El primer dividendo parcial se compone de los quatro primeros guarismos del dividendo total, porque en los tres primeros no cabe el divisor; hallo que 9 cabe 8 veces en 75; por lo que pongo 8 al cociente; y en lugar de asentar debajo de 7569 el producto de 932 por 8, multiplico desde luego 2 por 8, cuyo producto es 16; pero como no puedo restar 16 de 9, le quito al guarismo siguiente 6 una decena, la qual añadida al 9 da 19, de cuyo número resto 16, y queda la resta 3 que pongo debajo.

Para llevar en cuenta esta decena, no le quito una unidad al guarismo 6 del qual la saqué, sino que la guardo para añadirla al producto siguiente. Exe-

Executando la multiplicacion, digo: 8 veces 3 son 24, y 1 que llevo son 25; como no puedo restar 25 de 6, quito al guarismo siguiente 5 del dividendo dos decenas, añádolas al 6, y de la suma 26 resto 25 y queda la resta 1, que pongo debajo del 6. Con esto he llevado en cuenta la primer decena que me tocaba rebajar del 6, porque he quitado una decena de mas. Llevaré asimismo en cuenta las dos decenas que acabo de quitar. Prosigo, pues, diciendo: 8 veces 9 son 72, y 2 que llevo 74; cuyo número resto de 75, queda la resta 1.

Al lado de la resta 113 bajo el guarismo 8 del dividendo, y prosigo como hasta aquí, diciendo: ¿en 11 quantas veces 9? 1 vez; digo despues: 1 vez 2 es 2, le resto de 8, queda la resta 6; 1 vez 3 es 3, réstole de 3, queda la resta 0; 1 vez 9 es 9, réstolos de 11, queda la resta 2. Al lado de la resta 206 bajo el guarismo 4, y digo: ¿en 20 quantas veces 9? 2 veces; digo despues: 2 veces 2 son 4, réstolos de 4, queda la resta 0; 2 veces 3 son 6, réstolos de 6, queda o; finalmente, 2 veces 9 son 18, réstolos de 20, quedan 2.

71 En el discurso de estas divisiones particulares, se halla alguna vez que el divisor cabe en el dividendo mas de nueve veces; no por eso se puede de poner mas de 9 al cociente; porque si pudiera ponerse 10, seria prueba de ser diminuto el cociente de la operacion antecedente; porque la decena del cociente ~~que~~ da la division particular de ahora pertenece al cociente de la division antecedente, pues una unidad de este vale 10 en el que se le sigue.

72 Quando á continuacion del dividendo y del divisor hay ceros, se quitan á ambos tantos ceros quantos lleva el que tiene menos.

Si se ha de partir v. g. 8000 por 400, se partirá solamente 80 por 4; porque en 80 centenares to-caben tantas veces 4 centenares, como en 80 unidades 4 unidades.

73 Siempre que el dividendo tiene muchos guarismos, y hay que multiplicar muchas veces el divisor, se puede facilitar y abreviar la operacion. Con cuya mira se forma una tabla de los productos del divisor por los nueve guarismos, y á cada division particular se pone al cociente aquel multiplicador del divisor que da un producto inmediatamente menor que el dividendo particular; mediante lo qual la division queda reducida á sumar y restar un número de otro, y se hace en una mirada.

Propóngome partir v. g. uno por otro los dos números aquí propuestos.

1	35016
2	70032
3	105048
4	140064
5	175080
6	210096
7	245112
8	280128
9	315144

```
40377.9,8,2,0,5,7 | 35016
35016             | 1153129
-----
 53619
 35016
-----
 186038
 175080
-----
  109582
  105048
-----
   45340
   35016
-----
   103245
    70032
-----
    332137
    315144
-----
     16993  resta.
```

Por

Por la tabla veo que el primer número del cociente ha de ser 1, porque el producto 70032 del divisor por 2, es mayor que el primer dividendo particular 40377. Basta esto para manifestar el uso de la tabla, y quanto se abrevia con su auxílio la operacion.

74 Quando dos números son tales, que el uno cabe un número cabal de veces en el otro, el mayor se llama *multiplo* del menor, y el menor *submultiplo* del mayor, y tambien parte alicota del mayor. Pero si el menor no cabe un número cabal de veces en el mayor, se llama parte *aliquanta* del mayor. 15 v. g. es multiplo de 5 y de 3; 3 y 5 son submultiplos y partes alicotas de 15; pero 4 es parte aliquanta de 15, porque cabe 3 veces en 15, y sobran 3.

Prueba de la Multiplicacion y Division.

75 Del concepto que hemos dado de cada una de estas operaciones se saca el método de probarlas.

Ya que en la multiplicacion se toma tantas veces el multiplicando, quantas cabe la unidad en el multiplicador, si se busca quantas veces cabe el multiplicando en el producto, quiero decir (57) si se divide el producto por el multiplicando, es preciso que salga al cociente el multiplicador; y como podemos tomar por multiplicador el multiplicando, y al reves, podemos dar por regla general, que si el producto de una multiplicacion de dos factores se parte por uno de ellos, el cociente será el otro factor.

Si multiplicamos v. g. 2864 por 3, saldrá el producto 8592; si divido, pues, 8592 por 2864, he de sacar y saco con efecto 3 al cociente.

En

En quanto á la division, es lo mismo; porque ya que el cociente de toda division expresa quantas veces el divisor cabe en el dividendo, síguese que si tomo el divisor tantas veces quantas unidades tiene el cociente, esto es, si multiplico el divisor por el cociente, ha de salir el dividendo, quando no quedó de la division resta alguna; y quando queda alguna resta, si esta se añade al producto del cociente por el divisor, ha de salir el dividendo. Hallamos poco ha (68) v. g. que 189492 dividido por 375, da el cociente 505, y queda la resta 117; multiplico 375 por 505, sale el producto 189375, añádole la resta 117, y sale el dividendo 189492. Por consiguiente la multiplicacion sirve para probar la division, y la division para probar la multiplicacion.

Algunos usos de la Division.

76 Sirve esta operacion no solo para averiguar quantas veces un número cabe en otro, sino tambien para partir un número en partes iguales. Tomar la mitad, el tercio, el quinto &c. de un número, es partirle en dos, tres, cinco, &c. partes iguales, para tomar una de ellas.

77 Sirve igualmente la division para reducir las unidades de determinada especie á otras unidades de especie mayor; v. g. un número determinado de maravedises á reales de vellon, y estos á pesos. Para reducir 16490 maravedises á reales, se tendrá presente que pues 34 maravedises componen un real, habrá en la suma propuesta de maravedises tantos reales quantas veces en ella quepan 34 maravedises. Se partirá por consiguiente por 34 la suma 16490, de donde se sacarán 485 reales. Para reducir estos á pesos, partirémos 485 por 15, porque 15 reales componen un peso, y el cociente será 32 pesos y

y 5 reales; por manera que los 16490 maravedises componen 32 pesos y 5 reales.

De los Quebrados.

78 Los quebrados considerados arisméticamente son números con los quales expresamos las cantidades menores que la unidad.

El que quiera formar cabal juicio de los quebrados debe figurarse la cantidad que hace oficios de unidad, como compuesta de un número determinado de unidades menores, al modo que nos figuramos el peso compuesto de 15 unidades menores, que llamamos reales. Una, ó muchas de estas partes componen lo que llamamos quebrado ó fraccion de la unidad; v. g. un número de reales que no llegue á 15, es un quebrado de la unidad del peso, y el mismo nombre se da á los números que expresan dichas partes.

79 Todo quebrado puede expresarse de dos modos, que se estilan igualmente.

El primero consiste en expresar como números enteros las partes de la unidad de una cantidad propuesta, y entónces se da un nombre particular á dichas partes, v. g. para expresar 7 de las 15 partes que componen un peso, se echa mano del guarismo 7, pero se lee 7 reales, y escribe así 7 rs.

Pero como siguiendo este modo se necesitaria un signo particular para cada division que se hiciese de la unidad, se escusa esta multitud de signos, y se pinta un quebrado con dos números, uno encima de otro, y una raya entremedias. Para expresar v. g. las siete partes de peso que deciamos poco ha, se escribe $\frac{7}{15}$, quiero decir que primero se escribe el número que expresa quantas partes de la unidad tiene la cantidad propuesta, y debajo del mis-

mismo *número*, ó debajo de la raya se escribe el número que expresa quantas de las tales partes hay en toda la unidad.

80 Para leer un quebrado, se lee primero el número de encima, llamado *numerador*; despues se lee el número de debajo, llamado *denominador*. Segun esto, $\frac{4}{5}$ se lee *quatro quintos*, ó *quatro quintavos*; $\frac{3}{20}$, se lee *tres vigésimos* ó *tres veintavos*; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ se leen *un medio*, *un tercio*, *un quarto*.

Señala, pues, el numerador quantas partes de la unidad caben en la cantidad que el quebrado expresa; y el denominador señala el valor de dichas partes, expresando quantas entran en la unidad. Se le llama denominador, porque él es en realidad el que da nombre al quebrado, y es causa de que en estos dos quebrados v. g. $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{7}$ las partes del primero se llaman *quintos* ó *quintavos*, y las partes del otro *septimos*.

81 De donde hemos de inferir que quanto mas se acerca el numerador al valor del denominador, tanto mas se acerca el quebrado al valor de toda la unidad, cuyas partes representa el denominador. El quebrado $\frac{4}{4}$ v. g. vale toda la unidad, porque se toman todas las quatro partes de que esta se compone; $\frac{3}{4}$ es una cantidad mayor que $\frac{2}{4}$.

El numerador y el denominador se llaman términos del quebrado; 4 y 5 son los dos términos del quebrado $\frac{4}{5}$.

De los Enteros considerados á manera de Quebrados.

82 De las operaciones que se practican con los quebrados suelen salir números fraccionarios, cuyo numerador es mayor que el denominador, tales son v. g. estos números $\frac{8}{5}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{27}{6}$, cuyas expresiones, y las que se les parecen no son quebrados propios; son números enteros juntos con quebrados.

Para sacar de ellos los enteros que tienen, se parte el numerador por el denominador, el cociente señala los enteros, y la resta de la division es el numerador del quebrado que acompaña al entero. Este quebrado v. g. $\frac{27}{5}$ da $5\frac{2}{5}$, esto es cinco enteros y dos quintos de otro. Porque el denominador 5 de la expresion $\frac{27}{5}$ manifiesta que la unidad se compone de 5 partes, luego toda la unidad vale 5 partes; luego quantas veces quepa 5 en 27, otras tantas unidades enteras habrá en $\frac{27}{5}$.

83 Las multiplicaciones y divisiones de los números enteros juntos con quebrados piden, á lo menos para mayor facilidad, que se reduzcan los enteros á quebrados. Esta transformacion se practica multiplicando el número entero por el denominador del quebrado, al qual se quiere reducir el entero. Si se me ofrece reducir v. g. 8 enteros á quintavos, multiplico 8 por 5, y saco $\frac{40}{5}$. La razon es, que quando reduzco 8 á quintavos, considero la unidad como compuesta de 5 partes; luego las ocho unidades tendrán 40 de ellas: por la misma razon $7\frac{4}{9}$ vale $\frac{67}{9}$, despues de reducir 7 á novenos.

Modo de alterar los dos términos de un quebrado sin que mude de valor.

84 No hay duda en que quantas mas partes se conciben en una misma unidad, tanto menores han de ser, y tanto mayor número de ellas se habrá de tomar para componer una determinada cantidad. Si divido ó supongo dividida una unidad, sea la que fuere, en quinzavos, v. g. será cada parte mayor que si divido la misma unidad en treintavos. Luego si quiero tomar un tercio de dicha unidad en el primer supuesto, tomaré $\frac{5}{15}$ no mas, y en el segun-

gundo habré de tomar $\frac{10}{30}$.

85 Luego se puede duplicar, triplicar, quadruplicar &c. el denominador de un quebrado sin que esta operacion mude el valor del quebrado, con tal que al mismo tiempo se duplique, triplique, quadruplique, &c. su numerador.

86 Luego queda probado que *no muda de valor un quebrado quando se multiplican sus dos términos por un mismo número*. Por consiguiente $\frac{3}{4}$ es lo mismo que $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$ lo mismo que $\frac{5}{10}$.

De aquí se infiere que quantas menos partes se suponen en la unidad, tanto menor número de ellas se necesita para componer una cantidad determinada: que por lo mismo se puede hacer que el denominador de un quebrado sea 2, 3, 4, &c. veces menor, con tal que al mismo tiempo se haga su numerador 2, 3, 4, &c. veces menor. Esto quiere decir, que *no muda de valor un quebrado, porque se partan sus dos términos por un mismo número*.

Para percibir con evidencia la verdad de estas dos proposiciones, basta tener presente que destino tienen el numerador y el denominador de un quebrado.

87 Téngase, pues, presente que multiplicar ó partir los dos términos de un quebrado por un mismo número, no es multiplicar ni partir el quebrado, pues segun acabamos de manifestar, estas operaciones no le mudan su valor.

En los dos principios que acabamos de sentar se fundan dos operaciones muy importantes en la doctrina de los quebrados, que son; la una reducir dos, ó mas quebrados á un mismo denominador: la segunda, abreviar un quebrado, esto es, reducirle á que sean sus dos términos los menores que sea posible.

Re-

Reduccion de los Quebrados á un mismo Denominador.

88 I. Para reducir dos quebrados á un mismo denominador, ó, lo que es lo propio, á que expresen partes de un mismo nombre, se multiplican ambos términos del primer quebrado por el denominador del segundo, y ambos términos del segundo por el denominador del primero.

Para reducir v. g. á un mismo denominador los dos quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, multiplico 2 y 3, términos del primero, por 4, denominador del segundo, y saco $\frac{8}{12}$, de igual valor (86) que $\frac{2}{3}$. Multiplico igualmente 3 y 4, términos del segundo quebrado, por 3, denominador del primero, y saco $\frac{9}{12}$, de igual valor (86) que $\frac{3}{4}$; por manera que los dos quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ quedan transformados en estotros $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, de igual valor que los propuestos, y de un mismo denominador.

No puede menos de ser por este método uno mismo el denominador de ambos quebrados, porque en cada operacion resulta el nuevo denominador de la multiplicacion, uno por otro, de los dos primeros.

II. Quando hay que reducir mas de dos quebrados á un mismo denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por el producto que da la multiplicacion de los denominadores, unos por otros, de los demas quebrados.

Para reducir v. g. á un mismo denominador los quatro quebrados siguientes $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, multiplico los dos términos 2 y 3 del primero por el producto de los denominadores, 4, 5 y 7 de los demas quebrados. Este producto le saco, diciendo: 4 veces 5 son 20, despues 7 veces 20 son 140; multiplico, pues, 2 y 3 por 140, y saco $\frac{280}{420}$, cuyo valor es igual

igual al de $\frac{2}{3}$ *(86)*.

Multiplico igualmente los dos términos 3 y 4 del segundo quebrado por el producto $3 \times 5 \times 7$, cuyo producto saco, diciendo: 3 veces 5 son 15, despues 7 veces 15 son 105; multiplico, pues, 3 y 4 cada uno por 105, y saco $\frac{315}{420}$, de igual valor que $\frac{3}{4}$.

Llego al tercer quebrado, y multiplico sus dos términos 4 y 5 por 84, producto de los tres denominadores 3, 4 y 7, y saco $\frac{336}{420}$, de igual valor que $\frac{4}{5}$.

Finalmente, multiplico los dos términos 5 y 7 del quarto quebrado por 60, producto de los denominadores 3, 4, y 5 de los tres primeros, y saco $\frac{300}{420}$ de igual valor que $\frac{5}{7}$; por manera que los quatro quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ quedan transformados en estotros, $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, menos sencillos á la verdad que los primeros, pero de igual valor; y mas apropiados para executar con ellos, mediante el denominador comun, las operaciones de sumar y restar. Porque así como no se pueden sumar pesos con reales y maravedises, sino pesos con pesos, reales con reales, y maravedises con maravedises; tampoco se pueden sumar tercios con quartos, con quintos &c. sino tercios con tercios, quartos con quartos &c. unos con otros; en una palabra, no se pueden sumar unidades unas con otras á no ser que sean de una misma especie, ó mismo nombre. Lo propio digo de la operacion de restar, &c.

Como el denominador de cada nuevo quebrado es el producto de todos los denominadores primitivos, no puede menos de ser uno mismo en cada quebrado, despues de la operacion.

89 Mediante la reduccion que acabamos de declarar, se averigua qual es mayor ó menor de dos ó mas quebrados propuestos, v. g. estos dos $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$. Porque si les doy un mismo denominador, el primero será $\frac{14}{21}$, y el segundo $\frac{15}{21}$, lo que manifiesta que el segundo quebrado es el mayor de los dos, y que lleva al otro $\frac{1}{21}$ de exceso.

Por el mismo camino se hallará que de los dos quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$ el segundo es mayor que el primero; pues despues de la reduccion, el segundo vale $\frac{25}{40}$, y el primero $\frac{24}{40}$, lo que manifiesta que $\frac{5}{8}$ lleva á $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{40}$ de exceso.

Modo de abreviar un Quebrado.

90 Abreviar un quebrado es transformarle en otro de igual valor, cuyos términos sean menores que los del primero, porque entonces queda mas sencillo. Es cosa fácil abreviar un quebrado, siempre que sus dos términos se pueden partir por un mismo número. Como esta operacion no muda el valor (86) del quebrado, debe prácticarse siempre que se pueda, ya porque los quebrados son tanto mas fáciles de calcular quanto mas breves, ya porque en muchas ocasiones se percibe mas fácilmente su valor, ya finalmente porque debe ser máxima de todo calculador expresar las cantidades con los números menores que pueda.

Esta reduccion de los quebrados á menores términos se consigue del modo siguiente. Se parten ambos términos del quebrado propuesto por 2, cuya division se repite quantas veces se puede.

Despues se parten ambos términos por 3, repitiendo la division quantas veces se puede.

Lo mismo se hace con los números 5, 7, 11, 13, &c. esto es, con los números que no tienen mas divisor que á sí mismos y la unidad, y que por esta razon se llaman *números primos*.

Toda la dificultad, si la hay, solo puede estar en saber quando es posible la division por 2, por

 3,

3, por 5 &c. pero los principios siguientes la apean.

Todo número cuyo último guarismo es par se puede partir por 2.

Todo número cuyos guarismos sumados unos con otros, como si expresaran unidades sencillas, diere por suma 3, ó un multiplo de 3, podrá partirse por 3; tal es este número 54231, porque sus guarismos 5, 4, 2, 3, 1 componen 15, cuyo número es multiplo de 3. Todo número cuya última figura es 5 ó cero puede partirse por 5.

Por lo que toca al número 7 y á los números mayores que se le siguen, aunque seria fácil hallar tambien reglas semejantes á las que acabamos de proponer respecto de los demas números primos menores, escusamos buscarlas, porque tendríamos que empeñarnos en cálculos tan prolixos como la operacion que deseamos abreviar.

91 Propongámonos v. g. simplificar el quebrado $\frac{2016}{5796}$. Parto sus dos términos por 2, porque el último guarismo de cada uno es par, y saco $\frac{1008}{2898}$. Parto otra vez por 2, y saco $\frac{504}{1449}$. De lo dicho poco ha infiero que puedo partir por 3; hago la division y saco $\frac{168}{483}$; vuelvo á partir por 3, y saco $\frac{56}{161}$. Finalmente, pruebo la division por 7, sale bien, y saco $\frac{8}{23}$.

La division debe solamente probarse con los números primos 2, 3, 5, 7 &c. porque una vez apurada la division por 2, es inútil probarla por 4; porque si el número propuesto pudiera partirse por 4, con mas razon se le hubiera podido partir por 2.

92 Pero de quantos medios pueden practicarse para abreviar un quebrado, el mas directo consiste en partir sus dos términos por el máxîmo comun divisor de ambos. Por lo mismo hemos de enseñar como se halla este divisor.

Aplicarémos esta investigacion al quebrado $\frac{96}{180}$. Claro está que este máxîmo comun divisor no puede ser mayor que el menor de los dos términos del quebrado, que es su numerador 96. Pruebo, pues, si 96 es el tal divisor; veo que 96 se parte á sí mismo, pero no parte cabal 180, porque queda el residuo 84; luego el quebrado $\frac{96}{180}$ es lo mismo que $\frac{96}{96+84}$. Puesto en esta forma, echo de ver que el máxîmo divisor que busco no puede ser mayor que 84, porque si lo fuera no partiria la parte 84. Pruebo, pues; si 84 es el tal divisor, hallo que 84 se parte á sí mismo, pero no parte cabal 96, queda el residuo 12; por consiguiente se le puede dar al quebrado esta forma $\frac{84+12}{84+12+84}$. Aquí se vé á las claras que el divisor que busco no puede ser mayor que 12; porque si lo fuera no podria partir 12. Véamos, pues, si 12 es el tal divisor; hallo que 12 se parte á sí mismo, parte por lo mismo tambien 84; luego parte todas las partes del quebrado. Luego es divisor comun del numerador y del denominador; es tambien el máxîmo divisor de ambos términos, porque la serie de las operaciones practicadas manifiesta que un número mayor que 12 no podría partir ambos términos. De aquí se saca la siguiente

Regla para hallar el máxîmo comun divisor de dos números.

93 Pártase el mayor de los dos términos por el menor; si la division saliere cabal, el término menor será el mayor número que pueda partir los dos términos del quebrado.

Si hubiese una resta, pártase por ella el término menor; si la division saliere cabal, la primer res-

resta será el mayor comun divisor.

Apliquemos la regla al quebrado $\frac{799}{2961}$. Parto, pues, 2961 por 799, saco el cociente 3 y la resta 564; parto despues 799 por 564, saco el cociente 1 y la resta 235; parto 564 por 235; saco el cociente 2, y la resta 94; últimamente parto 235 por 94, saco el cociente 2 y la resta 47; y como esta última resta es partidor cabal de la resta antecedente y de sí misma, es el máximo comun divisor de los dos términos del quebrado propuesto. Partolos, pues, ambos por 47, y queda el quebrado reducido á $\frac{17}{63}$.

94 Despues de hallado el máximo comun divisor de los dos términos de un quebrado, se le puede abreviar, sin echar mano de él, por un método mas breve; el qual consiste en el modo de disponer los cocientes, y las restas que se sacan al tiempo de buscar el máximo comun divisor. Manifestarémos qual es esta disposicion, recorriendo lo que pasó en el caso propuesto. (93).

2961	799	564	235	94	47
	3	1	2	2	2
63	17	12	5	2	1

Despues de dispuestas las diferentes restas que sirven de partidores, y los cocientes que dan, conforme aquí se vé, y hallado el número 47, que parte cabal la resta antecedente 94, siento la unidad debaxo de este número, y digo: una vez 2 es 2, y le siento debaxo del cociente que antecede; digo despues: 2 veces 2 son 4, y añadiéndole la unidad sentada á la derecha, son 5, que siento debaxo del tercer cociente á mano izquierda. Prosiguiendo al mismo tenor, digo: 2 veces 5 son 10, y 2 son 12: que

que siento debaxo del quarto cociente 1: multiplico este cociente 1 por 12, y añadiéndole 5 son 17. Finalmente, multiplico 17 por 3, debaxo del qual está sentado, saco 51 y añadiéndole 12 son 63; los dos últimos números hallados por este método son el quebrado $\frac{17}{63}$, el qual es el mismo que el propuesto abreviado.

Si aplicamos la regla al quebrado $\frac{2627}{5893}$, hallarémos que despues de abreviado queda reducido á $\frac{37}{83}$. Aquí va figurada la operacion.

5893	2627	639	71
	2	4	9
83	37	9	1

Varios modos de considerar un Quebrado, y conseqüencias que de aquí se pueden sacar.

95 Por el concepto que hemos dado de todo quebrado se saca que el denominador expresa quantas son las partes de la unidad, á la qual se refiere un quebrado propuesto, y el numerador quantas de dichas partes tiene el quebrado.

Tambien se puede considerar de otro modo un quebrado; se puede considerar que el numerador representa cierta cantidad, la qual se ha de partir en tantas partes quantas unidades tiene el denominador. En $\frac{4}{5}$ v. g. se puede considerar que el 4 representa quatro cosas qualesquiera, v. g. quatro reales, que se han de partir en cinco partes, ó entre cinco compañeros; porque claro está que lo mismo es partir 4 reales en cinco partes, que partir un real en cinco partes para tomar quatro de ellas.

96 Se puede, pues, considerar el numerador de to-

todo quebrado como un dividendo, y el denominador como un divisor. Esta consideracion manifiesta á las claras que cosa significan las restas de divisiones expresadas en la forma que dexamos enseñada (64).

97 De aquí y de lo dicho (81) se infiere, que si en la resta de una division, puesta en forma de quebrado, el numerador vale mas de la mitad del denominador, se podrá despreciar la tal resta figurada á manera de quebrado, con tal que se añada una unidad al último guarismo del cociente puesto. Supongamos que el cociente de una division sea 23 y la resta $\frac{3}{4}$; puedo omitir la cantidad $\frac{3}{4}$, con tal que añada una unidad al último guarismo 3 del cociente, el qual con esto será 24. La razon es clara, porque como $\frac{3}{4}$ vale mas de la mitad del entero, ó unidad (81), el cociente discrepará menos del verdadero, añadiéndole una unidad en lugar de la cantidad $\frac{3}{4}$, que si omitiésemos esta cantidad.

Este arbitrio se puede usar siempre que no se quiera sacar tan cabal como cabe el cociente por el método que mas adelante daremos, ó quando son de tan poca monta las partes en que se supone dividida la unidad, que no hay necesidad de expresarlas con mucha precision.

98 De aquí se infiere que todo número se puede escribir, siempre que se quiera, en forma de quebrado, poniéndole por numerador del quebrado, y la unidad por denominador: v. g. 8 es lo mismo que $\frac{8}{1}$; 5 lo propio que $\frac{5}{1}$.

Operaciones de la Arismética por Quebrados.

99 Con los quebrados se hacen las mismas operaciones que con los enteros; se suman, restan, multiplican y parten unos por otros. Para la adicion y sustraccion de estos números, se necesita las mas veces una operacion preparatoria; para las otras dos, ninguna.

Adicion de los Quebrados.

100 Siempre que los quebrados por sumar tienen un mismo denominador, se suman todos los numeradores, á cuya suma se dá el denominador comun de todos los quebrados propuestos. Para sumar $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$ unos con otros; saco la suma 9 de los numeradores, doyle por denominador el 7, y la suma de los tres quebrados propuestos es $\frac{9}{7}$.

Si los quebrados no tuviesen un mismo denominador, será menester primero dárselele (88), despues de cuya preparacion se sumarán los quebrados conforme acabamos de enseñar. Para sumar v. g. estos tres quebrados, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, los transformo en estotros tres $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, cuya suma es $\frac{133}{60}$, la qual se reduce á $2\frac{13}{60}$ (82).

101 La regla que acabamos de dar para sumar quebrados es la general; casos hay, particularmente quando son muchos, donde se puede hallar su suma por un camino mas breve. Se suman primero dos quebrados, despues la suma de los dos primeros con el tercero, &c.

Por esta regla, quando me ocurra sumar los quatro quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, reduciré los dos primeros á $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ cuya suma es $\frac{17}{12}$; despues reduciré $\frac{17}{12}$ y $\frac{4}{5}$ á $\frac{85}{60}$ y $\frac{48}{60}$, cuya suma es $\frac{133}{60}$; despues reduciré $\frac{133}{60}$ y $\frac{5}{6}$ á $\frac{798}{360}$ y $\frac{300}{360}$, cuya suma es $\frac{1098}{360} = 3\frac{3}{60}$, suma de los quatro quebrados propuestos.

102 Quando hay que sumar unos con otros números fraccionarios, se suman primero los quebrados con los quebrados, y despues los enteros con los enteros. Para sumar v. g. los tres números fraccionarios $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{3}$, $10\frac{3}{8}$, reduzco primero los quebrados

dos á un mismo denominador, con lo que se transforman en $\frac{24}{48}$, $\frac{16}{48}$ y $\frac{18}{48}$, ó $\frac{12}{24}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{9}{24}$; despues escríbolo todo, enteros y quebrados, como aquí se ve. Saco finalmente la suma de todo 17 $\frac{29}{24}$, que se reduce á 18 $\frac{5}{24}$ (81), porque $\frac{29}{24}$ vale 1 $\frac{5}{24}$.

$$\begin{array}{r} 3\ \frac{12}{24} \\ 4\ \frac{8}{24} \\ 10\ \frac{9}{24} \\ \hline 17\ \frac{29}{24} \\ \hline 18\ \frac{5}{24} \end{array}$$

Sustraccion de Quebrados.

103 Si los dos quebrados con los quales se ha de hacer esta operacion tuviesen un mismo denominador, se restará el numerador del uno del numerador del otro, dando á la resta el denominador de ambos. Si resto $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, la resta será $\frac{3}{9}$, lo mismo que $\frac{1}{3}$ (86).

Si los quebrados no tuviesen un mismo denominador, se les dará, y despues se hará la sustraccion conforme hemos propuesto. Para restar v. g. $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, transformo los dos quebrados en $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$, resto 8 de 9, y queda la resta $\frac{1}{12}$.

104 Quando hay que restar un número fraccionario de otro, se resta el quebrado del quebrado y el entero del entero. Para restar 24 $\frac{1}{8}$ de 25 $\frac{1}{4}$, preparo desde luego los dos quebrados dándoles un mismo denominador, y despues escribo los dos números como aquí se vé.

$$\begin{array}{r} 25\ \frac{8}{32} \\ 24\ \frac{4}{32} \\ \hline 1\ \frac{4}{32} = 1\frac{1}{8} \end{array}$$

Mul-

Multiplicacion de Quebrados.

105 *Para multiplicar un quebrado por un quebrado, se multiplica el numerador del uno por el numerador del otro, y el denominador por el denominador.* Si se me ofrece multiplicar v. g. $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, multiplico 2 por 4, saco el numerador 8, multiplico 3 por 5, saco el denominador 15; de modo que el producto es $\frac{8}{15}$.

Fúndase esta regla en que multiplicar un número por otro, es tomar tantas veces el multiplicando, quantas cabe la unidad en el multiplicador. Multiplicar, pues, $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ es tomar $\frac{4}{5}$ veces el quebrado $\frac{2}{3}$, ó, con mas propiedad, es tomar 4 veces la quinta parte de $\frac{2}{3}$: pero quando se multiplica el denominador 3 por 5, se transforman los tercios en quinzavos, quiero decir, en partes cinco veces menores, y quando se multiplica el numerador 2 por 4, se toman las nuevas partes 4 veces; se toma, pues, 4 veces la quinta parte de $\frac{2}{3}$; se multiplica con efecto $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$.

106 Quando ocurre multiplicar un entero por un quebrado, se reduce el entero á la forma de quebrado, dándole la unidad por denominador (98). Si se me ofrece multiplicar v. g. 9 por $\frac{4}{7}$, multiplico $\frac{9}{1}$ por $\frac{4}{7}$, de lo que, por la regla dada, sale el producto $\frac{36}{7}$, que se reduce á 5 $\frac{1}{7}$.

Se echa, pues de ver que para multiplicar un entero por un quebrado, ó un quebrado por un entero, se reduce la operacion á multiplicar por el entero el numerador del quebrado propuesto.

107 Si hubiese enteros con quebrados, se reducirán primero los enteros á quebrados de un mismo denominador que los que los acompañan. Si he de multiplicar 12 $\frac{3}{5}$ por 9 $\frac{3}{4}$, transformo el multiplican-

cando en $\frac{63}{5}$ (83) y el multiplicador en $\frac{39}{4}$, multiplico $\frac{63}{5}$ por $\frac{39}{4}$ por la regla dada (105), y saco el producto $\frac{2457}{20}$, que vale 122 $\frac{17}{20}$.

108 Quando el númerador del uno de los dos quebrados y el denominador del otro se pueden partir por un mismo número, se practicará primero la division, y despues se multiplicará un quebrado por otro.

Supongo que me toque multiplicar $\frac{3}{8}$ por $\frac{4}{7}$, parto primero 8 y 4 por 4, con cuya preparacion los dos quebrados quedan transformados en $\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{7}$; será, pues, $\frac{3}{2}\times\frac{1}{7} = \frac{3}{14}$ el producto de un quebrado por otro.

Si he de multiplicar $\frac{3}{8}$ por $\frac{4}{9}$, partiré primero 8 y 4 por 4 y 3 y 9 por 3, sacaré, pues $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

109 Quando ocurre multiplicar un quebrado por un número igual á su denominador, el producto es el numerador mismo del quebrado.

110 Quando ocurre multiplicar unos por otros muchos quebrados, se señala no mas la multiplicacion, y se borran en el numerador y el denominador del producto figurado todos los divisores. Si he de multiplicar unos por otros estos tres quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{5}{8}$, me contento con figurar desde luego el producto en esta forma $\frac{2\times14\times5}{7\times15\times8}$ lo mismo que $\frac{2\times7\times2\times5}{7\times3\times5\times2\times2\times2}$, porque $14=7\times2$, $15=5\times3$ y $8=2\times2\times2$; borro despues en ambos términos los factores comunes, porque en la misma proporcion que los del numerador aumentan la cantidad, los del denominador la disminuyen, y queda $\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{6}$, producto verdadero.

La razon de esta práctica es muy facil de percibir, porque no muda de valor un quebrado quando se parten sus dos términos por un mismo número; y quando esta division pueda executarse no se debe omitir, porque dexa mas sencillos y mas fáciles de calcular los quebrados.

La última regla que acabamos de dar es de grandísimo recurso en cálculos muy prolixos y dificultosos.

Division de Quebrados.

111 Para partir un quebrado por otro, se trastornan los dos términos del quebrado divisor, y despues se multiplica por él el quebrado dividendo.

Para dividir v. g. $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, trastorno el quebrado $\frac{2}{3}$, y sale $\frac{3}{2}$; multiplico $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{2}$ y saco el cociente $\frac{12}{10}$, que se reduce á $1\,\frac{2}{10} = 1\,\frac{1}{5}$.

La razon de esta regla es, que partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, es buscar quantas veces $\frac{2}{3}$ cabe en $\frac{4}{5}$; pero se viene á los ojos que pues el divisor expresa tercios, cabrá en el dividendo tres veces mas que si expresara enteros; luego se ha de dividir primero por 2, y multiplicar despues por 3, lo mismo cabalmente que tomar tres veces la mitad del dividendo, ó multiplicar por $\frac{3}{2}$, que es el quebrado divisor trastornado.

112 Si ocurriese partir un quebrado por un entero, ó un entero por un quebrado, se le dará primero al entero la forma de quebrado, y la unidad por denominador. Para partir v. g. 12 por $\frac{5}{7}$, se reducirá la operacion á partir $\frac{12}{1}$ por $\frac{5}{7}$, lo que por la regla dada es lo mismo que multiplicar $\frac{12}{1}$ por $\frac{7}{5}$, de lo que saldrá el cociente $\frac{84}{5}$ ó 16 $\frac{4}{5}$. Partir $\frac{3}{4}$ por 5 es partir $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{1}$, ó multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{5}$, de donde sale el producto $\frac{3}{20}$.

113 Por consiguiente se echa de ver, que quando hay que partir un quebrado por un entero, la operacion se reduce á multiplicar el denominador por el entero.

Si

114 Si hubiese *enteros con quebrados*, *se reducirán* primero los enteros á quebrados, cada uno de la misma especie que el que le acompaña. Quando se ofrezca partir 54$\frac{3}{5}$ por 12$\frac{2}{3}$, se transformará el dividendo en $\frac{273}{5}$, y el divisor en $\frac{38}{3}$; quedará, pues, reducida la operacion á partir $\frac{273}{5}$ por $\frac{38}{3}$, ó á multiplicar (111) $\frac{273}{5}$ por $\frac{3}{38}$, de donde saldrá $\frac{819}{190}$, ó 4 $\frac{59}{190}$.

115 Como se pueda, la division de un quebrado por otro se executa partiendo el numerador del dividendo por el numerador del divisor, y el denominador por el denominador. El cociente de $\frac{8}{15}$ partido por $\frac{2}{3}$ será $\frac{4}{5}$.

116 Siempre que ambos numeradores, ó denominadores se puedan partir por un mismo número, se hace la division antes de partir un quebrado por otro. Si he de partir $\frac{12}{27}$ por $\frac{8}{5}$, ya qne 12 y 8 se pueden partir por 4, reduzco los dos quebrados á $\frac{3}{27}$ y $\frac{2}{5}$, partiendo sus numeradores por 4; hago despues la division segun la regla, y saco el cociente $\frac{15}{54}$.

Algunas aplicaciones de las reglas antecedentes.

117 De lo dicho (95) es facil inferir lo que debe practicarse para valuar un quebrado: se me pregunta v. g. quanto valen los $\frac{5}{7}$ de un doblon. Ya que los $\frac{5}{7}$ de un doblon son lo mismo (95) que el septimo de 5 doblones, reduzco los 5 doblones á pesos (54), y parto por 7 los 20 pesos que salen; el cociente da 2 pesos, y la resta 6 pesos que he de partir por 7. Reduzco los 6 pesos á reales, y parto por 7 los 9 reales que salen; el cociente da 12 reales, y la resta 6 reales, que he de partir por 7; reduzco los seis reales á maravedises, parte por 7 los 204 maravedises que salen el cociente da 29 maravedis y $\frac{2}{7}$ de maravedí; por manera que los $\frac{5}{7}$ de un doblon valen 2 Pe. 12 rs. 29$\frac{1}{7}$ mrs.

118 Si se preguntara quanto valen $\frac{5}{7}$ de 24 doblones, es patente que se podrian tomar desde luego, conforme lo acabamos de practicar, los $\frac{5}{7}$ de un doblon, y multiplicar despues por 24 lo que saliere. Pero es mucho mas acomodado multiplicar primero los $\frac{5}{7}$ por 24 doblones, lo que da $\frac{120}{7}$ (106) doblones, y valuar despues este quebrado, cuyo valor se hallará que es 17 doblones, 8 reales, 19$\frac{3}{7}$ maravedises.

119 La regla que hemos dado para valuar los dos quebrados propuestos manifiesta que quando se trata de valuar un quebrado, sea el que fuere, se ha de multiplicar su numerador por el número que expresa quantas veces en la unidad, á la qual se refiere el quebrado, caben las partes en que se le quiere valuar, y partir despues el producto por el denominador del quebrado. En el primer exemplo, donde habiamos de valuar en pesos los $\frac{5}{7}$ de un doblon, hemos multiplicado primero el numerador 5 por 4, porque un doblon tiene quatro pesos, y despues hemos partido el producto 20 por el denominador 7. Lo propio hemos practicado para valuar las partes de peso en reales.

120 La valuacion de los quebrados nos encamina naturalmente á considerar los quebrados de quebrados. Dase este nombre á una serie de quebrados separados unos de otros por la preposicion *de*; v. g. $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$. &c. son quebrados de quebrados. Estos se reducen á un quebrado solo, multiplicando unos por otros todos los numeradores, y los denominadores tambien unos por otros; por manera que el quebrado $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ se reduce á $\frac{8}{15}$; el quebrado $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ se reduce á $\frac{30}{72}$ ó $\frac{5}{12}$.

Y con efecto, claro está que tomar los $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ es lo propio que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$, pues es tomar $\frac{2}{3}$ veces el quebrado $\frac{3}{4}$. Asimismo, tomar los $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$, viene á ser lo propio que tomar los $\frac{6}{12}$ de $\frac{5}{6}$; pues $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ son $\frac{6}{12}$. Lo que acabamos de decir manifiesta que los $\frac{6}{12}$ de $\frac{5}{6}$ son $\frac{30}{72}$ ó $\frac{5}{12}$.

Si se preguntase el valor de $\frac{3}{4}$ de $5\frac{3}{8}$ se convertiria el entero 5 en octavos, y la operacion quedaria reducida á hallar el valor del quebrado de quebrado $\frac{3}{4}$ de $\frac{43}{8}$, y se hallaria que es $\frac{129}{32}$, ó $4\frac{1}{32}$.

121 La valuacion de los quebrados de quebrados es el fundamento de la doctrina de los cambios, esto es, de la reduccion de las monedas de una nacion á las monedas de otra; como tambien de las medidas, pesos &c. de diferentes naciones; quiero decir, de lo que debe practicarse para expresar las monedas, pesos &c. de un pais en monedas, pesos &c. de otro.

Estas reducciones se executan por medio de la *regla conjunta*, así llamada porque junta muchas reglas de tres, que todas paran en una sola. En esta regla se comparan de dos en dos muchas monedas, pesos &c. de diferentes paises y valores, para averiguar lo que la primera, ó una parte determinada suya es respecto de la última ó de una parte determinada suya. En otro lugar trataré con individualidad de las reducciones que se executan por medio de la regla conjunta.

De los Quebrados continuos.

122 Quebrado continuo, ó fraccion continua se llama todo quebrado cuyo numerador es un número entero el que se quiera, y el denominador otro número entero, pero acompañado de otro quebrado, combinado del mismo modo con otro, y así prosiguiendo, ora sea finito, ora indefinito el número de estos quebrados.

Quebrado continuo es este

$$\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{11+\cfrac{8}{9+\cfrac{6}{13}}}}}$$

123 Los quebrados continuos se reducen con facilidad á quebrados comunes. Porque $\cfrac{8}{9+\cfrac{6}{13}} = \cdots$ $\cfrac{8}{\cfrac{9\times13+6}{13}} = \frac{8\times13}{9\times13+6} = \frac{104}{123}$; luego en lugar de los quebrados $\cfrac{4}{11+\cfrac{8}{9+\cfrac{6}{13}}}$ se podrá tomar $\cfrac{4}{11+\cfrac{104}{123}} = \cdots$ $\frac{4\times123}{11\times123+104} = \frac{492}{1457}$. Si substituimos este quebrado en lugar de los tres últimos, las quatro fracciones se reducirán á esta $\cfrac{2}{3+\cfrac{492}{1457}} = \frac{2\times1457}{3\times1457+492} = \cdots$ $\frac{2914}{4863}$. Finalmente, si se substituye este quebrado en lugar de los quatro, con los quales hemos visto que es igual, el quebrado continuo propuesto se-

será $\frac{5}{7+\frac{2914}{4863}} = \frac{5\times4863}{7\times4863+2914} = \frac{24315}{36955}$, el qual, después de abreviado, se reduce á $\frac{4863}{7391}$, último valor del quebrado continuo.

124 Los quebrados continuos sirven siempre que ocurre valuar cantidades fraccionarias, ú otras llamadas *irracionales*, de que se hablará mas adelante, en cuyo caso se va sacando una serie de quebrados simples, alternadamente mayores y menores que el propuesto, bien que expresados con números mucho menores. Para cuya operacion se echa mano de los cocientes que dan las diferentes divisiones con que se halla el máximo comun divisor de ambos términos del quebrado, haciendo de ellos el uso que manifiesta la regla que vamos á dar aplicándola al quebrado siguiente $\frac{547}{2835}$

125 Harémos con sus dos términos las mismas operaciones que quando se busca el máximo comun divisor de ambos, y sentarémos los cocientes de las diferentes divisiones como aquí se vé.

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & 5 & 2 & 7 & 1 & & \\ \frac{1}{5} & \frac{5}{26} & \frac{11}{57} & \frac{82}{425} & \frac{93}{482} & = & \frac{547}{2835} \end{array}$$

126 Regla. Multiplíquense el numerador y el denominador del quebrado que está inmediatamente antes del que se busca por el número, al qual este quebrado ha de corresponder, y á cada producto añádase succesivamente el numerador y el denominador del quebrado que inmediatamente antecede al quebrado precedente; las dos sumas serán respectivamente el numerador y el denominador del quebrado que se busca.

127 Esta regla supone, como se echa de ver, que esten hallados ya los dos primeros quebrados simples, de los quales el primero se halla sobre la marcha tomando por numerador la unidad y por denominador el primer cociente. El segundo quebrado puede sacarse por la regla general, suponiendo antes del primer quebrado esta expresion $\frac{0}{1}$. Esto presupuesto,

Para hallar el quebrado que he de sentar debaxo del tercer número ó cociente 2, multiplico por el mismo 2 el numerador 5 del segundo quebrado $\frac{5}{26}$, á cuyo producto añado 1, numerador del primer quebrado, lo que da 11, cuyo número será el numerador del quebrado que busco; multiplico tambien por el mismo 2 el denominador 26 del segundo quebrado, á cuyo producto 52 añado 5 denominador del primer quebrado, de donde sale 57, este será el denominador del quebrado que busco; por manera que el tercer quebrado será $\frac{11}{57}$. Para hallar el quarto quebrado, que ha de corresponder al quarto cociente 7, multiplico por el mismo 7 el numerador 11 del tercer quebrado, y al producto 77 añado 5, numerador del segundo quebrado, y sale 82 para el numerador del quarto quebrado; multiplico tambien por el mismo 7 el denominador 57 del tercer quebrado, al producto 399 añado 26 denominador del segundo quebrado, y saco 425 para denominador del quebrado que busco; es, pues, este quebrado $\frac{82}{425}$. Por el mismo camino se sacarán todos los demas quebrados.

128 Los quebrados continuos de que hemos hablado hasta aquí, cuyos diferentes numeradores son números distintos de la unidad, ocurren rara vez en los cálculos: los que mas se usan son los quebrados continuos compuestos de quebrados simples cuyos numeradores son todos la unidad. Es, pues, del caso manifestar como se reducen aquellos á estos, para lo qual servirá de exemplo el quebrado $\frac{547}{2835}$.

 He-

Hemos probado (86) que un quebrado no muda de valor porque se partan por un mismo número sus dos términos; por consiguiente si parto los dos términos del quebrado propuesto por 547, el cociente para el numerador será 1, y 5 para el denominador con la resta 100. Luego en lugar del quebrado propuesto podré tomar $\frac{1}{5+\frac{100}{547}}$ Si parto ahora el numerador y el denominador del quebrado $\frac{100}{547}$ por 100, en lugar de $\frac{100}{547}$ tendré $\frac{1}{5+\frac{47}{100}}$, y por consiguiente... $\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{47}{100}}}$ en lugar del primero; fácil será reducir el quebrado $\frac{100}{47}$, el qual se reducirá á $\frac{1}{2+\frac{6}{47}}$, y todos los demas, hasta llegar á una resta igual á la unidad; la qual es el numerador del último quebrado, el qual en nuestro caso es $\frac{1}{5}$. Por consiguiente el quebrado $\frac{547}{2835}$ reducido á quebrado continuo es igual á esta serie finita.

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}$$

Ope-

Operaciones de Arismética con números denominados.

129 Hemos dicho en otro lugar que los números denominados son aquellos que expresan unidades de diferentes especies; v. g. 3 horas, 4 minutos y 6 segundos es un número denominado.

Hay números denominados de varias especies; pero el modo de calcularlos pende en mucho del modo con que está dividida la unidad principal, y sobre todo de la relacion que con esta tienen, y tambien unas con otras, sus diferentes partes; cuya relacion respecto de algunos números denominados expresamos en las siguientes tablas, y apuntamos los signos con que se señalan las de las diferentes unidades.

Medidas de extension.

punto.					p°.
12	linea.				l.
144	12	pulgada.			p.
1728	144	12	pie.		P.
9484	432	36	3	vara.	V.

Tiempo.

tercero.					‴
60	segundo.				″
360	60	minuto.			′
216000	3600	60	hora.		h.
5184000	86400	1440	24	dia.	d.

 Pe-

Pesos.

grano.						gr.
24	escrúpulo.					escr.
72	3	adarme.				adar.
576	24	8	onza.			O.
4428	192	64	8	marco.		M.
9216	384	128	16	2	libra.	lib.

Monedas.

maravedi.						mrs.
34	real.					rl.
340	10	escudo.				esc.
370	11	$1\frac{1}{10}$	ducado.			duc.
510	15	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{11}$	Peso.		Pe.
2040	60	6	$4\frac{5}{11}$	4	doblon.	dobl.

El que entienda una de estas tablas entenderá todas las demas, por cuyo motivo explicarémos la primera.

Esta tabla empieza como todas las siguientes por la menor de todas las partes que componen la unidad principal, que aquí es la vara. Siguen por su órden las partes inmediatamente mayores, expresando quantas de las partes menores componen una de las inmediatamente mayores. Como la parte mínima de la vara es el punto, ocupa el primer lugar empezando desde arriba; como debajo de *punto* hay 12, y

y al lado hay *linea*, esto significa que 12 puntos componen una linea; debajo de *linea* hay 12 y al lado hay *pulgada*, esto significa que 12 lineas componen una pulgada; debajo de *pulgada* hay 12, y al lado *pie*, porque 12 pulgadas componen un pie; debajo de *pie* hay 3, y al lado *vara*, porque 3 pies componen una vara.

Adicion de números denominados.

130 Se escriben todos los números por sumar unos debajo de otros, por manera que todas las partes de una misma especie esten en una misma columna; y tirando una raya por debajo de todo, se empieza á sumar por las partes menores. Si su suma no llega á una unidad de la especie inmediatamente mayor, se pone debajo de las unidades de su especie; si llega á componer una ó muchas unidades cabales de la especie inmediatamente mayor, se pone cero ó nada debajo de la columna, llevando el número cabal de unidades para agregarlas á la columna siguiente; si el número de unidades de la primer columna excede una ó muchas, el exceso se pone debajo, y se llevan las partes cabales conforme acabamos de decir; lo propio se practica con todas las columnas.

131 Quiero sumar las partidas siguientes

227 Pe.	14 rs.	8 mrs.
184	11	11
2549	13	15
17	10	7
2980	4	7

La suma de los maravedises llega á 41, que valen

1 real y 7 mrs.; pongo los 7 mrs. y llevo 1 real para agregarle á la columna siguiente que expresa reales, y saco 49 reales, que componen 3 pesos y 4 reales mas; pongo estos debajo de la segunda columna, y llevo los 3 pesos para juntarlos con las unidades de la columna siguiente que son pesos, cuya suma hallo que es 2980. Luego las quatro partidas montan 2980 pesos, 4 rs. y 7 mrs.

132 Voy á sumar las quatro partidas siguientes

54 r.	2 P.	3 p.	9 l.
12	1	4	11
9	2	11	11
8	2	9	10
86	0	6	5

La suma de las lineas llega á 41, que son 3 pulg. y 5 lineas; pongo, pues 5 lin. y llevo 3 pulg. que agrego á las de la columna siguiente: saco la suma 30 que vale 2 pies y 6 pulg., pongo las 6 pulg. y llevo 2 pies, los quales añadidos á los de la columna siguiente, componen 9 pies, que valen 3 varas cabales: por lo mismo pongo cero debajo de la columna de los pies, pues ninguno queda que apuntar: agrego las tres varas á las de la columna siguiente; y saco la suma 86; por manera que las quatro partidas componen 86 V. o P. 6 p. 5 l.

Sustraccion de números denominados.

133 Escríbanse los números propuestos como en la Adicion, y empiécese la operacion por las unidades de menor especie. Si el número inferior se puede restar del superior, póngase debajo la resta; si no se puede restar quítese á la especie inmediata-

men-

mente mayor una unidad, reduciéndola á la unidad inmediatamente menor (54), para añadirla á la partida de arriba de la primer columna. Practíquese lo propio con cada especie, y siempre que se quite una unidad á alguna partida, se la mirará como una unidad menor; finalmente, escríbase la resta á medida que se vaya sacando, debaxo de su respectiva columna.

134 De	143 Pe.	14 rs.	8 mrs.
he de restar...	75	10	20
	68	3	22

Como no puedo restar 20 mrs. de 8 mrs, quito á la partida superior de los reales 1 real que vale 34 mrs, los agrego á los ocho y compongo 42 mrs. de los quales resto los 20, y queda la resta 22. Despues resto 10 reales, no de 14 rs., sino de 13 que quedan por razon del real que quité, y queda la resta 3: finalmente, resto 75 pesos de 143 pesos, y restan 68 Pe.

135 De	163 Pe.	0 rs.	5 mrs.
he de restar...	84	14	30
	78	0	9

Porque de 5 mrs. no puedo restar 30 mrs. ni tampoco puedo quitar 1 real á cero reales, quito un peso de los 163; pero de los 15 rs. que vale un peso dexo con el pensamiento 14 en lugar del cero, ó los apunto encima, y el otro real, reducido á mrs. le añado á los 5, lo que compone 39 mrs. Hecho esto, hago la operacion como arriba, y saco la resta 78 Pe. 0 rs. 9 mrs.

Mul-

Multiplicacion de números denominad.

136 La multiplicacion de un número denominado por otro se puede reducir á la multiplicacion de un quebrado por otro, cuya operacion ya queda dicho (105) como se practica. Si se pregunta v. g. quanto ha de costar una obra de 54 V. 2 P. á razon de 18 P. 5 rs. 15 mrs. la vara; se puede reducir todo el multiplicando 18 P. 5 rs. 15 mrs. á maravedises (54), de lo que saldrán 9365 mrs. y como el maravedi es la 510ma parte del peso, será el multiplicando $\frac{9365}{510}$ de peso: se reducirá igualmente todo el multiplicador 54 V. 2 P. á pies, de lo que resultarán 164 pies; y como el pie es la tercera parte de la vara, el multiplicador será $\frac{164}{3}$ de vara: por manera que la operacion queda reducida á multiplicar $\frac{9365}{510}$ de peso por $\frac{164}{3}$ de vara, cuya multiplicacion dará el producto $\frac{1535860}{1530}$ (105) de peso, que valen 1003 Pe. 12 rs. 15 mrs. (117).

137 Pero se pueden multiplicar unos por otros los números denominados sin reducirlos á quebrados. Primero que declarémos como se hace la operacion, es del caso prevenir que quando se han de multiplicar uno por otro dos números, cuyas unidades son de distinta especie, se ha de tomar por multiplicando aquel cuyas unidades son de la misma especie que las que ha de expresar el producto. Si quiero saber v. g. quanto importan 12 varas de paño á 50 rs. la vara, he de considerar como multiplicando el número 50 rs. pues el producto ha de expresar reales; porque han de salir al producto tantas veces 50 rs. quantas varas hay, esto es 12 veces.

De donde se infiere que el multiplicador siempre es un número abstracto, que no expresa unidades, ni partes de unidad de determinada especie, sino quantas veces se ha de tomar el multiplicando. En el exemplo propuesto, el multiplicador 12 es un número abstracto, lo que no puede dexar de ser, porque si le consideráramos como que representa 12 varas, y executásemos la multiplicacion, cometeriamos un absurdo; pues lo sería multiplicar varas por reales.

138 Sentado esto, que, segun se echa de ver, debe entenderse de los números denominados igualmente que de los que no lo son, hay tres reglas que practicar quando se han de multiplicar uno por otro dos números denominados. 1.° Se han de reducir ambos á la menor de las especies que expresan: 2.° se multiplican uno por otro despues de esta reduccion: 3.° se parte el producto por el número que expresa quantas veces la unidad menor del multiplicador cabe en la mayor; el cociente es el producto que se busca. Pero como este producto expresará las unidades menores del multiplicando, será menester reducirle á las unidades mayores. Los casos prácticos lo acabarán de aclarar.

139 ¿Quanto importan 4 V. 2 P. 8 p.
Costando la vara 2 P. 3 rs. 4 mrs.?

1°. Reduzco á maravedises toda la cantidad 2 Pe. 3 rs. 4 mrs, y salen 1126 ms. Reduzco tambien toda á pulg. la cantidad 4 V. 2 P. 8 p, y saco 176 p. 2°. multiplico 1126 por 176, sale el producto 198176; 3°. Parto este producto por 36, que expresa quantas veces la unidad menor del multiplicador, que es la pulgada, cabe en la mayor, que es la vara. Salen al cociente 5504 mrs. y $\frac{32}{36}$ ó $\frac{8}{9}$ de maravedi; y porque este quebrado vale muy cerca de un maravedi, le omito, pero añado una unidad

(97)

(97) al último guarismo del cociente hallado, el qual por consiguiente será 5505. Practicando lo dicho (77), hallarémos que estos maravedises valen 10 pesos, 11 reales y 31 mrs.

140 ¿Que ganancia han de dar 10 Pe. 3 rs. 4 mrs. en el supuesto de que cada peso dé 3 Pe. 2 rs. 6 mrs. de ganancia?

Por la pregunta se conoce que hemos de multiplicar 3 Pe. 2 rs. 6 mrs. por 10 Pe. 3 rs. 4 mrs; reduzco 3 Pe. 2 rs. 6 mrs., todo á maravedises, y saco 1604 mrs., y el multiplicando á 5206 mrs. 2°. multiplico 1604 por 5206: saco el producto 8350424 mrs. 3°. parto este producto por 510, cuyo número expresa quantos maravedises caben en un peso; salen al cociente 16373 mrs. y $\frac{194}{510}$ de maravedi, que por lo dicho (77) será facil reducir á pesos y reales, y saldrán 32 Pe. 1 r. 19 mrs.

141 De las tres operaciones que hay que practicar en la multiplicacion de dos números denominados uno por otro, la razon de las dos primeras se percibe facilmente: por lo que solo hemos de manifestar la de la tercera, y aplicarémos su declaracion al exemplo primero. Si cada pulgada valiera 1126 mrs., claro está que 4 V. 2 P. 8 p. 6 176 pulg. valdrian 198176 mrs. por ser este número el producto de 1126 por 176. Pero 126, son por lo supuesto, el valor de la vara, y no de la pulgada; luego ya que la vara vale 36 pulg. el precio de la vara es 36 veces menor que el de la pulg. ó que el producto 198176; luego para sacar en maravedises el valor de 176 pulg. hay que partir 198176 por 36.

142 Si se hubiesen de multiplicar uno por otro dos números denominados, que ambos expresasen medidas de longitud, quales serian estos dos 5 V. 1 P. 6 p. y 3 V. 2 P. 3 p., se omitiria la tercera operacion, y compondria el producto una superficie, conforme se manifestará en la Geometría.

Division de los Números Denominados.

143 Esta operacion será muy fácil de entender para los que se hubieren enterado de la antecedente. Solo prevengo que así como en la multiplicacion de los números denominados se considera el multiplicador como un número abstracto, en la division de los mismos números se considera algunas veces como número abstracto el divisor, y otras el dividendo. La naturaleza de las preguntas que dan motivo á esta division, determina qual de los dos números debe considerarse como número abstracto.

144 Supongamos que 7 M 2 O han costado 346 Pe. 14 rs. 6 mrs. y se pregunta á como sale el marco?

Para executar esta division. 1.° se reduce el divisor á las unidades de su menor especie; 2.° se hace la division empezando por las unidades mayores del dividendo, para hacer despues lo propio con las que se siguen; 3.° se multiplica todo el cociente por el número que expresa quantas veces la unidad menor del divisor cabe en la mayor.

Si despues de hecha la division de las unidades mayores del dividendo, pongo por caso que sean pesos, queda alguna resta, se la debe reducir á reales, los que se añaden á los que lleva ya el dividendo, y la suma se parte por el número que partió antes los pesos. Si quedase tambien alguna resta despues de divididos los reales, se la debe reducir á maravedises para añadirlos á los que lleve ya el dividendo, y la suma se parte por el mismo divisor.

Apli-

145 Apliquemos la regla al exemplo propuesto. 1.° Reduzco el divisor 7 M. 2 O. á 58 *onzas*; 2.° parto 346 Pe. 14 rs. 6 mrs. por 58, empezando por los pesos, y saco el cociente 5 pesos, y queda la resta 56, que reduzco á reales, multiplicándola por 15; sale el producto 840, al qual añado los 14 rs. del dividendo. Sale la suma 854, que parto por 58, sale el cociente 14 rs., y queda la resta 42, que reduzco á 1428 mrs.; junto con ellos los 6 del dividendo, sale la suma 1434, que divido por 58; salen 24 mrs. y queda el quebrado $\frac{42}{58}$ que expresa partes del maravedi. 3.° Multiplico este cociente por 8, porque caben 8 onzas en el marco; sale el producto 47 Pe. 12 rs. 27 mrs. y $\frac{46}{58}$ de maravedi, cantidad despreciable.

146 He comprado 55 V. y tres quartas de paño que me han costado 642 Pe. 12 rs. 8 mrs. quiero saber á como sale la vara. 1.° Reduzco las 55 V. $\frac{3}{4}$ á quartas, que son las unidades menores del divisor, saco 220 quartas, las quales con las $\frac{3}{4}$ componen 223 quartas, cuya cantidad será el divisor. Empiezo la division por las unidades mayores del dividendo, y saco el cociente 2 Pe. y la resta 196, la qual reducida á reales y añadida á los 12 rs. que hay en el dividendo, da 2952; partolos por 223, saco el cociente 13, y queda la resta 53, la qual reducida á maravedises y añadida á los 8 que hay en el dividendo; da 1810 mrs.; partolos por 223, saco el cociente 8 y el quebrado $\frac{26}{223}$, parte despreciable de maravedi. Hallo, pues, que el cociente total es 2 Pe. 13 rs. 8 mrs. los multiplico por 4, porque la unidad menor del divisor cabe 4 veces en la mayor, y sale el verdadero cociente 11 Pe. 7 rs. 32 mrs. y á esto sale cada vara de paño.

147 Resta explicar la tercer regla del método, porque las dos primeras se perciben facilmente; aplicaremos la explicacion al exemplo primero. No hay *duda en que el cociente que dan* 346 Pe. 14 rs. 6 mrs. partidos por 58 es el valor de una onza, una vez que el divisor 58 expresa onzas. Por consiguiente para sacar el valor que buscamos del marco, se ha de multiplicar el tal cociente por 8 que expresa quantas onzas hay en el marco.

148 Quando el divisor no tiene unidades mas que de una especie, se escusan la primera y tercer regla del método. Si 26 arrobas de vino v. g. han costado 1467 rs. 31 mrs., y quiero saber á como sale la arroba, bastará partir por 26 primero los reales y despues los mrs. del dividendo, añadiéndoles los que expresare la resta que quedare despues de partidos los reales por 26.

149 En los exemplos propuestos debe considerarse el divisor como un número abstracto, porque solo expresa en quantas partes iguales se ha de partir el dividendo. En otros casos, se ha de mirar el cociente como un número abstracto, porque no tiene mas oficio que expresar quantas veces el divisor cabe en el dividendo.

Si me tocase partir 67 Pe. 12 rs. 6 mrs. por 5 Pe. 4 rs. 6 mrs. echaria de ver que aquí solo me tocaria buscar un número que exprese quantas veces cabe el divisor en el dividendo, en cuyo caso debe reducirse el dividendo á la menor cantidad del divisor antes de practicar la division. En el caso que aquí propongo, el dividendo será 34584, el divisor 2692, y el cociente será $12\frac{2280}{2692}$. Se viene á los ojos que en las qüestiones parecidas á esta debe omitirse la tercer regla del método, pues para saber quantas veces cabe el divisor en el dividendo, basta hallar quantas veces todas las unidades menores del divisor caben en las unidades de la misma especie del dividendo, y queda hecha la operacion.

De las cantidades Decimales.

150 Ahora declararémos un método particular, de dividir y subdividir la unidad en varias partes, cuyo método facilita muchísimo los cálculos. Consiste en dividir la unidad en partes que cada una es diez veces menor que la primera, por cuyo motivo las llamamos partes *Decimales*. Bien se echa de ver que un número que expresa solas partes decimales es un quebrado, y fraccionaria toda cantidad que ademas de expresar unidades, expresa tambien partes decimales de su unidad. Como las decimales son tan fáciles de calcular como los enteros, son sumamente socorridas en todos los ramos de la matemática, y en muchísimos cálculos manifestarémos quan fundada es la preferencia que han merecido respecto de los quebrados comunes.

151 Para valuar en decimales las partes menores que la unidad, se concibe esta, sea la que fuese, peso, vara &c., compuesta de 10 partes, al modo que se concibe la decena compuesta de 10 unidades sencillas, ó del mismo modo que concebimos el peso compuesto de 15 reales. Estas nuevas unidades, contrapuestas á las decenas, se llaman *décimas*; se pintan con los mismos guarismos que las unidades sencillas; y como son diez veces menores que ellas, se colocan á la derecha del guarismo que representa las unidades sencillas.

Pero con la mira de precaver las equivocaciones que se podrian padecer si se tomasen estas décimas por unidades, se señala el lugar de las unidades con un signo particular, el qual suele ser una coma puesta despues del guarismo que expresa las unidades á mano derecha, ó lo que es lo mismo, entre las unidades y las *décimas*; veinte y quatro unidades y *tres décimas* se escriben así 24, 3.

Tambien se considera cada décima como compuesta de otras diez unidades, cada una de ellas diez veces menor por lo mismo que una décima, y se escriben despues de las décimas á mano derecha. Estas unidades diez veces menores que las décimas, son cien veces menores que las unidades principales, por cuya razon las llamamos *centésimas*: veinte y quatro unidades, tres décimas y cinco centésimas se escriben así 24,35.

Consideramos igualmente las *centésimas* como compuestas de diez partes, las quales son mil veces menores que la unidad principal, por cuya razon se llaman *milésimas*, y por ser diez veces menores que las centésimas, se escriben despues de ellas á mano derecha. Prosiguiendo esta division de diez en diez, se forman nuevas unidades, que llamamos por su orden *diez milésimas*, *cien milésimas*, *millonésimas*, *diez millonésimas*, *cien millonésimas*, &c. las quales se escriben en lugar tanto mas apartado de la coma, quanto menores son.

152 Las partes de la unidad que acabamos de dar á conocer, se llaman *decimales*; se leen del mismo modo que los números enteros. Despues de leer los guarismos que estan antes de la coma á mano izquierda, se leen las decimales del mismo modo, añadiendo al fin el nombre de las unidades decimales de la última especie. Para leer v. g. este número 34, 572, diríamos: treinta y quatro unidades, y quinientas setenta y dos milésimas. Si se tratase v. g. de varas, diríamos: 34 varas y 572 milésimas de vara.

Es muy ovia la razon de este modo de leer las decimales, porque en el número 34, 572, el guarismo 5 puede expresar como queramos ó cinco *décimas*, ó quinientas *milésimas*; porque valiendo la dé-

décima (151) 10 centésimas, y la centésima 10 milésimas, la décima tendrá diez veces diez milésimas, ó 100 milésimas, por lo que, las 5 décimas valen 500 milésimas. Por lo mismo podremos leer el 7 diciendo setenta *milésimas*, porque cada *centésima* vale 10 *milésimas*.

Por lo que mira á la especie de las unidades del último guarismo, es muy fácil de hallar, nombrando succesivamente desde la izquierda á la derecha cada guarismo desde la coma, como sigue: *décimas*, *céntesimas*, *milésimas*, *diezmilésimas* &c.

153 Quando no hay unidades enteras, y el número solo expresa partes de la unidad, se pone un cero en lugar de las unidades; por lo que, 125 milésimas se escriben así 0,125. Si quisiéramos expresar 25 milésimas, escribiríamos 0,025, poniendo un cero entre la coma y los demas guarismos, ya para señalar que no hay *décimas*, ya para dar á las figuras que se siguen su verdadero valor. Por la misma razon seis *diez milésimas* se pintan de este modo 0,0006.

154 Considerémos ahora las mudanzas que padece el valor de un número decimal quando se muda la coma de lugar.

Ya que la coma determina el lugar de las unidades, y el valor de todos los demas guarismos pende de la distancia á que estan de la coma, si esta se pone uno, dos, tres, &c. lugares mas adelante á mano izquierda, saldrá un número 10,100,1000 &c. veces menor de lo que era; y al contrario será 10,100,1000 &c. veces mayor de lo que era, si se pone la coma uno, dos, tres &c. lugares mas adelante á la derecha.

No hay cosa mas fácil de entender; porque si se nos ofrece v. g. el número 4327,5264, y le escribimos de este modo 432,75264, poniendo la coma un lugar mas adelante á la izquierda, es claro que los millares del primer número son centenares en el segundo; los centenares, decenas; las decenas, unidades; las unidades, décimas; las décimas, centésimas, &c. Porque en 4327,5264 el 4 antes de la coma expresa millares, y el 5 despues de la coma décimas; en estotro número 432,75264, el 4 antes de la coma expresa centenares, pues el 2 expresa unidades, y el 3 decenas; el 7 despues de la coma expresa décimas, y el 5 centésimas, &c.

Luego cada parte del primer número es diez veces menor despues de la transposicion de la coma. Si trasladamos al contrario la coma un lugar mas adelante á mano derecha, y escribimos 43275,264, los millares del primer guarismo seran ahora decenas de millar; los centenares, millares; las decenas, centenares; las unidades, decenas: las décimas serán unidades; las centésimas, décimas, &c. Luego el último número es diez veces mayor que el primero.

Por los mismos principios probaríamos que adelantando la coma dos, ó tres lugares á mano izquierda, el número será 100 ó 1000 veces menor: y que será 100 ó 1000 veces mayor, si se adelanta la coma dos ó tres lugares mas á mano derecha.

155 Prevenimos finalmente que un número decimal no muda de valor aunque á continuacion de su última figura decimal se añadan los ceros que se quiera; v. g. 43,25 es lo propio que 43,250: que 43,2500; que 43,25000 &c. Porque como cada *centésima* vale 10 *milésimas*, ó 100 diezmilésimas, &c.; las 25 *centésimas* han de valer 250 milésimas, ó 2500 *diezmilésimas*, &c. En una palabra, esto es lo mismo que si en lugar de decir 25 doblones, dixeramos 100 pesos, ó en lugar de 6 arrobas 150 libras: finalmente, aunque con añadir ceros exprese el nú-

mero mas decimales, tambien las expresa menores en la misma proporcion.

156 El modo de calcular por decimales se funda, conforme se echa de ver, en el sistema de numeracion que seguimos y hemos declarado al principio (8). Porque ya que desde la unidad ácia la izquierda las unidades que los guarismos expresan van siendo diez veces mayores, es conseqüencia forzosa que las unidades de los guarismos que hay despues de la unidad á la derecha vayan siendo diez veces menores. En 31, 3; si el 3 de la izquierda expresa decenas, el 3 de la derecha no puede menos de expresar décimas, por cuyo motivo es lo mismo que $\frac{3}{10}$; en 431, 34, si el 4 de la izquierda vale centenares, el 4 de la derecha ha de valer centésimas, ó partes cien veces menores que la unidad, por cuyo motivo el último 4 es lo mismo que $\frac{4}{100}$; en virtud de esto la cantidad decimal 0,572 es lo mismo que $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{2}{1000}$ ó $\frac{572}{1000}$.

Por medio de las decimales se reducen las subdivisiones de las diferentes medidas al sistema de numeracion que seguimos (8), lo que facilita inmensamente su cálculo; por decimales se saca tambien tan próximo al verdadero como se quiere el valor de algunas cantidades que no es posible valuar cabalmente.

Adicion de las Decimales.

157 Como las decimales se cuentan del mismo modo que los enteros, por decenas de la derecha á la izquierda, la regla para sumarlas es de todo punto la misma, ocupando las decimales de un mismo nombre una misma columna.

Para sumar, pues, unas con otras las siguientes decimales 72,957; 12,8; 124,03, ó sacar el valor de 72,957+12,8+124,03 se asentarán las tres partidas como aquí.

$$\begin{array}{r} 72,957 \\ 12,8 \\ 124,03 \\ \hline 209,787 \end{array}$$

Practicando lo propio que en los exemplos de antes (22), sale la suma 209,787.

Substraccion de las Decimales.

158 Para restar una decimal de otra, se practica de todo punto lo mismo que para restar un entero de otro; pero para escusar tropiezos en la practica, se procura que en ambas partidas haya un mismo número de figuras decimales, añadiendo los ceros necesarios á la partida que tubiere menos decimales, cuya preparacion no alterará su valor (155).

De. 5403,25
quiero restar. 385,6532

Añado dos ceros á continuacion de las decimales de la partida superior, hago despues la substraccion propuesta del mismo modo que si las dos partidas fuesen números enteros.

La resta es 5017,5968.

$$\begin{array}{r} 5403,2500 \\ 385,6532 \\ \hline 5017,5968 \end{array}$$

 Mul-

Multiplicacion de las Decimales.

159 Las decimales se multiplican unas por otras del mismo modo que los enteros, sin hacer caso alguno de la coma; pero despues de hecha la multiplicacion, se separan á mano derecha, en el producto despues de la coma tantas figuras, quantas decimales hay en ambos factores.

He de multiplicar. 54,23
por. 8,3

16 269
433 84

450,109

Multiplico 5423 por 83, saco el producto 450109; y como hay dos decimales en el uno de los factores, que es el multiplicando, y una en el otro factor, que es el multiplicador, separo tres figuras á la derecha del producto hallado despues de la coma, el qual con esto es 450,109, y el que corresponde en realidad.

La razon es clara; porque si el multiplicador fuese 83, las partes decimales del producto expresarian centésimas, pues se tomaria 83 veces el multiplicando 54,23, cuyas decimales son centésimas; pero como el multiplicador es 8,3 esto es (154) diez veces menor que 83, el producto no puede menos de expresar unidades diez veces menores que las centésimas; luego el último guarismo de sus decimales ha de expresar milésimas; luego ha de haber tres figuras decimales en el producto, esto es, tantas quantas hay en ambos factores juntos.

La

La misma razon se aplica á otro caso qualquiera. Si he de multiplicar. 0,12
por. 0,3

0,036

Multiplico 12 por 3; y sale el producto 0,036.

Como por la regla se han de separar en este caso tres figuras decimales, podria haber alguna duda, porque el producto no tiene mas de dos; pero el que tuviere presente la razon dada de esta regla en el exemplo antecedente, echará de ver que es preciso añadir, como aquí se vé, un cero entre 36 y la coma. La razon es que si hubiese de multiplicar 0,12 por 3, el producto seria patentemente 0,36; pero como he de multiplicar por 0,3, esto es por un número diez veces menor que 3, no puede menos de salir un producto diez veces menor que 0,36, el qual por lo mismo ha de expresar milesimas, cuya condicion se verifica con escribir 0,036 pues el 3 que en 0,36 expresa décimas en 0,036 expresa centésimas, &c.

160 De lo dicho (154) se saca el método de multiplicar una cantidad decimal por 10, 100, 1000 &c. esto es por la unidad acompañada de muchos ceros. Adelántese ácia la derecha la coma tantos lugares quantos ceros lleva el multiplicador, el producto será la decimal que resultare de esta mudanza. Así

$0,578 \times 10 = 5,78$; $0,578 \times 100 = 57,8$
$0,578 \times 1000 = 578$; $0,578 \times 10000 = 5780$.

161 Quando se han de multiplicar una por otra dos partidas que tienen muchas figuras decimales, se hace la multiplicacion por un método compendioso y al reves, conforme voy á proponer.

Se multiplica primero todo el multiplicando, empezando á mano derecha, por el primer número

del

del multiplicador, á mano izquierda.

Se señala despues con un punto el guarismo del multiplicando por donde empezó la operacion, y se multiplican las demas figuras por el segundo guarismo del multiplicador á mano izquierda.

Se señala con un punto el guarismo del multiplicando por donde empezó la última multiplicacion, y se multiplican los que se le siguen á la izquierda por el tercer guarismo del multiplicador á la izquierda. Se prosigue á este tenor hasta multiplicar de la derecha á la izquierda todo el multiplicando succesivamente por todos los guarismos del multiplicador de la izquierda á la derecha, apuntando con cuidado en cada multiplicacion particular el guarismo del multiplicando por donde empezó; y teniendo presente lo que se ha de llevar del guarismo antecedente.

Los productos particulares se pondran todos unos debajo de otros, por manera que sus primeros guarismos á mano derecha esten en una misma columna, y despues se sumarán.

Ultimamente, al tiempo de multiplicar por las unidades, si el multiplicador las tuviese, repárese que lugar ocupa en el multiplicando la figura por donde empieza la multiplicacion particular; habrá tantas decimales en el producto total quantas unidades tenga el número que expresa el lugar que entre las decimales del multiplicando ocupa la figura por la qual empezó dicha multiplicacion.

O sino mirese que lugar ocupa en las decimales del multiplicando el guarismo de la multiplicacion particular, contándolas desde la coma ácia la derecha, y que lugar ocupa en las decimales del multiplicador, contándolas del mismo modo, el guarismo de la misma multiplicacion; el producto tendrá tantas decimales, quantas unidades hubiere en

la

la suma de los números que señalan los dos lugares. *Todo esto declarado, vamos á aclararlo con unos exemplos.*

Quiero multiplicar. .	76,84375	
por.	8,21054	
	61475000	
	1536875	
	76843	
	3842	
	307	
producto. . .	630,92867	
Multiplico. . .	0,3570643	
por.	0,0210576	
	7141286	
	357064	
	17853	
	2499	
	214	
producto.	0,007518916	
Multiplico.	17,002576	830
por.	0,35608204	
	51007730	
	8501288	
	1020154	
	13602	
	340	
	7	
Sale.	6,0543121	

Va

Vamos á manifestar la práctica de este método abreviado, aplicando el discurso al primer exemplo.

Multiplico todo el multiplicando por 8, y saco el producto 61475000. Apunto el 5, y multiplico por 2: diciendo primero 2 veces 5 son 10, llevo 1, y despues digo: 2 veces 7 son 14, y una que llevo son 15; pongo, pues, 5, pero en la primer columna de la derecha: dos veces 3 son 6 y 1 que llevo son 7, &c.; saco el producto 1536875. Apunto el 7, y digo: una vez 3 es 3, una vez 4 es 4, &c.; saco, pues el producto 76843. Apunto el 3, y digo: 0 veces 4 es 0, &c. Apunto el 4 y digo: 5 veces 4 son 20, llevo 2; 5 veces 8 son 40 y 2 que llevo son 42, &c. saco el producto 3843. Ultimamente apunto el 8, y digo: 4 veces 8 son 32, llevo 3; 4 veces 6 son 24 y 3 que llevo 27; 4 veces 8 son 28 y 2 que llevo son 30; sale, pues, el producto 307; la suma de todos los productos particulares, ó el producto total es 630,92867.

En el segundo exemplo, el primer multiplicador es 2, y el primer multiplicando es el 3 de la derecha; el 2 ocupa en su partida el segundo lugar decimal, el 3 ocupa en el multiplicando el septimo lugar, 7 y 2 son 9; serán, pues, nueve las figuras decimales del producto. Esta regla se verifica igualmente en todas las demas multiplicaciones particulares; v. g. en la quinta, los factores son el 7 del multiplicando, y el 7 del multiplicador; aquel ocupa en su partida el tercer lugar decimal, y el otro el sexto; 3 y 6 son 9.

Por este método se sacan los productos con las decimales que se quiere. En el tercer exemplo, donde no queremos mas que siete, reparo que el 3 del multiplicador por el qual ha de empezar la multiplicacion ocupa el primer lugar decimal; luego empiezo por la decimal del multiplicando que ocupa el sexto lugar; por lo que desecho las tres figura decimales 830.

Quando se hubieren de multiplicar partidas decimales muy grandes, será de mucho alivio tener á la vista una tabla como la propuesta (56).

Division de las Decimales.

162 Quando ocurre partir una decimal por otra, se ponen á continuacion de la que tiene menos decimales tantos ceros quantos se necesitan para que en ambas partidas haya igual número de figuras decimales, cuya preparacion no muda (155) su valor: se borra la coma en ambas cantidades, y se hace la division del mismo modo que si fuesen enteros; el cociente que sale es el verdadero.

He de partir 12,52 por 4,3.

escribo. . . . 12,52 | 4,3
ó mejor. . . . 12,52 | 4,30

añadiendo un cero al divisor, á fin de que tenga tantas decimales como el dividendo: borrando la coma, el dividendo es 1252 y el divisor 430; hago la operacion, y saco el cociente 2 y la resta 392, quiero decir que el cociente es $2\frac{392}{430}$.

1252 | 430
| $2\frac{392}{430}$

Pero como la principal utilidad del cálculo por decimales es escusar los quebrados comunes, en vez de escribir la resta 392 á manera de quebrado, como está figurado, prosigo la operacion como aquí se vé.

Des-

1252	430
3920	2,9116
500	
700	
2700	
120	

Despues de sacar el cociente entero 2, añado un cero á la resta 392, cuyo cero le hace diez veces mayor de lo que es; prosigo partiendo por 430, y pongo el cociente 9 que sale; pero primero señalo el lugar de las unidades enteras con poner la coma despues del 2, y el 9 expresará décimas no mas. Hecha la multiplicacion y sustraccion, añado un cero á la resta 50, lo que es lo mismo que si al principio hubiera añadido dos ceros al dividendo. Escribo despues del 9 el cociente 1 que saco, lo que le señala su verdadero valor, pues de este modo expresa centésimas. Prosigo á este tenor la operacion quanto me parece, y ciñéndome en este exemplo á quatro figuras decimales, saco un cociente que no discrepa del verdadero una diez milésima parte, pues no le puedo añadir, ó quitar una unidad sin que sea mayor ó menor de lo que corresponde.

Falta decir 1.° Por que el borrar la coma en el dividendo y el divisor no altera en manera alguna el valor del cociente, despues de ser uno mismo en ambos el número de figuras decimales. En el exemplo propuesto el dividendo 12,52 y el divisor 4,30 son respectivamente 1252 centésimas y 430 centésimas, pues las unidades enteras valen centenares de centésimas (151); pero claro está que en 2252 centésimas caben 430 centésimas, del mismo modo que en 1252 unidades 430 unidades; luego no hace falta la coma, una vez que en ambas partidas hay igual número de figuras decimales.

2.° Porque del añadir un cero v. g. á la resta 392 no se sigue error alguno en la operacion, con tal que se ponga el cociente donde valga diez veces menos que si expresara unidades. Es constante que quando añado un cero á un dividendo le hago 10 veces mayor; pero si al tiempo de executar la division por un número determinado, hago que el cociente valga diez veces menos, compenso ó rebajo con esto el exceso que di al dividendo quando le añadí el cero. Esta razon sirve tambien para quando se añaden mas ceros al dividendo.

163 Para abreviar la division de las decimales quando son partidas grandes, en lugar de apuntar á cada division particular un guarismo del dividendo se apunta uno del divisor, y quando se multiplica todo el divisor por el número puesto al cociente, se empieza la multiplicacion por el último guarismo apuntado en el divisor, sin omitir lo que corresponde llevar de la multiplicacion del guarismo antes apuntado.

630,92878	76,84375
61475000	8,210541
1617878	
1536875	
81003	
76843	
4159	
3842	
317	
307	
10	
7	
3	

Quan-

Quando hago la division aquí figurada, parto todo el dividendo por todo el divisor, saco 8 al cociente, por cuyo número multiplico todo el divisor, y despues de executada la correspondiente sustraccion, queda la resta que se vé.

Apunto el último guarismo 5 del divisor, el qual en la segunda division particular será 76,8437 no mas. Hago la operacion, saco el cociente 2 por cuyo número multiplico el divisor 76,8437; pero como si multiplicara por 2 el 5 omitido, saldria el producto 10, y tendria que llevar 1, la llevo con efecto y la añado á 14, producto del último guarismo del nuevo divisor por 2, último guarismo del cociente, y sale 15, por cuyo motivo pongo 5 debajo del 8 del segundo dividendo particular.

Quando ocurra partir una cantidad decimal por 10, por 100, &c. la operacion se reduce á adelantar ácia la izquierda la coma tantos lugares quantos ceros acompañen á la unidad del divisor.

El cociente de 32,075 partido por 10 es 3,2075; el cociente de 25,7 partido por 1000 es 0,0257.

La razon se saca de lo dicho (154), pues partir un número por 10 es hacerle diez veces menor, lo que en las decimales se consigue con adelantar la coma un lugar á la izquierda.

Si las partidas decimales con las quales se ha de hacer la division fuesen muy crecidas, tendrá mucha cuenta formar una tabla de todos los productos del divisor por cada uno de los nueve guarismos.

Queda patente, despues de lo dicho hasta aquí, que las decimales se calculan con igual facilidad que los enteros. Por consiguiente será muy del caso, siempre que ocurran quebrados, reducirlos á decimales, y serán mas fáciles las operaciones que con los tales quebrados se ofrezca hacer.

164 Si quiero reducir $\frac{4253}{9678}$ á decimales, y sacar su valor con menos de una milésima de unidad; tendré que partir 4253000 por 9678, de cuya operacion sacaré 0,439; por manera que el valor de $\frac{4253}{9678}$ es 0,439, que no discrepa del verdadero una milésima parte de la unidad.

165 Es tambien muy fácil reducir á quebrado comun una cantidad decimal, v. g. esta 0,024. Porque como $0{,}024 = \frac{24}{1000}$ (156), despues de puesta en esta forma la decimal, se partirán sus dos términos por su máxîmo comun divisor 8, y saldrá que $\frac{24}{1000} = \frac{3}{125} = 0{,}024$. De este caso es facil inferir lo que se habrá de hacer en otro qualquiera.

Algunos usos de las Decimales.

166 Supongamos que se me ofrezca reducir 3 V. 2 P. 8 p. 7 l. á decimales de vara, de modo que no se pierda ni siquiera media linea. Reparo que la vara tiene 432 lineas, y por consiguiente 864 medias lineas; cuyo número manifiesta que si no quiero despreciar ni media linea siquiera, he de llevar la aproxîmacion mas allá de las centésimas, esto es, hasta las milésimas. Porque si me contentara con llevarla hasta las centésimas no mas, omitiendo una centésima, omitiria una de las 864 medias lineas que componen la vara, y por consiguiente erraria el intento.

Sentado esto, reduzco los 2 P. 8 p. 7 l. todo á lineas, y salen 391 lin. ó $\frac{391}{432}$ de vara: transformo este quebrado en decimal hasta las milésimas por el método declarado (163), salen 0,905, de donde infiero que el número propuesto vale 3 V. 905 de vara.

Para reducir 8 Pe. 4 rs. 5 mrs. á decimales de peso, de manera que no se desperdicie ni siquiera medio maravedí; considero que pues el peso vale 15 rs. y el real 34 mrs. un peso vale (54) 510 maravedises ó 1020 medios maravedises, y que por consiguiente la decimal que busco ha de llegar hasta las diez milésimas. Reduzco los 4 rs. 5 mrs. á mrs., y salen 141, ó $\frac{141}{510}$ de peso. Reduzco este quebrado decimal hasta las diez milésimas, y hallo que los 8 Pe. 4 rs. 5 mrs. valen 8 Pe., 2764 de peso.

167 Declaremos ahora como se ha de valuar una cantidad decimal, como si quisiéramos saber quantos reales y mrs. valen las 0.2764 de peso. En esta reduccion hemos de tener presente que una cantidad decimal es un quebrado (150) y que para valuar un quebrado se multiplica el numerador por el número que expresa quantas veces la unidad, en que deseo determinar el valor del quebrado, cabe en la unidad á la qual pertenece el quebrado, y dividir el producto por el denominador (117): quiero decir, que para sacar en reales el valor de un quebrado de peso he de multiplicar el numerador por 15, porque 15 rs. componen un peso, y partir el producto por el denominador del quebrado propuesto.

Pero como las decimales no tienen denominador, para valuarlas basta la multiplicacion, y se ahorra el calculador el trabajo de partir el producto por el denominador, cuya operacion se executó ya quando se reduxo el quebrado comun á decimal. Por consiguiente, en el caso propuesto bastará multiplicar 0,2764 por 15; lo que no dexa duda acerca de lo mucho que se abrevian algunas operaciones haciendo por decimales los cálculos.

Multiplico, pues, 0,2764 por 15, sale el producto 4,1460, esto es el entero 4 que vale 4 rs. y 0,1460 de real. Para valuar esta última cantidad la multiplico por 34 porque 34 maravedises componen

nen un real; saco el producto 4,9640; esto es, 4 maravedises y 0,9640 de maravedí, que muy en breve dirémos lo que vienen á valer, con muy corta diferencia.

Por este método sacaré que 0,5687 de vara valen 1 P. ~~8 p.~~ 5 l. y 0,6784 de linea.

168 Con igual facilidad se valuará una decimal de otra unidad qualquiera, v. g. 0,0046 de vara á razon de 17 rs. la vara. Ya que un real vale 34 mrs. y en el caso propuesto la vara cuesta 17 rs., su valor importará 17 veces 34 mrs. (53). Multiplico, pues, la decimal 0,0046 por el producto de 17×34= 578; sale el producto 2,6588, el qual manifiesta que costando una vara 17 rs., las 0,0046 de vara importan 2 mrs. y 0,6588 de maravedí.

169 La última operacion está diciendo que siempre que se calcula por decimales no es necesario poner muchas, sino quando es preciso sacar sumamente cabal el valor que se busca, lo que dan á conocer las mismas preguntas que dan motivo al cálculo; bastan comunmente una, dos, ó á lo mas tres decimales.

Porque ya hemos visto lo que importan 0,0046 de vara á razon de 17 rs. la vara. Pero si se pagase la vara á razon de 10000 reales, sacarémos por el método enseñado (167) que las 0,0046 de vara importarian 46 reales, cuya cantidad merece alguna consideracion.

170 Siempre que se omita el último guarismo de una cantidad decimal; si pasa de 5, debe añadírsele una unidad al último de los guarismos que quedan. Sea v. g. esta decimal 0,386 el último resultado de un cálculo, en el supuesto de que para resolver la cuestion propuesta pueda contentarme con dos figuras decimales ó con esto 0,38. Como el 6 que voy á desechar vale mas de 5, añadiré una unidad al 8, y quedará 0,39.

La razon de esta práctica es muy clara; porque si diez unidades de la columna donde está el 6 ó 10 milésimas valen una unidad de la columna donde está el 8, ó una centésima (151); quando desecho el 6, desecho mas de la mitad de una centésima, y con añadir una unidad al 8 añado á 0,386 menos de lo que quitaria á toda la cantidad con desechar el 6. Si se omitieren las dos últimas figuras de una decimal, que valgan mas de 50, se añadirá una unidad á la última de las figuras que quedaren. Sin tanta explicacion entenderá esta práctica el que tuviese presente lo dicho (97).

Quando hallamos poco ha que las 0,2764 de peso valen 4 rs. 4 mrs. y 0,9640 de maravedí; en lugar de 4 mrs. podiamos poner 5 mrs., porque la cantidad decimal 0,9640 de maravedí se acerca ó aproxima mucho al valor de un maravedí, pues su primer figura 9 expresa nueve décimas de maravedí.

171 Despues de lo que acabamos de manifestar acerca de algunos usos de las décimales, no puede quedar ninguna duda sobre lo mucho que facilitan los cálculos de los quebrados comunes y de los números denominados. Aconsejamos por lo mismo á los principiantes se dediquen á su práctica quanto puedan; y aunque no faltarán en el discurso de esta obra muchas cuestiones donde acabarán de conocer con total evidencia quan provechosa es esta advertencia, no puedo menos de hacer la aplicacion de lo dicho en este particular al cálculo de los números denominados, repitiendo aquí por este método los cálculos que hicimos antes por el método ordinario.

172 Me propongo sumar las quatro partidas.

227	P. 14	rs.	8 mrs.
184	11		11
2545	13		15
17	10		7

Para aplicar á esta operacion la doctrina de las decimales, he de hacer con las quatro partidas la reduccion propuesta, mediante lo qual se transforman en las que aquí se ven.

227,949
184,754 | 9
2549,896
17,680
2980,280

Hago la adicion, y sale la suma 2980,280 esto es, 2980 pesos, y 280 milésimas de peso. Para saber los reales, mrs que vale, la multiplico primero por 15, saco el entero 4, y el decimal 0,200 de real; para saber los maravedises que esta vale la multiplico por 34, saco el producto 6,800, esto es 6 mrs. y 0,800 de maravedí, y porque el 8 vale mas de 5, añado una unidad al 6, lo que me da 7 mrs. De modo que la suma es 2980 Pe. 4 rs. 7 mrs. la misma que antes (131).

173 En estas aplicaciones importa tener muy presente que la reduccion á decimales debe continuarse dos figuras, ó una por lo menos mas de las que se desea lleve la suma ó el último resultado; porque si acaso la figura decimal que se siguiese á la última, valiera mas de 5, seria necesario añadir una unidad á la última; donde no, se errara el cálculo. En el caso propuesto v. g. la segunda partida reducida á decimales hasta quatro figuras, es 184,7549. Si nos hubiéramos contentado con sacar tres figuras decimales no mas, no hubiéramos sabido que el 4 habia de ser un 5, por causa del 9 desechado. La suma no habria salido cabal, y el error hubiera caido en los mrs. como puede facilmen-

te comprobarlo el lector.

174 En el *segundo* exemplo las partidas reducidas á decimales se transforman en las aquí puestas, y la suma es 86 varas y 0,179 de vara. Si multiplico esta decimal por 3, número de pies que hay en la vara, saco 0,537 que no llega á un pie; de donde infiero que no hay pies en la suma; multiplico la decimal 0,537 por 12 para sacar las pulg. y saco 6 pulg. y 0,444 de pulg. Multiplico esta decimal por 12, y saco 5 lineas y 0,328 de linea que desprecio. Infiero, pues, que la suma es 86 V. o P. 6 p. 5 l. lo mismo que antes.

V
54,771
12,470
9,998
8,940
86,179

175 Las dos partidas del primer exemplo de sustraccion se transforman en las que aquí se ven, y la resta tambien.

143,949
75,706
68,243

La decimal 0,243 multiplicada por 15 da 3 rs. y 0,645 de real; esta última decimal multiplicada por 34 da 21 mrs. y 0,930 ó, añadiendo una unidad al último guarismo de 21 (170), 22 mrs. De donde saco la misma resta 68 pesos 3 reales 22 maravedises que antes.

De las dos partidas del segundo exemplo (135), la primera se transforma en 162 Pe. 14 rs. 39 mrs., sacando un peso de los 163 para repartirlo á las especies menores; despues de reducidos á decimales los reales de ambas partidas, salen las que aquí se ven.

Hecha la sustraccion, quedan 78 pesos. y 9 maravedises, lo mismo que antes.

162,515
84,506
78,009

176 En la multiplicacion, los dos factores del primer exemplo son

Mul-

4,889
2,208
39 112
977 8
9778
10,794912

Multiplico la decimal por 15, saco 11 reales, y 0,923680 de real, esta última decimal por 34, saco 31 mrs. y 0,405120 de maravedí; por manera que el producto es, como antes, 10 Pe. 11 rs. 31 mrs.

Los factores del segundo exemplo se transforman como aquí se vé; despues de hecha la multiplicacion se leen 32 Pe. y 0.104160 de peso. Multiplicada esta decimal por 15, da 1 r.[1] y 0,562400 de real; multiplico la decimal por 34, salen 19 mrs. y una decimal despreciable que es. . . . 0,121600 de maravedí. Sale pues el mismo producto 32 Pe. 1 r.[1] 19 mrs. como antes.

10208
3145
51040
40832
10208
30624
32,104160

177 En el primer exemplo de division, el dividendo se transforma en 346, 945 y el divisor en 7,250: hago la division, y saco el cociente 47,854; haciendo con la decimal 0,854 las operaciones tantas veces encargadas, saco 12 rs. 27 mrs. Por manera que el cociente es tambien aquí 47 Pe. 12 rs. 27 mrs.

En el segundo exemplo, el dividendo es 642,816, y el divisor 55,750. Hecha la division sale al

 co-

cociente 11 Pe. y 0,530 de peso. Hago finalmente con esta decimal lo dicho (167) y saco 7 rs. y 32 mrs. De modo que el cociente es tambiem aquí como fué antes (146) 11 Pe. 7 rs. 32 mrs.

De los Números Quadrados y de sus raices.

178 Llámase *quadrado* de un número el producto que sale quando se multiplica dicho número por el mismo; 25 v. g. es el quadrado de 5, porque si multiplico 5 por 5, el producto es 25.

179 *Raiz quadrada* de un número se llama aquel número que multiplicado por el mismo da el mismo número propuesto; 5 v. g. es la raiz quadrada de 25; 7 es la raiz quadrada de 49.

180 Es, pues, todo número que quadramos multiplicando y multiplicador á un tiempo; es por consiguiente dos veces factor (37) del producto: por cuyo motivo este producto ó quadrado se llama tambien *segunda potencia* del tal número.

Para señalar que un producto se compone de dos factores iguales, ó es un quadrado; pongo por caso, para señalar el quadrado de una cantidad, de 4 v. g., la escribo así 4^2 ó $(4)^2$, lo que está diciendo que 4 es dos veces factor en el producto que resulte. Si la cantidad cuyo quadrado se quiere señalar, consta de muchos guarismos, qual es v. g. 234, se señala su quadrado de este modo $(234)^2$ ó de destotro $\overline{234}^2$.

181 De aquí se sigue que 2 puesto á la derecha de un guarismo ó número, y algo mas arriba, señala el quadrado, ó la segunda potencia del tal guarismo ó número.

182 Como una cantidad, sea la que fuere, no es mas que una vez factor en ella misma, tambien es ella misma su primer potencia, la qual se señala con

con la unidad. La primer potencia de 3 v. g. es 3^1.

183 Los guarismos que señalan de este modo las potencias, ó sus grados, se llaman *exponentes* de las tales potencias.

184 Y para señalar la raiz quadrada, usamos este signo $\sqrt{\ }$ que llamamos *signo* radical, poniendo el guarismo 2 entre sus dos piernas. La raiz quadrada de 64 v. g. se señala así: $\sqrt[2]{64}$.

El número puesto entre las dos piernas del signo radical se llama el exponente de la raiz.

Pero lo mas comun es omitir el 2 entre las dos piernas del signo radical, y pintar la raiz quadrada así $\sqrt{64}$. Quando la cantidad cuya raiz quadrada se quiere señalar tiene muchos guarismos como esta 3458, su raiz quadrada se señala de este modo $\sqrt{(3458)}$ ó de estotro $\sqrt{\overline{3458}}$.

185 Para quadrar un número, basta multiplicarle por el mismo, conforme á las reglas dadas ( ); pero para extraer ó sacar la raiz quadrada de un número, esto es, para volver del quadrado á la raiz, es preciso socorrerse de algun método particular, á lo menos quando el número ó quadrado propuesto tiene mas de dos guarismos.

Quando el número propuesto no tiene sino uno ó dos guarismos, su raiz en número entero es fácil de sacar por la tabla aquí puesta, cuya primer linea se forma de los quadrados de los nueve guarismos, que forman la segunda.

1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	2	3	4	5	6	7	8	9

186 La raiz quadrada de 72 v. g. es 8 en número entero; porque como 72 esta entre 64 y 81, su raiz

raiz estará entre las raices de estos dos números, esto es, entre 8 y 9; es, pues 8 y un quebrado, de cuyo quebrado no podemos hallar á la verdad el valor cabal; pero podemos aproxîmarnos ó acercarnos á él quanto queramos, conforme enseñarémos en su lugar.

187 La raiz quadrada de un número que no es quadrado perfecto, se llama número *sordo*, *irracional* ó *incommensurable*.

188 Tratemos de los números que tienen mas de dos guarismos, y considerando el rumbo que se sigue quando se forma el quadrado de un número, ó se levanta un número al quadrado, ó á la segunda potestad, hallarémos el rumbo que debe seguirse para sacar su raiz.

Quadremos con esta mira el número 54 v. g.

Despues de escritos el multiplicando y el multiplicador como corresponde, multiplico el 4 de arriba por el 4 de abajo, cuyo producto es patentemente el *quadrado de las unidades*.

```
  54
  54
 ———
 216
270
 ———
2916
```

Multiplico despues el 5 de arriba por el 4 de abajo, de lo que sale el *producto de las decenas por las unidades*.

Paso despues al segundo guarismo del multiplicador, y multiplico el 4 de arriba por el 5 de abajo, de lo que resulta el producto de las unidades por las decenas, ó (40) el *producto de las decenas por las unidades*.

Finalmente, multiplico el 5 de arriba por el 5 cinco de abajo, cuyo producto es el *quadrado de las decenas*.

Sumo estos productos, y saco que el quadrado de 54 es el número 2916, el qual se compone del *quadrado de las decenas*, *de dos veces el producto de las decenas por las unidades*, *y del quadrado de las unidades del número* 54.

189 Como lo que acabamos de observar es consecuencia inmediata de las reglas de la multiplicacion, se verifica no solo respecto del número 54, sino tambien respecto de otro número qualquiera que tenga decenas y unidades; de suerte que, por regla general, el quadrado de todo número compuesto de decenas y unidades, consta de las tres partidas que acabamos de especificar, que son, *el quadrado de las decenas del mismo número*, *dos veces el producto de las decenas por las unidades*, *y el quadrado de las unidades*.

Sentado esto, ya que el quadrado de las decenas expresa centenares (pues 10 veces 10 son 100), es evidente que el quadrado de las decenas no puede estar en los dos últimos guarismos del quadrado, que solo expresan decenas y unidades.

Ya que el producto del duplo de las decenas multiplicado por las unidades no puede menos de expresar decenas, no puede estar en el último guarismo del quadrado, que solo expresa unidades.

Luego para volver del quadrado 2916 á su raiz, practicarémos lo siguiente.

190 Empecemos buscando las decenas de la raiz desde luego la formacion del quadrado me enseña que el quadrado de dichas decenas está en 2916, pero que no puede estar en los dos últimos guarismos; ha de estar, pues, en 29; y como la raiz quadrada de 29 no puede pasar de 5, infiero que el

```
2916 |54 raiz
 416
 104
 ———
 000
```

el número de las decenas de la raiz es 5; pongo, pues, 5 al *lado de 2916, como aquí se vé.*

Quadro 5, y resto de 29 el producto 25; queda la resta 4, á cuyo lado bajo los otros dos guarismos 16 del número 2916.

Para hallar ahora las unidades de la raiz, considero qué partidas del quadrado quedan en la resta 416; hay dos, es á saber el duplo de las decenas de la raiz multiplicado por las unidades, y el quadrado de las unidades de la misma raiz.

De la primera de estas dos partidas sacarémos las unidades que buscamos; porque una vez que se compone del duplo de las decenas multiplicado por las unidades, si las partimos por el duplo de las decenas halladas ya, el cociente expresará las unidades (75). Solo falta saber en que guarismo de 416 está el duplo de las decenas multiplicado por las unidades; segun reparamos antes, no puede estar en el último guarismo; estará, pues, en 41. Por consiguiente he de partir 41 por 10 duplo de las decenas 5; executo la division, y el cociente 4 es el número que busco de las unidades. Pongo, pues, 4 á la derecha de las 5 decenas halladas, y veo que la raiz que buscaba es 54.

Aquí importa mucho advertir que sin embargo de ser el cociente 4 el que corresponde en el caso propuesto, hay muchos casos donde el cociente hallado por este camino debe desecharse por mayor de lo que conviene. Porque 41, esto es, el número que queda despues de separado el último guarismo, incluye no solo el duplo de las decenas multiplicado por las unidades, mas tambien las decenas procedentes del quadrado de las unidades; por cuya razon, para salir de dudas acerca del guarismo de las unidades, es preciso hacer la siguiente comprobacion.

Des-

Despues de hallado y puesto á la raiz el guarismo 4 de las unidades, le pongo al lado del duplo 10 de las decenas, de lo que sale el número 104, cuyos guarismos multiplico unos despues de otros por el 4, restando los productos á medida que salen, de las partes correspondientes de 416; y como no queda resta alguna, infiero que 54 es la raiz quadrada cabal de 2916.

La comprobacion que acabo de proponer se funda en la formacion misma del quadrado; porque es evidente que 104 multiplicado por 4 da el quadrado de las unidades, y el duplo de las decenas multiplicado por las unidades, esto es, lo que completa el quadrado cabal.

191 De lo que acabamos de decir debe inferirse, que para sacar la raiz quadrada de un número que no tiene mas de quatro guarismos, ni menos de tres, se ha de buscar, despues de separar dos guarismos á la derecha, la raiz quadrada de los que quedan á la izquierda; cuya raiz será el número de las decenas de la raiz total que se busca, poniéndola al lado del quadrado propuesto, del qual se la separará con una raya.

De los mismos guarismos se restará el quadrado de la raiz hallada, y despues de escrita la resta debajo, se bajarán á su lado los dos guarismos separados.

Se pondrá una coma á la izquierda del último de los dos guarismos que se acabaren de bajar, y el número que quedare á la izquierda de la coma se partirá por el duplo de las decenas puesto debajo de la raiz.

Se pondrá desde luego el cociente al lado del primer guarismo de la raiz, y despues al lado del duplo de las decenas que hubiere servido de divisor.

Fi-

Finalmente, se multiplicarán por el mismo cociente todos los guarismos de esta última linea, y á medida que salgan sus productos se restarán de los correspondientes guarismos de la linea de encima. Con un exemplo quedará muy clara toda esta doctrina.

75,69	87 raiz
116,9	
167	
000	

Se me pide la raiz quadrada de 7569; separo los dos guarismos 69, y busco la raiz quadrada de 75; es 8; pongo 8 al lado: quadro 8, y de 75 resto el quadrado 64: queda la resta 11, póngola debajo de 75, y al lado de 11 bajo los guarismos 69 que separé al empezar.

En 1169 separo el último guarismo 9, porque la partida que he de dividir para hallar las unidades es 116.

El divisor ha de ser el duplo de las 8 decenas halladas, cuyo divisor le pongo debajo de 116; saco el cociente 7, que pongo á la raiz al lado del 8.

Pongo tambien este cociente al lado del divisor 16; multiplico 167, que forma la última linea, por el mismo cociente 7, y á medida que saco los productos, los resto de 1169; como no queda resta alguna, es prueba de ser 7569 un quadrado cabal, y el quadrado de 87.

Téngase muy presente que solo debe partirse por el duplo de las decenas la parte que queda á la izquierda, despues de separado el último guarismo; de suerte que quando en ella no quepa el duplo de las decenas, no por eso se deberá echar mano del guarismo separado; pero se pondrá cero á la raiz. Si al contrario el duplo de las decenas cupiese mas de 9 veces en dicha parte, no por eso se

se pondrá mas de 9 á la raiz; la razon es la misma de antes (71).

192 El que estuviese bien enterado de lo que acabamos de decir acerca de la extraccion de la raiz quadrada de las cantidades de quatro guarismos no mas, se impondrá facilmente en lo que se ha de practicar quando el quadrado propuesto tiene mayor número de guarismos. Por mas guarismos que correspondan á la raiz, siempre se la puede considerar como que consta de dos partes, que la una expresa decenas, y la otra unidades: v. g. podemos considerar que 874 tiene 87 decenas, y 4 unidades.

Sentado esto, despues de hallados los dos primeros guarismos de la raiz por el camino enseñado, por el mismo se hallará tambien el tercero, considerando los dos primeros guarismos como un solo número de decenas, y aplicándoles, para hallar el tercero, todo quanto hemos dicho del primero para hallar el segundo.

Despues de sacados los tres primeros guarismos, si ha de haber otro, se considerarán los tres primeros como que componen un solo número de decenas, al qual se aplicará para hallar el quarto, lo mismo que se hubiese practicado con los dos primeros para hallar el tercero; se proseguirá á este tenor.

Pero, para mayor seguridad, conviene partir desde luego el número propuesto en rebanadas ó periodos de dos guarismos cada una de la derecha á la izquierda; y podrá suceder que la última conste de un guarismo solo.

Fúndase esta preparacion en que considerando la raiz como compuesta de decenas y unidades, lo primero que hay que hacer es separar (190) los dos últimos guarismos de la derecha, porque en el perioriodo que queda á la izquierda, ha de estar el quadrado de las decenas; pero como este periodo tiene tambien mas de dos guarismos, igual razon hay para separar otros dos á la derecha; y se proseguirá al mismo tenor.

193 Se me pide la raiz quadrada de 76807696

76,80,76,96	8764 raiz
128,0	
167	
1117,6	
1746	
7009,6	
17524	
0000 0	

Parto desde luego el número propuesto en periodos de dos guarismos cada uno, de la derecha á la izquierda; y busco la raiz quadrada del periodo 76, el primero á la izquierda: hallo que es 8, y pongo 8 al lado del número propuesto; quadro 8; el quadrado 64 le resto de 76, queda la resta 12, y la pongo debajo de 76: á su lado bajo el periodo 80, separando con una coma su último guarismo; debajo de 128 pongo 16, duplo de la raiz hallada. Despues digo ¿en 128 quantas veces 16? 7 veces; pongo 7 al lado de la raiz 8, y tambien al lado de su duplo 16: multiplico 167 por el 7, y resto de 1280 el producto que sale; queda la resta 111, á cuyo lado bajo el periodo 76, y resulta 11176. Separo su último guarismo 6, y debajo de la partida 1117, que queda á la izquierda, pongo 174, duplo de la raiz 87: parto 1117 por 174, y pongo el cociente 6 á la raiz y al lado del duplo 174. Multiplico 1746 por el 6, y resto el producto de 11176; queda lo resta 700, á su lado bajo 96, separando el último guarismo: debajo de 7009 que queda á la izquierda, pongo 1752, duplo de la raiz hallada 876; parto 7009 por 1752, pongo á la raiz el cociente 4 y al lado del duplo 1752; multiplico 17524 por el 4, y de 70096 resto el producto, no queda nada. Por consiguiente 8764 es la raiz cabal de 76807696.

194 Quando el número propuesto no es un quadrado cabal, queda una resta al fin de la operacion, y la raiz quadrada que sale, es la raiz del mayor quadrado que hay en el número propuesto: entonces no es posible sacar cabal la raiz quadrada; pero se puede hallar, prosiguiendo la operacion, una raiz tan próxima á la verdadera quanto se quiera, y tal que levantando al quadrado esta raiz aproximada, sale un número que discrepa del verdadero una cantidad tan corta ó despreciable quanto se quiera.

Para esta aproxímacion sirven las decimales. Se supone á continuacion del número propuesto un número de ceros duplo de las decimales que se quiere lleve la raiz; quiero decir, quatro ceros, si la raiz ha de llevar dos figuras decimales, &c.; despues de esta preparacion, se hace la extraccion de la raiz por el método enseñado, separando con una coma á la derecha de la raiz un número de figuras decimales igual á la mitad del número de ceros añadidos al número propuesto. La razon es, que como el producto de un número decimal por otro ha de llevar tantas decimales quantas hay en ambos factores juntos, es preciso que el quadrado, cuyos dos factores son iguales, tenga doblado número de las que lleva qualquiera de ellos, esto es doblado número de las que lleva la raiz.

195 Se me pide la raiz quadrada de 87567 con diferencia de menos de una milésima, esto es, tan aproxîmada á la verdadera, que no discrepe de ella ni siquiera una milésima.

Para expresar milésimas se necesitan tres decimales, luego hemos de añadir seis ceros al quadrado 87567, por lo mismo he de sacar la raiz quadrada de 87567000000.

```
8,75,67,00,00,00 |295,917 raiz
4 7,5
 4 9
--------
 3 46,7
  58 5
--------
   54 20,0
    5 90 9
----------
    1 01 90,0
      59 18 1
------------
      42 71 90,0
       5 91 82 7
------------
       1 29 11 1
```

Haciendo la operacion del mismo modo que en los exemplos antecedentes, hallo que la raiz quadrada, con diferencia de menos de una unidad, es el número 295917; cuya raiz es la de 87567000000; pero como se me pide la de 87567, ó de 87567,000000, separo en la raiz un número de guarismos igual á la mitad de los ceros que añadí al quadrado; mediante lo qual saco 295,917, raiz quadrada de 87567 con diferencia de menos de una milésima. Si

196 Si hubiésemos de sacar la raiz quadrada de 2 con diferencia de menos de una diez milésima, sacaríamos la raiz quadrada de 200000000, y hallaríamos 14142: separando con una coma quatro guarismos á la derecha, saldria 1,4142, raiz quadrada de 2 aproxîmada, de modo que no discreparia ni una diez milésima de la verdadera.

197 Hemos visto (105) como para multiplicar un quebrado por un quebrado, se multiplica el numerador por el numerador, y el denominador por el denominador; luego para quadrar un quebrado, se debe quadrar el numerador y el denominador; en virtud de esto $\frac{4}{9}$ es el quadrado de $\frac{2}{3}$; $\frac{16}{25}$, el de $\frac{4}{5}$.

Luego recíprocamente, para sacar la raiz quadrada de un quebrado, se ha de sacar la raiz del numerador, y la del denominador; la raiz quadrada de $\frac{9}{16}$ es $\frac{3}{4}$, porque la de 9 es 3, y la de 16 es 4.

198 Pero casos ocurren donde uno de los dos términos del quebrado ó ninguno es un quadrado cabal; quando solo el numerador dexa de serlo, se saca su raiz aproxîmada por el método poco ha declarado; se saca la del denominador, la qual sirve de denominador de un quebrado cuyo numerador es la raiz hallada del numerador. Para hallar la raiz de $\frac{2}{9}$, se saca primero aproxîmada la del númerador 2, y será 1,4 ó 1,41, ó 1,414, ó 1,4142 &c. segun se quiera mas ó menos aproximada; y como la raiz quadrada de 9 es 3, la raiz aproxîmada de $\frac{2}{9}$ será $\frac{1,4}{3}$ ó $\frac{1,41}{3}$, ó $\frac{1,414}{3}$, ó $\frac{1,4142}{3}$.

199 Pero si tampoco el denominador fuese un quadrado cabal, se multiplicarán ambos términos del quebrado por su denominador, cuya preparacion no muda el valor del quebrado, y transforma el denominador en quadrado cabal; hecho esto, se

prac-

practicará lo que en el caso último. Si se me pidiese v. g. la raiz de $\frac{3}{5}$, *transformaré este quebrado* en $\frac{15}{25}$; sacaré la raiz quadrada de 15, hasta tres decimales v. g. saldrá 3,872; y como la raiz quadrada de 25 es 5, la raiz quadrada de $\frac{3}{5}$ ó $\frac{15}{25}$ será $\frac{3,872}{5}$.

Con la mira de escusar muchas especies de quebrados á un tiempo, se reducirá la cantidad $\frac{3,872}{5}$ á decimal, partiendo 3,872 por 5, y será 0,774 la raiz de $\frac{3}{5}$ puesta en forma decimal.

200 Finalmente, quando hubiere enteros juntos con quebrados, se reducirán los enteros á quebrados (83), y se practicará lo mismo que con un quebrado solo. Para sacar v. g. la raiz quadrada de $8\frac{3}{7}$ transformaré $8\frac{3}{7}$ en $\frac{59}{7}$, y este en $\frac{413}{49}$ (199), cuya raiz, sacada por aproximacion, es $\frac{20,322}{7}$ ó 2,903.

Tambien se puede reducir á decimales el quebrado que acompaña al entero, pero es preciso que lleve un número par de decimales, y doblado de las que ha de llevar la raiz; porque una vez que el producto de la multiplicacion de dos números que llevan decimales, ha de llevar tantas quantas hay en ambos factores juntos (159), el quadrado de todo número que tiene decimales, ha de llevar doblado número de las suyas. Para aplicar esta regla á $8\frac{3}{7}$, le transformo en 8,428571 (162), cuya raiz es 2,903, como antes.

201 Si se ofreciese sacar la raiz de una cantidad decimal, se procurará primero que sea par, si no lo fuese, el número de sus decimales, lo que se conseguirá poniendo á continuacion de las que llevare uno, tres, ó cinco, &c. ceros, cuya preparacion no muda el valor de la cantidad decimal (155). Para sacar v. g. la raiz quadrada de 21,935 con diferencia de menos de una milésima, saco la raiz quadrada de 21,935000, la qual es 4,683, y es tambien la de 21,935. Por el mismo método se hallará que la de 0,542 es, con diferencia de menos de una milésima, 0,736, y que la de 0,0054 es, con diferencia de menos de una milésima, 0,073.

202 Casos ocurren donde es preciso expresar con quebrados muy sencillos la raiz quadrada de los números que no son quadrados cabales; para cuyos casos sirve la doctrina de los quebrados continuos, y sobre todo lo dicho (124 y 125) que da sobre la marcha los quebrados mas simples que con un número determinado de guarismos en el numerador y el denominador se aproximan mas al valor que se busca. Apliquemos el método á la investigacion de los quebrados simples que dan el valor de la raiz de 2.

Como la raiz quadrada de 2 es $\frac{14142}{10000}$ con diferencia de menos de una diezmilésima, harémos con este quebrado las mismas operaciones que si buscáramos el máximo comun divisor de sus dos términos, cuyas operaciones van aquí figuradas.

14142	10000	4142	1716	710	296	118	60	58	2
1	1	2	2	2	2	2	1	1	29

Echando mano de los cocientes con arreglo á lo dicho (94), saco esta serie de quebrados $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$, $\frac{141}{99}$, $\frac{239}{160}$, $\frac{7071}{5000} = \frac{14142}{10000}$, alternadamente menores y mayores que la raiz del número 2.

203 Todo número cuya raiz quadrada se busca es considerado como quadrado; pero si no es quadrado perfecto, su raiz no puede salir cabal, y es forzoso sacarla, conforme queda enseñado, por apro-

aproximacion. Aunque no podemos hallar cabal dicha raiz, conocemos no obstante los limites que no pasa; la raiz quadrada de 12 no se puede conocer, sin embargo sabemos que es mayor que 3 y menor que 4, raices cabales de los dos números quadrados, el uno inmediatamente mayor, y el otro inmediatamente menor que 12.

204 La raiz quadrada de todo número que no la tiene cabal se señala con este signo $\sqrt{}$, llamado *signo radical*, puesto antes del número; $\sqrt{12}$ v. g. señala la raiz quadrada de 12; cuya raiz se llama *cantidad irracional*, *surda* ó *inconmensurable*.

205 A los números irracionales tambien se les sujeta al cálculo. Desde luego se suman unos con otros, ó se restan, enlazándolos con el signo + ó —, segun sea la operacion. La suma de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ es $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; para restar $\sqrt{3}$ de $\sqrt{5}$, se escribe $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

206 Para sacar el producto de una cantidad irracional por otra, se multiplican los números que están debajo del signo, el qual se pone antes del producto: $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ es $\sqrt{15}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ es $\sqrt{16}$, que vale 4. Para señalar el producto de una cantidad irracional por otra racional, se pone esta delante del radical; $2 \times \sqrt{5}$ es $2\sqrt{5}$; 3 veces $\sqrt{2}$ es $3\sqrt{2}$. Repárese que 3 es lo mismo $\sqrt{9}$, y que por consiguiente $3 \times \sqrt{2}$ es lo mismo que $\sqrt{9} \times \sqrt{2}$, esto es $\sqrt{18}$; $2\sqrt{8}$ lo mismo $\sqrt{4 \times 8}$ ó $\sqrt{32}$.

207 En virtud de esto se entenderá facilmente que 1° $\sqrt{8}$ es $\sqrt{2.4}$ ó $2\sqrt{2}$; 2° $\sqrt{12}$ es $\sqrt{3.4}$ ó $2\sqrt{3}$; 3° $\sqrt{18}$ es $\sqrt{2.9}$ ó $3\sqrt{2}$ &c.

208 Para partir una cantidad irracional por otra, se parte el número del radical dividendo por el número del radical divisor, dejando el cociente debajo del signo $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ es $\sqrt{\frac{8}{2}}$ ó $\sqrt{4}$ ó 2; $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ es $\sqrt{\frac{18}{2}}$ ó $\sqrt{9}$ ó 3, &c.

De

De los números cúbicos y de su Raiz.

209 Para cubicar un número ó formar su *cubo*, primero se le quadra, y despues se multiplica su quadrado por el mismo número; 27 v. g. es el cubo de 3, porque resulta de multiplicar 9, quadrado de 3, por el mismo 3.

Por consiguiente el número que se cubica es tres veces factor en su cubo. Esta es la razon por que el cubo de un número se llama tambien *tercera potestad* del mismo número.

En general, se dice que un número está elevado á su segunda, tercera, quarta &c. potestad, quando se le ha multiplicado por el mismo una, dos, tres, quatro &c. veces, ó quando es dos veces, tres veces, quatro veces &c. factor en el producto.

210 La *raiz cúbica* de un cubo propuesto es el número que multiplicado por su quadrado da dicho cubo; 3 es la raiz cúbica de 27.

211 No se necesita, pues, regla alguna para formar el cubo de un número; pero es preciso socorrerse de algun método para retroceder desde el cubo á su raiz. Este método vamos á sacarle de lo que verémos se práctica para formar el cubo.

212 Desde luego no se necesita ningun método para sacar la raiz cúbica en números enteros, sino quando el cubo propuesto tiene mas de quatro guarismos; porque una vez que 1000 es el cubo de 10, todo número menor que 1000, el qual por consiguiente tendrá menos de quatro guarismos, tendrá por raiz un número menor que 10, ó su raiz tendrá menos de dos guarismos.

Así; la raiz cúbica en números enteros de todo número, que esté entremedias de dos números de la primer linea de la tabla siguiente, donde están

 los

los cubos de los nueve guarismos, estará entremedias de los dos números correspondientes de la segunda linea.

1	8	27	64	125	216	343	512	729
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como 30 v. g. está entre los números 27 y 64 de la primer linea, su raiz cúbica estará entre 4 y 3, números del segundo renglon correspondientes á los otros dos del primero; será por lo mismo la raiz cúbica de 30 mayor que 3 y menor que 4: será por consiguiente 3 con un quebrado.

213 No todo número tiene raiz cúbica; pero se puede sacar por aproximacion un número que si se cubicara, se acercaría quanto quisiera el calculador al número propuesto. Declararémos esta operacion luego que dejemos explicado como se halla la raiz de un cubo cabal.

214 Veamos primero de que partida se compone el cubo de un número que tiene decenas y unidades.

Ya que el cubo de un número es el producto de su quadrado multiplicado por el mismo número, importa tener presente (189) que el quadrado de un número que tiene decenas y unidades, se compone 1°. del quadrado de las decenas; 2°. de dos veces el producto de las decenas por las unidades; 3.° del quadrado de las unidades.

Es, pues, preciso multiplicar estas tres partidas por las decenas y las unidades del número propuesto para formar su cubo. A fin de distinguir mejor los productos que resultan, pondremos aquí el tipo de esta operacion.

El quadrado de las decenas	1.° multiplicado por las decenas dará	el cubo de las decenas.
Dos veces el producto de las decenas por las unidades		dos veces el producto del quadrado de las decenas multiplicado por las unidades.
El quadrado de las unidades		el producto de las decenas por el quadrado de las unidades.

El quadrado de las decenas	2.° multiplicado por las unidades dará	el producto del quadrado de las decenas multiplicado por las unidades.
Dos veces el producto de las decenas por las unidades		dos veces el producto de las decenas por el quadrado de las unidades.
El quadrado de las unidades		el cubo de las unidades.

215 Luego juntando estas seis partidas, y sumando unas con otras las que expresan cantidades de un mismo nombre, podrémos decir que el cubo de un número que consta de decenas y unidades se compone de quatro partidas, que son 1.° *El cubo de las decenas*: 2.° *tres veces el quadrado de las decenas multiplicado por las unidades*: 3.° *tres veces las decenas multiplicadas por el quadrado de las unidades*; *y* 4.° *finalmente el cubo de las unidades.*

216 Vimos antes (189) que el quadrado, ó la segunda potencia de un número de dos guarismos se compone de tres partidas, esto es, de tantas partidas, y una mas, quantas unidades tiene el exponente 2 de su grado. Ahora acabamos de ver que la tercer potencia, ó el cubo de un número de dos guarismos, ó que tiene decenas y unidades, se compone de quatro partidas, esto es, de tantas partidas y una mas, quantas unidades tiene el exponente 3 de su grado. De aquí se infiere por induccion que una potencia qualquiera de un número de dos guarismos se compone de tantas partidas, y una mas, quantas unidades tiene el número que expresa su grado. Así, la séptima potencia de un número de dos guarismos se compone de ocho partidas.

217 Formemos en virtud de esto el cubo de 43 v. g. que consta de decenas y unidades.

Tomarémos, pues, el cubo de 4 que es 64; pero como este 4 expresa decenas, su cubo expresará millares, porque el cubo de 10 es 1000; por consiguiente el cubo de 4 decenas será 64000.

64000
14400
1080
27
―――
79507

3 veces 16, ó 3 veces el quadrado de las 4 decenas multiplicado por las 3 unidades, dará 144 centenares, porque el quadrado de 10 es 100; será, pues, este producto 14400.

3 veces 4, ó 3 veces las 4 decenas multiplicadas por el quadrado 9 de las unidades, daran decenas, y el producto será 1080.

Finalmente, el cubo de las unidades rematará en la columna de las unidades, y será 27.

Sumando las quatro partidas, sacarémos que el cubo de 43 es 79507, cuyo cubo se hubiera hallado, sin duda alguna, mas facilmente multiplicando

43

43 por 43, y despues por 43 el producto 1849. Pero hemos seguido un camino mas largo con la mira de investigar, al enterarnos de las partidas que componen el cubo, un método para extraer su raiz.

218 Sentado esto, declararémos este método. Supongo que se me pida la raiz cúbica de 79507.

cubo. . . . . 79.5 07 | 43 raiz
15 5,07
48

Para saber donde está en este número el cubo de las decenas de la raiz, separo con una coma los tres últimos guarismos, en los quales no puede estar dicho cubo, porque vale millares (217).

Busco la raiz cúbica de 79; es 4, y le pongo al lado. Cubico 4, y el producto 64 le resto de 79; queda la resta 15, que pongo debajo de 79.

Al lado de 15 bajo 507, sale la partida 15507, en la qual ha de estar 3 veces el quadrado de las 4 decenas halladas, multiplicado por las unidades que busco; mas 3 veces las mismas 4 decenas multiplicadas por el quadrado de las unidades, mas finalmente el cubo de las unidades.

Separo las dos figuras 07; en el número 155 que queda á la izquierda, está 3 veces el quadrado de las decenas multiplicado por las unidades; hallaré, pues, las unidades (75) partiendo 155 por el triplo del quadrado de las 4 decenas, esto es, por 48.

Como 48 cabe 3 veces en 155, pongo 3 á la raiz.

Para comprobar esta raiz, y hallar la resta, si la hay, podriamos formar las tres partidas del cubo que han de estar en 15507, y ver si componen 15507, ó quanto discrepan de este número; pero

con

con igual facilidad se hace esta comprobacion cubicando sobre la marcha 43, quiero decir multiplicando primero 43 por 43, y despues el producto 1849 por 43, de cuya multiplicacion sale por último 79507. Es, pues, 43 la raiz cúbica cabal de 79507.

219 Si el cubo propuesto tuviese mas de seis guarismos, se practicará lo que en el exemplo siguiente.

Se ha de sacar la raiz cúbica de 596947688.

```
596,947,688 |842
 849,47
 192
592704
---------
  42436,88
  21168
596947688
---------
000000000
```

Considerarémos su raiz como compuesta de decenas y unidades, por lo que, empezarémos separando los tres últimos guarismos.

Como el periodo 596947 donde está el cubo de las decenas, tiene mas de tres guarismos, su raiz ha de tener mas de uno, y por consiguiente tendrá decenas y unidades; es, pues, preciso para hallar el cubo de estas primeras decenas, separar los tres guarismos 947.

Hecha esta separacion, busco la raiz cúbica de 596; es 8, y pongo 8 al lado.

Cubico 8, y el producto 512 le resto de 596; queda la resta 84, y la pongo debajo de 596.

Al lado de 84 bajo 947, sale 84947, de cuya partida separo los dos últimos guarismos 47.

Debajo de 849 pongo 192, triplo del quadrado de la raiz 8, y parto 849 por 192; saco el cociente 4, y le pongo á la raiz.

Para comprobar esta raiz, y ver al mismo tiempo lo que resta, cubico 84, y resto el producto 592704 del número 596947, y queda la resta 4243.

A su lado bajo el periodo 688, y considerando la raiz como un solo guarismo que expresa las decenas de la raiz que ando buscando, separo los dos últimos guarismos 88 del periodo que bajé, y parto el número 42436 por el triplo del quadrado de 84, esto es, por 21168; saco el cociente 2, y le pongo al lado de 84.

Para comprobar la raiz 842, y sacar la resta, si la hay, cubico 842, y resto el producto. . . . . 596947688 del número propuesto 596947688; como no queda resta alguna, infiero que 842 es la raiz cúbica cabal de 596947688.

220 Prevengo 1.º que en el discurso de esta operacion nunca se puede poner mas de 9 á la raiz; 2.º que si el guarismo puesto á la raiz fuese muy grande, no se podria hacer la sustraccion, por cuyo motivo se le quitarán sucesivamente una, dos, tres &c. unidades, hasta que la sustraccion se pueda practicar.

221 Quando el número propuesto no es un cubo cabal, la raiz que se saca no es mas que aproximada, y pocas veces basta sacarla en números enteros, para cuya aproximacion son muy socorridas las decimales, bien que ni aun con ellas se puede sacar cabal la raiz.

Para acercarse quanto uno quiera á la raiz cúbica de un cubo no cabal, se le han de añadir tres veces tantos ceros quantas decimales se quieren en la la raiz. Despues de cuya preparacion se hará la extraccion de la raiz cúbica por el mismo método que en los exemplos antecedentes; y concluida que esté, se separán con una coma en la raiz, á la derecha, las figuras decimales que se quiera.

222 Quiero sacar por aproximacion la raiz cúbica de 8755 con diferencia de menos de una centésima. Para que la raiz lleve centésimas, ó, lo que es lo mismo, dos decimales, es preciso que el número propuesto ó el cubo lleve seis (159); es pues necesario añadir seis ceros al número 8755.

Luego el empeño se reduce á sacar la raiz cubica de 8755000000.

8,755,000,000 | 2061
07,55
12
8000
7550,00
1200
8741816
131840,00
127308
8754552981
447019

Por lo dicho antes, parto este número en periodos de tres guarismos cada uno de la derecha á la izquierda.

Saco la raiz cúbica del último periodo 8; es 2, le pongo á la raiz; cubico 2, el producto le resto de 8; queda la resta o, á cuyo lado bajo el periodo

do 755, y separo los dos últimos guarismos 55. Debajo del 7 que queda pongo 12, triplo del quadrado de la raiz, parto 7 por 12, saco el cociente cero, pongo, pues cero á la raiz.

Cubico la raiz 20, me sale 8000, que resto de 8755; queda la resta 755. A su lado bajo el periodo 000, separando dos figuras á la derecha; debajo de la partida restante 7550, pongo 1200, triplo del quadrado de la raiz 20; y parto 7550 por 1200, saco el cociente 6, que pongo á la raiz.

Cubico la raiz 206, y el producto le resto de 8755000; queda la resta 13184, á cuyo lado bajo el último periodo 000, separando las dos últimas figuras. Debajo de la partida restante 131840, pongo 127308, triplo del quadrado de la raiz hallada 206; parto 131840 por 127308, sale 1 al cociente, y le pongo á continuacion de 206. Cubico 2061, y restando de 8755000000 el producto. . . . 8754552981, queda la resta 447019.

Por consiguiente la raiz cúbica aproximada de 8755000000 es 2061; luego la de 8755,000000 es 20,61, porque todo cubo tiene tres veces tantas decimales quantas su raiz.

Si importara proseguir mas la aproximacion, se añadirian tres ceros á la última resta, y se practicaria lo mismo que hemos enseñado respecto de cada vez que se baja un periodo.

223 Ya que para multiplicar un quebrado por un quebrado se multiplica el numerador por el numerador, y el denominador por el denominador; para cubicar una fraccion se cubica tambien cada uno de sus dos términos. Luego reciprocamente, para sacar la raiz cúbica de un quebrado, se saca la raiz cubica de cada uno de sus dos términos. Así, la raiz cubica de $\frac{27}{64}$ es $\frac{3}{4}$, porque la raiz cúbica de 27 es 3, y la de 64 es 4.

Pe-

224 Pero si solo el denominador fuese un cubo, se sacará la raiz aproxîmada del numerador, y será el numerador de un quebrado, al qual se dará por denominador la raiz cúbica del denominador del quebrado propuesto. Si se me pidiera v. g. la raiz cúbica de $\frac{143}{343}$; como el numerador no es un cubo, saco su raiz aproxîmada 5,22 con diferencia de menos de una centésima; saco despues la raiz de 343, que es 7; por lo que la raiz aproxîmada de $\frac{143}{343}$ es $\frac{5,22}{7}$, ó 0,74, reduciendo á decimales la primera, con diferencia de menos de una centésima.

225 Si tampoco el denominador fuese un cubo, se multiplicarán ambos términos del quebrado propuesto por el quadrado del denominador; y como el nuevo denominador será un cubo, se practicará lo que en el último exemplo.

226 Si se me pide v. g. la raiz cúbica de $\frac{3}{7}$, multiplico ambos términos del quebrado por 49, quadrado de su denominador 7; sale $\frac{147}{343}$ de igual valor que $\frac{3}{7}$ (86). La raiz cúbica de $\frac{147}{343}$ es $\frac{5,27}{7}$, ó 0,75 despues de reducirla á decimales; por consiguiente la raiz cúbica de $\frac{3}{7}$ es 0,75, la qual ni una centésima siquiera discrepa de la verdadera.

227 Si enteros acompañasen á los quebrados, se reduciria todo á quebrados, y la operacion estaria reducida á sacar la raiz cúbica de un quebrado.

Si se quiere, se podrá transformar primero en decimal el quebrado propuesto, bien esté solo, bien con entero, pero será preciso continuar la transformacion hasta que haya tres veces tantas decimales quantas se quieran lleve la raiz. Si se me pidiese la raiz cubica de $7\frac{3}{11}$ v. g. Aproxîmada hasta menos de una milésima, mudaré el quebrado $\frac{3}{11}$ en 0,272727272; de suerte que para sacar la raiz cúbica de $7\frac{3}{11}$ he de sacar la de 7,272727272, la qual es 1,937.

128 Para sacar la raiz cúbica de una cantidad toda decimal, se le añadirán los ceros suficientes, de modo que el número de sus decimales sea tres, seis, nueve &c. Despues se sacará su raiz como si no hubiese coma; y concluida la operacion, se separará con una coma en la raiz, á la derecha, un número de figuras que sea el tercio del número de las figuras decimales de la cantidad propuesta; por manera que si la raiz no tuviere bastantes guarismos para la práctica de esta regla, será preciso añadir ceros á la izquierda de la raiz. Si he de sacar v. g. la raiz cúbica de 6,54 con diferencia de menos de una milésima, le añadiré siete ceros, y sacaré la raiz cúbica de 6540000000, la qual será 1870; separaré tres guarismos, porque hay nueve decimales en el cubo, con lo que será 1,870 ó 1,87 la raiz cúbica de 6,54. Por el mismo camino hallaré que la raiz cúbica de 0,0006, aproxîmada con diferencia de menos de una centésima, es 0,08.

129 Despues de sacada por decimales la expresion aproxîmada de la raiz cúbica de un número, sea el que fuese, entero ó fraccionario, se podrá echar mano de los quebrados continuos para señalar los quebrados sencillos en números enteros inmediatamente mayores ó menores que el quebrado propuesto, que mas se acercan á su valor. Si se me pidiese v. g. la raiz cúbica de 5, sacaré primero su raiz con seis decimales, y es esta 1,709999; haré despues con el quebrado $\frac{1709999}{1000000}$ las mismas operaciones que si le quisiera abreviar. Despues echaré mano de los cocientes 1, 1, 2, 4, y haciendo con ellos lo propuesto (126), saco que la serie de los quebrados que mas se acercan á la raiz cúbica de 5 es $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{53}{31}$, de los quales el último

mo es un valor muy aproximado de $\sqrt[3]{5}$.

130 Todo número cuya raiz cúbica se intenta sacar es considerado como un cubo; pero si no es cubo perfecto, es imposible hallar, á no ser por aproximacion, su raiz tercera. Podemos sin embargo señalar los límites que no pasa: la raïz cúbica de 45 v. g. no es número alguno ni quebrado ni entero; pero sabemos que es mayor que 3 y menor que 4, por estar 45 entre los números cubos 27 y 64.

131 Las raices cúbicas no cabales son tambien irracionales, y se señalan así $\sqrt[3]{\ }$, cuyo 3 significa raiz tercera; $\sqrt[3]{45}$ expresa la raiz cúbica de 45.

Despues de lo dicho acerca de las cantidades irracionales de segundo grado, es escusado detenernos á declarar como se aplica tambien el cálculo á las de tercer grado. Con indicarlo bastará.

1.° $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{5}$ es $\sqrt[3]{20}$; $\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{8\times3}=2\sqrt[3]{3}$.

2.° $\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{5}}$ es $\sqrt[3]{\frac{20}{5}}$ ó $\sqrt[3]{4}$.

3.° $\sqrt[3]{8.3}$ es $2\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{64\times5}$ es $4\sqrt[3]{5}$.

De las Razones y proporciones.

132 Llamamos *Razon* lo que resulta de la comparacion de dos cantidades.

133 Quando al comparar una con otra dos cantidades indagamos en quanto la una excede á la otra, ó esta á aquella, lo que sacamos es la diferencia de las dos cantidades, y se llama su *Razon Arismética*. Si comparamos v. g. 15 con 8 para averiguar su diferencia 7, este 7 es la razon arismé-

tica de 15 á 8. Para señalar que dos cantidades se comparan con el fin de sacar su diferencia, se pone un punto entre las dos; de suerte que 15.8 señala la razon arismética de 15 á 8.

134 Si en la comparacion de dos cantidades se lleva la mira de saber las veces que la una cabe en la otra, ó esta en aquella, lo que se halla se llama *razon geométrica*. Si comparo v. g. 12 con 3 para saber quantas veces 3 cabe en 12, el 4 que saco es la razon geométrica de 12 á 3. Para señalar que dos cantidades se comparan con esta mira, ó lo que es todo uno, para señalar su razon geométrica, se escriben al lado una de otra con dos puntos entremedias, uno encima de otro; 12 : 3 señala la razon geométrica de 12 á 3.

135 De las dos cantidades que se comparan, la primera se llama *antecedente*, la segunda *consecuente*; en la razon 12 : 3, el antecedente es 12, y 3 el consecuente. El antecedente y consecuente se llaman juntos los dos términos de la razon.

136 Se halla, pues, la razon arismética de dos cantidades con restar la menor de la mayor.

Y para hallar la razon geométrica de dos cantidades se divide la una por la otra. Esta razon la señalarémos constantemente partiendo el antecedente por el consecuente; la razon de 12 á 3 es 4; la razon de 3 á 12 es $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$; esta última razon se llama *inversa* de la primera.

137 De una razon geométrica se dice que es *inversa* ó *recíproca* de otra, quando ambas razones se refieren á las mismas cantidades dispuestas de modo que la que es antecedente en la primera es consecuente en la segunda. La razon de 3 á 5 v. g. es recíproca de la razon de 5 á 3. Tambien son inversas una de otra las dos razones siguientes 3:5, $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}$, porque la última razon es $\frac{1}{3}$ partido $\frac{1}{5}$,

 por ó

ó (111) $\frac{1}{3} \times \frac{5}{1} = \frac{5}{3} = 5 : 3$.

138 La razon arismética no se altera quando á cada uno de sus dos términos se le añade ó quita una misma cantidad; porque la diferencia, que es lo que constituye la razon, se queda siempre una misma.

139 La razon geométrica no se altera quando se multiplican ó parten sus dos términos por un mismo número. Porque como la razon geométrica es el cociente (136) del antecedente partido por el consecuente, es una expresion ó cantidad fraccionaria, cuyo valor no muda (86) aunque se multipliquen ó partan sus dos términos por un mismo número. La razon 3 : 12 v. g. ó $\frac{3}{12}$ es la misma que la de 6 : 24 ó $\frac{6}{24}$, la qual es la primera despues de multiplicados sus dos términos por 2; es tambien la misma que la de 1 : 4, cuyos términos son los de la primera partidos por 3.

Esta propiedad de las razones geométricas sirve para abreviarlas. Si se me ofreciese averiguar v. g. la razon de $6\frac{3}{4}$ á $10\frac{2}{3}$ diria, reduciendo cada término á quebrado, que dicha razon es la misma que la de $\frac{27}{4}$ á $\frac{32}{3}$, ó, reduciéndola al mismo denominador, la misma que la de $\frac{81}{12}$ á $\frac{128}{12}$, ó finalmente, suprimiendo el denominador 12 (que es lo propio que si multiplicara por 12 ambos términos $\frac{81}{12}$ y $\frac{128}{12}$ de la razon) la misma que la 81 á 128. Y de hecho, no hay duda en que 81 dozavos caben en 128 dozavos las mismas veces que 81 unidades en 128 unidades.

140 Quando quatro cantidades son tales que la razon de las dos primeras es la misma que la de las dos últimas, decimos que las quatro cantidades forman una *proporcion*, [illegible] proporcion es arismética ó geométrica, segun sean arisméticas ó geométricas las dos ra[illegible]es iguales que la forman.

Las

141 Las quatro cantidades 7, 9, 12, 14 forman una proporcion arismética, porque la diferencia de las dos primeras es la misma que la de las dos últimas. La proporcion arismética se señala así 7 . 9 : 12 . 14; quiero decir que se separan con un punto los dos términos de cada razon, y las dos razones una de otra con dos puntos. El punto que separa los dos términos de cada razon se lee *es á*, ó *se ha á*, y los dos puntos que separan las dos razones se leen *como*; por manera que la proporcion escrita conforme hemos dicho se lee así 7 es á 9, como 12 es á 14, ó 7 se ha á 9, como 12 se ha á 14.

142 Las quatro cantidades 3, 15, 4, 20 forman una proporcion geométrica; porque 3 cabe en 15 el mismo número de veces que 4 cabe en 20. La proporcion geométrica se señala así, 3 : 15 :: 4 : 20; quiero decir que se separan los dos términos de cada razon con dos puntos, y las dos razones con quatro. Los dos puntos se leen del mismo modo que el punto en la proporcion arismética, y los quatro puntos del mismo modo que los dos de aquella, sin mas diferencia que añadir la palabra *arisméticamente* antes de la voz *como* al leer una proporcion arismética.

143 El primer y último término de la proporcion se llaman los *extremos*, y el segundo y tercero los *medios* de la proporcion. Como en toda proporcion hay dos razones, y por lo mismo dos antecedentes y dos consecuentes, los dos términos de la primer razon se llaman *primer antecedente* y *primer consecuente*, y los dos términos de la segunda, *segundo antecedente* y *segundo consecuente*.

144 Quando los [illegible]s medios de una proporcion arismética son igu[illegible]a proporcion se llama *proporcion continua*, tal es esta 3.7:7.11, y se escribe así ÷3.7.11: la raya puesta antes con los dos

pun-

puntos, sirve para avisar que la proporcion continua es arismética, y que al leerla se ha de repetir el término medio que aquí es 7.

La proporcion 5 : 20 :: 20 : 80 es una proporcion *geométrica continua*, la qual, para abreviar, se señala de este modo ÷5:20:80; la raya con los quatro puntos sirve en esta proporcion para lo mismo que en la proporcion arismética continua.

145 De lo que acabamos de decir acerca de las proporciones arisméticas y geométricas se infiere 1.° que si á cada antecedente de una proporcion arismética se le añade ó quita la diferencia ó razon que tiene con su consecuente, segun sea aquel mayor ó menor que este, cada antecedente será igual con su consecuente; porque con esto se le añade al término menor de cada razon para que sea igual con su correspondiente, ó se le quita al mayor el exceso que lleva á su correspondiente. Si en la proporcion 3.7:8.12 v. g. añadimos al primer y tercer término la diferencia 4, saldrá 7.7:12.12; se viene á los ojos que esto es general; 2.° si se multiplican ambos consecuentes de una proporcion geométrica, quando son menores que sus antecedentes, por la razon, cada uno será tambien igual con su antecedente; porque multiplicar el consecuente por la razon, es tomarle tantas veces quantas cabe en el antecedente. Si en la proporcion 12 : 3 :: 20 : 5 multiplico por 4 cada uno de los dos términos 3 y 5, sacaré 12 : 12 :: 20 : 20; la proporcion 15 : 9 :: 45 : 27 se transformará en 15 : 15 :: 45 : 45 con multiplicar los dos términos 9 y 27 cada uno por la razon $\frac{15}{9}$ ó $\frac{5}{3}$.

Proporcion

De la [illegible] Arismética.

146 *La propiedad fundamental de la proporcion aris-*

arismética, es que la suma de los extremos es igual á la suma de los medios; en esta proporcion v. g. 3 . 7 : 8 . 12 la suma de los extremos 3 y 12=15, y la suma de los medios 7 y 8=15.

Probarémos que esta propiedad se verifica en toda proporcion arismética. Porque si los dos primeros términos fuesen iguales uno con otro, y fuesen tambien iguales uno con otro los dos últimos, como en esta proporcion 7 . 7 : 12 . 12, no hay duda en que la suma de los extremos seria igual á la de los medios. Pero es muy fácil dar esta forma á toda proporcion arismética (145) con añadir ó quitar á cada antecedente la razon; pues esto aumentará ó disminuirá igualmente la suma de los extremos y la de los medios, y por consiguiente no se alterará la igualdad de las dos sumas; luego si son iguales despues del aumento ó diminucion propuesta, es porque lo eran antes.

147 Síguese de aquí que, por ser iguales en la proporcion continua uno con otro los dos medios, *en toda proporcion arismética continua la suma de los extremos es dupla del término medio, ó el término medio es la mitad de la suma de los extremos.*

148 Luego para hallar un medio arismético v. g. entre 7 y 15 sumo 7 con 15, la suma es 22, cuya mitad 11 será el medio arismético que se pide; por manera que ÷7 . 11 . 15.

De la proporcion Geométrica.

149 *La propiedad fundamental de la proporcion geométrica es, que el producto de los extremos es igual al producto de los medios*; en esta proporcion v. g. 3 : 15 :: 7 : 35, el producto de 35 por 3 es 105, y el de 15 por 7 es tambien 105.

Probarémos que esta propiedad es general.

Si los antecedentes fuesen iguales con sus consecuentes, como en esta proporcion, $3:3::7:7$, es patente que el producto de los extremos será igual con el de los medios. Pero es muy fácil dar esta forma á toda proporcion geométrica (145) con multiplicar ambos consecuentes por la razon. Verdad es que despues de esta multiplicacion el producto de los extremos será unas quantas veces mayor de lo que hubiera sido, ó unas quantas veces menor, si la razon fuese un quebrado; pero tambien resultará la misma alteracion en el producto de los medios; por consiguiente si despues de dicha multiplicacion los dos productos son iguales uno con otro, es porque lo eran tambien antes.

Luego se puede tomar indistintamente el producto de los extremos por el de los medios, ó este por aquel.

150 Luego *en la proporcion continua el producto de los extremos es igual al quadrado del término medio*; porque como los dos medios son una misma cantidad, su producto es lo mismo que el quadrado del término medio. Luego, para hallar un medio geométrico continuo entre dos números dados ó propuestos, se multiplicarán uno por otro los dos números, y se sacará la raiz quadrada del producto. Si se trata de hallar un medio geométrico entre 4 y 9, multiplico 4 por 9; la raiz quadrada 6 del producto 36 será el medio proporcional continuo entre los dos números.

151 De la propiedad fundamental de la proporcion geométrica se infiere tambien, que conociendo los tres primeros términos de una proporcion, se hallará el quarto multiplicando el segundo por el tercero, y partiendo su producto por el primero. Porque no hay duda (75) en que si se parte el producto de los dos extremos por el primer término, saldrá al cociente el quarto término; y porque el producto de los medios es el mismo (149) que el de los extremos, saldrá tambien al cociente el quarto término si se parte el producto de los medios por el primer término.

En virtud de esto; si se me pregunta qual es el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros son $3:8::12$, multiplicaré 8 por 12, partiré el producto 96 por 3, y el quarto término será 32; por manera que 3, 8; 12 y 32 forman una proporcion; y la cosa es clara, porque la primer razon es $\frac{3}{8}$, y la segunda es $\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$ (86) despues de partir ambos términos por 4.

Por el mismo camino se hallará el término que se quiera de una proporcion, una vez que se conozcan los otros tres. Si el término que se busca es uno de los extremos, se multiplicarán los dos medios, y partirá su producto por el otro extremo conocido. Si al contrario se busca uno de los medios, se multiplicarán los dos extremos, y partirá su producto por el medio conocido.

152 La propiedad de ser igual el producto de los extremos al producto de los medios solo puede verificarse con quatro cantidades en proporcion geométrica. Porque si las quatro cantidades no forman proporcion geométrica, despues de multiplicar los consecuentes por la razon de las dos primeras, solo el primer antecedente será igual con su consecuente; si las quatro cantidades fueran v. g. 3, 12, 5, 10, despues de multiplicar los consecuentes 12 y 10 por la razon $\frac{1}{4}$ de las dos primeras 3 y 12, saldria 3, 3, 5, $\frac{10}{4}$, donde es evidente que el producto de los extremos no puede ser igual al de los medios; luego tampoco serian iguales estos productos, aun quando no se multiplicaran los consecuentes por la razon $\frac{1}{4}$. Esta demostracion se aplica á to-

todos los demas casos.

153 Luego, siempre que quatro cantidades son tales que el producto de los extremos sea igual al producto de los medios, las quatro cantidades estan en proporcion. De aquí inferiremos la segunda propiedad de la proporcion geométrica.

154 Si *quatro cantidades estan en proporcion, lo estarán igualmente, poniendo los extremos en lugar de los medios, y los medios en lugar de los extremos*, cuya disposicion se llama *invertendo.*

155 Tambien subsistirá la proporcion si se mudan de lugar los extremos ó los medios, cuya disposicion se llama *alternando.*

Porque en ambas disposiciones se verifica que el producto de los extremos es igual al de los medios.

156 En virtud de esta propiedad, de la proporcion 3 : 8 :: 12 : 32 se sacarán solo con mudar de lugar sus términos, todas las proporciones siguientes.

3 : 8 :: 12 :: 32	
3 12 :: 8 :: 32	*alternando.*
32 : 12 :: 8 : 3	*invertendo.*
32 : 8 :: 12 : 3	*alternando.*
8 : 3 :: 32 : 12	*invertendo.*
8 : 32 :: 3 : 12	*alternando.*
12 : 3 :: 32 : 8	*invertendo.*
12 : 32 :: 3 : 8	*alternando.*

Lo propio digo de otra qualquier proporcion.

157 Ya que se puede poner el tercer término en lugar del segundo, y recíprocamente, inferiremos que no se turba una proporcion quando se multiplican ó parten sus dos antecedentes, ó sus dos consecuentes por un mismo número. Porque despues de di-

dicha transposicion, los dos antecedentes de la proporcion dada formarán la primer razon, y los dos consecuentes la segunda. Por consiguiente, multiplicar los dos antecedentes de la primer proporcion viene á ser entonces lo mismo que multiplicar ambos términos de una razon por un mismo número, lo que (86) no la muda. Puedo, pues, partir por 3 los dos antecedentes de la proporcion 3 : 7 :: 12: 28, y decir 1 : 7 :: 4 : 28; porque la proporcion 3:7 :: 12 : 28 la puedo transformar (156) en 3 : 12 :: 7 : 28; y partiendo los dos términos de la primer razon por 3, saldrá 1 : 4 :: 7 : 28, que pudo transformar (155) en 1 : 7 :: 4 . 28.

158 Subsiste una proporcion quando en cada razon se compara con el antecedente ó consecuente la suma del antecedente y consecuente, lo que se llama *componendo*, ó su diferencia, lo que se llama *dividendo.*

De la proporcion 12 : 3 :: 32 : 8 se podrán inferir las proporciones siguientes.

12+3 : 3 :: 32+8 : 8	*componendo.*
12—3 : 3 :: 32—8 : 8	*dividendo.*
12+3 : 12 :: 32+8 : 32	*componendo.*
12—3 : 12 :: 32—8 : 32	*dividendo.*

Porque quando se hace la comparacion con el consecuente, se echa de ver que si le añadimos ó quitamos el antecedente, cabrá aquel en este una vez más, ó una vez menos que antes; y como se hace lo mismo en la segunda razon, la qual por la naturaleza de la proporcion es igual con la primera, las dos nuevas razones serán tambien iguales una con otra.

Quando se hace la comparacion con el antecedente, la proposicion se probará del mismo mo- do do; bastará figurarse que en la proporcion donde se haga esta mudanza, se ha puesto el antecedente de cada razon en lugar de su consecuente, y el consecuente en lugar del antecedente, lo que segun hemos visto (154) se puede hacer.

159 Ya que poniendo el tercer término de una proporcion en lugar del segundo, y reciprocamente, subsiste todavia la proporcion (155), debe inferirse que los dos antecedentes caben uno en otro tantas veces, quantas los consecuentes caben uno en otro.

160 Luego en la suma de los dos antecedentes de toda proporcion cabe la suma de los consecuentes, ó esta en aquella, tantas veces quantas uno de los antecedentes cabe en su consecuente, ó este en aquel.

En la proporcion $12 : 3 :: 32 : 8$. . . . . $12+32 : 3+8 :: 32 : 8$, en esto no hay duda; pero para probarlo en general, basta considerar que si en el primer antecedente cabe el segundo quatro veces v. g. en la suma de los dos antecedentes cabrá el segundo cinco veces; y por la misma razon en la suma de los consecuentes cabrá el segundo consecuente cinco veces. Luego la suma de los consecuentes cabrá en la de los antecedentes como el quintuplo del uno de los consecuentes cabe en el quintuplo de su antecedente; esto es, como uno de los antecedentes cabe en su consecuente.

161 Del mismo modo se probará que la diferencia de los antecedentes es á la diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

162 La proposicion que acabamos de demostrar viene á ser la misma que estotra.

Si

Si hay dos razones iguales, estas dos v. g. . . . . la misma razon subsistirá entre la suma de los dos antecedentes, y la suma de los dos consecuentes.

$$\begin{array}{c} 4 : 12 \\ 7 : 21 \\ \hline 11 : 33 \end{array}$$

163 Luego siempre que hubiere muchas razones iguales, la suma de todos los antecedentes será á la suma de todos los consecuentes, como uno de los antecedentes á su consecuente. Si tuviésemos v. g. las razones iguales $4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6$, podremos decir que $4+7+2 : 12+21+6 :: 4 : 12$ ó $:: 7 : 21$, &c.

Porque sumando unos con otros los antecedentes de las dos primeras razones, y tambien unos con otros los consecuentes, la razon entre las dos sumas, la qual, por lo que acabamos de probar, será la misma que cada una de las primeras, será tambien la misma que la tercera; por consiguiente tambien se podrán sumar respectivamente los dos términos de esta con los de aquella, y resultará todavia la misma razon.

164 De lo dicho (160) podemos inferir que en toda proporcion la suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes, como la diferencia de los antecedentes es á la diferencia de los consecuentes.

Ya que la proporcion $48 : 16 :: 12 : 4$ da

$$48+12 : 16+4 :: 12 : 4 \text{ y}$$
$$48-12 : 16-4 :: 12 : 4$$

podemos inferir evidentemente, por ser comun la razon de $12 : 4$, que $48+12 : 16+4 :: 4-12 : 16-4$. Esta prueba se aplica á otra qualquier proporcion.

165 Luego si en la última proporcion substituimos el tercer término en lugar del segundo, y el segundo en lugar del tercero (155), probaremos facilmente que la suma de los antecedentes es á su

di-

diferencia, como la suma de los consecuentes á su diferencia.

166 Si mudamos de lugar los medios de esta proporcion 48 : 16 :: 12 : 4; y escribimos 48 : 12 :: 16: 4, y aplicamos á esta proporcion lo dicho (166), saldrá 48+16 : 12+4::48—16 : 12—4, cuya proporcion comparada con estotra 48 : 16 :: 12 : 4, manifiesta que la suma de los dos primeros términos de una proporcion, es á la suma de los dos últimos, como la diferencia de los dos primeros es á la diferencia de los dos últimos; ó, con substituir el tercer término en lugar del segundo, y el segundo en lugar del tercero, la suma de los dos primeros términos es á su diferencia, como la suma de los dos últimos es á su diferencia.

167 Llámase *razon compuesta* la razon que se origina de multiplicar unos por otros los antecedentes de dos ó mas razones y los consecuentes por los consecuentes. Si tenemos v. g. las dos razones 12: 4, y 25 : 5, el producto de los antecedentes 12 y 25 será 300, el de los consecuentes 4 y 5 será 20; la razon de 300 á 20 se llamará compuesta de la de 12 á 4, y de 25 á 5.

Esta razon es la misma que se origina de valuar separadamente cada una de las razones componentes, y multiplicar despues unos por otros los números que expresan dichas razones, los quales se llaman sus *exponentes*. Con efecto, la razon de 12 á 4 es 3, y la de 25 á 5 es 5; pero 3 veces 5 son 15, razon de 3000 á 20. Esto es general, porque la medida de la razon es un quebrado (136) cuyo numerador es el antecedente, y el consecuente su denominador. Es, pues, preciso que la razon compuesta sea un quebrado, cuyo numerador ha de ser el producto de los dos antecedentes, y el denominador el producto de los dos consecuentes; es por lo mismo la razon compuesta el producto de dos quebrados que expresan las razones componentes.

168 Quando las razones componentes son dos iguales, la razon compuesta se llama *razon duplicada*; quando las componentes son tres iguales, ó quatro iguales, las compuestas se llaman respectivamente *triplicada*, *quadruplicada* &c.

Si multiplico v. g. la razon de 2 á 3 por la de 4 á 6, igual con ella, sale la razon compuesta 8 : 18, que llamarémos razon duplicada de la de 2 á 3 ó de 4 á 6.

169 Si se multiplican ordenadamente dos proporciones, quiero decir, el primer término de la una por el primer término de la otra, y el segundo por el segundo, resultarán quatro productos, que formarán proporcion.

Porque quando se multiplican así dos proporciones, se multiplican dos razones iguales por dos razones iguales (139); luego las dos razones compuestas que resultan serán iguales; luego los quatro productos formarán proporcion (149).

170 De aquí inferiremos que los quadrados, los cubos, y en general las potestades de un mismo nombre de quatro cantidades en proporcion, forman tambien proporcion; porque para formar estas potestades no se hace otra cosa sino multiplicar la proporcion muchas veces por ella misma.

171 Las raices quadradas, cúbicas, y en general las raices de un mismo nombre de quatro cantidades en proporcion, forman tambien proporcion; porque la razon de las raices quadradas de los dos primeros términos no es otra cosa que la raiz quadrada de la razon de dichos dos términos, y lo mismo digo de la razon de las raices quadradas de los dos últimos términos. Luego una

una vez que suponemos iguales las dos razones primitivas, sus raices quadradas tambien lo serán; luego la razon de las raices quadradas de los dos primeros términos será igual á la razon de las raices quadradas de los dos últimos. Del mismo modo se probará la proposicion respecto de las raices cúbicas &c.

172 Quando una razon se compone del producto de otras muchas razones, se puede substituir en lugar de una de las razones componentes una razon expresada con otros términos, con tal que entre ellos haya la misma razon que entre aquellos en cuyo lugar se substituyen.

En la razon de $6 \times 10 : 2 \times 5$ v. g. podremos substituir 3 y 1 en lugar de los factores 6 y 2, lo que dará la razon compuesta $3 \times 10 : 1 \times 5$. Porque ya que $6 : 2 :: 3 : 1$, podrémos multiplicar los antecedentes por 10, y los consecuentes por 5, sin que de esto se siga alteracion alguna en la proporcion de donde saldrá $6 \times 10 : 2 \times 5 :: 3 \times 10 : 1 \times 5$. Lo mismo se probará aunque sea otra qualquiera la proporcion.

173 Si dos ó mas proporciones son tales que el antecedente de la primer razon de la una sea igual al consecuente de la otra, siempre que las tales proporciones se hayan de multiplicar ordenadamente, se podrán omitir los términos que fueren comunes al antecedente y al consecuente. Si las dos proporciones fuesen v. g. estas.

$$\begin{array}{l} 6 : 4 :: 12 : 8 \\ 4 : 3 :: 20 : 15 \\ \hline \end{array}$$

inferirémos. . . $6 : 3 :: 12 \times 20 : 8 \times 15$

Porque aunque dejáramos el multiplicador comun 4, la razon, que entónces seria la de 6×4 á 4×3, seria la misma que la de 6 á 3, la que queda despues de borrado dicho factor comun.

Si tuviéramos
$$\begin{array}{l} 6 : 4 :: 12 : 8 \\ 4 : 3 :: 20 : 15 \\ 3 : 7 :: 21 : 49 \\ \hline \end{array}$$

tendremos $6 : 7 :: 12 \times 20 \times 21 : 8 \times 15 \times 49$

174 Las proposiciones que acabamos de demostrar son de un uso continuo en todos los ramos de la matemática; pero sirven particularmente para la resolucion de varias cuestiones que á cada paso se ofrecen en el trato humano. Manifestarémos por lo mismo como se resuelven, variando los exemplos para facilitar la inteligencia de esta aplicacion.

De la Regla de Tres.

175 La primer regla que se funda en la doctrina hasta aquí enseñada de las razones y proporciones, es la que todos llaman *Regla de Tres* ó *Regla de Oro* por causa de su excelencia y uso continuo. Aunque hay varias reglas de tres, el fin de todas es hallar el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros son conocidos.

176 Quando no son mas que tres las cantidades conocidas, la Regla se llama *Regla de Tres simple*; quando las cantidades conocidas son mas de tres, y concurren ciertas circunstancias que luego dirémos, la regla se llama *Regla de Tres compuesta.*

Regla de Tres simple.

177 Segun el orden por el qual se ha de sacar la can-

cantidad que se busca, muda tambien de nombre esta regla, y se llama Regla de Tres *directa* ó Regla de Tres *inversa*. Porque las preguntas suelen ser tales, que en unas, de lo mas hemos de sacar lo mas, ó de lo menos lo menos, y estas se responden por la regla de tres directa; en otras preguntas, de lo menos hemos de sacar lo mas, ó de lo mas lo menos, y estas se responden por la regla de tres inversa.

178 A fin de hacer muy perceptible esta diferencia, que suele ser un escollo para los Principiantes, conviene saber que de las quatro cantidades que entran en una regla de tres, dos son de un mismo nombre ó especie, y las otras dos tambien de un mismo nombre ó especie, bien que diferentes de las dos primeras, con las quales son correlativas. Un caso práctico nos guiará mejor en la declaracion de este punto.

179 Sé que tres hombres han hecho 14 varas de obra en 12 dias, y quiero saber quanta obra harán 15 hombres trabajando otros tantos dias, y siendo iguales todas las demas circunstancias, como que sea la obra de una misma calidad, sean los 15 hombres igualmente trabajadores que los 3, y trabajen un mismo número de horas al dia, &c.

Las cantidades de un mismo nombre son aquí 3 hombres y 15 hombres; las 14 varas de obra que han hecho los primeros, y las que harán los otros son las otras dos cantidades de un mismo nombre, correlativas, como se vé, con las primeras, bien que de diferente especie. Se viene á los ojos que así como 15 hombres son mas que 3 hombres, tambien los primeros harán mas varas de obra en igualdad de circunstancias: ó que en la misma razon que 3 es menor que 15, el número 14 de varas que han hecho los primeros será menor que el número de varas

ras que trabajarán los otros. Vamos por consiguiente aquí de lo mas á lo mas, esto es de mas hombres á mas varas, y por consiguiente la regla de tres es directa. Esto supuesto.

180 Cuestion. *Si 40 hombres hacen en cierto tiempo 268 varas de obra ¿quanta obra harán 60 hombres en el mismo tiempo?*

Las cantidades de un mismo nombre son aquí 40^h y 60^h, y como estos son mas que aquellos, tambien el número de varas que trabajarán será mayor que el número de varas que han trabajado los primeros. Vamos por lo mismo de lo mas á lo mas, esto es de mas hombres á mas varas, por cuyo motivo la regla es directa. Pongo las tres cantidades en proporcion

$$40^h : 60^h :: 268^v :$$

partiendo ambos términos de la primer razon por su maxîmo comun divisor 20, lo que no altera la razon (86) y debe practicarse siempre que se pueda, por lo mucho que simplifica la operacion

$$2^h : 3^h :: 268^v :$$

Multiplico por lo dicho (151) 268 por 3; el producto 804 le parto por 2, y sale al cociente 402, número de varas que trabajarán los 60 hombres.

181 La práctica de esta regla se abrevia mucho dividiendo los dos términos de la primer razon por el primero, y multiplicando el tercero por el cociente que da la division del segundo; claro está que el quarto término que se busca será el producto del tercer término de la proporcion por el cociente de esta division, sin necesidad de partirle por el primer término, el qual será la unidad. En el caso propuesto, los términos son

$$2 : 3 :: 268 :$$

partiendo 2 y 3 por 2, sale $1 : 1,5 :: 268$. La regla manda que multiplique 268 por 1,5, y parte el producto por 1; cuya division es escusada. Claro está que $268 \times 1,5 = 402$ como antes.

La razon de esta práctica es muy patente; porque los dos primeros términos despues de divididos por el primero, tienen uno con otro la misma razon que antes.

182 Cuestion. *Un caminante ha andado 34 leguas en 6 dias ¿en quantos dias andará 255 leguas?*

Una vez que ha de andar mas leguas, gastará mas dias; luego vamos de mas leguas á mas dias, y la regla es directa. Las dos cantidades de un mismo nombre son 34^{l} y 255^{l}, y las tres conocidas se han de poner en proporcion como se sigue

$$34^{l} : 255^{l} :: 6.^{d}$$

Multiplicando 255 por 6, y partiendo el producto 1530 por 34, el cociente 45^{l} satisfará la pregunta.

De la Regla de Tres inversa.

183 En la regla de tres inversa vamos, segun queda insinuado de lo mas á lo menos, ó de lo menos á lo mas. Supongamos que se me haga esta pregunta: *16 hombres han hecho diez varas de obra en 8 dias ¿quantos hombres harán la misma obra en 4 dias?* Es patente que pues la misma obra se ha de hacer en menos dias, habrán de trabajar mas hombres. Luego aquí vamos de lo menos á lo mas, esto es de menos dias á mas hombres, y por lo mismo es inversa la regla. Las tres cantidades conocidas son 16^{h}, 8^{d}, 4^{d}, y no podemos decir: como 8^{d} son mas que 4^{d}, y así 16^{h} son mas que los que saldrán, antes ha de ser todo al reves. Pero como el número de hombres que buscamos ha de cer mayor que el conocido, y es el segundo consecuente, dispondrémos las otras dos cantidades de un mismo nombre, de modo que la menor ocupe el pri-

primer lugar, y tendrémos $4^{d} : 8^{h} :: 16^{h}$: lo que salga. El quarto término se sacará por el mismo método que antes; partirémos 128, producto de 16 por 8, por el primer término 4, y el cociente 32 será el número de hombres pedido.

184 Cuestion. *Un navío que no tiene bastimentos mas que para 15 dias, ha de navegar 20 dias, claro está que ha de gastar menos víveres cada dia ¿á quanto se ha de reducir el consumo total diario?*

Llamarémos 1 el consumo total, y este seria con efecto el consumo diario, si la navegacion no hubiese de durar mas que 15 dias; pero como ha de durar mas, el consumo diario ha de ser menos; vamos, pues, de lo mas á lo menos; la regla es por lo mismo inversa, y sus dos cantidades de un mismo nombre son 15^{d} y 20^{d}, que con la otra conocida se han de poner en proporcion como sigue $20 : 15 :: 1 :$ ó por lo dicho (181)

$$4 : 3 :: 1 : \frac{1 \times 3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Es pues necesario gastar cada dia las tres quartas partes de los víveres que se hubieran gastado, si la navegacion no hubiese de durar cinco dias mas.

185 Cuestion. *En una plaza sitiada hay 800 soldados con víveres para dos meses no mas ¿quantos soldados han de salir de la plaza para que los víveres duren 5 meses?*

En sabiendo, quantos soldados gastarán los víveres en 5 meses, rebajarémos de 800 su número, y los restantes serán los que habrán de salir de la plaza. Bien se percibe que esta cuestion discrepa poco de la última.

Ya que los víveres han de durar 5 meses, los soldados han de ser menos, como 5 es mayor que 2. Digo, pues, $5^{m} : 2^{m} :: 800^{s} : 320.^{s}$

Rebajo 320 de 800, y la resta 480 expresa los sol-

soldados que han de salir de la plaza.

186 Cuestion. *Si quatro quartos de pan candial han de pesar 8 onzas quando el trigo está á 28 rs. la fanega ¿quanto habrán de pesar en estando el trigo á 22 rs. la fanega?*

Es natural que quando el trigo vale mas barato ó cuesta menos, por los 4 quartos se dé mas pan; vamos, pues de lo menos á lo mas; por lo que dispondrémos las cantidades como sigue.

$$22^{rs} : 28^{rs} :: 8^{o} : 10\tfrac{2}{11} \text{ onzas.}$$

187 Cuestion. *Quantas varas de coton de* $1\frac{1}{4}$ *vara de ancho se necesitan para colgar un lienzo de pared que tiene 3 varas y media de ancho, y 10 varas de alto?*

Se necesita mas coton á proporcion de lo que tiene menos de ancho que el lienzo de pared; vamos, pues de lo menos á lo mas. Las dos cantidades de un mismo nombre son $1\frac{1}{4}^{v}$ y $3\frac{1}{2}$ vara, luego las tres cantidades conocidas se dispondrán como sigue $1\frac{1}{4}^{v} : 3\frac{1}{2}^{v} :: 10$ ó

$$\tfrac{5}{4} : \tfrac{7}{2} :: 10 \text{ ó}$$

$$10 : 28 :: 10 : \frac{28 \times 10}{10} = 28$$

se necesitarán 28 varas de coton.

188 Cuestion. *Pedro pide prestados á Juan 250 pesos por 6 meses de tiempo, obligándose á pagar por ellos cada mes un interes estipulado que no paga. Llega el caso de pedir prestados Juan á Pedro 400 pesos al mismo interes mensual, que no pagará para cobrarse del interes que le quedó debiendo Pedro; ¿quantos meses han de quedar los 400 pesos en poder de Juan, para cobrarse de lo que Pedro debe?*

El tiempo que buscamos ha de ser menos de 6 meses en la misma proporcion que 400 pesos son mas

mas que 250; es, pues, inversa la regla. Por lo mismo dispongo las cantidades como sigue:

$$400^{pe} : 250^{p} :: 6^{m} : 3^{m}\ 7\tfrac{1}{2}^{d}.$$

De la Regla de Tres compuesta.

189 En la Regla de tres simple, directa ó inversa, se halla la cantidad desconocida por medio de una sola proporcion; para sacarla por una regla de tres compuesta, es preciso hacer dos proporciones, siendo en muchos casos directa la una, é inversa la otra.

190 Cuestion. *Si 30 hombres han hecho 132 varas de obra en 18 dias ¿quanta obra harán 54 hombres en 28 dias?*

Busco primero que obra harán los 54^{h} en 18 dias, diciendo, como lo da bastante á conocer la disposicion de las cantidades

$$30^{h} : 54^{h} :: 132^{v} : 237{,}6^{v}$$

si 30^{h} hacen 132^{v} en 18 dias ¿quantas varas harán 54^{h} en el mismo tiempo? ya que son mas hombres, harán mas varas, y saco que harán 237,6 varas.

Ahora bien: ya que en 18 dias los 54^{h} hacen $237{,}6^{v}$ de obra, en 28 dias harán mas. Dispongo, pues, las cantidades conocidas como sigue $18^{d} : 28^{d} :: 237{,}6^{v} : 369{,}6^{v}$. Luego los 54^{h} trabajando 28^{d} harán 369,6 varas de obra. En esta pregunta ambas proporciones son directas.

191 Cuestion. *Si el porte de 15 arrobas de peso á la distancia de 134 leguas cuesta* 180^{rs}. *¿quanto costará el porte de 22 arrobas á la distancia de 12 leguas, pagando lo mismo por arroba?*

Busco primero quanto costará el porte de las 22^{ar} á la distancia de 134^{l}, en el supuesto de que el de las 15^{ar} cueste 180^{rs}.

 Des-

$$15^{ar} : 22^{a} :: 180^{rs} : 264^{rs}.$$

Despues digo: como 12^{l} son menos que 134^{l}, tambien las 22^{a} han de costar menos que las 264^{a}. Dispongo los términos de la proporcion como aquí se vé $134^{l} : 12^{l} :: 264^{rs} : 23{,}64^{rs} = 23^{rs}, 22^{mrs}$.

192 Cuestion. *Si 100 pesos ganan seis pesos de interes en un año ó 12 meses ¿que ganancia darán* 300 *pesos en 9 meses, pagando lo mismo por ciento?*

Busco primero el interes que darán en un año los 300 pesos, en el supuesto de dar 6 de interes los 100; $100^{p} : 300^{p} :: 6^{i} : 18^{i}$, y hallo que dan 18 pesos.

Ahora buscaré el interes que darán los 300 pesos en 9 meses, supuesto que en un año dan 18 pesos. Claro está que así como 9 meses son menos que 12, el interes de los 9 meses será también menos $12^{m} : 9^{m} :: 18^{pe} : 13^{pe}, 5$.

193 Cuestion. *Un hombre que camina 7 horas al dia, gasta 30 dias en andar 230 leguas ¿quantos dias gastará en andar 600 leguas, caminando 10 horas al dia?*

Veamos primero que dias gastará en andar las 600^{l} caminando 7^{h} al dia; para lo qual reparo que si entonces gasta 30^{d} para andar las 130^{l}, para andar las 600^{l} gastará mas dias. Digo, pues,

$$230^{l} : 600^{l} :: 30^{d} : 78, 261^{d}.$$

Pero como el caminante al andar las 600^{l} camina mas horas al dia, tardará menos dias en la razon que 10 es mayor que 7: por lo mismo

$$10^{h} : 7^{h} :: 78, 261^{d} : 54, 731^{d}.$$

194 Cuestion. *Si 15 mulas consumen 6 fanegas de cebada en 8 dias ¿en quantos dias consumirán 16 mulas 21 fanegas, dándoles el mismo pienso?*

Bus-

Busco primero quanto tiempo las 15 mulas consumirán las 21 fanegas

$$6^{f} : 21^{f} :: 8^{d} : 28^{d}.$$

se las comeran en 28 dias.

Ahora considero que como 16 mulas son mas que 15, aquellas consumirán en menos dias las 21 fanegas; es, pues, inversa la segunda proporcion, y digo

$$16^{mul} : 15^{mul} :: 28^{d} : 26, 25^{d}.$$

195 Cuestion. *¿Qual es el capital [illegible] meses dará 20 de ganancia, á razon de 6 por ciento al año?*

Busco primero que ganancia darán 100 pesos en 8 meses.

$$12^{m} : 8^{m} :: 6 : \frac{6 \times 8}{12} = 4$$

Considerando ahora que el interes ha de ser menos en la razon que 8 meses son menos que 12 meses, dispongo los términos del modo siguiente

$$4^{in} : 20^{in} :: 100 : \frac{100 \times 20}{4} = 500$$

lo que manifiesta que el capital ha de ser de 500 pesos.

En el tomo segundo darémos la resolucion de la regla de compañía, falsa posicion, aligacion, interes &c.

De la Progresion Arismética.

196 La progresion arismética es una serie ó continuacion de términos, que cada uno lleva al que le precede ó sigue el mismo exceso, v. g.

$\div$ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 &c.
es una progresion arismética, porque cada término lleva al que le precede un mismo exceso que es 3.

La raya con dos puntos, uno encima otro debajo, puesta al principio de la progresion, sirve

para

para avisar que al leer esta, debe repetirse cada término, menos el primero y el último en esta forma, 1 es á 4, como 4 es á 7, como 7 es á 10 &c.

197 La progresion se llama *creciente* ó *decreciente*, segun van sus términos creciendo ó menguando; pero como las propiedades de ambas son unas mismas solo con mudar las voces *mas* en *menos*; *sumar* en
progresion *restar*, *restar* en *sumar*, considerarémos aquí sola la [redacted] creciente.

198 Se saca, pues, de la naturaleza de la progresion arismética, que con el primer término y la diferencia comun ó la razon de la progresion, se pueden formar todos los demas términos, añadiendo á cada término la razon, y que por lo mismo

El segundo término se compone del primero, mas la razon

El tercero se compone del segundo, mas la razon, y por consiguieute del primero mas dos veces la razon.

El quarto se compone del tercero, mas la razon; y por consiguiente del primero, mas tres veces la razon; y así prosiguiendo.

199 De suerte que se puede decir, en general, que un término qualquiera de una progresion arismética se compone del primero, mas tantas veces la razon quantos términos hay antes de él.

200 Luego si el primer término es cero, qualquier término de la progresion será igual á tantas veces la razon, quantos términos hay antes de él.

201 Para dos cosas sirve este principio; 1.° para hallar el término que se quiera de una progresion, sin necesidad de calcular los que le preceden. Supongamos que se nos pregunte v. g. qual es el 100^{mo} término de esta progresion $\div 4 . 9 . 14 . 19$ &c.

Ya que el término pedido es el 100^{mo}, hay

96

99 términos antes de él; por consiguiente se compone del primer término 4 y de 99 veces la razon 5; será, pues, $4+495$, esto es., 499.

202 2° Para interpolar entre dos números qualesquiera quantos números se quiera, de manera que todos juntos formen una progresion arismética: cuya operacion se llama interpolar entre dos números dados muchos medios arisméticos.

Podemos interpolar entre 1 y 7 v. g. cinco números, que con ellos formen una progresion arismética, cuyos números son 2, 3, 4, 5 y 6. Pero como no siempre se conoce á primera vista, con igual facilidad que en el caso propuesto, quales han de ser los medios por interpolar, enseñarémos como se pueden hallar por medio del principio sentado (199). Todo está en hallar la razon de la progresion.

Pero como el mayor de los dos números propuestos ha de ser el último término de la progresion, se compone del primero, esto es, del menor de los dos números propuestos, mas de tantas veces la razon quantos términos hay antes de él. Luego si del mayor de los dos números restamos el menor, la resta tendrá la razon tantas veces quantos términos ha de haber antes del mayor; quiero decir que es el producto de la razon multiplidada por el número de los términos que hay antes del mayor; luego (75) partiendo dicha resta por el número de términos que ha de haber antes del mayor, se sacará al cociente la razon.

Pero el número de términos que ha de haber antes del mayor es una unidad mayor que el número de los términos que se quieren interpolar entre los dos; luego para interpolar entre dos números dados quantos medios arisméticos se quiera, se restará el menor de los dos del mayor, se partirá la resta por el número de los medios despues

de

de añadirle una unidad. El cociente será la diferencia ó la *razon* de la progresion.

203 Si se nos ofrece interpolar entre 4 y 11 ocho medios arisméticos, restarémos 4 de 11, partirémos la resta 7 por 9, número de los medios con una unidad mas; el cociente $\frac{7}{9}$ será la diferencia de la progresion, la qual por consiguiente será

$$\div\ 4 \cdot 4\tfrac{7}{9} \cdot 5\tfrac{5}{9} \cdot 6\tfrac{3}{9} \cdot 7\tfrac{1}{9} \cdot 7\tfrac{8}{9} \cdot 8\tfrac{4}{9} \cdot 10\tfrac{2}{9} \cdot 11.$$

204 Si se me pidiesen 9 medios arisméticos entre 0 y 1; restaré 0 de 1, quedará 1, le partiré por 10; número de los medios con una unidad mas; el cociente $\frac{1}{10}$ ó 0, 1 será la razon, y por consiguiente la progresion será

$$\div 0 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 \cdot 1.$$

Esto manifiesta que entre dos números, por mas próximos que esten uno á otro, se puedan interpolar quantos medios arisméticos se quiera.

De la Progresion Geométrica.

205 La progresion geométrica es una serie de términos, que cada uno cabe en el que le precede ó sigue un mismo número de veces.

$$\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$$

es una progresion geométrica; porque cada término cabe en el que se le sigue un mismo número de veces que es 2, cuyo número de veces se llama la razon de la progresion.

La raya con quatro puntos, dos encima y dos debajo, puesta al principio de la progresion, sirve para lo mismo que la que se pone con dos puntos antes de la progresion arisméica (156). Se ponen aquí quatro puntos para avisar que la progresion es geométrica.

206 La progresion se llama *creciente* ó *decreciente*, segun los términos van creciendo ó menguando. Con-

Considerarémos aquí la progresion geométrica creciente, porque las propiedades de ambas son las mismas, mudando la voz *multiplicar* en la vez *partir*, y diciendo *caber* por *contener*.

207 Ya que en el segundo término cabe el primero tantas veces quantas unidades hay en la razon, el segundo se compone del primero multiplicado por la razon.

Ya que en el tercer término cabe el segundo tantas veces quantas unidades hay en la razon, se compone del segundo multiplicado por la razon, y por consiguiente del primero multiplicado por la razon, y multiplicado otra vez por la razon; esto es, del primero multiplicado por el quadrado, ó la segunda potestad de la razon.

Ya que en el quarto término cabe el tercero tantas veces quantas unidades hay en la razon, se compone del tercero multiplicado por la razon, y por consiguiente del primero multiplicado por el quadrado de la razon, y otra vez por la razon; esto es, multiplicado por el cubo, ó la tercer potestad de la razon.

En la progresion arriba puesta v. g. 6 se compone del primer término 3 multiplicado por la razon 2; 12 se compone del primer término 3, multiplicado por el quadrado 4 de la razon 2; 24 se compone del primer término 3, multiplicado por el cubo 8 de la razon.

208 Esto manifiesta que un término qualquiera de la progresion geométrica se compone del primero multiplicado por la razon levantada á una potestad cuyo grado expresa el número de términos antes del tal término qualquiera.

209 Luego quando el primer término de la progresion es la unidad, cada término se compone de sola la razon levantada á una potestad cuyo grado le expresa el número de términos que le preceden; por-

porque la multiplicacion por el primer término, que es la unidad, *no aumenta el producto.*

Para levantar un número á una potestad propuesta, v. g. á la septima, es menester, conforme digimos quando tratamos de las potestades, multiplicar el número por el mismo seis veces de seguida; así para levantar 2 á la septima potencia, dirémos: 2 veces 2 son 4, 2 veces 4 son 8, 2 veces 8 son 16, 2 veces 16 son 32, 2 veces 32 son 64, 2 veces 64 son 128, y esta será la septima potestad de 2.

210 Fundados en el principio que acabamos de sentar (208) en órden á la formacion de un término qualquiera de la progresion geométrica, probarémos facilmente, 1° que en una progresion geométrica el quadrado del primer término es al quadrado del segundo, como el primer término es al tercero; 2° que el cubo del primer término es al cubo del segundo, como el primer término es al quarto.

El quadrado del segundo término es el quadrado del primero, multiplicado por el quadrado de la razon; si este producto se parte por el quadrado del primer término, el cociente será el quadrado de la razon. Pero ya que el tercer término es (207) el producto del primero multiplicado por el quadrado de la razon, el cociente del tercer término partido por el primero, será tambien el quadrado de la razon. Luego hay una misma razon entre el quadrado del primer término y el quadrado del segundo, que entre el primero y el tercero, pues pende la igualdad de las razones de la igualdad de sus exponentes.

Del mismo modo probaríamos que en toda progresion geométrica el cubo del primer término es al cubo del segundo, como el primer término al quarto.

El

211 El mismo principio (208) y la consideracion allí hecha tambien pueden servir para calcular un término qualquiera de la progresion, sin necesidad de calcular los términos antecedentes. Si se pregunta v. g. qual será el término 12mo de esta progresion

$$\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : \&c.$$

Como sé que este término 12mo se compone (208) del primero, multiplicado por la razon levantada á una potestad cuyo grado le expresa el número de los términos que hay antes del 12mo, para formarle no tengo mas que hacer sino multiplicar el primer término 3 por la undécima potestad de la razon 2. Para formar esta undécima potestad de 2, multiplico 2 por el mismo diez veces de seguida, y saco que la undécima potencia de 2 es 2048. Multiplico, pues, 2048 por 3, y saco 6144, duodécimo término de la progresion.

212 Sirve igualmente el mismo principio para interpolar quantos medios proporcionales se quiera entre dos números dados. Supongamos que se piden tres medios geométricos entre 4 y 64; por poco que se atienda se echa de ver que los tres medios geométricos son 8, 16, 32; con efecto $\div$ 4 : 8 : 16 : 32 : 64; pero si los números propuestos fuesen otros que 4 y 64, ó se pidiera otro número qualquiera de medios geométricos, no seria tan fácil hallarlos.

Pero por el principio sentado (208) se hallarán muy en breve. Toda la dificultad se reduce á hallar la razon de la progresion; porque una vez hallada, se formarán facilmente los términos, executando multiplicaciones succesivas por dicha razon.

Supongamos v. g. que se piden nueve medios geométricos entre 2 y 2048.

Ya se vé que 2048 será el último término de una

una progresion geométrica, cuyo primer término es 2, *y ha de tener nueve términos entre el primero y el último*. Compónese, pues, 2048 del primer término 2, multiplicado por la razon levantada á una potestad cuyo grado le expresa el número de términos que ha de haber antes de 2048; luego sacando la raiz de esta potestad, saldrá la razon; pero esta potestad ha de ser la décima, porque como ha de haber nueve términos entre 2 y 2048, habrá diez cabales antes de 2048; luego se sacará la raiz décima del cociente que saliere partiendo el número mayor 2048 por el menor 2.

213 Como este modo de discurrir es general, inferirémos que para interpolar entre dos números dados quantos medios geométricos se quiera, se ha de partir el mayor de los dos por el menor; del cociente que saliere se sacará una raiz del grado que expresare el número de términos medios despues de añadirle una unidad.

Para volver á nuestro caso, parto 2048 por 2, sale el cociente 1024, de cuyo número la raiz décima es 2; luego la razon es 2; por consiguiente para formar los medios geométricos que se piden, multiplico el primer término 2 muchas veces seguidas por la razon 2; y despues de formados nueve medios, hallo que el último es 2048

$\div 2:4:8:16:32:64:128:256:512:1024:2048.$

Si se me pidiesen quatro medios geométricos entre 6 y 48, partiria 48 por 6, y sacaria la raiz quinta del cociente 8. Como 8 no tiene raiz quinta cabal, no se pueden sacar en números cabales los quatro medios geométricos entre 6 y 48; pero podemos aproximarnos á dicha razon todo lo que queramos por un método parecido al que seguimos al sacar la raiz quadrada. Basta figurarse que es posi-

sible hallar un número, el qual multiplicado quatro veces de seguida por sí mismo, se vaya acercando cada vez mas á 8; lo que se puede asegurar igualmente de otro número y de otra raiz qualquiera. Concluirémos infiriendo de aquí, que entre dos números qualesquiera, se hallarán siempre que convenga quantos medios geométricos se deseen, ó cabales, ó aproxîmados, y esto basta para inteligencia del importante asunto que luego tratarémos. Bien que primero vamos á enseñar como se halla la suma de todos los términos de una progresion geométrica, porque dentro de poco nos importará saberlo.

214 Empezarémos determinando primero la suma de una progresion particular v. g. de la siguiente $\div 1:2:4:8:16:32:64:128:256$; y suponiendo que la suma se llama ó es sum. tendrémos

Sum. $=1+2+4+8+16+32+64+128+256$; y si lo duplicamos todo, tendremos

2 veces sum. $=2+4+8+16+32+64+128+256+512$;

Luego si de la segunda igualdad restamos la primera, saldrá la suma que se busca $=512-1=511$, porque con la sustraccion los términos comunes en los segundos miembros de estas equaciones se destruyen unos á otros.

Luego quando el exponente de la progresion es 2, *la suma de todos los términos es igual al duplo del último término menos el primero*.

215 Supongamos ahora que el exponente de la progresion sea 3, será $\div 1:3:9:27:81:243$. Si suponemos todos los términos juntos iguales á una suma, triplicando de cada lado, saldrá

3 sum. $=3+9+27+81+243+729$. Si de esta igualdad restamos estotra

Sum. $=1+3+9+27+81+243$, y borramos todos los números que con la sustraccion se destruyen unos

 á

á otros, tendremos
2 *sum.* $=729-1$; *y* por consiguiente, partiéndolo todo por 2, sum. $=\frac{729-1}{2}$; quiero decir, que quando el exponente de la progresion es 3, la suma de todos los términos es igual al triplo del último, menos el primero, partido por 2.

Si el exponente de la progresion fuese 4, hallariamos que la suma de todos los términos es igual al quádruplo del último, menos el primero, partido por 3; de donde se saca la siguiente

Regla general para hallar la suma de una progresion geométrica de quantos términos se quiera quando se conoce el primero, el último y el exponente.

216 Multiplíquese el último término por el exponente; del producto réstese el primer término, y pártase la resta por el exponente despues de rebajada la unidad.

217 Para sacar otra regla que nos guie en la averiguacion de la suma de una progresion geométrica decreciente, conviene considerar que con asentarla al reves, se transforma en progresion creciente, siendo el primer término el último, y el último el primero. Si á mas de esto suponemos infinito el número de los términos; como todos van menguando, el último llegará á ser infinitamente pequeño ó nulo; y si se toma la progresion al reves, el primer término será el que será nulo, ó desaparecerá; luego con hacer nulo el primer término en la regla antecedente, saldrá la siguiente

Regla general para sumar todos los términos de una progresion geométrica decreciente.

218 Multiplíquese el primer término por la razon, y pártase el producto por el exponente despues de re-

rebajada la unidad, el cocient será la suma de todos los términos de la progresion decreciente al infinito.

Exemplos.

$$\div\ 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{16} : \tfrac{1}{32}\ \&c. = \frac{1\times 2}{2-1} = \tfrac{2}{1}$$

$$\div\ 1 : \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{9} : \tfrac{1}{27} : \tfrac{1}{81} : \tfrac{1}{243}\ \&c. = \frac{1\times 3}{3-1} = \tfrac{3}{2}$$

$$\div\ 1 : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{16} : \tfrac{1}{64} : \tfrac{1}{128}\ \&c. = \frac{1\times 4}{3} = \tfrac{4}{3}$$

y si se rebaja el primer término ó la unidad de cada una de estas progresiones, saldrá

$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}$ &c. $=\tfrac{1}{1}$
$\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{81}$ &c. $=\tfrac{1}{2}$
$\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{256}$ &c. $=\tfrac{1}{3}$

Síguese de aquí que es infinito el número de progresiones geométricas decrecientes cuya suma es igual á la unidad; porque si multiplicamos por 2 todos los términos de la serie $\tfrac{1}{3}$, $\tfrac{1}{9}$, $\tfrac{1}{27}$ &c. su suma será dupla de lo que era, y por lo mismo igual con la unidad; si se multiplican por 3 todos los términos de la serie $\tfrac{1}{4}$, $\tfrac{1}{16}$ &c. la suma de esta serie será igual á la unidad.

De las Permutaciones y Combinaciones.

219 *Permutaciones* llamamos los diferentes modos de disponer ó colocar unas respecto de otras muchas cosas ó cantidades conocidas. El número de estas diferentes disposiciones pende del número de las cantidades, pues claro está que quatro cosas v. g. se pueden disponer ó colocar unas respecto de otras de mas modos diferentes que no dos cosas.

Combinaciones llamamos los diferentes modos de tomar muchas cantidades de una en una, de dos en dos &c. sin pararse en el órden por el qual se han

han de colocar. De lo qual se sigue que las combinaciones no son mas que un caso particular de las permutaciones.

De las Permutaciones.

220 Supondrémos que las cantidades por permutar son las letras del abecedario, por ser estos signos los mas apropiados para este asunto. Claro está que una sola letra a no puede ocupar mas de un lugar; dos letras a y b pueden ocupar dos lugares, pues cada una de ellas puede ocupar succesivamente el primero ó segundo lugar; de donde salen dos disposiciones diferentes que son ab y ba. Si añadimos otra letra c, esta podrá ocupar tres lugares diferentes en cada una de las dos disposiciones últimas de dos letras, pues podrá estar al principio, al fin, ó en medio de cada disposicion ab, ba; de donde saldrán las seis permutaciones cab, acb, abc, cba, bca, bac.

Una letra mas podrá ocupar quatro lugares diferentes en cada una de las seis permutaciones últimas; luego el número total de permutaciones será 24 ó $1\times2\times3\times4$. Una letra mas podrá ocupar cinco lugares diferentes en cada una de las 24 permutaciones últimas; luego el número de permutaciones de cinco letras será $1\times2\times3\times4\times5$ ó 120. Sácase de aquí por induccion que la expresion del número de permutaciones posible con un número señalado de letras, es el producto de todos los números que hay desde la unidad hasta el que expresa el número de las cosas por permutar. Si se nos pregunta de quantos modos diferentes pueden sentarse á la mesa 12 personas, la expresion de todos estos modos será el producto siguiente
$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11\times12=479001600$. Y suponiendo que cada permutacion se hiciese en un segundo de tiempo, se hallará que tardarian las 12 personas en sentarse á la mesa 15 años y 69 dias.

221 A veces del número dado de cantidades, muchas son unas mismas, cuya circunstancia no puede menos de minorar el número de las permutaciones. Quando las cantidades son dos no mas, y una misma repetida dos veces, como si en a y b hacemos $a=b$, las dos permutaciones se reducen á una sola bb, y el número de permutaciones es $\frac{1\times2}{2\times1}=1$. Si de tres cantidades a, b, c dos son iguales, por manera que las tres sean a, b, b, no habrá mas permutaciones que estas abb, bba, bab; y el número de permutaciones será $\frac{1\times2\times3}{2\times1}$. Si de quatro cantidades hay dos ó tres iguales, las 24 permutaciones serán en el primer caso $\frac{1\times2\times3\times4}{2\times1}=12$, y en el segundo $\frac{1\times2\times3\times4}{3\times2\times1}=4$. Si de cinco cantidades hay dos ó tres ó quatro iguales, el número de las permutaciones será en el primer caso $\frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2}$, en el segundo $\frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2\times3}$ &c. De aquí se saca la ley de las permutaciones para quando entre las cantidades hay algunas repetidas. Si las cantidades son v. g. seis, y hay tres iguales unas con otras, y otras dos iguales una con otra, el número de las permutaciones será $\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6}{3\times2\times1\times2\times1}$.

De las Combinaciones.

222 Las combinaciones enseñan por lo dicho antes de quantos modos diferentes se pueden tomar muchas cantidades de una en una, de dos en dos &c. por el órden que se quiera.

223 Supongamos v. g. que se quiera saber quantas palabras pueden formarse con las 25 letras del abecedario de una letra, de dos letras &c. hasta las palabras de 25 letras, excluyendo toda palabra que conste de mas letras. Este número de palabras posible, aunque tan grande que es imposible escribirlas, es sin embargo fácil de señalar, considerando la ley con que crece el número de las combinaciones al paso que entran mas letras en la formacion de las palabras.

1.º Desde luego es patente que con 25 letras no se pueden formar mas que 25 palabras de una sola letra cada una.

224 2.º Admitiendo que con una misma letra repetida se pueda formar una palabra de dos letras; es evidente que si combino la letra *a* con ella misma y con todas las demas, se formarán 25 palabras de dos letras, siendo la letra *a* la primera de cada palabra. Con la letra *b* se formarán del mismo modo otras 25 palabras, siendo *b* la primer letra de cada una; y como las letras son 25, claro está que el número de las palabras posibles con las diferentes permutaciones de las dos mismas letras será... $25\times25=625$.

3.º Si se escribe la letra *a* al principio de cada una de las 625 combinaciones, saldrán 625 palabras de tres letras, siendo *a* la primer letra de cada una; y verificándose lo mismo con cada una de las demas letras, síguese que el número de todas las palabras posibles de tres letras, con todas las permutaciones que admiten las mismas tres letras, será 625×25 ó 15625.

225 Siguiendo la ley que acabamos de manifestar, se verá que el número de todas las palabras posibles que pueden formarse con las 25 letras, de una letra, dos letras &c. cada palabra, es igual á la suma de los términos de esta progresion geométrica $\div 25 : 25^2 : 25^3 : 25^4$, hasta la 25^{ma} potencia de 25 inclusivè.

Si en lugar de querer averiguar todas las palabras que pueden formarse con las 25 letras, se quisiera saber las que con otro número de letras pueden formarse de una, dos, tres &c. letras cada una, el número de las palabras seria igual á la suma de todos los términos de una progresion geométrica, cuyo primer término, ~~el último y~~ el exponente, será cada uno igual al número de las letras.

226 Las combinaciones que acabamos de calcular incluyen todas las palabras que se pueden formar, admitiendo que se pueda repetir muchas veces una misma letra. Si fuese condicion que ninguna letra pueda repetirse, no por eso será mas dificil de hallar la ley de las combinaciones que han de formar las palabras. Desde luego 1º con las 25 letras no se podrán formar, como antes, mas que 25 palabras de una letra cada una. 2º Para formar todas las palabras de dos letras, sin repetir ninguna, es de considerar que como la letra *a* v. g. ya no se puede combinar con ella misma, solo se combinará con las otras 24, de lo que resultarán 24 palabras. Lo propio sucederá con la letra *b* y con todas las demas; y como en todo son 25, el número de todas las palabras posibles que puedan formarse de dos letras sin repetir ninguna será 24×25.

227 Para hallar las palabras de tres letras sin repetir ninguna, se reparará que la una de las combinaciones últimamente expresadas, v. g. *ab* ó *ba*, no se puede combinar sino con las 23 letras que se siguen; y como en todo son 25×24 palabras de dos letras, la suma de todas las palabras de tres letras donde ninguna se repite será $25\times24\times23$. Discurriendo del mismo modo se hallará que las palabras

bras de quatro letras donde ninguna puede repetirse ni una, ni dos &c. veces será $25\times24\times23\times22$.

De lo dicho hasta aquí debe inferirse que el número total de palabras de una, dos, tres &c. letras que pueden formarse con las 25 letras del abecedario, sin repetir letra alguna ni una, ni dos &c. veces, es la suma de esta serie. . . . . $25, 25\times24, 25\times24\times23$ &c. hasta el último producto de 25 factores desde el número 25 hasta la unidad, menguando todos una unidad.

Si quisiéramos saber todas las palabras de una, dos &c. letras cada una sin repetir ninguna letra que puede formar con otro número menor de letras, v. g. con las seis primeras del abecedario, seria el número de todas las palabras $6; 6\times5; 6\times5\times4; 6\times5\times4\times3; 6\times5\times4\times3\times2; 6\times5\times4\times3\times2\times1$.

228 Las combinaciones antecedentes incluyen no solamente todas las palabras que se pueden formar con un número señalado de letras, de una, dos, tres &c. letras cada palabra, sino tambien las palabras formadas de las mismas letras diferentemente combinadas. Son muchos los casos donde no se necesitan sino las combinaciones de todo punto diferentes que sufre un número dado de cantidades, sin atender al órden por el qual las diferentes cantidades pueden estar colocadas unas respecto de otras. Con la mira de hallar la ley de estas nuevas combinanes, volvamos á considerar las 25 letras del alfabeto, y propongámonos señalar todas las combinaciones posibles que sufren, sin admitir las diferentes permutaciones que admite cada combinacion diferente.

229 De las 25 letras combinadas de una en una no pueden salir sino 25 palabras diferentes de una letra cada una; pero si se nos preguntan las diferentes combinaciones de las mismas letras de dos en dos,

dos, con la condicion que ninguna pueda repetirse dos veces, y desechando la permutacion; echarémos de ver que la letra *a* no puede combinarse sino con las otras 24 letras; la letra *b* tampoco podrá combinarse sino con las otras 24 letras; y lo mismo digo de todas las demas letras. Si hiciéramos todas estas combinaciones, veríamos que cada combinacion de dos letras estaria repetida dos veces; luego el número de combinaciones de las 25 letras será $\frac{24\times25}{2}=300$.

Para hallar todas las combinaciones de las mismas letras de tres en tres, combinarémos cada producto de dos letras con las 23 letras restantes, pues es condicion que ninguna letra se repita; y como las combinaciones de dos letras son $\frac{25\times24}{2}$, habrá $\frac{23\times24\times25}{2}$ combinaciones de tres letras. Si al combinar el producto *ab* v. g. con la letra *c*, atendemos al diferente lugar donde puede estar esta letra *c*, hallaremos las tres combinaciones *cab*, *acb*, *abc*, que solo se diferencian por el lugar que una misma letra ocupa en cada una, y no forman mas que una sola y misma combinacion, en el supuesto de que se desechen las permutaciones. Luego ya que lo mismo sucederá combinando otra qualquiera combinacion de dos letras con otra letra, será preciso partir por 3 el número antecedente, y por lo mismo el número de combinaciones de las 25 letras de tres en tres será $\frac{25\times24\times23}{2\times3}$.

Por el mismo camino hallaríamos que el número de las combinaciones de las mismas letras de quatro en quatro será $\frac{25\times24\times23\times22}{2\times3\times4}$.

De

De los Logaritmos.

230 Si con la primera, segunda, tercera y quarta potencia de 2 v. g. expresadas así 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, que componen la progresion geométrica $\div$ 2: 4 : 8 : 16, porque $2^2=4, 2^3=8$ y $2^4=16$, siendo así que sus exponentes componen la progresion arismética $\div$ 1 . 2 . 3 . 4 formamos la siguiente proporcion geométrica

$$:: \quad 2 : 4 :: 8 : 16 = \frac{4 \cdot 8}{2}$$

$$2^1 : 2^2 :: 2^3 : 2^4 = 2^{3+2-1}$$

hallarémos que el quarto término es el primero con un exponente igual á la suma de los exponentes de los medios, menos el exponente del mismo primer término. De donde se infiere que si el exponente del primer término fuera cero, seria mas fácil y breve sacar el quarto término, pues todo estaria en dar al primero un exponente igual á la suma de los exponentes de los dos medios; del mismo modo que la práctica de la regla de tres es mas fácil y breve siempre que el primer término es la unidad, pues entonces es escusado partir por el primer término el producto de los medios.

231 Luego todo método de calcular las cantidades, no por ellas mismas, sí por sus exponentes, de modo que por estos y no por aquellas se haga toda regla de tres, convertirá las operaciones de multiplicar y partir en otras de sumar y restar, mucho mas fáciles que las primeras; y lo serán todavía mas si el artificio tiene la circunstancia de ser la unidad el primer término de la proporcion, y cero su exponente.

232 Está inventado cabalmente con esta circunstancia el modo de calcular las cantidades, y le proporcionan los *logaritmos*. Son los *logaritmos* unos números artificiales en progresion arismética, cuyo primer término es cèro, correspondientes, cada uno al suyo, á los términos de una progresion geométrica, cuyo primer término es la unidad. Y con el fin de que se sacará de este invento toda la posible utilidad, se han formado y dado á luz tablas de logaritmos dispuestas de modo que al lado de cada uno de los números enteros hasta donde llegan, no solo está su correspondiente logaritmo, sino que con su auxîlio tambien se pueden hallar en breve los logaritmos de los quebrados, y los de qualquier número que no esté en las tablas.

333 Supongamos que las dos progresiones, es á saber la geométrica que representa los números, y la aritmética donde están sus logaritmos, sean las dos siguientes, por ser la tercera la misma que la segunda,

$$0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$$
$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128$$
$$1 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^7$$

En ellas se vé patentemente 1° que los términos de la progresion arismética son los exponentes, y por consiguiente los logaritmos de los términos de la progresion geométrica; 2° que, por ser la unidad el primer término de la progresion geométrica, todos los demas son y deben ser las potencias succesivas del segundo, señalando sus exponentes respectivos la distancia á que cada uno de ellos está de la unidad.

234 Aquí se vé tambien á las claras quanto los logaritmos facilitan los cálculos; porque si con tres términos de la progresion geométrica, siendo el primero la unidad, estos v. g. 1,8,16, queremos hacer una regla de tres, buscarémos en la progresion arismética los exponentes ó logaritmos de 8 y 16, los quales son 3 y 4, y mirarémos á que número de la

la progresion geométrica corresponde su suma 7; y viendo que esta suma corresponde á 128, inferirémos que 16×8 es 128, lo que es verdad.

235 Luego, para hallar el producto de dos números uno por otro, se sumarán uno con otro sus logaritmos, se buscará en la tabla el logaritmo igual á la suma, y al lado estará el producto de los dos números propuestos.

El producto de tres números estará en las tablas al lado del logaritmo igual á la suma de los logaritmos de los tres; si prosiguiéramos las dos progresiones de antes (233), hallaríamos que $4\times8\times16 = 2^{2+3+4} = 2^{9}$, cuyo exponente corresponde á 512, y este número es con efecto el producto de los tres señalados.

236 Luego, para quadrar un número, se tomará dos veces su logaritmo, y esto es lo mismo que multiplicarle por 2, exponente de la potencia; para cubicar un número, se tomará tres veces su logaritmo, ó se le multiplicará por 3, exponente de la tercer potencia: el número que en las tablas esté al lado del duplo del logaritmo del número por quadrar, será su quadrado; el número que en las tablas esté al lado del triplo de su logaritmo, será su cubo, &c.

237 Ya que partir los números unos por otros es operacion contraria á la de multiplicarlos; quando ocurra partir un número por otro, se restará el logaritmo del partidor del logaritmo del dividendo; al lado del logaritmo de las tablas que exprese la diferencia de los dos logaritmos, estará el número cociente de la division propuesta. Si ocurriese partir un producto de tres factores por uno de ellos, de la suma de los logaritmos de los tres se restará el logaritmo del factor divisor.

238 Luego tambien, ya que sacar las raices de los números es operacion contraria á la de formar sus

sus potestades; siempre que ocurra sacar la raiz quadrada de un número, se tomará la mitad de su logaritmo; quando se quiera extraher su raiz cúbica, se tomará el tercio de su logaritmo.

239 Con la progresion geométrica que representa los números, se puede juntar la progresion arismética que se quiera, sin que por eso dejen de proporcionar los logaritmos, para calcular, las facilidades que acabamos de manifestar: de donde se sigue que á un mismo número pueden corresponder diferentes logaritmos, ó que puede haber diferentes sistemas de logaritmos. Pero sean estos sistemas los que fueren, en todos concurre la circunstancia de transformar las operaciones de multiplicar y partir en otras de sumar y restar. Harémoslo patente por medio de la adjunta tabla, en la qual acompañamos una misma progresion geométrica que ocupa la primer columna de la izquierda, con cinco progresiones arisméticas diferentes; proporcionando la primera mucho mayor facilidad para los cálculos, por cuyo motivo ha merecido la preferencia respecto de todas las demas para la formacion de las tablas comunes.

1	0	3	5	35	0
2	1	7	8	32	$1\frac{1}{3}$
4	2	11	11	29	$2\frac{2}{3}$
8	3	15	14	26	4
16	4	19	17	23	$5\frac{1}{3}$
32	5	23	20	20	$6\frac{2}{3}$
64	6	27	23	17	8
128	7	31	26	14	$9\frac{1}{3}$
256	8	35	29	11	$9\frac{2}{3}$

For-

240 Formemos por medio de la tercer progresion arismética v. g. la quarta potencia de 4. Del quádruplo 44 de su logaritmo 11 rebajarémos 15, triplo del logaritmo de la unidad, saldrá la resta 29; y como enfrente de este número está 256, será este la quarta potencia de 4.

241 Para sacar en el mismo sistema la raiz quarta de 256, harémos todo lo contrario. A su logaritmo 29 añadirémos 15, partirémos por 4 la suma 44, y el cociente 11, que está enfrente de 4, nos dirá que este número es la raiz quarta de 256.

242 Busquemos por medio de la quarta progresion el cociente de 32 partido por 2. Una vez que en toda division el divisor es al dividendo como la unidad al cociente, sumarémos uno con otro 35 y 20 logaritmos respectivos de 1 y 32; de la suma 55 rebajarémos 32, logaritmos del divisor; y como la resta 23 está enfrente de 16, será, y es con efecto este número el cociente de 32 partido por 2.

243 Finalmente, por la quinta progresion arismética buscarémos el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros son 2, 8 y 4. Sumarémos $2\frac{2}{3}$ y 4 logaritmos respectivos de 4 y 8; de la suma $\frac{20}{3}$ rebajarémos $1\frac{1}{3}$, logaritmo de 2; y porque la resta $\frac{16}{3}$ ó $5\frac{1}{3}$ está enfrente de 16, este será el quarto término de la proporcion propuesta.

244 Aclaremos por que en el primer exemplo de logaritmo de 4 se ha de rebajar tres veces el logaritmo de la unidad. Sabemos que las potencias de las cantidades se forman por multiplicacion, siendo tantas las multiplicaciones, menos una, quantas unidades hay en el exponente de la potencia. Luego para formar la quarta potencia de 4 serán tres las multiplicaciones; pues 1° se multiplicará 4 por 4; 2° otra vez por 4 su quadrado 16; 3° últimamente otra vez por 4 su cubo 64: y como en toda multiplicacion la unidad se ha al multiplicador, como el multiplicando al producto, cifrarémos las tres multiplicaciones del modo siguiente, y despues asentarémos por logaritmos las operaciones correspondientes.

1ª 1 : 4 :: 4 : 16; 2ª 1 : 4 :: 16 : 64; 3ª 1 : 4 :: 64 : 256

1ª de	22	duplo log. 4.
resto	5	log. 1
resta	17	log. 16
2ª sumo	11	log. 4
con	17	log. 16
de la suma	28	
resto	5	log. 1
resta	23	log. $4 \times 16 = 64$
3ª sumo	11	log. 4
con	23	log. 64
de la suma	34	
resto	5	log. 1
sale.....	29	log. $256 = 4^4$.

Si la quarta potencia de 4 se hubiera formado por la primera progresion arismética, no hubiera habido que hacer ninguna sustraccion.

245 Así como los términos de la progresion geométrica ascendiente van siendo mayores unos que otros, y mayores que la unidad al paso que están á mayor distancia de ella, se echa de ver que si la prosiguiéramos descendiendo, sus términos saldrian tanto menores unos que otros, y menores que la unidad, quanto mas se fuesen apartando de ella. Como

mo es preciso conocer tambien los logaritmos de estos números menores que la unidad, es necesario continuar la progresion arismética desde cero, primer término suyo, ácia abajo. Pero como los números menores que la unidad son todos negativos, síguese que los logaritmos de los quebrados son *negativos* ó *defectivos*; que tambien se llaman así. Aquí se vé todo esto muy á las claras

$$-8.-7.-6.-5.-4.-3.-2.-1.0.1.2.3.4.5.6.7.8$$
$$\tfrac{1}{256}.\tfrac{1}{128}.\tfrac{1}{64}.\tfrac{1}{32}.\tfrac{1}{16}.\tfrac{1}{8}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2}.1.2.4.8.16.32.64.128.256$$

Es tambien patente que todo logaritmo positivo tiene su correspondiente negativo á igual distancia de la unidad, centro de la progresion geométrica.

Sistema de los logaritmos comunes, y formacion de sus tablas.

246 Con la progresion arismética natural que empieza desde cero se ha juntado la geométrica cuyos términos van creciendo en proporcion décupla.

0	1	2	3	4	5	6	&c.
1	10	100	1000	10000	100000	1000000	

donde es de reparar, y esto importa mucho, 1.° que los números de la progresion arismética que se siguen á la unidad son los exponentes de las diferentes potencias de 10, primer término de la progresion geométrica despues de la unidad; 3 v. g. de la progresion arismética es el exponente de la tercer potencia de 10, pues $10\times10\times10=10^3=1000$; 2° que el número cuyas diferentes potencias componen la progresion geométrica, se llama *base logaritmica* del sistema; 10 es la base logaritmica del sistema que aquí declaramos; 3.° que cada término de la progresion arismética, ó, lo que es todo uno, cada logaritmo es el exponente de la potencia á la qual se ha de levantar la base logaritmica para que forme un número igual al término de la progresion geométrica correspondiente al logaritmo que se considera, v. g. 4, logaritmo de 10000, es el exponente de la quarta potencia de 10, de modo que $10^4=10000$; 4.° que si fuese otra la base logaritmica, ya no seria 4 el log. de 10000, pues solo la quarta potencia de 10 puede ser igual con 10000.

247 Si en las tablas de los logaritmos no hubiese otros que los correspondientes á los términos de esta progresion geométrica, y á los que se podrian añadir continuándola, seria limitadísimo su uso. Era por lo mismo necesario formar las tablas de modo que incluyesen con sus logaritmos todos los números intermedios entre los de la progresion geométrica, v. g. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 que faltan entre 1 y 10, los números 11, 12, 13 &c. hasta 99 inclusivè, que caben entre 10 y 100; cuyos números, por lo mismo que han de ser términos de la expresada progresion geométrica, han de estar todos unos con otros en proporcion continua geométrica. Bien se echa de ver que al mismo tiempo se hace preciso interpolar entre 0 y 1 de la progresion arismética ocho números, entre 1 y 2 noventa y nueve números, los quales para que sirvan al intento, ó sean los logaritmos de sus correspondientes en la progresion geométrica, han de ser continuo proporcionales arisméticos. Este es, conforme se viene á la vista, un trabajo penosísimo; pero de tanto mayor beneficio, quanto mas se prosiguiera, en el qual se empeñaron los primeros Matemáticos que calcularon tablas de logaritmos antes de inventarse los mé-

to-

todos expeditos que para esto proporciona el Algebra, y darémos á conocer en el tomo segundo.

248 Veamos, pues, como salieron de este laberinto, ó como entre 1 y 10 v. g. se pueden interpolar, como medios proporcionales geométricos, los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Si entre dos qualesquiera términos de la progresion geométrica, interpolamos un medio proporcional, despues otro entre este y el primero de los dos términos dados; otro entre el primero de los términos dados y el último interpolado, y se van intercalando así de contino medios geométricos entre los términos de la progresion; llegará á componerse de una infinidad de términos, los quales discreparán uno de otro una cantidad menor que qualquiera cantidad señalable; hallándose por consiguiente entre ellos los números de la serie natural 2, 3, 4 &c. como medios proporcionales, ya que no cabales, tales por lo menos, que la diferencia entre ellos y los interpolados será menor que qualquiera cantidad apreciable. De donde se sigue que entre dichos términos interpolados ha de haber razon de igualdad, ú otra que discrepe de ella una cantidad despreciable; todo con el fin de que sean estos términos perfectamente iguales con los números cuyos logaritmos se buscan, ó falte una cantidad despreciable.

249 Bien se vé que al mismo tiempo que se va interpolando la progresion geométrica, se ha de interpolar la arismética, con paso igual, á fin de sacar á un tiempo los números y sus logaritmos, apuntando estos cada uno enfrente de su número.

250 Estos medios geométricos y arisméticos no pueden salir todos cabales; porque como todo medio geométrico proporcional es la raiz quadrada del producto de los dos números entre los quales se le quiere interpolar, quando este producto no sea un qua-

quadrado perfecto, tampoco su raiz será el medio geométrico cabal. Lo propio sucede con los medios arisméticos; porque como todo medio arismético entre dos números es la mitad de la suma de estos, quando esta no se pueda partir en dos partes iguales, tampoco saldrá cabal el medio arismético.

151 Pero este es un tropiezo fácil de salvar si se considera, 1.° que quanto mayor es un número no quadrado, tanto menos su raiz discrepa de la verdadera; pues como la diferencia que va de la una á la otra no llega á la unidad, la parte de esta que constituye la diferencia entre la raiz que se saca y la verdadera, es tanto menor, quanto mayor sea el número no quadrado. La raiz quadrada de diez v. g. es mayor que 3 y menor que 4; la raiz quadrada de 19727 pasa de 140 y no llega á 141; luego lo que se ha de añadir á 3 para que sea la raiz cabal de 10 es parte de la diferencia que va de 3 á 4, ó parte de $\frac{1}{3}$; lo que se ha de añadir á 140 para que sea la raiz cabal de 19727, es parte de la diferencia que va de 140 á 141, ó parte de $\frac{1}{140}$; y es bien patente que $\frac{1}{140}$ es mucho menor que $\frac{1}{3}$. 2.° que por lo mismo todo estará en hacer que sean mayores los términos de la progresion geométrica, sin que por eso muden de valor, lo que se consigue añadiendo á cada uno muchos ceros; serán, pues, entónces todos ellos 10 veces, 100 veces &c. mayores que antes, segun los ceros que se les añadan, quedando de un mismo valor todos ellos porque en la misma razon serán menores las partes que expresarán. Luego tambien la diferencia que despues de esta preparacion hubiere entre la raiz verdadera, y la que se saque será menor en la misma proporcion: por manera que tantos ceros podrán añadirse á los términos de la progresion geométrica, que la tal diferencia sea quasi ninguna.

 Es-

Estas consideraciones tambien se aplican á los términos de la progresion arismética.

252 Si, teniendo todo esto presente, buscamos el logaritmo de 2, cuyo número en la serie de los números naturales se sigue inmediàtamente á la unidad, repararemos desde luego, que así como 2 está en la progresion geométrica entre 1 y 10, ó entre. . 1.0000000 y 10.0000000, su log. ha de estar en la arismética entre 0,0000000 y 1,0000000, logaritmos de los dos números entre los quales se ha de interpolar 2. Luego para sacar este medio arismético, logaritmo de 2, hemos de buscar primero entre los expresados términos de la progresion geométrica muchos medios proporcionales, y para cada uno de ellos el correspondiente medio arismético, hasta sacar un medio geométrico que sea 2 ó 2.0000000, ó discrepe tan poco de 2, que la diferencia sea despreciable; y el medio arismético que saliere correspondiente á 2, será el logaritmo de este número.

Sean, pues, A, B los dos términos de la progresion geométrica; sacarémos entre ellos un medio proporcional, es á saber 3,162277, que llamarémos C, y sacarémos al mismo tiempo su correspondiente logaritmo entre los términos 0.0000000 y 1.0000000, el qual será 0,5000000, y le asentarémos á su lado. Si el medio geométrico hubiera sido 2.0000000, ú otro número que de él discrepare una cantidad despreciable, estaria concluida la operacion, y el medio arismético 0,5000000 seria el logaritmo que se busca. Pero como C es $3\frac{1622777}{10000000}$ mucho mayor que 2,0000000, se hace preciso buscar entre C, mayor que este último número, y A menor, otro medio geométrico D, y tambien el medio arismético entre sus logaritmos. Este medio geométrico D es á la verdad menor que 2.0000000, pero se le aproxima no obstante mas que A. Dexe-

253 Por el mismo camino se hallaron los logaritmos de los demas números primos que están entre 1 y 10, entre 10 y 100, &c. En quanto á los logaritmos de los demas números, son muy faciles de hallar, una vez que el logaritmo de todo producto es la suma de los logaritmos de todos sus factores (235), y el log. de un cociente es la diferencia que va del logaritmo del dividendo al logaritmo del divisor.

254 El calculador que busca los logaritmos para formar unas tablas, debe sacarlos con mas escrupulosidad que no el que busca un logaritmo solo y aislado. Con un caso práctico manifestarémos la necesidad y el fundamento de esta prevencion. Quando hemos sacado el logaritmo de 2. hemos dado á 10 por logaritmo el número 1.0000000; si el mismo logaritmo se buscara con ánimo de formar unas tablas, convendria añadir al logaritmo de 10, tres quatro &c. ceros, de modo que fuese 1.0000000.000, ó 1,0000000.0000. Hallados que fuesen por medio de estos logaritmos los demas, se les quitarian á la derecha tantas figuras quantos ceros se le hubiesen añadido á aquel; con la advertencia de que así como las figuras que se han de quitar á la derecha son el numerador de un quebrado, cuyo denominador es la unidad con tantos ceros quantas sean las figuras quitadas, si el tal numerador fuese mayor que la mitad del denominador, al logaritmo del qual se hubiesen quitado dichas figuras, se le añadirá una unidad. En virtud de esto, el logaritmo. . . . . 3,3803921.600, ó $3,3803921\frac{600}{1000}$, que corresponde al número 2401, será 3,3803922.

La razon de esto es, que como unos logaritmos se forman de otros multiplicándolos por números determinados; v. g. el logaritmo de la quarta potencia de un número es el producto de su loga-

 risritmo por 4 (236); si al formar el logaritmo de la raiz se desprecia alguna cantidad, su quádruplo, que puede ser de alguna consideracion, faltará en el logaritmo de su quarta potencia. El logaritmo de 7 v. g. calculado en el supuesto de ser 1.0000000 el logaritmo de 10, es 0,8450980, y calculado en el supuesto de ser 1,0000000.000 el logaritmo de 10, es 0,8450980.400; si se saca en el primer supuesto el logaritmo de la quarta potencia de 7, será 3,3803920, y sacado en el segundo supuesto será 3,3803921.600, esto es, 3,3803922, ó dos unidades mayor que el otro.

255 Otro beneficio proporciona el calcular los logaritmos en el supuesto de ser 1.0000000.000 el logaritmo de 10. Y es que como las diferencias de los logaritmos van menguando de continuo hasta desvanecerse del todo, de modo que llegan á salir iguales los logaritmos de los números bastante grandes inmediatos unos á otros, esta igualdad no llegará á verificarse sino respecto de números muy grandes quando sea 10,0000000.000 el logaritmo de 10: por manera que los logaritmos que salen iguales quando se calculan en el supuesto de ser 1.0000000 el logaritmo de 10, discreparán todavía unos de otros quando se calculen en el primer supuesto. Esto se verifica con los números 2656385774 y....... 2656385774, cuyos logaritmos calculados por.... 1,0000000 log. de 10, son ambos 9,4252911, y calculados por 1,0000000.000 log. de 10, son..... 9,4252911.457 el del primero, y el del segundo es 9,4252911.459.

256 Las diferencias entre los logaritmos van siempre menguando por la proporcion que debe haber entre ellos y sus números, pues cosa clara es que á un número mayor corresponda un logaritmo mayor. Pero la diferencia que hay entre los números va

va menguando de contino, pues la diferencia de 2 á 1 es 1; la de 2 á 3 es $\frac{1}{2}$; la de 3 á 4 es $\frac{1}{3}$; la diferencia de 43 á 44 es $\frac{1}{43}$; luego es preciso que vaya tambien menguando la diferencia que hay de un logaritmo á su inmediato, hasta que llegando á ser despreciable la diferencia entre dos números inmediatos uno á otro, por muy grandes, llegue á serlo igualmente la diferencia entre sus logaritmos.

257 Del modo declarado poco ha de formar los logaritmos se deduce que los logaritmos de los números que caben entre 0 y 10, estan entre..... 0,0000000 y 1,0000000, siendo su primer figura 0, á la qual se sigue un quebrado decimal con una coma entremedias; los logaritmos de los números que estan entre 10 y 100, se hallan entre 1,0000000 y 2,0000000, siendo su primer figura 1, á la qual se sigue un quebrado decimal con una coma entremedias; los logaritmos de los números que caben entre 100 y 1000 están entre 2,0000000 y 3,0000000, siendo su primer figura 2, á la qual se sigue un quebrado decimal con una coma entremedias. La primer figura de todo logaritmo se llama su *característica*, y *mantisa* del logaritmo el quebrado decimal que la acompaña.

258 Es, pues, cero la característica de los logaritmos correspondientes á los números que estan entre 1 y 10; la característica de los logaritmos correspondientes á los números entre 10 y 100 es 1; la de los logaritmos correspondientes á los números de entre 100 y 1000 es 3, &c. por manera que la característica de todo logaritmo tiene tantas unidades, menos una, quantas son las figuras del número al qual pertenece.

Luego siempre se sabe que característica corresponde al logaritmo de un número propuesto; y por la característica del logaritmo se conoce de quantas fi-

figuras consta su número.

259 Por lo mismo que los logaritmos de los números de la progresion geométrica 1, 10, 100 &c. son 0,0000000; 1,0000000; 2,0000000 &c. se viene á los ojos que el logaritmo de todo número que conste de sola la unidad acompañada de muchos ceros, no tendrá mas figura significativa que la característica; siendo cero todas las figuras de su mantisa; los logaritmos de los demas números tendrán características acompañadas de un quebrado decimal.

260 Ya que 3 es la característica del logaritmo de 1000; 2, la característica del logaritmo de 100; 1, la característica del logaritmo de 10; 0, la característica del logaritmo 1, síguese que la característica del logaritmo de todo número menor que la unidad., esto es, de todo quebrado propio, ha de ser de naturaleza y signo contrario (245) al de las características expresadas; siendo esta la razon por que el logaritmo de todo quebrado se llama *defectivo* ó *negativo*, y lleva el signo —, como — 0.3679767.

261 Y porque quanto menor es la cantidad que el quebrado expresa, tanto mas discrepa y dista de la unidad, tanto mayor será su logaritmo defectivo.

262 Es, pues, el logaritmo de la unidad el término desde el qual empiezan á crecer los logaritmos positivos y negativos; por cuyo motivo estos corresponden á cantidades tanto menores, quanto mayores ellos son.

263 Es tambien de reparar, y se sigue de lo dicho (257), que los logaritmos de los números que crecen en proporcion décupla tienen una misma mantisa; por manera que los logaritmos de los números décuplos unos de otros solo se distinguen por sus características, siendo una misma la mantisa de todos. Aquí se vé patentemente.

Los

Los logaritmos de los números.

$$\left.\begin{array}{r}5\\50\\500\\5000\end{array}\right\}\text{ son }\left\{\begin{array}{l}0,6989700\\1,6989700\\2,6989700\\3,6989700\end{array}\right.$$

264 Hemos dicho (233), y lo evidencia el exemplo allí puesto, que el exponente de cada término de la progresion geométrica señala el lugar que el mismo término ocupa en ella despues de la unidad; siendo el tal exponente una unidad mayor que el número de los medios geométricos entre su número y la unidad; v. g. 16 ó 2^4 ocupa el quarto lugar de la progresion geométrica, despues de la unidad; siendo así que entre este número y la unidad no hay mas que tres medios geométricos. Luego, ya que los logaritmos son los exponentes de los números ó terminos de la progresion geométrica correspondiente, los quales en las tablas no se distinguen de los números naturales, señalan el lugar que cada número ocupa en la serie de los naturales despues de la unidad; y si se le rebaja una unidad, señalará quantos medios geométricos hay entre la unidad y el mismo número. En virtud de esto, ... 1.0000000 está diciendo que 10 ocupa el...... 10000000mo lugar despues de la unidad en la serie de los medios geométricos, y 9999999 dice que entre 1 y 10 hay otros tantos de dichos medios, como entre 10 y 100 hay la misma razon que entre 1 y 10, habrá igualmente entre 10 y 100 otros 9999999 medios geométricos, y los mismos entre 100 y 1000 &c. Por consiguiente desde 1 y 100 inclusivè habrá 20000000 medios geométricos, desde 1 á 1000 inclusivè habrá 30000000; quiero decir que desde la unidad hasta un número qualquiera de los natura-

rales inclusivè, habrá tantos medios geométricos quantos señalare el logaritmo del tal número.

Uso de las Tablas de Logaritmos.

265 Estas tablas son utilísimas para ahorrar trabajo á los calculadores, y facilitar las operaciones de la práctica; porque por medio de los logaritmos se transforman las operaciones de multiplicar y partir en otras de sumar y restar. Quando ocurra multiplicar un número por otro, se ha de sumar el log. del multiplicando con el logaritmo del multiplicador; la suma es el log. del producto. Buscando, pues, en la tabla este logaritmo, á su lado se hallará el producto de la multiplicacion propuesta. Si se me ofreciese multiplicar 14 por 13, haré la operacion como sigue

con	1,146128	log. 14
sumaré	1,113943	log. 13
suma	2,260071	log. 182 producto de 14

por 13; porque buscando en la tabla el logaritmo 2,260071, hallo inmediato á su lado el número 182.

266 Luego ya que para quadrar un número, ó levantarle á su segunda potestad, se le ha de multiplicar por el mismo, se duplicará su logaritmo, ó se le multiplicará por 2; el número que en la tabla esté inmediato al lado del log. que salga, será el quadrado, ó la segunda potencia del número propuesto. Si se me ofrece formar el quadrado de 15, multiplicaré por 2 su logaritmo 1,176091, sacaré el log. 2,352182, á cuyo lado está inmediatamente en la tabla el número 225, que es con efecto el quadrado de 15.

Por la misma razon, quando ocurra cubicar un número, formar su cubo, ó levantarle á la tercer potencia, se triplicará ó multiplicará por 3 su logaritmo, el número que esté en la tabla inmediato al lado del logaritmo que salga será el cubo del número propuesto. Para cubicar v. g. 18, multiplico por 3 su logaritmo 1,255273, saco 3,765819, y como en la tabla está inmediato á su lado el número 5832, infiero que este es el cubo de 18. De aquí se saca la siguente

267 Regla general. Para formar una potencia qualquiera de un número, se ha de multiplicar su logaritmo por el exponente de la potencia propuesta; el número que en la tabla esté al lado del log. producto, será la potencia que se buscare.

Si hubiésemos de levantar 2 v. g. á la décima potencia, multiplicariamos por 10 el logaritmo.... 0,301030 de 2, el número 1024 que en la tabla está inmediato al lado del producto 3,010300 es con efecto la décima potencia de 2.

268 Luego, ya que para sacar una raiz qualquiera de un número, se ha de hacer una operacion toda contraria á la de formar su potencia del mismo grado, podremos sentar tambien la siguiente.

269 Regla general. Para sacar una raiz determinada de un número qualquiera, se partirá el log. del tal número por el exponente de la raiz propuesta; el número que en la tabla esté inmediato al lado del log. cociente, será la raiz que se busca. Si se ofreciese sacar la raiz quadrada de 6889. partiré por 2 el log. 3,838156 de 6889; como inmediato al lado del log. cociente 1,919078 está el número 83 infiero que esta es la raiz quadrada de 6889 Para sacar la raiz septima de 128, parto por 7 el log. 2,107210 de 128; y como al lado del log. cociente 0,301030 está inmediato en la tabla el número 2, infiero que 2 es la raiz septima de 128.

Quan-

270 Quando ocurra hacer por logaritmos la operacion de partir un número por otro; del log. del dividendo se restará el log. del divisor; el número que en la tabla esté inmediato al lado del log. diferencia de los dos, será el cociente de la division propuesta.

Quiero partir 187 por 17.

De	2,271842	log. 187
Resto	1,230449	log. 17
Dif.	1,041393	log. 11, cociente de 187 partido por 17.

La razon de la regla es, que como en toda division el cociente multiplicado por el divisor ha de reponer el dividendo, es preciso que la suma del log. del divisor y del logaritmo del cociente componga el log. del dividendo. Luego el log. del cociente ha de ser por precision igual al log. del dividendo menos el log. del divisor.

271 La regla (270) rige para las divisiones, cuyo dividendo es mayor que el divisor. Quando este es mayor que aquel, no se puede restar del log. del dividendo el log. del divisor. Entónces se hace la sustraccion al reves; quiero decir, que del log. del divisor se resta el log. del dividendo, señalando la resta con el signo —, cuyo signo recuerda al calculador que la operacion correspondiente se hizo al reves. Todo log. que lleva el signo — es negativo ó defectivo, y su signo avisa que debe tomarse al reves de lo que se tomaria si no llevase tal signo, esto es, que el log. defectivo se ha de restar del número con el qual deberia sumarse si no llevara el signo —, en cuyo caso se llama *logaritmo positivo*. Vaya un exemplo.

Quiero partir 17 por 187, ó sacar el log. del quebrado $\frac{17}{187}$. Aquí no puedo restar 2,271842 log. del divisor, de 1,230449, log. del dividendo, hago, pues la sustraccion al reves.

De	2,271842	log. 187
Resto	1,230449	log. 17
Dif.	— 1,041393	log. $\frac{17}{187}$

272 El log. de $\frac{12}{4}$ ó de 3 es 0,477121, y el log. de $\frac{4}{12}$ ó $\frac{1}{3}$ es — 0,477121. Esto no puede causar novedad al que considere que $\frac{1}{3}$ es la misma cantidad que 3 ó $\frac{3}{1}$ tomada al reves; luego los cálculos donde entre $\frac{1}{3}$ han de dar resultados contrarios á los que salgan de los cálculos donde en lugar de $\frac{1}{8}$ entre 3 ó $\frac{3}{1}$. Porque claro está que multiplicar una cantidad por $\frac{3}{1}$ es hacerla tres veces mayor, y multiplicarla por $\frac{1}{3}$ es hacerla tres veces menor ó partirla por 3. Por consiguiente en los cálculos por logaritmos deben estos avisar con sus signos la contrariedad de oficio de un mismo número.

273 De lo dicho (270) se sigue que el logaritmo de todo quebrado legítimo cuyo numerador es la unidad, es el log. del denominador con el signo —, y que el log. de toda cantidad decimal legítima ha de ser defectivo.

Como los logaritmos defectivos suelen hacer embarazosos los cálculos, se ha discurrido un recurso para escusarlos, lo que se logra con el *complemento aritmético.*

Del Complemento Arismético.

274 *El Complemento Arismético* de un número es la diferencia que va del tal número á la unidad acompañada de tantos ceros á la derecha, quantos gua-

guarismos tiene el número: el complemento arismético de 485 v. g. es la diferencia que vá de 485 á 1000. Luego el complemento arismético de un número se halla restando este de la unidad acompañada de tantos ceros, quantos son los guarismos ó figuras del número. Por esta regla, si he de sacar el complemento arismético de 485;

de.	1000
restaré.	485

sacaré el compl. arism. de 485=515

Esta regla es la misma que estotra: el complemento arismético de un número se saca restando de 10 su primer guarismo de la derecha, y de 9 cada uno de los demas.

275 El complemento arismético transforma las operaciones de restar en operaciones de sumar; quiero decir, que quando se ofrece restar un número de otro, se suma con este el complemento arismético de aquel. Para restar 485 de 789.

con.	789
sumo el compl. arism. de 485 que es. .	515
sale la suma.	1304

y rebajando de ella la unidad que hay en los millares sale 304, verdadera diferencia que va de 789 á 485.

Hemos de decir por que en este exemplo se ha de borrar la unidad que hay en los millares. Como el complemento arismético 515 de 485 es 1000—485, claro está que quando sumo el tal complemento arismético rebajo con efecto 485, pero al mismo tiempo añado 1000; luego al cabo de la

la operacion he de rebajar esta unidad que sale en los millares; luego de la suma 1304 he de borrar el 1, y hallo que la verdadera resta es 304, como es fácil comprobarlo haciendo la operacion por el método comun.

276 Síguese de aquí que si el número cuyo compl. arism. se saca tiene dos guarismos no mas, su complemento arismético se halla restando de 100 el tal número; luego quando este complemento arismético se sume con otro número habrá en los centenares una unidad de exceso, la qual deberá borrarse.

277 Por consiguiente, siempre que en alguna operacion se introduzcan varios complementos arisméticos, del resultado final se borrarán á la izquierda tantas unidades, quantos fueren los complementos arisméticos, teniendo cuidado de borrarlas en la columna donde les toque estar.

De la suma de los dos números 789, y 467 quiero restar estotros dos 523 y 25.

con.	789
y.	467
sumo 477 compl. arism. de 523. . . .	477
y 75 compl. arism. de 25	75
suma	1808
	708

Por causa del complemento arismético de 523 he de borrar una unidad en la columna de los millares, y otra en la columna de los centenares por causa del complemento arismético de 25; y despues de hechas estas rebajas, queda la suma en 708, verdadera resta que sale despues de rebajar la suma de 523 y 25 de la suma de 789 y 467, como es fácil comprobarlo.

278 Al complemento arisḿetico del log. de un número, algunos Matématicos suelen llamarle *complemento logaritmico* del tal número.

279 El calculo por logaritmos tan expedito de suyo, lo es todavia mas por medio del complemento arisḿetico; y vamos á manifestarlo con varios exemplos.

Quiero partir 12 por 3. Por el método comun de log. 12 rebajaré log. 3, la resta ha de ser log. 4, cociente.

Por el compl. arism. con log. 12 sumaré compl. arism. del log. 3, que es 9,522879, y la suma tambien será log. 4.

De	1,079181	log. 12	con	1,079181	log. 12
Resto	0,477121	log. 3	sumo	9,522879	compl. arism. log. 3
Dif.	0,602060	log. 4	suma	10,602060	log. 4.

Los dos logaritmos finales son uno mismo despues de rebajar de la característica del segundo la decena introducida con el complemento arismético (277).

280 Quiero sacar el producto de $\frac{3}{4}$ multiplicado por 8, cuyo producto es $\frac{24}{4} = 6$. Para sacar este producto he de sumar (265) log. $\frac{3}{4}$ con log. 8, y la suma será log. 6; pero como log. $\frac{3}{4}$ es . . . . —0,124939, en vez de sumarle con logaritmo 8, le restaré (271). El log. de $\frac{3}{4}$ sacado por medio del complemento logarítmico es 9,875061. Haré la operacion por ambos métodos, y sacaré el mismo resultado

De	0,903090	log. 8	con	0,903090	log. 8
Resto	0,124939	log. $\frac{3}{4}$	sumo	9,875061	log. $\frac{3}{4}$
Dif.	0,778151	log. 6	suma	10,778157	log. 6,

ó 0,778151 despues de rebajar la decena que tiene de

de mas la cáracterística por causa del complemento logaritmico de $\frac{3}{4}$.

Para mayor ilustracion buscaré el producto de $\frac{5}{7}$ por 21 que vale 15, sacando log. $\frac{5}{7}$ por ambos métodos. Por el primero, log. $\frac{5}{7}$ es —0,146128; por el segundo, es 9,853872

De	1,322219	log. 21	Con	1,322219	log. 21
Resto	0,146128	log. $\frac{5}{7}$	Sumo	9,853872	log. $\frac{5}{7}$
Dif.	1,176091	log. 15	suma	11,176091	log. 15

Cuyos logaritmos finales son uno mismo despues de rebajada del segundo la decena que lleva de mas por causa del complemento arismético.

Como se usan las Tablas de logaritmos para hallar los logaritmos de los números que en ellas no están.

281 En las tablas comunes, á lo menos en las que he publicado, no están los logaritmos de los numeros enteros sino hasta 20000; faltan los logaritmos de los números mayores, los de los números fraccionarios, los de las raices imperfectas de las potencias de su grado, los de los quebrados legítimos &c. conviene enseñar como con su auxílio se hallan unos y otros.

282 Cuestion. I. *Hallar el logaritmo de un número fraccionario, qual es* $8\frac{3}{11}$, *el mismo que* $\frac{91}{11}$

Reduzco á solo un quebrado el entero con el quebrado que le acompaña, saco $\frac{91}{11}$, y por la regla (270).

De.	1,959041	log. 91
Resto.	1,041393	log. 11
Dif.	0,917648	log. $\frac{91}{11}$.

Cues-

283 Cuestion II. *Hallar el log. de un número mayor que el máximo de las tablas.*

Sucede con frecuencia que despues de reducir todo á un quebrado el entero con el quebrado que le acompaña, sale un numerador que de puro grande no cabe en la tabla. Esto sucederia si hubiésemos de buscar el log. del número $53\frac{831}{5704}$, el qual, despues de hecha la reduccion mencionada, es ... $\frac{303143}{5704}$ cuyo numerador no cabe en la tabla. Con este motivo hemos de enseñar como se hallan los logaritmos de los números mayores que el maxímo de la tabla.

284 Para enterarse bien de lo que en este caso se ha de prácticar, conviene tener presente, 1.° que añadir 1, 2, 3 &c. unidades á la característica de un log. es lo mismo que multiplicar su número por 10, 100, 1000 &c., pues es lo mismo que sumar el log. de 10, 100, 1000 &c. con el log. del tal número; 2.° que quitar al contrario 1, 2, 3 &c. unidades á la característica de un log. es lo mismo que partir su número por 10, 100, 1000 &c.

285 Hecho este recuerdo, propongámonos hallar el log. de 357859; se descartarán de este número á la derecha los guarismos necesarios para que el número restante quepa en la tabla; aquí bastará descartar dos guarismos, y el número 3578,59 que queda es 100 veces menor que el número propuesto (154).

Se buscará despues en la tabla el log. de 3578, el qual es 3,553640; se sacará la diferencia 122 que va de este log. al log. de 3579, y se dirá:

Si por una unidad de diferencia que hay entre los números 3578 y 3579 hay 122 de diferencia entre sus logaritmos, quando sea 0,59 la diferencia entre los números ¿que diferencia habrá entre sus logaritmos? Quiero decir, que se buscará el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros son los siguientes

1 : 122 :: 0,59 :

el quarto término es 71,98, ó solo 71, desechando las decimales. Añadirémos, pues, 71 á 3,553640 log. 3578, y saldrá 3,553711 log. de 3578,59. Para sacar el de 357859, se añadirán dos unidades á la característica del log. sacado, por ser 357859 cien veces mayor que 3578,59, y por fin el log. de 357859 será 5,553711.

286 Quando los últimos guarismos que se desechan á la derecha del números son cero, despues de hallar en la tabla el log. del número residuo, basta añadir á su característica tantas unidades, quantos son los ceros desechados del número.

287 Cuestion. III. *Hallar el log. de un número que lleva enteros con decimales.*

Bórrese la coma divisoria, y búsquese el log. del número propuesto como si fuese un número entero; despues de hallado su logaritmo, bien inmediatamente, bien por el método propuesto (285), quítense á su característica tantas unidades quantas sean las figuras decimales del número. Porque considerar el número sin coma divisoria, es suponerse 10, 100, 1000, &c. veces mayor de lo que es; luego para dexarle su verdadero valor, es preciso hacer á su característica la correspondiente rebaja.

288 Cuestion. IV. *Hallar el log. de un quebrado decimal.*

Resolverémos esta cuestion por un método que escusa los logaritmos defectivos, con cuya mira recordarémos el destino del complemento logarítmico, mediante lo qual darémos una regla general.

Busquemos por dicho complemento el logaritmo de 0,75, lo mismo que $\frac{75}{100}$ (156), y el de 0,075, lo mismo que $\frac{75}{1000}$.

 Pa-

Para el primer quebrado.

Con. . . . . . 1,875061 log. 75
sumo. . . . . 8,000000 comp. log. 100

suma. . . . . . 9,875061 log. de $\frac{75}{100}$ ó de 0,75

Para el segundo quebrado.

Con. . . . . . 1,875061 log. 75.
sumo. . . . . 7,000000 comp. log. 1000

suma. . . . . . 8,875061 log. $\frac{75}{1000}$ ó de 0,075

Por el mismo camino hallaríamos que el log. de 0,0075 es 7,875061. De aquí se deduce que

289 El logaritmo de todo quebrado decimal tiene la misma mantisa que el log. del número que componen sus figuras significativas, y por característica el número 9, ú otro, tantas unidades menor que 9, quantos ceros hay en la decimal á continuacion de la coma divisoria. Así hemos visto poco ha que log. 0,75 es 9,875061, cuya mantisa es la misma que la del log. de 75, y la característica es 9; porque despues de la coma divisoria no hay ningun cero en 0,75; el log. de 0,075 es.... 8,875061, cuya característica 8 tiene una unidad menos que 9, porque en 0,075 hay un cero despues de la coma divisoria. Tambien sacaríamos que el log. de 0,0075 es 7,875061, siendo 7 la característica, porque despues de la coma divisoria hay dos ceros en 0,0075.

290 Luego, quando se tropiece con el log. de un quebrado decimal, y se quiera averiguar qual sea dicho quebrado, se practicará lo siguiente: se buscará en la tabla el número cuyo log. tiene la misma mantisa que el propuesto; antes del tal número se pondrá un cero despues la coma, y á continuacion de la coma á la derecha tantos ceros quantas unidades faltan á la característica del logaritmo propuesto para llegar á 9.

291 Luego el logaritmo de todo quebrado decimal tiene por característica un número menor que 10. Luego al sumar los logaritmos de los quebrados decimales deben desecharse todas las decenas que lleve la característica de la suma. Por consiguiente quando el log. de una suma ha de ser el log. de un entero, la característica sale cabal y sin aumento; y si el log. ha de corresponder á un quebrado, la característica llevará una decena de unidades de mas. Si buscamos por logaritmos, v. g. el producto de 24 por 0,75.

Con. . . . . . . 1,380211 log. 24
Sumo . . . . . . 9,875061 log. 0,75

Suma. 11,255272

desechando las decenas de la característica de la suma, queda 1,255272, y el error que podria resultar de la regla queda enmendado, pues este es el log. cabal de 18, producto de 0,75 por 24.

Si se buscase el producto de 0,75 por 0,4

Con. . . . . . . 9,875061 log. 0,75
Sumo.. . . . . . 9,602060 log. 0,4

Suma. 19,477122

Desechando las decenas de la suma, queda... 9,477122, cuya característica está diciendo que el número de este log. es un quebrado decimal, el qual es 0,3, producto de 0,4 por 0,75.

292 Por consiguiente, práctiquese como regla general el desechar las decenas de la característica. *Si* se ofrece v. g. levantar un quebrado decimal á una potestad de grado determinado, si queremos formar v. g. el quadrado de 0,4; como el quadrado de 0,4 es 0,16, y el log. del quadrado de 0,4 es 2 × log. 0,4, el qual es 19,204120, se escribirá solo... 9,204120. Si se busca por logaritmos el cubo de 0,4, que es 0,064, este log. es 3 × log. 0,4, ó.... 28,806180, y se escribirá solo 8,806180. De donde se vé que en la característica del logaritmo de la segunda potencia hemos desechado una decena, dos en la característica del log. de la tercer potencia.

293 Síguese de aquí que quando se hayan de extraher por logaritmos raices de quebrados decimales, cuya operacion es contraria á la de formar sus potencias, se habrán de suplir las decenas desechadas; donde no, saldrá errado el cálculo. Se suplirán, pues, tantas decenas menos una quantas unidades tenga el exponente del radical; quiero decir, que se suplirá una decena quando se hubiese de sacar la raiz quadrada; dos decenas, quando se hubiese de sacar la raiz cúbica, ó tercera, &c. Así, para sacar por logaritmos la raiz cúbica de 0,64, cuyo logaritmo es 8,806180, antes de partir este logaritmo por 3, se añadirán dos decenas á su característica, y será 28,806180; el cociente de la division 9,602060 será log. 0,4, raiz cúbica de 0,64.

294 Cuestion. V. *Hallar por medio de la tabla los números de los logaritmos que en ella no están.*

Dos casos pueden ocurrir aquí, porque un logaritmo puede faltar en la tabla, ó de puro grande, ó porque cabe entremedias de dos, hallándose solo en la tabla los primeros guarismos del logaritmo propuesto.

I. En el primer caso, á la característica del logaritmo dado se le quitarán unidades hasta que sus *primeros guarismos se hallen en la tabla*; si despues de esta preparacion, todos los guarismos del tal logaritmo se hallan en la tabla, el número inmediato á su lado será el que le corresponde, pero se le añadirán á este tantos ceros quantas unidades se le hubieren quitado á la característica del logaritmo (284). Por este camino hallarémos que.... 7,227115, despues de quitar quatro unidades á la característica, es el logaritmo de 1687; de donde hemos de inferir que 16870000 es el número del logaritmo propuesto.

II. Si solo se hallan en la tabla los primeros guarismos del log. propuesto, quítensele igualmente á su característica unidades con el fin expresado, y practíquese lo que en el caso siguiente.

Quiero averiguar el número del logaritmo.... 5,243266; quito dos unidades á su característica, y veo que 3,243266, logaritmo residuo, está entre el log. de 1750 y el log. de 1751, y que por consiguiente el número del log. propuesto es 1750 y un quebrado.

Todo está, pues, en hallar este quebrado; con cuyo fin resto del log. 3,243266 el log. de 1750, y apunto la diferencia 228.

Apunto tambien la diferencia 248 que va del logaritmo de 1751 al log. de 1750, y digo: si 248 unidades de diferencia entre los log. de 1751 y 1750 dan una unidad de diferencia entre los números ¿que diferencia darán entre los números 228 unidades de diferencia entre el log. propuesto y el log. de 1750? ó

$$248 : 1 :: 228 : \tfrac{228}{248},$$

de donde infiero que log. 3,243266 corresponde al número $1750\tfrac{228}{248}$, con cortísima diferencia. Luego ya que 5,243266 logaritmo propuesto correspon-de de á un número cien veces mayor (284), será el logaritmo de $175000\frac{22800}{245}$, ó de $175091\frac{29}{31}$, ó de... 175091,93, con reducir el quebrado á decimal.

Si el logaritmo propuesto cupiese en la tabla, no habria que quitar unidad alguna á la característica, y por lo mismo tampoco habria que añadir cero alguno al número al fin de la operacion, la qual en quanto á lo demas se executará del mismo modo sin variar en nada.

295 Cuestion. VI. *Hallar el número correspondiente á un logaritmo defectivo.*

Réstese el logaritmo negativo propuesto de 1 ó 2, ó 3 &c. unidades, segun sea la extension de la tabla, y despues de hallado el número del log. residuo, descártense con una coma á la derecha tantos guarismos, quantas unidades hubiere en el número del qual se restó el logaritmo.

Quiero saber v. g. á que quebrado corresponde este logaritmo —1,532732; considérole como positivo y le resto de 4, queda 2,467268, cuyo logaritmo está en la tabla entre el log. de 293 y el de 294; de aquí infiero que el quebrado del logaritmo propuesto está entre 0,0293 y 0,0294, quiero decir que es 0,0293 con diferencia de menos de una diezmilésima: la razon es clara, porque restar de 4 el log. 1,532732 es (271) multiplicar 10000 por el quebrado cuyo es el logaritmo propuesto, ó lo que es todo uno, es multiplicar este quebrado por 10000; luego ha de salir un número 10000 veces mayor; luego al fin de la operacion se le debe reducir á que exprese diezmilésimas.

296 Aunque se saquen por el complemento logarítmico los logaritmos de los quebrados decimales, no obstante se hallan con el auxílio de la tabla tan facilmente como quando tienen logaritmos defectivos, sobre cuyo punto queda dicho (279) quanto corresponde.

En

297 En la formacion de las potencias deberá tenerse presente que quando se multiplica el log. por el número que expresa el grado de la potencia, tambien se multiplica el número que llevare de mas el logaritmo. Por lo que, si quando se forma un cubo v. g. entra un complemento arismético en el logaritmo propuesto, quiero decir si la característica lleva diez unidades mas de lo que corresponde, la característica del log. del cubo llevará 30 unidades mas, sucediendo respectivamente lo propio en las demas potencias; será, pues fácil reducirla á su justo valor.

298 En la extraccion de las raices, para escusar equivocaciones, quando entren complementos arisméticos en los logaritmos que sirvieren, se le añadirán ó quitarán á la característica las decenas que fuere menester, á fin de que lo que llevare de mas, conste cabalmente de tantas decenas quantas unidades hubiere en el número que exprese el grado de la raiz; la característica será cabalmente 10 unidades mayor de lo que corresponde.

Busquemos v. g. la raiz cúbica de $\frac{276}{547}$; al logaritmo de 276 añadirémos el complemento arismético del log. de 547

log. 276.	2,440909
compl. arism. log. 547	7,262013
suma.	9,702922
añado á la característica	20
	29,702922

á fin de que lleve 3 decenas de mas, y sale. . . . 29,702922, su tercio 9,900974 es el log. de la raiz cúbica que se pide, cuya característica tiene diez unidades de mas. Practicando lo dicho poco ha se hallará que la raiz cúbica que se pide es 0,7961, con diferencia de menos de una diezmilésima.

PRIN-

PRINCIPIOS DE GEOMETRÍA.

299 TOdo cuerpo ocupa un espacio que tiene tres dimensiones, es á saber, *longitud*, *latitud* y *profundidad* ó *grueso*; y aunque no hay cuerpo que no tenga las tres dimensiones juntas, solemos no obstante separarlas con el pensamiento: así, quando hablamos de la profundidad de un rio v. g. no atendemos á lo que coge de largo ni de ancho.

Distinguirémos por lo mismo tres especies de extension; la extension en longitud sola, que llamarémos *linea*; la extension en longitud y latitud solamente, que llamarémos *superficie*; finalmente, la extension en longitud, latitud y profundidad, que llamamos *volumen* ó *sólido*.

El asunto de la Geometría es manifestar las propiedades de cada una de las tres especies de extension.

De las Lineas.

300 Suponemos en estos principios que todas las lineas y superficies que considerarémos estan en un mismo *plano*. Por *plano* entendemos una superficie sin hoyos ni eminencias, que tampoco es curva, qual és la superficie de una mesa muy lisa, ó la de un cristal. Por manera que llamarémos plana toda superficie tan igual, que si se le aplicá el canto de una regla, todos los puntos del canto esten en dicha superficie y la toquen.

Hay tres especies de lineas; la *recta*, la *curva* y la *mixta*. Antes de definirlas, hemos de dar á conocer el punto, elemento de toda linea.

Llá-

Llámanse *puntos* los extremos de una linea, Fig.
tambien llamamos *punto* el parage donde es cortada una linea, ó donde las lineas se encuentran ó concurren unas con otras. Por manera que se puede considerar el punto como una porcion de extension de longitud, latitud y profundidad infinitamente pequeñas.

301 Esto presupuesto, *linea recta* se llama aquella cuyos puntos estan todos en una misma direccion; tal es la *AB*. Por cuyo motivo definen algunos la linea recta, 1.
el rastro que dexaria un punto moviéndose de contino en una misma direccion. Si el punto *A* moviéndose, sin desviarse, desde *A* á *B*, dejase á cada paso un rastro ó huella, trazaria la linea recta *AB*.

302 La linea *curva* es aquella cuyos puntos no estan todos en una misma direccion; tal es la linea *AEB*. Por cuyo motivo definen algunos la linea curva, 2.
el rastro ó huella que dejaria un punto moviéndose de modo que á cada paso mudase de direccion y se desviase del camino recto.

303 La linea *mixta* es aquella que en parte es curva y en parte recta; la linea *ABCD* es mixta. 3.

De estas tres definiciones dimanan las tres proposiciones siguientes, cuya evidencia es tan patente, que no necesitan de prueba.

304 1.° *Desde un punto á otro no se puede tirar mas de una linea recta, pero se pueden tirar infinitas lineas curvas.*

Solo con mirar la figura se ve patentemente que desde el punto *A* al punto *B* no se puede tirar mas linea recta que la *AB*; bien que desde el primer punto al segundo se pueden tirar las lineas curvas *ACB*, *ADB* y otras muchas.

305 2.° *La linea recta es la mas corta de quantas se pueden tirar desde un punto á otro.* 4.

La

Fig. La linea *AB* v. g. tirada desde el punto *A* al punto *B*, es mas corta que cada una de las lineas
4. *AEB*, *ADB*, *ACB*, cuyas lineas son tanto mas largas á proporcion, quanto mas se apartan de la recta *AB*, por ser mayor el rodeo del punto cuyo rastro se supone que son. Esta es la razon porque *la linea recta es la medida cabal de la distancia entre dos puntos*, conforme se probará mas adelante.

306 3° *Para determinar la posicion de una linea recta, basta conocer dos puntos suyos; de suerte que en conociendo la posicion ó situacion de dos puntos, se conoce tambien la de toda la linea.*

Como esta proposicion hará mucho papel en adelante, es del caso detenernos haciendo muy patente su verdad.

Es constante que muchas lineas rectas pueden pasar á un tiempo por un mismo punto; la linea
5. *CD* y la linea *AB* v. g. pasan ambas por el punto *E*, y se puede hacer que pasen infinitas por el mismo punto; por lo. que, un punto solo no basta para determinar la posicion ó direccion de una linea recta. Pero si se señalan dos puntos *E* y *F*, no será posible tirar por ellos mas linea recta que la *CD*; porque es patente que todas las lineas rectas que pasaren por los dos puntos *E* y *F* estarian echadas sobre la linea *CD*, y se confundirian con ella. Luego bastan dos puntos para determinar la posicion de una linea recta.

307 De la última proposicion se infiere que *dos lineas rectas no se pueden cortar sino en solo un punto.*

5. Porque si dos lineas v. g. la *AB* y la *CD* que se cortan en el punto *E*, se cortasen tambien en otro punto, una vez que cada punto de interseccion es comun á ambas lineas, las dos lineas tendrian dos puntos comunes; y como la posicion de una recta pen-

pende de solos dos puntos (306), las dos lineas tendrian comunes todos los demas puntos, y formarian una sola y misma linea recta, contra lo supuesto. Luego dos lineas rectas no se pueden cortar sino en solo un punto. Fig.

Seria un dislate la consecuencia que acabamos de sacar, si no se consideraran las lineas sin latitud; porque si admitiéramos alguna latitud en las lineas, tendria alguna extension el punto donde se cortan las dos lineas, y podria por lo mismo ser dividido en otros dos puntos, los quales serian comunes á ambas lineas.

308 Sacamos tambien de la misma proposicion (306) que *si dos puntos C y D v. g. de una recta están á igual distancia de otros dos puntos A y B, cada punto de la linea CD estará á igual distancia de los mismos puntos A y B.* Dista, pues, *E* tanto de *A* como de *B*; lo propio puede afirmarse de otro punto qualquiera de la linea *CD*. 5.

309 Las lineas rectas se trazan en el papel pasando por el canto de una regla bien recorrida una pluma ó un lapiz, que dexa por donde pasa un rastro de tinta ó de lapiz. Para trazar lineas rectas en el terreno se plantan á trechos jalones ó quartones en la direccion de un mismo rayo visual; y desde un jalon á su inmediato se pone tirante un cordel, ó se hace un surco, mediante lo qual se forma una linea recta continua. De esto hablarémos de intento en la Geometría práctica.

310 Las lineas se miden con otras lineas, pero en general *la medida comun de las lineas es la linea recta.* Medir una linea, recta ó curva, ó una distancia qualquiera, es buscar quantas veces cabe en la tal linea ó distancia otra linea recta conocida y determinada, la qual hace papel de unidad. Esta unidad es de todo punto arbitraria, por cuyo mo-

Fig. motivo es infinita la variedad de medidas de extension, de las quales darémos á conocer las principales en otro lugar.

311 Las lineas que ocurre medir en el terreno son por lo comun tan largas, que no es posible trasladarlas al papel de su tamaño natural. Es por lo mismo preciso *reducirlas*, esto es, representarlas con otras lineas menores, para lo qual sirven las *escalas de proporcion*, cuya construccion es como sigue.

6. En una linea *AB* trazada en el papel al pie del dibujo que representa se toma á arbitrio una parte *AC*, para que represente la unidad, ó un múltiplo de la unidad que sirvió de medida en el terreno, esto es, para que represente una ó muchas varas, si la distancia se midió por varas. La parte *AC* que se repite en la misma linea *AB* las veces que se tiene por conveniente, ha de coger tanto de largo, que las distancias que por esta escala se hubieren de arreglar, puedan caber en el papel donde se hace el dibujo. Es práctica comun repetir diez veces la medida que sirvió de unidad, haciendo una señal en cada division, y desde allí en adelante se repiten de diez en diez las unidades, señalando con números todas las divisiones por su órden, conforme se demuestra en la figura. Si la unidad cogiese bastante porcion de la linea *AB*, se podrá dividir la primera en sus alicotas, y estas en otras; si la escala fuese v. g. de varas, se podrá dividir la primer vara en los tres pies de que consta, cada pie en doce pulgadas, &c.

Dos usos tiene esta escala. 1° *Sirve para tomar en ella un número determinado de partes*, v. g. 35 partes. Para cuyo fin se planta la una punta de un compas en 30, desde cuyo número hasta el número 1 de la escala hay 30 partes, y 35 hasta el guarismo 5; abriendo, pues, el compas de modo que la otra punta caiga encima de la última de las dos divisiones que se siguen al 5, cogerá el compas las 37 partes que se piden.

Fig.

2.° *Sirve para saber de quantas partes consta una linea determinada DE.* Con este fin se abre un compas de modo que coja toda la *DE*; se planta 6.
la una de sus puntas en el número 1 de la escala, y se repara sobre que número cae la otra punta del mismo instrumento; si cayese sobre el número 50 v. g. la linea *DE* será de 50 partes.

312 Entre todas las lineas curvas solo consideraremos en estos principios la *circunferencia del círculo*. Llámase con este nombre la linea curva *ABDFA* 7.
que traza el extremo *A* de la linea *CA*, moviéndose al rededor del punto fijo *C*, que se llama el *centro*, ó el *punto céntrico*.

313 A todo el espacio, *area* ó superficie que la circunferencia abraza, la llamamos *círculo*, y llamamos *radios del círculo* todas las lineas que como la *CA* van desde el centro á la circunferencia. Del modo con que hemos dicho que se forma el círculo se infiere.

414 1.° *Que todos los radios de un circulo son iguales unos con otros.*

Porque todos ellos son la linea *CA*, cuyo extremo *A* traza la circunferencia, y que por consiguiente todos los puntos de la circunferencia estan á una misma distancia del centro.

315 2.° *Que para trazar una circunferencia ABDFA desde un centro C*, no hay sino abrir un 7.
compas de manera que sus dos piernas cojan la distancia *CA*. Plantaráse la una punta en *C*, haciendo que la otra dé la vuelta, sin moverse la primera del punto *C*; la linea curva que la segunda punta trazare será la circunferencia pedida.

Fig. 316 3.° *Que las circunferencias cuyos centros están en un mismo punto, no se pueden encontrar sin confundirse en una sola circunferencia.*

Porque sus radios son iguales, ó desiguales. 1.° Si los radios de ambas circunferencias fueren iguales uno con otro, todos los puntos de cada una estarán á una misma distancia del centro comun *C*; luego se confundirán en una sola las dos circunferencias. 2.° Si los radios de las circunferencias fuesen des-
8. iguales uno con otro, la que tuviere el radio menor *Ca* estará toda ella dentro de la que tuviere el radio mayor *CA*; luego las dos circunferencias no se encontrarán.

317 4.° *Que no tienen un mismo centro las circunferencias que se encuentran.*

Porque acabamos de probar que si tuvieran un mismo centro no se encontrarian.

318 5.° *Que todos los diámetros de un círculo son tambien iguales unos con otros.*

Porque llamamos *Diámetro* una recta, la qual pasando por el centro del círculo remata por ambos extremos en la circunferencia, como la linea
7. *BF*; luego el diámetro se compone de dos radios; luego son iguales unos con otros todos los diámetros de un mismo círculo, una vez que lo son sus radios.

319 Las porciones *BA*, *AF*, *FD* &c. de la circunferencia se llaman *arcos*.

320 Una recta *AF* v. g. tirada desde el extremo *A* de un arco al otro extremo *F*, se llama *cuerda* ó *subtensa* del arco. Como toda cuerda tiene un arco de cada lado, quando se mienta una cuerda se entiende la del arco menor.

321 Es evidente 1.° *que cuerdas iguales de un mismo círculo, ó de círculos iguales subtenden arcos iguales, y recíprocamente, arcos iguales de un mismo círculo, ó de círculos iguales tienen cuerdas iguales.*

Por-

Porque, si la cuerda *DG* es igual á la cuerda Fig.
DF, y nos figuramos que se dobla la figura por la linea *CD*, á fin de que *DG* caiga sobre *DF*, no hay duda que por ser el punto *D* comun, y caer el punto *G* de la linea *DG* sobre el punto *F* de la linea
ó cuerda *DF*, todos los puntos del arco *DG* han 9.
de caer sobre el arco *DF*; pues si alguno de dichos puntos no cayera sobre el arco *DF*, no estarian todos los puntos del arco *DF* á la misma distancia del centro *C* que todos los puntos del arco *DG*, y por consiguiente los puntos de la circunferencia cuyos son estos dos arcos no estarian todos á una misma distancia del centro; cuya consecuencia repugna con lo demostrado (314).

322 2.° *Si un mismo círculo ADBCA, ó en círculos iguales un arco AFC fuere mayor que otro AGD, la cuerda AC del primero será tambien mayor que la cuerda AD del segundo.*

Figurémonos el círculo *ADBCA* doblado por 10 y
el diámetro *AB*. Por estar todos los puntos de am- 11
bos arcos á igual distancia del centro del círculo cuyos son, todo el arco *AGD* se aplicará sobre el arco *AFC*, y el punto *A* será comun á los dos arcos, y á las dos cuerdas *AD*, *AC*, y el punto *C*, extremo del arco mayor, estará á mayor distancia del punto *A*, que no del punto *D*, extremo del arco menor, por coger, segun suponemos, el primer arco mayor porcion de la circunferencia que no el otro. Pero el punto *C* es tambien extremo de la cuerda del arco mayor, y *D* es el otro extremo de la cuerda del arco menor; luego entre los dos extremos de la cuerda del arco mayor hay mayor distancia, que no entre los dos extremos de la cuerda del arco menor. Luego &c.

323 3.° *El diámetro es la mas larga de todas las cuerdas.*

 Por-

Fig. Porque el diámetro *BD* es igual á los dos radios *AC*, *CF* juntos (318); pero estos dos radios juntos son mayores que la cuerda *AF* (305), linea recta la qual desde el punto *A* va al punto *F*. Y como
12. probariamos lo mismo por qualquier punto del radio *CE* que pase la cuerda *AF*, queda probado que el diámetro es la mayor de todas las cuerdas.

324 Llámanse *círculos concéntricos* los que tienen su centro en un mismo punto. Concéntricos son
8. los dos círculos *ABDA*, *abda*. El espacio que hay entre las dos circunferencias se llama *corona* ó *anulo*.

325 Los Matemáticos se han convenido en dividir toda circunferencia de círculo, grande ó pequeña, en 360 partes iguales que llaman *grados*; el grado en 60 partes iguales que llaman *minutos*; cada minuto en 60 partes iguales que llaman *segundos*; cada segundo en 60 partes iguales que llaman *terceros*; &c.

La señal del grado es. . . . . $^{\circ}$
La del minuto. . . . . $'$
La del segundo. . . . . $''$
La del tercero. . . . . $'''$

de modo que 5 grados 19 minutos 28 segundos y 49 terceros se escriben así $5^{\circ}\ 19'\ 28''\ 49'''$.

Por grado no se entiende una cantidad absoluta, sino una sola de las 360 partes de qualquier circunferencia, grande ó pequeña. Así, una circunferencia, por pequeña que sea, tiene tantos grados como otra mayor; pero los tiene menores á proporcion; del mismo modo que una cantidad sea la que fuere, grande ó pequeña, tiene dos mitades las quales tienen con ella la misma razon que las cantidades de otra cantidad mayor con toda ella.

De

Fig.

De los Ángulos, y de su medicion.

326 Llamamos *Angulo* la distancia que hay entre dos lineas que concurren en un punto, llamado *punta* ó *vértice* del ángulo. La distancia *BAC* 13.
v. g. que hay entre las dos lineas *AB*, *AC* forma ó causa el ángulo *BAC*, cuyo vértice está en el punto *A*; las lineas *AB*, *AC* se llaman los *lados* del ángulo.

El ángulo que acabamos de definir se llama *ángulo plano* ó *rectilinco*. El ángulo se llama *rectilineo* quando sus lados son dos lineas rectas; *curvilineo*, quando sus lados son dos lineas curvas; y *mixtilineo*, quando el un lado es una linea recta, y el otro una linea curva. Aquí solo tratarémos de los ángulos rectilineos.

Quando tengamos que nombrar ó señalar algun ángulo, lo harémos con tres letras, que la una estará en el vértice del ángulo, y las otras dos en los lados, cada una en el suyo. Al nombrar las tres letras, nombrarémos constantemente en el segundo lugar la del vértice, á fin de precaver las equivocaciones que se podrian originar, particularmente quando muchos ángulos diferentes tienen su vértice en un mismo punto. En virtud de esto, para nombrar el ángulo que forman las dos lineas *AB*, *AC*, dirémos el ángulo *BAC*, ó el ángulo *CAB*.

327 El que quiera enterarse bien de lo que es ángulo, debe figurarse que la linea *AB* está encima de la *AC*, y que se la hace dar vuelta al rededor del punto *A*, del mismo modo que una pierna de compas se mueve al rededor de su charnela, para que llegue á la posicion *AB* en que ahora se la vé. La cantidad que la *AB* ha andado en este movimiento, apartándose de la *AC*, es lo que llamamos *ángulo*. De aquí se infiere

 Que

Fig. 328 1.º *Que la cantidad de un ángulo no pende de lo que cogen de largo sus lados, sí solo de la abertura, inclinacion ó distancia que hay entre ellos.*

Esta es la razon por que el ángulo *BAC* es igual al ángulo *EAF*, ó, por mejor decir, es el mis-
13. mo ángulo, aunque sus dos lados *BA*, *CA* son mas cortos que los lados *EA*, *FA*.

329 *Que si dos ángulos* BAC, bac *son iguales, y se pone el vértice del uno sobre el vértice del otro, de modo que el ladó* ab *del uno cayga encima del la-*
13. *do* AB *del otro; el lado* ac *del primero caerá indefectiblemente encima del lado* AC *del otro.*

Porque si *ac* cayera fuera ó dentro del ángulo *BAC*, el ángulo *bac* seria mayor ó menor que el ángulo *BAC*, y no serian iguales los dos ángulos, contra lo supuesto.

330 Se deduce igualmente de la generacion del ángulo que *la medida de un ángulo* BAC *cuyo vertice está en el centro del círculo, es el arco* BC *que sus lados cogen.*

Porque se viene á los ojos que crece ó mengua dicho arco conforme crece ó mengua el intervalo que cogen sus dos lados. Pero acabamos de ver que este intervalo es lo que constituye el ángulo (328); queda probado por lo mismo que un ángulo cuyo vértice está en el centro del círculo tiene por medida el arco que sus dos lados interceptan.

331 Lo mismo tiene trazar el arco que ha de medir un ángulo lejos, que trazarle cerca del vertice. Porque sea grande ó pequeña la circunferencia cuyo centro está en el vértice del ángulo, el arco que cogen los dos lados del ángulo, es de igual valor ó igual número de grados respectivos; quiero decir que el tal arco coge un mismo número de
8. grados de su círculo. El arco *ab* v. g. tiene los mismos grados que el arco *AB*, porque si el uno de los

dos es la octava parte de su circunferencia, el Fig.
otro tambien será la octava parte de la suya.

332 Los arcos de diferentes círculos, que cogen un mismo número de grados, y son respectivamente una misma parte de su circunferencia, se llaman *arcos proporcionales* ó *semejantes.*

333 Luego *para dividir un arco en muchas partes iguales, basta dividir el arco que le mide, en el número propuesto, de partes iguales, y tirar por los puntos de division lineas al vértice del ángulo.*

234 Y para *formar un ángulo igual con otro ángulo*; para formar v. g. en el punto *a* de la linea
ac un ángulo igual al ángulo *BAC*, se trazará con 13.
una abertura de compas arbitraria, y desde el punto *a* como centro un arco indefinito *cb*; aplicando despues la punta del compas en el vértice *A* del ángulo dado *BAC*, se trazará con la misma abertura el arco *BC* entre los dos lados de dicho ángulo; se tomará con el compas la distancia de *C* á *B*, se la llevará desde *c* á *b*, y quedará determinado el punto *b*, por el qual, y por el punto *a* se tirará la *ab* cuya linea formará con la *ac* el ángulo *bac* igual con el ángulo dado *BAC.*

Porque el arco *bc* mide el ángulo *bac* (330), y el arco *BC* mide el ángulo *BAC*; pero estos dos arcos son iguales, porque sobre ser arcos de círculos iguales tienen cuerdas iguales (321), pues se ha tomado la distancia *bc* igual á la *BC*; luego &c.

335 Si atendemos al número de grados que coge un ángulo, hallarémos que el ángulo puede ser *recto*, *obtuso*, y *agudo.*

El *ángulo recto* es aquel cuya medida es un arco de 90 grados, ó la quarta parte de la circunfe-
rencia. Los ángulos *DAE*, *EAB* son rectos. 14.

336 El *ángulo obtuso* es aquel cuya medida es un arco de mas de 90 grados; tal es el ángulo *FAB.*

 El

Fig. 337 El *ángulo agudo* es aquel cuya medida es un arco que no llega á 90 grados; los ángulos
14. *DAF*, *FAE* son agudos.

338 De todo esto es fácil inferir, 1.° que todos los ángulos rectos son iguales unos con otros, pues todos cogen 90°; 2.° que no son todos iguales unos con otros los ángulos *obtusos*, pues un ángulo obtuso puede pasar de 90° mas ó menos que otro; 3.° que *tampoco son todos iguales unos con otros los ángulos agudos*, porque un ángulo agudo puede acercarse mas ó menos que otro al ángulo recto.

329 Llámase *complemento* de un ángulo lo que le falta ó sobra para 90°; el ángulo *EAF* es com-
14. plemento del ángulo *DAF*, y del ángulo *FAB*, pues *DAE+EAF* es el valor el ángulo recto *DAE*; y *FAB—EAF* tambien vale el ángulo recto *BAE*.

340 Llámase *suplemento* de un ángulo lo que le falta para que tenga el valor de dos ángulos rectos, ó 180°; *DAF* es el suplemento de *FAB*.

341 Como el valor de los ángulos es el valor de los arcos mismos que los miden, quanto dexo dicho del complemento y suplemento respecto de aquellos, se aplica igualmente á estos.

342 De la naturaleza del complemento y suplemento se infiere que *los ángulos y arcos iguales tienen complementos y suplementos iguales*; y recíprocamente que *son iguales los ángulos ó los arcos quando tienen complementos ó suplementos iguales*.

343 Del método declarado para valuar un ángulo inferirémos 1.° que *una linea recta* AB *que cae*
13. *sobre otra* CD, *forma con ella dos ángulos* BAC, BAD *que valen juntos* 180.°

Porque el punto *A* puede considerarse como centro de un círculo cuyo diámetro es *CD*; y pues los ángulos *BAC*, *BAD* tienen por medida los arcos *BC* y *BD*, los quales componen juntos toda la semicircunferencia, valdrán por lo mismo los dos juntos 180.° Fig.

344 2.° *Que si desde un mismo punto* A *se tiran quantas rectas se quieran* AC, AE, AF, AG &c. *todos los ángulos juntos*. BAC, CAD, DAE, EAF, 15.
FAG, GAB *que forman, no pasarán de* 360°, *ni tampoco valdrán menos*.

Porque claro está que no pueden coger ni mas ni menos que toda la circunferencia.

345 De lo dicho (343) se infiere que *todo diámetro* DB *v. g. divide la circunferencia en dos partes iguales*.

Porque como los dos ángulos *DAF*, *FAB* co- 15.
gen juntos un arco de 180°, cogerán la mitad de toda la circunferencia, la qual consta (329) de 360°.

346 *Si dos lineas rectas* AC, AD *tiradas por el extremo* A *de otra linea forman con ella dos ángulos* BAC, BAD *que juntos valgan dos ángulos rec-* 16.
tos, las dos lineas rectas serán una sola y misma linea.

Tírense por *A* á dos puntos *F* y *E*, el uno mas arriba y el otro mas abajo de la linea *AC*, las rectas *AF* y *AE*. Si las dos lineas *AC*, *AD* no forman una sola y misma linea *DAC*, es preciso que la linea *AD* prolongada pase mas arriba ó mas abajo de la linea *AC*.

1.° Si pasare mas arriba, y es v. g. la linea *DAF*, la suma de los ángulos *BAD*, *BAF* valdrá dos ángulos rectos (343). Pero, por el supuesto, la suma de los dos ángulos *BAD*, *BAC* es tambien igual á la de dos rectos; luego la suma de los dos ángulos *BAD* y *DAF* seria igual á la suma de los ángulos *BAD* y *BAC*: bien se vé que esto es un *absurdo*.

2.° Si pasa mas abajo, y es v. g. la linea *DAE*, la suma de los ángulos *BAD*, *BAE* será igual á la

Fig. la de dos ángulos rectos (343). Pero, por el supuesto, los ángulos *BAD* y *BAC* valen juntos dos ángulos rectos; luego la suma de los dos ángulos *BAD* y *BAE* será igual á la suma de los dos ángulos *BAD* y *BAC*; y como este es otro *absurdo*, siguese que la linea *DA* prolongada es la misma linea *AC*, y que por consiguiente las dos lineas *AD* y *AC* son una sola y misma linea.

347 Una vez que los ángulos son iguales unos con otros quando son iguales unos con otros sus su-
17. plementos (342), síguese que *los ángulos* BAC, EAD *opuestos al vértice, y formados por dos rectas* BD, EC *que se cruzan, son iguales uno con otro.* Porque el mismo ángulo *CAD* es suplemento de ambos; lego &c.

De las Perpendiculares, Oblicuas y Paralelas.

348 De una linea recta se dice que es *perpendicular* á otra linea recta, quando cae sobre esta sin inclinarse ni á un lado ni á otro; *AC* es perpendi-
18. cular á *BD*.

349 De aquí se deduce 1.° que *quando una linea es perpendicular á otra, forma con ella dos ángulos iguales y rectos.* (343) y (335).

350 2° *Que si una linea que encuentra otra forma con ella dos ángulos rectos, y por consiguiente iguales* (338), *es indefectiblemente perpendicular á dicha linea.*

Porque si forma dos ángulos iguales, no se inclina á ningun lado; luego será perpendicular.

351 3° *Que quando una linea* AE *v. g. es perpendicular á otra linea* BD, *esta es tambien perpendicular á la* AE.

Porque por lo mismo que *AE* es perpendicular á *BD*, los ángulos *ACB*, *ACD* son iguales (349); pe-

pero *ACD* es igual á *BCE* (347) luego *ACB* es igual Fig.
á *BCE*; luego la linea *BC* no se inclina ni del lado de *AC*, ni del lado de *EC*; luego es perpendicular á *AE*.

352 4° *Que quando un punto* A *v. g. de una linea* AC *perpendicular á* BD, *está á igual distancia de ambos puntos* B y D, *todos los demas puntos de la* AC *tambien estan á igual distancia de ambos puntos* B *y* D.

Porque si el punto *F* v. g. ú otro punto qualquiera de la perpendicular no estuviese á igual distancia de ambos puntos *B* y *D*, la *AC* se inclinaria de algun lado, y por lo mismo no seria perpendicular á la *BD*, contra lo supuesto. Lo que acabamos de probar respecto del punto *A*, se prueba del mismo modo respecto de todos los demas puntos de la perpendicular.

353 5° *Que desde un punto* A *fuera de una linea* BD *no se puede tirar mas de una perpendicular á dicha linea.*

Tomemos, para probarlo, en la *BD* dos puntos equidistantes de *A*. Ya que la linea *AC* es perpendicular á *BD*, y su punto *A* está equidistante de *D* y *B*, todos los demas puntos de la misma perpendicular estan á la misma distancia de *D* que de *B* (352); luego el punto *C* está á igual distancia de *D* que de *B*. Pero de aquí se sigue que ninguna otra linea, v. g. la *AG*, tirada por el punto *A*, puede ser perpendicular á *BD*; porque, si lo fuese, una vez que el punto *A* de la *AG* está equidistante de *B* y *D*, todos sus demas puntos lo estarán tambien (352). El punto *G* no está á igual distancia de *B* que *D*, porque estándolo el punto *C*, el punto *G*, puesto entre *B* y *C*, está mas cerca de *B* que de *D*. Luego la linea *AG* no es perpendicular á *BD*. Lo mismo probarémos respecto de otra

Fig. otra linea qualquiera tirada por el punto A, que no sea la AC.

354 Del mismo modo puede probarse que *en un punto* C *de una linea* BD, *no se le puede levantar mas de una perpendicular.* No hoy mas diferencia que la de tomar en la linea BD dos puntos B, D equidistantes del punto C, así como en la proposicion antecedente, los dos puntos B y D se tomaron equidistante de A.

355 *Una linea recta* AC *será perpendicular á otra recta* BD, *si tuviere la primera dos qualesquiera de*
18. *sus puntos* A, C *equidistantes de otros dos puntos qualesquiera* B, D *de la segunda.*

Porque una vez que la direccion de toda recta solo pende de la posicion de dos puntos suyos, si los dos puntos A y C estan á igual distancia de B y D, la linea AC no se inclina ni ácia B ni ácia D; luego la AC es perpendicular (348) á la
19. BD.

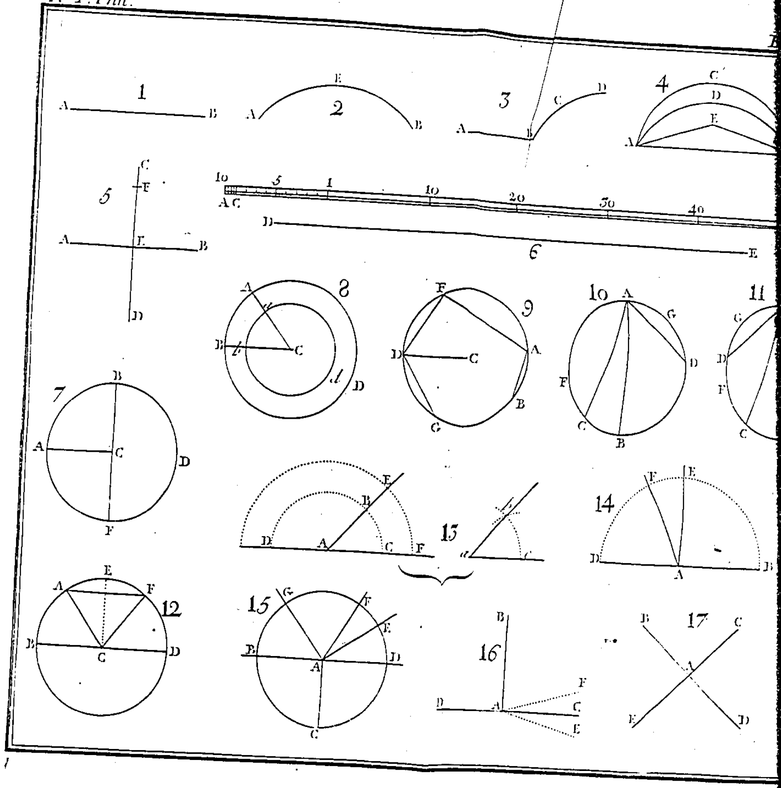
356 Despues de lo dicho acerca de las perpendiculares será fácil 1.° *tirar una perpendicular á una recta* ó BD, 2.° *por un punto dado* C *en la misma recta*, 3.° *ó por un punto dado* A *fuera de ella.*

1.° Desde el centro C y con un radio qualquiera $CE=CF$, trácense dos arcos que corten la recta dada en E y F; desde los centros E y F, con otro radio mayor que el de antes, trácense dos arcos que se corten en A; tírese por los puntos A y C la linea AC; esta será perpendicular á la BD.

Porque dos de sus puntos A y C serán equidistantes de dos puntos E y F de la linea BD; luego la AC será perpendicular á la BD (355).

2.° Desde el centro A, y con un mismo radio
20. trácense dos arcos que corten BD en los puntos E y F. Desde los centros E y F, y con el mismo ú otro radio que antes, trácense dos arcos que se cor-

T. 1. Prin.



corten en C; por los puntos A y C tírese la AC; Fig.
esta será perpendicular á la BD. Porque dos de sus puntos A y C estarán á igual distancia de E que de F (355).

Si la perpendicular se hubiese de tirar en el extremo D *de la linea* BD, se la prolongará para practicar despues lo que acabamos de proponer.

357 *Tambien podremos dividir una linea* AB *en dos partes iguales.* 21.

Desde los centros A y B, y con un mismo radio, trácense dos arcos que se corten en D. Desde los mismos centros, y con un mismo radio (el mismo que el primero ú otro distinto), trácense dos arcos que se corten en E; tírese despues la DE la qual tendrá dos puntos suyos D y E, y por consiguiente todos los demas (308) equidistantes de A y B; luego el punto C estará á la misma distancia de A que de B; luego la DE dividirá la AB en dos partes iguales.

Como la DE es patentemente perpendicular (355) á la AB, puede tambien tirarse por este método una perpendicular á una linea dada.

358 *Linea oblicua* respecto de otra es la que se inclina á algun lado; la BD es oblicua respecto de la AC. De aquí inferirémos 22.

359 1.° *Que una linea oblicua á otra, forma con ella dos ángulos desiguales, que son suplemento el uno del otro* (340 y 343).

360 2.° *Que si una linea que encuentra otra forma con ella dos ángulos desiguales, será oblicua respecto de ella.* Porque si forma dos ángulos desiguales, se inclina á un lado.

361 *Si desde un mismo punto* C *se tiran á la linea* AB *la perpendicular* CD, *y la oblicua* CF; *la perpendicular* CD *será mas corta que no la oblicua* CF. 23.

Pro-

Fig. Prolónguese *CD* hasta *H*, de modo que sea la
HD igual con la *CD*, y tirése la oblicua *HF*. Esta oblicua *HF* será por precision igual con la otra oblicua *CF*; porque como la *CH* es perpendicular á la *AB*, tambien será la *AB* perpendicular á la *CH* (351). Pero su punto *D* es equidistante de los dos puntos *C* y *H*, por ser *HD* igual con *CD*; luego otro punto qualquiera *F* de la perpendicular *AB*, es equidistante (352) de *C* y *H*; luego la *HF* es igual con la *CF*.

Hecha esta preparacion; la linea *CDH* es mas corta que la *CFH* (305); luego la mitad de *CDH* es mas corta que la mitad de *CFH*; pero la mitad de *CDH* es *CD*, y la mitad de *CFH* es *CF*; luego la perpendicular *CD* es mas corta que la oblicua *CF*.

362 De aquí se infiere lo dicho (305), es á saber, que *la perpendicular es la linea mas corta que desde un punto se puede tirar á otra linea, y que por consiguiente, la linea perpendicular es la verdadera medida de la distancia entre dos puntos.*

363 *Entre todas las oblicuas* CF, CG, CE *que desde un punto* C *se pueden tirar á una linea* AB;
23. 1.° *la oblicua* CG *mas distante de la perpendicular*
CD *es la mas larga*; 2.° *las que se tiren á distancias iguales de la perpendicular serán iguales una con otra*; *y recíprocamente.*

1.° Para probar que la oblicua *CG* es mas larga que la oblicua *CF*, prolongo la perpendicular *CD* hasta *H*, por manera que *HD* sea igual á *CD*, y desde el punto *H* tiro las lineas *HF*, *HG*; será facil probar como antes (361) que estas dos lineas son iguales con las oblicuas *CF*, *CG*; será, pues, *CF* la mitad de *CFH*, y *CG* la mitad de *CGH*. Pero no hay duda que *CGH* es mas larga que *CFH*, porque se aparta mas del camino mas cor-

corto *CDH* (305); luego la oblicua *CG* es tambien Fig.
mas larga que la oblicua *CF*.

2.° Las oblicuas *CF* y *CE* equidistantes de la perpendicular son iguales una con otra; porque si se tira la *HE*, las dos lineas *CFH*, *CEH* serán indubitablemente iguales, porque son equidistantes de la recta *CDH*; luego sus mitades *CF* y *CE* son tambien iguales. La recíproca se prueba tambien del mismo modo.

364 De lo que acabamos de demonstrar se sigue *que desde un mismo punto* C *v. g. no se le pue-*
den tirar á una linea mas de dos lineas iguales; por- 23.
que no se le pueden tirar mas de dos oblicuas equidistantes de la perpendicular.

365 De dos lineas rectas trazadas en un mismo plano se dice que son *paralelas* quando están en todos sus puntos á igual distancia una de otra; para-
lelas son las lineas *AB*, *CD*. De aquí puede infe- 24.
rirse

366 1.° *Que las paralelas, aun quando se las prolongue al infinito, no se pueden encontrar*; pues han de estar por su naturaleza á igual distancia una de otra en todos sus puntos.

367 2.° *Que las lineas* EF, GH *tiradas desde la una paralela perpendiculares á la otra, son iguales.* Porque estas perpendiculares miden la distancia que hay de la una paralela á la otra (362), cuya distancia es una misma en todos los puntos de ambas paralelas (365).

368 3.° *Que toda linea, paralela á una de dos paralelas, es tambien parela á la otra.*

Porque la tercer linea no puede estar en todos sus puntos á igual distancia de la una de las dos paralelas, sin estar tambien en todos sus puntos á igual distancia de la otra paralela.

369 Sin embargo de lo que acabamos de probar acer-

Fig. acerca de las lineas paralelas, suelen considerarlas los Matemáticos como lineas que si se las prolongara al infinito se encontrarian. Porque si bien algun intervalo determinado, y por lo mismo limitado separa dos lineas cuya longitud se supone infinita, el tal intervalo puede considerarse como *nulo* ó ninguno respecto de la infinita longitud de dichas lineas. Por lo que, *dos lineas que solo se encuentran prolongándolas al infinito, y dos lineas paralelas son una misma cosa*; *como tambien podemos decir que dos lineas paralelas y dos lineas que se encontrarian prolongándolas al infinito, son una misma cosa.* En el discurso de esta obra se nos proporcionarán ocasiones de acreditar la utilidad y la seguridad de este modo de considerar las paralelas.

25. 370 *Dos líneas paralelas* AB, CD *cortadas por otra linea* EF, *llamada secante, están igualmente inclinadas respecto de un mismo punto* E *de la secante.*

Porque si las dos paralelas *AB*, *CD* no estuviesen igualmente inclinadas ácia el punto *E* de la *EF*, de modo que la paralela inferior v. g. se le arrimase mas que no la superior ácia el mismo punto, las dos lineas se irian arrimando la una á la otra, y por consiguiente dejarian de ser paralelas.

371 Toda secante forma con las paralelas varios ángulos en que hemos de parar la consideracion. Unos estan entre las paralelas, y se llaman *ángulos internos* como los ángulos *I*, *K*, *L*, *M*. Otros estan fuera de las paralelas, y se llaman *ángulos externos*; tales son los ángulos *G* y *N* en la parte de arriba, *P* y *H* en la parte de abajo. Quando se comparan de dos en dos los ángulos, ya internos, ya externos, se llaman *ángulos alternos* los que estan en distintos lados de la secante, el uno á la derecha y el otro á la izquierda, el uno arriba y el otro abajo; los ángulos *I* y *M*, *L* y *K* son *alternos internos*; los ángulos *N* y *P*, *G* y *H* son *alternos externos*.

 Fig.

372 *Los dos ángulos que forman las paralelas á un mismo lado de la secante, uno interior y otro exterior, como los ángulos* M *y* N, *son iguales.* 25.

Porque la cantidad de un ángulo pende de la inclinacion de las dos lineas que le forman (328), y las dos paralelas estan igualmente inclinadas respecto de la secante *EF* (370); luego los ángulos *M* y *N* que las paralelas forman con la *EF*, son iguales. Por lo mismo, el ángulo exterior *H*, y el ángulo interior *K*, que están debajo de las paralelas, á un mismo lado de la secante, son tambien iguales. Del mismo modo probaríamos que tambien son iguales uno con otro los ángulos *G* y *L* del otro lado de la secante, y tambien los ángulos *P* é *I*. De aquí inferirémos que

373 1.° *Los ángulos alternos internos* AGH, DHE *son iguales.* 26

Porque acabamos de probar (372) que *AGH* es igual á *CHF*; pero *CHF* es igual (347) á *DHE*; luego *AGH* es igual á *DHE*.

374 2.° *Los ángulos alternos externos* BGE, CHF *son iguales.*

Porque *BGE* es igual á *AGH* (347); pero hemos visto (372) que *AGH* es igual á *CHF*; luego *BGE* es igual á *CHF*.

375 3.° *Los ángulos* BGH, DHG *son el uno suplemento del otro.*

Porque *BGH* es suplemento de *BGE*, cuyo ángulo es igual (372) con *DHG*.

376 4.° *Los ángulos* BGE, DHF, *ó* AGE, CHF, *son suplemento el uno del otro.*

Porque *DHF* tiene por suplemento el ángulo *DHG*, cuyo ángulo es igual con *BGE* (372).

377 Todas estas propiedades se verifican siem-

 pre

Fig. pre que una linea recta corta dos lineas paralelas; y recíprocamente, *siempre que una linea recta corte dos lineas rectas, de modo que se verifique alguna de estas propiedades, se podrá inferir que las dos lineas cortadas son paralelas.* Esta proposicion se demostrará del mismo modo que la primera, sin variar en nada.

378 De las propiedades últimamente demostradas de las lineas paralelas podemos inferir varias consecuencias.

27. 1.ª *Siempre que dos ángulos* ABC, DEF *vueltos ácia un mismo lado, tienen sus lados paralelos, son iguales.*

Porque si nos figuramos prolongado el lado *BE* hasta encontrar la *BC* en *G*, los ángulos *ABC*, *DGC* serán iguales (372); por la misma razon el ángulo *DGC* será igual al ángulo *DEF*; luego *ABC* será igual con *DEF*.

379 2.ª *Si la linea* GH *fuere perpendicular á las*
24. *dos lineas* AB, CD, *estas dos lineas serán paralelas.*

Porque por el supuesto de ser la *GH* perpendicular á la *AB*, y *CD*, los ángulos alternos internos *GHD*, *HGE* por rectos serán iguales (338); luego las lineas *AB*, *CD* son paralelas (377).

380 3.ª *para tirar por un punto dado* H *una linea* CD *paralela á otra linea* AB, es menester tirar
26. á arbitrio la linea indefinita *HGE* que corte la *AB* en un punto qualquiera *G*; despues se tirará por el punto *H* la *HD*, que forme con *HE* (334) el ángulo *EHD* igual al ángulo *EGB* que esta forma con *AB*; la linea *HD* tirada con estas circunstancias, será paralela á *AB* (377).

381 4.ª *Si dos lineas* CD, EF *son perpendicula-*
28. *res á otra linea* AB, *serán paralelas una á otra.*

Porque los ángulos en *C* y *E* serán rectos; luego el ángulo *DCE* será suplemento del ángulo *FEC*;

FEC; luego las dos lineas serán paralelas (377). Fig.

382 5.ª *Si de dos lineas* CD, EF *paralelas, la una* CD, *v. g. es perpendicular á* AB, *lo será tambien la* EF.

Porque los ángulos *DCE*, *FEC* son suplemento uno de otro (375), pues suponemos la *CD* paralela á la *EF*; luego el ángulo *FEC* es recto, una vez que suponemos serlo *DCE*; luego *EF* es tambien perpendicular á *AB* (350).

De las lineas rectas consideradas en el círculo.

383 *Una linea* CP *tirada desde el centro de un círculo perpendicular á una cuerda* FM, *divide la cuer-* 29.
da en dos partes iguales.

Por ser tirada la linea *CP* desde el centro, tiene un punto *C* equidistante de los extremos *F*, *M* de la cuerda *FM*, porque el centro está á igual distancia de todos los puntos de la circunferencia (314). A mas de esto, por ser *CP* perpendicular á la cuerda, todos los demas puntos de la misma *CP* estan (352) á igual distancia de los puntos *M*, *F*; luego el punto *P* está á igual distancia de *M* que de *F*, y por lo mismo *MP*=*PF*.

384 Luego si se prolonga la perpendicular *CP* hasta *R*, este punto que es comun á la linea *CR* y al arco *FRM* (352) será equidistante de *M* y *F*, y por consiguiente *la linea* CR *perpendicular á la cuerda corta por el medio el arco* FRM *que la cuerda* FM *subtende.*

385 Y recíprocamente, *si una linea* CP *que pa-* 29.
sa por el centro divide por el medio una cuerda, es perpendicular á la cuerda.

Porque si *CP* divide la cuerda *FM* en dos partes iguales, el punto *P* es equidistante de *F* y *M*; y porque *CP* tambien pasa por el centro, tiene otro pun-

Fig. punto C equidistante de F y M; luego CP es (355) perpendicular á FM.

386 *Si la linea* CP *es perpendicular á la cuerda* FM, *y la parte por medio, pasa por el centro.*

29. Porque si la CP divide por medio la FM, el punto P es equidistante de F y M; y si CP es perpendicular á FM, todos los demas puntos de CP son equidistantes de F y M (352). Luego la CP pasa por el centro C, punto equidistante de F y M (314).

387 *Si la linea* CR *que pasa por el centro di-*
29. *vide por medio la cuerda* FM, *tambien divide por medio el arco* FRM.

Porque, segun demostramos poco ha (385), la linea CR es perpendicular á la cuerda FM, pues la divide por medio y pasa por el centro; por consiguiente tambien divide la CR (384) el arco FRM en dos partes iguales. De aquí inferirémos,

388 1.° Que si se tira la fm paralela á la FM, la linea CR tambien será perpendicular (382) á fm,
29. y los arcos Rf, Rm serán iguales (384); luego si de los arcos iguales FR, MR restamos los arcos iguales fR, mR, quedará $Ff=Mm$; esto quiere decir que *los arcos de un mismo círculo que estan entre paralelas son iguales.*

389 2.° Un método para *trazar un círculo por tres puntos dados* A, B, D, como no esten en una
30. misma direccion. Se tirarán las lineas AB, BD, cuerdas que han de ser del círculo por trazar; se partirá por medio cada una de estas cuerdas (357) con tirar las perpendiculares EC, FC; el punto C donde estas dos lineas se encuentran será el centro del círculo, pues ambas han de pasar por el centro (386).

390 Si los puntos A, B, D estuviesen en una misma direccion, las dos lineas EC, FC no se encontrarian; porque como serian perpendiculares á di-

dicha recta, serian paralelas (381). Luego *no es posible que una linea recta corte un círculo en tres puntos.* Fig.

391 *Quando se quiera hallar el centro de un círculo, conocido solo un arco suyo*, se tirarán dos cuerdas al arco, y se practicará lo propio que acabamos de declarar.

392 3.° *Para partir un ángulo ó un arco en dos partes iguales, v. g. el ángulo* BAC. 31.

Se hará centro en el vértice del ángulo, y con un radio arbitrario se trazará el arco DIE; desde los centros D y E, y con un mismo radio se trazarán dos arcos op, mn que se corten en un punto G; por G y A se tirará la AG, la qual por ser perpendicular (355) á la cuerda DE, la dividirá (383) en dos partes iguales, y por lo mismo partirá tambien por medio (384) el arco DIE, y el ángulo BAC, pues los arcos parciales BAG, EAG tienen por medida (330) los dos arcos DI, EI.

393 4.° Despues de partido el arco FRM en dos partes iguales con la linea CR, y tiradas las cuerdas RF, RM, se dividirán en dos partes iguales 32.
los arcos que subtenden, tirando á dichas cuerdas por el centro C lineas perpendiculares; y prosiguiendo á este tenor, se podrá dividir primero un arco en dos partes iguales; despues en quatro, partiendo cada una de las dos primeras en otras dos; despues en 8 &c. por el órden de la progresion ÷ 2 : 4 : 8 : 16 &c.

394 Llamamos *tangente* de círculo una linea AD 33.
que toca la circunferencia sin cortarla aunque se la prolongue.

Llamamos *secante* del círculo toda linea la qual como EF encuentra el círculo en dos puntos, es- 33.
tando parte de ella fuera del círculo.

395 *Toda linea recta* FG *que corta la circunfe-*

 ren-

Fig. *rencia en dos puntos v. g.* A *y* B *es secante del círculo.*

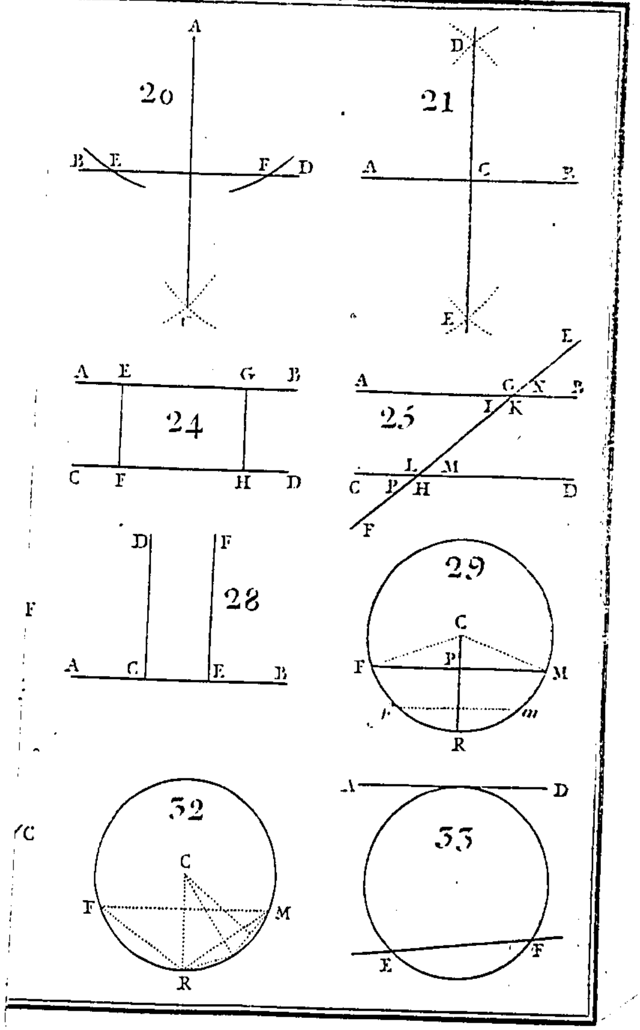
34. Tírense á los puntos *A*, *B*, donde la recta *FG* encuentra la circunferencia los dos radios *CA*, *CB*. Por ser iguales uno con otro estos dos radios, no pueden ser ambos perpendiculares á la *FG* (353), y cada uno de ellos estará á igual distancia de la perpendicular tirada desde el centro *C* (363), y por consiguiente la perpendicular *CD* tirada desde el centro caerá en medio de *AB*. Pero esta perpendicular *CD* es menor (361) que el radio *CA* ó *CB*, y son tambien mas cortas que estos radios todas las rectas tiradas por el centro *C* á qualquiera de los puntos que están entre *A* y *B* (363); luego todos los puntos de la recta *AB* estan dentro del círculo. Ya que las oblicuas tiradas por un mismo punto *C* á la recta *FG* son tanto mas largas quanto mas distan de la perpendicular *CD* (363), síguese que si los puntos *A* y *B* estan en la circunferencia, estarán fuera de ella los puntos de la recta *FG* que esten entre *A* y *F*, ó entre *B* y *G*; luego la recta *FG* será secante del círculo (394).

396 *Luego la tangente no encuentra la circunferencia del círculo sino en solo un punto.* Porque si la encontrara en dos puntos, seria secante (395).

397 *Toda linea perpendicular al extremo de un radio es tangeute del círculo.*

35. Es patente que si tiramos las dos linas *CE*, *CF*, serán oblicuas (353) á la linea *ABD*, que suponemos perpendicular al extremo *B* del radio *CB*, por ser tiradas desde el mismo punto que el radio perpendicular *CB*; por consiguiente estas oblicuas serán mas largas que el radio perpendicular (361), y por lo mismo sus extremos *E*, *F* estarán fuera del círculo y de la circunferencia. Lo propio demostraríamos respecto de otro punto qualquiera de la circun-

P. 230.



cunferencia que no sea *B*; luego *ABD* no toca la Fig.
crcunferencia sino en solo el punto *B*; luego es tangente (396).

398 Y recíprocamente, *toda tangente es perpendicular al radio que remata en el punto de contacto.*

Porque si la tangente *ABD* toca el círculo en 35.
el punto *B* donde remata el radio *CB*, ya que la tangente no corta la circunferencia, no entra en el círculo, y por lo mismo es imposible tirar desde el centro á la tangente una linea mas corta que el radio *CB*. Luego este radio es perpendicular (362) á la tangente; y recíprocamente la tangente es perpendicular al radio (351).

399 *Luego por un mismo punto de la circunferencia no se puede tirar mas de una tangente.*

Porque como toda tangente es perpendicular (398) al extremo del radio tirado al punto de contacto, y por el extremo del radio no puede pasar mas de una perpendicular á dicho radio (354), es imposible tirar dos tangentes á un mismo punto de la circunferencia.

400 *Luego para tirar una tangente al círculo por un punto dado* B, se tirará al tal punto un ra- 35.
dio *CB*, y se levantará en su extremo *B* una perpendicular, la qual será tangente del círculo (397) en *B*.

401 *Si desde un punto* A, *otro que el centro de un círculo, se tiran á la parte de la circunferencia* 36.
mas distante del mismo punto, diferentes rectas AB, AD, AE.

1.° *La recta* AB *que pasa por el centro es la mas* 37.
larga.

2.° *De las dos rectas* AD, AE *que no pasan por el centro, la que tiene su extremo* D *mas inmediato al punto* B *de la que pasa por el centro, es la mas larga.*

Fig. Tírense los radios CD, CE á los extremos de las rectas AD, AE que no pasan por el centro.

Tendrémos 1.° CB igual con CD (314); si á cada una de estas dos lineas añadimos la parte AC, será la linea $AB=AC+CD$; pero como las dos lineas (305) $AC+CD$ juntas son mayores que la linea AD, tambien es AB mayor que AD. Del mismo modo probaremos que AB es mayor que AE, quiero decir, que la recta AB, la que pasa por el centro es mas larga que otra qualquier linea AD ó AE tirada desde el punto A á la circunferencia.

2.° Las lineas CO, OD juntas ó $CO+OD$ son mayores que la linea CD (305); pero $CE=CD$ (314); luego $CO+OD$ es mayor que CE. Si de la CE quitamos OC, y la quitamos tambien de la suma $CO+OD$, la recta OD será mayor que la recta OE. Si á cada una de estas cantidades añadimos la linea AO, será $AO+OD=AD$ mayor que $AO+OE$. Pero $AO+OE$ es mayor que AE; luego con mas razon será AD mayor que AE. Luego &c.

402 *Si desde el punto* A *otro que el centro de un círculo, se tiran á la parte de la circunferencia mas*
36. *cercana á dicho punto, diferentes rectas* AM, AN,
37. *&c. la linea* AM, *la qual prolongándola pasaria por el centro* C, *es la mas corta.*

Quedará probado que la recta AM es la mas corta si probamos que otra recta qualquiera AN, tirada ~~desde el centro~~ á la circunferencia, cuya prolongacion no pase por el centro; es mas larga que AM.

Tírese el radio CN. Si el punto A está dentro del círculo, las lineas NA, AC juntas son mas largas que la linea NC; pero NC es igual á MC;
36. luego $NA+AC$ es mayor que MC; si de ambas cantidades se quita la linea AC, la resta NA será mayor que MA.

Si

Si el punto A está fuera del círculo, será AN Fig.
$+NC$ mayor que AC; restando de la una parte el radio NC, y de la otra el radio MC, la recta AN 37.
será mayor que la recta AM.

403 Luego 1.° *Desde un punto* A, *otro que el centro* 36.
de un círculo no se pueden tirar á la circunferencia 37.
tres lineas iguales.

Porque no se puede decir que la una de las tres lineas iguales es la que pasa por el centro, pues acabamos de demostrar que es mayor ó menor que qualquiera de las otras. Tampoco puede ser que de las tres lineas iguales, las dos esten al un lado, y la otra al otro, pues las que están de un mismo lado no pueden menos de ser desiguales (401), como no se confundan una con otra.

404 2.° *Si las circunferencias de dos círculos* X *y* Z 38.
se encuentran en dos puntus D, E, *se cortan por precision.*

Porque como los radios CD, CE del círculo X son iguales, están á igual distancia del extremo B (363) de la linea CB, y son mas largos que la CB, y que todas las lineas tiradas al arco DBE (402); luego todo el arco DBE está dentro de la circunferencia del círculo X; luego las dos circunferencias se cortan por precision.

405 3.° *Si dos circunferencias de círculo* X *y* Z 39.
se tocan en un punto B, *dentro ó fuera, los centros* C, G *de los dos círculos, y el punto de contacto* B *estan en una misma linea recta.*

Porque como la linea CB va desde el centro al punto de contacto B, no tiene que salir de la circunferencia del círculo X para encontrar la del círculo Z; luego es la mas corta; luego es perpendicular (362), y por lo mismo pasa por el centro (402). Por consiguiente, quando dos circunferencias se tocan, los centros y los puntos de contacto estan en una misma linea recta.

De

Fig. De aquí, y de lo probado (383) sacarémos la resolucion de las tres cuestiones siguientes, que ocurren con frecuencia en la práctica de la Arquitectura.

40. 406 Cuestion I. *Entre dos paralelas* AB, CD, *trazar con dos arcos iguales un talon derecho ó re-*
41. *verso* BGD *en la salida ó vuelo dado* BK.

Para que los perfiles de estas molduras hagan buena vista, es preciso que el origen y el remate de la curva sean perpendiculares á las lineas *AB*,
40. *CD*, quando el talon es derecho; y que las mismas
41. lineas *AB*, *CD* toquen los mismos extremos, quando el talon es reverso. Luego es preciso que los centros *F* y *L* de los dos arcos esten en las lineas *AB*, *CD* en el primer caso; y que los mismos centros estén en lineas perpendiculares á los extremos *B* y *D* de las mismas *AB*, *CD*, en el segundo caso.

Esto presupuesto, será muy fácil de trazar ca-
40. da una de las dos curvas. Se tirará la *BD*, y se la partirá por medio en *G*; se tirará una perpendicular en medio de *BG*, el punto *F*, donde corte la linea *AB*, será el centro de la primer parte del talon, y el punto *L*, donde la linea *FG* encuentre la *CD*, prolongada, será el centro de la segunda parte.

Para trazar el talon reverso, el punto *F* se tomará en el punto de interseccion de la perpendi-
41. cular al medio de *BG* con la que está en el extremo de *AB*, y el punto *L* se determinará tomando la *GL*=*GF*, en la prolongacion de esta misma linea.

407 Tambien se suelen trazar el talon derecho y el reverso del modo siguiente. Despues de tirar
42. la *BD*, y partida por medio en *G*, se planta en
43. *G* la una punta del compas, y con una abertura *GB*=*GD* se trazan dos arcos de círculo *BF*, *DL*; con la misma abertura de compas *GB*, y desde los centros *B*, *D*, se trazan otros arcos *GF*, *GL* que cor-

corten los primeros en *F* y *L* donde estarán los cen- Fig.
tros de las dos partes de la curva. Poniendo, pues, la una punta del compas primero en *F*, y despues en *L*, con la abertura *FG* se trazan los dos arcos *BG* y *GD*, los quales componen juntos el perfil del talon derecho y reverso.

Esta práctica es tenida por defectuosa en el concepto de algunos dibujantes de Arquitectura; porque en el talon derecho los arcos *GB* y *GD* no son 42.
perpendiculares á las lineas *AB*, *CD*; y en el re- 43.
verso, porque los arcos *GB* y *GD* no tocan las lineas *AB* y *CD*, si las cortan, cuyos dos defectos si no se enmiendan á mano, no pueden menos de quitar al perfil toda su gracia.

408 Cuestion II. *Entre dos paralelas* AB, DE *trazar una escocia* BFKME. 44.

Desde los puntos *B* y *E*, que han de ser los extremos de la escocia, bájese la perpendicular *Bb*, y levántese la perpendicular indefinita *EO*. Tómese en la *Bb* su tercio *CB*, y trácese el quadrante de círculo *BF*; hecho esto, prolónguese la *CF* como su quarta parte, y con el radio *GF* trácese á arbitrio otro arco *FK*, que remate en *K*. Tómese despues la linea *IK*, tambien mayor que *GF*, llévesela desde *E* á *L*, y despues de tirar la linea *IL*, levántese en su medio una perpendicular que cortará la *EL* en un punto *O*. Tírese finalmente la *OI* indefinita; desde los centros *I*, *O*, con los radios *IK*, *OE* trácense los arcos finitos *KM*, *ME*, y quedará trazada la escocia.

409 Algunos facultativos apelan para trazar la escocia al método siguiente. Desde el punto *B*, extremo alto de la escocia, bajan á la *DE* la perpen- 45.
dicular *Bb*, y la parten por medio con la recta indefinita *FCG*. Desde *C*, punto medio de la *Bb*, como centro, y con el radio *CB* trazan el arco *BF*, Des-

Fig. Desde el punto F, donde este arco encuentra la FC, tiran al extremo E de la escocia la recta FE, y la parten por medio con la perpendicular HI; y desde el punto G, donde la HI encuentra la FC prolongada, trazan con la abertura GF el arco FDE, el qual concluye el perfil de la escocia.

Aunque la escocia trazada por este método tiene mucha gracia, padece no obstante el inconveniente de que por meterse el arco FDE dentro del listel DE, el canto E del listel forma un ángulo muy agudo, y corre por lo mismo la contingencia de rozarse y esportillarse con gran facilidad; este es el motivo por que se deja plana una parte EK del listel, retirando adentro el principio de la escocia.

410 Cuestion III. *Sobre una linea dada* AD, *inclinada al orizonte trazar un arco rapante* AFD *con dos aberturas de compas.*

Tírese la orizontal AB, que remata en el punto
46. B, donde acaba la perpendicular bajada desde el punto D; levántese en el punto C, medio de AD, la vertical CF, haciéndola igual con la CA, y tírese la AF; por el medio K de esta linea, y el punto C, tírese la KCG perpendicular en medio de AF, y desde el centro G, donde corta la orizontal AB, y con el radio GA trácese el arco AF. Finalmente, se tirará la DO, paralela á AB, la qual encuentra la FG en O; desde este centro O trácese el arco FD, el qual concluirá el arco rapante que se pide.

De los Ángulos considerados en el círculo.

411 *El ángulo* ETA *que una tangente forma con una cuerda, tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtende.*

47. Tírese por el centro C el diámetro BD, parale-

lelo á la cuerda AT, y el diámetro FH perpendicular á la misma cuerda; el ángulo ETC, que Fig.
forma la tangente con el radio, será recto, pues el radio TC es perpendicular á la tangente (398); es tambien recto el ángulo FCD; luego el quadrante de círculo FD es la medida de cada uno de dichos ángulos; pero el ángulo $ETA=ETC-ATC=ETC-DCT$ (porque ATC, TCD son alternos internos) (373). Y como el ángulo TCD tiene por medida el arco TD, síguese que ETA tiene por medida el arco TF, mitad del arco TFA (384). Luego &c.

412 Los dos ángulos juntos ETA, MTA valen 47.
(343) dos ángulos rectos; luego tienen por medida la mitad del círculo, ó la mitad de TFA mas la mitad de AHT; pero el ángulo ETA tiene por medida (411) la mitad de TFA; luego MTA tiene por medida la mitad del arco AHT.

413 *El ángulo* DTE, *cuyo vértice está en la cir-* 48.
cunferencia, formado del concurso de dos cuerdas DT, TE; *tiene por medida la mitad del arco* DE *que sus dos lados abrazan.*

Tírese por el vértice T la tangente AB; la suma de los tres ángulos BTE, ETD, DTA vale 180° (343); luego estos ángulos tienen por medida una semicircunferencia, ó la mitad de TE mas la mitad de ED mas la mitad de DGT; pero (411) el ángulo ATD tiene por medida la mitad de DGT, y el ángulo BTE tiene por medida la mitad de TE; luego el ángulo ETD tiene por medida la mitad del arco ED que sus lados abrazan.

414 De la última proposicion se sigue, 1.° *el ángulo del centro* DCE *que coge el arco* DE, *es du-* 48.
plo del ángulo inscripto DTE *que coge el mismo arco.*

Porque la medida del ángulo del vértice tiene por medida la mitad del arco que mide el ángulo central.

2.°

Fig. 415 2.° *Que todos los ángulos* BAE, BCD, BDE *cuyo vértice está en la circunferencia, y cogen con*
49. *sus lados un mismo arco* BE, *ó arcos iguales, son iguales.*

Porque el valor de cada uno es la mitad del mismo arco *BE* (413).

50. 416 3.° *Que todo ángulo* ABD, *cuyo vértice está en la circunferencia y cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro, es recto ó de* 90°.

Porque tiene por medida la mitad (413) de la semicircunferencia.

50. 417 4.° *Que todo ángulo* ABC *que coge un arco* AEC *mayor que la semicircunferencia es obtuso, y todo ángulo* ABE *que coge menos de la semicircunferencia es agudo.*

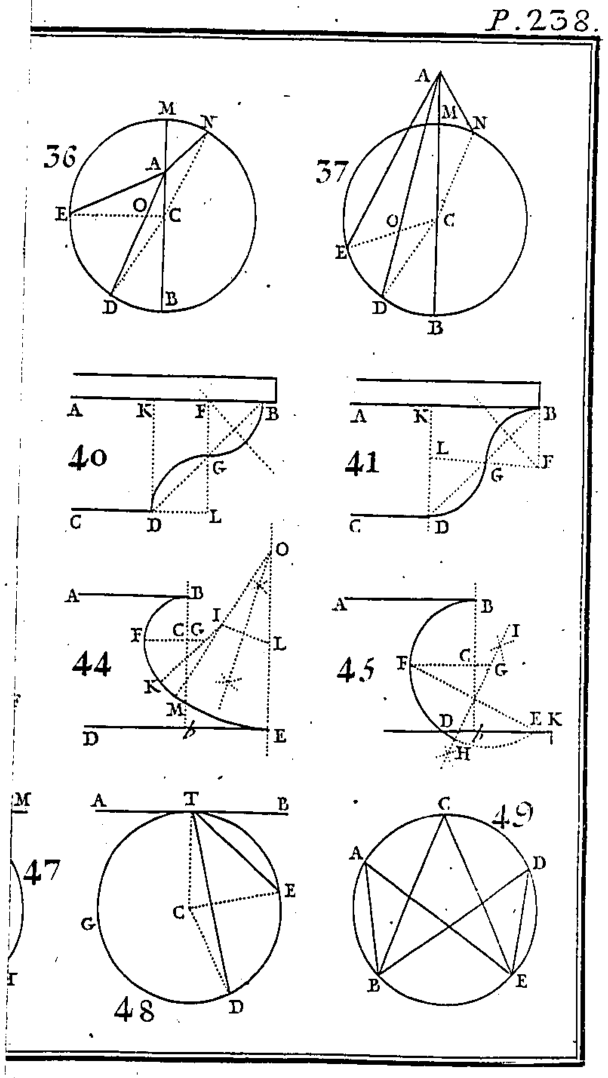
Porque el primero tiene por medida la mitad de un arco mayor que la semicircunferencia, y el otro la mitad de un arco menor que la semicircunferencia.

51. 418 *El ángulo* BAD *cuyo vértice no está en el centro, sí dentro del círculo, tiene por medida la mitad de la suma de los arcos que cogen sus dos lados, prolongándolos, si es necesario.*

Por el punto *F* tírese la *FH* paralela á *CD*; los ángulos *BAD*, *BFH* serán iguales (372); pero el ángulo *BFH* tiene por medida (413) la mitad de *BDH*, ó la mitad de *BD* mas la mitad de *DH*, lo mismo que la mitad de *BD* + la mitad de *CF*, porque los arcos que están entre unas mismas paralelas son iguales (388).

52. 419 *El ángulo* BAC *cuyo vértice está fuera del círculo, y cuyos lados rematan en la parte cóncava de la circunferencia, tiene por medida la mitad del*
52. *arco cóncavo* BC *que sus lados cogen, menos la mitad del arco convexo* ND.

Tírese *MN* paralela á *AC*; los ángulos *CAB*, *MNB*



MNB son iguales (372); pero el ángulo *MNB* tiene por medida la mitad de *MB* (413), y $MB = BC - MC = CB - ND$, por ser paralelas *MN*, *CD* (388); luego $\frac{MB}{2} = \frac{CB}{2} - \frac{DN}{2}$. Fig.

420 *El ángulo* EFB *cuyo vértice está en la circunferencia, formado por una cuerda* BF, *y la prolongacion* EF *de otra cuerda* FH, *tiene por medida la semisuma, quiero decir, la mitad de la suma de los arcos que las dos cuerdas subtenden.* 53.

Porque los ángulos *BFH*, *BFE* valen juntos dos ángulos rectos (343) y tienen por medida la mitad de toda la circunferencia; pero el ángulo *BFH* tiene por medida la mitad del arco *BDH* (413); luego el ángulo *EFB* tiene por medida $\frac{HF}{2} + \frac{FCB}{2}$.

421 *El ángulo* BAC *formado por una tangente* AB *y una secante* AC *tiene por medida la mitad del arco concavo* TFC, *menos la mitad del arco convexo* TD *que sus dos lados cogen.* 54.

Porque, si desde el punto de contacto *T* se tira la cuerda *TE* paralela á la secante *AC*, el ángulo *BTE* tendrá por medida (411) la mitad del arco $TFE = TFC - EC = TFC - TD$ (388). Y como, por razon de las paralelas *ET*, *AC*, el ángulo *BTE* es igual al ángulo *BAC* (372), síguese que este tendrá tambien por medida la mitad del arco $TFC - TD$.

De las propiedades demostradas de los ángulos en el círculo sacamos:

422 1.º Un método *para levantar una perpendicular en el extremo* B *de una linea* AB *que no se puede prolongar.* 55.

Desde un punto *C* qualquiera, fuera de la linea da-

Fig. dada, y con el radio *BC* se trazará un círculo; por el punto *A*, donde este círculo corta la linea dada, y el centro *C*, se tirará el diámetro *AD*, y por los puntos, *D*, *B*, la *BD* la qual será la perpendicular que se pide.

Porque como el ángulo coge el diámetro, no puede menos de ser recto (416).

423 2.° *Para tirar dos tangentes á un círculo*
56. *desde un punto dado* A *fuera del círculo.*

Pártase por medio en *E* la distancia *AC* que hay entre el centro del círculo dado y el punto *A*; desde el centro *E* y con el radio *EA* trácese un círculo *BAD*; por los puntos *D*, *B* donde el último círculo corta el círculo dado, y por el punto *A* tírense las lineas *AD*, *AB*; estas serán tangentes del círculo *C*.

Porque si se tiran los radios *CD*, *CB*, los ángulos *ADC*, *ABC* cogerán el diámetro *AC*; luego serán rectos (416); luego las lineas *AD*, *AB* serán perpendiculares á los radios *CB*, *CD* (350); luego serán tangentes del círculo (397) dado.

424 3.° *Para trazar sobre una linea dada* BD *una porcion de círculo capaz de un ángulo dado* qrs; *quiero decir, una porcion de círculo tal, que todos*
57. *los ángulos* BAD *cuyo vértice esté en la circunferencia del tal círculo, y cojan el arco cuya cuerda es* BD, *sean iguales al ángulo dado* qrs.

Fórmese en el uno de los extremos de la linea dada *BD* (334) el ángulo *DBF* igual al ángulo dado *qrs*; levántese á la *BF* una perpendicular indefinita *BC*, y en medio de *BD* otra perpendicular *CI* que corte la primera en algun punto *C*; este será el centro del círculo que se pide.

Porque como el ángulo *DBF* es, por construccion, igual al ángulo *qrs*, y al mismo tiempo sus dos lados son respectivamente una tangente y una cuer-

cuerda, su medida será (411) la mitad del arco *BID* que sus lados cogen; pero otro ángulo qualquiera *BAD*, cuyo vértice esté en la circunferencia y los lados cojan el mismo arco, tendrá tambien la misma medida (413); luego será igual al ángulo dado *qrs*. Fig.

425 La última proposicion sirve para *determinar la posicion de uno ó muchos puntos, sean los que fueren, con tal que se sepa que ángulos forman los rayos visuales que desde dichos puntos van á tres objetos de posicion conocida.*

Supongamos v. gr. que se nos ofrezca determinar la posicion de una roca *D* la qual está á cierta distancia de la costa, y sabido el valor de los ángulos *ADC*, *BDC* que forman los rayos visuales *DA*, 58.
DB, *DC* los quales desde el punto *D* van á parar á tres objetos, cuya posicion es conocida en el mapa. Se tirarán con esta mira las lineas *AB*, *BC*, sobre las quales se trazarán porciones de círculo capaces de los ángulos dados *ADB*, *BDC*. Claro está que el punto cuya posicion queremos determinar en el mapa estará en la interseccion comun de las circunferencias *ADB*, *BDC*.

De las lineas que cierran un espacio, ó de las figuras planas.

426 Llámase en general, *figura* un espacio terminado, ó cerrado por todas partes; por cuyo motivo en toda figura hay dos cosas que considerar, es á saber, las lineas que la forman, cuyo conjunto se llama *ámbito*, *contorno*, ó *perímetro* de la figura, y el *espacio*, *area* ó *superficie* que el perímetro encierra. Ahora solo considerarémos el primero de estos dos puntos, dexando para mas adelante la consideracion del otro.

Fig. 427 Las *figuras planas*, las únicas que consideraremos en estos principios, no se distinguen del plano, cuya definicion dimos ya en otro lugar (300).

428 Las *figuras curvas* son las que no tienen todos sus puntos tan altos ó tan baxos unos como otros; la superficie de una bola es una figura curva.

429 Las *figuras mixtas* son todas aquellas que en parte son planas, y en parte curvas.

430 Como el perímetro de una figura plana puede componerse de lineas rectas, curvas, ó mixtas, se distinguen las figuras en *rectilineas*, *curvilineas* y *mixtilineas*. Por ahora tratarémos de las rectilineas no mas; y entre las curvilineas solo harémos mencion del círculo.

431 Las figuras que tienen sus perímetros de igual extension, se llaman figuras *isoperímetras*.

59. 432 Decimos de una figura *ABCD* que está *inscripta* en un círculo, ó de un círculo que está *circunscripto* á una figura, quando todos los ángulos de la figura estan en la circunferencia del círculo.

Llamamos círculo *inscripto* en una figura, ó figura

60. *circunscripta* á un círculo *ABCDE*, aquella cuyos lados son todos tangentes del círculo.

433 Finalmente, llamamos *diagonal* toda linea que desde uno de los ángulos de la figura va á parar

59. á otro ángulo opuesto; *AD*, v. gr. es una diagonal de la figura *ABCD*.

De los Triángulos, y de su igualdad.

434 Para terminar ó cerrar un espacio se necesitan

61. por lo menos tres lineas rectas *AB*, *AC*, *BC*; entonces el espacio se lama *triángulo rectilineo*, y las tres lineas que le forman se llaman *lados del triángulo*.

435 En todo triángulo hay que considerar sus lados, y sus ángulos.

Por

436 Por razon de los lados puede haber tres especies de triángulos; es á saber Fig.

1.° *El triángulo equilátero*, y es el que tiene iguales sus tres lados. 61.

2.° *El triángulo isósceles*, y es el que solo tiene iguales dos lados. 62.

3.° *El triángulo escaleno*, y es el que tiene desiguales todos sus tres lados. 63.

437 Por razon de los ángulos se distinguen los triángulos en

1.° *Triángulo rectángulo*, y es el que tiene recto uno de sus ángulos. El lado opuesto al ángulo recto se llama *hypotenusa*; *AC* es la hypotenusa del triángulo *ABC* rectángulo en *B*. 64.

2.° *Triángulo acutángulo*, y es el que tiene sus tres ángulos agudos. 62.

3.° *Triángulo obtusángulo*, y es el que tiene uno de sus ángulos obtuso. 63.

438 Es prática general llamar *base* del triángulo su lado inferior *AC*, bien que se puede considerar como base qualquiera de los demas lados. 61.

439 Una linea *BD* tirada desde el vértice de un ángulo perpendicular á la base *AC*, ó á su prolongacion ó al lado opuesto, se llama *altura del triángulo*. 62. 63.

440 De la definicion del triángulo se sigue que la *suma de los dos lados de todo triángulo es siempre mayor que el tercer lado*. *AB*+*BC* v. gr. va le mas que *AC*. 64. 63. 64.

Porque como *AC* es la linea recta que va desde *A* á *C*, es el camino mas corto (305) que va desde el uno de los dos puntos al otro.

441 Quedó probado (389) que por tres puntos dados, como no esten todos en una misma recta, se puede trazar una circunferencia de círculo.

Síguese de aquí *que por los vértices de los tres ángulos de un triángulo se puede trazar siempre que* se

Fig. *se quiera una circunferencia de círculo.* De aquí inferiremos

442 1.° Que *quando dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos á dichos ángulos son tambien iguales*; y recíprocamente, *quando dos lados de un triángulo son iguales, los ángulos opuestos á los lados son tambien iguales.*

Porque si trazamos una circunferencia por los tres ángulos A, B, C, quando los ángulos ABC, ACB
65. son iguales, los arcos ADC, AEB cuyas mitades son su medida (413) serán iguales; luego las cuerdas AC, AB serán iguales (321). Y recíprocamente, quando los lados AC, AB son iguales, los arcos ADC, AEB son iguales; luego los ángulos ABC, ACB, que tienen por medida la mitad de estos arcos, serán iguales.

443 Luego *los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales, valiendo por lo mismo cada uno de los tres el tercio de* 180°, ó 60.°

444 2.° Que *en un mismo triángulo* ABC *el mayor lado está opuesto al mayor ángulo*; y recíprocamente.

65. Porque si el ángulo ABC es mayor que el ángulo ACB, el arco ADC será mayor (413) que el arco AEB, y por consiguiente la cuerda AC mayor que la cuerda AB (322). La recíproca se demuestra del mismo modo.

65. 445 *En todo triángulo* BAC *la suma de los tres ángulos vale dos ángulos rectos.*

Porque si al triángulo se le circunscribe un círculo (431), cada uno de los ángulos del triángulo tendrá por medida la mitad del arco que sus lados cojan (413); luego los tres ángulos juntos tendrán por medida la mitad de la suma de los tres arcos que sus tres lados cojan, ó la mitad de toda la circunferencia, cuya mitad vale 180°; luego valen dos ángulos rectos.

De

446 De la última proposicion inferiremos Fig.

1.° Que *en ningun triángulo puede haber mas de un ángulo recto, ó un ángulo obtuso, habiendo de ser por precision agudos los otros dos.* Porque á no ser así, habria triángulos cuyos tres ángulos valdrian mas de 180°, y esto no puede ser.

447 2.° Que *en conociendo dos ángulos de un triángulo, es conocido el tercero, el qual vale lo que les falta á los otros dos para valer* 180°. *Y en conociendo un ángulo, es conocida la suma de los otros dos*, y es lo que le falta al primer ángulo para los 180°.

448 3.° Que *si en un triángulo* ABC *prolongamos* 66.
el lado BC, *el ángulo externo* ACD *será igual á la suma de los dos internos* A, B, *opuestos á dicho lado.*

Porque $ACD+ACB$ vale 180° (343); pero $CAB+ABC+ACB$ vale (345) tambien 180°, luego restando de estas dos sumas iguales el ángulo ACB, quedará $ACD=CAB+ABC$.

449 4.° Que *quando dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, el tercer ángulo del un triángulo es igual al tercer ángulo del otro*; porque los tres ángulos de cada triángulo valen juntos 180° (447).

450 5.° Que *en todo triángulo rectángulo los dos ángulos agudos son complemento uno de otro.*

Porque quando uno de los tres ángulos de un triángulo vale 90°, los otros dos juntos han de valer tambien 90° (447).

451 *Dos triángulos son iguales uno con otro siempre que los tres lados del uno son iguales á los tres lados del otro.*

Sea $AB=ab$, $AC=ac$, $BC=bc$. Desde los centros 67.
A y B, y con los radios AC, BC trácense unos arcos mn, op que se corten en C, sobrepóngase el lado ab al lado AB, el punto a al punto A, y el punto b al punto B. Por ser $AC=ac$, y $BC=bc$, tendrá

 la

Fig. la linea *ac* su extremo *c* en algun punto del arco *mn*, la linea *bc* tendrá tambien su extremo *c* en algun punto del arco *op*, luego las dos lineas se juntarán en el punto *C*, interseccion de los dos arcos; luego el punto *c* caerá sobre el punto *C*, y los dos triángulos se confundirán uno con otro; luego serán iguales.

452 *Dos triángulos son iguales, quando tienen un lado igual á un lado adyacente á dos ángulos iguales, cada uno al suyo.*

67. Sea $AB=ab$, $A=a$, $B=b$; sobrepóngase el lado *ab* á *AB*. Por ser el ángulo *a* igual al ángulo *A*, y el ángulo *b* igual al ángulo *B*, el lado *ac* caerá (329) sobre *AC*, y el lado *bc* sobre *BC*; luego los dos lados *ac*, *bc* se encontrarán en el punto *C*, y los dos triángulos se confundirán; luego serán iguales.

453 *Dos triángulos son iguales siempre que tienen dos lados iguales cada uno al suyo, é igual el ángulo que dichos lados forman.*

67. Sea el ángulo *A* igual al ángulo *a*, $AB=ab$, $AC=ac$. Sobrepóngase *AB* á *ab*, y *AC* á *ac*, cosa muy posible (329) por ser iguales uno con otro los ángulos *A* y *a*; los dos lados se confundirán uno con otro; el punto *C* se confundirá con el punto *c*, y el punto *B* con el punto *b*. Luego *CB* se confundirá con *bc*; luego los dos triángulos se confundiran uno con otro, y por consiguiente serán iguales.

454 De las tres últimas proposiciones se sacan tres métodos para otras tantas operaciones distintas.

1.° Un método *para trazarun triángulo* ABC *cuyos lados sean iguales á los de otro triángulo* abc.

67. Se toma $AB=ab$; desde el centro *A*, y con un radio $=ac$, segundo lado conocido, y desde el centro *B* con otro radio $=bc$, tercer lado conocido, se trazan dos arcos *mn*, *op* que se cortan en *C*, y con tirar las *CA*, *CB*, queda trazado el triángulo que se pide.

455 Esto manifiesta lo que se ha de egecutar para hacer *un triángulo con la circunstancia de que sus tres lados sean respectivamente iguales á tres lineas dadas*; y tambien el modo de *formar un triángulo equilátero sobre una linea dada* AB.

Desde los centros *A* y *B*, y con un radio *AB* 68. se trazarán arcos que se corten en *C*, y con tirar las lineas *AC*, *BC* quedará trazado el triángulo equilátero pedido.

456 2.° Para *hacer un triángulo* ABC *que tenga un lado* AB *igual á una linea dada, y los ángulos adyacentes al tal lado iguales á dos ángulos dados.*

Sobre la *AB* se formará el ángulo *B* igual al uno 67. de los ángulos dados, y el ángulo *A* igual al otro ángulo dado (334); los lados *AC*, *BC* se juntarán en *C*, y quedará trazado el triángulo pedido.

457 Quando *se quiera construir un triángulo* ABC, *en conociendo dos lados, y el ángulo que for-* 67. *man*, se hará el ángulo *A* igual al ángulo dado, y los lados *AB*, *AC* respectivamente iguales á los lados dados; se tirará la *BC*, y quedará formado el triángulo que se pide.

De los Quadriláteros.

458 Llamamos *quadrilátero* una figura terminada por quatro lineas rectas.

459 Una figura quadrilátera *ABCD* que no tie- 69. ne lado alguno paralelo á otro se llama *trapezoide*.

460 Quando el quadrilátero tiene dos lados no mas paralelos, como *AD* y *BC*, se llama *trapecio*. 70.

461 Y finalmente se llama *paralelógramo* el quadrilátero *ABCD* que tiene paralelos sus lados 71. opuestos.

462 Infiérese de aquí que puede haber quatro especies de paralelógramos que se distinguen con nombres particulares.

Q 4 Quan-

Fig. 1.° Quando los ángulos y lados contiguos del
71. paralelógramo son desiguales, se le llama *romboide*.
72. 463 2.° Quando los lados del paralelógramo son iguales, y desiguales sus ángulos, se le llama *rombo*.
73. 464 3.° Quando todos los ángulos del paralelógramo son rectos y por consiguiente iguales, y desiguales los lados contiguos, se le llama paralelógramo *rectángulo*.
74. 465 4.° Finalmente, quando el paralelógramo tiene iguales sus lados y sus ángulos, se le llama *quadrado*.
71. 466 El lado inferior AD de todo quadrilátero se llama *base* del quadrilátero.
72. 467 Y se llama *altura* del quadrilátero toda perpendicular BE tirada á la base, ó á su prolongacion desde el lado opuesto.

468 *Todos los ángulos juntos de un quadrilátero*
70. ABCD *valen quatro ángulos rectos.*

Porque si tiramos la diagonal AC, esta partirá el quadrilátero en dos triángulos, cuyos ángulos son los mismos que los del quadrilátero; pero todos los ángulos juntos de cada triángulo valen dos ángulos rectos (445); luego todos los ángulos juntos del quadrilátero valen dos veces dos ángulos rectos, ó quatro ángulos rectos.

469 *Si los dos lados opuestos* AB, CD *de un qua-*
75. *drilátero* ABCD *fueren iguales y paralelos, tambien serán iguales y paralelos los otros dos lados* AD, CB.

Porque, si tiramos la diagonal AC, el ángulo BAC será igual al ángulo DCA (373), y los dos triángulos ABC, ADC tendrán un ángulo igual á un ángulo, el lado AB igual al lado DC por el supuesto, y el lado AC comun; luego los dos triángulos serán iguales (453), y tendrán iguales los lados AD, BC, y el ángulo BCA igual al ángulo DAC; luego (377) AD y BC serán paralelos.

La

470 *La diagonal* AC *de un paralelógramo* ABCD Fig.
le divide en dos triángulos iguales.

Porque los dos triángulos ABC, ADC tienen el 75.
ángulo DAC igual al ángulo ACB (373), el ángulo DCA igual al ángulo BAC, y el lado AC es comun á ambos triángulos; luego los dos triángulos son iguales (452); luego, &c.

471 De aquí hemos de inferir que *las partes* AD, BC *de dos paralelas interceptadas entre otras dos paralelas* AB, DC, *son iguales.*

Porque, como, segun suponemos, AB y DC, 76.
AD y BC son paralelas, la figura $ABCD$ es (461) un paralelógramo, y por consiguiente la diagonal AC le divide en dos triángulos iguales (470), los quales tendrán todos sus tres lados iguales, cada uno al suyo; luego $AD=BC$.

472 *En todo paralelógramo* ABCD *los ángulos* 75.
opuestos A *y* C, B *y* D *son iguales, y son tambien iguales los lados opuestos* AD *y* BC, AB *y* DC.

Porque como los lados AD y BC son paralelos por la naturaleza del paralelógramo, los ángulos D y BCD valen juntos dos ángulos rectos (376), y por la misma razon BAD y D juntos valen otros dos ángulos rectos; luego BAD y BCD tienen por suplemento el mismo ángulo D; luego son iguales (342). Del mismo modo se demostrará que B y D son iguales.

La segunda parte de la proposicion queda probada antes (471), una vez que son paralelos de dos en dos los lados opuestos de un paralelógramo.

473 De aquí se infiere, 1.° que *quando en un pa-* 73.
ralelógramo es recto uno de los ángulos, A *v. gr. lo son todos los demas.*

Porque si C es recto, una vez que es suplemento de D (376), D será tambien recto; pero C es igual con su opuesto A (472), y D es igual con su opuesto B; luego todos los quatro ángulos son rectos.

Que

Fig. 474 2.° Que *quando dos lados* AD, AB *de un paralelógramo contiguos ó adyacentes á un ángulo* A *son iguales, los quatro ángulos son todos iguales.*

74. Porque *AD* es igual á su opuesto *BC* (472), y como *AD*=*AB*, síguese que *BC*=*AB*, es igual á su opuesto *CD*; luego los quatro ángulos son todos iguales.

475 3.° Que las propiedades de los paralelógramos son 1.ª *que sus lados opuestos sean paralelos* (461); 2.ª que *los lados opuestos sean iguales* (472); 3.ª que *sean iguales los ángulos opuestos* (472).

Luego, para saber si una figura de quatro lados es un paralelógramo, basta saber si concurre en ella alguna de las tres circunstancias expresadas.

476 En la primera de las tres se funda un método para *formar un paralelógramo que tenga uno de sus ángulos igual al ángulo dado* a, *formado por las dos lineas* ad, ab *de longitud señalada, ó, lo que es lo mismo, dadas de magnitud.*

Se tomará *AB*=*ab*, y en el punto *A* se formará el ángulo *DAB* igual al ángulo dado *a*; se hara *AD*=*ad*, y por el punto *D* se tirará la *DC* paralela á *AB*; finalmente, por el punto *B* se tirará la *CB* paralela á *AD*, y quedará concluido el paralelógramo.

477 Si el ángulo dado fuese de 90°, el paralelógramo será rectángulo (464); y si en el mismo supuesto fuese *ad*=*ab*, será un quadrado (465).

De los Polígonos.

478 Llámase *Polígono* toda figura cerrada ó terminada por mas de quatro lados. Quando el polígono tiene cinco lados se llama *pentágono*; quando tiene seis, se llama *exágono*; quando siete, *eptágono*; y se llama *octogono*, *eneágono*, *decágono*, *undecágono*, *dodecágono*, quando tiene ocho, nueve, diez, once, ó doce lados.

Fig.

479 *Polígono regular* se llama el que tiene iguales unos con otros todos sus ángulos, y todos sus lados; y se llama *polígono irregular* quando no son iguales, ni todos sus ángulos, ni todos sus lados. 78.

480 Se llama *ángulo saliente* de un polígono todo ángulo cuyo vértice está fuera de la figura; los ángulos *A*, *B*, *D* &c. son salientes. 78.

481 Y se llama *ángulo entrante* el ángulo cuyo vértice se mete dentro de la figura *CDE* es un ángulo entrante. 79.

482 Llamamos *radios rectos* ó *apotemas* de un polígono las perpendiculares *CP*, *CQ*, baxadas desde el punto medio ó céntrico del polígono á sus lados. 78.

Y se llaman *radios obliquos* las lineas *CB*, *CA* tiradas desde el centro á los ángulos del polígono.

483 Si desde un punto *C* dentro de un polígono, se tiran lineas á todos los ángulos, es patente que se originarán tantos triángulos quantos lados tenga el polígono; luego *todo polígono puede dividirse en tantos triángulos como lados tiene.* 78.

484 Y si desde uno de los ángulos de un polígono se tiran diagonales á todos los ángulos, menos á los dos inmediatos, el polígono quedará dividido en tantos triángulos, menos dos, como lados tiene. 79.

485 Luego 1.° *la suma de todos los lados interiores de un polígono vale tantas veces* 180°, *menos dos, quantos lados tiene.*

Porque como los ángulos de todos los triángulos *ACB*, *BCD*, *DCE* &c. en que está dividido el polígono, valen tantas veces 180° como lados hay (445); si de la suma se restan 360°. ó dos veces 180°, valor de todos los ángulos que forman en el centro los vértices de los triángulos (344), la resta será la su- 78.

Fig. suma de todos los ángulos interiores del polígono.

La misma propiedad se verifica en todo polígono que esté dividido desde uno de sus ángulos; porque como la suma de los ángulos interiores del po-
79. lígono *ABCDEF* es, sin la menor duda, la misma que la suma de los ángulos de los triángulos *ABC*, *ACD*, &c. en que está dividido el polígono, todos los ángulos del polígono juntos valdrán lo mismo que todos los ángulos juntos de los triángulos que le componen, esto es, tantas veces 180° (445) como lados tiene, menos dos (484).

En esta proposicion entra tambien el ángulo *CDE*, no contándole por la parte *CDE*, sino por la parte *ACDE* compuesta de los ángulos *ADE*, *ADC*; y aunque es un ángulo de mas de 180°, es lo mismo que otro ángulo qualquiera que no llegue á 180°; porque como todo ángulo es la cantidad que una linea recta moviéndose al rededor de un punto fixo se ha apartado de otra, la vuelta que dé, coja mas ó menos de los 180°, siempre debe contarse por ángulo.

78. 486 Luego 2.° *Para saber quanto vale cada ángulo interior de un polígono regular*, se buscará quanto valen juntos todos sus ángulos interiores (485), y su valor total se partirá por el número de los lados. El ángulo de un pentágono regular v. gr. vale 108°; porque como tiene cinco lados, tomaré 180° cinco veces menos dos, quiero decir tres veces, y saldrán 540°, valor de los cinco ángulos interiores; y por ser todos iguales unos con otros, cada uno será la quinta parte de 540.° ó 108°.

78. 487 *Si se dividen por medio los ángulos de un polígono regular, con los radios oblicuos* AC, BC &c. *todos estos radios se encontrarán en* C, *y serán iguales unos con otros.*

Por ser igual el ángulo *A* al ángulo *B*, los ángulos *CAB*, *CBA*, mitades de ángulos iguales, serán iguales, y el triángulo *ABC* será isósceles (442); luego $AC = BC$. Del mismo modo se probará que $BC = DC$ &c.

488 Luego 1.° *Si desde el punto* C, *centro del polígono, y con el radio* CA, *se describe un círculo, resultará un polígono inscripto en el círculo.*

Porque como $AC = BC = DC$ &c. la circunferencia de círculo trazada con el radio *AC* pasará por los vértices de todos los ángulos. 80.

489 2.° *Un polígono regular se puede dividir en tantos triángulos iguales como lados tiene.*

Porque los triángulos *ACB*, *BCD* &c. son todos iguales (451) pues tienen iguales todos sus lados.

490 3.° *El lado* AB *del exágono regular es igual al radio del círculo.*

Porque *AB* es la cuerda de un arco igual á la 80.
sexta parte de la circunferencia; luego el ángulo *ACB* vale 60.°; pero los ángulos *CAB*, *CBA* son iguales (442) uno con otro, por estar opuestos á lados iguales (487); luego cada uno vale 60.°; luego el triáagulo *ABC* tiene iguales todos sus ángulos, y es por lo mismo equilátero (443); luego $AC = AB$.

491 Luego *para inscribir un exágono en un círculo*, bastará llevar el radio seis veces sobre la circunferencia.

492 De aquí se sigue que el *perímetro del exágono regular inscripto en el círculo vale tres veces el diámetro del mismo círculo.*

Y como la circunferencia del círculo es mayor (305) que el perímetro del exágono inscripto, la circunferencia vale mas que el triplo de su diámetro; esto quiere decir que la razon entre la circunferencia y el diámetro es mayor que la razon de 3 á 1, ó que la de 21 á 7.

493 *El radio recto de un polígono regular divide el lado correspondiente en dos partes iguales.*

Por-

Fig.
80. Porque si nos figuramos un círculo circunscripto al polígono propuesto, cada uno de sus lados será una cuerda del mismo círculo, y la dividirá en dos partes iguales (383) la perpendicular tirada desde el centro á dicho lado.

494 Ya que por lo demostrado (487) todos los radios oblicuos son iguales, el triángulo *CAB* es isósceles; luego *la perpendicular bajada desde el vértice de un triángulo isósceles á la basa la divide en dos partes iguales*. Y por consiguiente, la misma perpendicular divide tambien el ángulo *ACB* en dos ángulos iguales; porque los ángulos *ACQ*, *QCB* son ángulos opuestos á lados iguales de triángulos iguales.

Los radios rectos CP, CQ *de un polígono regular son todos iguales unos con otros.*

81. Porque como los triángulos *CQA*, *CQB* tienen cada uno un ángulo recto en *Q*, el lado *AQ*=*QB* (493), y el lado *QC* es comun á ambos, serán iguales (453); por consiguiente el triángulo *CQA* será mitad del triángulo *ACB*. Del mismo modo probarémos que el triángulo *CPA* es mitad del triángulo *ACF*; pero *ACB* y *ACF* son iguales (489); luego sus mitades *CPA*, *CQA* son tambien iguales; luego finalmente *CP*=*CQ*.

Del mismo modo se probará la igualdad de los demas radios rectos.

81. 495 Luego 1.º *Para inscribir un círculo en un polígono regular dado*; desde el centro del polígono, y con un radio igual á un radio recto *CP*, se trazará una circunferencia, la qual tocará todos los lados del polígono; pues siendo la *CQ* perpendicular á la *AB*, esta *AB* será tangente de la circunferencia (397) que pasa por el extremo de *CQ*.

81. 496 Luego 2.º *El radio oblicuo* CA *de un polígono regular divide el ángulo* PAQ *del polígono en dos partes iguales.*

Por-

Porque siendo *CP*=*CQ* (495), el ángulo en *P* igual al ángulo en *Q*, y el lado *AC* comun á los dos triángulos *CAP*, *CAQ*; estos serán de todo punto iguales (453), y será el ángulo *CAP* igual al ángulo *CAQ*. Fig. 81.

497 *Entre todos los polígonos regulares inscriptos en un mismo círculo, el perímetro del polígono que mas lados tiene es mayor que el perímetro del polígono que menos lados tiene.* El perímetro de un pentágono v. gr. inscripto en un círculo, es mayor que el perímetro de un quadrado inscripto en el mismo círculo.

Porque como la circunferencia del círculo es mayor que el perimetro de qualquier polígono inscripto (305), quanto mas se acerque á la circunferencia el perímetro de un polígono inscripto, tanto mayor será su perímetro. Pero el perímetro del pentágono se arrima mas á la circunferencia que no el perímetro del quadrado, pues los lados del pentágono son cuerdas menores que los lados del quadrado, y quanto menores son las cuerdas, tanto menos se diferencian de los arcos cuyos son; luego el perímetro del pentágono es mayor que el perímetro del quadrado.

498 *Entre todos los polígonos regulares circunscriptos á un mismo círculo ó á círculos iguales, el que mas lados tiene tiene el menor perímetro.*

Porque como la circunferencia de un círculo es menor que el perimetro de todo polígono circunscripto; quanto mas el polígono circunscripto se acerque á la circunferencia, tanto menor será su perímetro. Pero el perímetro del polígono se acerca tanto mas á la circunferencia, quantos mas lados tiene, pues siendo estos lados tangentes, se apartan tanto menos de la circunferencia quanto menores son; luego quantos mas lados tiene un polígono circunscripto, tanto menor es su perímetro.

Si-

Fig. 499 Síguese de aquí que si un polígono, inscripto ó circunscripto al círculo, tuviese una infinidad de lados, su perímetro se acercará infinitamente á la circunferencia, y se confundirá con ella, y por lo mismo se podria tomar por la circunferencia misma; luego *se puede considerar el círculo como un polígono de una infinidad de lados.*

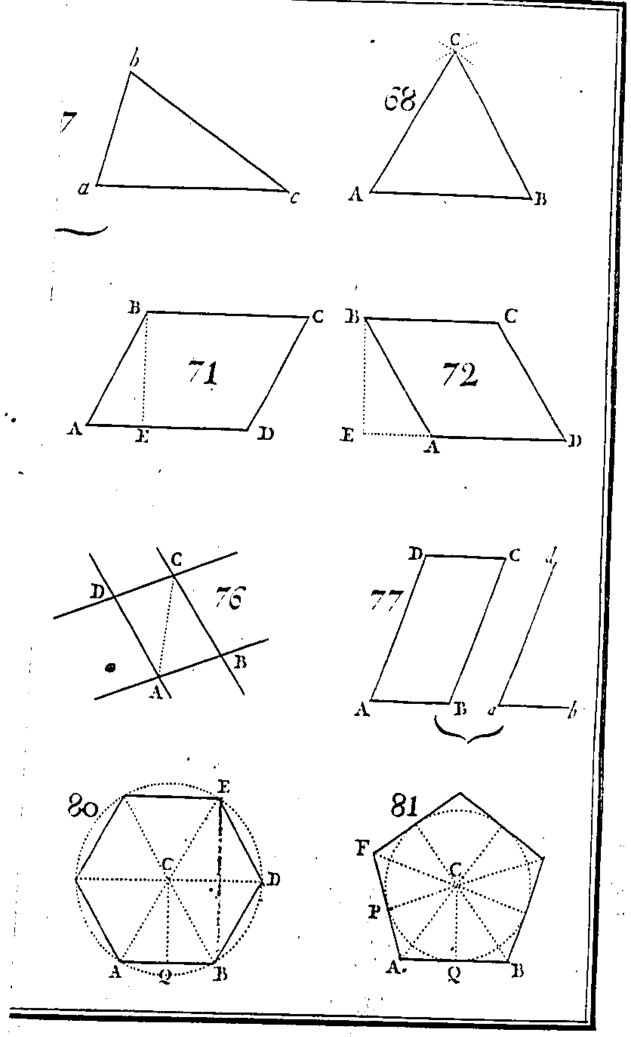
De las lineas proporcionales.

500 *Si en una linea recta* AV *que con otra linea* AZ *forma un ángulo qualquiera* VAZ, *se toman las par-*
82. *tes iguales* AB, BC, CD, DE, *y por los puntos de division* B, C, D, E *se tiran las paralelas* BF, CG, DH, EI *que encuentran la* AZ *en los puntos* F, G, H, I, *y por estos puntos se tiran paralelas á* AV *las rectas* FS, GT, HX; &c. 1.° *todas las partes* AF, FG, GH, HI *de la recta* AZ *serán iguales unas con otras*; 2.° *todas las partes* EM, MO, OP, PI *de la* EI *serán tambien iguales unas con otras.*

Porque 1.° $AB = BC$ por lo supuesto, y por ser $BCKF$ un paralelógramo será (472), $FK = BC$; luego $KF = AB$. Pero por razon de las paralelas FS, AV, el ángulo KFG es igual (372) al ángulo BAF, y el ángulo FKG igual al ángulo ACG; y por razon de las paralelas CG, BF, el ángulo ACG es igual al ángulo ABF. Luego el ángulo FKG es igual al ángulo ABF. Por consiguiente los dos triángulos FKG, ABF que tienen un lado igual adyacente á dos ángulos iguales, serán de todo punto iguales (452); luego $FG = AF$. Del mismo modo se demostrará que el triángulo GNH es igual al triángulo FKG, y el triángulo HPI igual al triángulo GNH; luego todas las partes AF, FG, GH, HI de la recta AZ son iguales unas con otras.

2.° En el paralelógramo $BCKF$, $BF = CK$ (472); y

P. 256.



y como los dos triángulos ABF, FKG son de todo punto iguales, el lado $KG=BF$, y por lo mismo $KG=CK$. En el paralelógramo $CDLK$, $LD=KC$; en el paralelógramo $KLNG$, $LN=GK$; y como los dos triángulos GNH, FKG son de todo punto iguales, será $HN=GK$. Luego $HN=NL=LD=GK=BF$. Discurriendo del mismo modo, se demostrará que $IP=PO=OM=ME=FB$. Luego todas las partes de la recta EI son iguales. Fig. 82.

501 Luego 1.° *Si* AB *es v. gr. la mitad de* AF, BC *tambien será la mitad de* FG, CD *la mitad de* GH &c.

Lo propio digo de dos, tres ó quatro partes juntas de la AV, respecto de otras dos, tres ó quatro partes juntas de la AZ; y por consiguiente como AD ó DE será lo mismo parte de AH ó HI, que AB de AF, tendremos $AD : AH :: AB : AF$, y $DE : HI :: AB : AF$. Por la misma razon será $AE : AI :: AB : AF$; luego por ser la razon $AB : AF$ comun á las tres proporciones, será $AD : AH :: DE : HI :: AE : AI$. 82.

502 2.° Luego, *si desde un punto* D *tomado donde se quiera en uno de los lados de un triángulo* ABC, *se tira una paralela* DE *á la base* AC, *el otro lado estará cortado proporcionalmente al primero.* 83.

Porque de lo probado últimamente (501) se sigue que $BD : BE :: DA : EC$, ó $BD : DA :: BE : EC$, y $BD : BE :: BA : BC$, ó $BD : BA :: BE : BC$.

Si desde el punto E se tira la EF paralela al otro lado BA, será (471) $AF=DE$, y tendremos $CF : CE :: AF=DE : EB$, y $CF : CE :: CA : CB$; luego $AF=DE : EB :: CA : CB$, ó $DE : CA :: EB : CB$.

503 3.° Y recíprocamente, *si una linea* DE *corta proporcionalmente los dos lados* BA, BC *de un triángulo, por manera que* BD : BA :: BE : BC, *la linea* DE *será paralela á la base* AC.

 Por-

Fig. Porque como la DE es paralela á AC, cortará en la BC una parte BE que tenga con BC la misma razon que BD con BA (502); y como suponemos que esto se verifica, es señal evidente de ser DE paralela á AC.

504 4.° Luego, *si desde un punto* S *tomado donde se quiera fuera de una linea* MN *se tirán á la*
84. *misma linea otras muchas lineas* SM, SO, SP, SN, *toda recta* QT *paralela á* MN *cortará estas lineas en partes proporcionales, y será* QR : MO :: RV : OP :: VT : PN, ó QR : RV : VT :: MO : OP : PN.

Porque como la recta QR corta paralelamente á la base el triángulo SMO, será (502) $QR : MO :: SR : SO$. Por la misma razon el triángulo SOP dá $SR : SO :: RV : OP :: SV : SP$. Asimismo, el triángulo SPN dá $SV : SP :: VT : PN$. Luego con tomar de esta serie de razones iguales aquellas no mas que nos hacen al caso, sacarémos $QR : RV : VT :: MO : OP : PN$.

La misma proposicion se verifica quando la recta QT corta la prolongacion de las rectas SM, SO, SP, SN. Porque si en la SM tomamos $Sq = SQ$, y tira-
85. mos la qt paralela á MN, todos los triángulos Sqr, Sru, Sut &c. serán de todo punto iguales con los triángulos SQR, SRV, SVT, porque cada uno tendrá un lado igual adyacente á dos ángulos iguales. Pero segun acabamos de ver, $qr : ru : ut :: MO : OP : PN$; luego $QR : RV : VT :: MO : OP : PN$.

505 5.° Y recíprocamente, *si se cortan proporcionalmente en los puntos* Q, R, V, T *las lineas* SM,
84. SO, SP, SN *tiradas desde el punto* S *á distintos puntos de* la MN, *la linea* QT *que pase por todos estos puntos será una recta paralela á* MN.

Porque, siendo por lo supuesto, $SQ : SM :: SR : SO :: SV : SP :: ST : SN$ (503) la QR será paralela á MO, la RV á la OP, la VT á la PN, y por consiguiente la QT á la MN.

506 *La linea* AD *que divide en dos partes igua-* Fig.
les el ángulo A *de un triángulo* ABC, *corta el lado opuesto* BC *en dos partes* BD, DC *proporcionales á los lados* AB, AC, *de modo que* BD : DC :: AB
AC. 86.

Porque si por el punto B tiramos á DA la recta paralela BE, que encuentre en E el lado CA, prolongado, el ángulo ABE será igual (372) al ángulo BAD, y el ángulo BEA igual (373) al ángulo DAC; pero el ángulo BAD es igual, por lo supuesto, al ángulo CAD; luego los ángulos ABE, BEA son iguales (442); luego $EA = AB$. Pero por ser paralelas BE y DA, tenemos (502) $BD : DC :: EA : AC$; luego substituyendo en lugar de EA su igual AB, sacarémos $BD : DC :: BA : AC$.

507 *Si en los puntos* M, P *de una recta* MP *se levantan las lineas* MN, MR, PQ, PV *paralelas de*
dos en dos, y proporcionales, de modo que siendo MN 87.
paralela á PQ, *y* MR *paralela á* PV, *sea* MN : PQ :: MR : PV; *las tres lineas* MP, NQ, RV *tiradas por los extremos de dichas paralelas, concurrirán en un mismo punto* S.

Porque, sea S el punto de concurso de MP y NQ, y s el punto de concurso de MP y RV. El triángulo SMN cortado con la linea PQ paralela á su base MN dará (502) $SM : SP :: MN : PQ$, y por la misma razon el triángulo sMR cortado con la linea PV paralela á su base MR, dará $sM : sP :: MR : PV$; luego, ya que por lo supuesto $MN : PQ :: MR : PV$, será $SM : SP :: sM : sP$, y por consiguiente dividendo $SM - SP : SP :: sM - sP : sP$, esto es $PM : SP :: PM : sP$; y como $PM = PM$, será $SP = sP$; por lo que, los puntos S, s se confundirán uno con otro.

Aunque son infinitas las aplicaciones que se pueden hacer de la doctrina de las lineas proporciona-

Fig. les, nos ceñirémos aquí á mañifestar su utilidad en la resolucion de unas pocas cuestiones.

508 Cuestion. I. *Dividir una recta dada en partes*
88. *iguales, ó en partes que tengan unas con otras razones dadas.*

Propongámonos dividir v. gr. la linea *AR* en dos partes que tengan una con otra la razon de 7 á 3. Por el punto *A* tirarémos una recta indefinita *AZ* que forme con *AR* un ángulo qualquiera *RAZ*, y con una abertura de compas arbitraria *AB*, señalarémos en la *AZ* diez divisiones iguales; por el extremo *Q* de la última tiraremos al extremo *R* de la *AR* la *QR*, y tirando despues por el punto *D*, extremo de la tercer division, la *DI* paralela á *QR*, quedará la *AR* dividida en dos partes *RI*, *AI* que la una será respecto de la otra lo que 7 respecto de 3; porque (502) *RI* : *AI* :: *DQ* : *AD* :: 7 : 3, por construccion.

Si hubiéramos de dividir la misma linea *AR* en mayor número de partes proporcionales, pongo por caso en cinco partes que tuviesen unas con otras la misma razon que los números 2, 3, 5, 6, 7; sumariamos unos con otros estos números, y sacariamos la suma 23; en la *AZ* tomariamos 23 aberturas de compas iguales, y con tirar paralelas á *QR* por los puntos de la 2.ª, 3.ª, 5.ª, 6.ª y 7.ª division, quedaria la *AR* dividida como se pide.

Si las razones fuesen expresadas con lineas, las pondriamos todas inmediatas unas á otras y como al tope en la *AZ*.

509 Por la misma práctica *dividiriamos la linea* AR *en partes iguales.*

88. Porque si hubiésemos de dividir *AR* en 10 partes iguales, tomariamos en la *AZ* á nuestro arbitrio diez partes iguales, y por todos los puntos de division tirariamos paralelas á *QR*, las quales dexarian dividida la *AR* en las diez partes.

Cues-

510 Cuestion. II. *Hallar una quarta proporcional á* Fig.
tres lineas dadas GH, IK, LM.

Tírense dos lineas *AV*, *AZ* de modo que for- 89.
men un ángulo qualquiera *VAZ*; trasládese á la primera la *GH* desde *A* á *B*, y la *IK* desde *A* á *C*; trasládese á la segunda la *LM* desde *A* á *E*; tírese despues la *BE*, y á esta la paralela *CF*; la recta *AF* será la quarta proporcional que se pide.

Porque (502) *AB* ó *GH* : *AC* ó *IK* :: *AE* ó *LM* : *AF*.

511 Por la misma práctica se hallará *una linea tercera proporcional á dos lineas dadas.*

Tómese *AB*=*GH*, *AC*=*IK*, y tambien *AE*= 90.
IK: y con hacer la misma operacion de antes será *AB*=*GH* : *AC*=*IK* :: *AE*=*IK* : *AF*, ó ÷ *GH* : *IK* : *AF*; luego *AF* es la tercera proporcional que se busca.

512 Cuestion. III. *Por un punto dado* F *tirar una recta* FG *que se encamine en derechura al punto de concurso de dos lineas* AB, DE, *quando este punto está* 91.
muy distante para poderle determinar.

Por dos puntos qualesquiera de la *AB* tírense dos paralelas *AD*, *BE* que rematen en la *DE*; por el punto *A* tírese al punto dado *F* la *AF*, y á esta la paralela indefinita *BL*, en la qual se tomará la parte *BG* quarta proporcional á las tres lineas dadas *AD*, *BE*, *AF*; tirando la *FG*, esta será la linea pedida.

Porque la construccion da *AD* : *AF* :: *BE* : *BG*, y por lo demostrado (507) *AB*, *DE* y *FG* irán á concurrir en un mismo punto.

513 Cuestion. IV. *Construir una escala universal muy puntual, llamada escala de mil partes.*

Divídase la linea *AB* en la qual se han de señalar las mil partes, sean varas, pies ú otra medida qualquiera, en diez partes iguales *AO*, *O* 100 &c. 92.

 ca-

Fig. cada una de cuyas divisiones representará 100 varas. En los extremos *A*, *B* de la *AB* levántense las perpendiculares iguales *AC*, *BE*, largas lo que se quiera, y divídase cada una de ellas en diez partes iguales, tirando por los puntos de division paralelas á la linea *AB*. Pártanse tambien en diez partes iguales las lineas *AO*, *CD*, y por los puntos *O*, 10, 20, 30, &c, del lado inferior *AB* tírense rectas á los puntos 10, 20, 30, &c. del lado superior *DC*, y quedará hecha la escala.

Con manifestar uno de los usos para que sirve esta escala, manifestaremos los fundamentos de su construccion.

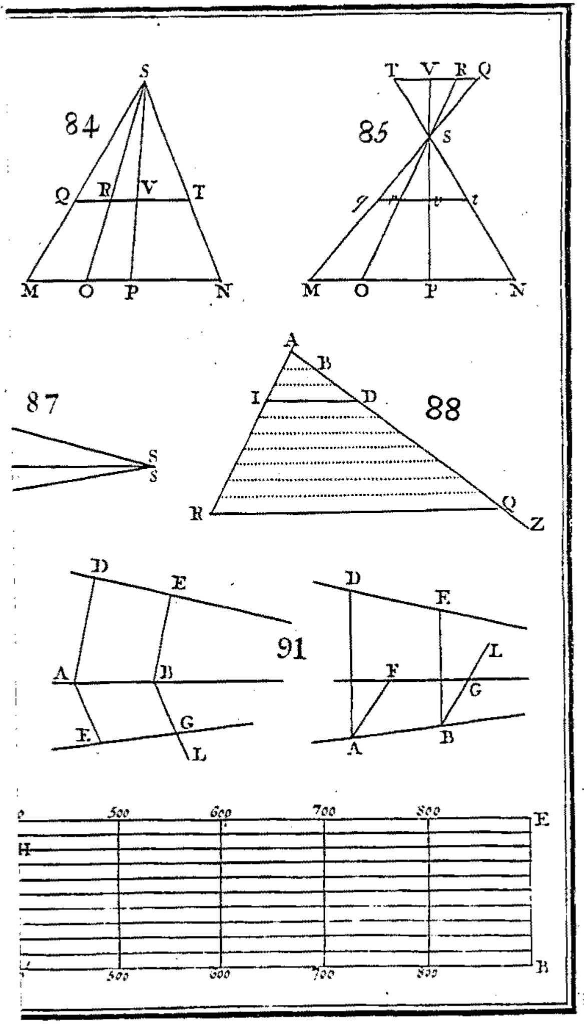
Tomemos con esta escala una linea de 458 pies v. gr. Por de contado los 400 pies cogen en la escala la distancia *O*400; falta buscar los 58 pies.

92. Como las lineas *AC*, *OD* de la escala estan divididas en diez partes iguales, la parte *tu* que corresponde al primer punto de division, representa un pie; pues por estar cortado proporcionalmente (502) el triángulo *OD*10 con la paralela *tu*, tendrémos $OD : OT :: D10 : tu$; y como por construccion *Ot* es la décima parte de *OD*, tambien será *tu* la décima parte de *D*10; pero *D*10 es la décima parte de *CD* que representa 100 pies; luego *tu*, décima parte de *D*10, será la centésima parte de *CD*, ó valdrá un pie. Por la misma razon la parte *mr* de la linea *m*8 correspondiente al punto de division 8 de la *AC*, representará ocho pies. Y como *rN* ó *O*50 representa 50 pies, síguese que la linea *mN* vale 58 pies. Si á la $mN = 58$ pies se le añade la distancia $O400 = 400$ pies, la suma *HN* valdrá los 458 pies pedidos.

De la semejanza de las Figuras.

514 Se dice de dos ó mas figuras que son *semejan-*

P. 262.



jantes unas á otras, quando los ángulos de la una son iguales á los ángulos de la otra, y los lados de la primera proporcionales á los lados correspondientes de la segunda. Los dos triángulos ABC, abc serán semejantes si ademas de ser el ángulo A igual al ángulo a, el ángulo B igual al ángulo b, y el ángulo C igual al ángulo c, se verifica que $AB : ab :: AC : ac :: BC : bc$. Fig. 93.

Estos lados correspondientes se llaman lados *homólogos*, y para que dos lados puedan llamarse con este nombre, es indispensable que los ángulos adyacentes al primero sean iguales á los ángulos adyacentes al segundo, cada uno al suyo.

Puede suceder que *dos figuras de un mismo número de lados tengan iguales todos sus ángulos, sin que por eso sean semejantes.* Porque la igualdad de los ángulos no arguye igualdad de razones entre los lados, comparados de dos en dos. Y recíprocamente, *puede suceder que dos figuras tengan proporcionales todos sus lados, sin que por eso sean semejantes una á otra.* Porque de la proporcion de los lados no se infiere que sean iguales los ángulos que forman los lados proporcionales. Y aunque lo que acabamos de decir no se entiende con los triángulos, lo prevenimos para precaver las equivocaciones que podrian cometerse al considerar los demas polígonos, si no se tuviese presente esta advertencia.

515 *Si dos triángulos* ABC, abc *tienen proporcionales sus tres lados homólogos, tendrán iguales sus ángulos cada uno al suyo, y por lo mismo serán semejantes.* 93.

En los lados AB, AC del triángulo ABC tómense las partes Ab', Ac' respectivamente iguales á los lados ab, ac, y tírese $b'c'$. Ya que por lo supuesto $AB : AC :: ab : ac$, será por construccion, $AB : AC :: Ab' : Ac'$; luego la linea $b'c'$ divide los la-

Fig. lados del triángulo *ABC* en partes proporcionales; luego es paralela (503) á la base *BC*, y proporcional á la misma base (502). Tendremos pues $Ab' : b'c' :: AB : BC$; pero por lo supuesto $AB : BC :: ab : bc$; luego $Ab' : b'c' :: ab : bc$; luego $b'c' = bc$, y por consiguiente ya que el triángulo $b'Ac'$ y el triángulo *bac* tienen iguales sus tres lados, serán (451) iguales. Pero el triángulo $b'Ac'$ es semejante al triángulo *BAC*, porque sobre tener sus lados proporcionales, segun se ha visto, el ángulo *A* es comun á ambos, y los ángulos b', c' son respectivamente iguales á los ángulos *B*, *C*, por causa de las paralelas *BC*, $b'c'$ (372); luego el triángulo *bac* es tambien semejante al triángulo *BAC*.

93. 516 *Dos triángulos* ABC, abc *son semejantes quando tienen un ángulo igual á un ángulo formado por dos lados proporcionales.*

Sea el ángulo $A = a$, y supongamos $ab : ac :: AB : AC$. Tomemos $Ab' = ab$, tiremos $b'c'$ paralela á *BC*, y tendremos (502) $Ab' : Ac' :: AB : AC$; luego $ab : ac :: Ab' : Ac'$; pero $ab = Ab'$; luego $ac = Ac'$; luego (453) los dos triángulos *abc*, $Ab'c'$ son iguales. Y como el triángulo $Ab'c'$ es semejante al triángulo *ABC* (515), pues por razon de la paralela $b'c'$, los ángulos del uno son iguales á los ángulos del otro, (372) cada uno al suyo, y los lados proporcionales á los lados (502), es patente que los triángulos *ABC*, *abc* son semejantes.

517 *Dos triángulos cuyos ángulos son iguales cada uno al suyo, tienen proporcionales sus lados homólogos, y son por lo mismo semejantes.*

93. Sean los ángulos $a = A$, $b = B$, $c = C$. Tómese en la *AB* la parte $Ab' = ab$, y tírese la paralela $b'c'$ la qual dividirá (502) proporcionalmente los lados del triángulo *ABC*, y dará $Ab' : Ac' : b'c' :: AB : AC : BC$; luego los dos triángulos $Ab'c'$, *ABC* son semejantes (515). A mas de esto, como el triángulo $Ab'c'$ es igual (452) al triángulo *abc*, una vez que por lo supuesto $Ab' = ab$ $A = a$ y $b' = B = b$; los triángulos *ABC*, *abc* son semejantes.

518 De la última proposicion se deduce: 1°. *Que quando dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, cada uno al suyo, los dos triángulos son semejantes.*

Porque quando dos ángulos de un triángulo son respectivamente iguales á dos ángulos de otro triángulo, el tercer ángulo del primero es (449) indefectiblemente igual al tercer ángulo del segundo.

519 2.° Luego *dos triángulos rectángulos son semejantes, siempre que ademas del ángulo recto tengan otro ángulo igual ó comun á ambos.*

Por la misma razon *dos triángulos isósceles son semejantes quando el uno de los ángulos opuestos á los lados iguales es igual en cada triángulo, ó comun á ambos.*

520 3.° Y una vez que dos ángulos vueltos ácia un mismo lado, cuyos lados son paralelos, son iguales (378); *dos triángulos cuyos lados son todos paralelos, tendran tambien iguales sus ángulos cada uno al suyo, y por lo mismo serán semejantes.*

521 4.° Luego *dos triángulos cuyos lados son todos perpendiculares cada uno al suyo, tendran tambien proporcionales los mismos lados, y por consiguiente serán semejantes* (517).

Porque si se le da un quarto de conversion ó la quarta parte de una vuelta entera al uno de los dos triángulos, sus lados serán paralelos á los del otro.

522 *Si desde el ángulo recto* A *de un triángulo rectángulo* ABC *se baxa una perpendicular* AD *al lado opuesto* BC; 1.° *los dos triángulos* ADB, ADC *serán semejantes uno con otro y con el triángulo* BAC; 2.° *la* 94.

Fig. *la perpendicular* AD *será media proporcional entre las dos porciones ó segmentos* BD, DC *de la hypotenusa*; 3.º *cada lado* AB ó AC *del ángulo recto será medio proporcional entre la hypotenusa y el segmento correspondiente* BD ó DC.

94. 1.º Los triángulos *BAD*, *DAC* tienen un ángulo recto en *D*, y cada uno un ángulo comun con el triángulo *BAC*; luego ambos triángulos son semejantes al triángulo *BAC* (519), y por consiguiente semejantes uno á otro.

2.º Luego si comparamos los lados homólogos de los dos triángulos *ADB*, *ADC*, será *BD* : *AD* : : *AD* : *DC*.

3.º Si comparamos los lados homólogos de los triángulos *ADB*, *BAC*, sacarémos *BD* : *AB* : : *AB*: *BC*. Finalmente, si comparamos los lados homólogos de los triángulos *ADC*, *BAC*, tendremos *CD*: *AC* : : *AC*: *BC*.

Donde se ve que la *AD* es media proporcional entre *BD* y *DC*; la *AB*, media proporcional entre *BD* y *BC*; y la *AC* media proporcional entre *CD* y *BC*.

523 *Si desde dos ángulos homólogos* A, a *de dos figuras semejantes, se tiran diagonales* AC, AD; ac,
95. ad *á los demas ángulos, los triángulos homólogos, ó colocados de un mismo modo en cada figura serán semejantes.*

Porque la semejanza que suponemos de las dos figuras, dá el ángulo *b* igual al ángulo *B*, y *AB*: *ab* : : *BC*: *bc*; luego los dos triángulos *ABC*, *abc* son semejantes (516); luego el ángulo *BCA* es igual al ángulo *bca*, y *AC*: *ac* : : *BC*: *bc*. Si de los ángulos iguales *BCD*, *bcd* se quitan los ángulos iguales *BCA*, *bca*, los ángulos residuos *ACD*, *acd* serán iguales; pero *BC* : *bc* : : *CD* : *cd*; luego ya que acabamos de probar que *BC*: *bc* : : *AC* : *ac*, tendrémos *CD* : *cd* : : *AC*:

AC : *ac*; luego los dos triángulos *ACD*, *acd* serán semejantes (516). Lo mismo probarémos y del mismo modo respecto de los triángulos *ADE*, *ade*, y de todos los triángulos que hubiere ademas de estos, si tuviese la figura mas lados. Fig.

524 *Si dos figuras* ABCDE, abcde *se componen de un mismo número de triángulos semejantes, y del mismo modo colocados en cada una, las dos figuras serán semejantes.* 95.

Porque, los ángulos *B*, *E* son iguales á los ángulos *b*, *e*, pues los triángulos son semejantes, y por la misma razon los ángulos parciales *BCA*, *ACD*, *CDA*, *ADE* son iguales á los ángulos parciales *bca*, *acd*, *cda*, *ade*; luego los ángulos totales *BCD*, *CDE* son iguales á los ángulos totales *bcd*, *cde*, cada uno al suyo. Fuera desto, la semejanza de los triángulos dá esta serie de razones iguales *AB* : *ab* : : *BC* : *bc* : : *AC*: *ac* : : *CD* : *cd* : : *AD* : *ad* : : *DE* : *de* : : *AE* : *ae*; Si tomamos en esta serie las razones cuyos términos son lados de los polígonos, sacarémos *AB* : *ab* : : *BC* : *bc* : : *CD* : *cd* : : *DE* : *de* : : *AE* : *ae*. Luego estos polígonos tienen tambien los lados homólogos proporcionales; luego son semejantes.

525 Luego, *para construir una figura semejante á otra figura propuesta* ABCDE, *y cuyo lado homólogo á* AB *sea una linea dada* ab, *se llevará la linea dada desde* A *á* f *en* AB; por el punto *f* se tirará la *fg* paralela á *BC*, que encuentre *AC* en *g*; por el punto *g* se tirará *gh* paralela á *CD*, que encuentre *AD* en *h*; finalmente, por el punto *h* se tirará *hi* paralela á *ED*, y saldrá una figura *fghi* semejante á *ABCDE*. 95.

526 *Los contornos ó perímetros de dos figuras semejantes tienen unos con otros la misma razon que sus lados homólogos, ó sus diagonales homólogas*; quiero decir que si la figura *ABCDE* es semejante á la fi-

Fig. figura *abcde*, se verificará que $AB+BC+CD+DE+EA : ab+bc+cd+de+ea :: AB : ab$, ó $:: AD : ad$.

Porque en la serie de razones iguales $AB : ab ::$
95. $BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: AE : ae$, la suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes ( ), como un antecedente es á su consecuente :: $AB : ab$; pero ya se ve que la suma de los antecedentes es el perímetro de la figura $ABCDE$, y la suma de los consecuentes es el perímetro de la figura *abcde*; y por otra parte $AB : ab :: AD : ad$; luego $AB+BC+CD+DE+EA : ab+bc+cd+de+ea :: AB : ab :: AD : ad$.

527 Quando los polígonos son regulares, se verifica del mismo modo la proposicion; luego *los perímetros de los polígonos regulares tienen unos con otros la misma razon que sus lados homólogos, sus diagonales, sus radios rectos ú oblicuos.*

528 Luego 1.° *Las circunferencias de los círculos son proporcionales á los radios, á los diámetros, á las cuerdas semejantes, y á los arcos semejantes.*

Porque, podemos considerar los círculos como polígonos regulares de una infinidad de lados (499) en cuyo caso los lados de los polígonos, que pueden considerarse como cuerdas de los círculos circunscriptos, se confundirán por su infinita pequeñez con los mismos arcos que subtenden, y el perímetro del polígono no se distinguirá de la circunferencia del círculo, ni los radios rectos y oblicuos se distinguirán de los radios del círculo. Por consiguiente los perímetros ó circunferencias son proporcionales á los radios, á los diámetros que son duplos de los radios, á las cuerdas semejantes, y á los arcos semejantes, que son partes semejantes de los círculos cuyos son.

529 Luego 2.° Si conociéramos á punto fixo la circunf eencia de un círculo de diámetro conoci-

cido, se podria determinar la circunferencia de otro círculo, con tal que fuese dado su diámetro, por la siguiente proporcion: *el diámetro de la circunferencia conocida es á su misma circunferencia, como el diámetro de la circunferencia que se busca es á su circunferencia.* Fig.

Pero para esto seria necesario saber á punto fixo la razon del diámetro á la circunferencia; cuya razon hasta ahora no se ha podido sacar cabal, bien que se han sacado de ella valores tan aproxîmados, que en la práctica pueden servir sin rezelo de error substancial; pues aun quando en lugar de esta razon aproxîmada se usara la razon cabal, no por eso saldrian mas seguras las operaciones prácticas.

Las razones aproxîmadas entre el diámetro y la circunferencia son varias. 1.ª la de 7 á 22 que señala Arquimedes, Matemático Griego; 2.ª la de 113 á 355, señalado por Pedro Mecio, Matemático Aleman; 3.ª la de 1 á 3, 141592653 5897932 &c. Cuya aproxîmacion han continuado los Matemáticos modernos hasta ciento veinte y siete decimales, por un método que declararémos en otro lugar.

530 Qualquiera de estas tres razones basta para *hallar la circunferencia de un círculo una vez que se conoce su diámetro*; por manera que si se nos preguntase quanto coge tendida en plano la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es de 20 pies, ó lo que es todo uno, quanto coge de largo una linea recta igual con la circunferencia del tal círculo, buscariamos el quarto término de la siguiente proporcion $7 : 22 :: 20$: cuyo quarto término, á saber $62\frac{6}{7}$, es con muy corta diferencia lo que coge tendida en plano la circunferencia del círculo de 20 pies de diámetro. Lo mismo sacariamos, con cortísima diferencia por la razon $113 : 355$, ó por la de $1 : 3, 14159$ &c.

Por

Fig. 531 Por qualquiera de las tres razones expresadas entre el diámetro y la circunferencia, podremos *sacar el diámetro de un círculo, una vez que conozcamos la circunferencia*; porque si llamamos C la circunferencia conocida, el quarto término de qualquiera de las tres proporciones siguientes

$22 : 7 :: C :$

$355 : 113 :: C :$

$3, 14159$ &c $: 1 :: C :$

expresará el valor del diámetro correspondiente á la circunferencia propuesta.

532 Como en un mismo círculo sus arcos tendidos en plano cogen de largo á proporcion del número de sus grados, en sabiendo quanto coge de largo la circunferencia de un círculo ó su diámetro, se podrá *saber quanto cogerá de largo un arco de un número señalado de grados*, por esta proporcion: 360 grados son al número de grados del arco cuyo largo se busca, como el largo de la circunferencia es á la del arco.

Supongo v. gr. que se me pregunta quantos pies coge de largo un arco de 32° 40′ de un círculo cuyo diámetro coge 20 pies? Por lo dicho antes (531) hallaré que la circunferencia es de $62\frac{6}{7}$ pies; busco, pues el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros son los siguientes 360°, 32° 40′, $62\frac{6}{7}$, ó 21600′, 2160′, 62, 857^p (con reducir los dos primeros á minutos), y despues de egecutado el cálculo sale el quarto término 5, 703^p, ó 5^p 8^p, valor de lo que coge de largo tendido en plano el arco de 32° 40′ de un círculo de 20 pies de diámetro.

De las lineas proporcionales en el círculo.

533 Se dice de dos lineas que estan cortadas en *partes recíprocamente proporcionales*, quando la una de las dos lineas y su parte forman los extremos de una proporcion, y la otra linea y su parte forman los medios.

534 *Si desde un punto qualquiera* A *de un círculo se baxa una perpendicular al diámetro, la tal perpendicular será media proporcional entre las dos partes del diámetro* BC. Fig. 96.

Tírense á los extremos del diámetro las cuerdas AB, AC; el ángulo A del triángulo BAC será recto (416), y los triángulos semejantes BAD, DCA (515) darán $BD : AD :: AD : DC$; luego AD es media proporcional entre las dos partes BD y DC del diámetro.

535 Luego para *hallar una media proporcional entre dos lineas dadas* BD y DC, se juntarán las dos lineas dadas una á continuacion de otra, de modo que formen una sola y misma linea BC; á esta se la dividirá por medio en M, y con un radio BM se trazará un semicírculo BAC; en el punto D donde se juntan las dos lineas dadas, se levantará la perpendicular DA, y esta será la media proporcional (534) entre las partes BD y DC del diámetro, que son las lineas dadas.

536 *Toda cuerda* BA *tirada desde el extremo de un diámetro es media proporcional entre el diámetro y el segmento correspondiente* BD.

Porque, los triángulos semejantes (522) ADB, BAC dan $BD : BA :: BA : BC$.

537 *Las partes de dos cuerdas* CD, AB *que se cortan en un círculo, son recíprocamente proporcionales, quiero decir, que* AE : ED :: CE : EB. 97.

Tírense DA y BC; los triángulos DEA BEC tienen los ángulos en E opuestos al vértice, é iguales (347), y los ángulos D, B son tambien iguales (415) porque cogen el mismo arco AC; luego son semejantes (518) los dos triángulos, y dan $AE : ED :: CE : EB$.

Si

Fig. 538 *Si dos secantes* PC, PD *tiradas desde un mismo punto fuera de un círculo, rematan en la parte cóncava* DC *de la circunferencia, las partes ex-*
98. *ternas* PA, PB *son recíprocamente proporcionales á las secantes enteras.*

Tírense las cuerdas AD, BC; los triángulos PAD, PBC serán semejantes (518), por ser comun á ambos el ángulo P, y coger los ángulos D, C el mismo arco AB (415), luego $PA : PB :: PD : PC$.

539 *Si desde un punto* P *fuera del círculo se le tira una tangente* PC, *y una secante* PB, *la tangente* PC *será media proporcional entre toda la secante* PB, *y su parte* PA *fuera del círculo.*

99. Porque, si se tiran las cuerdas CB, CA al punto de contacto, se originarán dos triángulos semejantes (518) CAP, CBP, pues tendrán comun el ángulo P, é iguales los ángulos CBP, ACP, cuya medida es la mitad del arco CA (411 y 413); luego $PB : CP :: CP : PA$.

540 La última proposicion nos enseña como se
100. *parte una linea dada* BA *en media y extrema razon*, esto es, de tal modo que su parte mayor BD sea media proporcional entre toda la linea AB, y la parte menor AD.

En el extremo A de la linea AB se levanta la AC perpendicular é igual á la mitad de la AB; desde el centro C y con el radio CA se traza un círculo; por los puntos C y B se tira la linea BCF, y desde el centro B con el radio BE se traza el arco ED, el qual corta la AB de modo que $BA : BD :: BD : DA$.

Porque, como BA es tangente (397), se verifica (539) $BF : BA :: BA : BE$, dividendo $BF - BA : BA :: BA - BE : BE$; pero $BF - BA = BE = BD$, pues $BA = 2CA = FE$, y tambien $BA - BE = BA - BD = DA$; luego, despues de hechas las correspondientes substituciones, $BD : BA :: DA : BD$, ó invertendo $BA : BD :: BD : DA$. Fig.

De las Superficies.

541 En lo que hasta aquí dejamos probado acerca de las figuras, hemos considerado su perímetro no mas; ahora considerarémos el espacio que su perímetro encierra, cuyo espacio se llama *superficie* ó *area*, y es nna extension en longitud y latitud.

Entre las varias especies que hay de superficies solo indagaremos las propiedades de la que se llama *superficie plana*, y particularmente de la que terminan lineas rectas, por cuyo motivo se llama *superficie rectilinea*.

Entre las superficies *curvilineas* solo considerarémos el círculo; y de las *mixtilineas*, dos no mas que tienen relacion con el círculo, y darémos á conocer en adelante.

542 Antes de todo nos parece del caso prevenir que una *superficie curva*, y una *superficie curvilinea* son dos cosas muy distintas. Ya diximos (302) lo que es una superficie curva. Quando decimos que una superficie es curvilinea, no queremos dar á entender otra cosa sino que su perímetro se compone de una ó muchas lineas curvas, aunque el espacio que su perímetro encierra sea una superficie curva; un círculo v. g. es una superficie curvilinea y plana al mismo tiempo.

543 *Todo triángulo rectilineo* ABC *es la mitad de un paralelógramo de igual base y altura que él.*

Porque, si por el vértice del ángulo C nos figuramos tirada una linea CE paralela al lado BA, 101.
y por el vértice del ángulo A otra linea AE paralela al lado BC, se originará un paralelógramo $ABCE$ de igual base y altura que el triángulo ABC, cuyo lado AC es la diagonal del paralelógramo. Y como la diágonal de todo paralelógramo le divide

Fig. (470) en dos partes ó triángulos iguales; síguese que cada uno de los dos triángulos *BAC*, *ACE* es la mitad del paralelógramo *ABCE*; luego &c.

544 *Dos paralelógramos* ABCD, ABEF *que tienen una misma base* AB, *y están entre unas mismas paralelas ó tienen una misma altura, tienen iguales sus superficies.*

Los triángulos *DAF*, *CBE* son de todo punto
102. iguales (453), porque los lados *AD*, *AF* del primero son respectivamente iguales (472) á los lados opuestos *BC* y *BE* del segundo, por ser estas líneas lados opuestos de paralelógramos. Por otra parte, los ángulos *DAF*, *CBE* que estos lados iguales forman son tambien iguales, por ser sus lados paralelos y estar vueltos ácia un mismo lado (378). Si de dichos dos triángulos iguales *DAF*, *CBE* se quita el triángulo comun *CGF*, se originará el trapecio *ADCG* igual al trapecio *BGFE*; si á cada una de estas figuras iguales se añade el triángulo *ABG*, se originará el paralelógramo *ABCD* igual al paralelógramo *ABEF*.

545 Podemos, pues, inferir que *los triángulos de igual base y altura, ó de una misma base que estan entre unas mismas paralelas, tienen iguales sus superficies.* Porque son mitades de paralelógramos de igual base y altura que ellos (543).

De la medicion de las superficies.

546 *Executar la medicion de una superficie, ó medir una superficie es determinar el número de veces ó quantas veces en dicha superficie cabe otra superficie conocida.*

Como la superficie que se tome por unidad de medida, ha de ser la mas sencilla que posible sea, se ha tomado por la tal unidad el quadrado, por ser

ser entre todas las figuras regulares la que por razon de la igualdad de sus lados y ángulos, es mas fácil de comparar con todas las demas figuras; por cuyo motivo *quadrar una superficie* y *medir una superficie* es todo uno. Sin embargo, no es solo el quadrado el que puede servir de unidad de medida; otra superficie qualquiera podria servir para lo mismo: y si se le ha dado al quadrado la preferencia, es, porque segun queda dicho con él se executan las mediciones con mas facilidad. Fig.

547 Todo esto presupuesto, sea *abcd* la superficie que sirve de unidad ó medida. Es patente que quantas mas veces quepa en la base *AB* del paralelógramo por medir la basa *ab* de la superficie que 103.
sirve de medida, tantas mas veces cabrá en el paralelógramo la misma unidad, sea la que fuere su altura *EF*. Asimismo, quantas mas veces quepa en la altura *EF* del paralelógramo *ABCD* la altura *ef* de la superficie *abcd*, sea la que fuere su base *AB*, tantas mas veces tambien cabrá en el paralelógramo *ABCD* el paralelógramo *abcd*. Luego la superficie del paralelógramo por medir está con la superficie de la unidad en razon compuesta de los números de veces que en las dimensiones del paralelógramo caben las dimensiones de la unidad. De aquí sacamos para la medicion de las superficies la siguiente.

548 Regla. *Búsquese el número de veces que en la base* AB *cabe la base* ab *de la unidad; búsquese tambien el número de veces que en la altura* EF *del paralelógramo por medir cabe la altura* ef *de la misma unidad; multiplíquense uno por otro los dos números, el producto señalará el número de veces que deberá tomarse la unidad* abcd *para sacar el valor de la superficie ó area del paralelógramo* ABCD.

549 De aquí se infieren las siguientes consecuencias.

1.ª Por ser el paralelógramo rectángulo *ABCD*

igual

Fig. igual (544) al paralelógramo *ABEF* de la misma base y altura que él, quando se quiera valuar la superficie de un paralelógramo qualquiera, se multiplicará el número de veces que la base *ab* de la
102. unidad cabe en la base *AB* del paralelógramo, por el número de veces que la altura *ef* de la unidad cabe en la altura del paralelógramo.

Es muy comun decir que *la superficie de un rectángulo es el producto de su base por su altura*; y aunque esta expresion abreviada no tiene en la práctica inconveniente alguno, y por lo mismo nosotros tambien la usarémos, es sin embargo de suma importancia prevenir que es hablar con impropiedad decir *multiplicar una linea por una linea*; pues aun quando se pudiera efectuar esta multiplicacion, como no se puede por no ser el multiplicador un número abstracto; ya que multiplicar es tomar un número determinado de veces, si se multiplica una linea por una linea, el producto seria una linea, y no una superficie, que es lo que se busca.

550 2.ª Luego dos paralelógramos tendrán iguales sus superficies, siempre que el producto de la base del uno multiplicada por su altura sea igual al producto de la base del otro por su altura; y por consiguiente *quando dos paralelógramos tienen iguales sus superficies, tienen sus bases recíprocamente proporcionales con sus alturas*; quiero decir, que la base y la altura del uno pueden considerarse como los medios de una proporcion, y la base y la altura del otro como los extremos; pues considerándolos de este modo, el producto de los extremos es igual al producto de los medios, en cuyo caso hay indefectiblemente proporcion.

551 3.ª Y como todo triángulo es la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura que él (543), *quando se quiera sacar la superficie de un triángulo, se multiplicará su base por su altura, y tomará la mitad del producto*, ó lo que es lo mismo, *se multiplicará su base por la mitad de la altura, ó su altura por la mitad de la base.*

552 4.ª Luego, *quando dos triángulos son iguales uno con otro, sus bases son recíprocamente proporcionales con sus alturas.*

553 *La superficie de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de las bases pararelas.*

Si se tira la diagonal *DA*, los dos triángulos que se originarán *ABD*, *ACD* estarán entre unas 104.
mismas paralelas *AB*, *CD*, y tendrán por consiguiente una misma altura. La superficie del primero es igual á la mitad de *AB* multiplicada por su altura, y la superficie del segundo es igual á la mitad de *CD* multiplicada por la misma altura; luego la superficie del trapecio, la misma que la de los dos triángulos juntos, es igual al producto de su altura por la mitad de sus bases paralelas.

Si por el medio *E* de la *AC* se tira la *EF* paralela á las bases, la linea *EF* será la mitad de la suma de las dos lineas *AB*, *CD*. Porque los triángulos semejantes *CAD*, *EAG* dan $CA : EA :: CD : EG$; por consiguiente será *EG* la mitad de *CD*, pues *EA* es la mitad de *CA*. Y como *EF* es paralela á *AB*, la *BD* estará cortada proporcionalmente á *AC* (502); y del mismo modo se probará que *GF* es la mitad de *AB*, aplicando el discurso á los triángulos semejantes *DAB*, *DGF*.

Luego *la superficie de un trapecio* ABCD *es igual al producto de su altura por la linea* EF *tirada á distancias iguales de las dos basas opuestas.*

554 *La superficie de un polígono regular* ABDEF *es igual al producto del radio recto* CM *por la mitad de su perímetro.*

Por ser regular el polígono, todos los triángu-

los

Fig. 105. los *ACB*, *BCD* &c. de que se compone son de todo punto iguales unos con otros (489), y tienen una misma altura *CM* (455); pero la superficie de uno de estos triángulos es igual (495) al producto de su altura *CM* por la mitad de su base *AB*; luego la superficie del polígono, la qual es igual á la de todos los triángulos juntos, es igual al producto del radio recto *CM*, altura comun de los triángulos, por la mitad del perímetro de todo el polígono, mitad de las bases de todos los triángulos.

555 Y como la superficie de un triángulo cuya base fuese el perímetro de un polígono regular, y la altura la misma que la del radio recto *CM* del polígono, seria igual al producto (511) de la mitad de su base por su altura, síguese que *la superficie del polígono regular es igual á la de un triángulo, cuya base es igual al perímetro del polígono, y la altura igual al radio recto.*

556 Una vez que la circunferencia de un círculo se puede considerar (499) como el perímetro de un polígono regular de una infinidad de lados, *la superficie de un círculo es igual al producto del radio por la mitad de su circunferencia, ó al producto de la circunferencia por la mitad del radio; ó á la superficie de un triángulo cuya base sea igual á la circunferencia del círculo, y la altura igual al radio.*

Porque el radio de un círculo no se distingue del apotema de un polígono regular de una infinidad de lados.

En virtud de esto, si se ofreciera sacar la superficie de un círculo de 20 pies de diámetro, se calculará primero su circunferencia, la qual coge 62,857 pies (130); se multiplicará esta cantidad por 5, mitad del radio, y saldrán 314,285 pies quadrados, valor de la superficie del círculo propuesto.

557 Llamamos *sector de círculo* el espacio que ca-

cabe entre dos radios *CA*, *CB*, y el arco *AB* que cogen. Fig. 106.

Y *segmento de círculo* llamamos el espacio *ADBA* que cabe entre el arco *ADB* y la cuerda *AB*.

558 Ya que todo círculo se puede considerar (499) como un polígono regular de una infinidad de lados inscripto en el círculo, todo sector de círculo se puede considerar como una porcion del mismo polígono regular, y su superficie como compuesta de una infinidad de triángulos, cuyo vértice está en el centro, y cuya altura es por consiguiente el radio, y las bases son el arco del sector, pues la suma de estas bases es igual al arco. Luego, *para hallar la superficie de un sector de círculo* ACB, se ha de multiplicar el arco que le sirve de base por la mitad del radio.

Propongámonos sacar v. g. la superficie de un sector de 32° 40′ en un círculo de 20 pies de diámetro. Buscarémos primero (532) quanto coge tendido en plano el arco de 32° 40′, y hallarémos que coge 5, 703^{p}; multiplicarémos esta cantidad por 5, mitad del radio, y sacarémos 28, 515^{p}, valor de la superficie del sector propuesto.

559 Luego *Para hallar la superficie del segmento* ADBA, buscarémos la del sector, y de esta rebajarémos la del triángulo; la resta será la superficie del segmento.

560 *Para sacar la superficie de una corona ó ánulo* X, *se buscará separadamente la superficie de* 107. *cada uno de los dos círculos que la componen*; se restará despues de la superficie del círculo mayor la del menor; la resta será patentemente la superficie de la corona.

561 La regla dada para medir las superficies regulares tambien se aplica á *la medicion de la superficie de un polígono irregular* ABCDE, *cuyo perímetro se compone de lineas rectas.*

 Por

Fig. Porque, ya que sabemos medir un triángulo (551) y que por otra parte *todo polígono se puede*
108. *dividir* (483 y 484) en triángulos; si buscamos separadamente la superficie de cada uno de los triángulos en que está dividido el polígono, la suma de todas será el valor de la superficie de todo el polígono.

Sin embargo de ser tan seguros uno como otro los dos métodos propuestos (483 y 484) para dividir un polígono en triángulos, y ser de todo punto arbitraria la eleccion del punto de division; no obstante, se ha de procurar que el polígono quede dividido en el menor número posible de triángulos, y si se puede, de modo que los triángulos tengan de dos en dos por base una misma linea, con el fin de sacar su area por medio de una sola multiplicacion. Si hacemos v. g. la diagonal EC base de los dos triángulos EDC, EBC, sacarémos su superficie con multiplicar la EC por la semisuma de las perpendiculares BH, DL. Sacando despues la superficie del triángulo ABE, con solas dos multiplicaciones sacarémos la superficie de todo el polígono, lo que no se conseguiria si se dividiese el polígono en triángulos desde un punto de su area.

562 Por los mismos principios se puede *executar la medicion de todo polígono cuyo perímetro sea una linea curva irregular.*

Para lo qual primero se reducirá la tal super-
109. ficie á un polígono rectilineo, conforme demuestra la figura; despues se medirán las superficies mixtilineas restantes; ó bien como segmentos de círculos, pues por ser pequeñas se las puede considerar como tales sin error sustancial; ó bien como triángulos, por ser cortísima la diferencia que va de una linea curva de cortísima extension á una linea recta.

De

Fig.

De la Reduccion y Division de las superficies.

El punto que vamos á tratar es, en muchas ocasiones, de la mayor utilidad para la medicion y division de las tierras; y aunque nos detendrémos poco, declararémos sin embargo lo suficiente para que los principiantes puedan manejarse por sí solos, y hacer mayores adelantamientos en el asunto.

563 Cuestion I. *Reducir un paralelógramo á quadrado*, esto es, *hacer un quadrado cuya superficie sea igual á la de un paralelógramo dado* ABCD. 110.

Desde el ángulo A se bajará la AE perpendicular al lado opuesto BC, búsquese una media proporcional (535) entre la base BC, y la altura AE; la media proporcional será el lado del quadrado.

Porque en una proporcion continua (Arism.) el producto de los extremos, que aquí es la superficie del paralelógramo, es igual al quadrado del término medio.

564 Luego una vez que todo triángulo es la mitad (543) de un paralelógramo de igual base y altura que él: para *formar un quadrado cuya superficie sea igual á la de un triángulo*, se construirá el quadrado sobre una media proporcional entre la altura y la mitad de la base, ó entre la base y la mitad de la altura del triángulo.

565 2.º Por ser la superficie de un círculo igual á la mitad del producto de su circunferencia por el radio (556) *para construir un quadrado de superficie igual á la de un círculo propuesto*, se le dará *por lado al quadrado una media proporcional entre la mitad del radio y la circunferencia, ó entre la semicircunferencia y el radio.* Pero como para hallar esta media proporcional es menester conocer el valor cabal de la circunferencia, cuyo valor solo se conoce hasta ahora por aproximacion (561), esta es la

cau-

Fig. causa de no poderse resolver rigurosamente la cuestion de la *quadratura del círculo*.

566 Cuestion II. *Reducir una figura rectilinea qualquiera á otra de igual superficie, y que tenga un lado menos.*

Sea el pentágono $ABCDE$ por transformar; tí-
111. rese la diagonal BD, y por el punto C la CF paralela á BD hasta que encuentre en F el lado AB prolongado; tírese tambien DF, y quedará trazado un quadrilátero $AFDE$ igual al pentágono propuesto.

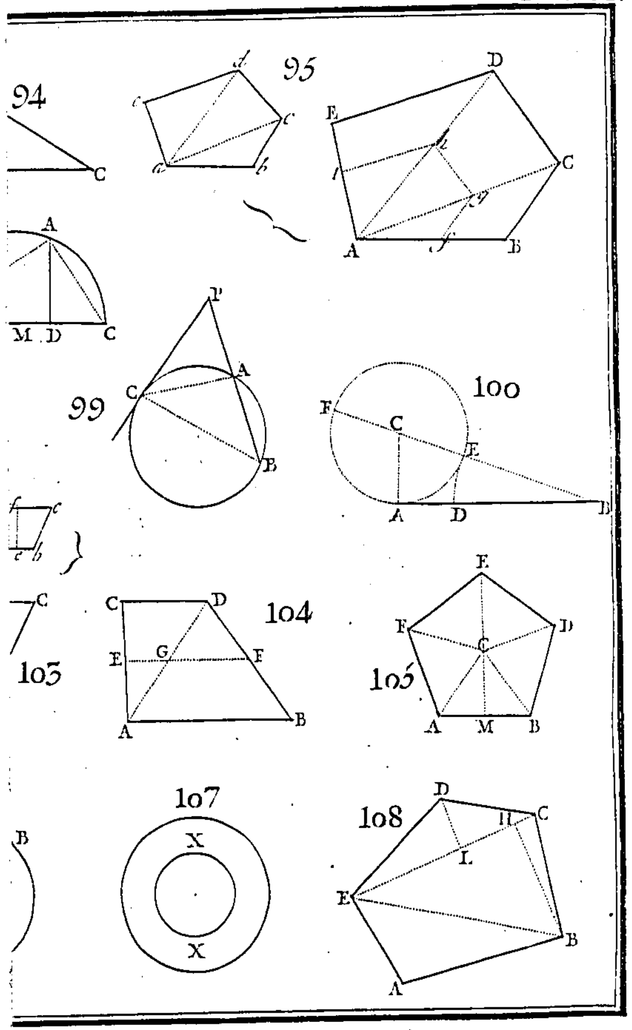
Porque, al quadrilátero $ABDE$ le falta el triángulo BCD para que sea igual al pentágono propuesto; luego si al quadrilátero $ABDE$ le añadimos el triángulo BDF igual al triángulo BCD, pues ambos tienen una misma base BD, y están entre unas mismas paralelas BD, CF (545), el quadrilátero $ABDE$ mas el triángulo BDF será igual al pentágono propuesto.

Del mismo modo se transformará el quadrilátero en triángulo; luego es fácil reducir á triángulo toda figura rectilinea; y como queda ya declarada (564) la transformacion de un quadrado en triángulo dado, queda tambien enseñado como se transforma en quadrado toda figura rectilinea.

567 Cuestion III. *Reducir un triángulo* ABC *á otro cuyo vértice esté en un punto dado* D, *y cuya superficie sea igual á la del primero.*

112. Desde ~~el punto~~ D tírense á los puntos B y C las lineas BD, DC, y por el vértice A del triángulo ABC la AL paralela á la base BC. Desde el punto E, donde la DB corta la AL, tírese la EF paralela á DC, y desde el punto F la FD al punto D. El triángulo BDF será igual al triángulo dado ABC.

Porque si tiramos la EC, los dos triángulos EFC, EFD que tienen una misma base EF y estan entre unas mismas paralelas EF, DC serán iguales (545); y



y si á cada uno de estos dos triángulos añadimos el triángulo *BFE*, el triángulo *BDF* será igual al triángulo *BEC*; pero *BEC* es igual al triángulo dado *ABC*, pues tiene la misma base *BC*, y ambos están entre unas mismas paralelas *AL*, *BC*; luego el triángulo *BDF* es igual al triángulo *ABC*. Fig.

568 Si el punto dado *D* estuviese en uno de los lados del triángulo *ABC*, la operacion seria la misma, y se demostraria del mismo modo. La figura lo manifiesta muy á las claras. 113.

569 Cuestion IV. *Dividir un triángulo* ABC *en quantas partes iguales se quiera con lineas tiradas desde un punto dado* D.

Divídase la base *AC* en tantas partes iguales quantas se ha de dividir el triángulo, en dos partes iguales v. g. en *E*, desde cuyo punto tírense las lineas *EB*, *ED*, y desde *B* la *BF* paralela á *DE*; y finalmente la *DF* y la *DB*, las quales dividirán el triángulo en dos partes iguales *BDFA* y *DFCB*. 114.

Porque, como por construccion *AE*=*EC*, los dos triángulos *ABE*, *EBC* que tienen una misma altura, serán (545) iguales, y por consiguiente cada uno de ellos será la mitad del triángulo total *ABC*; y como por razon de las paralelas *BF*, *DE*, el triángulo *BFD* es igual al triángulo *BEF*, si de uno y otro se quita la parte comun *BOF*, el triángulo *OFE* será igual al triángulo *ODB*; luego si al triángulo *ABE* se le quita el triángulo *FOE*, y se le añade su igual *ODB*, se originará el trapezoide *AFDB* igual al triángulo *ABE*, y por lo mismo igual á la mitad del triángulo total *ABC*.

La segunda de las dos figuras citadas sirve para quando el punto *D* dado está en uno de los lados del triángulo *ABC*; en cuyo caso se demuestra del mismo modo que el trapezoide *AFBD* es igual al triángulo *ABE*, y por consiguiente á la mitad del

Fig. del triángulo *ABC*.

570 Cuestion V. *Dividir en dos partes iguales v. g. un quadrilátero* ADCB *desde un punto* E *dado en uno de sus lados.*

Tírense las rectas *DE*, *DB*, y desde *C* la *CF*
115. paralela á la diagonal *DB*; cuya *CF* encontrará en *F* el lado *AB* prolongado. La recta *DF* (566) formará el triángulo *ADF* igual al quadrilátero propuesto *ABCD*. Divídase la base *AF* por medio en *G*, y tírese la *DG*; el triángulo *ADG* será la mitad del triángulo *ADF*, ó del quadrilátero *ABCD*. Finalmente, desde *G* tírese *GH* paralela á *DE*, y tírese *EH*, la qual dividirá en dos partes iguales el quadrilátero.

Por ser paralelas las rectas *DE*, *GH*, los dos triángulos *DEH*, *DEG* son iguales uno con otro; si de cada uno se quita el triángulo *DIE*, los triángulos residuos *DIH*, *EIG* serán iguales. Ahora bien; si al quadrilátero *AEID* se añade primero el uno de estos residuos, y despues el otro, resultará el quadrilátero *AEHD* igual al triángulo *ADG*, y por consiguiente á la mitad de todo quadrilátero *ABCD*.

571 Cuestion VI. *Dividir un polígono en quantas partes iguales se quiera con lineas tiradas desde uno de sus ángulos.*

116. Sea el polígono *ABCDE* por dividir en tres partes iguales v. g. Empezarémos transformando el polígono en un triángulo (566), cuya base *FG* partirémos en tres partes iguales en *H*, *I*, y con tirar las *DH*, *DI* estará dividido el polígono conforme se pide.

Porque, cada uno de los triángulos *FDH*, *HDI*, *IDG* que tienen por base la tercera parte de *FG*, y la misma altura que el triángulo *FDG*, vale el tercio del triángulo *FDG*, y por consiguiente el tercio del polígono dado *ABCDE*.

Probemos, pues, que $DHAE = DHF$. Tiremos con esta mira las paralelas *DA*, *EF*; los triángulos *EDF*, *EAF* serán iguales. Si de cada uno se resta el triángulo *EFK*, los residuos *EDK*, *FAK* serán iguales. Luego si á cada uno se añade el triángulo *DHK*, el triángulo *DHF* será igual á la figura *DHAE*, y por lo mismo será el tercio del polygono propuesto.

Fig.

572 Esta operacion recae á veces en un caso que merece considerarse. Este caso ocurre quando hay que *dividir un polígono* ABCDE *en muchas partes iguales, v.* 117.
g. en quatro, con lineas tiradas desde uno de sus ángulos D.

Despues de transformado el polígo en triángulo (566), se dividirá su base *FG* en quatro partes iguales en *H*, *I*, *K*. Si despues se tiran las *DH*, *DI*, *DK*, cada uno de los triángulos *FDH*, *HDI*, *IDK*, *KDG* será la quarta parte del triángulo *FDG*, y por consiguiente del pentágono *ABCDE*. Pero por quanto el punto *H* cae fuera del lado *AB*, el triángulo *HDI* se reducirá al quadrilátero *ALDI*, lo que se conseguirá facilmente con tirar la *HL* paralela á la *DA*. Esta operacion es muy fácil de demostrar por los principios que dexamos sentados.

Comparacion de las superficies.

573 *Las superficies de los paralelógramos se han generalmente unas con otras como los productos de sus bases por sus alturas.*

Porque, como todo paralelógramo es igual al producto de su base por su altura (549), las superficies de los paralelógramos es preciso tengan unas con otras la misma razon que los productos que expresan sus valores.

574 Luego, *quando dos paralelógramos tienen una misma base, se han unos con otros como sus alturas; y quando tienen una misma altura ó alturas iguales, se han unos con otros como sus bases.*

Lue-

Fig. 575 Luego, como los triángulos son mitades de paralelógramos (543) de una misma base y altura que ellos, *los triángulos que tienen una misma altura se han unos á otros como sus bases; y los que tienen una misma base ó bases iguales, se han como sus alturas.*

576 *Las superficies de los paralelógramos semejantes se han unas con otras como los quadrados de sus lados homólogos.*

Porque las superficies de los paralelógramos $ABCD$, $abcd$ se han unas con otras (573) como los productos de sus bases por sus alturas; esto es, $ABCD$:
118. $abcd$ :: $BC \times AE$: $bc \times ae$. Pero si los paralelógramos $ABCD$, $abcd$ son semejantes, y AB, ab son dos lados homólogos, los triángulos AEB, aeb son semejantes (518), pues ademas del ángulo recto en E y e, han de tener tambien el ángulo B igual al ángulo b: tendrémos por consiguiente $AE : ae :: AB$: ab, ó :: $BC : bc$, por ser semejantes los paralelógramos; luego en los productos $BC \times AE$ y $bc \times ae$ podemos substituir la razon de $BC : bc$ en lugar de la de $AE : ae$ su igual, en cuyo supuesto la razon de dichos productos será la de $(BC)^2 : (bc)^2$; luego $ABCD : abcd :: (BC)^2 : (bc)^2$; y como es lícito tomar por base el lado que se quiera, hemos probado generalmente que las superficies de los paralelógramos semejantes se han unas con otras como los quadrados de sus lados homólogos.

577 *Los triángulos semejantes se han tambien unos con otros como los quadrados de sus lados homólogos.*

Porque son mitades (543) de paralelógramos de igual base y altura que ellos, y las mitades tienen unas con otras la misma razon que ~~los~~ lados.

578 *Las superficies de dos figuras semejantes qualesquiera tienen unas con otras la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos, y de sus diagonales homólogas.*

Las

Los triángulos homólogos en que pueden dividirse las figuras semejantes (523) son patentemente partes semejantes de dichas figuras; luego los triángulos tienen unos con otros la misma razon que las figuras enteras, pero los tales triángulos homólogos semejantes guardan (577) unos con otros la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos; luego las dos figuras semejantes guardan tambien unas con otras la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos. Fig.

579 Luego 1.° *Las superficies de los polígonos regulares semejantes se han unas con otras como los quadrados de sus lados homólogos, de sus perímetros, de sus radios, rectos ú oblicuos, una vez que los lados homólogos se han unos con otros como los perímetros* (527), *los radios rectos y oblicuos.*

580 Luego 2.° *Los círculos, y por consiguiente los semicírculos se han unos con otros como los quadrados de las circunferencias, de los diámetros, de los radios*, &c.

Porque podemos considerar los círculos (499) como polígonos regulares semejantes de una infinidad de lados.

581 Hemos visto (522) como una perpendicular baxada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo á la hypotenusa, divide el triángulo en otros dos semejantes con él, y semejantes 119
uno con otro; luego en virtud de lo demostrado (577) $BAC : BAP : PAC :: (BC)^2 : (AB)^2 : (AC)^2 :: BCKH : ABFG : ACDE$; pero $BAC = BAP + PAC$; luego $BCHK = ABFG + ACDE$; esto quiere decir *que el quadrado de la hypotenusa es igual á la suma de los quadrados de los otros dos lados que forman el ángulo recto.*

582 Luego 1.° Una vez que $BAC : BAP : PAC :: (BC)^2 : (BA)^2 : (AC)^2$, y que los triángulos BAC, BAP, PAC que tienen una misma altura PC, tienen unos con otros la misma razon (575) que sus ba-

Fig. bases; será $BAC : BAP : PAC :: BC : BP : CP$, y por consiguiente tambien será $(BC)^2 : (BA)^2 : (AC)^2 :: BC : BP : CP$; luego *el quadrado formado sobre la hypotenusa tiene con los quadrados formados sobre los otros dos lados, la misma razon que la hypotenusa con los segmentos correspondientes á dichos lados.*

583 Luego 2.° *Los quadrados de las cuerdas* BA, BE *tiradas desde el extremo de un diámetro* BC, *tienen unas con otras la misma razon que las porciones*
120. BD, BF *que en dicho diámetro cortan las perpendiculares bajadas desde los extremos de dichas cuerdas.*

Porque si desde los extremos A, E de las cuerdas se tiran al otro extremo C del diámetro las cuerdas AC, EC, el triángulo rectángulo BAC (416) dará $(BC)^2 : (BA)^2 :: BC : BD$ (582), y el triángulo rectángulo BEC dará $(BC)^2 : (BE)^2 :: BC : BF$. Luego $(BA)^2 : (BE)^2 :: BD : BF$.

584 Luego 3.° *El círculo trazado sobre la hypotenusa será igual á la suma de los círculos trazados sobre los otros dos lados que cogen el ángulo recto.*

Porque, si con los diámetros BC, BA, AC se
121. trazan los semicírculos BPC, BMA, ANC, estos semicírculos tendrán unos con otros la misma razon que los quadrados de sus diámetros (580), esto es, $BPC : BMA : ANC :: (BC)^2 : (BA)^2 : (AC)^2$; pero $(BC)^2 = (BA)^2 + (AC)^2$ (581); luego $BPC = BMA + ANC$; por otra parte, los semicírlos tienen uno con otro la misma razon que los círculos enteros; luego &c.

585 En la última proposicion va fundado un método para *trazar dos círculos que tengan uno con otro una razon dada v. g. la de m:n.*

Para este fin se tomarán dos lineas BD, DC que tengan una con otra la razon de $m : n$; si fuese
122. $m : n :: 1 : 3$, se tomará $DC = 3BD$, y se juntarán de modo que formen una sola linea BC, la qual se divi-

vidirá por medio en M. Desde el centro M, y con Fig. el radio MB se trazará un semicírculo; en el punto D se levantará la perpendicular DA que le encuentre en A; se tirarán las cuerdas AB, AC, y los círculos trazados sobre estas cuerdas como diámetros tendrán uno con otro la razon de $m : n$.

Porque, $(BA)^2 = BC \times CD$ (536), y por la misma razon $(CA)^2 = BC \times CD$; luego $(BA)^2 : (CA)^2 : BC \times BD : BC \times CD :: BD : CD :: 1 : 3$; pero los círculos cuyos radios son BA y CA tienen uno con otro la razon de $(BA)^2 : (CA)^2$ (580); luego tambien tendrán la razon de $BD : CD$, ó de $1 : 3$, como se pide.

586 *Si un quadrado y un pentágono son ambos regulares é isoperímetros, el que mayor número de lados tenga, tendrá mayor superficie; quiero decir que en general, entre las figuras isoperímetras regulares, la que mas lados tiene tiene mayor superficie.*

Porque, si inscribimos un círculo en cada una de las dos figuras propuestas, y tiramos los radios CA, CB, el pentágono será igual al producto de la mitad de su perímetro por el radio CB (554), y 123. el quadrado tambien igual al producto de la mitad de su perímetro por el radio CA. Ya que, por lo supuesto, los perímetros son iguales, el pentágono y el quadrado tienen uno con otro la misma razon que sus radios CB, CA; pero el radio CB es mayor que el radio CA; pues si los dos radios fuesen iguales, sus dos círculos tambien lo serian, y por consiguiente el perímetro del pentágono seria menor que el perímetro del quadrado, porque de todos los polígonos regulares circunscriptos á círculos iguales, el que mayor número de lados tiene, tiene tambien menor perímetro (499). Pero por lo supuesto, los perímetros del pentágono y del quadrado son iguales; luego el círculo del pentágono

 ha

Fig. ha de ser mayor que el quadrado; luego el radio *CB* es mayor que *CA*; luego la superficie del pentágono es mayor que la del quadrado.

Lo propio se probará, y del mismo modo, respecto de otros dos polígonos regulares isoperímetros, de los quales el uno tenga mas lados que el otro.

587 Luego, *ya que el círculo es un polígono de una infinidad de lados* (499), *tiene mas superficie que otra figura qualquiera de igual perímetro.*

De los Planos.

588 Dejamos dicho desde el principio que por *plano* entendemos una superficie tan lisa é igual, que se le puede aplicar en todos sus puntos, sin que quede hueco alguno, una regla, ó una linea recta.

589 Por consiguiente, *por una linea recta pueden pasar una infinidad de planos*, así como por un mismo punto pueden pasar infinitas lineas rectas.

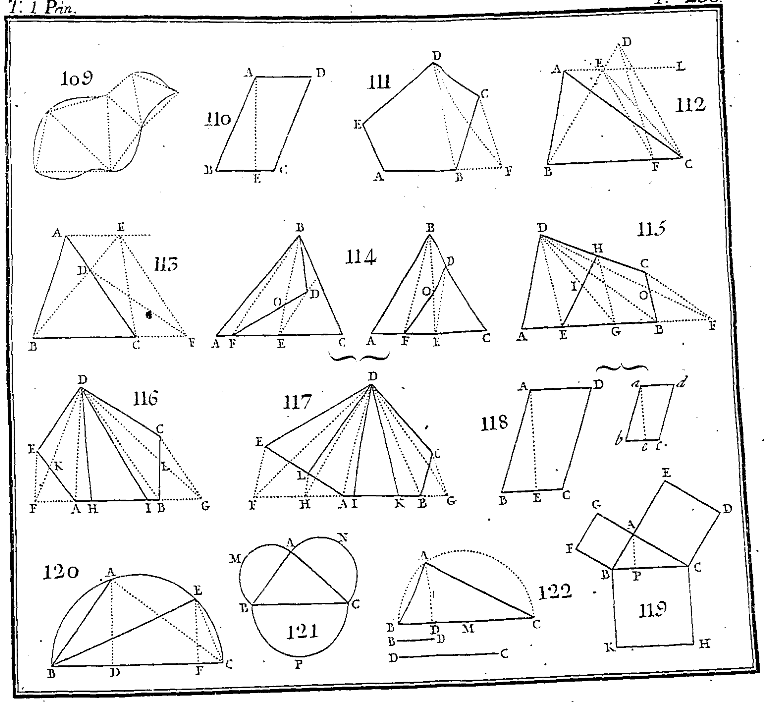
590 Luego 1.° *Una linea recta ó dos puntos qualesquiera no bastan para determinar la posicion de un plano; se necesitan por lo menos tres puntos para que esté de todo punto determinado.*

Porque, si á los tres puntos se tiran tres lineas rectas, formarán un triángulo, que es una superficie plana. Luego si por tres puntos dados mas arriba ó mas abajo de un plano qualquiera se hace pasar otro plano, quedará de todo punto determinada la posicion del último plano respecto del primero.

591 2.° *La interseccion de dos planos uno con otro es una linea recta.*

Porque, si en la tal interseccion tomamos dos puntos, la recta que pasare por los dos puntos, no puede menos de estar toda en ambos planos, por el supuesto (288). Luego la seccion comun de dos planos es una linea recta.

3.°



592 3.° *Dos lineas rectas paralelas estan en un* Fig.
mismo plano; tambien están en un mismo plano dos rectas que se cortan.

Porque, si en cada una de estas últimas lineas se toma un punto, y desde el uno al otro se tira una linea, se originará un triángulo cuyo vértice estará en el punto de interseccion de las dos rectas; luego las dos rectas que se cortan y son los lados de dicho triángulo, estan en un mismo plano.

593 *Una linea* AB *perpendicular á un plano* MN 124.
es perpendicular á todas las demas lineas puestas en el mismo plano, que pasan por el extremo B *de la perpendicular.*

Si no lo fuera, la linea *AB* se inclinaria á algun lado del plano; esto implica, pues suponemos que la *AB* es perpendicular al plano.

594 Por consiguiente *dos lineas* AB, CD *perpen-* 125.
diculares á un mismo plano MN, *son paralelas.*

Porque, si por los extremos *B*, *D* de las tales rectas tiramos la *BD*, las dos lineas *AB*, *CD* serán perpendiculares (593) á *BD*, y por lo mismo (381) paralelas una á otra.

595 *Desde un punto dado en un plano ó fuera de él no se puede tirar mas que una perpendicular al mismo plano.*

Porque, si se pudieran tirar dos, desde un mismo punto, se podrian tirar dos perpendiculares á una misma recta, cuya consecuencia repugna (354 y 355).

596 Luego si un plano *AB* es perpendicular á 126.
otro *CD*, y por un punto qualquiera *G* de su comun seccion se levanta una perpendicular *FG* al mismo plano *CD*, esta recta estará toda en el plano *AB*. Porque, si la tal recta no estuviese en el plano *AB*, seria posible tirar en un mismo plano, y por un mismo punto mas de una perpendicular á una misma recta *AE*, cuya consecuencia

Fig. es un absurdo (354 y 595).

597 Luego 1.° Quando un plano *AB* es perpendicular á otro plano *CD*, pasa indefectiblemente por
126. todas las perpendiculares á la comun seccion *AE*.

598 2.° Y recíprocamente, quando una linea *FG* es perpendicular á un plano *CD*, y otro plano *AB* pasa por *FG* cogiéndola, el plano *AB* es perpendicular al plano *CD*.

599 *La medida de la inclinacion de dos planos uno respecto de otro es el ángulo* CDE *que causan las*
127. *dos lineas* CD, DE *perpendiculares á la comun seccion* AB *de los planos, tiradas la una en el plano* QB, *y la otra en el plano* AP.

Porque, si nos figuramos el punto *C* sobrepuesto al punto *E*, y que con dar despues el plano *QB* la vuelta al rededor de la linea *AB*, ande el punto *C* el arco *EC*, es constante (330) que este arco medirá el ángulo *CDE*, el qual es patentemente el mismo ángulo que causan los dos planos. Infiérese de aquí

600 1.° Que por ser la inclinacion de dos planos la misma que la de las perpendiculares á un mismo punto de su comun seccion, se les puede aplicar á los planos todo lo que dejamos probado (343 &c.) acerca de las lineas que se encuentran, y por consiguiente

1.° *Quando dos planos se cortan, los ángulos opuestos al vértice son iguales* (347).

601 2.° *Todos los ángulos juntos que causan muchos planos que se cortan en una linea, valen* 360° (344)

602 3.° *Quando dos planos paralelos son cortados por otro plano, los ángulos internos alternos, ó alternos externos son iguales* (373 y 374); *y los ángulos internos ó externos de un mismo lado valen juntos dos ángulos rectos* (375 y 376).

603 4.° Y recíprocamente, *siempre que en dos planos cortados por otro plano, se verifica alguna de* Fig.
estas circunstancias, los dos planos son paralelos. (377).

604 *Las intersecciones* AB, CD *de dos planos paralelos* PQ, MN *cortados por otro plano* ABCD, *son* 128.
lineas paralelas.

Porque, si las lineas *AB*, *CD* que son lineas rectas (591), no fueran paralelas, se encontrarian, y por consiguiente los planos *PQ*, *MN* se encontrarian tambien; esto implica, una vez que por lo supuesto los dos planos son paralelos; luego &c.

605 *Si dos planos* EF, DG *son perpendiculares á un mismo plano* MN, *su comun seccion* AB *tambien se-* 129.
rá perpendicular á dicho plano.

Porque, como en el punto *B* donde la comun seccion de los planos *EF*, *DG* encuentra el plano *MN*, se puede levantar una perpendicular á dicho plano, la qual toda estará en el plano *DG* (596), y por el mismo punto *B* tambien se puede levantar una perpendicular al plano *MN*, la qual estará igualmente toda en el plano *EF*; por otra parte, como desde un punto *B* no se le puede levantar á un plano (595) mas que una perpendicular, es constante que esta linea estará á un tiempo en el plano *DG* y en el plano *EF*; luego la interseccion comun de los dos planos es perpendicular al plano *MN*.

606 Llamamos *ángulo sólido* el espacio indefinito *BACD* que causan muchos ángulos planos *DAB*, 130.
BAC, *CAD* que se juntan en un mismo punto *A*.

607 Se necesitan tres ángulos planos por lo menos para formar un ángulo sólido; y *quando un ángulo sólido* A *es causado de tres ángulos planos, la suma de dos ángulos planos* BAD, DAC *qualesquiera es siempre mayor que el tercer ángulo* CAB.

Tírese á arbitrio la linea *BC*, y hágase el án-

 gu-

Fig. gulo BAE igual al ángulo BAD, y la linea AD igual con la AE; tírese BD que será igual á BE, por ser iguales los triángulos BAD, BAE (453); tírese tambien la CD. Esto supuesto, en los trián-
130. gulos DAC, CAE cuyos lados DA, AE son iguales, y el lado AC es comun á ambos, la base DC del primero es mayor que la base CE del segundo, porque $BD+DC$ es mayor que BC (440); luego si de la suma de aquellas se quita la linea BD, y de la linea BC se quita la $BE=BD$, será la primer resta DC mayor que la segunda resta CE; luego el ángulo CAE será menor que DAC, y todo el ángulo BAC menor que la suma de los dos ángulos BAD y DAC.

608 *La suma de todos los ángulos planos, sean quantos se quiera, que forman un ángulo sólido, nunca llega á 360°, y por consiguiente jamas llega á valer quatro ángulos rectos.*

Figurémonos por debajo del vértice S del ángu-
131. lo sólido un plano qualquiera $ABDEF$ que corte todos los ángulos planos que causan el ángulo sólido. Desde el vértice S bájese la perpendicular SC al mismo plano, y tírense las lineas CA, CB, CD, CE, CF á todos los ángulos del polígono $ABDEF$. Es constante que todos los ángulos en C valen (344) quatro ángulos rectos, y lo es tambien que todos los ángulos ASB, BSD, DSE &c. son menores que sus correspondientes ACB, BCD, DCE &c. pues teniendo unos y otros ángulos bases comunes, los primeros tienen su vértice á mayor distancia de su base que no los segundos; y como el ángulo sólido en S se compone de todos los primeros, síguese que todos los ángulos planos que componen un ángulo sólido, valen menos de quatro ángulos rectos.

De

Fig.

De los Sólidos.

609 Por lo dicho (299) se llama *volumen ó sólido* todo lo que tiene las tres dimensiones de longitud, latitud y profundidad. Esta es la tercera de las tres especies de extension que dimos á conocer allí mismo, y de la qual nos resta tratar, ciñéndonos á los sólidos terminados por superficies planas; entre los que son terminados por superficies curvas, solo consideraremos el cilindro, el cono ó pirámide cónica, y la esfera.

Del Prisma y de la medicion de su Superficie.

610 Llamamos *prisma* todo sólido cuyas dos caras opuestas son dos planos iguales y paralelos, y 132.
las demas caras son paralelógramos. Nos le pode- ysig.
mos figurar como formado por el movimiento de un plano BDF moviéndose paralelo á sí mismo á lo largo de una recta AB.

611 Los dos planos paralelos se llaman las bases del prisma. La perpendicular LM tirada desde un pun- 132.
to de la una de las bases á la otra, se llama *la altura del prisma*, y se llaman *aristas del prisma* las lineas como BA donde se juntan ó concurren dos caras inmediatas.

612 El prisma es *recto* quando los aristas son per- 132.
pendiculares á la base; en cuyo caso todas las aristas son iguales á la altura del sólido. El prisma es *oblicuo* quando las aristas no son perpendicula- 133.
res á la base.

613 Los prismos toman nombre 1.° del número de los lados de su base, por cuya razon:

Si la base es un triángulo, se llama *prisma* 132.
triangular.

T 4 Si

Fig. Si la base es un quadrilátero, se llama *prisma*
134. *quadrangular*; y así de los demas.

614 2.° Tambien toma nombre el prisma de la figura de su plano generador; por cuya razon:

134. Quando el plano generador BF es un paralelógramo, en cuyo caso todas las caras lo son tambien, el prisma se llama *paralelipipedo*.

Quando el plano generador es un quadrado BD,
135. y la arista AB es igual y perpendicular al lado BC del quadrado, el prisma se llama *cubo*. Es claro que las seis caras del cubo son seis quadrados iguales.

Quando el plano generador es un círculo $BEDF$, el prisma se llama *cilindro*. El cilindro es *recto*
136. quando la linea LM que pasa por los centros de las dos bases opuestas, y se llama *exe* del cilindro, es perpendicular á las mismas bases; y se llama ci-
137. lindro *oblicuo* siempre que su exe LM está inclinado á las bases.

615 Nos podemos figurar el cilindro como engen-
136. drado ó por el movimiento del círculo $BEDF$ al moverse paralelo á sí mismo por una recta AB, ó por el movimiento de un paralelógramo $ABML$ dando vuelta al rededor de su lado LM, el qual es el exe del cilindro.

616 Todo esto presupuesto, como las caras laterales del prisma son paralelógramos, cuya medicion ya queda enseñado (549) como se executa, y sus bases son figuras que tambien queda dicho (549 y sig.) como se miden, la suma de todas las caras medidas separadamente compondrá la superficie del prisma; por cuyo motivo, sin detenernos á individualizar mas este punto, vamos á dar para la misma operacion una regla la mas sucinta y general que cabe.

617 *La superficie de un prisma, no entrando la de ambas bases, es igual al producto de una arista* AF *multiplicada por el perímetro de una seccion* abcde *perpendicular á dicha arista.* Fig.

Porque, como el plano $abcde$ es perpendicular á la arista AF, es tambien perpendicular á todas las 133.
demas aristas GB, HC &c. paralelas á AF. Luego si nos figuramos que las rectas AF, BG, CH &c. son las bases de los paralelógramos FB, GC, HD &c. las rectas ab, bc, cd &c. serán sus alturas. Luego la superficie lateral del prisma será $AF\times ab+BG\times bc+CH\times cd+$&c. ó, por ser iguales (472) las lineas AF, BG, CH, &c. será $AF\times ab+AF\times bc+AF\times cd$&c. ó finalmente $AF\times(ab+bc+cd+$&c.)

618 De aquí inferirémos, 1.° que quando un prisma es recto, la seccion $abcde$ es lo mismo que la base $ABCDE$, y la arista AF es igual entonces á la altura (612) del prisma; luego *la superficie de un prisma recto* (no entrando las dos bases) *es igual al producto del perímetro de la base multiplicado por la altura.*

619 2.° Luego *la superficie convexâ de un cilindro recto es igual al producto de la altura* AB *por la cir-* 136.
cunferencia de qualquiera de sus dos bases.

620 3.° *Y la superficie convexâ de un cilindro oblicuo es igual al producto de su lado* AB *multiplicado por* 137.
la circunferencia de una seccion bfde *perpendicular á dicho lado.*

Para valuar la superficie del cilindro oblicuo es preciso contentarnos por ahora con medirla *mecánicamente* enrollando un hilo al cilindro por el trazo de la seccion. Este método, bien que no de todo punto exâcto, basta para los usos prácticos.

Medicion de la solidez de los Prismas.

621 *Medir un sólido es lo mismo que hallar el número de veces que en él cabe otro sólido, cuyas dimensiones son conocidas.*

Su-

Fig. Supongamos, pues, que se nos ofrezca valuar la
134. solidez de un prisma *ABDFHGEC*, v. gr. y que el sólido *abdfb* sea la unidad de medida con que se ha de hacer la medicion. Ya se se ve que quantas veces quepa su base en la base *BDFH* del prisma, otras tantas veces cabrá en este último el sólido que sirva de medida, sea la que fuere la altura del prisma. Por lo mismo, quantas veces quepa la altura *ab* de la unidad de medida en la altura *AB* del prisma *ABD* &c. otras tantas veces cabrá tambien en el prisma la tal unidad. Luego la solidez del prisma sigue la razon compuesta del número de veces que cabe en su base la base de la unidad sólida, y del número de veces que en la altura del mismo prisma por medir cabe la altura del sólido, unidad de medida. De aquí se saca la siguiente regla general para la medicion de todos los prismas.

Búsquese el número de veces que la base del sólido unidad de medida, cabe en la base del prisma por medir; búsquese tambien el número de veces que cabe en la altura del prisma la altura de la unidad sólida; multiplíquense uno por otro los dos números hallados, su producto expresará quantas veces se habrá de tomar la unidad sólida para sacar la solidez del prisma propuesto.

622 Es muy comun dar la regla que acabamos de proponer, en estos términos: *la solidez de un prisma es igual al producto de su base por su altura.*

Aquí harémos una observacion análoga á la que hicimos (549) con motivo de la regla que sentamos allí para medir las superficies. La regla puesta en los términos que acabamos de decir seria muy contraria á los principios de la multiplicacion si se tomára al pie de la letra; porque como el multiplicando es una superficie, y el multiplicador una linea, no podria verificarse la multiplicacion por no ser el mul-

multiplicador un número abstracto (42); y aun Fig.
quando quisiéramos pasar que el producto constase de unidades sólidas, no serian estas unidades de la misma especie que las del multiplicando, conforme ha de ser (42). Sin embargo, como de dicha expresion, por mas que padece las referidas nulidades, no se sigue ningun error en la práctica, y es por otra parte mas fácil de estamparse en la memoria, tambien la usarémos en esta obra. Luego

623 1.º Si el prisma es recto, *su solidez será igual* 132.
al producto de su base por una de sus aristas, las qua- 134.
les en este caso son iguales con su altura.

624 2.º *La solidez de todo cilindro es igual al producto de su base* BDEF *por su altura* LH, *y quando es* 137.
recto, al producto de su base BDEF *por su exe* LH. 136.

625 3.º *La solidez de un prisma ó cilindro será igual á la de otro prisma ó cilindro siempre que sus bases sean recíprocamente proporcionales á sus alturas.* Porque entonces el producto que expresa la solidez del uno de los dos cuerpos es igual al producto que expresa la solidez del otro cuerpo.

De la Pirámide, y de la medicion de su superficie.

626 Damos el nombre de *pirámide* á un sólido cuya base es una figura qualquiera, y cuyas caras son triángulos, cuyo vértice está en un mismo punto *S*, llamado *cúspide* ó *vértice* de la pirámide, y sus bases son los mismos lados de la base de la pirámide.

Podemos figurarnos la pirámide como formada por el movimiento de una linea, la qual teniendo uno de sus extremos asegurado en *S* v. gr. anduviese su otro extremo todos los lados de la figura que sirve de base.

627 La perpendicular *SO* tirada desde el cúspide 138.
de la pirámide, se llama la *altura* de la pirámide.

Las

Fig. 628 Las pirámides toman nombre del número de los lados de su base; por lo que,

139. Quando la figura de la base es un triángulo, la pirámide se llama *triangular*.

140. Quando la base es un quadrilátero, la pirámide se llama *quadrangular*; y así prosiguiendo.

138. 629 Quando el polígono de la base es regular, y ademas de eso, la linea que desde el cúspide va al centro del polígono, y se llama *el ege* de la pirámide, es perpendicular á la base, la pirámide se llama *regular*.

Y es *irregular* la pirámide quando su base no es un polígono regular.

En toda pirámide regular todos los triángulos laterales *ASB*, *BSC*, *CSD*, &c. son patentemente isósceles, y de todo punto iguales unos con otros; y por consiguiente, si desde el cúspide *S* se tira una perpendicular *SK* á uno de los lados de la base, esta perpendicular, cuyo nombre es *apotema* de la pirámide, cortará la *AB* por el medio (494), y podrá considerarse como la altura de todos los triángulos.

141. 630 Quando la base de la pirámide es un círculo, el qual puede considerarse como un polígono de una infinidad de lados (499), la pirámide se llama *cono*, ó *pirámide cónica*.

Todas las rectas *SA*, *SC* &c. tiradas desde el cúspide á la circunferencia de la base, se llaman los *lados* del cono, y la recta que desde el cúspide va al centro del círculo, se llama el *ege* del cono.

141. 631 El cono puede ser *recto* ú *oblicuo*. El cono es recto quando el ege *SM* es perpendicular á la base, y entonces es la alura del cono.

142. Cono oblicuo es aquel cuyo ege está inclinado á la base.

632 Todo esto presupuesto, *la superficie de toda pirámide se saca midiendo la superficie de su base, y* Fig.
la superficie de los triángulos laterales; la suma de todas estas superficies es la superficie de toda la pirámide.

Aunque esta regla es general, vamos á dar sin embargo para medir la superficie de una pirámide regular otra regla que debe preferirse por mas sencilla.

633 *La superficie lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del producto de su apotema por el perímetro del polígono de su base.*

Porque la superficie lateral de una pirámide es 138.
la suma de todos los triángulos laterales *ASB*, *BSC*, &c. Pero como en la pirámide regular el apotema *SK* es (629) la altura de dichos triángulos, la suma de estos será $\frac{SK\times AB}{2}+\frac{SK\times BC}{2}+$ &c. ó, lo que es todo uno, $SK\times\frac{(AB+BC+\&c.)}{2}$

634 *La superficie lateral de un tronco ó trozo de pirámide regular de bases paralelas es igual al producto de la altura de uno de los trapecios laterales por la mitad de la suma de los contornos de las dos bases.*

Porque, ya que las dos bases *ABCDE*, *abcde* 143.
del trozo de pirámide son paralelas, sus caras de esta son trapecios iguales, cuyos lados paralelos son los lados de las bases superior é inferior, y la altura es igual á la perpendicular tirada entre los lados paralelos de los trapecios; la suma de cuyos trapecios es igual al producto de su altura comun por la semisuma de los perímetros de las bases (553). Si á la suma de los trapecios se añaden las dos bases, la suma será la superficie de toda la pirámide.

635 Y como la superficie de un trapecio es igual (553) al producto de su altura por una linea tirada á distancias iguales de los dos lados paralelos, podemos de-

Fig. decir que la *superficie lateral de un trozo de pirámide regular es igual al producto de la altura de uno de los trapecios laterales por la suma de las lineas* no, op &c. *tiradas en los trapecios á distancias iguales de las bases paralelas, cuya suma es patentemente el perímetro de una seccion* mnopq, *hecha á distancias iguales de las dos bases paralelas.*

636 Como lo que dexamos probado (633) no pende del número de los lados de la base de la pirámide regular ó de su trozo, y fuera de esto un cono es una pirámide cuya base es un polígono regular de una infinidad de lados (499), podemos afirmar que *quanto queda demostrado acerca de las pirámides regulares y sus trozos, se verifica igualmente en los conos rectos y sus troncos.*

637 De aquí, y de lo demostrado (633) inferirémos varias consecuencias.

1.ª *La superficie convexá de un cono recto es igual á la mitad del producto de su lado por la circunferencia de su base.*

638 2.ª *La superficie convexá de un trozo de cono recto con bases paralelas es igual* (634) *al producto*
144. *de su lado* AB *multiplicado por la semisuma de las circunferencias de sus dos bases.*

639 3.ª *Tambien es igual al producto de su lado* AB *por la circunferencia de una seccion* mnop *hecha en el trozo á distancias iguales de las bases paralelas.*

De la solidez de la Pirámide.

640 *Si cortamos una pirámide* SABCD *con un pla-*
145. *no* mn *paralelo á la base* ABCD *de la pirámide*; 1.° *el plano cortará todas las aristas* SA, SB, SC, &c. *en partes proporcionales que tendrán unas con otras la misma razon que las de otra recta* SE, *tirada desde el cúspide de la pirámide al plano de su base, y la misma razon tambien que dos lados homólogos qualesquiera* AB, ab *de las secciones.*

Fig.

2.° *La seccion* abcd *será semejante á la base* ABCD.

3.° *Las areas de las secciones* ABCD, abcd *tendrán unas con otras la misma razon que los quadrados de las lineas* SE, Se. 145.

Porque, 1.° Si nos figuramos que por la recta *SE* y por las aristas de la pirámide pasan unos planos *SEA*, *SEB*, *SEC*, &c. estos planos cortarán la seccion *abcd* en *ea*, *eb*, *ec*. Sentado esto, como las comunes secciones de dos planos paralelos son lineas paralelas (604), los triángulos *ASE*, *BSE*, *ASB*, *BSC*, &c. serán semejantes á sus correspondientes *aSe*, *bSe*, *aSb*, *bSc*, &c. (517); luego los lados de estos triángulos serán proporcionales, y darán, comparándolos unos con otros de dos en dos, $SE : Se :: SA : Sa :: SB : Sb :: SC : Sc$ &c. $:: AB : ab :: BC : bc$ &c.

2.° Una vez que los triángulos *AEB*, *BEC*, *CED* &c. en que está dividido el plano *ABCD* de la base con los planos que pasan por la recta *SE*, y las aristas de la pirámide, tienen sus lados respectivamente paralelos á los de los triángulos *aeb*, *bec*, *ced* &c. en que está dividida la seccion *abcd* con los mismos planos; es patente que todos estos triángulos son semejantes unos á otros (520); luego las dos figuras *ABCD*, *abcd* que se componen de los tales triángulos, serán figuras semejantes (524).

3.° Y por ser semejantes las figuras *ABCD*, *abcd* tendrán unas con otras la misma razon que los quadrados de sus lineas homólogas (578), y por lo mismo $ABCD : abcd :: (AB)^2 : (ab)^2 :: (SE)^2 : (Se)^2$, por ser $AB : ab :: SE : Se$.

641 De esta proposicion se deduce 1.° *que si cortamos las dos pirámides* SABCD, SFGH *que tienen igua-*

Fig. decir que la *superficie lateral de un trozo de pirámide regular es igual al producto de la altura de uno de los trapecios laterales por la suma de las lineas* no, op &c. *tiradas en los trapecios á distancias iguales de las bases paralelas, cuya suma es patentemente el perímetro de una seccion* mnopq, *hecha á distancias iguales de las dos bases paralelas.*

636 Como lo que dexamos probado (633) no pende del número de los lados de la base de la pirámide regular ó de su trozo, y fuera de esto un cono es una pirámide cuya base es un polígono regular de una infinidad de lados (499), podemos afirmar que *quanto queda demostrado acerca de las pirámides regulares y sus trozos, se verifica igualmente en los conos rectos y sus troncos.*

637 De aquí, y de lo demostrado (633) inferirémos varias consecuencias.

1.ª *La superficie convexá de un cono recto es igual á la mitad del producto de su lado por la circunferencia de su base.*

638 2.ª *La superficie convexá de un trozo de cono recto con bases paralelas es igual* (634) *al producto*
144. *de su lado* AB *multiplicado por la semisuma de las circunferencias de sus dos bases.*

639 3.ª *Tambien es igual al producto de su lado* AB *por la circunferencia de una seccion* mnop *hecha en el trozo á distancias iguales de las bases paralelas.*

De la solidez de la Pirámide.

640 *Si cortamos una pirámide* SABCD *con un pla-*
145. *no* mn *paralelo á la base* ABCD *de la pirámide*; 1.° *el plano cortará todas las aristas* SA, SB, SC, &c. *en partes proporcionales que tendrán unas con otras la misma razon que las de otra recta* SE, *tirada desde el cúspide de la pirámide al plano de su base, y la mis-*

misma razon tambien que dos lados homólogos qualesquiera AB, ab *de las secciones.* Fig.

2.° *La seccion* abcd *será semejante á la base* ABCD.

3.° *Las areas de las secciones* ABCD, abcd *tendrán unas con otras la misma razon que los quadrados de las lineas* SE, Se. 145.

Porque, 1.° Si nos figuramos que por la recta *SE* y por las aristas de la pirámide pasan unos planos *SEA*, *SEB*, *SEC*, &c. estos planos cortarán la seccion *abcd* en *ea*, *eb*, *ec*. Sentado esto, como las comunes secciones de dos planos paralelos son lineas paralelas (604), los triángulos *ASE*, *BSE*, *ASB*, *BSC*, &c. serán semejantes á sus correspondientes *aSe*, *bSe*, *aSb*, *bSc*, &c. (517); luego los lados de estos triángulos serán proporcionales, y darán, comparándolos unos con otros de dos en dos, $SE : Se :: SA : Sa :: SB : Sb :: SC : Sc$ &c. $:: AB : ab :: BC : bc$ &c.

2.° Una vez que los triángulos *AEB*, *BEC*, *CED* &c. en que está dividido el plano *ABCD* de la base con los planos que pasan por la recta *SE*, y las aristas de la pirámide, tienen sus lados respectivamente paralelos á los de los triángulos *aeb*, *bec*, *ced* &c. en que está dividida la seccion *abcd* con los mismos planos; es patente que todos estos triángulos son semejantes unos á otros (520); luego las dos figuras *ABCD*, *abcd* que se componen de los tales triángulos, serán figuras semejantes (524).

3.° Y por ser semejantes las figuras *ABCD*, *abcd* tendrán unas con otras la misma razon que los quadrados de sus lineas homólogas (578), y por lo mismo $ABCD : abcd :: (AB)^2 : (ab)^2 :: (SE)^2 : (Se)^2$, por ser $AB : ab :: SE : Se$.

641 De esta proposicion se deduce 1.° *que si cortamos las dos pirámides* SABCD, SFGH *que tienen igua-*

Fig. *iguales sus alturas* SE, SI *con un plano* mn *paralelo al plano de sus bases, las secciones* abcd, fgh
tendrán una con otra la razon de las bases ABCD,
145. FGH; *y si estas fuesen iguales, tambien lo serán las secciones.*

Porque, por lo probado últimamente, y lo demostrado (578), será $ABCD : abcd :: (SE)^2 : (Se)^2$; por la misma razon $FGH : fgh :: (SI)^2 : (Si)^2$; pero $(SE)^2 = (SI)^2$, pues suponemos $SE = SI$; luego $(Se)^2 = (Si)^2$, y por consiguiente $(SE)^2 : (Se)^2 :: (SI)^2 : (Si)^2$; luego $ABCD : abcd :: FGH : fgh$.

642 2.° *Luego las pirámides de alturas y bases iguales, tienen solideces iguales, aunque sean sus bases de figuras diferentes.*

Porque, una vez que por lo supuesto son igua-
145. les las bases $ABCD$, FGH, las secciones $abcd$, fgh
lo serán tambien (641); y si suponemos estas secciones de grueso infinitamente pequeño, las podrémos considerar como los elementos de la pirámide. Por otra parte, por ser, segun suponemos, iguales las alturas de las pirámides, se podrá hacer en cada una un mismo número de secciones, y será por consiguiente uno mismo el número de los elementos iguales de que constan dichas pirámides; luego serán iguales.

146. 643 *Toda pirámide triangular es la tercera parte de una prisma triangular de la misma base y altura que ella.*

Desde uno de los ángulos A del prisma triangular $ABCFED$ tírense las diagonales AD, AF, en las caras laterales $ABDE$, $ACEF$; supongamos ahora un plano, el qual pasando por las diagonales parta el prisma en dos pirámides, la una triangular $ADEF$, la otra quadrangular $ABCFD$. La primera tiene la misma base, y la misma altura que el prisma, pues su cúspide A está en la base

se superior del prisma. Supongamos ahora la segun- Fig.
da pirámide $ABCFD$ cortada con otro plano que
pasa por las aristas AC, AD, de lo que se han de 147.
originar dos pirámides $ABCD$, $ACFD$, cuyos vér- y
tices estarán en el mismo punto A, y cuyas bases 148.
serán los triángulos iguales BCD, FCD (470); luego estas dos pirámides serán iguales en solidez (642). Pero si comparamos la pirámide $ABCD$ con la pirámide $ADEF$, y las consideramos como que tienen sus cúspides en los puntos D, A, echarémos de ver que pues sus bases son los triángulos iguales BAC, DEF, y sus alturas son tambien iguales, las dos pirámides serán iguales una con otra. Luego las tres pirámides $ADEF$, $DBAC$, $ACFD$, en que está dividido el prisma, son iguales en solidez, y por consiguiente una de ellas $ADEF$ que tiene la misma base y altura del prisma, es su tercera parte.

644 De aquí se infiere: 1.° *Que toda pirámide polígona es el tercio de un prisma de misma base y altura que ella.*

Porque, siempre que se quiera la pirámide y el prisma podrán dividirse respectivamente en un mismo número de pirámides y prismas triangulares de una misma base y altura; y como cada una de estas pirámides será la tercera parte del prisma correspondiente, síguese que toda la pirámide, sea recta ú oblicua, regular ó irregular, siempre será el tercio del prisma que tenga la misma base y altura que ella.

645 2.° *Luego la solidez de toda pirámide es el tercio del producto de su base por su altura.* Porque la solidez del prisma es igual á todo este producto (621).

646 3.° *La solidez de todo cono, recto ú oblicuo, es la tercera parte del producto de su base por su altura.* Porque el cono es una pirámide cuya base es un círculo.

Fig. 647 Por lo que mira á *la solidez del trozo de pirámide ó cono*, quando son paralelas sus dos bases opuestas, *se buscará primero la altura de la pirámide que falta* Sabc, *y despues se calculará la solidez de la pirámide entera, y la de la pirámide quitada; finalmente se restará la solidez de la pirámide quitada de la solidez de toda la pirámide, la resta será la solidez del trozo.*

Si se me ofrece sacar v. gr. la solidez del trozo
149. *ABCcba*, multiplicaré la superficie *ABC* por el tercio de la altura *SE*; multiplicaré igualmente la superficie *abc* por el tercio de la altura *Se*, y restaré el último producto del primero. Pero como no conozco ni la altura de toda la pirámide, ni la de la pirámide quitada, determinaré las dos alturas del modo siguiente.

Sé (640) que las lineas *SA*, *SB*, *SE* &c. estan cortadas proporcionalmente con el plano *abc*, y que tienen con sus partes *Sa*, *Sb*, *Se* la misma razon que *AB* con *ab*; luego *AB* : *ab* : : *SE* : *Se*; y como (dividendo) *AB*—*ab* : *AB* : : *SE*—*Se* : *SE*, será *AB*—*ab* : *AB* : : *eE* : *SE*.

Pero quando el trozo es conocido, puedo medir facilmente los lados *AB*, *ab*, y la altura *eE*; luego por la proporcion últimamente sacada podré calcular el quarto término *SE*, altura de toda la pirámide; restando de esta la del trozo, conoceré la altura de la pirámide quitada.

De la Esfera, de sus sectores y segmentos; y de la medicion de sus superficies.

648 Llámase *Esfera* un sólido *ABDE* terminado
150. por una superficie curva, cuyos puntos todos estan á igual distancia de un punto interior *C*, que es su centro. Podemos figurarnos la esfera como formada por el semicírculo *ABD* dando la vuelta al rededor de su diámetro *AD*, el qual se llama el *exe* de la esfera; llamándose polos de la esfera los dos puntos extremos *A*, *D* del diámetro. Fig. 150.

649 Como cada punto *B* del semicírculo traza, al dar la vuelta, un círculo; si nos figuramos la esfera cortada con un plano perpendicular al diámetro, la seccion por qualquier parte que se haga, siempre será un círculo. Y como esta misma esfera puede considerarse como originada de otro semicírculo qualquiera *FHG* ó *HFI*, respecto de los quales se verificará igualmente que las secciones perpendiculares á sus diámetros son círculos, hemos de inferir que *toda seccion de la esfera con un plano es un círculo.*

650 Los círculos que pasan por el centro de la esfera se llaman *círculos máximos* de la esfera, y los que no pasan por el centro se llaman *círculos menores.*

651 Síguese de aquí que *los círculos máximos de la esfera son todos iguales unos con otros*, porque el radio de todos es el radio mismo de la esfera.

2.° *Que los círculos menores solo son iguales unos con otros los que pasan á distancias iguales del centro.* Porque solo estos tienen radios iguales unos con otros (363).

652 *Todo plano que corta la esfera sin pasar por su centro, la divide en dos partes desiguales* DFKHL, 150.
AFKHL; *llamándose la primera* segmento mayor; *la otra* segmento menor.

La superficie convexâ del segmento menor se llama *casco*, ó *casquete esférico.*

La superficie convexâ de una porcion de esfera *BMENFKHL* que está entre dos planos paralelos se llama *zona* ó *faxa.*

 Fi-

Fig. Finalmente, se llama *sector de esfera* el sólido *CFALHK* originado de la vuelta que dá el sector
150. de círculo *AFC* al rededor del radio AC. Este sólido se puede considerar como compuesto de un cono *CFKHL*, y de un segmento esférico *AFKHL*. Todo esto presupuesto,

653 *La superficie de la esfera* AFBG *es igual á la*
151. *superficie convexâ del cilindro* EDHI *circunscripto á la esfera.*

Consideremos la esfera como originada del semicírculo *AFB* dando la vuelta al rededor de su
152. diámetro *AB*, y el cilindro como originado del rectángulo *AEDB* circunscripto al semicírculo, dando la vuelta. Si tiramos al exe de revolucion *AB* las perpendiculares infinitamente próximas *mp*, *nq*, quedarán determinadas en el arco *AFB* que causa la superficie esférica, y en el lado *DE* que causa la superficie convexâ del cilindro, las partes correspondientes *fg*, *mn*. Es patente que el arco *fg*, el qual por su infinita pequeñez se puede tomar por una linea recta infinitamente pequeña, trazará al dar la vuelta la superficie convexâ de un trozo de cono recto sumamente pequeño, y la parte *mn* trazará una superficie cilíndrica sumamente pequeña, correspondiente á la que trazáre *fg*.

Ahora bien; desde el punto *t* medio de *fg*, tírese la *tu* perpendicular á *AB*. La superficie cónica causada por *fg* será (639) $fg \times$ circ. *tu*; y la superficie cilíndrica causada por *mn* será (619) $mn \times$cir. *nq*. Pero si tiramos el radio *tC*, y la recta *fr* perpendicular á *nq*, se originarán dos triángulos *frg*, *tu C* (521) semejantes uno á otro por ser los lados del uno perpendiculares á los lados del otro, y darán $fg : fr$ ó $mn :: Ct$ ó $nq : tu$. Luego por ser los círculos proporcionales á sus radios (528), será $nq : tu ::$ circ. *nq* : circ. *tu*, y por consiguiente $fg : mn ::$ circ. *nq*

nq : circ. *tu*, y $fg \times$ circ. $tu = mn \times$ circ. *nq*. Luego la zo- Fig.
na esférica sumamente pequeña causada por *fg* es igual á la zona ó superficie cilindrica correspondiente causada por *mn*. Y como toda la superficie de la 152.
esfera, y toda la superficie del cilindro se componen de un mismo número de elementos ó zonas correspondientes, las quales, segun acabamos de probar, son todas iguales, cada una á la suya, sígese que la superficie de la esfera es igual á la superficie convexâ del cilindro circunscripto.

654 De aquí inferiremos, 1.° *que la superficie de la esfera es quádrupla de la superficie de uno de sus círculos máximos.*

Porque, segun acabamos de demostrar, la superficie de la esfera es igual á la superficie convexâ del cilindro circunscripto, y la superficie de este cilindro es igual (619) al producto de la circunferencia de su base por su altura *AB*, la qual es aquí el diámetro de la esfera; y como la superficie del círculo *AFBG* es el producto de la misma circunferencia por la mitad del radio, quarta parte del diámetro; sígese que la superficie de la esfera es quádrupla de uno de sus círculos máximos.

Por consiguiente, si se me pregunta qual será la superficie de una esfera de 20 pies de diámetro; buscaré por lo probado (556) la superficie de un círculo de 20 pies de diámetro, hallaré que vale $314\frac{2}{7}$ pies; la multiplicaré por 4, y el producto $1257\frac{1}{7}$ pies será la superficie de la esfera de 20 pies diámetros.

655 2.° Luego, *la superficie de la esfera es igual á la de un círculo cuyo radio sea duplo del radio de la esfera.*

Porque como los círculos tienen unos con otros la misma razon que los quadrados de sus radios (580) el círculo cuyo radio es *AB* será al círculo cuyo radio es *AC*, como $(AB)^2 : (AC)^2 :: (2)^2 : (1)^2 :: 4 : 1$.

Fig. 656 3.° Ya que todos los elementos de la superficie de la esfera son iguales á los elementos correspondientes de la superficie convexá del cilindro (653), síguese que una zona esférica que está entre dos planos paralelos, y causada por un arco finito fF es igual á la zona cilíndrica correspondiente, causada por la parte correspondiente mF: y como esta superficie es igual (619) al producto de la circunferencia cuyo
152. diámetro es FG por la altura Fm, ó al producto de uno de los círculos máximos de la esfera por la altura Fm, se deduce que la *superficie convexá de toda zona esférica es igual al producto de la circunferencia de uno de los círculos máximos de la esfera por la altura de la misma zona.*

657 4.° Luego *la superficie de un casco esférico es igual al producto de un círculo máximo de la esfera por la altura del mismo casco.*

Porque la superficie del casco causada por Af siempre será igual á la superficie cilíndrica causada por Em.

658 5.° Tambien probarémos que la *superficie de un casco esférico es igual á la superficie de un círculo*
153. *cuyo radio es la cuerda* Ag *tirada desde el vértice del casco á la circunferencia que le sirve de base.*

Porque, conforme se probó (536) $Aq : Ag :: Ag : AB = 2AC$, y por consiguiente $Aq : \frac{Ag}{2} :: Ag : AC ::$ cir. Ag : cir. AC, de donde sacarémos $Aq \times$ cir. $AC = \frac{Ag}{2} \times$ cir. Ag; pero $Aq \times$ cir. AC es la superficie del casco (657), y $\frac{Ag}{2} \times$ cir. Ag es la superficie del círculo cuyo radio es la cuerda Ag; luego &c.

Me-

Fig.

Medida de la solidez de la esfera, y de sus sectores y segmentos.

659 *La solidez de la esfera es los dos tercios del cilindro circunscripto.*

Figurémonos dividida la superficie de la esfera 150.
en una infinidad de partes infinitamente pequeñas, que son las bases de otras tantas pirámides, cuyos cúspides estan en el centro C de la esfera; claro está que la suma de todas estas pirámides compone
la solidez de la esfera. Como todas tienen una mis- 152.
ma altura, es á saber, el radio de la esfera, su suma será igual (645) al tercio del radio multiplicado por la superficie de la esfera, ó al tercio del radio multiplicado por el quádruplo de uno de los círculos máximos de la esfera (654), ó finalmente á los dos tercios del producto del diámetro por uno de los círculos máximos. Pero este último producto vale los dos tercios del cilindro circunscripto, por ser el cilindro igual al producto de su altura, ó del diámetro AB por el círculo de su base, el qual es igual á un círculo máximo de la esfera. Luego la solidez de la esfera es los dos tercios de la solidez del cilindro circunscripto.

660 Luego 1.° *La solidez de la esfera se halla multiplicando su superficie por el tercio del radio.*

Porque, conforme acabamos de probar (659), este es el valor de todas las pirámides que componen la solidez de la esfera.

Por esta regla la solidez de una esfera de 20 pies de diámetro será de $4190\frac{10}{21}$ pies, porque el producto de $1257\frac{1}{7}$, valor de su superficie (654), por $3\frac{1}{3}$, tercio del radio, vale $4190\frac{10}{21}$.

661 2.° *La esfera es igual á un cono cuya base es quádrupla de un círculo máximo de la esfera, y la altura igual al radio de la misma esfera.*

V 4 Por-

Fig. Porque, como la superficie de la esfera es quádrupla de la superficie de uno de sus círculos máximos (654), un cono cuya base fuese quádrupla de un círculo máximo, seria igual (646) en solidez á la superficie de la esfera por el tercio de su altura, la qual es igual al radio: pero este es cabalmente el valor de la solidez de la esfera (660); luego &c.

662 De lo dicho antes (660) acerca de la medicion de la solidez de la esfera, se sigue que un *sector esfé-*
150. *rico* CFALHK *es igual en solidez al producto de la superficie del casco* AFKHL *por el tercio del radio.*

Porque este sector se compone de una infinidad de pirámides cuyos vértices estan en el centro de la esfera, y las bases componen la superficie esférica del casco.

663. Luego, *la solidez de un sector esférico es tambien igual á la de un cono de altura igual al radio de la esfera, y cuya base es un círculo trazado con*
150. *el radio* AF, *recta tirada desde el vértice* A *del casco á la circunferencia de su base.*

Porque, como la superficie del casco esférico *AFKHL* es igual (658) á la de un círculo trazado con el radio *AF*; un cono de las circunstancias expresadas seria igual al producto de la superficie del casco esférico que le sirve de base por el tercio del radio; pero esta es tambien el valor del sector esférico (662); luego &c.

664 Por lo que toca al segmento; como vale el sector *CFKHLA* menos el cono *CFKHL* (652), una vez que dexamos enseñado como se mide (646 y 663) cada uno de estos cuerpos, queda tambien declarado como se mide el segmento, cuya solidez se hallará restando la solidez del cono de la solidez del sector esférico.

De

Fig.

De la razon que guardan unas con otras las superficies de los sólidos.

665 Llamamos *sólidos semejantes* los que están terminados por un mismo número de superficies semejantes, y cuyos ángulos sólidos homólogos son todos iguales, cada uno al suyo; esto es, quando los ángulos planos que causan cada ángulo sólido del primero, son iguales en número y cantidad á los que causan el ángulo sólido correspondiente del segundo. Y así, para que dos cuerpos sean semejantes, no basta que las caras del uno sean semejantes á las del otro; es preciso á mas de eso que el uno de los dos cuerpos tenga tantas caras como el otro, y que los ángulos sólidos del uno sean iguales á los ángulos sólidos del otro, conforme acabamos de decir.

666 Inferése de aquí 1.º *que solo pueden ser semejantes dos cuerpos quando son de una misma especie; por lo que, un prisma y una pirámide v. g. no pueden ser semejantes.* Tampoco pueden ser semejantes un prisma recto y un prisma oblicuo, ni un prisma oblicuo y otro prisma oblicuo mas ó menos inclinado que el primero.

667 2.º Que *quando dos cuerpos son semejantes, las lineas tiradas en el uno de los dos son proporcionales á las lineas homologas ó tiradas del mismo modo en el otro.* Por manera que si en el un cuerpo una de dichas lineas es dupla ó tripla de la que le corresponde en el otro, las demas lineas del primero tambien serán duplas ó triplas de sus homólogas en el segundo.

Porque si los sólidos son semejantes, las superficies de que se componen han de ser tambien semejantes (665), y por consiguiente todas las lineas ho-

Fig. homólogas serán proporcionales (514). Todo esto presupuesto,

668 *Las superficies de los sólidos semejantes se han unas con otras como los quadrados de sus lineas homólogas.*

Porque se componen de planos semejantes cuyas superficies son como los quadrados de sus lineas ó lados homólogos (578), cuyas lineas son lineas homólogas de los sólidos, y proporcionales á todas las demas lineas homólogas.

669 *Las superficies de dos esferas son una con otra como los quadrados de sus radios ó diámetros.*

Porque, como la superficie de una esfera es quádrupla de la de su círculo maxîmo (654), las superficies de dos esferas serán una con otra como el quádruplo de sus círculos maxîmos, ó como sus círculos máxîmos, quiero decir (580) como los quadrados de los radios ó diámetros.

670 Pero quando los sólidos no son semejantes, quiero decir, quando las superficies que los terminan no son semejantes, no hay otro arbitrio para comparar las superficies de los sólidos sino medir separadamente la superficie de cada sólido en medidas de una misma especie, y comparar despues el número de medidas de una superficie con el número de medidas de la otra, v. g. el número de los pies quadrados de la una con el número de los pies quadrados de la otra. No obstante, vamos á determinar la razon que hay entre las superficies de algunos sólidos, cuya razon igualmente se verifica en el caso de no ser semejantes los sólidos que se comparan.

671 *Las superficies de los primas (no entrando en cuenta las superficies de las dos bases opuestas) se han unas con otras como los productos de la longitud de los prismas por el perímetro de una seccion perpendicular á la misma longitud.*

Por-

Porque las tales superficies son iguales á dichos productos (617). Fig.

672 Luego, *quando las longitudes sean iguales, las superficies de los primas se harán unas con otras como el perímetro de la seccion perpendicular á la longitud de cada uno.*

Porque la razon entre los productos de la longitud por el perímetro de la expresada seccion, no muda aunque en cada producto se omita la longitud, factor comun de todos.

673 Luego, *las superficies de los prismas rectos, ó de los cilindros rectos de igual altura, se han unas con otras como los perímetros de las bases, sea la que fuere la figura de las tales bases.*

Y recíprocamente, *siempre que sean unos mismos los perímetros de las bases, y distintas las alturas, las superficies serán como las alturas.*

674 *Las superficies de los conos rectos guardan unas con otras la razon de los productos de sus lados por las circunferencias de sus bases, ó por los radios, ó por los diámetros de las mismas bases.*

Porque, como cada una de dichas superficies es igual al producto de la circunferencia de la base por la mitad del lado del cono (637), serán una con otra como los mismos productos, y por consiguiente como el duplo de ellos. Fuera de esto, como las circunferencias tienen una con otra la misma razon que sus radios ó diámetros (618), se puede substituir en dichos productos la razon de los radios ó diámetros en lugar de la razon de las circunferencias.

De las razones de los Sólidos.

675 *Comparar uno con otro dos sólidos* es indagar quantas veces el número de medidas que caben en el uno de los dos sólidos cabe el número de

me-

Fig. medidas de la misma especie que caben en el otro.

676 *Dos prismas, ó dos cilindros, ó un prisma y un cilindro siguen uno con otro la razon de los productos de su base por su altura.*

Porque, cada uno de dichos sólidos es igual al producto de su base por su altura, sea la que se quiera la figura de la base (621 y 624).

677 Luego, 1.° *Los prismas, ó los cilindros, ó los prismas y los cilindros de igual altura se han uno con otro como sus bases; y los prismas y los cilindros de igual base se han unos con otros como sus alturas.*

Porque, la razon de los productos de las bases por las alturas subsiste la misma, aunque en los tales productos se suprima el factor comun á todos, quando la base ó la altura es una misma en ambos sólidos.

678 2.° *Luego dos pirámides qualesquiera, ó dos conos, ó una pirámide y un cono, se han uno con otro como las alturas, quando las bases son iguales.*

Porque, cada uno de estos sólidos es (644) el tercio de un prisma de igual base y altura.

679 *Las solideces de dos cuerpos semejantes qualesquiera siguen la razon triplicada, esto es, la de los cubos de sus lados homólogos.*

La solidéz de todo cuerpo es con evidencia (621) el producto de una superficie por una linea, luego todo sólido es el producto de tres lineas (547); luego dos sólidos semejantes se han uno con otro como los productos de tres dimensiones homólogas, ó siguen la razon compuesta (667) de tres dimensiones proporcionales, y por lo mismo la razon triplicada de una de las tres dimensiones: pues siendo proporcionales las tres dimensiones del un sólido á las tres dimensiones del otro, las tres razones componentes son iguales; y como la razon triplicada de tres cantidades es la misma que la razon

zon de sus cubos, por ser una y otra el producto de tres razones iguales, síguese que dos sólidos semejantes guardan uno con otro la razon de los cubos de sus dimensiones ó lineas homólogas.

680 *Luego las solideces de las esferas siguen la razon de los cubos de sus radios ó diámetros.*

681 Si combinamos la propiedad (679) de los sólidos semejantes con las que dejamos demostradas (526 y 578), echarémos de ver 1.° *que los contornos de las figuras semejantes siguen la razon sencilla de sus lineas homólogas*; 2.° *que las superficies de las figuras semejantes siguen la razon de los quadrados de sus lineas homólogas*; 3.° *finalmente que los sólidos de los cuerpos semejantes siguen la razon de los cubos de sus lineas homólogas.*

Por consiguiente, si dos cuerpos semejantes v. g. dos esferas tienen sus diámetros en la razon de $1:3$, las circunferencias de sus círculos maximos seguirán la razon de $1:3$ (528); las superficies de las mismas esferas seguirán la razon de $(1)^2:(3)^2::1:9$ (702), y los sólidos de las dos esferas seguirán la razon de $(1)^3:(3)^3::1:27$ (713). Esto quiere decir que la circunferencia de un círculo máximo de la segunda esfera valdrá tres tantos del círculo máximo de la primera; la superficie de la segunda valdrá nueve tantos de la superficie de la primera; y el sólido de la segunda esfera, 27 tantos de la primera.

682 Luego, *quando se ofrezca hacer un sólido semejante á otro, y cuyo sólido tenga con este una razon dada, v. g. la de 1 á 5, se arreglarán sus dimensiones de modo que el cubo de una qualquiera de sus dimensiones tenga con el cubo de una dimension homóloga del sólido al qual ha de ser semejante, la razon de 1 á 5.*

Sea dada v. g. una esfera de 8 pulgadas de diáme-

Fig. metro, veamos qual ha de ser el diámetro de otra esfera que tenga cinco tantos de la primera; buscarémos el quarto término de esta proporcion 1 : 5 :: el cubo de 8 ó 512, es á 2560, cubo del diámetro que buscamos. La raiz cúbica de 2560 es 13,67, con cortísima diferencia, este será el diámetro de una esfera que valdrá cinco tantos de la esfera de 8 pulg. de diámetro.

No hay cosa mas fácil de probar; pues si se busca el sólido de una esfera de 8 pulg. de diámetro, y el sólido de otra esfera de 13,67 pulg. de diámetro, se hallará que el sólido de la primera es la quinta parte del sólido de la segunda.

De los Cuerpos regulares.

683 Llámanse *cuerpos regulares* aquellos cuyas caras son polígonos, todos regulares, iguales y semejantes, y cuyos ángulos sólidos se componen de igual número de planos.

684 Fundados en la proposicion que demostramos (608), probarémos *que no puede haber mas de cinco cuerpos regulares.*

685 1.° Quando el ángulo sólido resulta del concurso de tres ángulos planos de triángulo equilátero, el sólido se llama *tetraedro.* No hay duda en que *tres ángulos de triángulo equilátero pueden formar un ángulo sólido*; pues valiendo 60° (443) cada ángulo de un triángulo equilátero, la suma de tres valdrá 180,° y por consiguiente menos de quatro ángulos rectos.

154. La figura representa un *tetraedro*, y los quatro triángulos equiláteros que componen todo el sólido.

686 2.° *Quatro ángulos de triángulo equilátero pueden formar tambien un ángulo sólido*; porque como estos quatro ángulos juntos solo valen 240°, valen menos que quatro ángulos rectos. El sólido en quien

quien concurre esta circunstancia, se llama *octaedro*, Fig. y le representa la figura con los ocho triángulos 155. equiláteros que le componen.

687 3.° *Cinco ángulos de triángulo equilátero pueden tambien formar un ángulo sólido*, porque la suma 300° de estos cinco ángulos no llega á valer quatro ángulos rectos. En el *icosaedro* cada ángulo 156. sólido resulta del concurso de cinco ángulos de triángulos equiláteros; la figura representa este sólido con los veinte triángulos equiláteros que le componen.

Pero como seis ángulos de triángulo equilátero valen juntos quatro ángulos rectos, no pueden formar un ángulo sólido; luego *no puede haber mas de tres especies de cuerpos regulares formados por triángulos.*

688 4.° *Tres ángulos de quadrado pueden tambien formar un ángulo sólido*, y esta circunstancia concurre en el *cubo* ó *exaedro*, que se vé en la figura con 157. los seis quadrados que le componen.

Es evidente que quatro ángulos de quadrado no pueden formar un ángulo sólido, por valer todos juntos quatro ángulos rectos; por consiguiente no hay sino una especie de cuerpo regular formado con quadrados.

689 5.° *Un ángulo sólido puede resultar del concurso de tres ángulos de pentágono regular*; porque 158. cada uno de dichos ángulos solo vale 108° (517). El *dodecaedro* es un cuerpo cuyos ángulos sólidos resultan del concurso de tres ángulos de pentágono regular, y le representa la figura con los doce pentágonos regulares de que se compone.

Como quatro ángulos de pentágono regular valen mas de 360°, no pueden formar un ángulo sólido; luego no puede haber mas de un cuerpo regular formado con pentágonos.

690 *No se puede formar cuerpo alguno regular con exágonos*, porque el ángulo del exágono regular

lar

Fig. lar vale 120° (486), y tres juntos han de valer 360°; luego no pueden formar un ángulo sólido. Y como tres ángulos de los demas polígonos de mayor número de lados que el exágono, han de valer mas de 360°, se infiere que con ningun polígono regular que tenga mas de cinco lados se puede formar cuerpo regular alguno. Luego no hay mas que cinco cuerpos regulares.

De la medida de la superficie, y solidéz de los cinco cuerpos regulares.

691 Para hallar la superficie de cada uno de los cinco cuerpos regulares, se buscará la area de uno de los planos que le terminan, cuya area se multiplicará por el número de caras que tuviere cada cuerpo.

154. 692 Una vez que el tetraedro no se distingue en cosa alguna de una pirámide triangular equilátera, hallarémos su solidéz por lo dicho (645).

157. Tambien se hallará la solidéz del cubo por lo enseñado (621).

155. Para hallar la del octaedro, investigarémos la solidéz de cada una de las dos pirámides iguales y semejantes en que se divide este sólido.

158. Del mismo modo hallarémos la solidéz del dodecaedro. Porque si tiramos lineas rectas desde el centro del dodecaedro á todos sus ángulos, resultarán doce pirámides pentágonas iguales; si multiplicamos despues la solidéz de una de dichas pirámides por 12, sacarémos la solidéz total del dodecaedro.

156. Buscando la solidéz de una de las veinte pirámides en que podemos figurarnos dividido tambien el icosaedro, y multiplicándola por 20, resultará la solidéz total del icosaedro.

PRIN-

PRINCIPIOS
DE TRIGONOMETRÍA PLANA
Ó RECTILINEA.

693 *Trigonometría* significa lo mismo que medicion de triángulos. En todo triángulo hay seis cosas que considerar, es á saber, tres ángulos y tres lados; y quando estas seis cosas estan todas en un mismo plano, la Trigonometría que las determina se llama *Trigonometría plana.*

Enseña, pues, la Trigonometría plana, llamada tambien *rectilinea*, como se responde en todos los casos posibles esta pregunta: *Dadas tres de las seis cosas que en un triángulo rectilineo se consideran (los tres ángulos y los tres lados), hallar el valor de las otras tres.*

Digo en todos los casos posibles, porque si se conocieran v. g. los tres ángulos no mas, no se podria determinar el valor de los lados. Con efec- 159.
to, si por el punto D, tomado donde se quiera en el lado AB del triángulo ABC, cuyos ángulos suponemos conocidos, se tira la DE paralela á BC, se originará otro triángulo ADE, el qual tendrá todos sus ángulos iguales con los ángulos del triángulo ABC (372); y ya se ve que del mismo modo se podrian formar infinitos triángulos que tendrian los mismos ángulos. Seria, pues, preciso que el cálculo hecho por los tres ángulos conocidos diera el valor de una infinidad de lados diferentes. En este caso la cuestion ó pregunta admitiria respuestas sin límite, por cuyo motivo seria de aquellas que llamamos *ilimitadas* ó *indeterminadas*: con todo, mas adelante enseñarémos como en el caso propuesto se puede señalar la razon que hay entre los lados,

 aun-

Fig. aunque no sea posible señalar su valor.

694 Pero siempre que de las tres cosas conocidas la una sea un lado, se podrán determinar todas las demas, menos en un caso donde queda una cosa por determinar y es el siguiente. Supongamos que en el triángulo *ABC* sean conocidos los dos lados
160. *AB*, *BC* y el ángulo *C* opuesto al uno de ellos; aquí no es posible hallar el valor del ángulo *A*, ni del lado *AC*, sin saber primero si el ángulo *A* es obtuso ú agudo. Porque si suponemos que desde el centro *B*, y con el radio *AB* se traza un arco *DA*, y que por el punto *D*, donde este arco encuentra *AC*, se tira la *BD*, se originará otro triángulo *CBD*, del qual serán conocidas las mismas cosas que en el triángulo *ABC*; es á saber, el ángulo *C*, el lado *CB*, y el lado *BD* igual con *BA*. Hay, pues, en este caso los mismos datos para determinar el ángulo *BDC*, que en el triángulo *ABC* para determinar el ángulo *A*.

Sin embargo, de este caso al antecedente va la diferencia que aquí se puede determinar el valor de los ángulos *A*, y *BDC*, conforme lo manifestarémos despues. No hay mas dificultad sino saber qual de estos dos valores debe prevalecer, qual ha de ser la figura del triángulo. Es por consiguiente indispensable saber, ademas de las tres cosas conocidas, si el ángulo que se busca ha de ser agudo ú obtuso. Repárese que los dos ángulos *A* y *BDC* del caso que aquí consideramos son suplemento uno de otro; porque *BDC* es suplemento de *BDA* igual al ángulo *A* (442) por ser isósceles el triángulo *ABD*.

695 Para medir los triángulos no sirven ni sus ángulos, ni los arcos que los miden; sirven en su lugar varias lineas llamadas *senos*, *cosenos*, *tangentes*, *cotangentes* &c. ó, con nombre general, *lineas trigonométricas*, las quales representan los arcos; y aunque no son proporcionales con ellos, son apropósito para representarlos, y al mismo tiempo mas acomodadas para los cálculos, porque, segun se verá muy en breve, estas lineas son proporcionales á los lados de los triángulos.

Fig.

De las lineas Trigonométricas.

696 La perpendicular *BD* tirada desde el extremo *B* de un arco *BA* al radio *AC*, que pasa por el 161.
otro extremo *A* del mismo arco, se llama *el seno recto*, *ó el seno del arco* BA *ó del ángulo* BCA.

697 La parte *DA* del radio, que coge desde el seno al extremo del arco, se llama el *seno verso*.

698 La parte *AE* de la perpendicular al extremo del radio, que coge desde el mismo radio *AC* al radio *CB* que pasa por el otro extremo prolongado, se llama *la tangente del arco* BA *ó del ángulo* BCA.

699 La linea *CE* que es el mismo radio *CB* prolongado hasta la tangente, se llama *la secante del arco* BA, *ó del ángulo* BCA.

700 Si se tira el radio *CF* perpendicular á *CA*, y en su extremo *F* se levanta la perpendicular *FG*, que encuentra en *G* el radio *CB*, prolongado, y si se tira tambien la *BH* perpendicular á *CF*, se infiere de lo dicho hasta aquí que *BH* será *el seno*, FH *el seno verso*, FG *la tangente*, *y* CG *la secante del arco* BF *ó del ángulo* BCF.

701 Pero como el ángulo *BCF* es complemento de *BCA*, pues los dos ángulos juntos componen un ángulo recto, podemos decir que *BH* es *el seno del complemento*, FH *el seno verso del complemento*, FG *la tangente del complemento*, *y* CG *la secante del complemento del arco* BA, *ó del ángulo* BCA.

702 Para abreviar, se dice *coseno del arco*, y no

Fig. no seno del complemento del arco; *coseno verso*, y no seno verso del complemento; *cotangente*, y no tangente del complemento; y *cosecante*, en lugar de secante del complemento del arco. Por manera
161. que las lineas BH, FH, FG, CG, se llaman el *coseno*, el *coseno verso*, la *cotangente* y la *cosecante del arco* BA, ó del *ángulo* BCA. Las lineas BD, AD, AE y CD se llaman el *coseno*, el *coseno verso*, la *cotangente* y la *cosecante* del *arco* BF, ó del ángulo BCF, porque BA es complemento de BF, del mismo modo que BF lo es de BA.

703 Las lineas trigonométricas se nombran, para abreviar, del modo siguiente: sen. BA quiere decir el seno de BA; sen. BCA, seno del ángulo BCA; cos. BA, coseno del arco BA; cos. BCA, coseno del ángulo BCA; y para expresar el radio se usa la letra R.

704 Se viene á los ojos, 1.° que el coseno BH de todo arco BA v. g. es igual á la parte CD del radio que coge desde el centro al seno del mismo arco; 2.° que el seno verso AD es igual á la diferen-
161. cia que va del radio al coseno; 3.° que el seno de todo arco BA v. g. es la mitad de la cuerca BI del arco duplo BAI. Porque como el radio CA es perpendicular á la cuerda BI, divide esta y tambien su arco (383) en dos partes iguales.

705 Infiérese de aquí que el seno de 30° vale la mitad del radio; porque es la mitad de la cuerda de 60°, ó del lado del exágono, el qual, segun dexamos probado (490), es igual al radio.

706 La tangente de 45° es igual al radio. Por-
161. que si el ángulo BCA es de 45°, una vez que el ángulo CAE es recto, el ángulo CEA valdrá tambien 45°, pues los tres ángulos juntos de un triángulo valen dos ángulos rectos (445); luego el triángulo CAE será isosceles (442), y por

por lo mismo será $AE = CA$. Fig.

707 Al paso que el arco BA ó el ángulo BCA crece, crece tambien su seno BD, pero al mismo paso mengua su coseno BH ó CD; y en llegando 161.
el arco BA á valer 90°, el seno BD se confunde con el radio FC, y el coseno es cero; porque en llegando el punto B á confundirse con el punto F, es cero la perpendicular BH.

708 Por lo que mira á la tangente AE y la cotangente FG, es patente que la tangente AE va creciendo de continuo, y la cotangente menguando; por manera que quando el arco BA llega á ser de 161.
90°, la tangente es infinita (369), y cero la cotangente. Con efecto, quanto mas crece el arco AB, tanto mas se levanta el punto E respecto de AC; y en llegando el punto B infinitamente cercano á F, las dos lineas CE, AE son quasi paralelas, y no se encuentran sino á infinita distancia de su origen (369); luego AE es entónces infinita respecto de la CF; luego lo es quando el punto B se confunde con el punto F.

709 De donde se sigue que quando el arco es de 90°, su seno es igual al radio, su coseno es cero, su tangente es infinita, y su cotangente es cero.

710 El seno de 90° es el mayor de todos los senos, porque es la mitad del diámetro, el qual por lo probado (323) es la mayor de todas las cuerdas. Esta es la razon de llamarse el radio *seno total*; por manera que *radio*, *seno total*, *seno de* 90° todo es uno.

711 Quando el arco AB coge mas de 90°, su seno BD mengua, y su coseno BH ó CD, que en- 162.
tónces cae al otro lado del centro respecto del punto A, crece hasta que el arco AB llega á ser de 180°, en cuyo caso el seno es cero, y el coseno es igual al radio CK. Tambien se echa de ver que

 el

Fig. el seno BD y el coseno CD del arco BA ó del ángulo BCA, que vale mas de 90°, son igualmente el seno y el coseno del arco BK, ó del án-
162. gulo BCK, que no llega á 90°, y es suplemento del primero; por manera que el seno y coseno de un ángulo obtuso son los mismos que el seno y coseno de su suplemento; pero es de advertir que el coseno cae á la parte contraria donde caeria si el arco BA ó el ángulo BCA no llegara á los 90.°

712 Por lo que mira á la tangente, como la determina el concurso de la perpendicular AE con el radio CB prolongado, se echa de ver que quando el arco BA pasa de 90°, la tangente es AE; pero con levantar la perpendicular KI, se percibe desde luego que el triángulo CAE es igual con el triángulo CKI (452), y que por consiguiente $AE = KI$.

713 Luego la tangente de un arco que pasa de 90°, es la misma que la tangente de su suplemento: no hay mas diferencia sino que cae debajo
162. del radio CA. En quanto á la cotangente FG, es tambien la misma que la cotangente del suplemento, y cae á la parte contraria donde caeria si el arco BA ó el ángulo BCA no llegara á los 90.° Con mucha facilidad probaríamos que la tangente de 180° es cero, y la cotangente infinita. Esto lo dexamos para otro lugar.

714 Todo esto presupuesto, supongamos divi-
161. dido el quadrante de circunferencia AF en arcos de 1', esto es, todo él en 5400 partes iguales, y desde cada punto de division bajadas perpendiculares ó senos como BD al radio AC. Figurémonos tambien el radio AC dividido en un número muy crecido de partes iguales, v. g. en 100000; cabrán en cada perpendicular un número determinado de partes del radio; y si por algun medio pudiéramos de-

terminar el número de partes del radio, que caben en cada una de estas perpendiculares, no hay duda que podrian servir para señalar el valor de los ángulos. Fig.

Todo estará, pues, en averiguar quantas partes del radio caben en cada seno ó perpendicular, mediante lo qual su número nos dará á conocer el valor de cada arco. Por manera que se pondrán por órden en cada columna todos los arcos de minuto en minuto desde cero hasta 90°, y en otra columna inmediata al lado de la primera el número de partes que quepan en cada perpendicular correspondiente; de donde se originará una tabla, la qual nos proporcionará conocer el arco, sabido el número de partes del radio que coge su seno, y tambien quantas partes del radio coge el seno de un arco, en sabiendo los grados ó minutos que esta coja. La utilidad de esta tabla no estará ceñida á los arcos y ángulos cuyo radio tuviese el número supuesto de partes, sino que alcanzaria á los arcos de otro radio qualquiera, con tal que fuese conocido, por ser muy fácil de probar que los senos &c. son proporcionales á los radios, como lo probarémos despues en general; por ahora lo harémos patente en un caso particular.

715 Supondrémos con esta mira un ángulo DCG, cuyo lado ó radio CD sea de 8 pies, y la perpendicular DE de 3 pies, y figurémonos que sea CA 163.
el radio por el qual se ha formado la tabla donde están los valores de los arcos y los de sus senos &c. Si suponemos trazado el arco AB, y tirada la perpendicular AP, esta será el seno de las tablas, y será fácil saber quantas partes caben en esta perpendicular. Pero como los triángulos CDE, CAP son semejantes, pues las DE y AP son paralelas, tendrémos $CD : DE :: CA : AP$; esto es, 8p:

Fig. :: 100000 : AP. Será por consiguiente AP de 37500 partes; buscaré, pues, este número entre los senos de las tablas, y á su lado hallaré los grados y minutos del ángulo DCG ó DCE.

716 Recíprocamente, en sabiendo de quantos grados y minutos es el arco DG, y de quantas partes su radio CD, se hallará tambien el valor de la perpendicular DE; porque al lado de los grados y minutos que coge dicho arco, está en la tabla el número de partes que coge la perpendicular AP, ó el seno correspondiente AP; para lo qual se hará con los triángulos semejantes CAP, CDE la siguiente proporcion

$$CA : AP :: CD : DE;$$

se sabrá, pues, el valor del quarto término DE, una vez que son conocidos los tres primeros CA, AP, CD; es á saber, CA y AP por la tabla y CD por saber quantos pies tiene.

Esto manifiesta quales son las lineas que arriba diximos poderse substituir en lugar de los ángulos para calcular los triángulos; estas lineas son los senos.

717 Pero no sirven solos los senos, sirven tambien las tangentes y las secantes, cuyas lineas son fáciles de calcular, una vez calculados todos los senos. Porque de los triángulos semejantes CBD, CHB, CAE, CFG, se sacan las siguientes proporciones

$CD : DB :: CA : AE$, ó cosen. C : sen. $C :: R :$ tang. C.

161. $AE : AC :: CF : FG$, ó tang. $C : R :: R :$ cotang. C.

$DC : CB :: CA : CE$, ó cosen. $C : R :: R :$ secante. C.

$DB : CB :: CF : CG$, ó sen. $C : R :: R :$ cosec. C.

Ya se ve que en cada una de estas proporciones los tres primeros términos son conocidos, una vez que esten calculados todos los senos; pues el seno de un arco es lo mismo que el coseno de su complemento. Será por consiguiente fácil de inferir el

el valor del quarto término de cada una; y de este el valor de las tangentes y secantes, como tambien el de las cotangentes y cosecantes, que son lo mismo que las tangentes y secantes del complemento. Fig.

718 La expresion general R del radio basta para evidenciar que las proporciones poco ha formadas son verdaderas, sea el que fuere el tamaño del círculo donde se consideran. Esto manifiesta que el valor del radio es arbitrario, con tal que una vez determinado rija siempre el mismo; donde no, mudarian de valor todas las lineas trigonométricas. Si en lugar de AC fuera CD el radio, y se traza el 163.
arco DG, el seno del ángulo C ya no será AP, sino DE, y tendrémos $AP : CA :: DE : CD$. Lo propio se sacará respecto de otra qualquier linea. Luego la razon entre toda linea trigonométrica y el radio es constante, una vez que siempre se verifica $\frac{AP}{AC}=\frac{DE}{DC}$. Luego supongamos que siendo R el radio sea L una linea trigonométrica; y siendo R' el radio sea L' la misma linea trigonométrica, siempre se verificará que $R : L :: R' : L' = \frac{LR'}{R} = LR'$, con hacer $R=1$, supuesto muy comun, y muy fundado, porque así salen los cálculos menos complicados y mas sencillas las expresiones.

719 En las proporciones de antes (417) es de reparar que dado que sea el valor del radio, el valor de la cotangente se determina por el de la tangente; el valor de la secante, por el valor del coseno; el de la cosecante, por el valor del seno, y al reves.

De aquí se infiere la razon por que en los cálculos trigonométricos hacen tan poco papel ó quasi ninguno la secante y la cosecante; por ser tan fácil substituir en su lugar los valores de los senos y cosenos, facilísimos de sacar de las expresadas proporpor-

Fig. porciones. Con igual facilidad se podrian escusar las cotangentes; pero casos ocurren de práctica donde tiene cuenta echar mano de ellas.

Resolucion de los Triángulos Rectángulos.

720 Por ser BD el seno, CD el coseno del ar-
161. co AB trazado con el radio $AC=CB$, ó del ángulo C del triángulo rectángulo CBD, se sacan las dos analogías ó proporciones siguientes

$CB : BD :: R :$ sen. C ó $CB : R :: BD :$ sen. C

$CB : CD :: R :$ cos. C ó $CB : R :: CD :$ cos. C; esto es

En todo triángulo rectángulo la hypotenusa es al radio como un lado es al seno del ángulo opuesto.

221 *En todo triángulo rectángulo la hypotenusa es al radio como un lado es al coseno del ángulo adyacente.*

722 En la última proposicion se funda la resolucion de un triángulo isósceles qualquiera. Porque con tirar una perpendicular CD desde el ángulo vertical á la base, estarán ángulo y base divididos en dos partes iguales (494). Quedará,
164. pues, dividido el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos, con la circunstancia que la base de cada uno será la mitad de la base del triángulo primitivo. Si consideramos uno de estos dos triángulos, v. g. BCD, tomando por radio la hypotenusa CB y hacemos centro en C, será

$BC : DB = \frac{1}{2} AB :: R :$ cos. B.

$BC : DB = \frac{1}{2} AB :: R :$ sen. $C =$ sen. $\frac{1}{2} ACB$.

723 Parece á primera vista que de nada pueden servir las dos proporciones (720 y 721) porque encierran al parecer en círculo vicioso del mismo modo que esta analogía: $2 : 1 :: 2 : 1$, pues no son otra cosa que la repeticion de las definiciones dadas (696 y sig.). Pero téngase presente que la razon $R :$ sen. C, lo propio digo de la razon $R :$ cos. C es una razon constante (718), sea la que fuere la longitud de la hypotenusa que aquí hace veces de radio, con tal sin embargo que el ángulo C se mantenga el mismo.

Todo el artificio de la Trigonometría consiste en que dado que sea un ángulo en un triángulo rectángulo, basta para manifestar la razon que hay entre la hypotenusa y cada uno de los lados. De aquí se sigue que si ademas del ángulo, es tambien conocido el valor absoluto del uno de los lados, la trigonometría da sobre la marcha el valor absoluto de la hypotenusa; y al reves, conforme lo demuestran los siguientes exemplos.

Sea CF una distancia conocida de tres leguas, 165.
y propongámonos averiguar la distancia CG que no se puede medir con la vara. Para conseguirlo sin fatiga y sin desamparar el punto C, se averiguará quantos grados coge el ángulo GCF, operacion muy fácil, conforme manifestarémos despues; supongamos que el tal ángulo es de 60°, en cuyo supuesto coseno $GCF =$ cos. $60° = \frac{1}{2} R$ (705). Por consiguiente tendrémos (722) $GC : CF :: R :$ cos. $GCF :: R : \frac{1}{2} R :: 1 : \frac{1}{2}$. Luego la distancia CG es dupla de CF ó $GC = 6$ leguas.

Si suponemos GCF de 60° y la distancia conocida CA de nueve leguas, hallariamos que CH es de 18 leguas.

Si el ángulo medido BCD fuere de 36° 52′, la distancia conocida DC de seis leguas, y se buscase BC; una vez que las tablas dan R; cos. 36° 52′ $:: 1 : 0,8$, será (221) $BC : CD :: R :$ cos. $C :: 1 : 0,8$. Por consiguiente, $BC = \frac{DC}{0,8} = \frac{6}{0,8} = 7,5$. Luego la distancia BC seria de 7 leguas y media.

Si en lugar de ser CD la distancia conocida fue-

Fig. fuese CA y de nueve leguas, y CE la distancia cuyo valor se busca, seria $CE : CA :: 1 : 0,8$ ó $CE =$
165. $\frac{CA}{0,8} = \frac{9}{0,8} = 11,25$. Luego $CE = 11$ leguas $\frac{1}{4}$.

724 Las dos analogías de antes (720 y 721) son lo mismo que las dos proposiciones siguientes.

1.ª *Si en un triángulo rectángulo sirve de radio la hypotenusa, cada lado será el seno del ángulo opuesto.*

163. Si en el triángulo rectángulo CED sirve de radio ó seno total la hypotenusa CD, estando el centro en el punto C, será DE el seno del arco DG ó del ángulo DCE. Si estuviese, en el mismo supuesto, el centro en D, con igual facilidad se haria patente que CE seria el seno del ángulo CDE.

725 2.ª *Quando sirve de radio el uno de los lados del ángulo recto, el otro lado es la tangente del ángulo opuesto.*

166. Si en el triángulo CAD sirve de radio el lado CA, estando el centro en C, se viene á los ojos que AD será la tangente del ángulo opuesto C. Si el centro estuviese en el punto D, siendo DA el radio, será CA la tangente del ángulo opuesto D. Todo esto sentado.

726 Cuestion I. *Dados en el triángulo rectángu-*
167. *lo* ABC *el ángulo* A *y el lado* AB, *hallar el valor del otro lado* BC.

Se echa de ver que las tres cosas conocidas y la quarta cuyo valor se busca son los términos de la analogía (725). Sea el ángulo CAB de 48° 54′, el lado BA de 132 pies; luego para hallar BC harémos esta proporcion $R : \text{tang. } CAB :: BA : BC$ ó $R : \text{tang. } 48° 54' :: 132 : BC$; por manera que tomando en unas tablas el valor de la tangente de 48° 54′, multiplicándole por 132, y partiendo el producto por

por el valor del radio de las tablas, se sabrá el valor de BC en pies. Fig.

Pero el cálculo se abreviará muchísimo haciéndole por logaritmos, porque entónces la operacion queda reducida á sumar uno con otro (265) los logaritmos del segundo y tercer término, y restar de la suma el log. del primero. Se hará, pues, el cálculo como sigue.

Log. tang. 48° 54′	10,0593064
Log. 132.	2,1205739
Suma.	12,1798803
Log. del radio.	10,1000000
Resta ó log. BC.	2,1798803

el qual en las tablas corresponde á 151, 32 con diferencia de menos de una centésima. Por consiguiente BC es de 151, 32 pies, ó de 151p 3p 10.l

Por ser 10 la característica del log. del radio, y ceros todas sus demas figuras, será escusado sentarle quando se le hubiere de sumar ó restar; bastará añadir ó quitar una unidad á las decenas de la característica del log. con el qual se le hubiere de sumar, ó del qual se le hubiere de rebajar.

727 Cuestion II. *Dado que sea el valor de la hy-* 167.
potenusa y del uno de los ángulos agudos, hallar el valor de los lados.

Sea v. g. en el triángulo rectángulo ABC la hypotenusa AC 32 pies, y el ángulo A de 22° 30′; determinemos en virtud de estos datos los lados BC y AB.

El valor del lado BC le sacarémos por esta analogia (724) $R : \text{sen. } 22° 30' :: 32 : BC$.

Pa sacar el valor de AB convendrá tener presente (450) que el ángulo C es complemento del ángulo A, por cuyo motivo se inferirá su valor de

Fig. de la siguiente analogía, R : sen. 67° 30′ :: 32 : AB. Harémos una y otra por logg.

Log. sen. 22° 30′.	9,5828397
Log. 32.	1,5051500
Suma.	11,0879897
Log. del radio.	1
Resta ó log. BC.	1,0879897

al qual corresponde 12,25 con diferencia de menos de una centésima.

Log. sen. 67° 30.′	9,9656153
Log. 32.	1,5051500
Suma.	11,4707653
Log. del radio.	1
Resta ó log. de AB.	1,4707653

que en las tablas corresponde á 29,56 con diferencia de menos de una centésima.

728 Cuestion III. *Dados el un lado y la hypotenusa, hallar los ángulos.*

Supongamos conocido en el triángulo rectángu-
167. lo ABC el lado AB v. g. del ángulo recto; sea la hypotenusa AC de 42 pies, y el lado AB de 35 pies, y busquemos el valor del ángulo CAB. Una vez que los dos ángulos A, C valen juntos un ángulo recto, para conocer el ángulo A bastará determinar el ángulo C, lo que se conseguirá por medio de la siguiente analogía (724) R : sen. C :: AC: AB, ó R: sen. C :: 42 : 35, ó 42 : 35 :: R : sen. C. Por logaritmos.

Log.

Fig.

Log. 35.	1,5440680
Log. del radio.	1
Comp. log. 42.	8,3767507
Suma ó log. sen. C.	$\cancel{1}$9,9208187

que en las tablas corresponde á 56° 27′; luego el ángulo A es de 33° 33.′

729 Cuestion IV. *Dados en el triángulo rectángulo* ABC *los dos lados del ángulo recto, hallar los* 167.
ángulos y la hypotenusa.

El ángulo A se hallará por la siguiente analogía (725) AB : BC :: R: tang. A, la qual, en el supuesto de ser AB de 35 pies, y BC de 15, es 35: 15 :: R : tang. A. Por logaritmos.

Log. de 15.	1,1760913
Log. del radio.	1
Compl. log. 35.	8,4559320
Suma ó log. tang. A.	$\cancel{1}$9,6320233

al qual corresponde á 23° 12.′

Para hallar el lado AC, se practicará, despues de determinado el ángulo A, lo propio que en la III cuestion. Pero no hay necesidad de calcular el ángulo A, basta la proposicion demostrada (581). Sumando, pues, 225, quadrado de 15, con 1225, quadrado de 35, la suma 1450 de los dos quadrados será el quadrado de AC; cuya raiz quadrada 38,08 será el valor de AC con diferencia de menos de una centésima.

Por la misma razon, si dada la hypotenusa AC, y el uno de los lados del ángulo recto, se pidiese el valor del lado BC, no habria necesidad de calcular el ángulo A: el quadrado del lado conocido AB se restaria del quadrado de la hypotenusa; la raiz quadrada de la resta seria el valor del lado BC.

Re-

Fig.

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

730 *Triángulo oblicuángulo* es todo aquel que no tiene ningun ángulo recto.

731 *En todo triángulo rectilíneo los senos de los ángulos tienen uno con otro la misma razon que los lados opuestos á dichos ángulos.*

Porque si inscribimos un triángulo en un círculo, cada lado será la cuerda de un arco duplo del que mide el ángulo opuesto (413); luego la mitad de cada lado es (704) el seno del ángulo opuesto; luego, ya que las mitades tienen unas con otras la misma razon que sus todos, hay entre los lados la misma razon que entre los senos de los ángulos opuestos.

732 Sirve esta proposicion para resolver un triángulo, 1.° quando son conocidos dos ángulos y un lado; 2.° quando son conocidos dos lados y un ángulo opuesto al uno de ellos.

168. 733 Caso I. En conociendo el ángulo B, el ángulo C y el lado BC, se hallará el ángulo A, sumando uno con otro los dos ángulos B y C, y restando su suma de 180°: para sacar el valor de los dos lados AC, AB se harán las dos proporciones siguientes

$$\text{sen. } A : BC :: \text{sen. } B : AC$$
$$\text{sen. } A : BC :: \text{sen. } C : AB$$

Sea v. g. el ángulo B de 78° 57′, el ángulo C de 47° 34′ y el lado BC de 184 pies; será el ángulo A de 53° 29′, y se sacarán los valores de los otros dos lados por las dos proporciones siguientes

$$\text{sen. } 53° 29' : 184 :: \text{sen. } 78° 57' : AC$$
$$\text{sen. } 53° 29' : 184 :: \text{sen. } 47° 34' : AB$$

Por

Fig.

Por logaritmos

log. 184	2, 2648178
log. sen 78° 57′	9, 9918727
compl. log. sen 53° 29′	0, 0949148
Suma ó log. AB	12, 3516053

Log. 184	2, 2648178
log. sen. 47° 34′	9, 8680934
compl. log. sen. 53° 29′	0, 0949148
suma ó log. AC	12, 2278260

se hallará AC de 224 pies 7 pulg. y AB de 160 pies.

Caso II. En conociendo el lado AB, el lado BC y el ángulo C, se sacará el ángulo A calculando su seno por la siguiente proporcion;

$$BA : \text{sen. } C :: BC : \text{sen. } A.$$

pero es de reparar por lo dicho (694) que para determinar á punto fixo el ángulo A es indispensable saber si ha de ser agudo ú obtuso.

Sean, v. gr. AB de 37 pies, BC de 68, y el ángulo C de 32° 28′, la proporcion será

$$37 : \text{sen. } 32° 28' :: 68 : \text{sen. } A.$$

Practicando lo que antes se sacará el ángulo A de 80° 36′. Quedará sin embargo una duda; porque como todo ángulo tiene el mismo seno que su suplemento (711), el ángulo A podrá ser de 80° 36′ ó de 99° 24′. Pero en sabiendo que el ángulo A ha de 160.
ser agudo, no hay duda en que será de 80° 36′, y entónces será ABC la figura del triángulo. Si el ángulo hubiera de ser obtuso, será de 99° 24′ y CBD la figura del triángulo.

734 Antes de pasar adelante demostrarémos la siguiente proposicion.

De dos cantidades desiguales, la mayor vale la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia de las

Fig. *las dos; la menor vale la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia de las dos.*

Si la suma de dos cantidades es 57, y su diferencia es 17, la una de las dos es 37 y la otra 20; añadiendo por un lado la mitad de 17 á la mitad de 57, y restando por otro lado la mitad de 17 de la mitad de 57.

Porque ya que la suma incluye la mayor y la menor, si á la suma añado la diferencia, saldrá el duplo de la cantidad mayor; luego esta vale la mitad del total, esto es la mitad de la suma de las dos cantidades, mas la mitad de su diferencia.

Si por el contrario, de la suma rebajo la diferencia, quedará el duplo de la parte menor; luego la parte menor vale la mitad de la resta, esto es, la mitad de la suma, menos la mitad de la diferencia.

735 Siempre que en un triángulo rectilineo ABC se baje desde el uno de los ángulos una perpendicular al lado opuesto, será cierto que

El lado AC *sobre el qual, ó sobre cuya prolonga-*
169. *cion cae la perpendicular, es á la suma* AB+BC *de*
y *los otros dos lados, como la diferencia* AB—BC *de*
170. *los mismos lados es á la diferencia de los segmentos* AD, DC, *quando la perpendicular cae dentro del triángulo, ó á su suma quando la perpendicular cae fuera del triángulo.*

Desde el centro B, y con radio igual al lado BC
169. trácese la circunferencia $CEGF$, y prolónguese el lado AB hasta que la encuentre en E; serán, pues, AE, AC dos secantes tiradas desde un mismo punto fuera del círculo; luego tendrémos (538) $AC : AE :: AG : AF$. Pero $AE = BA + BE = AB + BC$; $AG = AB - BG = AB - BC$; $AF = AD - DF = AD -$
170. DC. En la otra figura $AF = AD + DF = AD + DC$; en cuyo caso será $AC : AB + BC :: AB - BC : AD + DC$.

Lue-

Luego en conociendo los tres lados de un trián- Fig.
gulo, se podrá sacar por esta proposicion el valor de los segmentos formados por la perpendicular tirada desde el uno de los ángulos al lado opuesto; porque entonces será conocida la suma AC de dichos 169.
segmentos, y la proporcion que acabamos de demostrar manifiesta su diferencia; pues en este caso sus tres primeros términos son conocidos; luego por lo dicho (734) se sacará el valor de cada uno de los segmentos. En la otra figura se conoce la diferen- 170.
cia de los segmentos AD, DC, que es el mismo lado AC, y de la proporcion se saca el valor de su suma.

Sentado esto será facil de resolver la siguiente

736 Cuestion. *Por los tres lados conocidos de un triángulo determinar los ángulos.*

Figurémonos tirada una perpendicular desde el uno de los ángulos, de lo que se originarán dos triángulos rectángulos ADB, CDB. Por la proposicion 169.
antecedente se calculará uno de los segmentos, v. gr. 170.
CD, mediante lo qual en el triángulo rectángulo CDB serán conocidos los dos lados CD, BC ademas del ángulo recto, y se sacará facilmente el ángulo C por lo dicho (728).

Sea el lado AB 142 pies, el lado BC de 64, y el lado AC de 184 ¿qual será el valor del ángulo C?

Calculo la diferencia de los dos segmentos por esta proporcion: $184 : 142+64 :: 142-64 : AD-DC$, ó $184 : 206 :: 78 : AD-DC$ que vale 87, 32; luego (734) el segmento menor CD vale la mitad de 184 menos la mitad de 87, 32, ó vale 48, 34.

Ahora bien; en el triángulo rectángulo CDB busco (728) el ángulo CBD, el qual una vez conocido dará á conocer el ángulo C, y el ángulo CBD le sacó por esta proporcion (720) $BC : CD :: R :$ sen.

Y 2 CBD,

Fig. CBD, esto es, $64 : 48, 34 :: R :$ sen. CBD.

Por logaritmos

Log. 48, 34 . . . . 1, 6843066,
log. del Radio . . . . 1 . . .
compl. log. 64 . . . . 8, 1938200

suma ó log. sen CBD 19, 8781266,
el qual en las tablas corresponde á $39^\circ\ 3'$; luego el ángulo C es de $40^\circ\ 57'$.

El caso de resolver un triángulo cuyos tres lados son conocidos se ofrece con frecuencia siempre que se han de calcular muchos triángulos enlazados unos con otros.

171. 737 *La suma de los senos de dos arcos* AB, AC *es á la diferencia de los mismos senos, como la tangente de la mitad de la suma de los arcos, es á la tangente de la mitad de su diferencia; esto es* *sen.* AB + *sen.* AC : *sen.* AB — *sen.* AC :: *tang.* $\frac{AB+AC}{2}$: *tang.* $\frac{AB-AC}{2}$

Tírese el diámetro AM, llévese el arco AB desde A á D; tírese la cuerda BD y será perpendicular á AM (385). Por el punto C tírese CP perpendicular, y CF paralela á AM. Desde el punto F tírense las cuerdas FB, FD, y con un radio FG, igual al del círculo BAD, trácese el arco IGK el qual encuentra CF en G; levántese en el punto G la HL perpendicular á CF, las lineas GH y GL serán las tangentes de los ángulos GFH y GFL, ó CFB y CFD, de los quales, porque tienen sus vértices en la circunferencia, son respectivamente medida las mitades de los arcos CB y CD que abrazan (413); esto es, la mitad de la diferencia BC, y la mitad de la suma CD de los dos arcos AB, AC. Por consiguiente GL y GH son respectivamente las tangentes de la mitad de la suma y de la mitad de la diferencia de los mismos arcos. Fig.

Sentado esto, se viene á los ojos que por ser $DS = BS$, la linea $DE = BS + SE = BS + CP$, esto es la suma de los senos de los arcos AB, AC; es tambien patente que $BE = BS - SE = BS - CP$, esto es 171.
la diferencia de los senos de los mismos arcos.

Pero las paralelas BD, HL dan (502) $DE : BE :: LG : GH$; luego sen AB + sen AC : sen AB — sen AC :: tang. $\frac{AB+AC}{2}$: tang. $\frac{AB-AC}{2}$.

738 Luego *en todo triángulo rectilineo la suma de dos lados es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de los dos ángulos opuestos á dichos lados, es á la tangente de la mitad de su diferencia.*

Porque tenemos (731) AB : sen C :: AC : sen B;
luego $AB + AC : AB - AC$ :: sen. C + sen. B : sen. 168.
C — sen. B; pero (737) sen. C + sen. B : sen. C — sen. B :: tang. $\frac{C+B}{2}$: tang. $\frac{C-B}{2}$; luego $AB + AC : AB - AC$ :: tang. $\frac{C+B}{2}$: tang. $\frac{C-B}{2}$.

739 En esta proposicion se funda la resolucion de un triángulo quando se conocen dos de sus lados y el ángulo que forman. Porque en conociendo el ángulo A v. gr. se sacará la suma de los dos ángulos B y C, con restar el ángulo A de 180°. Luego si se toma la mitad de la resta de esta sustraccion, y se busca su tangente en las tablas, con los dos lados AB, AC que suponemos conocidos, tendremos conocidos tres términos de la proporcion poco ha probada. Con ellos se calculará un quarto término, el qual será la mitad de la diferencia de los dos ángulos B y C. Una vez conocida la semisuma y la semidiferencia de estos dos ángulos, se sa-

 ca-

cará el mayor con añadir la semidiferencia á la semisuma, y el menor restando la semidiferencia de la semisuma. Finalmente, por estos dos ángulos conocidos se sacará facilmente el tercer lado por lo demostrado (731).

Sea AC de 142 pies, AB de 120, y el ángulo A de 48° ¿qual será el valor de cada ángulo C, B y del lado BC?

Resto 48° de 180°, quedan 132°, suma de los dos ángulos C y B, cuya semisuma es por consiguiente 66°. Digo, pues, 142+120 : 142—120 : : tang. 66°: tang.$\frac{C-B}{2}$, ó 262 : 22 :: tang. 66°: tang.$\frac{C-B}{2}$

Por logaritmos

Tang. 66°.	10, 3514169
log. 22.	1, 3424227
Compl. log. 262.	7, 5816987
suma ó log. tang. semidif.	19, 2755383

al qual corresponde en las tablas á 10° 41′.

Si añadimos esta semidiferencia á la semisuma 66°, y despues la restamos de la misma semisuma, saldrá lo que aquí.

	66°	0′		66°	0′
	10	41		10	41
Ang. C	76°	41′	Ang. B	55°	19′

Finalmente, el lado BC se sacará por esta proporcion sen. C : AB : : sen. A : BC, ó sen. 76° 41′: 120 : : sen. 48° : BC: y practicando lo que en los casos propuestos, saldrá BC de 92, 7 pies.

GEO-

GEOMETRÍA

PRÁCTICA.

De las Medidas.

740 Aunque hemos declarado en los Elementos de Geometría quanto pertenece á la medida de la extension, nos toca ahora volver al asunto, no con la mira de gastar el tiempo en repeticiones inútiles, sino para contraer á casos prácticos lo que allí digimos explicando de un modo abstracto las principales operaciones que pueden ofrecerse. Muy pocas dificultades encontraría en esta aplicacion el que tuviese presentes los principios especulativos en que se funda, si fuese posible saliesen tan cabales las operaciones que penden del exercicio de nuestros sentidos groseros, como las especulaciones geométricas en que se exercita nuestro entendimiento. Nos es forzoso en la práctica hacer uso de instrumentos que pocas veces y quasi nunca dan resultados tan rigurosos como los que saca la teórica; y á estos inconvenientes, que dimanan de la naturaleza de las cosas, se agrega otro, que bien que solo pende del capricho de los hombres, no deja de ser de muchísima consideracion.

741 Consiste este inconveniente en la gran variedad de medidas que usan no solo las diferentes Naciones, sino tambien los varios Pueblos de una misma Nacion: siendo tan perjudicial al comercio esta multiplicidad de medidas, como contraria á la puntualidad matemática. Para quitar este inconveniente seria muy del caso una medida invariable que por razon de esta circunstancia mereciera hacerse uni-

 ver-

Fig. versal, cuya medida han buscado con mucho empeño varios matemáticos. Escusarémos por ahora dar noticia de las investigaciones en que se han empeñado con esta mira, por fundarse todas ellas en principios que no hemos tenido todavia lugar de declarar; pero entretanto manifestarémos algunas de las razones que hacen patente la necesidad de reducir á sola una todas las medidas conocidas, y la posibilidad de conseguirlo.

742 Si comerciar es trocar lo superfluo por lo necesario, todos los medios que facilitaren este cambio serán muy ventajosos para el comercio. En los trueques hemos de atender á ciertas razones, y particularmente á la razon que tienen las cantidades unas con otras, cuya razon se averigua con las medidas que á este fin se han inventado: quanto mas fácil fuere conocerla, tanto menos embarazoso será el trueque, y por consiguiente tanto mas prontas, frecuentes y provechosas las operaciones del comercio. Para averiguar la razon de las cantidades que se han de cambiar, no hay medio mas sencillo y seguro que una medida fija y universal.

743 En vano se nos opondrá para eludir la fuerza de este argumento, que reducidas á la uniformidad todas las medidas, perderian muchos Mercaderes la ganancia que se les sigue de la poca conformidad que entre ellas se repara.

1.º Porque es imaginaria esta ganancia, ora se haga el trato entre dos Mercaderes, ora se haga entre un Mercader y un particular. En el primer caso, como es para los que exercitan el trato un punto capital la reduccion de las medidas, y los mueve con igual estímulo el deseo de ganar, no cabe el que ignore ninguno de los dos lo que tanta cuenta le tiene saber, y serán ambos por lo menos igualmente diestros. Si se hiciere el trato entre un Mercader y un particular, este compra el género por el peso y la medida que conoce: tan adelantado se halla como el Mercader, y en su mano está no concluir un ajuste en que pueda quedar perjudicado. No resulta, pues, en ninguno de estos dos casos beneficio alguno de la variedad de las medidas.

Fig.

2.º Pero concedamos, y puede suceder alguna vez, que alguno de los dos, el vendedor ó el comprador halle alguna ventaja en el trato, porque tenga un conocimiento mas puntual de las medidas ¿podrá ser legítimo este beneficio? Para que gane en un ajuste el que está mejor enterado de la razon de las medidas, es preciso que pierda el que no está igualmente impuesto en su correspondencia. En este caso el primero vende menos ó compra mas géneros por el precio ajustado, de lo que entiende comprar ó vender el otro con quien trata; es, pues, doloso, y por consiguiente ilícito el trato. Finalmente, no puede ganar en la medida el uno de los dos, á no ser que haya mala fé, ó que el otro padezca en sus cálculos alguna equivocacion contraria á sus intereses.

Aun quando diéramos por lícita esta ganancia, y confesáramos que es para muchos un recurso, no podria el interés de este corto número preponderar respecto de la comodidad y ventaja que se les seguiria á todos los demas habitantes de un Reyno de la igualdad de las medidas, la qual escusaria una infinidad de reducciones siempre penosas, y en cuyos cálculos es muy fácil padecer muchas equivocaciones. Seria sin duda alguna muy provechoso para los cambistas el que hubiese distinta moneda en cada Ciudad y en cada calle; pero no por eso dexa de ser mas ventajoso para el público el que no haya en cada Reyno mas que una moneda. Pensar lo contrario seria lo mismo que tener por útil al géneronero humano la multiplicidad de lenguas, por la razon que si hablasen una misma todos los hombres, no necesitaríamos de intérpretes.

744 No basta, dicen algunos, que sea ventajoso reducir todas las medidas á la uniformidad: nada adelantamos si no se allanan las dificultades que forzosamente ha de encontrar esta reduccion. Nadie se persuadirá á que Oficiales, Labradores, Jornaleros se convengan en desechar la medida á que están hechos desde su niñez por otra que se substituya en su lugar. El que esperare hallar en ellos la docilidad en que deberia afianzarse el beneficio de esta providencia, ignoraria á buen seguro quán rendido y obstinado obedece el vulgo al imperio de la costumbre. Fuera de que, la mayor parte de los derechos se pagan en frutos, y estos se miden con medida distinta en cada Provincia, y aun en cada Partido. Si se admitiese una medida general, seria preciso alterar todos los títulos antiguos, cuya operacion encontraria muchas oposiciones, y no seria la menor la de las partes interesadas.

Pero si está patente el beneficio que se seguiria de usar sola una medida, no deben usarse muchas sino en el caso de haber una imposibilidad real en la reduccion: si esta no es mas que dificil, conviene procurar vencer los obstáculos que la estorban, y bastaría quizá para conseguirlo considerarlos con algun cuidado. No sé yo que sea mas dificil introducir en un Reyno una medida nueva, que dar curso á una nueva moneda, ó mudar el valor de la antigua; cuya operacion se ha executado varias veces.

745 Convengo sin embargo en que podria seguirse algun inconveniente de abrogar por una ley absoluta todas las medidas antiguas, mandando se hiciese uso de sola la nueva, antes que se les hubiese hecho, digamos así, familiar á los Pueblos. Pero esta ley rigurosa no seria necesaria: se podrian dexar subsistir en cada Provincia por un tiempo limitado las medidas antiguas, mandando que todas las ventas, arrendamientos y todos los recibos en que hubiese de intervenir el ministerio público de los Escribanos ó de los Tribunales, se hiciesen con arreglo á la medida antigua y á la nueva. A este fin deberian calcularse é imprimir tablas de reduccion, del mismo modo que hay aranceles para la reduccion de las monedas: y con el socorro de estas tablas, que al principio podrian darse de valde, las reducciones que hoy se executan entre los Mercaderes de diferentes Naciones y Provincias, con imperfeccion y por medio de una operacion las mas veces dificultosa, se executarian en lo succesivo con igual facilidad que precision.

746 Podria tambien guardarse en las Casas de Ayuntamiento, en las Aduanas, y en poder de los diferentes Gremios de Mercaderes y oficios un padron de las dos medidas, haciendo mencion de ambas en todos los testimonios, recibos é instrumentos públicos. Con esto se irian enterando así los particulares como los Mercaderes de la correspondencia entre la nueva medida y la antigua; y al cabo de algun tiempo que la experiencia determinaria, podria mandarse, si se tuviese por conveniente, que no se hiciera mas memoria de la antigua; cuyo uso se perdería insensiblemente, sin que se le siguiese el menor perjuicio al comercio. Si al mismo tiempo se multiplicasen los modelos de la nueva medida, é hiciesen mas comunes y baratos que los de las antiguas, se acostumbrarian poco á poco los particulares á usarla con preferencia en sus usos privados, vendria á ser en poco tiempo la nueva medida mas familiar que la otra, y por todos estos medios juntos

Fig. tos se conseguiria quizá, sin la intervencion de la autoridad Real, excluir de todo punto la medida antigua. Los vecinos de Ginebra han usado con tanta frecuencia de la vara de Francia, que sin providencia alguna han venido á abandonar insensiblemente la propia.

747 Pero una vez que no exîste la medida universal, nos es preciso conocer las que están recibidas, las principales por lo menos, para la medida de la extension. Esto nos empeña en dar noticia de algunas de ellas, y señalar en lo que cabe la correspondencia que hay entre las unas y las otras.

Para escusar mucha parte de la confusion que podria ocasionar su multiplicidad, han escogido los Matemáticos una medida á la qual suelen referir todas las demas. Esta, que en algun modo hace papel de medida universal, es el *pie de Rey* de Paris, sexta parte de la medida que los Franceses usan con nombre de *Toesa*. Se divide, pues, la toesa en 6 pies, cada pie en 12 pulg. cada pulgada en 12 lineas, y en la linea se consideran 10 puntos.

748 Para facilitar el cotejo y reduccion que aquí nos ocupa, se supone que el pie frances tiene 1000 partes, de las quales en cada una de las medidas que expresa la tabla siguiente, caben las que estan señaladas á su lado.

Pie

Fig.

Pie Frances	1, 000
Amsterdan, Holanda. Palmo, tercio del pie.	0, 2875
Berlin, Prusia. Pie	0, 9535
Burgos, Castilla. Pie	0, 8571
Constantinopla, Turquía. Pie.	2, 060
Copenhaguen, Dinamarca. Foot, pie	0, 966
Cracovia, Polonia. Pie	1, 0972
Estocolmo, Suecia. Pie	0, 9146
Lisboa, Portugal. Craveiro ó palmo.	0, 6729
Londres, Inglaterra. Foot ó pie	0, 9386
Moscow, Moscovia, ó Rusia. Pie	1, 0299
Nápoles, Italia. Palmo	0, 8090
Palermo, Sicilia. Pie	0, 7451
Petersburgo, Rusia. Pie	1, 0903
Rinlandico, (Pie)	0, 9667
Roma, Italia. Pie	0, 9170
Viena, Austria.	0, 9732

Usos de la tabla.

749 El valor del pie de Castilla es por la tabla 0, 8571 lo que significa que siendo uno el pie Frances, el pie castellano es $\frac{8571}{10000}$ (156); ó, lo que es lo mismo, que un pie castellano vale 0, 8571 partes del frances. Luego si multiplico 1 y 0, 8571 por 10, los productos 10 y 8, 571 han de ser iguales; de donde se sigue que 10 pies castellanos valen 8, 571 pies franceses. Por consiguiente si adelanto la coma dos lugares ácia la derecha, y multiplico 1 por 100, sacaré 85, 71 y 100, lo que significa que 100 pies castellanos valen 85, 71 pies franceses; que si adelanto la coma tres lugares á mano derecha saldrá 857, 1 y 1000, lo que significa que 1000 pies castellanos valen 857 pies franceses; y finalmente, que si adelanto la coma quatro lugares á la derecha, los números 10000 y 8571 significarán que

10000

Fig. 10000 pies castellanos valen 8571 pies franceses.

Propóngome averiguar quantos pies franceses hay en 24 pies castellanos.

Ya que un pie castellano vale por la tabla 0, 8571 partes del pie frances, los 24 pies castellanos serán el producto de 0, 8571 por 24; hecha la multiplicacion, sale que en 24 pies castellanos hay 20, 5704 pies franceses.

Busquemos ahora quantos pies castellanos hay en 35 pies franceses.

Como 0, 8571 de pie frances componen 1 pie castellano, diré: si 0, 8571 componen 1, ¿35 quántos compondrán? ó

0, 8571 : 1 :: 35 : 40, 830

hallo que los 35 pies franceses valen 40, 838 pies castellanos.

Quiero saber en 34 pies castellanos quantos pies Ingleses hay.

Busco primero quantos pies franceses hay en los 34 castellanos, multiplicando 0, 8571 por 34 (54); sale el producto 29, 1414, esto es que los 34 pies castellanos son 29, 1414 pies franceses. Todo está ahora en sacar quantos pies ingleses hay en los 29, 1414 pies franceses; se dirá pues,

0, 9386 : 1 :: 29, 1414 : 31, 04

y sale que los 34 pies castellanos no son sino 31, 04 pies Ingleses.

Lo mismo se puede averiguar de otro modo que al cabo se reduce á lo que acabamos de practicar. Ya que 0, 8571 pie castellano es menor que 0, 9386, pie ingles, en los 34 pies castellanos habrá menos pies ingleses. Luego al sentar los dos primeros términos de la proporcion que son 0, 9386 y 0, 8571, este ha de ser el segundo, será, pues

9386 : 8571 :: 34 : 31, 04

Esto mismo está diciendo lo que se habria de hacer si se nos ofreciera averiguar quantos pies castellanos hay en 34 pies ingleses. La proporcion seria esta

8571 : 9386 :: 34 : 37, 232.

De los instrumentos con que se hacen las operaciones de la Geometría práctica.

750 Para la aplicacion de la Geometría á las operaciones que en ella se fundan, sirven varios instrumentos, sin cuyo auxílio no seria posible executarlas con la precision y brevedad que se desea. Pero como los resultados de estas operaciones se trasladan quasi siempre al papel, donde se figuran del tamaño que se quiere ó permite el espacio, las areas, ángulos, edificios, &c. que se midieron, se echa de ver que el práctico necesita instrumentos de diferente construccion, y tambien, aunque sean de una misma, de tamaños diferentes. No podemos seguir en este asunto, por la razon que á qualquiera ocurrirá, el órden natural, que seria dar primero la descripcion, comprobacion, y usos de los instrumentos con los quales se executan las operaciones prácticas, y dar despues á conocer los que sirven para delinear, ó pintar en el papel lo practicado en el terreno. La descripcion de los primeros ocupará muy oportuno lugar donde declarémos el modo de practicar en el terreno; la de los demas, podemos darla desde ahora.

Instrumentos para delinear.

Estos instrumentos suelen venderse metidos en una caxita, ó estuche: hay estuches de diferente tamaño, segun sea el tamaño ó número de los instrumentos: vamos á tratar de los principales, enseñan-

Fig. ñando de todos el manejo, y de los mas complicados la construccion en que se funda la inteligencia de sus usos.

De la Regla.

751 El primero de todos los instrumentos, por ser de uso mas universal, es la regla la qual sir-
172. ve, como todos saben, para tirar una recta desde un punto *A* v. gr. á otro *B*. Con esta mira se aplica el instrumento sobre los dos puntos dados ó tan arrimado á ellos, que la esquina de uno de sus cantos enrase con ambos, y tirando un rasgo desde el un punto al otro con lapiz, ó tinta de china, á lo largo de la esquina, queda trazada la linea que se desea.

752 El punto esencial, por lo que toca á la regla, es tener seguridad de que está bien hecha. Esta comprobacion se hace tirando á lo largo de la regla una linea con una punta muy sutil; se aplica despues la esquina de la regla que sirvió para tirar la linea, de diferentes modos y lados sobre la linea, y si se ajusta ó quadra siempre puntualmente con ella es prueba de estar bien hecho el instrumento. Tambien se aplica sobre la linea ó sobre la esquina de la regla un pelo de caballo muy tirante, el qual si se ajusta bien desde un cabo á otro con la linea ó la esquina de la regla, manifiesta que será de uso seguro.

Para averiguar los Oficiales si una regla es bien derecha suelen aplicarla sobre otra regla de metal, de la qual estan seguros. Pero para sacar derecha esta regla de metal es preciso hacer dos á un tiempo, y recorrerlas con sumo pulso y cuidado con la linea hasta que convengan puntualmente sus aristas, aplicando estas reglas la una al lado de la otra de todos los modos posibles; y para asegurarse mejor de es-

estar bien hecha una regla, es necesario hacer tres. Fig.

Quando las reglas han de servir para tirar lineas con una punta ó un lapiz, pueden ser muy delgadas, y así son las de los estuches; pero quando con ellas se han de tirar lineas de tinta han de ser algo 172.
mas gruesas, ó conviene tengan un chaflan *C*, á fin de que la tinta que podria pegarse al canto de la regla no manche el papel, por cuyo motivo se aplica la regla boca abaxo. Las reglas han de ser de madera compacta; las de marfil suelen escurrirse.

Del Compas.

752 El instrumento mas sencillo y de mas uso despues de la regla es el compas, el qual se compone de dos piernas *AB*, *AC* puntiagudas por el 173.
uno de sus extremos, y por el otro se juntan en *A* con una charnela. Las piernas del compas pueden dar vueltas al rededor de la charnela, de modo que entre sus dos puntos *B*, *C* haya mayor ó menor distancia, segun convenga. Cada pierna en su último tercio ácia la punta es de acero, con el fin de que duren mas y no se pongan romas sus puntas, lo que seria un defecto de mucha gravedad: como la charnela puede aflojarse, ó puede convenir ponerla mas apretada de lo que está, hay en la cabeza del instrumento dos agujeritos *a*, *b* donde se introducen las dos puntas *c*, *d* de una pieza de acero *D*, que hay en algunos estuches; dando vuel- 174.
ta á esta pieza de la izquierda á la derecha, metidas sus puntas en los agujeros, se aprieta la charnela lo que se quiere: claro está que dando vueltas de la derecha á la izquierda se la aflojará. Sirve el compas para tomar lineas ó distancias en el papel: tomar con el compas una linea es abrir las dos piernas del instrumento de modo que sus puntas cay-

 gan,

Fig. gan, cada una en la suya, sobre cada extremo de la linea propuesta. Aquí se toma con el compas la li-
175. nea *AB*.

En todo estuche hay diferentes compases, pero nunca falta uno que tiene una pierna cuya mitad es de quita y pon: entonces en la mitad su-
176. perior de dicha pierna hay un hueco *u*, como si la hubieran taladrado, donde se introduce el sobrante *m* de la otra mitad; y apretando el tornillo *n*, su cabeza aprieta la parte metida, y la sujeta de tal modo, que el compas sirve lo mismo que si cada una de sus piernas fuera de sola una pieza.

El fin de este artificio es que un compas solo supla por muchos, substituyendo en lugar de la parte de quita y pon otras piezas de uso muy socorrido.

177. La primera es esta, en la qual se introduce un poco de lápiz, que con ella compone media pierna del instrumento. Esta pieza está cortada longitudinalmente ácia su boca, á fin de que ensanchándose esta se le pueda introducir la cabeza del lápiz; metida esta, se empuja ácia abaxo la argolla ó sortija *a*, con lo qual se arriman una á otra las dos partes de la boca, y afianzan el lápiz.

Mediante esta pieza sirve el compas para trazar círculos; se planta en el punto céntrico la punta de la pierna firme, y dando vueltas la otra al rededor queda trazada la figura. No hay duda en que tambien se podrian trazar círculos con la pierna sin lápiz; pero sobre que su punta rasgaría el papel, nunca dexa las figuras tan señaladas y perceptibles como el lápiz.

178. En lugar de la media pierna de quita y pon se substituye tambien estotra que remata en una como espuela, la que sirve para trazar lineas ocultas.

Substitúyese últimamente otra media pierna que re-

remata en dos hojitas de acero puntiagudas que Fig.
las pasa un tornillo *b*; dando vueltas al tornillo se 179.
arriman las dos puntas una á otra lo que se quiere, y mojándolas en la tinta, la que entre ellas se queda sirve para trazar lineas vivas, &c.

Un compas hay utilísimo que sirve para trazar lineas que tengan unas con otras la proporcion que se quiera. Compónese de dos piernas puntiagudas ambas en cada extremo, y afianzadas una con otra 180.
por la charnela *a*, la qual, aflojando el tornillo *b*, corre de arriba abajo, y se asegura donde se quiere, por manera que entre las dos partes del compas que quedan en cada lado de la charnela haya la proporcion que se desea; y esto lo avisan los números que á este fin van grabados en una ó en ambas piernas. Supongamos v. gr. que la charnela se asegure en tal punto de las piernas, que la parte *ab* sea la mitad de la parte *ad*. Abro el compas y cojo con las dos piernas mas largas *ad*, *ae* la linea *de*; claro está que la linea que cupiere entre las dos puntas *b*, *c*, será la mitad de la *de*. La razon es que los triángulos *abc*, *ade* son semejantes por ser iguales los ángulos en *a*, y porque de qualquier modo que esté el compas abierto las dos lineas ó distancias *de* y *bc* son paralelas; luego *de* : *bc* :: *ad* : *ab*.

De las Reglas paralelas.

753 Estas son dos reglas *AB*, *CD*, juntas por me- 181
dio de dos charnelas *E*, *F*, ambas igualmente inclinadas respecto de cada regla. Las charnelas dan vueltas al rededor de los exes *E*, *F*, con lo qual se aparta la una regla de la otra lo que se quiere ó permite el largo de dichas charnelas; y para manejar las reglas con mayor facilidad hay en las reglas dos pitoncitos *a*, *b* por donde se agarran y encaminan adonde se quiere.

Fig.

El nombre mismo de este instrumento está diciendo que sirve para tirar una linea paralela á otra dada. Supongamos que dada la linea *AB* ocurra tirarle una paralela que pase por el punto *C*. 182.

Se aplicará una esquina de las dos reglas sobre la linas *AB*, apretándola con el piton de modo que se quede inmoble; se cogerá despues la otra regla de su piton, y se la apartará de la primera hasta que su esquina caiga encima del punto *C*; la linea que se tirare entonces á lo largo de ella, será la paralela que se habia de tirar por el punto *C*.

Si el punto *C* estuviese tan distante de la linea dada *AB*, que despues de abiertas las reglas todo lo que permiten las charnelas, la regla superior no llegue al punto *C*, no se podrá tirar la paralela conforme hemos dicho. Pero despues de arrimar, en este caso, la regla superior todo lo posible al punto *C*, se la asegurará, y se le arrimará la regla inferior hasta que las dos reglas se toquen, se arrimará otra vez la de arriba al punto *C*; si no le alcánzare, se repetirá lo mismo; si le alcanzáre, se tirará por él la paralela pedida.

Con las reglas paralelas se puede partir una linea dada *AB* en un número de partes iguales, el que se quiera, v. gr. en cinco.

Tírese la linea indefinita *BC*, que forme con la 183. *AB* un ángulo, sea el que fuere; ábrase el compas lo que acomode, trasládese su abertura cinco veces sobre la *BC*, lo que señalará en ella cinco partes iguales *B*1, 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5; aplíquese la una de las dos reglas paralelas sobre las dos lineas, de modo que la una de sus esquinas enrase con los puntos 5, *A*, donde se tirará la linea 5*A*; aplicando despues succesivamente la esquina de la otra regla paralela sobre los puntos 4, 3, 2, 1, se tirarán por ella lineas paralelas á la 5 *A*, y quedará la *AB* dividida en cinco partes iguales.

Fig.

Del Semicírculo graduado.

754 Este es un instrumento de forma semicircular, cuya recta *AB* representa el diámetro de un 184. círculo, la curva *ADB* su semicircunferencia, y el punto *C*, señalado en medio de la *AB*, representa su centro. La semicircunferencia está dividida en 180 partes iguales, que representan otros tantos grados; y para mayor comodidad estan señalados de 10 en 10 de la derecha á la izquierda, y de la izquierda á la derecha hasta 180, mitad de los 360° que hay en la circunferencia entera.

755 Sirve el semicírculo graduado, 1.° para trazar un ángulo de un número determinado de grados; 2.° para saber quantos grados coge un ángulo trazado ya.

756 Este instrumento es mas acomodado quando las divisiones ó grados de la semicircunferencia se señalan en el borde *EF* de una regla paralela con *AB*. Estas divisiones se señalan en la regla aplicando otra que desde el centro *C* pase por las divisiones de la semicircunferencia, las lineas que desde el centro se tiran á dichas divisiones las dexarán señaladas en la *EF*. Esto lo entenderá facilmente el que mirare las lineas tiradas desde el centro *C* á las divisiones 90°, 60°, 30° de la semicircunferencia. Quedan, pues, señalados como se ve los grados en tres de los lados de la regla; se cuentan, del mismo modo que en el semicírculo, de ambos lados, figurando su lado en blanco el diámetro. Sobre que la regla graduada sirve para los mismos usos que el semicírculo, es de forma mas acomodada para meterla en el estuche. El lado donde estan señalados los grados se llama el *lado graduado*, ó *el limbo del instrumento*.

Fig.

Usos de la regla graduada.

757 I. *Tirar una linea que con la* AB *haga en el punto* A *un ángulo dado v. gr. de* 48 *grados.*

Aplíquese el lado blanco de la regla graduada
185. sobre la linea *AB*, de modo que su punto céntrico señalado con una cortadura cayga en el punto *A*; señálese con un lápiz el papel enfrente de la division 48 del limbo del instrumento, contando de la derecha á la izquierda; la linea *AC* tirada por *A* y dicha division formará con la *AB* en el punto *A* un ángulo de 48°.

Si la linea por tirar hubiese de formar con la *AB* el ángulo propuesto en el punto *B*, el centro del instrumento debería aplicarse en *B*, y los 48° se contarian en el limbo de la izquierda á la derecha.

758 II. *Determinar quantos grados coge un ángulo dado, v. gr. el ángulo* ABC.

Aplíquese el lado blanco del instrumento sobre la *AB*, de modo que su centro cayga en *B*; véase á que division del limbo corresponde la linea *BC*, prolongándola si fuese menester, los grados señalados en esta division serán los del ángulo *ABC*, contándolos de la izquierda á la derecha.

759 III. *En un punto dado* A *de una linea dada* AB *levantar una perpendicular.*

Póngase el lado blanco del instrumento atrave-
186. sado sobre la linea *AB*, de modo que en ella esten el centro de la regla, y la division 90; manteniéndola en esta situacion hágasela correr por dicha linea hasta que su punto céntrico cayga en *A*; la linea *AC* tirada á lo largo del lado blanco será perpendicular á la *AB* en el punto señalado *A*.

Del mismo modo se baxará desde un punto dado una perpendicular á una linea dada.

Pa-

se lineas cada una igual á las *DA*, *BC*, y que for- Fig.
men con *DA* y *CB* ángulos iguales con el primero; 188.
prosígase á este tenor hasta trazar el polígono pedido.

I. Supongamos que este sea un exâgono; tírense las *AD*, *BC*, cada una igual á la *AB*, de modo que los ángulos *BAD*, *ABC* sean de 120° cada uno; háganse tambien los ángulos *ADF*, *BCE* de 120° cada uno, siendo las *DF*, *CE* iguales cada una con la *AB*; tírese por último la *FE*, y estará trazado el polígono pedido.

764 Quando el polígono propuesto tiene un número par de lados, la operacion es mas breve y fácil por medio de las reglas paralelas. Despues de trazados, conforme se ha dicho, los lados *AD*, *AB*, *BC*, tírese por *D* una paralela á la *BC*, y hágase la $DF = AB$; por *F* tírese la *EF* paralela é igual con la *AB*; tírese últimamente la *CE* y quedará trazado el polígono.

765 2.° Sea pentágono el polígono qe se ha
de trazar sobre la *AB*. 189.

Tírense las *AC*, *BD*, cada una igual á la *AB*, con la qual forme un ángulo de 108°; desde los centros *C* y *D* y con radio igual á la *AB* trácense arcos que se corten en *E*, tírense finalmente las *EC*, *ED*, y estará trazado el pentágono.

Respecto de un polígono regular, una vez trazados todos los lados menos dos, por el método antes propuesto, se trazarán los dos últimos conforme se han trazado en el pentágono del caso último.

766 Un pentágono regular se trazará sobre la linea *AB* con mas acierto practicando lo siguiente.

Sobre la *AB* háganse los ángulos *BAP*, *ABP*, 189.
cada uno igual á la mitad del ángulo del polígono propuesto; desde el centro *P*, donde las lineas *AP*, *BP* se cruzan, y con el radio *AP* trácese un cír-

círculo; aplíquese al rededor de su circunferencia la linea *AB*, y quedará trazada la figura pedida.

De las Escalas planas.

767 Las escalas planas sirven para tantas y tan diferentes operaciones, que por lo mismo es muy varia su construccion. Por las lineas que en ellas van señaladas se indicia desde luego el uso de cada una: dirémos, pues, aquí quales son estas lineas; despues irémos recorriendo una por una todas las escalas para manifestar sus usos, menos de algunas cuya aplicacion corresponde á los tratados cuyas son las operaciones para que se necesitan.

Lineas que se señalan en las escalas planas.

Nombres de las lineas.	*Como se señalan.*
I. Lineas de las partes iguales.	E. P. I.
II. Lineas de las cuerdas.	Cuer.
III. Lineas de los rumbos.	Rum.
IV. Lineas de los senos.	Sen.
V. Lineas de las tangentes.	Tang.
VI. Lineas de las secantes.	Sec.
VII. Lineas de las semitangentes.	S. T.
VIII. Lineas de las longitudes.	Lon.
IX. Lineas de las latitudes.	Lat.
X. Lineas de las horas.	Hor.
XI. Lineas de las inclinaciones.	incl. Mer.

Lineas de las partes iguales.

768 Para hacer estas escalas se trazan tres lineas paralelas á distancias desiguales, estando las dos de abajo mas proximas una á otra que no á la de arriba. Estas tres paralelas se dividen en un número de partes iguales, el que se tiene por conveniente, con lineas que las cortan al traves; y como estas lineas atravesadas son perpendiculares ó inclinadas respecto de las tres paralelas, esta es la razon por que unas escalas se llaman *simples*, y otras *diagonales*.

Fig.

769 I. *Escalas simples.* Despues de determinado el largo de las tres lineas paralelas se les tiran conforme hemos dicho, lineas perpendiculares atravesadas, con lo que quedan divididas en el número de partes iguales, el que se tiene por conveniente. De estas partes se dan á la pulgada las que 190.
se quiere, v. g. 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$ &c. La última division á mano izquierda se divide en 10 partes iguales, con lineas tiradas al traves de las paralelas inferiores no mas, de las quales la que señala la quinta division se hace un poco mas larga que las otras. Dicha primer division á mano izquierda tambien se puede dividir en 12 partes iguales con lineas tiradas al traves de la paralela de arriba, y señalando la tercera, sexta y novena division con lineas mas largas, siendo la mas larga de todas la que señale la sexta division.

En una misma regla suele haber unas encima de otras muchas de estas escalas, con números á mano izquierda, los quales señalan en quantas partes 190.
está dividida la pulgada en cada escala, v. g. en 20, 25, 30, 35, 40 &c. partes, sirviendo cada una de ellas para casos diferentes, conforme la extension del dibujo por trazar.

770 Con estas lineas de partes iguales se expresan las cantidades, sean varas, leguas, peso &c. por enteros y partes suyas decimales ó duodecimales. Si cada una de las divisiones se cuenta por 1, v.g. cada una de las divisiones menores expresará $\frac{1}{10}$ parte suya; si cada una de las divisiones mayores se contare por 10, cada una de las menores será 1; si cada division mayor se tomase por 100, cada una de las menores será 10 &c.

Esto bien entendido, para tomar una linea de 87,

Fig. $8\frac{7}{10}$, 87 ú 870 partes iguales, sean leguas, millas &c. se plantará la una punta del compas en la octava de las divisiones mayores, contándolas de la izquierda á la derecha; se abrirá el compas, hasta que su otra punta cayga sobre la 7ma de las divisio-
190. nes menores, contándolas de la derecha á la izquierda, la distancia entre las dos puntas del compas expresará una linea de $8\frac{7}{10}$, 87, ú 870 millas, leguas, ó lo que fuere, y las mismas en el dibujo con proporcion á la cosa dibujada.

771 Pero si se quisiese expresar una cantidad de pies y pulgadas, las divisiones mayores serán pies, y las pulgadas se tomarán en la parte superior de la primer division, la qual, segun se dixo antes, está dividida en doce partes.

En virtud de esto, para tomar una linea de 7 pies 5 pulg. se plantará la una punta del compas en la quinta division de las doce menores, contándolas de la derecha á la izquierda; se alargará la otra punta hasta 7 de las divisiones mayores, la distancia de punta á punta expresará una linea de 7 pies 5 pulgadas. Es muy fácil de aplicar esta práctica á otro caso qualquiera.

772 II. *Escalas diagonales.* El modo de hacer y usar estas escalas quedó declarado ya en la Geometría, por lo que escusamos repetir aquí su construccion. So-
191. lo propondremos dos casos particulares de los muchos á que pueden aplicarse.

773 Propongamos *dibujar una tierra triangular* ABC, *cuyo lado* AB *es de* 327 *estadales*: AC *de*
192. 208, *y el ángulo* A *es de* $44\frac{1}{2}$.°

Por medio de la escala diagonal se tirará la *AB* de 327 partes; poniendo el centro de la regla graduada en *A*, se hará el ángulo *BAC* de $44\frac{1}{2}$°; hágase la *AC* de 208 partes; últimamente, tírese la *CB*, y todas las partes del triángulo *ABC* trazado en el

el papel serán proporcionales á las partes de la tierra. Fig.

Claro está que el lado *CB* se ha de tomar con la misma escala que los lados *AB*, *AC* y los ángulos en *B* y *C* se trazarán conforme queda dicho (757).

Si se supiese el largo de un lado, y el valor de los dos ángulos adyacentes, seria igualmente fácil la operacion. Se tirará desde luego una linea de tantas partes de largo de las de la escala, como la del terreno coja varas, pies, &c.; en cada extremo de esta linea se trazarán ángulos de igual valor respectivo á los del terreno; tirando lineas desde el extremo de la señalada con arreglo á estos ángulos, estas se irán á encontrar en un punto, y formarán un triángulo todo parecido á la tierra triangular cuyo dibujo se quiere hacer.

774 II. *Si de las ocho cosas que hay en un quadrilátero, es á saber, quatro lados y quatro ángulos, se conocen cinco adyacentes, será fácil trazar su dibujo por medio de la escala.*

Sea v. g. el quadrilátero *ABCD*, cuyo ángulo *A* es de 70°; *AB*, de 215 varas; el ángulo *B* de 193.
de 115°; *BC*, de 596 varas; y el ángulo *C* de 114.° Para dibujarle, tiraremos la indefinita *AD*, haremos en *A* un ángulo de 70°, y la *AB* de 215 partes de la escala; haremos en *B* un ángulo de 115,° y la *BC* de 596 partes; haremos en *C* un ángulo de 114°, y tirarémos la *CD*, con lo que habrémos dibujado un quadrilátero semejante al propuesto.

775 Con igual facilidad se haria el dibujo, si entre las cinco cosas conocidas hubiere tres lados.

Por el mismo método se dibujará una figura de mas lados; y el mismo siguen á otro semejante los Agrimensores en sus operaciones.

De las lineas que suelen señalarse en las escalas planas.

776 En las escalas planas suelen señalarse otras li-

Fig. lineas de suma utilidad para executar muchas operaciones de los diferentes tratados Matemáticos; las mismas lineas con otras muchas se señalan tambien en la Pantómetra, instrumento que muy pronto darémos á conocer. Manifestarémos aquí los fundamentos de tadas estas lineas, dexando el declarar los usos de las principales para quando tratemos de la Pantómetra.

777 Trácese una circunferencia de radio conveniente, y tírense los diámetros *AB*, *DE* que se corten en ángulo recto; prolónguese lo que se quiera
194. la *AB* ácia *F*; por *D* tírese la *DG* paralela á *BF*, y tírense las cuerdas *BD*, *BE*, *AD*, *AE*; circunscríbase por último al círculo el quadrado *HMN*, cuyos lados *HM*, *MN* son paralelos á *AB*, *ED*.

Linea de las cuerdas.

778 Pártase el arco *AD* en 90 partes iguales, señalando las diez divisiones con los números 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90; plántese la una punta del compas en el centro *D*, y con la otra traslá-dense las divisiones del quadrante de círculo á la cuerda *AD*, en la qual se señalarán con los números correspondientes; hecho esto, quedará trazada la linea de las cuerdas.

En la construccion de esta escala, al señalar las divisiones nos hemos ceñido á las principales, omitiendo las subdivisiones con el fin de que no saliera confusa la figura.

Linea de los Rumbos.

779 Háganse en el arco *BE* ocho divisiones iguales, señalándolas con los guarismos 1, 2, 3, 4, 5
194. 6, 7, 8, y subdivídase cada una de ellas en quartos; desde el centro *B* trasládense las divisiones del Fig. arco á la cuerda *BE*, y señálense con los guarismos correspondientes. Hecho esto, quedará trazada la linea de los Rumbos.

Linea de los Senos.

780 Por cada una de las divisiones del arco *AD* tírense rectas paralelas al radio *AC*, y quedará dividida la *CD* en la linea de los senos. Los senos rec- 194.
tos se contarán desde *C* á *D*, y los senos versos desde *D* á *C*. Los senos versos se continuarán, si se quiere, hasta 180°, con llevar desde *C* á *E* las divisiones del radio *CD*.

La Linea de las Tangentes.

781 Una regla que pase por *C* y por las diferentes divisiones del arco *AD*, dexará señaladas en la linea *DG* las tangentes de los arcos, la qual se- 194.
rá por lo mismo la linea de las tangentes, que en ella van señaladas con los números 10, 20, 30, 40, &c.

Linea de las Secantes.

782 Si las distancias desde el centro *C* á las divisiones de la linea de las tangentes se trasladan desde el centro *C* á la linea *CF*, quedarán señaladas 194.
las divisiones de la linea de las secantes, las quales se contarán desde *A* ácia *F*, 10, 20, 30 &c.

Linea de las medias tangentes, ó de las tangentes de las mitades de los arcos.

783 Si sobre *E* y las diferentes divisiones del arco

Fig. co AD se aplica una regla, esta cortará el radio CA en las divisiones de las medias tangentes, las quales se señalarán con los guarismos correspondien-
194. tes del arco AD.

Las semitangentes de la escala plana se continuan y señalan quanto permite el largo de la regla: para señalar las divisiones correspondientes á los arcos mayores de 90°, se divide el arco AE del mismo modo que el arco AD; sobre estas divisiones del arco AE y el punto E se aplica una regla, la qual señala en la CA, prolongada si es menester, las divisiones de las semitangentes de los arcos que pasan de 90.°

Linea de las Longitudes.

784 Divídase la AH en 60 partes iguales; por cada una de sus divisiones tírense paralelas al radio
194. AC, las quales cortarán el arco AE en otros tantos puntos: desde el centro E se trasladarán las divisiones del arco AE á la cuerda AE, con lo que estará trazada la linea de las longitudes.

Los puntos señalados en el quadrante del arco conforme hemos enseñado, se cuentan desde A á E respecto de los senos que crecen por partes sexâgesimales del radio; respecto de los cosenos de las mismas partes se cuentan desde E.

Linea de las Latitudes.

785 Aplíquese en A una regla que pase por las diferentes divisiones de los senos señalados en la CD, la regla cortará el arco BD en otros tantos puntos. Desde B como centro trasládense estas intersecciones del arco BD á la recta BD, y señálense las divisiones desde B á D con 10, 20 &c. hasta 90;

90; será BD la linea de las latitudes. Fig.

Linea de las Horas.

786 Pártase por medio en a y b cada uno de los quadrantes de círculo BD, BE; como el arco ab se 194.
compone de dos mitades del quadrante, será tambien ab un quadrante de círculo. Pártasele en 6 partes iguales (que darán 15° para cada hora); pártase cada una de estas en quatro (estas darán los quartos de hora). Si sobre el punto C y las diferentes divisiones del arco ab se aplica una regla, esta cortará la linea NM en los puntos de las horas, que se señalarán como demuestra la figura.

Linea de la inclinacion de los Meridianos.

787 Pártase por medio en C el arco EA; pártase en 90 partes iguales el quadrante de círculo bc: aplíquese en C una regla que pase por las diferentes divisiones del arco bc; los puntos donde la 194.
regla cortará la linea HM serán las divisiones de la linea de la inclinacion de los meridianos.

De la Pantómetra.

788 La Pantómetra es un instrumento compuesto de dos reglas planas que dan vuelta al rededor de una charnela, desde cuyo centro, donde se jun- 195.
tan, hay tiradas diferentes escalas en las caras de las reglas, que se llaman las dos piernas de la Pantómetra, representan radios de círculo, y el punto donde se juntan se llama el centro.

Las Pantómetras pueden ser de largo diferente; quanto mas largas sean, tanto menos confusas y mas perceptibles serán las lineas y números que en

Fig. en sus piernas se señalan. Quando se habla del largo de este instrumento, se entiende lo que coge estando cerrado, y arrimadas una á otra sus dos piernas, de modo que así doblado ó cerrado quepa en el estuche. Por consiguiente, una Pantómetra de 6 pulg. es aquella cuyas piernas cogen cada una 6 pulgadas de largo, desde el centro hasta su extremo; por manera que abierto de par en par el instrumento, formando sus dos piernas una sola regla continua, tiene 12 pulgadas de largo.

789 En las piernas de la pantómetra se señalan escalas sencillas y dobles.

790 Las escalas sencillas son las mismas que hemos dicho se señalan en las escalas planas, y en las quales se toman las dimensiones y distancias conforme queda declarado.

791 Las escalas dobles se llaman así porque están trazadas en ambas piernas del instrumento, procediendo desde el centro. En estas escalas se toman las dimensiones y distancias estando abiertas las piernas de la pantómetra, de modo que forman un ángulo, conforme se dirá despues.

792 Las lineas ó escalas que comunmente se señalan en las mejores Pantómetras, son Fig.

Simples.	1	Lineas de	Pulg.^{da} cada pulg.^{da} div.^{da} en 8, y 10 p.^{tes}	
	2		Decimales que contienen 100 partes.	
	3		Cuerdas.	Señaladas Cuer.
	4		Senos.	Sen.
	5		Tangentes.	Tang.
	6		Rumbos.	Rum.
	7		Latitudes.	Lat.
	8		Horas.	Hor.
	9		Longitudes.	Long.
	10		Inclin. Merid.	Inc. Me.
	11		Logaritmos de los Números.	Num.
	12		Senos.	Sen.
	13		Senos Versos.	Sen.Ver.
	14		Tangentes.	Tang.

Dobles.	1	Lineas de	Lineas de partes iguales	Señaladas Lin.
	2		Cuerdas	Cuer.
	3		Senos	Sen.
	4		Tangentes hasta 45°	Tan.
	5		Secantes	Sec.
	6		Tangentes mayores de 45°	Tan.
	7		Polígonos.	Políg.

En la figura se vé como estas escalas están dispuestas, pero lo mejor será tener una pantómetra 195. á la vista.

793 Las escalas de lineas, cuerdas, senos, tangentes, rumbos, latitudes, horas, longitudes, inclin. de meridianos sirven, sea que el instrumento esté abierto ó cerrado, porque cada una de estas escalas está en una sola pierna de la pantómetra. Las escalas de las pulgadas, decimales, logaritmos de los senos, de las tangentes, de los senos versos,

Fig. sirven estando el instrumento de todo punto abierto, porque en cada una de sus piernas hay una parte no mas de cada una de estas escalas.

794 Las escalas dobles de lineas, cuerdas, senos, y de las tangentes altas y baxas, esto es las de los arcos mayores y menores de 45 grados, son todas de un mismo radio ó largo; todas empiezan
195. desde el centro del instrumento, y rematan muy cerca del otro extremo de cada pierna; es á saber, la escala de las lineas en la division 10, la de las cuerdas en la division 60, la de los senos en la division 90, y la de las tangentes en la division 45; las demas tangentes ó las de los arcos que pasan de 45°, están en otras escalas que empiezan una quarta parte dellargo de la pierna mas abaxo del centro, donde está señalado el número 45, y corren hasta cerca de 76.°

795 Las secantes tambien empiezan á la misma distancia del centro, donde hay esta señal o, desde donde prosiguen todo lo que permite el largo de la pantómetra, esto es hasta cerca de 75.°

796 Toda escala doble, por lo mismo que cada una de las dos que la componen está señalada en cada pierna, y ambas empiezan desde el centro, forma un ángulo, y en la misma disposicion están todas las escalas dobles, sean de lineas, ó cuerdas, ó senos, ó tangentes hasta 45.°

Y los ángulos que forman las escalas de las tangentes altas y de las secantes son tambien iguales, cuyos ángulos á veces se hacen iguales con los de las demas escalas dobles.

797 Las escalas de los polígonos están mas proxîmas que todas las demas al canto interior de cada pierna; no empiezan desde el centro, sino desde el número 4 señalado cerca de 60 de la linea de las cuerdas. Desde este 4 están señalados ácia el cen-

centro los demas números hasta 12.

798 De la disposicion en que dejamos dicho que están las escalas dobles de la Pantómetra, se infiere con evidencia que las que forman ángulos iguales estando cerrado el instrumento, los forman tambien iguales quando está abierto todo lo que se quiere ó puede.

Ahora declararémos la construccion de las escalas que lleva la Pantómetra.

De las escalas sencillas.

Escala de pulgadas.

799 Esta escala, que se señala muy arrimada 195.
al canto exterior de la Pantómetra, y algunas veces en el canto mismo, tiene tantas pulgadas quantas coge de largo el instrumento estando todo abierto, de modo que sus dos piernas forman una sola regla. Cada pulgada suele dividirse en 8 y tambien en 10 partes iguales.

Escala decimal.

800 Esta escala se sigue á la de las pulgadas, y coge lo mismo que la Pantómetra quando está toda abierta. Consta de 10 partes ó principales divisiones iguales, cada una de las quales se divide en otras diez partes iguales; por manera que toda la escala está dividida en 100 partes iguales. Quando la Pantómetra tiene largo suficiente, cada una de estas 100 partes se subdivide en dos, quatro ó seis partes. Por medio de esta escala decimal se trazan todas las demas escalas que se sacan de tablas.

Escalas de Cuerdas, Rumbos, Senos, Tangentes, Horas, Latitudes, Longitudes, é Inclinaciones de meridiano.

801 La construccion de todas estas escalas queda ya declarada antes de ahora, quando se especificaron las que van señaladas en las escalas planas.

Escala de Logaritmos de los Números.

802 En esta escala, comunmente llamada de números artificiales, y tambien *escala ó linea de Gunter*, su inventor, se expresan los logaritmos de los números naturales por su órden. Para señalar muy cabales sus divisiones conviene tener á mano una buena Tabla de Logaritmos, y una escala de partes iguales dividida con sumo cuidado, y de tal largo, que la escala de Logaritmos que se quiere hacer coja 20 de sus principales divisiones.

Construccion.

803 1.° Tómese en la escala de partes iguales la primera de las 10 principales divisiones, y llévese esta distancia dos veces á la escala logaritmica, señalando dos intervalos iguales, el primero con 1, el segundo con 1 (ó mejor con 10) el tercero con 10 (ó mejor con 100).

2.° Tómense en la escala de partes iguales distancias iguales á los números que expresan respectivamente los logaritmos de los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, desechando sus características; señálense estas distancias en cada intervalo de la escala logarítmica entre los números 1 y 10; 10 y 100, contándolas desde el principio de dicho intervalo, quiero decir, desde 1, desde 10, cuyas divisiones se señalarán con los guarismos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 por su órden. Fig.

Como las tres primeras figuras de los logaritmos de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 son respectivamente 301, 477, 602, 699, 778, 845, 903, 954, estos son los números que se han de tomar en la escala de partes iguales para señalarlos en cada intervalo, empezando desde el principio de este.

3.° Las distancias que expresan los logaritmos de los números entre 10 y 20, 20 y 30, 30 y 40, 40 y 50, 50 y 60, 60 y 70, 70 y 80, 80 y 90, 90 y 100 (desechadas sus características) se toman tambien en la escala de partes iguales para señalarlas en la escala logarítmica, en cada uno de los intervalos primarios, respectivamente entre las señales 1 y 2, 2 y 3, 3 y 4, 4 y 5, 5 y 6, 6 y 7, 7 y 8, 8 y 9, 9 y 10, contando cada una de ellas desde el principio del intervalo respectivo donde se han de poner. 195.

4.° Las últimas subdivisiones del segundo intervalo principal se pueden subdividir en otras, quantas admita la escala, lo que se hace con señalar los logaritmos de dichas divisiones intermedias, segun se tenga por conveniente.

Escala de los Logaritmos de los Senos.

804 Tómense en la escala de partes iguales las distancias que expresan el complemento arismético de los logaritmos de los senos (ó de las secantes de los complementos) de 80°, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10 grados, respectivamente, desechando sus características. Señálense estas distancias en la escala de los logaritmos de los senos, empezando á contar cada una de ellas desde la señal que se quiera

Fig. ra exprese 90°, la qual está arrimada ó debajo de la señal donde remata el segundo intervalo de la la linea de los números.

Como las tres primeras figuras del complemenmento arismético de los logaritmos de los senos de 80°, 70°, 60°, 50°, 40°, 30°, 20°, 10° son respectivamente 007, 026, 063, 115, 192, 301, 466, 760; estos son los números que se han de tomar en la escala de partes iguales para señalar los logaritmos de los números, llevando cada abertura de compas de la derecha á la izquierda, empezando desde el punto que se quiera señale 90°, que suele estar debajo del extremo de la linea de los números.

Lo mismo se practicará respecto ds los senos que no lleguen á 10°, y de los grados intermedios entre 10 y 20, 20 y 30 &c.

Tómense tantos multiplos de 5 minutos quantos quepan entre los límites de dichos grados, y
195. servirá la escala para los logaritmos de senos de número determinado de grados y minutos.

Escala de los Logaritmos de las Tangentes.

805 Esta escala, por lo que toca á 45°, se construye del mismo modo que la de los logaritmos de los senos, por medio de los complementos logarítmicos de las tangentes.

Mas allá de 45° sirve la escala ácia atras. Así 40° representa en la escala á un tiempo 40° y 50°; 30° representa á un tiempo 30° y 60°; lo propio digo de los demas grados señalados en la escala y de los de entremedias.

Es-

Fig.

Escala logarítmica de los senos versos.

806 Tómense en la escala de partes iguales los complementos arisméticos de los logaritmos de los cosenos (ó de las secantes de los complementos) de 5°, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 &c. grados, desechando sus características; señálese el duplo de estas distancias respectivamente en la escala logarítmica que se quiere formar de los senos versos, y quedarán señaladas las divisiones correspondientes á 10°, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 &c. grados, y á tantos como permita el largo de la escala.

Las escalas de los logaritmos de los números, senos, senos versos y tangentes, empiezan todas en un mismo extremo del instrumento, donde el principio de cada una está al lado ó enfrente del principio de las demas; así 10 de la escala de los 195.
números, 90 en la de los senos, ó senos versos, y 45 en las tangentes estan unos al lado de otros. Desde allí siguen dichas escalas ácia y mas allá del centro de la Pantómetra, de modo que las escalas de senos ó senos versos y tangentes siguen mas allá de 1 de la escala de los números señalados en la otra pierna del instrumento, junto á cuyo 1 está la division que representa 35 minutos en los senos y tangentes, y 168½ grados en los senos versos.

De las Escalas dobles.

Escala de las lineas.

807 Esta es una escala de partes iguales, con la diferencia que coge de largo en ambas piernas el largo de cada una; por manera que en las Pantómetras de 6 pulg. de largo es de 5¾ pulgadas.

Esta escala se divide en 10 divisiones principales;

Fig. les; cada una de ellas en 10 subdivisiones, y cada subdivision en 4 partes iguales.

Con esto es fácil comprobor esta escala en la misma Pantómetra. A cuyo fin se toma en ella con el compas comun un número, el que se quiera, de partes iguales; se aplica, ó lleva esta distancia á diferentes partes del instrumento, y si en todas coge el compas el mismo número de partes iguales, es señal de estar bien dividida la escala.

Escala de los Senos.

808 Dese de largo á esta escala lo mismo que á la de las lineas.

Tómense succesivamente en la escala de las lineas las partes que expresan los números de las tablas de los senos naturales, correspondientes á los grados, ó grados y minutos, que se quieran señalar en la escala.

Señálense succesivamente estas distancias en la escala, empezando desde el centro, y estará trazada la escala de los senos naturales.

195. Para señalar v. g. el seno natural de 35° 15', que en las tablas es de 57714 partes,

Se tomará este número tan cabal como se pueda en la escala de las lineas, contando desde el centro; y esta distancia cogerá desde el principio de los senos en el centro del instrumento, hasta la division que expresa 35° 15'; y así de lo demas.

En las escalas de este largo se estilan trazar divisiones de 15' cada una, desde o grados hasta 60 grados; entre 60 y 80 grados se señalan los medios grados; el grado que se sigue á 85 es de 90.°

Escala de las Tangentes baxas.

809 Esta escala es tambien del mismo largo que la escala de las lineas, y en ella se toman sus diferentes divisiones respecto de las tangentes de los primeros 45°, sacadas, conforme se dixo de los senos, de unas tablas de tangentes naturales. Fig.

Escala de las Tangentes altas.

810 Respecto de los grados que pasan de 45° su escala se traza tomando $\frac{1}{4}$ de las tangentes de la tabla natural que pasan de 45°, que se quieren señalar en la escala. Esta escala de las tangentes que pasan de 45°, ó empiezan por las tangentes de 45°, empieza en la Pantómetra una quarta parte de la escala de las tangentes baxas mas abajo del centro.

Escala de las Secantes.

811 La distancia desde el principio de esta escala al centro del instrumento, y el modo de trazarla, son cabalmente los mismos que los de la escala de las tangentes altas. 195.

Escala de las Cuerdas.

812 Dese de largo á esta escala lo mismo que á la de los senos, y señálense en ella divisiones, que expresen 15' desde o grados hasta 60.

Para cada division que se ha de trazar, tómese el largo del seno de la mitad de los grados y minutos en la escala de los senos; el duplo de este largo, contando desde el centro, dará las divisiones pedidas.

A este modo, el duplo del seno de 18° 15' será la cuerda de 36° 30', lo que debe entenderse de todos los demas.

Es-

Fig.

Escala de los Polígonos.

813 En esta escala se señalan comunmente los lados de los polígonos desde 6 hasta 12 lados inclusive; sus divisiones cogen de largo tanto como las cuerdas de los ángulos del centro de cada polígono, y se trazan desde el centro del instrumento.

Pero lo mejor es señalar tambien polígonos de 4 y 5 lados, y entónces esta escala se traza como la de las cuerdas, cuyo largo de 90° es igual al de 60° de la escala doble de las cuerdas en la pantómetra.

Usos de las Escalas dobles.

814 Los mas de los usos de las escalas dobles de la Pantómetra se fundan en la siguiente proposicion.

196. Si en dos lineas *AB*, *AC* que forman un ángulo qualquiera *BAC*, se toman las dos lineas *AB*, *AC* iguales, y las lineas *Ad*, *Ae* tambien iguales, y se tiran las lineas *BC*, *de*, habrá entre estas dos lineas transversales la misma razon que entre las laterales *AB*, *Ad*.

Porque los triángulos *Ade*, *ABC* son ambos isósceles por construccion. Si de cada uno se resta el ángulo comun *A*, la suma de los ángulos *Ade*, *Aed* del primero será igual á la suma de los ángulos *ABC*, *ACB* del segundo; pero cada una de las dos sumas consta de dos partes iguales (442). Luego cada parte de la primer suma es igual á cada parte de la segunda; luego el ángulo *Ade* será igual al ángulo *ABC*, y el ángulo *Aed* igual al ángulo *ACB*. Luego las lineas *de* y *BC* (370) son paralelas, y por consiguiente (502) será *AB* : *BC* :: *Ad* : *de*, ó *BC* : *de* :: *AB* : *Ad*.

In-

815 Infiérese de aquí que si se toman las lineas *AB*, *Ad* en la razon que se quiera, la misma razon habrá entre las lineas *BC*, *de*; por manera que si *Ad* fuese v. g. los $\frac{2}{3}$ de *AB*, será tambien *de* los $\frac{2}{3}$ de *BC*. Si fuese *AB* el radio de un 196. círculo cuya cuerda de 40° sea *Ad*, será tambien *BC* el radio del círculo cuya cuerda de 40° será *de*; si fuese *AB* el diámetro de un círculo duplo del círculo cuyo diámetro es *Ad*, será tambien *BC* el diámetro de un círculo duplo de otro círculo cuyo diámetro fuese *de*.

Fig.

Como se puede abrir la Pantómetra mas ó ménos, segun convenga, se le puede dar por medio de un compas comun aplicando la una de sus puntas en *B* y la otra en *C*, á la distancia *BC* una longitud señalada; y estando así abierta la Pantómetra, se hallará la distancia *de* que tendrá con *BC* la razon que se buscare.

816 Con el compas comun se toman de dos mo- 197. dos diferentes las distancias necesarias para la resolucion de las cuestiones. Porque hay distancias laterales y distancias transversales. Tomar con la Pantómetra una distancia lateral es plantar en su centro la una punta del compas, y abrirle hasta que la otra punta llegue en la escala correspondiente de la Pantómetra al número propuesto; aquí figuraremos que se toma la distancia lateral de 70 partes. Tomar en la pantómetra una distancia transversal es abrir sus dos piernas de modo que plantando la una punta de compas en un número de la una de las dos piernas de la pantómetra, la otra punta caiga en el mismo número de la otra pierna; aquí figuramos que se toma en la pantómatra la distancia transversal de 90 á 90.

Cada una de estas escalas dobles se compone de tres lineas paralelas, en las quales van señaladas sus

Fig. sus divisiones con lineas tiradas al traves. Como de las tres lineas paralelas solo la que está mas próxîma al canto interior de la pierna es la que se dirige al centro del instrumento, en ella han de estar las puntas del compas comun siempre que con él se haya de tomar alguna distancia transversal.

Usos de la escala de las lineas.

817 Cuestion 1. *Dadas dos lineas* AB=2 *y* BC
198. =6, *hallar entre ellas una tercera proporcional.*

Tómese con un compas la distancia lateral de la segunda linea, ó del segundo término 6; 2° póngase la una de sus puntas en la division que expresa el primer término 2, en la una pierna de la pantómetra, y ábrase esta hasta que la otra punta caiga encima de la correspondiente division de la otra pierna; 3.° Manténgase el instrumento en esta posicion; tómese la distancia lateral del segundo término 6, y esta distancia será el tercer término que se pide. 4.° Si se mide lateralmente esta distancia, el número 18 donde rematare expresará el valor del tercer término, porque 2 : 6 : : 6 : 18.

Si la proporcion fuese decreciente, tómese lateralmente la distancia 2, y aplíquese transversalmente sobre 6 y 6, estando abierta como conviene la Pantómetra, entónces la distancia transversal de 2 á 2 llevada con el compas lateralmente desde el centro del instrumento á la escala de las lineas, dará $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; valor del tercer término.

818 Si acaso el segundo término fuese tan grande que su distancia lateral no pueda caber entre las dos piernas del instrumento abiertas quanto quepa entre las divisiones que expresan el primer término, se tomará $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ú otra parte alicota del segundo término, que quepa entre las dos piernas abiertas, y tómese esta parte por distancia transversal del primer término; el producto de esta distancia transversal del segundo término, multiplicada por el denominador de la parte alicota que se tomó del segundo termino, será el tercer término.

819 Cuestion 2. *Dadas tres lineas* AB=3, BC =7, CD=10, *hallar una quarta proporcional.* 199.

Abrase la pantómetra hasta que la distancia transversal del primer término 3 sea igual á la distancia lateral del segundo término 7, ó á alguna parte suya; estando así el instrumento, la distancia transversal del tercer término 10, dará el quarto término $23\frac{1}{3}$, ó un submultiplo de aquel que se tomó por segundo término; porque 3 : 7 :: 10 : $23\frac{1}{3}$.

Ó hágase la distancia lateral 7 distancia transversal de 10 á 10; la distancia transversal entre 3 y 3, tomada lateralmente será el quarto término $2\frac{1}{10}$, porque 10 : 7 :: 3 : $2\frac{1}{10}$.

820 De otro modo, *quando la proporcion es creciente.* Abrase la pantómetra hasta que el largo del segundo término llevado con el compas sea la distancia transversal entre 10 y 10 en la escala de las lineas; estando en esta posicion la pantómetra, señálense en la escala de las lineas los puntos donde el largo del primer término, llevado con el compas, cae transversalmente. Hecho esto, ábrase la pantómetra hasta que el largo del tercer término caiga transversalmente sobre los puntos señalados; la distancia transversal entre 10 y 10 será entónces el quarto término.

Si la proporcion fuese decreciente. Abrase la pantómetra hasta que el primero ó mayor de los términos dados coja la distancia transversal entre 10 y 10 en la escala de las lineas; señalense los puntos cuyo intérvalo coja el tercecero ó menor de los términos dados. Hecho esto, abrase la pantómetra hasta que el *segundo término* coja la distancia transversal entre 10 y 10; la distancia entre los puntos señalados será entónces el valor del quarto término.

Así, en el primer caso. Tómese el segundo término 7 en la escala de partes iguales, y aplíquese atravesada entre 10 y 10; tómese despues en la misma escala el primer término 3, y llévese atravesado cerca de 4, 3. Abrase entónces la pantómetra hasta que el tercer término 10, tomándole en la misma escala, aplicado transversalmente cerca de 4, 3 y 4, 3, el quarto término será la distancia transversal entre 10 y 10, la qual llevada á la misma escala dará $23\frac{1}{3}$.

En el segundo caso. Tómese en la escala el primer término 10, y hágasele distancia transversal entre 10 y 10 sobre la escala de las lineas; tómese en la misma el menor término 3, que será la distancia transversal entre 3 y 3. Tómese despues en la misma escala el segundo término 7, y hágasele en ella distancia transversal entre 10 y 10; la distancia transversal entre 3 y 3 en la misma escala tomada lateralmente en ella cogerá $2\frac{1}{10}$ partes, valor del quarto término.

De la última operacion se infiere el modo de practicar la siguiente.

821 Cuestion 3. *Disminuir una linea de 4 pulg. v. g. en la razon de 8 á 7.*

Abrase la pantómetra hasta que la distancia transversal entre 8 y 8 sea igual á la distancia lateral de 7; 2° tómense con un compas las 4 pulg. y haciéndolas distancia lateral, señálese el punto hasta donde lleguen desde el centro; 3° la distancia transversal entre dicho punto y su correspondiente, será la linea que se busca.

Si

Si la linea dada fuese v. g. de 12 pulg. largas, seria demasiado larga para la Pantómetra; entónces se hará distancia lateral su mitad, su tercio, su quarta parte, &c.; y el duplo, el triplo &c. de la distancia transversal correspondiente será la quarta proporcional que se pide.

822 Cuestion 4. *Abrir la Pantómetra de modo que las dos escalas de las lineas formen un ángulo recto.*

Tómese con un compas la distancia lateral desde el centro á la division 5; plántese la una de sus puntas en la division 4 de la una de las escalas de lineas, y ábrase el compas hasta que su otra punta caiga sobre la division 3 de la otra escala de lineas; formarán entónces las dos escalas un ángulo recto.

Porque un triángulo cuyos tres lados son lineas que se han unas con otras como 3, 4, 5, no puede menos de ser rectángulo. Voy á probarlo. Una vez que en un triángulo rectángulo el ángulo recto es el mayor de los tres ángulos (446), la hypotenusa será tambien el mayor de los tres lados (444); luego en nuestro triángulo, 5 será la hypotenusa, y por consiguiente $(5)^2=(4)^2+(3)^2$, esto es $25=16+9$, propiedad del triángulo rectángulo.

823 Cuestion. *Dadas dos lineas de 40 y 90 v. g. hallar otra media proporcional.*

Abranse las dos escalas de lineas de modo que formen un ángulo recto; 2.° tómese 65 mitad de la suma 130 de las dos lineas; tómese tambien 25, mitad de 50 que es su diferencia; 3.° tómese con el compas la distancia lateral 65, mitad de la suma, y aplíquese la una de sus puntas sobre 25 mitad de la diferencia, la otra punta puesta transversalmente llegará á 60; este será el valor de la linea que se busca pues 40 : 60 :: 60 : 90.

 Cues-

824 Cuestion. *Partir una linea dada en un número determinado de partes iguales, en 9 v. gr.*

Hágase distancia transversal de 9 á 9 la linea dada ó alguna de sus partes conocida; la distancia transversal entre 1 y 1, será $\frac{1}{9}$ suyo, ó el mismo submultiplo de su $\frac{1}{9}$ que lo fuere de toda la linea la parte tomada.

825 A esta cuestion se refiere *el método de hacer una escala larga lo que se quiera, la qual tenga, ó exprese un número determinado de partes iguales*, cuya operacion ocurre con frecuencia á los que copian planos de terrenos, dibujos de edificios civiles ó militares, los quales han de tener una proporcion señalada con la cosa que representan.

I. Supongamos, v. g. que cogiendo 6 pulgadas de largo la escala de un plan que contiene 140 varas, se quiera que sirva de tal escala la linea de las partes iguales ¿cómo se ha de abrir la Pantómetra para este fin?

Hágase de 3 pulgadas, mitad de 6, la distancia transversal entre 7 y 7 ó 70 y 70, mitad de 140; estando así abierta la pantómetra, la linea de las lineas servirá de escala para el fin propuesto.

826 II. Para hacer una escala que teniendo dos pulgadas no mas de largo represente 140 varas, se hará de una pulgada la distancia transversal entre 7 y 7, y estará abierta como corresponde la pantómetra.

827 Por el mismo método se podrá hacer una escala larga un número señalado de pulgadas, que coja un número determinado de veces otra medida conocida mayor.

828 *Dividir una linea dada, de 5 pulgadas v. gr. en una proporcion determinada como de 4 á 5.*

Tómese con un compas el largo de la linea, esto es 5 pulgadas, y hágasela distancia transversal entre 9 y 9, suma de las dos partes en que se la ha de dividir; la distancia transversal entre los números 4 y 5 expresará las partes propuestas.

Fig.

Algunos usos de la escala de los Polígonos.

829 Cuestion. *Inscribir un octógono regular en un círculo dado cuyo diámetro es* AB. 200.

Abrase la Pantómetra hasta que la distancia transversal entre 6 y 6 sea igual á *AB*; la distancia transversal entre 8 y 8 será entónces el lado del pentágono propuesto.

Del mismo modo se inscribirá otro polígono qualquiera, como no pase de 12 lados.

830 Cuestion. *Sobre una linea* AB *trazar un pentágono regular.*

Hágase *AB* distancia transversal entre 5 y 5, 2.° 201.
ábrase la Pantómetra y tómese la distancia transversal entre 6 y 6; con este radio y desde los centros *A* y *B* trácense arcos que se cortarán en *C*; 3.° desde el centro *C*, y con el mismo radio trácese una circunferencia que pasará por los puntos *A* y *B*; en este círculo se podrá trazar el pentágono cuyo lado es *AB*.

Del mismo modo se trazará sobre una linea dada otro polígono qualquiera, como no pase de 12 lados.

Las dos últimas operaciones, y otras parecidas tambien se pueden hacer con la linea de las cuerdas, conforme vamos á declarar.

831 *Supongamos que en el círculo cuyo diámetro es* AB *se haya de trazar un polígono de 24 lados.*

Hágase el diámetro *AB* distancia transversal en- 202.
tre 60 y 60 en la escala de las cuerdas: 2.° pártase 360 por 24, el cociente será 15; 3.° tómese la distancia transversal entre 15 y 15, y esta será la cuerda de la 24.ma parte de la circunferencia.

 Co-

Fig. Como es muy dificultoso tomar puntuales las divisiones en las escalas, en las operaciones como esta, donde una misma distancia se toma muchas veces, lo mejor será practicar lo siguiente.

Con la cuerda de 60° pártase la circunferencia en seis partes iguales. En cada division de 60° señálese 1.° la cuerda de 15°, 2.° la cuerda de 30°, 3.° la cuerda de 45°, empezando siempre desde un mismo punto. Siguiendo este método en todos los casos parecidos á este, el error que puede cometerse al tomar las distancias, no se repetirá en las divisiones que se sigan á la primera.

Algunos usos de la escala de las cuerdas.

832 Esta escala doble de las cuerdas es mucho mas acomodada que no la sencilla de que se habló antes (778); porque en la Pantómetra el radio con el qual se ha de trazar el arco será la distancia transversal entre 60 y 60 quando el instrumento está cerrado, cuya distancia transversal quando el instrumento está abierto, es tan larga como este permite; siendo así que con la escala sencilla de las cuerdas, el arco ha de ser siempre de un mismo radio.

833 Cuestion. *Trazar un ángulo rectilineo de un número determinado de grados.*

I. Quando el ángulo no llega á 60°, y es v. gr. de 46°.

Abrase lo que se quiera la Pantómetra, y tómese en la escala de las cuerdas la distancia transversal de 60 y 60, con cuya distancia como radio
203. se trazará un arco BC; 2.° tómese la distancia transversal de los grados dados 46, y trasládesela al arco desde el punto B al punto C, señalando sus extremos B, C; 3.° desde el centro A del arco tírense dos lineas AC, AB que pasen respectivamente por los extremos B, C; estas dos lineas formarán el ángulo propuesto. Fig.

834 II. *Quando el ángulo pasa de 60° y es v. gr. de 148°.*

1.° Trácese como antes un arco BCD; 2.° Tómese la distancia transversal de la mitad ó del tercio de los grados dados 148, del tercio v. gr. esto es la distancia transversal de $49°\frac{1}{3}$; trasládesela al arco tres veces, esto es desde B á a, desde a á b, y desde b á D; 3.° tírense desde el centro A dos lineas AB, AD, estas formarán el ángulo BAD de 148°. 203.

835 *Si el ángulo propuesto no llegáre á 5°, y fuese v. gr. de $3\frac{1}{2}$ grados, se hará la operacion como sigue.*

Desde un punto D v. gr. se llevará á G la cuerda de 60°, y desde D á E la cuerda de $56\frac{1}{2}$ grados $= 60° - 3°\frac{1}{2}$; 3.° las lineas tiradas desde el centro A por G y E formarán el ángulo AGE de $3\frac{1}{2}$ grados. 203.

Quando el radio del arco ó del círculo ha de ser de largo señalado, se ha de tomar del mismo largo la distancia transversal entre 60 y 60.

Estas escalas de las cuerdas señaladas en la Pantómetra, sirven tambien solas cada una como escala sencilla.

De lo que hemos dicho que se ha de practicar para trazar con esta escala un ángulo de un número determinado de grados, se infiere facilmente como se ha de usar para saber quantos son los grados de un ángulo trazado ya.

Usos de la escala de los logaritmos de los números.

836 Antes de enseñar como se hacen con esta escala las operaciones, es preciso dar á conocer los valores de sus diferentes divisiones.

Abrase toda la Pantómetra de modo que sus dos pier-

g. piernas no formen mas que una regla derecha y continua. Si el 1 que está al principio de la escala, ó al lado izquierdo del primer intervalo, se toma por la unidad, el 1 del medio del instrumento, ó del fin del primer intervalo donde empieza el segundo valdrá 10, y 10 al último del instrumento ó al fin del segundo intervalo, valdrá ó será 100. Por manera que las divisiones del principio, medio y fin de la escala representan los números que están en la razon de 1, 10, 100. Y así,

Si el primero fuese,	el segundo será,	el tercero será
10	100	1000
100	1000	10000
$\frac{1}{10}$	1	10
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1

Las divisiones primarias é intermedias en cada intervalo se han de valuar conforme á los valores puestos en sus extremos, esto es., al principio, en medio y al fin de la escala.

En las operaciones de multiplicar ó partir los números, estos se consideran como términos proporcionales; porque en la multiplicacion, la unidad es al uno de los factores, como el otro factor es al producto. En la division, el divisor es á la unidad, como el dividendo al cociente; ó el divisor es al dividendo como la unidad al cociente.

837 Todo esto supuesto. Ya que los logaritmos expresan la distancia á que los números correspondientes están de la unidad, y el producto de dos números uno por otro es el número que corresponde á la suma de los logg. de ambos factores; tambien el producto de estos será el número que corresponda á la suma de las distancias á que los dos estan de la unidad. De aquí se saca para multiplicar los números por medio de la escala logarítmica la siguiente

Re-

838 Regla. Póngase la una punta del compas en el punto ó division que representa el primer término, y ábrase hasta que la otra punta llegue al punto que representa el segundo término. Manténgase el compas así abierto; póngase la una punta en el punto que expresa el tercer término, y la otra punta señalará el quarto término, ó el número que se busca. Fig.

839 Cuestion I. *Hallar por la escala logarítmica el producto de 3 por 4.*

Tómese con un compas en el primer intervalo la distancia entre 1 y 3; estando así abierto el compas, póngase la una de sus puntas en el 4 del primer intervalo, la otra llegará á 12 en el segundo.

En este exemplo los números 1, 3 y 4 del primer intervalo se toman por unidades, y la unidad del medio es 10; la distancia entre 1 ó 10, y 2 ó 20, en el segundo intervalo está dividida en 10 partes principales, señaladas con rasgos mas largos que los demas; cada una de cuyas partes se toma en este exemplo por unidad. Por consiguiente, ya que la punta del compas cae sobre la segunda de estas segundas divisiones, esto es sobre 2, mas allá de 10, señala 12, producto de 3×4.

Aquí se ve á las claras que este producto 12 corresponde á la suma de las distancias á que los factores 3 y 4 estan de la unidad, pues con llevar desde 4 para adelante la distancia á que 3 está de 1, el punto de la escala donde cae el compas coge la suma de las distancias á que 3 y 4 estan de la unidad.

840 *Hallar por la escala logarítmica el producto de 40 por 3.*

Tómese en el primer intervalo la distancia entre 1 y 3; llévesela desde 4 ó 40 del mismo intervalo, y llegará hasta 12, ó 120 del segundo.

En

Fig. En este exemplo 1 y 3 del primer intervalo representan unidades; pero como á las primeras divisiones de cada intervalo tambien se les puede dar el valor de 10, como el de 1, y el 4 del primer intervalo se toma por 40, el 1 del principio del segundo intervalo será 100, y 2 del segundo intervalo será 200; por consiguiente, cada una de las principales divisiones entre 1 y 2 valdrá 10, y la segunda expresará 20, la qual con 100, valor del 1, valdrá 120.

841 III. *Hallar por la escala el producto de* 35 *multiplicado por* 24.

Tómese con un compas la distancia desde 1 del primer intervalo hasta 24 del segundo; llévesela desde 35 del primero al segundo, donde llegará á 840.

Aquí, en la primer aplicacion del compas, las primarias divisiones del primer intervalo se cuentan por unidades, y las del segundo por decenas. Pero en la segunda aplicacion, las principales divisiones del primer intervalo se cuentan por decenas, y las del segundo por centenares.

842 Como al pasar el compas desde un intervalo á otro podrá á veces traer algun inconveniente, se procurará resolver la cuestion en un mismo intervalo, conforme vamos á enseñar.

Tómese en un intervalo la distancia desde 1 á $2\frac{4}{10}$ ó 24; esta distancia trasladada en el mismo intervalo desde $3\frac{5}{10}$ ó 35, llegará á $8\frac{40}{100}$ ó 840.

Haciendo la operacion conforme acabo de enseñar, el segundo término se toma diez veces mayor que el primero; luego ya que cae en el mismo intervalo, es preciso que el quarto término sea diez veces mayor que el tercero.

843 IV. *Hallar por la escala logarítmica el producto de* 375 *por* 60.

Tómese en el primer intervalo la distancia desde 1 á 6 ó 60; estando así abierto el compas, plántese la una de sus puntas en $30\frac{7\frac{1}{2}}{10}$ ó $3\frac{75}{100}$ ó 375 en el mismo intervalo, la otra punta llegará á $2\frac{25}{100}$ del segundo, cuya division se ha de contar por 22500. Porque si la division que señala el producto cayera en el primer intervalo, cada una de sus unidades valdria diez veces mas que las unidades de 375, pues cada una de las unidades del 6 (al qual se da el valor de 60) vale diez veces mas que 1 del principio, y por lo mismo valdrian millares. Pero como la division que señala el producto cae en el segundo intervalo, cuyas divisiones señalan unidades diez veces mayores que las del primero, las unidades de la division que señala el producto han de ser diez veces mayores que no en el primer caso, y por lo mismo han de ser decenas de millares; luego el producto $2\frac{25}{100}$ será 22500.

El que considere con cuidado el camino por donde hemos hallado los productos que nos hemos propuesto hallar, hallará facilmente por la misma escala quantos tenga que buscar.

844 Cuestion. *Hallar por la escala logarítmica el cociente de* 36 *partido por* 4.

Tómese con el compas en el primer intervalo la distancia de 4 á 1; plántese la una punta del compas así abierto en la division 36 del segundo intervalo, la otra punta caerá sobre 9 del primero, y este será el cociente.

Prevenimos que quando el segundo término es mayor que el primero, las distancias se toman de la izquierda á la derecha, y al reves, quando el segundo término es menor que el primero; quiero decir que las distancias siempre se toman ácia el lado que los términos van creciendo.

845 II. *Hallar el cociente de* 144 *partido por* 9.

La

Fig. La distancia desde 9 á 1, trasladada desde 144 llegará á 16, este será el cociente.

846 III. *Hallar el cociente de 1728 partido por 12.* La distancia de 12 á 1 se llevará desde 1728, y llegará á 144; este será el cociente.

847 Cuestion. *Hallar un quarto proporcional á los tres números* 3, 8, 15.

Tómese la distancia de 3 á 8, plántese la una punta del compas en 15, la otra llegará á 40, y este será el quarto proporcional.

848 II. *Hallar un quarto proporcional á los tres números* 5, 12, 38.

Tómese la distancia de 5 á 12, llévese desde 38, y llegará á $91\frac{1}{5}$.

849 III. *Hallar un quarto proporcional á los tres números* 18, 4, 364.

Tómese la distancia entre 18 y 4, y llévese desde 364, llegará á $80\frac{8}{9}$.

850 Cuestion. *Hallar entre 1 y 2 una serie de medios continuo proporcionales.*

Llévese la distancia entre 1 y 2, desde 2 á 4, y desde 4 á 8 en el primer intervalo; desde 8 á 16 en el segundo, desde 16 á 32, desde 32 á 64 &c. La misma distancia llegará tambien desde $1\frac{1}{2}$ á 3, desde 3 á 6, desde 6 á 12, desde 12 á 24 &c. Tambien llegará desde $2\frac{1}{2}$ á 5 desde 5 á 10, desde 10 á 20, desde 20 á 40 &c. La operacion se hará del mismo modo, aunque la razon entre los términos sea otra que la de 1 á 2.

Este exemplo sirve para hallar las divisiones de la escala de los números con la puntualidad que conviene señalarlas.

851 La escala logarítmica sirve para otras muchas operaciones, sobre cuyas aplicaciones se han escrito varios tratados en ingles. Como nuestro ánimo no es declarar aquí todas las operaciones que con

cada escala de la Pantómetra se pueden practicar, bastará lo dicho acerca de la escala logarítmica. Lo declarado está manifestando que en los casos donde la respuesta á alguna pregunta ha de constar de mas de tres guarismos, lo mejor es buscarla por cálculo; porque con los instrumentos, por extensos que sean, los últimos guarismos mas se adivinan que se hallan. Fig.

Algunos usos de las escalas de los logaritmos, de los senos, y de las tangentes.

852 Estas escalas sirven principalmente para resolver las cuestiones de Trigonometría. Por ahora enseñarémos como los términos proporcionales se aplican á las escalas.

En las proporciones de la Trigonometría plana siempre se busca un quarto proporcional á tres términos dados; de quatro cosas dos ángulos, y dos lados v. gr. se busca una, siendo dadas las otras tres. Los lados en esta Trigonometría siempre se aplican á la escala de los logaritmos de los números, y los ángulos á los logaritmos de los senos ó tangentes, conforme se consideran en la cuestion senos ó tangentes. Por consiguiente si de las tres cosas dadas dos son lados, la otra será un ángulo; y si fueren conocidos dos ángulos, tambien lo será el un lado.

853 Regla. Tómese en la escala de los logaritmos de los números el intervalo entre las divisiones que expresan los lados; llevado este intervalo desde la division que expresa el ángulo dado, llegará á la division que señalará el ángulo que se pide.

Ó, tómese en la linea de los senos, ó tangentes la distancia entre los ángulos; llévese á la escala de los números desde el lado dado, y llegará al ángulo que se busca.

Al-

Fig.

Algunos usos de las escalas dobles de los senos, tangentes y secantes.

854 Cuestion I. *Dado el radio de un círculo, que supondremos de 2 pulgadas, hallar para el mismo radio el seno y la tangente de 28° 30′.*

Abrase la Pantómetra de modo que la distancia transversal entre 90 y 90 en los senos, ó la de 45 y 45 en las tangentes sea igual al radio dado, quiero decir de 2 pulgadas; entónces la distancia transversal entre 28° 30′ en los senos, será el valor del seno pedido para el radio dado; y si la misma distancia transversal se tomare en las tangentes, expresará la tangente del mismo ángulo para el mismo radio.

855 *Si se pidiese la secante de* 28° 30′; hágase el radio dado de 2 pulgadas distancia transversal entre o y o, principio de la linea de las secantes; y la distancia trasversal entre 28° 30′ expresará la secante.

Quando se busquen tangentes de arcos que pasan de 45° grados, como si se pidiese la del arco de 60° la operacion se hará como sigue.

Hágase el radio dado supuesto de 2 pulgadas, distancia transversal entre 45 y 45, principio de las tangentes altas; los grados que se piden se tomarán entre 60° o o′ de la misma escala.

856 Las escalas de las tangentes y secantes altas no llegan mas que hasta las de 76 grados; y como en algunos casos hay que buscar tangentes, y secantes de arcos mayores, estas se hallarán luego con auxîlio de la tabla siguiente. Para aplicarla, se medirá en la escala de partes iguales el radio del círculo que rija; se multiplicará el número de la tabla por las partes del tal radio, el producto será el largo de la tangente ó secante pedida, el qual se tomará en la misma escala de partes iguales.

Gra-

En los senos, la distancia transversal entre 90 y 90 será el radio correspondiente. Fig.

En las tangentes bajas, la distancia transversal de 45 y 45, cerca del extremo de la Pantómetra, será el radio.

En las tangentes altas, la distancia transversal de 45 y 45 cerca del centro del instrumento en la linea de las tangentes altas, será el radio.

En las secantes, la distancia transversal entre o y o, principio de las secantes, cerca del centro del instrumento, será el radio.

864 Cuestion. *Dado el radio correspondiente á una linea que exprese un seno, una tangente ó una secante, hallar á que grados corresponde la tal linea.*

Póngase la Pantómetra al radio dado con arreglo al seno, tangente, ó secante.

Tómese la linea dada con un compas, aplíquense sus dos puntos, una en cada pierna de la Pantómetra, sobre la escala correspondiente; háganse correr las dos puntas á lo largo de las dos piernas hasta que aquellas caygan en cada una de estas sobre una misma division; estas divisiones señalarán los grados y partes de grado correspondientes á la linea dada.

865 Cuestion. *Hallar el largo del seno verso de radio y número de grados dado.*

Hágase en la escala de los senos distancia transversal entre 90 y 90 al radio dado; tómese la distancia transversal del seno del complemento de los grados dados. Si el número de los grados dados no llegáre á 90, la diferencia entre el seno del complemento, y el radio será el seno verso. Si los grados pasaren de 90, la suma del seno del complemento y del radio, será el seno verso.

866 Cuestion. *Abrir la Pantómetra de modo que cada una de sus correspondientes escalas dobles de li-*

Fig. *lineas, cuerdas, senos, tangentes, forme un ángulo recto.*

En la escala de las lineas, tómese la distancia lateral 10, llévesela desde 8 de la una pierna á 6 de la otra.

En los senos, tómese la distancia lateral 90, llevada esta como distancia transversal entre 45 y 45, ó entre 40 y 50, ó entre 30 y 60, ó desde el seno de los grados al de su complemento, ó en los senos, llévese la distancia lateral 45 desde 30 á 30 como distancia transversal.

Usos de la Pantómetra para la resolucion de los casos de la Trigonometría rectilinea.

867 Cuestion. *Dadas en un triángulo rectilineo tres de las seis cosas, ángulos y lados, con tal que una de ellas sea un lado, hallar las otras tres.*

Tres casos encierra esta cuestion: 1.° quando una de las tres cosas dadas es un lado, y otra el ángulo opuesto; 2.° quando las cosas dadas son dos lados, y el ángulo que forman; 3.° quando las tres cosas dadas son los lados.

I. caso

La resolucion de todas las preguntas peculiares á este caso van fundadas en la proporcion que tienen los lados de los triángulos planos con los senos de sus ángulos opuestos (731).

Exemplo I. Supongamos que siendo dados en el
204. triángulo ABC el lado AB de 56 partes iguales; AC de 64, y el ángulo B de 46° 30′, queramos hallar los ángulos C, A y el lado BC.

Las proporciones son aquí

El lado AC : lado AB : : sen. B : sen. C.
sen. B : sen. A : : lad. AC : lad. CB

una

una vez hallado por la primera el valor del ángulo C, se sumará con el ángulo B, y restada la suma de 180°, la resta será el valor del ángulo A. Fig.

Por la escala logarítmica.

868 Para hallar el ángulo C. Tómese en la escala de los logaritmos de los números la distancia de 64, valor del lado AC, á 56, valor del lado AB; 204.
plántese la una punta del compas en 46° 30′, valor del ángulo B, en la escala de los logaritmos de los senos, la otra punta llegará á 39° 24′, este será el valor del ángulo C. Si de 180° se restan 85° 54′, suma de los ángulos B y C, quedarán 94° 6′, valor del ángulo A.

Para hallar el lado BC. Tómese en la escala de los logaritmos de los senos la distancia desde 46° 30′ $= B$ á 85° 54′ suplemento de 94° 6′ $= A$; trasládesela á la escala de los logaritmos de los números, empezando desde $64 = AC$, y llegará hasta 88, este será el valor de BC.

Por las Escalas dobles.

869 Para hallar el ángulo C 1.° Tómese en la escala de las lineas la distancia lateral de $64 = AC$; 2.° tómese la distancia transversal de 46° 30′$=B$ en la escala de los senos; 3.° tómese en las lineas la distancia lateral de $56 = AB$; 4.° véase á que grados corresponde esta distancia haciéndola distancia transversal en los senos, se hallará que corresponde á 39° 24′; y este será el valor del ángulo C.

Para hallar el lado BC. Tómese en las lineas la distancia lateral de $64 = AC$; 2.° tómese esta distancia transversal de 46° 30′ $= B$ en los senos; 3.° tómese en los senos la distancia transversal de 85°

Fig. 54′, suplemento de $94^\circ\ 6' = A$; 4.° búsquese en las lineas á que divisiones corresponde esta distancia transversal; cuyas divisiones, que aquí son 88, serán el valor del lado pedido.

870 Exemplo 2. Dados en el triángulo ABC, BC de 74, B de $104^\circ\ 0'$, C de $28^\circ\ 0'$, hallar AB y
205. AC.

Aquí la suma de $104^\circ\ 0'$ y $28^\circ\ 0'$ es $132^\circ\ 0'$, los que restados de 180°, dejan $48^\circ\ 0'$ para el ángulo A. Las analogías son

sen. A : sen. C :: lad. BC : lad. AB

sen. A : sen. B :: lad. BC : lad. AC.

Por las Escalas logaritmicas.

Para hallar AB. Tómese en la escala de los logaritmos de los senos la distancia de $48^\circ\ 0' = A$ hasta $28^\circ\ 0' = C$; llevada esta á la escala de los logaritmos de los números desde $74 = BC$ llegará á 46, 75, y este será el valor de AB.

Para hallar AC. Tómese en la escala de los logaritmos de los senos la distancia desde $48^\circ\ 0'$ hasta $76^\circ\ 0'$, suplemento de 104°; llevada esta á la escala de los logaritmos de los números desde 74 llegará á 96, 6, y será el valor de AC.

Por las escalas dobles.

871 Para hallar AB. 1.° Tómese en las lineas
209. la distancia lateral de $74 = BC$; 2.° hágasela distancia transversal de $48^\circ\ 0' = A$ en los senos; tómese en los senos la distancia transversal de $28^\circ\ 0' = C$; 4.° trasládesela á las lineas como distancia lateral, y cogerá hasta 46, 75; este será el valor de AB.

Para hallr AC. 1.° tómese en las lineas la distan-

Fig.

tancia lateral $74 = BC$; 2.° hágasela distancia transversal de $48^\circ\ 0' = A$ en los senos; 3.° tómese en los senos la distancia transversal de $76^\circ\ 0'$, suplemento de $104 = B$; 4.° hágasela distancia lateral en las lineas, y cogerá hasta 96,6, que será el valor de AC. 205.

Caso II.

872 La resolucion de este caso se funda en la siguiente proporcion demostrada (738); la suma de los lados dados, es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de los ángulos que se buscan á la tangente de la mitad de la diferencia de los mismos ángulos.

Claro está que una vez conocida la semisuma y la semidiferencia de los ángulos, en el instante se conocerán los ángulos mismos.

Exemplo 3. Supongamos que dados en el triángulo ABC el lado BC de 74; BA de 52, B de 68° 206.
$0'$, queramos hallar A, C y AC.

Preparacion. Réstese de $180^\circ\ 0'$ el ángulo dado de $68^\circ\ 0'$, y 56° mitad de la resta será la mitad de la suma de los ángulos A y C, á cuya semisuma llamarémos u, y á la semidiferencia de los mismos ángulos la llamarémos x. La suma de los lados conocidos; esto es, $BC+BA$ es 126, su diferencia, esto es $BC-BA$ es 22; en virtud de esto la proporcion ó analogía recordada (738) dará

$BC+BA : BC-BA$ :: tang. u : tang x.

La suma de u y x será el ángulo A, que será el mayor; y la diferencia de u y x dará el ángulo menor C: y finalmente

sen. ang. C : sen. ang. B :: lad. AB : lad. AC.

Por las escalas logaritmicas.

873 Para hallar tang. x. Tómese en la escala de los logaritmos de los números la distancia des-

Fig. de 126, suma de los lados dados, hasta 22, diferencia de los mismos lados; llévesela á los logaritmos de las tangentes desde 45° ácia la izquierda; manténgase el compas en el punto mas bajo, y llévese á aquel que queda desde 45° hasta 56°; quítese el compas, y llévese esta distancia desde 45° ácia la izquierda, donde señalará 14° 31′, valor de x.

En virtud de esto, la suma de 56° 0′ y 14° 31′, ó 70° 31′ será el valor del ángulo A; y la diferencia de 56° 0′ á 14° 31′ será el valor del ángulo C.

Para hallar AC. Tómese en los logaritmos de
206. los senos la distancia desde 41° 29′, valor de C, á 68° 0′, valor de B; y llevada esta á la escala de los logg. de los números, llegaré desde $52 = BA$, á 72, 75, este será el valor de AC.

Al buscar la tangente de x, esto es de la mitad de la diferencia de los ángulos incógnitos, se aplica dos veces el compas á la escala de las tangentes. Esto sucede porque las tangentes altas que prosiguen mas allá de 45° á mano derecha, están señaladas al reves ó á mano izquierda respecto de las tangentes baxas (los logg. de las tangentes suben y baxan por igual en ambos lados á iguales distancias de 45°), y esta es la razon por que la escala es larga la mitad no mas de lo que debiera para tomar por órden todas las tangentes de la izquierda á la derecha. Pero suponiéndolas así señaladas, el punto de 56° 0′ llegará tan lejos á la derecha de 45°, como llega ahora á la izquierda; y en los números, el intervalo desde 126 á 22 llegará desde el punto 56 que está á la derecha de 45° 31′ en la una aplicacion hasta 14° 31′: y esta distancia llevada desde 45° ácia abajo, llegara mas allá de 14° 31′ como la distancia de 45° á 56°; por lo que, el compas abiertas sus piernas lo que requiere esta distancia, llegará desde 45° á los grados que se buscan.

Con

Con efecto, quando la mitad de la suma no llega á 45°, la distancia de la suma de los lados á su diferencia llegará tambien desde la tangente de la mitad de la suma, ácia abajo, á la tangente de la mitad de la diferencia. Fig.

Y quando así la mitad de la suma, como la mitad de la diferencia de los ángulos incógnitos pasa de 45°, tambien la distancia de la suma de los lados á su diferencia, llegará desde la tangente de la mitad de la suma de los ángulos, ácia arriba ó ácia la derecha, á la tangente de la mitad de la diferencia de los ángulos.

Por las escalas dobles.

874 Porque 126, suma de los lados, pasa la extension de las escalas de las lineas, se tomará su mitad 63, y 11 mitad de 22, diferencia de los lados; pues 63 : 11 :: 126 : 22.

Hecho esto, 1.° Tómese en la escala de las lineas la distancia lateral 63; 2.° hágasela distancia transversal en 56° de las tangentes altas; 3.° tómese en las tangentes altas la distancia transversal de 45°, y hágasela distancia transversal de 45 en las otras tangentes; 4.° tómese en las lineas la distancia lateral 11; 5.° hágasela distancia transversal en las tangentes, será la de 14° 31′ á 14° 31′, y este será tambien el valor de x.

Así se hace la operacion quando u pasa de 45° y x no llega. Pero quando x, u ambas pasan ó no llegan á 45°, se omite el tercer párrafo de la operacion declarada.

Una vez hallados los ángulos A, C, se hallará 206.
el lado AC del mismo modo que antes (870).

Pero entónces se podrá sacar el lado AC sin conocer los ángulos, del modo siguiente.

 Se

Fig. Se tomará en los senos la distancia lateral de 34°, mitad del ángulo dado 68°; 2° se la hará distancia transversal de 30 en los senos; 3.° estando así abierta la pantómetra, se tomará en las lineas la distancia desde 74 en la una pierna hasta 52 de la otra; 4.° se llevará esta distancia á las lineas para que sea distancia lateral, y llegará á 72, 75, este será el valor del lado *AC*.

Los dos primeros puntos de esta operacion enseñan como se ponen las escalas dobles para un ángulo dado.

875 Quando el ángulo *B* formado por los dos
206. lados, es de 90°, los ángulos *A* y *C* se hallan mas pronto, como lo manifestará el exemplo siguiente, cuya resolucion se funda en una proposicion demostrada (725), esto es, que en un triángulo rectilíneo rectángulo, uno de los lados es al radio, como el otro lado es á la tangente del ángulo opuesto.

Exemplo 4. En el triángulo *ABC* es dado el
207. lado *AB* de 45; *BC* de 65; el ángulo *B* de 90°, y querémos hallar los ángulos *A*, *C*, y el lado *AC*.

Para el ángulo *A* la proporcion es *AB* : *BC* :: *R* : tang. *A*; y rebajando el ángulo *A* de 90°, la resta será el ángulo *C*: hecho esto, el lado *AC* se hallará conforme enseñámos en el último exemplo.

Por las escalas logarítmicas.

876 Tómese en los números el intervalo desde 45=*AB* á 65=*BC*; llévesele á las tangentes desde 45 y llegará á 55° 18′, este será el valor del ángulo *A*.

Aquí el ángulo *A* sale de 55° 18′, porque el segundo término *BC* es mayor que el primero *AB*. Pe-

Pero si los trocáramos diciendo *BC* es á *AB* sacaríamos para valor del ángulo *C* 34° 42′. Fig.

Por las Escalas dobles.

877 1.° Tómese en las lineas la distancia lateral del primer término; 2.° hágasela distancia transversal de 45° en las tangentes; 3.° tómese en las lineas la distancia lateral del segundo término; 4.° llevándola como distancia transversal á las tangentes, señalará los grados del ángulo que se busca.

Si el primer término fuese mayor que el segundo, la distancia lateral del primer término se tomará sobre 45 en las tangentes bajas, y la distancia lateral del segundo término deberá contarse en las mismas tangentes.

Pero quando el primer término es menor que el segundo, la distancia lateral del primer término se llevará á 45° en las tangentes altas, y la distancia lateral del segundo término deberá contarse en las mismas tangentes.

878 III. Caso. En el triángulo *ABC* son dados los tres lados *BC* de 926; *BA* de 558; *AC* de 702, 208.
y queremos hallar los tres ángulos *A*, *B*, *C*.

Hay dos métodos para resolver este caso por la escala logarítmica; el uno es mejor que el otro quando hay que buscar todos los ángulos; y lo es el otro quando se busca solo un ángulo. Los darémos ambos.

879 I. Método. Se buscan todos los ángulos. Desde el ángulo *A* tírese al lado mayor *BC* opuesto la perpendicular *AD*, la qual dividirá el triángulo *ABC* en dos triángulos rectángulos *BDA*.*CDA*; en los quales, si se conoce *CD* y *DB*, los ángulos se buscarán como en en el caso I.

Tómese 1260 suma de los lados *AC*, *AB*, y tam-

Fig. tambien su diferencia 144. La distancia desde 926 $=BC$ á 1260 llegará en la escala de los números desde 144 á 196. La mitad de la suma de 926 y 196 es $561=DC$. Y la mitad de la diferencia de 926 y 196 será $561=BD$.

La distancia de $558=BA$ á $365=BD$ tomada
208. en los números llegará en la escala de los logaritmos de los senos desde $90° =$ áng. BDA, hasta $40° 52' =$ áng. BAD. Restando entónces de 90° los 40° 52′ quedarán 49° 8′ para el ángulo B.

Tómese ahora en los números la distancia desde $702 = CA$ hasta $561 = CD$, y llévese desde $90° =$ áng. CDA á la escala de los logg. de los senos, hasta $53° 4' =$ áng. CAD. Y restando entónces de 90° los 53° 4′, la resta 36° 56′ será el ángulo C. Y la suma de 40° 52′ y $53° 4' = 93° 56'$ será el valor del ángulo CAB.

880 2.° Para quando se busca solo un ángulo v. g. B.

Tómese la diferencia de los lados BC, BA que forman el angulo pedido, la llamarémos $D=308$. Búsquese la semisuma de AC y D, y la llamarémos $U=535$. Y la semidiferencia de AC y D, la llamarémos $X=167$. Entónces tendrémos la siguiente proporcion

$$1 : \sqrt{\left(\frac{U\times X}{AB\times BC}\right)} :: R : \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{áng.}\ B.$$

1.° Si tomamos en los logg. de los números la distancia desde 1 á $535 = U$ y la llevamos á la
208. misma escala desde $167 = X$, llegará hasta 89300, que apuntarémos y llamarémos G. 2.° la distancia desde 1 á $558=AB$, llegará desde $926=BC$, hasta 516000, que apuntarémos y llamarémos H. 3.° la distancia desde el punto $H = 516$, al punto $G= 89,3$ llegará desde 1 ácia abajo al quarto punto 0,173, cerca, le apuntarémos y llamarémos K. 4.° si to-

tomamos en los logg. de los números el intervalo Fig.
desde K, al punto medio cerca de 0,415, y le llevamos desde este 1 mas allá de K, en la linea de los senos llegará desde 90° á 24° 34′, cuyo duplo 49° 8′ será el ángulo B.

881 Si la cuestion se resolviere por la escala de los senos versos, se hará en poco tiempo la operacion, del modo siguiente.

1.° Tómese en los logg. de los números la distancia desde $535=U$ á $926=BC$; llévesela desde
$558=BA$, y manténgase la punta del compas en 208.
el quarto punto donde llegare; 2.° llévese la distancia de este quarto punto á $167 =X$, en la escala de los senos versos, desde 0 grados ácia el fin, y llegará á 130° 52′, cuya cantidad restada de 180°, dexará 49° 8′ para el ángulo B.

Por las Escalas dobles.

882 Para hallar el ángulo B. 1.° tómese en las lineas la distancia lateral $702=AC$, lado opuesto al ángulo B; 2.° ábrase la pantómetra hasta que esta distancia llegue desde $926=CB$ en la escala de
las lineas de la una pierna, á $558=AB$, en la es- 208.
cala del mismo nombre de la otra pierna; 3.° estando así abierta la pantómetra, tómese en los senos la distancia transversal de 30° y 30°; medida esta distancia como lateral en los senos, estando la una punta del compas en el centro, llegará á 24° 34′, mitad del ángulo B.

883 La generalidad con que consideramos en estos exemplos los triángulos oblicuángulos, manifiesta que las cuestiones concernientes á los triángulos rectángulos no son mas que casos particulares.

884 Son tantos los usos para que puede servir la Pantómetra, que no es posible señalar en una so-

Fig. sola todas las lineas necesarias; por cuyo motivo se necesitan dos, que la una supla lo que la otra no alcanza. Aquí figuramos otra Pantómetra que lleva algunas de las escalas señaladas en la primera,
209. y sirven para las mismas operaciones; por lo qual solo especificarémos aquí las aplicaciones de las demas.

Estas son 1.° la linea de los planos; 2.° la linea de los sólidos; 3.° la linea de los calibres; 4.° la linea de los metales. De todas darémos la construccion y el modo de aplicarlas.

De las Lineas de los planos.

885 Llamamos *lineas de los planos* las que están señaladas en la Pantómetra de manera que representan los lados homólogos de las figuras planas semejantes. Para enterarse bien del artificio con que estan divididas estas lineas, es del caso saber primero como se reducen dos ó mas figuras semejantes á una sola que valga su suma, y sea semejante á las figuras propuestas.

Para executarlo, se han de determinar los lados homólogos de las figuras semejantes cuya suma se
210. busca. Se disponen dos de dichos lados *AB*, *AC* de modo que causen un ángulo recto *BAC*; la hypotenusa *BC* será el lado homólogo de la figura semejante, igual (581) á la suma de las dos propuestas.

Si se buscase la suma de tres figuras semejantes, despues de hallado el lado *BC*, se levantará la perpendicular *CD* igual al lado hómologo de la tercer figura, y se tirará la hypotenusa *BD*, la qual será el lado homólogo de la figura semejante igual á la suma de las tres propuestas.

886 Sentado esto, es muy facil de entender como se trazan y dividen en la Pantómetra las lineas de los planos. Se trazan dos lineas que concurren en el centro del instrumento; y empezando desde allí, se dividen señalando con la unidad la primer division que representa el lado del primer quadrado y el menor de todos: la segunda division se señala 2, y representa el lado de un quadrado duplo; y prosiguiendo á este tenor la serie de los números naturales, se van señalando los lados de los quadrados en que cabe el primero ó menor, dos, tres, quatro &c. veces. La linea de los planos sirve para lo que vamos á manifestar.

887 Cuestion. *Para hacer una figura plana mayor ó menor de lo que es en una razon dada.* Fig.

Quando la figura propuesta es regular, como un quadrado, un pentágono, un círculo, un triángulo equilátero, basta hallar el lado de la figura que se busca. Supongamos que me ocurre aumentar un quadrado en la razon de 4 á 9: llevo el lado del quadrado propuesto desde 4 á 4 en la linea de los planos; el intervalo entre 9 y 9 señalará el lado del quadrado, con el qual el propuesto tendrá la razon de 4 á 9.

Porque las lineas transversales tienen unas con otras la misma razon que las laterales (814); pero las lineas 4 y 9 son los lados de los quadrados entre los quales hay la razon de 4 y 9; luego las lineas transversales tambien serán lados de los quadrados entre los quales habrá la misma razon.

Quando la figura propuesta es irregular; entónces es preciso buscar muchos lados para trazar la figura semejante que se busca, y por lo mismo se ha de repetir la operacion tantas veces quantos lados tiene.

888 Cuestion. *Hallar la razon que hay entre dos figuras semejantes dadas.*

Sean

Fig. Sean las figuras propuestas dos pentágonos regulares, cuyos lados son *AB*, *CD*. Tómese el lado *AB* del pentágono mayor, y llévese á uno de los números mayores de la linea de los planos, v. g. á 60 y 60; tómese despues el lado *CD* del segundo, y póngase al traves sobre la misma linea, de suerte que sus extremos caygan sobre una mis-
211. ma division, v. g. sobre 40 y 40; la superficie *F* del segundo pentágono será á la superficie *E* del primero, como 40 es á 60, ó como 2 á 3: quiero decir que será sus dos tercios.

De la Linea de los Sólidos.

889 Despues de lo dicho acerca de la linea de los planos, es fácil adivinar para que usos sirve la linea de los sólidos, y las que en ella van señaladas. Se señalan en esta linea los lados homólogos de los sólidos semejantes, que todos son multiplos del primero ó menor, el qual se toma por unidad, segun la serie de los números 2, 3, 4 &c. hasta el número 64, el último por lo comun que se señala en la linea de los sólidos.

Para señalar las divisiones de esta linea, se toman en una escala 1000 partes para lado del sólido 64, el mayor que cabe en la pantómetra. Se toma el número de 1000 partes iguales con el fin de que salgan mas fáciles y cabales las divisiones indispensables para señalar los lados de los demas sólidos.

Por ser 4 la raiz cúbica de 64, y 1 la raiz cúbica de 1, en el lado que se toma para el sólido 64, ha de caber 4 veces el lado del primer sólido, el menor de todos, cuyo lado será por consiguiente de 250 de las 1000 partes iguales. Porque como entre los sólidos semejantes hay la razon de los cu-

bos

bos de sus lados homólogos (679), serán sus lados homólogos unos con otros como las raices cúbicas de los números que expresan dichos sólidos; luego el lado del sólido 64 será al lado homólogo del sólido 1, como la raiz cúbica de 64 á la raiz cúbica de 1; esto es como 4 á 1.

Para hallar el lado del octavo sólido, ó del sólido que vale ocho veces el menor, se tomarán 500 partes de la escala; esto es, dos veces tantas quantas para el lado del sólido menor. Porque el lado del sólido 8 veces tan grande como el primero, ha de tener con el lado de este la misma razon que la raiz cúbica de 8 con la raiz cúbica de 1, esto es la razon de 2 á 1; luego el lado del sólido semejante al primero, y ocho veces tan grande como él, ha de tener 500 partes de la escala.

Por la misma razon 750 de estas partes expresarán el lado del sólido 27 veces tan grande como el primero; pues 750 es triplo de 250, y en el cubo de 3 cabe 27 veces el cubo de 1.

Lo dicho en este asunto manifiesta quan facilmente se señalan todas estas divisiones en la linea de los sólidos; la dificultad está en señalar las divisiones correspondientes á los sólidos duplos, triplos, &c. del primero; porque sus raices son incomensurables, y no se puede sacar cabal su valor. Pero se pueden hallar por aproximacion cabales quanto basta para las urgencias de la práctica.

Propóngamonos hallar el lado del sólido semejante duplo del primero. Formarémos el cubo... 15625000 de 250, lado del primer sólido; del duplo 31250000 del tal cubo sacarémos la raiz cúbica 3515, con corta diferencia; y este número expresará el lado del sólido duplo. Porque, como los sólidos semejantes son unos con otros como los cu-

bos

bos de sus lados homólogos, será duplo de otro sólido semejante aquel cuyo lado cubicado tuviere por expresion un número duplo del número que exprese el cubo del lado del primero.

Todo esto presupuesto, declarémos los usos de la linea de los sólidos.

890 Cuestion. *Hacer un sólido mayor ó menor de lo que es, en una razon dada.*

Propongámonos hallar v. g. un cubo duplo de otro. Llevarémos el lado del cubo propuesto sobre unos números escogidos á arbitrio, v. g. sobre 20 y 20. Estando la pantómetra como para esto es menester, se tomará el intervalo entre 40 y 40, número duplo del primero; este intervalo será el lado del cubo que se busca.

Si hubiésemos de hacer una esfera tripla de otra llevariamos el diámetro de la esfera desde 20 á 20 v. g. el intervalo entre 60 y 60 seria el diámetro de la esfera tripla de la otra.

La operacion se hace al reves quando los sólidos se han de achicar en razon dada. Y si los lados homólogos de los sólidos cogiesen de largo tanto que no cupiesen entre las piernas de la pantómetra, se tomaria su mitad, su tercio &c., y lo que saliere seria la mitad, el tercio &c. de la dimension que se buscare.

891 Cuestion *Averiguar que razon hay entre dos sólidos dados.*

Se llevará á la linea de los sólidos entre dos números los que se quiera ó mas acomoden, el lado de uno de los sólidos; se mirará despues á que intervalo corresponde el lado del otro sólido semejante. Los números á que correspondan dichos lados homólogos expresarán la razon del un sólido con el otro.

892 Cuestion. *Hallar un sólido igual á la suma de otros dos ó muchos sólidos semejantes, y semejante con ellos.*

Tómese entre los sólidos semejantes uno á arbitrio, y con el compas comun uno de sus lados, el qual se llevará á los números que se quiera de la linea de los sólidos, v. g. á 5 y 5. Se mantendrá abierta la pantómetra como para esto es menester; mírese á que números corresponden los intervalos que cojan respectivamente los lados homólogos de los demas sólidos, y supondrémos que correspondan á los números 7 y 8. Súmense los números 7, 8 y 5, que expresan la razon de los sólidos propuestos; el intervalo que habrá entre la suma 20 y 20, será el lado hómologo del sólido, suma de los tres y semejante á los propuestos.

893 Cuestion. *Hallar un sólido semejante á otros dos é igual á la diferencia que vá del uno al otro.*

Llévese un lado de qualquiera de los dos sólidos sobre dos números de la linea de los sólidos v. g. sobre 5 y 5; mírese á que números corresponde el lado homólogo del otro sólido, y supongamos que corresponde á 9 y 9; réstese el número menor del mayor; tómese el intervalo que hubiere entre 4 y 4, cuyo número expresa la diferencia del un sólido al otro; será este intervalo el lado homólogo del sólido semejante á los dos propuestos, é igual á la diferencia que vá del uno al otro.

894 Lleva tambien la pantómetra una linea llamada *linea de los calibres*, la qual sirve para conocer el peso de las diferentes balas de Artillería. Por calibre de los cañones entienden los Artilleros el diámetro de la boca de las piezas, cuyo calibre siempre es algo mayor que el diámetro de la bala, á fin de que salga desahogada de la pieza, y no se lo estorbe el rozamiento.

El

El calibre de un cañon que ha de arrojar balas de 33 libras, cuyo diámetro es de 6 pulg. $\frac{25}{32}$ de linea, ha de ser de 6 pulg. 3 lin. y $\frac{12}{32}$ de linea, y por consiguiente el calibre de un cañon de 33 libras tiene 3 lineas, con corta diferencia, mas que el diámetro de la bala. Las demas piezas tienen tambien sus calibres proporcionados á los diámetros de las balas que han de arrojar.

895 Para señalar las divisiones de la linea de los calibres, es preciso saber quanto pesa una bala de Artillería de diámetro señalado, á fin de que sirva de término de comparacion.

Supongamos que una bala de hierro colado del peso de 4 libras tenga 3 pulg. de diámetro; los diámetros de las balas del mismo metal y de peso distinto se hallarán del modo siguiente. Se abrirá la pantómetra hasta que de pierna á pierna haya un intervalo de 3 pulgadas entre los números 4 y 4 de la linea de los sólidos. Se mantendrá el instrumento en esta situacion: con el compas comun se tomarán los intervalos de entre todos los números de las lineas de los sólidos, como entre 1 y 1, entre 2 y 2, &c.; se llevarán todos sobre una misma linea trazada en la pantómetra, señalando allí donde rematare cada uno de ellos el número de la linea de los sólidos al qual correspondiere.

Para señalar en la misma linea los quebrados $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ de libra, se practica lo siguiente. Se toma una bala de hierro de una libra, se lleva su diámetro á la linea de los sólidos desde 4 á 4; el diámetro desde 1 á 1 será el diámetro de una bala de $\frac{1}{4}$ de libra; el intervalo desde 2 á 2 será el diámetro de una bala del peso de $\frac{2}{4}$ ó $\frac{1}{2}$ de libra &c.

De

De la linea de los metales.

896 Los metales que conocemos no todos son de peso igual; en un volumen determinado de un metal, v. gr. en un pie cúbico de oro hay mas peso que en un pie cúbico de plata; infiriéndose de aquí que los metales expresados no son ambos de una misma gravedad específica. Los Matemáticos se han convenido en llamar cuerpos de distinta gravedad específica aquellos que teniendo un mismo volumen son de peso diferente. La causa de pesar uno mas que otro dos cuerpos de un mismo volumen consiste en que el que mas pesa tiene mas materia propia ó mas partes que el otro; porque lo que pesa en los cuerpos son las partes materiales de que se componen, y no los intersticios ó poros que entre ellas hay; ora esten estos poros llenos de ayre ú otro fluido, ora esten vacíos, punto que á nosotros no nos toca indagar. Consiste, pues, el mayor peso de un cuerpo en que tiene mayor número de partes que no otro de igual volumen, con el qual se le compara: y como esto no puede ser sin que esten mas inmediatas unas á otras, y separadas por menos y menores intersticios, la mayor gravedad específica de un cuerpo consiste en que sea mas compacto ó mas *denso* que los demas con los quales le comparamos; usándose en la Matemática la voz *densidad* para expresar el mayor número de partes respecto de un volumen determinado.

Tienen, pues, los metales mas ligeros que el oro menos densidad, ó sus partes mas separadas unas de otras que no este metal. Por consiguiente un cubo v. gr. de estaño de igual peso que un cubo de oro, cogerá mas espacio, ó será de mayor volumen que un cubo de oro, y de volumen tanto mayor, quanto menor fuese la densidad del estaño respec-

 to

Fig. to de la del oro. Y como, segun llevamos dicho y se probará en la mecánica, la densidad y la gravedad específica son una misma cosa, serán los volúmenes de dos sólidos semejantes de igual peso y de distintos metales en razon inversa de sus densidades ó gravedades específicas, y las gravedades específicas tendrán tambien unas con otras la razon inversa de sus volúmenes. Pero los volúmenes de los cuerpos guardan la razon de los cubos de sus lineas homólogas (679); seguirán, pues, igualmente las gravedades específicas la razon inversa de los cubos de las lineas homólogas de los cubos.

En esto va fundada la division de la linea de los metales señalada en la Pantómetra, cuya linea está dividida en la proporcion de los lados homólogos de los cuerpos semejantes de peso igual y de metales diferentes. Supongamos que se conozcan las gravedades específicas de los metales, quiero decir que sepamos quanto pesa un pie cúbico de cada uno, y que de ellos se hagan sólidos semejantes de igual peso v. gr. esferas; que el diámetro de la bola de estaño, el mas ligero de los metales, esté dividido en 1000 partes iguales, y que se busque quantas de estas partes cabrán en una bola de oro del mismo peso.

897 Ya que las esferas se han unas con otras como los cubos de sus diámetros (680), serán los volúmenes de dichas bolas, ó los cubos de sus diámetros en razon inversa de su gravedad específica; de aquí se saca la siguiente analogía.

Como la gravedad específica del oro
Es á la gravedad específica del estaño,
Así el cubo del diámetro de la bola de estaño
Es al cubo del diámetro de la bola de oro.

De aquí se sigue, que para hallar el diámetro de la bola de oro del mismo peso que la bola de es-

estaño, se ha de multiplicar la gravedad específica del estaño por el cubo del diámetro de la bola del mismo metal, dividir el producto por la gravedad específica del oro, y sacar la raiz cúbica del cociente. Fig.

Por el mismo camino se hallarán los diámetros de las bolas de los demas metales de igual peso que la bola de estaño.

Se tira, pues, una linea recta en la Pantómetra desde su centro hasta el extremo; se la divide en 1000 partes iguales, porque suponemos que tiene otras tantas el diámetro de la bola de estaño; se busca por el método expresado quantas de estas partes corresponden á los diámetros respectivos de las bolas de los demas metales de igual peso que la de estaño; y llevando estas partes á la Pantómetra con el compas comun, poniendo la una punta de este en el centro del instrumento, se hace en el punto donde alcanza la otra punta, la señal característica del metal correspondiente. Por este método se halla que siendo de 1000 partes el diámetro de la bola de estaño, corresponden á los diámetros de las bolas del mismo peso hechas de los demas metales, las partes que expresa la tabla siguiente, donde van figurados los diferentes metales con los caractéres peculiares á cada uno.

Oro	☉	730
Plomo	♄	863
Plata	☾	894
Cobre	♀	937
Hierro	♂	974
Estaño	♃	1000

En cuya tabla es de reparar que estan los metales tanto mas cerca del centro del instrumento,

 quan-

Fig. quanto mayor es su gravedad específica, y se puede inferir de lo dicho antes (896).

Usos de la linea de los metales.

898 Cuestion *Hallar un globo de qualquier metal de peso determinado, en conociendo un globo de otro metal y su diámetro.*

Sea el diámetro de una bala de hierro de una libra de 22 lineas, y busquemos el diámetro de una bala de plomo del mismo peso.

Tomarémos en un pie con el compas comun la distancia de 22 lineas, la llevarémos desde ♂ á ♂; tomarémos despues el intervalo entre ♄ y ♄; le llevarémos finalmente sobre el pie, donde cogerá 18 lineas; estas cogerá el diámetro de una bala de plomo de una libra.

899 Repárese que segun está construida la linea de los metales, las distancias desde el centro de la Pantómetra á las divisiones de dicha linea representan los diámetros de los cuerpos semejantes de igual peso hechos de diferentes metales. Pero las distancias ó intervalos transversales entre las mismas divisiones, estando abierta la Pantómetra, son unas con otras como las distancias (815) desde el centro del instrumento á cada una de las divisiones; luego el intervalo entre ♄ y ♄, ó entre los caracteres que señalan el plomo representa el diámetro de una bala de plomo de igual peso que la bala de hierro, cuyo diámetro es igual á la distancia transversal entre los caractéres del hierro.

900 Cuestion. *Hallar la razon que hay entre el peso de dos cuerpos semejantes hechos de distintos metales, y de diámetros iguales.*

Supongamos que sea de 32 onzas el peso de una bola de plata, y se me pregunte quánto pesará una bola de oro de diámetro igual.

To-

Tomaré en la linea de los sólidos la distancia desde el centro á 32, la llevaré desde ☉ á ☉ en la linea de los metales; tomaré despues la distancia transversal entre ☾ y ☾, y la trasladaré á la linea de los sólidos, plantando en el centro de la Pantómetra la una punta del compas comun; la otra caerá sobre 59, y manifestará que la bola de oro de igual diámetro que la de plata pesa 59 onzas. Fig.

Para percibir el fundamento de esta operacion, conviene considerar que quando los cuerpos son iguales, los pesos son unos con otros como las gravedades específicas de los metales; antes (896) hemos visto que las gravedades específicas son en razon inversa de los volúmenes; y los volúmenes son como los cubos de los diámetros, esto es, en el caso actual, como los cubos de las divisiones de la linea de los metales; luego las gravedades específicas, y por consiguiente los pesos, quando los volúmenes son iguales, siguen la razon inversa de los cubos de las divisiones de las lineas de los metales. Por lo que, el peso de la bola de plata es al peso de la bola de oro de igual diámetro, como el cubo de la distancia que hay en la linea de los metales de la Pantómetra desde el centro del instrumento á la señal del oro, es al cubo de la distancia desde el mismo centro á la señal de la plata; ó, por lo dicho (896), el peso de la bola de plata es al peso de la bola de oro, como el cubo de la distancia transversal entre los caractéres del oro, es á la distancia transversal entre los caractéres de la plata. Como la linea de los sólidos da la razon de los cubos de las divisiones en ella señaladas (889), y como en la distancia entre los dos caractéres del oro caben 32 de estas divisiones, y la distancia entre los caractéres de la plata coge 59, se infiere que el peso de la bola de plata es al peso de la bola de oro de igual

Fig. igual diámetro, como 32 á 59. Luego &c.

901 Cuestion. *Determinar que cantidad se necesita de un metal para hacer un cuerpo semejante é igual á otro hecho de qualquiera de los demas metales.*

Supongamos que un ártifice quiera hacer de plata una estatua semejante é igual á otra hecha de estaño, y quiera averiguar que cantidad de plata necesitará.

1.º Se pesará con cuidado la estatua de estaño, y supondremos que pesa 36 libras.

2.º Se tomará en la linea de los metales la distancia desde el centro de la Pantómetra al caracter de la plata, de cuyo metal se intenta hacer la estatua.

3.º Teniendo abierto el instrumento, se trasladará esta distancia á la linea de los sólidos desde 36 á 36.

4.º Finalmente, se tomará en la misma linea de los metales la distancia desde el centro del instrumento al caracter del estaño: manteniendo la Pantómetra abierta como se requiere para lo dicho, se mirará á que números de la linea de los sólidos corresponde esta distancia; y suponiendo que corresponda á 50 y 50, esto manifestará que se necesitarán 50 libras de plata para hacer una estatua ú otro cuerpo semejante é igual al propuesto.

902 Cuestion. *Hallar que razon tienen unos con otros los pesos de dos cuerpos semejantes y de distintos metales, siendo conocidos sus diámetros ó lados homólogos.*

212. Supongamos que siendo EF el diámetro de una bola de estaño, y GH el diámetro de una bola de plata, queramos saber que razon hay entre los pesos de los dos cuerpos.

Llevarémos el diámetro EF, abriendo la Pantómetra desde ♃ á ♃; estando así apartadas las piernas

nas del instrumento, tomarémos la distancia transversal entre ☾ y ☾; si esta distancia fuese igual al diámetro GH, las dos esferas serán de un mismo peso; si el diámetro de la bola de plata fuese menor que GH, y fuese igual á la linea KL, esto será señal 212. de que la bola de plata pesa menos que la de estaño.

Falta, pues, averiguar quanto menos pesa. Cotejaremos los diámetros GH y KL en la linea de los sólidos, del modo siguiente. La distancia transversal hallada entre los caractéres de la plata, la qual en este caso es GH, la haremos distancia transversal entre los números que queramos de la linea de los sólidos, v. gr. entre 60 y 60: mirarémos despues á que números de la misma linea corresponde, hecho distancia transversal, el diámetro KL de la bola de plata, y si correspondiere á 20 y 20, v. gr. esto será señal de que el peso de la bola de plata, cuyo diámetro es KL, es al peso de la bola de estaño, cuyo diámetro es EF, como 20 á 60.

903 Cuestion. *Hallar el diámetro de una bola de metal determinado, y de peso señalado, en conociendo el peso y el diámetro de otra bola hecha de otro qualquier metal.*

Sea MN el diámetro de una bola de cobre del 213. peso de 10 libras, y busquemos el diámetro de una bola de oro de 15 libras de peso.

1.º Buscarémos el diámetro de una bola de oro del mismo peso que la de cobre, llevando MN desde ♀ á ♀, y tomando entonces la distancia transversal entre los caractéres del oro, esta distancia OP será el diámetro de una bola de oro del peso de 10 libras.

2.º Llevarémos esta distancia OP á la linea de los sólidos desde 10 á 10; la distancia transversal entre 15 y 15 de las lineas de los sólidos será entonces el diámetro QR de una bola de oro del peso de 15 libras.

Fig.

De la Nivelacion.

904 Una de las principales aplicaciones de la Geometría es medir lineas en la superficie de la tierra, ó distancias de unos de sus puntos á otros. Esta medicion tendria poca dificultad si la superficie de la tierra fuese llana ó plana; pero como, ademas de las desigualdades que ofrece, es redonda, padece la medicion de las distancias, particularmente quando son largas, cierta imperfeccion que es forzoso corregir, para distinguir la apariencia de la realidad.

905 Que la tierra sea redonda y no plana se prueba con hechos incontrastables, de los quales pondrémos aquí solo uno. Quando un navío empieza á descubrir una costa, los objetos mas altos son los primeros que divisan los navegantes, y aun de estos divisan primero lo mas alto, como de una torre primero ven la cumbre, de un edificio la cubierta &c. descubriendo poco á poco lo demas hasta que por último ven su pie. Esta es la causa por que en el instante que desde el navío se descubre una torre, v. gr. no se ve el terreno de sus alrededores.

906 Quando dos puntos *a* y *b* v. gr. estan á igual
214. distancia del centro *C* de la tierra, por manera que ambos esten en su circunferencia, se dice que estan *á un nivel*. Por consiguiente si de dos puntos el uno está en tierra llana, y el otro en la cumbre de una montaña, y por lo mismo mas alto que el primero, y mas apartado del centro de la tierra como *a*, *e*, no estarán á un nivel.

907 Sin embargo tambien están á un nivel dos puntos, aunque no esten en la superficie de la tierra, con tal que esten á una misma distancia de su centro, como *d*, *e*; en cuyo caso estan en una linea recta que toca la circunferencia, y á igual distancia

cia del punto de contacto, cuya linea se llama *linea de nivel*. Fig.

908 Dos puntos que estan el uno *f* en el punto de contacto, y el otro en *e* mas allá, ó á diferentes distancias del punto de contacto, como *d*, *g* 214.
no estarán ni á igual distancia del centro de la tierra, ni á un nivel; estando, conforme se ve, el uno *g* mas alto que el otro respecto de la circunferencia.

909 Quando los dos términos ó puntos de la tangente no están á igual distancia del centro de la tierra, se llaman *puntos de nivel aparente*.

910 El objeto de la nivelacion es averiguar quanto uno de los dos puntos es mas alto que el otro respecto de la superficie ó del centro de la tierra, lo que es lo mismo que averiguar quanto el nivel aparente excede al verdadero, ó la diferencia que va de uno á otro: los puntos *f*, *e* v. gr. están á un nivel por estar en la misma tangente, pero este nivel no es mas que aparente; y para saber quanto *e* está mas alto que *f*, es preciso averiguar el valor de *be*, exceso que el nivel aparente lleva al verdadero ó la linea *ce* á la *cf* ó *cb*. Bien se percibe que estas diferencias son tanto mayores, quanto mas distan uno de otro los dos términos, pues la diferencia *hg* del nivel aparente entre los dos términos *f*, *g* es mayor que la *be* diferencia de nivel correspondiente á los dos términos *f*, *e*.

Instrumentos para nivelar.

911 Quando se quiere averiguar si todos los puntos de una linea de corta extension están á un nivel, ó es la linea orizontal, sirve 1.° el *Nivel de ayre*, cuyo instrumento es un tubo lleno de espíritu de vino, en el qual se dexa una ampollita de ayre, la qual ocupa el medio *G* del tubo quan- 215.
do

Fig.do está sobre un plano perfectamente orizontal.

2.° El *Nivel de Albañil.* Este es un triángulo
216. isósceles sin base, cuyos lados abrazan un arco de círculo. Desde el vértice del triángulo cae una linea perpendicular á la base, señalada en el arco; del extremo superior de esta linea cuelga un plomo, cuyo hilo cae puntualmente sobre la linea quando la base del instrumento está en una linea ó plano perfectamente orizontal. Este nivel determina mejor que el de ayre la cantidad de la inclinacion de un plano respecto de la orizontal; porque tiene el arco divisiones por las quales se conoce quanto el hilo del plomo se aparta de la vertical.

Como los cuerpos graves al caer se encaminan ácia el centro de la tierra, la direccion de un plomo que cuelga de un bramante se encamina al mismo punto. Luego esta direccion es perpendicular á la superficie redonda de la tierra, cuya perpendicular se llama *linea vertical.*

3.° El *Nivel de agua* CABD. Este se compone de un tubo de hoja de lata ú otro metal, acodillado en
217. *A* y *B*; en los dos tubos *AC*, *BD* se introducen otros dos de vidrio *I*, *K*, pegados con betun el uno en *AC*, el otro en *BD*. Debajo y en medio del tubo *AB* hay una virola para colocarle en su pie. Se llena de agua el tubo hasta que suba á la altura de 2 ó 3 pulgadas en los dos tubos de vidrio. La linea *CD* que pasa por la superficie del agua en ambos tubos *IA*, *KB*, es una linea orizontal. De donde se sigue que si mirando por dos puntos *A*, *B* de dicha superficie, se señala en la misma linea y á cierta distancia otro punto Flexos del instrumento, este señalará con los dos primeros el nivel aparente, el qual, por razon de coger poco mas de cien varas la distancia á que puede alcanzar la vista sin anteojo, podrá tomarse por el nivel verdadero, porque en tan corto tre-

trecho es despreciable, conforme luego se verá, la diferencia de uno á otro. Fig.

912 Esto presupuesto, la nivelacion puede practicarse de dos modos, porque puede el práctico plantar su instrumento, quanto cabe, á igual distancia de los dos términos, ó primero en el uno y despues en el otro.

913 1.° No hay duda en que si desde una misma estacion, con un instrumento de altura invariable, el qual siempre sirve de un mismo modo, se determinan dos ó mas puntos de mira, ó se dirige la puntería á dos ó mas puntos que esten á igual distancia del ojo del práctico, todos ellos estarán á igual distancia del centro de la tierra, estando igualmente altos ó baxos, respecto del nivel verdadero, y estarán por lo mismo todos á un nivel, bien que no lo esten respecto del ojo del observador.

Supongamos v. gr. colocado el instrumento en *B* á igual distancia de los dos términos *C*, *D*; los dos 218.
puntos de mira señalados, en las perpendiculares *CG*, *DH* estan á un nivel, bien que no lo esten con el punto *B*.

914 Propongámonos señalar en las dos perpendiculares, ó los dos estadales *BC*, *ED* dos puntos 219.
de nivel. Plantarémos el instrumento en *B*, suponiendo el ojo en *F*, y la puntería en *G*; trasladarémos despues el instrumento á *E*, colocándole, quanto cabe, de modo que el ojo esté á la altura *G*. Si el segundo punto de mira cae en *F*, donde estuvo el ojo, los dos términos estarán á un nivel, con tal que haya entera seguridad de no haber padecido alteracion alguna el instrumento entre una operacion y otra.

Si en la segunda estacion no cayera el ojo en *G*, 220.
pero sí en otro punto *H*; si el segundo punto de mira *I* distase tanto de *F* como *H*, de *G*, todos los puntos estarán tambien á un nivel.

Si

Fig. 915 Si el instrumento levantára ó bajára la puntería, de modo que las dos lineas de ambas operaciones ya no coincidieran en una sola, no señalarian el nivel verdadero, pero no por eso dexarian de servir para determinarle, conforme se va á manifestar.

Supongamos primero que á la distancia BE el instrumento levante la puntería 6 pulgadas; le plantarémos primero en B, estando el ojo en F y la puntería en G; para la segunda estacion se trasladará el instrumento al término E, y refiriendo la altura
221. del ojo al punto G, se señalará la segunda puntería mas arriba de la primera altura del ojo, segun que el instrumento levante la puntería como aquí 12 pulgadas á H, donde estará la segunda puntería. En este caso las dos lineas de puntería forman el ángulo FGH, y partiendo por medio en I la distancia FH, los dos puntos I, G estarán á un nivel.

916 Quando las dos lineas se encuentran dentro del ángulo, v. gr. en K, se partirá por medio cada
222. una de las dos distancias FH, GI, la una en L, la otra en M, cuyos dos puntos estarán á nivel, y la LKM será la linea de nivel.

917 Finalmente, si las dos lineas no se encontraren dentro, sí fuera del ángulo, como aquí en K,
223. se dividirán por medio las dos distancias FH, CO, la una en L, la otra en I, y los dos puntos I, L estarán á nivel.

918 Un instrumento puede levantar ó bajar la puntería respecto del nivel aparente, cuya variedad es proporcional á las distancias; quiero decir que quando el instrumento levanta ó baja la puntería 3 pulgadas, v. gr. á una distancia determinada, la levantará 6, 9, 12 pulgadas á una distancia dupla, tripla, quadrupla, &c. Si un nivel puesto en B, seña-
224. la á la distancia BD de 200 varas la linea de puntería CE que remata en E, 3 pulgadas mas arriba que

que la linea del nivel aparente CDF; á la distancia BF de 400 varas, el intervalo FG, que es lo que el instrumento levanta la puntería será de 6 pulgadas. Fig.

Porque como las dos lineas ED, GF son paralelas, los triángulos CDE, CFG son semejantes; luego (502) $CD : DE :: CF : FG$; pero CD es mitad de CF, por consiguiente DE será mitad de FG.

919 Por lo que mira á la distancia entre el nivel verdadero y el aparente, sigue la proporcion del quadrado de las distancias; quiero decir, que si se sabe qual es la diferencia entre el nivel aparente y el verdadero á una distancia determinada, á una distancia dupla, dicha diferencia será quadrupla, nueve veces mayor á una distancia tripla, &c.

Para entenderlo, conviene considerar que la distancia á que suelen estar uno de otro los dos términos que observamos quando nivelamos, es tan corta, que medida esta distancia fb en la superficie de 214.
la tierra, se puede considerar como igual con la tangente fe. Pero hemos probado (539) que la tangente fe es media proporcional entre qualquiera secante tirada desde el punto e y su parte exterior be: por ser muy corto el arco fb, podemos mirar la secante que pasa por el punto e y el centro C de la linea como igual al diámetro, esto es, como dupla de bC ó dupla de fC; será pues be el quarto término de esta proporcion $2fC : fb :: fb : be$.

920 Por esta proposicion será facil saber qual es la diferencia entre el nivel aparente y el verdadero á la distancia de 300 varas, v. gr. Porque se sabe, y á su tiempo se declarará, que á la latitud de 43° un grado de círculo máximo de la tierra tiene 132951 varas, cuya cantidad multiplicada por 360 dará 47862360 varas para toda la circunferencia; y teniendo presente lo demostrado (531) se sacará de aquí que el diámetro tiene 15235061 varas ó 45705183 pies:

pies: ya se sabe que en 300 varas hay 900 pies, será pues la cantidad que buscamos el quarto término de la siguiente proporcion.

$4570518O2^{p} : 900^{p} :: 900 : 0,00177^{pie}$, cuya cantidad multiplicada por 12 dará 0,02124 pulgadas, y multiplicada esta última por 12, dará 0,25488 lineas ó $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ de linea.

Sobre estos principios se ha formado la siguiente

TABLA

De las diferencias del nivel aparente al verdadero.

Distancias.	Diferencias.			Distancias.	Diferencias.		
Varas.	*Pies.*	*Pulg.*	*Lin.*	*Varas.*	*Pies.*	*Pulg.*	*Lin.*
300	0	0	$\frac{1}{5}$	2600	0	1	3
400	0	0	$\frac{1}{3}$	2700	0	1	$4\frac{1}{5}$
500	0	0	$\frac{1}{2}$	2800	0	1	$5\frac{5}{11}$
600	0	0	$\frac{4}{5}$	2900	0	1	$6\frac{1}{5}$
700	0	0	$1\frac{1}{11}$	3000	0	1	8
800	0	0	$1\frac{1}{3}$	3100	0	1	$9\frac{3}{10}$
900	0	0	$1\frac{4}{5}$	3200	0	1	$9\frac{1}{5}$
1000	0	0	2	3300	0	2	$0\frac{1}{5}$
1200	0	0	$3\frac{1}{5}$	3400	0	2	$1\frac{3}{4}$
1300	0	0	$3\frac{3}{4}$	3500	0	2	$3\frac{1}{5}$
1400	0	0	$4\frac{4}{11}$	3600	0	2	$4\frac{4}{5}$
1500	0	0	5	3700	0	2	$6\frac{1}{5}$
1600	0	0	$5\frac{1}{3}$	3800	0	2	8
1700	0	0	$6\frac{2}{5}$	3900	0	2	$9\frac{4}{5}$
1800	0	0	$7\frac{1}{5}$	4000	0	2	$11\frac{1}{5}$
1900	0	0	8	6000	0	6	8
2000	0	0	$8\frac{4}{5}$	8000	0	11	$8\frac{4}{5}$
2100	0	0	$9\frac{4}{5}$	10000	1	6	5
2200	0	0	$10\frac{1}{5}$	12000	2	2	8
2300	0	0	$11\frac{7}{10}$	16000	1^{v}.0	10	$11\frac{1}{5}$
2400	0	1	$0\frac{4}{5}$	20000	2.0	1	8
2500	0	1	$1\frac{9}{10}$	24000	2.2	10	8

En

921 En lo dicho se funda la estimacion de lo que Fig.
el nivel aparente es mas alto que el verdadero, echándose de ver que si á cierta distancia la diferencia del nivel aparente al verdadero es una pulgada, á una distancia dupla será 4 pulgadas. Supongamos ahora que la linea de nivel *BC* levante la visual 225.
3 pulgadas á la primer distancia, será preciso bajar la mira de *C* á *D* 3 pulgadas para señalar el nivel aparente de *B* á *D*; y para señalar el nivel verdadero, será menester una pulgada mas, por haber á dicha distancia una pulgada de diferencia entre el nivel verdadero y el aparente.

Pero si el instrumento en vez de subir la visual la baxára 3 pulgadas de *D* á *F*, entónces para señalar el nivel aparente, será preciso levantar la puntería 3 pulgadas, y 2 pulgadas no mas para señalar el verdadero; porque aquí se ha de rebajar la pulgada que el nivel aparente tiene de mas que el verdadero.

922 Síguese de aquí que quando un instrumento levanta la puntería, puede dar á cierta distancia el nivel verdadero; un instrumento que bajase la puntería $\frac{4}{5}$ de linea v. gr. daria el nivel verdadero á la distancia de 600 varas. Por consiguiente el que sepa quanto el instrumento baja la puntería á una distancia determinada, sabrá facilmente á que distancia señalará el nivel verdadero.

Supongamos que á la distancia de 2600 varas un instrumento baje la puntería 8 lineas, y queramos saber á que distancia señalará el nivel verdadero. Buscarémos en la tabla que diferencia va del nivel aparente al verdadero á la distancia de 2600 varas, y es de 15 lineas. Dirémos, pues, 15 diferencia del nivel aparente al verdadero son á 2600^{v} como 8 lineas que baja la puntería son á un quarto término

$$15 : 2600 :: 8 : 1366,666^{v}.$$

Si la diferencia del nivel aparente al verdadero fue-

Fig. fuese menor que lo que el instrumento baxa la puntería, este señalaría el nivel verdadero á mayor distancia. Si el instrumento baxase v. gr. la puntería 18 lineas á la distancia de 2600^v, la proporcion seria

$$15 : 18 :: 2600^v : 3120^v$$

cuyo quarto término está diciendo que el instrumento señalará el nivel verdadero á la distancia de 3120 varas.

923 En la práctica de la Geometría ocurre nivelar trechos muy grandes, para cuyos casos seria muy molesto valerse del nivel de agua; porque alcanzando poco la vista sola, seria forzoso multiplicar muchísimo las estaciones. Si saliesen erradas ó faltas de la escrupulosa puntualidad las operaciones hechas en cada una, se erraría mucho la nivelacion, á no ser que por rarísima casualidad los errores de unas estaciones enmendarán los de las otras. Esta ha sido la causa por que hombres de mucho conocimiento en la Matemática, y muy prácticos han discurrido niveles con anteojos de larga vista, los quales con la circunstancia de ser de mucho alcance juntan otras dos; á saber, la de ser de facil construccion, y de uso acomodado y seguro. La construccion de todos ellos se funda en la propiedad que goza el agua, como todos los demas fluidos, de poner orizontal su superficie, esto es, de ponerse y estar todos los puntos de su superficie á igual distancia del centro de la tierra, y por consiguiente á un nivel. El nivel que entre todos los que conozco merece la preferencia es el de la Hire, individuo de la Real Academia de las Ciencias de Paris; pero perficionado primero por Couplet, y últimamente por Deparcieux, ambos individuos del mismo cuerpo.

Construccion del nivel.

924 Compónese este nivel de dos partes, de las qua-

quales la primera es un caxon *ABCD* de madera Fig.
ligera, en el qual hay dos vasijas de hoja de lata *EFG*, *EFG*, donde se echa agua, cada una de 11 pulgadas, 8 lineas de largo, por 8 pulgadas 2 lineas, 226.
de ancho desde *H* á *I*, y 5 pulgadas 3 lineas de fondo, comunicándose una con otra por medio de dos tubos *EG*. La distancia de una vasija á otra pende de lo que cogen de largo los anteojos, y de la que se dexa entre las caxas donde se meten, lo qual compone la segunda parte del instrumento.

Esta segunda parte se compone de tres tubos *M*, *M*, *M* y dos caxas *L*, *L*, cerradas por todos 227.
lados, de 9 pulgadas, 11 lineas de largo cada una, por 7 pulgadas de ancho, y 4 pulgadas 8 lineas de profundidad, sobre las quales estan soldados ó firmemente asegurados por lo menos los tres tubos. 226.
En *LML* se demuestra esta segunda parte vista de 227.
lado, la segunda figura demuestra su cara superior, y la tercera la pinta vista por un extremo. 228.

Los dos tubos *NO*, *NO* de los dos lados son dos anteojos contrapuntados, esto es, que llevan los vidrios que sirven para mirar y estan del lado del 227.
ojo, por cuyo motivo se llaman oculares, en extremos encontrados; mediante lo qual se puede mirar al lado que se quiera sin necesidad de volver el instrumento, cuyos anteojos son necesarios para ajustarle y versificarle.

En el suelo de afuera de cada caxa *L*, *L* hay pegada ó soldada una platina de plomo de unas dos libras de peso; y ademas de este peso hay otro *P* tambien de plomo de una media libra en el tubo del medio, al qual se le empuja del lado que se quiera por medio del tornillo *QR*.

Este tornillo ha de estar sin vaga alguna, y muy ajustado en sus dos extremos, para lo qual se procura esté muy arrimado á las entradas interiores de

Fig. 227. las platinas SS, que en cada extremo sirven de tapa al tubo; cada una de estas platinas está soldada á un cabo de tubo de una pulgada de largo, el qual entra ajustado en el grande, donde se les asegura con dos tornillos ó dos garfios.

Los cuellos del tornillo salen como una pulgada cada uno, de la qual la mitad mas próxima á la punta ó extremo se hace quadrada para agarrar el tornillo con una llave de péndola quando se le quiere dar vueltas; la otra media pulgada que se queda redonda sirve para lo que luego se dirá.

El peso P que el tornillo empuja mediante una tuerca con muelle á la qual está soldado ó afianzado con tornillos, sirve para poner orizontal el nivel, ó inclinarle del lado y la cantidad que se quiera: ha de estar asegurado en un tubo TT de hoja de lata ó cobre muy delgado, que pueda correr desahogado por el grande quando se empuja el peso P dando vueltas al tornillo QR. Este tubo sirve allí para tener tapada una abertura que hay en la parte de arriba del tubo del medio, la qual coge desde el medio de su largo hasta cosa de una pulgada cerca del uno de sus extremos, cuya abertura lleva un índice ó una mano pegada al tubo interior el qual le impide dar vueltas dentro del grande, y señala lo que el peso P anda ácia Q ó ácia R, segun dé el tornillo vuelta á la derecha ó á la izquierda. Conviene, pues, que la tuerca á la qual está pegado el peso P sea de muelle, á fin de que no haya holgura alguna ni tiempo perdido.

Los anteojos han de estar, segun diximos antes, contrapuntados, quiero decir que el ocular del uno ha de estar del lado del objetivo del otro. Se les puede dar de largo lo que se quiera; pero si se les diere de largo mas de tres pies y medio, el nivel será poco manejable, y si se les diere menos

nos de 21 pulgadas no servirán con toda la exâctitud que se desea, y el nivel tardará mas tiempo en fijarse. Fig.

Cada anteojo ha de llevar del lado del ocular un diafragma V, soldado al extremo de un tubo de 227.
unas 4 pulgadas 8 lineas, el qual debe entrar ajustado en el tubo del anteojo. Hay en el diafragma dos quadrados pequeños con su agugero redondo cada uno, algo mayor que el agugero del diafragma, al qual se pegan con cera dos hilos de seda cruda, cuyos quadrados se pegan á las dos caras de la plancha que forma el diafragma, con proporcion para que puedan correr por correderas en direcciones perpendiculares una á otra. Aquí de- 229.
mostramos separadamente el diafragma con su tubo.

Si todo el instrumento se hiciere de hoja de lata, los diafragmas, sus quadrados y correderas se podrán hacer de lo mismo, en cuyo caso se echará á las correderas un poco de cera para que el movimiento de los quadrados sea mas suave, se los pueda empujar tan poco como se quiera, y se mantengan donde se dexen. Pero aunque todo el instrumento sea de hoja de lata, se podrán hacer de 229.
cobre los diafragmas, igualmente que los quadrados y sus correderas, y entonces á cada quadrado le empujará un tornillo Y, y le rempujará un muelle Z, y esto es mucho mas acomodado para arreglar el nivel.

En el extremo del tubo donde está soldado el diafragma, es preciso haya un agugero algo grande cerca de las correderas para que pueda correr el quadrado de la parte interior del diafragma.

La superficie exterior de este tubo se unta con un poco de cera blanda antes de meterle en el tubo del anteojo, á fin de que no se descomponga una vez puesto en su lugar.

Fig. El tubo del anteojo tambien tiene en un lado una abertura de unas tres pulgadas y media de largo, la qual se cierra con una portezuela asegurada en un lado del tubo del anteojo por medio de una charnela, y por el otro se suelta con una aldavilla que pasa por muchos anillos, del mismo modo que se cierran con una cadena las maletas.

226. La caxa *ABCD* lleva una tapa de la misma madera, abierta por sus dos extremos, cuya tapa sirve para precaver que con el viento bambolee el nivel.

El pie del instrumento se hace como el de un grafómetro, solo que las piernas han de ser mas fuertes. En medio de la caxa hay un hueco *K* de madera en el qual encaxa la cabeza del pie; el hueco está asegurado por medio de un travesaño de madera, clavado en los dos costados de la caxa.

Con la mira de que el pie se pueda llevar con comodidad, y meter en una misma caxa con el nivel, se quebrantan por medio sus tres piernas, y se doblan mediante una charnela, llevando cada pierna una virola de cobre ó hierro de la misma forma que ella, para que corra hasta la junta de la charnela quando se quiera que las dos piezas de cada pierna se mantengan derechas.

230. Se necesitan tambien dos piezas de hierro como esta, las quales sirven de tente mozo al nivel quando se le quiere arreglar; para cuyo fin se planta uno en cada extremo de la caxa del nivel, ó en la madera, ó en dos pitones, de modo que esten muy firmes y no bamboleen. En el extremo *X* hay una muesca angular, á fin de que los exes que en ella dan vueltas se mantengan constantemente en el mismo sitio.

Asegurados que esten los dos tentemozos cada uno á un cabo de la caxa, se planta encima el nivel, colocando los extremos del tornillo *QR* en las muescas de los tentemozos, acodillados para que pueda dar vueltas el nivel con mas comodidad sobre los dos extremos del tornillo, y sin moverle de su sitio.

Fig. 227.

Quando se quiera pasar de una estacion á otra, para trasladar con mas comodidad el instrumento, lleva la caxa una asa en cada extremo, y para evitar que dé golpes, se levantan los anteojos á fin de que baxe el agua al fondo de las vasijas, ó sino, se acomoda un cabo de tubo al fondo de la una de dichas vasijas para echar el agua en un cántaro. Esta es la construccion del instrumento, veamos como se verifica.

Verificacion del nivel.

923 Se buscará un sitio desde el qual se puedan ver objetos muy distantes, como una legua ó mas, y pondrá la caxa á nivel encima de una mesa muy segura, cargándole algun peso á fin de que no se descomponga con facilidad; se pondrán los tentemozos en su lugar, y encima el nivel; antes de esto se dispondrán las hebras ó hilos de las correderas de cada diafragma en aspa, lo qual será mas acomodado que no poner uno orizontal y otro vertical. Los vértices de los ángulos que forman las hebras á derecha é izquierda sirven para formar juicio del punto de nivel.

Estando así dispuesto, se levantará uno ú otro de los extremos de la caxa metiendo por debaxo una cuñita, hasta que el encuentro de las dos hebras dé en algun objeto muy distante; despues se trastornará el nivel, de modo que lo de encima esté debaxo, sin menear la caxa y se mirará si el encuentro de los hilos corresponde al mismo objeto:

Fig. to: si correspondiere, se dexarán los hilos en este estado; sino, se empujará cada uno de los dos quadros del diafragma, de modo que cada hebra se acerque al objeto la mitad de lo que de él distase; se dispondrá de nuevo la caxa de modo que el encuentro de los hilos dé en el objeto; se trastornará el nivel lo de arriba abaxo para ver si el encuentro de las dos hebras corresponde al mismo objeto; si no correspondiere, se empujarán los hilos ácia donde convenga, hasta que el encuentro de los hilos dé siempre en el mismo objeto. Lo propio se practicará con el otro anteojo, y verificándose con ambos la misma circunstancia, será señal cierta de estar los exes ó rayos del uno paralelos con los del otro.

Si las correderas del diafragma estuviesen algo premiosas con la cera que se les pegase, se pasará arrimada á ellas una cerilla encendida para derretir ó calentar la cera, á fin de que los hilos no puedan mudar de lugar quando se traslada el instrumento de un sitio á otro, bien que siempre será acertado verificarle despues de un viage largo antes de servirse de él; pero pocas veces habrá que llegarle si se tomasen todas las prevenciones que hemos dicho.

Entonces se quitarán los tentemozos, se plantará la caxa sobre su pie, se echará agua en las vasijas, y en estas se meterán las caxas que llevan los anteojos; se levantará y baxará la caxa hasta encontrar un objeto muy distante en el qual dé el encuentro de los dos hilos, se dará vuelta al instrumento para mirar al mismo objeto con el otro anteojo; si el encuentro de las dos hebras de este segundo anteojo diere en el mismo objeto, el nivel estará arreglado, y el objeto en la linea de nivel aparente que pasa por el encuentro de los hilos.

231.

Si el encuentro de los hilos del segundo anteojo no diere en el mismo objeto, se dará vuelta al tornillo *QR* del lado que convenga para empujar el peso *P* ácia *Q* ó ácia *R*, segun estuviere el objeto mas arriba ó mas abaxo que el encuentro de los hilos, á fin de que la representacion del objeto suba ó baxe la mitad de la diferencia; entónces se buscará otro objeto en el qual dé el encuentro de los dos hilos; se dará vuelta al instrumento para ver si el encuentro del otro anteojo dá tambien en el mismo objeto, y se repetirá la misma operacion si fuese necesario, hasta que los encuentros de los dos anteojos tapen siempre un mismo objeto, y estará arreglado el nivel. Fig. 227.

Entónces se hará una señal en el tubo del medio ácia el índice, el qual no conviene asegurar hasta estar arreglado el nivel con corta diferencia.

Si se quiere que el nivel señale los minutos y segundos de inclinacion, se medirá en un terreno á nivel quanto quepa, el trecho que se quiera, desde el pie de un edificio ó arbol muy vertical; y quanto mas larga fuere esta basa, tanto mejor será.

Se buscarán las tangentes de los ángulos de uno, dos, &c. minutos correspondientes á un radio igual á la basa dada. Se plantará el nivel en el uno de sus extremos, y se señalará en el edificio ó árbol puesto en el otro extremo el punto de nivel aparente que cubra el encuentro de los hilos; mas arriba de cuyo punto se señalará lo que cojan de largo las tangentes halladas de uno, dos, &c. minutos. Se empujará el peso *P* hasta que el encuentro de los hilos dé en cada uno de los puntos donde rematan las tangentes, haciendo sobre el tubo enfrente del índice una señal correspondiente á cada uno de estos puntos, y quedarán señaladas en el nivel las divisiones correspondientes á las declinaciones de mi-

Fig. nuto en minuto, las quales será facil dividir en 60 partes iguales para que señalen los segundos.

Los espacios de minuto en minuto, y por consiguiente los de segundo en segundo serán tanto mayo-
227. res, quanto menor fuere el peso *P*, y las caxas *EE*
231. donde estan pegados los anteojos fueren mas anchas y poco hondas y angostas; porque siendo las caxas anchas y poco altas, los anteojos hacen menos balances en la direccion vertical, y esto es mucha ventaja.

Donde no hubiere oficiales bastante diestros para arreglar el peso y el tornillo del tubo del medio, ó quando no se quiera que el nivel señale los minutos y segundos de inclinacion, bastará meter en el tubo un cilindro de plomo de media libra de peso, de grueso igual al hueco del tubo, asegurándole en su lugar con dos cilindros de madera ligera, que entre los dos no llenen todo el hueco que dexare en lo largo del tubo el peso de plomo, y llenando lo demas con rodajas muy delgadas de madera, carton ó naype á fin de empujar el peso tan poco como se quiera, quitando una rodaja del un extremo del tubo para pasarla al otro, porque importa que todo el hueco del tubo esté lleno á fin de que el peso no pueda mudar de lugar una vez que esté ajustado.

Para precaver que las dos caxas flotantes *EE*
231. toquen las paredes de las vasijas donde está el agua, se pueden soldar en situacion orizontal algunos tubitos de hoja de lata de linea y media de diámetro al poco mas ó menos junto á los ángulos ex-
227. teriores *Æ*, *Æ* de las caxas *L*, *L*, metiendo en cada uno tres ó quatro cerdas de javalí salientes como media pulgada, ó lo mas que se puede, con tal que no toquen á un tiempo las dos paredes opuestas del vaso.

Prác-

Fig.

Práctica de Nivelacion.

924 Dos modos hay de averiguar si dos puntos estan á un nivel, ó quanto falta. 1.° indagándolo con una operacion ó estacion sola desde el medio de la distancia que separa los dos puntos, ó desde el uno de los dos; esta se llama *nivelacion simple*. 2.° averiguándolo con muchas operaciones ó estaciones, plantando succesivamente el nivel en diferentes parages de la distancia que separa un término de otro; esta se llama *nivelacion compuesta*. De ambas se darán exemplos.

Antes de empezar la nivelacion, enviará el práctico un Oficial inteligente á cada término para que le presente un estadal, manteniéndole muy derecho y perpendicular al punto del término.

A es una tablita de un pie en quadro de ma- 232.
dera muy ligera que ha de correr por el estadal de arriba abaxo, y de abaxo arriba, la qual se afirma al estadal con una sortija de hierro que tiene detras, por medio de un agugero á manera de tuerca, en la qual se mete una llave atornillada que afianza la tablita de modo que no puede descomponerse.

El estadal está dividido en pies, pulgadas y lineas, y la tablita en dos partes iguales con una linea orizontal, la una blanca, y la otra negra, siendo su cara trasera todo negra.

Para comodidad del Oficial se junta con la tablita un palo *DE* de una vara de largo, el qual puede correr á lo largo del estadal, cabiéndole ambos en la mano, con el fin de subir y baxar la tablita, segun convenga. Si un estadal no bastare, se juntarán dos, ó los que fuere menester.

Dispuestos que esten el nivel y el estadal, mirará el práctico con el anteojo, mandando con la voz, Fig. voz, ó por señas al Oficial que suba ó baxe la tablita hasta que el encuentro de los hilos dé en la linea orizontal que separa la mitad blanca de la mitad negra: hecho esto, hace seña al Oficial de apretar la llave para asegurar la tablita en aquel punto que será el de la puntería. Esta operacion se repite respecto de cada término.

Nivelacion simple.

925 Sean A, B los dos términos de la nivelacion;
233. C, D los dos puntos de nivel. Mídase la distancia AC, y supongamos sea de 6 pies que se apuntarán en un libro de memoria, ó librito hecho para este fin; mídase despues la distancia BD, que supondrémos de 9 pies que tambien se apuntarán, como aquí figuramos; y restando 6 de 9, expresará la resta 3 quanto el segundo término B. es mas baxo que el primero.

9—0—0
6—0—0
3—0—0

En este exemplo los dos términos de la nivelacion están debaxo de la linea y de los puntos de nivel, como succede comunmente; pero si estuviesen mas arriba, como aquí A, B que son los términos de la nivelacion, y C, D los puntos de nivel; se medirá la distancia AC de 6 pies, y la BD de 9, y apuntándolas conforme hemos dicho, y aquí se vé, y practicando la sustraccion, la resta 3 pies señalará quanto B está mas alto que A.

234.

6—0—0
9—0—0
3—0—0

Finalmente, si el uno de los dos términos estuviese mas alto, y el otro mas baxo que la linea de nivel, como aquí donde B está tres pies mas alto, y A 9 pies mas baxo, en este caso, para sacar la diferencia de nivel entre los dos puntos, se sumarán una con otra las dos cantidades, y se hallará que A está 12 pies mas abaxo que B.

Fig. 235.

Nivelacion compuesta.

926 El modo propuesto poco ha de apuntar y calcular la nivelacion simple se practica igualmente en la compuesta; pero en la última se ha de seguir con suma proligidad, porque el mas leve descuido puede ocasionar errores que solo pueden remediarse con repetir toda la operacion desde el principio. Propondremos un exemplo no mas de nivelacion compuesto.

Propongámonos averiguar á que altura están uno respecto de otro dos rios en los puntos A y N; claro está que es preciso executar una nivelacion desde un término á otro. 236.

A este fin el Arquitecto esperará un tiempo sosegado en que las aguas no experimenten grandes alteraciones, mandará plantar á un tiempo en cada término dos piquetes á flor de agua, á los quales, una vez plantados, no debe llegarse por motivo alguno, aunque las aguas suban ó baxen en uno ú otro de los dos términos; porque aquí todo el empeño está en saber quanto la cabeza del uno de los piquetes está mas ó menos alta que la del otro, lo que señalará la altura recíproca de los dos rios en los puntos señalados.

Despues reconocerá el terreno de entremedias, sacando su mapa puntual, el qual le enseñará el camino por donde habrá de correr la nivelacion, y otras cosas conducentes á su asunto.

Supongamos que tenga por mas corta para ir de A á N la linea de puntos $ACHN$; le proporciona- 236.

Fig. nará este conocimiento determinar en quantas estaciones podrá ir desde *A* á *N*, y supondrémos sean 12 unas mas largas que otras, segun los casos.

En cada término *A*, *B*, *C*, *D*, &c. se plantará un
236. piquete de dos pies de largo si el terreno fuere firme, y de tres pies si el terreno fuese movedizo ó arenisco; cuyos piquetes no han de pasar la superficie de la tierra mas de dos ó tres pulgadas para precaver que los arranquen, y se puedan hallar siempre que se quiera, dado caso que suceda algun accidente en el discurso de la nivelacion.

Tambien se señalarán con piquetes plantados un pie en tierra los puntos de las estaciones que estarán en 1, 2, 3, &c. y despues de dividir una hoja del libro en 5 columnas, se empezará la nivelacion.

Se plantará el instrumento en la primer estacion 1 á igual distancia de cada uno de los dos términos *A* y *B*, y si los suponemos distantes uno de otro 166 estadales, la linea de nivelacion será por lo mismo 83 estadales de cada lado.

Se escribirá, pues en la primer columna el prito se restara [illegible] segunda, los pies, pulgadas, suma de la segunda, la resta [illegible] de nivel setérmino *N* estará mas bajo que *A*.

Perfil de esta Nivelacion.

927 Concluida la nivelacion, se trazará su perfil, para lo qual se tirará en el plano una linea rec-
237. ta de puntos *OO* que representará la linea de nivel. Desde todos los puntos que en el plano respresentan estaciones ó términos se tirarán otras tantas perpendiculares á dicha linea, de las quales las unas figurarán los estadales plantados en cada término, y las otras la posicion del instrumento en cada estacion.

Em-

Empezando, pues, por el primer término *A*, Fig. donde está la primer perpendicular, se señalará en el estadal plantado en dicho término un punto *a* á la altura 7—6—0, diferencia del punto de nivel y del término *A*. Por el punto *a* se tirará una paralela 237. á la linea de nivel, cuya paralela cortará la tercer perpendicular en *b* del segundo estadal. Debajo del punto *b* se señalarán 6 pies hasta *B*, donde estará el segundo término de esta primer nivelacion, por consiguiente se echará de ver que en el término *B* estará el terreno 1—6—0 mas alto que *A*.

Enmedio de los dos términos se figurará el instrumento á la altura de la linea de nivel, y se dibuxará el terreno de entremedias con expresion de sus diferentes desigualdades. Se señalará despues en el segundo estadal la altura del punto de nivel para la segunda estacion mas arriba del término *B*, 4—6—0 v. g. en *c*, por cuyo punto se tirará una recta tambien paralela á la linea de puntos que figura la linea de nivel, la qual cortará la quinta perpendicular en *d* del tercer estadal; desde *d* se baxará 5—6—2 hasta *C*, donde estará el segundo término respecto del antecedente, y el tercero respecto del primero. En medio y á igual distancia de los dos términos, v. g. en 2, se figurará el instrumento á la altura de la linea de nivel, y se dibuxará el terreno que hubiere entre los términos y la estacion, expresando sus diferentes alturas y desigualdades. Haciendo despues lo mismo desde cada término y cada estacion á otra, hasta el último término *N*, quedará puntualmente trazado el perfil del terreno por donde pasare la nivelacion, como aquí de toda la linea de puntos *ABCD* &c.

Lo mismo se practicará con todos los perfiles que ocurriere trazar, bien de alturas, campiñas, rios, canales, fuentes, ataguias, &c. una vez que es-

Fig. esté puntualmente señalada la altura de cada término de la nivelacion, y de cada estacion.

Pero el perfil de una nivelacion puede hacerse de dos maneras diferentes, segun la mira con que se haga; porque si la mira fuese señalar no mas la diferencia de altura de los dos términos, bastará trazar el perfil conforme acabamos de proponer; pero si la mira fuese señalar con individualidad la altura del terreno entre los dos términos, se ha de seguir otro método que vamos á especificar, del qual el declarado poco ha puede considerarse como parte. Declaremos el segundo método aplicándole á nuestro exemplo.

Otro método para trazar con mas individualidad el perfil de una nivelacion.

928 Aquí suponemos executada la nivelacion desde *A* hasta *N* por otro terreno que el antecedente que se hubiere reconocido ser mas igual y menos alto respecto del nivel de los dos rios, á fin de abrir, para comunicacion de uno con otro, el canal señalado *OPQRSTVXY*.
238.

Con esta mira se trazará, sin atender al plano una recta de puntos v. g. desde *Z* á *Y*, cuya linea señalará, como en el perfil antecedente, la linea de nivel que ha de regir para todo lo demas.

238. A esta linea de nivel se le baxarán perpendiculares, las quales señalarán los términos de la nivelacion, y la verdadera distancia de uno á otro.

Una vez que en esta segunda nivelacion no puede menos de sacarse la misma diferencia de nivel 5—4—6 que en la primera, entre los dos términos extremos, se señalará, para empezar el perfil 5—4—6 en la perpendicular al punto *O*, primer término de la nivelacion. En el mismo punto *O* prolongando la perpendicular, se figurará el primer estadal, en el qual se señalará en *a*, del mismo modo que en el perfil general pasado, el punto de nivel con arreglo á su altura respecto del término *O*; lo propio se practicará con el segundo, tercero, &c. estadal y los siguientes, hasta el último término, conforme se dixo antes. 238.

Trazadas que estén las lineas de nivel desde un punto á otro, conforme pinta la figura, solo faltará especificar las diferentes alturas del terreno que hubiere entre un término y otro. Las diferencias pueden ser grandes ó cortas, esto es, igual; lo que importa es que con un buen anteojo se pueda ver desde un término á otro.

Se verá pues, que el terreno entre *O* y *P* no es igual, y para señalarle en el perfil como él es, se expresarán las desigualdades con su verdadero valor; se plantará desde luego el instrumento en el uno de los términos, v. g. en *P*, procurando que el encuentro de las hebras cubra el punto de nivel señalado *b*; mirando despues ácia el primer término *O*, se levantará ó baxará la puntería hasta que el punto de nivel señalado mas arriba del primer término corresponda puntualmente al encuentro de los hilos; la linea de puntería de un punto á otro señalará la linea de nivel.

Si hecho esto, se manda plantar un piquete cerca de la orilla en *a* para señalar la altura de la orilla del rio respecto del primer término, y se presenta sobre este piquete el estadal, se mirará á que altura la interseccion de los hilos corresponde en el estadal, y supondrémos que sea á la de 4—10—0; se trasladará á la linea de nivel la distancia del primer piquete al primer término, desde donde se baxará una perpendicular, en la qual se señalará la distancia 4—10—0 al punto *a*, esto determinará la al-

Fig. altura del primer piquete, ó, lo que es lo propio la altura de la orilla del rio respecto de la superficie del agua, conforme el perfil manifiesta.

Si despues de esto se planta, caminando ácia el otro piquete en la misma linea de los dos términos, y sobre el piquete se presenta el estadal, el encuentro de los hilos, que permanece constantemente en la misma situacion, le cortará á la altura 4—6—o v. g. y trasladando á la linea de nivel la distancia cabal del primer piquete al segundo, se baxará una perpendicular; y tomando en ella una perpendicular de 4—6—o, esta caerá en el pun-
228. to *b*, y determinará la altura del piquete, y por consiguiente la del terreno en dicho parage.

Para expresar la pequeña hondonada *c'*, se plantará puntualmente en medio un piquete *c'* á flor de tierra, y en la linea que va desde un término á otro, como los dos primeros, se señalará, siguiendo siempre la linea del nivel, la distancia puntual del segundo piquete *b* al tercero *c*, y se baxará, como antes, una perpendicular, en la qual se apuntará la altura que señalare en el estadal la interseccion de los hilos que supondrémos de 6—8—o en *c'*, la que determinará la hondonada, conforme demuestra el perfil.

Por lo que mira al terreno de entre los piquetes, como la distancia se irá haciendo corta, le será fácil al Arquitecto expresarla prudencialmente, una vez que tenga señalados con puntualidad los puntos de todas las desigualdades reparables entre los términos.

Para trazar con igual individualidad el perfil desde el segundo término al tercero, como desde el primero al segundo, se dirigirá la puntería al tercer término; en lo demas se practicará de todo punto lo mismo que desde el primero al segundo, y se proseguirá al mismo tenor desde cada término al inmediato, hasta lle-

llegar al último, conforme lo manifiesta á las claras Fig.
el perfil.

Así quedará trazado el terreno de entre los dos términos extremos de la nivelacion con toda la individualidad que cabe. Quando no quiera el práctico permanecer en una misma estacion, podrá trasladar el instrumento á otro término ó plantarle entre uno y otro, conforme se vé aquí donde está entre el segundo y tercero, y saldrá de todo punto lo mismo.

Proporcionan estos perfiles formar cabal juicio
de las tierras que se han de excavar para abrir un 236.
canal como el que figuramos en el plano para comunicacion de los dos rios, añadiendo lo que se le quiera dar de profundo.

Medicion de las lineas en el terreno.

929 Las lineas se pueden medir en el terreno con cuerdas ó sogas, con cadenillas ó con compases.

Como estas mediciones no se pueden executar
con la puntualidad necesaria, á no ser que sea invariable el instrumento con que se hacen, y la soga se
encoge con la humedad, necesita cierta prepara- 239.
cion para poderla usar con toda confianza. Consiste esta preparacion en retorcer ácia distintos lados las hebras que han de componer la cuerda, en echarla despues en aceyte hirviendo, pasarla, así que esté seca, por cera derretida, y últimamente encerarla. Muchos prácticos aseguran que una soga así preparada no se encoge, aunque esté un dia entero en el agua.

930 La cadenilla se compone de varios eslabones, cada uno de largo determinado, pongo por ca-
so de un pie. Se le pueden dar treinta pies de lar- 240.
go, y bueno será hacerla de alambre no muy grueso, á fin de que no incomode por pesada.

 Co-

Fig. Como al tiempo de executar una medicion, el pe-
so de la cadena ó soga la acorta, se la sostiene co-
mo aquí figuramos. Porque está averiguado que un
hilo de 24 pies de largo, y de $\frac{1}{33}$ avo de pulgada
239. de diámetro que pesa $161\frac{5}{6}$ granos, puesto en direc-
cion orizontal, con una fuerza de 10 libras, pan-
dea en el medio linea y media.

931 El compas que mas comunmente sirve, ó por lo menos el mas seguro para medir lineas en el terreno, es el *compas de varas*. Este es una regla de metal ó madera, armada con dos puntas de acero movibles que se afianzan á la distancia que se quiere una de otra. Las dos puntas están clavadas al borde de dos cajas, por dentro de las quales pasa la regla, y en cada caja hay un tornillo para asegurarla, apretándola, en el punto de la
241. regla que se quiere. *AB* es la regla que coge de
largo 6, 9 ó 12 pies; si fuese de madera, habrá de ser esta dura y compacta; *C* y *D* son las dos cajas de laton, á las que están clavadas las dos puntas de acero, indispensablemente perpendiculares á la regla. Con la mira de hacer mas perceptibles las diferentes partes de estas cajas, figuramos aquí separadamente una en grande; su punta
242. es *G*, su tornillo *F*; ambos son de acero. El extremo del tornillo no se aplica inmediatamente sobre la regla por recelo que la rehunda, sino sobre una hoja de acero *HL*, la qual arrimándose á la regla, la aprieta y sujeta de modo que no pueda correrse.

Quando se quiere trazar una circunferencia con este compas, se apartan las dos cajas hasta que haya entre sus puntas una distancia igual al radio del círculo por trazar; despues se planta la una en el punto donde ha de estar el centro, al rededor del qual da la vuelta el compas, de modo que la otra

otra punta deja en el plano un rastro que señala Fig.
la circunferencia.

Quando la linea por medir está en un plano muy igual, se toma con el compas comun, ó con el compas de varas el largo de la medida, sea vara, estadal, &c. y se aplica varias veces de seguida sobre la linea que se quiere medir.

932 Para mayor seguridad es muy del caso medir la linea dos ó tres veces; y si las mediciones salen diferentes, se sumarán unas con otras, y la mitad ó el tercio de la suma, segun sean dos ó tres las mediciones diferentes, será el largo de la linea, ó mejor será atenerse á la menor de todas las mediciones que suele ser la mas cabal. La razon es que no se pueden sacar dos mediciones iguales de una misma linea con la cadenilla ó la cuerda, por no ser posible que en ambas operaciones tengan los medidores igualmente tirante el instrumento con que miden. De aquí se sigue que la linea saldrá antes mas larga que corta; pues claro está que dejar floja la medida es lo mismo que medir con medida menor; y como esta ha de caber mas veces en la linea que no la mayor, es constante que la medicion de una linea que mas se arrima á su verdadero valor es la que se hace teniendo muy tirante la cuerda ó la cadenilla. Por consiguiente quando se toma dos veces la medicion de una misma linea, y salen desiguales sus valores, se ha de preferir el menor.

Como se mide una basa.

933 Supongamos que se ha de medir en el terreno la distancia *AB*.

Se plantarán desde luego por medio de un plo-
mo dos jalones muy derechos *AC*, *BD*, en los dos 243.
puntos extremos *A*, *B*. Estos jalones suelen ser puntiagudos por el pie, y tienen fortificada su punta con

Fig. con una pua de hierro, á fin de que entren mas
facilmente en tierra, y en la cabeza llevan una señal
á fin de que el práctico dirija mejor la puntería que
figuramos en la linea oculta *CD*. Aplicará el prác-
tico el ojo en *C* ó *D*, y mandará plantar á tre-
chos otros jalones siempre á plomo, que todos es-
tén en la direccion, ó, por mejor decir, en el pla-
no vertical *CD*. Estos jalones se multiplican quan-
to sea menester para seguir con su auxilio la rec-
243. ta *AB* al medirla, sin desviarse de su direccion ni á
derecha ni á izquierda. Bueno será, para obrar con
mas seguridad, trazar un surco desde *A* á *B*, bor-
neando, esto es, aplicando de quando en quando los
ojos á los jalones y en su plan vertical, para que
salga muy derecho el surco; ó si no, se pondrá muy
tirante un cordel desde un jalon al otro. Hecho es-
to, se medirá la linea siguiendo el surco ó el cor-
del con un compas de vara, una cadenilla de aram-
bre gordo, con un estadal de largo conocido ó con
una soga. Por cuyo medio se sabrá puntual-
mente los pies, varas &c. que cogiere la distancia
AB. La operacion se hará con prontitud y seguri-
dad con dos estadales iguales, poniéndolos al tope
uno á continuacion de otro, de manera que el pri-
mero llegue á ser el segundo, y así succesivamente.

934 Este modo de medir supone que el terre-
no sea llano desde *A* á *B*, cuya distancia medida
en este supuesto se llama distancia orizontal. Ha-
blando con rigor matemático, no hay dos puntos
en la superficie de la tierra, por proxímos que
estén uno de otro, cuyo orizonte esté en un mis-
mo plano, por causa de la redondéz de la tier-
ra. Pero el error que su esfericidad ocasiona en
estas operaciones es despreciable; porque las ba-
sas mas largas que hasta el dia de hoy se han
medido no pasan de 36000 pies franceses, cuya
dis-

distancia corresponde á un arco de 6', con cortí- Fig.
sima diferencia, el qual discrepa de su cuerda $\frac{5}{1000}$
avos de pie, cantidad tan corta, que, sin recelo de
error sustancial, se puede tomar el arco por una
recta igual á su subtensa.

935 Quando el terreno de la basa es inclinado
ó desigual, se hace lo siguiente. Se asegura prime-
ro con jalones la direccion de la basa *BC*, se la 244.
mide manteniendo los estadales muy orizontales,
como *ac*, *be* &c. Las perpendiculares *DC*, *Ec*, &c.
figuran el plomo, el qual ha de enrasar con los
extremos de los dos estadales, superior é inferior,
para asegurarse de que el uno empieza donde el otro
acaba, sin cuya circunstancia la medida no puede
salir cabal. Obrando con este cuidado, la suma de
los estadales *ac*, *be*, *dm*, *hB* será igual á la dis-
tancia orizontal *AC* de entre los dos puntos *B* y *C*.

936 Sin embargo, si se quisiese averiguar la dis-
tancia efectiva *BC* de los dos puntos, se podrán me-
dir succesivamente las alturas *aC*, *bc*, *de*, *hm*, cu-
ya suma es igual á *AB*; y en conociendo *AC* y *AB*,
se sacaria facilmente el valor de la hypotenusa *BC*
(729). Quando el terreno va subiendo y bajando al-
ternadamente, claro está que para hallar *AB* será
preciso restar la suma de las diferencias de las al-
turas de los estadales baxando, de las diferencias
subiendo.

937 Pero mejor será medir *BC* por la nivela-
cion, cuyo método es el que comunmente se prac-
tica, y mas fácil todavía hacer la medicion con el
barometro (*a*); bien que el camino mas breve para sa-
car el valor de esta distancia, será medir con algun
instrumento el ángulo *ACB*, conforme enseñaré-
mos despues; por medio de este ángulo y del la-
F 4 do

(*a*) A su tiempo se dará noticia de este instrumento, y manifesta-
rá como sirve para esta operacion.

Fig. do AC, se hallará BC por trigonometría.

938 Para poner muy orizontales los estadales en esta operacion sirve el nivel de ayre; se le pone sobre el estadal, levantando ó subiendo el extremo que no llega al suelo; v. g. el extremo a del estadal ac, hasta que la ampolla de ayre se pare en el medio, con lo que el estadal estará paralelo al orizonte.

Como se miden los ángulos en el terreno.

939 Los ángulos se miden ó toman comunmente en el terreno con quatro instrumentos, que son la Plancheta, el Grafómetro, el Quadrante de círculo y la Brújula.

La plancheta es el mas acomodado, y tal vez el mas antiguo de los instrumentos inventados pa-
245. ra esta operacion. Compónese de una tablita muy acepillada, igual, de pie y medio en quadro, al poco mas ó menos, puesta sobre tres pies, y movible en diferentes direcciones, de modo que se la puede poner inclinada al orizonte. Las planchetas mejores son las que se pueden mover desahogadas ácia qualquiera direccion, manteniéndose firmes en la inclinacion que se les da; y son sólidas y fuertes de modo que no se descompongan ni venzan con el frio, el calor, y los tiempos húmedos y secos.
245. FG es una alidada ó regla de cobre, armada de dos pinulas cuyo oficio es dirigir la puntería.

940 Quando se quiere tomar con este instrumento el ángulo que forman dos objetos B y C, á los quales se puede apuntar desde un punto de estacion al qual suponemos que responde verticalmente el punto A de la plancheta; se pone sobre la plancheta un papel muy tirante y muy asegurado; á este papel se aplica la alidada, de modo que mirando por las pinulas el objeto B, se pueda ti-

tirar á lo largo de la regla, que importa mante- Fig.
ner muy segura, una linea indefinita Ab. Por las pinulas se mira tambien el objeto C, y se tira una linea Ac, el ángulo cAb trazado en el papel, es
el ángulo CAB. 245.

El punto del terreno correspondiente al punto A del papel se determina facilmente; para lo qual se cuelga succesivamente de los bordes m, n de la plancheta, un plomo que llegue hasta cerca de la superficie del suelo, se lleva sobre el terreno en la direccion del uno de los dos plomos al otro la una de las dos distancias Am ó An medida orizontalmente.

941 Para saber los grados que coge el ángulo A, sirve el semicírculo graduado. Si se le quiere medir con mas precision, se toma con un compas una parte $AD = AE$ de las rectas Ab, Ac, con lo que LE es la cuerda del ángulo A, siendo AE el radio. Se miden en la escala de partes iguales
las lineas AE, LE, y las tablas de los senos dan 246.
el ángulo A, porque $AE : LE :: 1 : 2 \text{ sen } \frac{1}{2} A$ (722): si la operacion no exige sumo rigor, se saca el ángulo por la escala de las cuerdas (832).

942 El Grafómetro es un semicírculo de metal, dividido en grados ó medios grados; lleva una alidada EC con pinulas, y movible al rededor del
centro A del instrumento; hay otras dos pinulas 247.
perpendiculares al plano del grafómetro, aseguradas en los extremos del diámetro que pasa por las divisiones señaladas 0 y 180. En los extremos de las alidadas hay algunas divisiones que sirven para lo que vamos á declarar.

Supongamos señaladas en el grafómetro divisiones de 30' cada una; tomemos un intervalo ó arco igual á 14 de estas divisiones, el qual por lo mismo cogerá 7 grados; si en cada uno de los extremos de la alidada suponemos otro intervalo de 7 gra-

Fig. grados dividido en 15 partes iguales, es patente que cada una de estas partes valdrá $\frac{7}{15}$ ó 28.' La primer division señalada cero en la alidada ha de corresponder puntualmente al medio de las pinulas, quiero decir que ha de estar en el plano de los hilos verticales, que regularmente estan asegurados en medio de cada pinula. Esta division de la alidada suele llamarse *linea* de *fee*; señala á qual de las divisiones del grafómetro corresponde la direccion de la visual. Supongamos, pues, que la linea de *fee* cayga en el grafómetro entre 40° y 40° 30.' Para saber quantos minutos hay entre la division de 40° y el punto del grafómetro que corresponde á cero de la alidada, se sujetará la alidada, y se mirará qual de sus divisiones coincide mas puntualmente con una de las del semicírculo. Supongamos que sea esta la 7ma division de la alidada; en nuestro caso coincidirá cabalmente con la de 43° del grafómetro. Ya que el intervalo de seis espacios en la alidada, desde la primera á la septima division vale $6\times28'=2°\ 48'$, síguese que la primer division de la alidada corresponde en el grafómetro á un punto que está en $43°-2°\ 48'=40°\ 12.'$ Si fuese la octava division de la alidada la que coincide con la division 43° 30', se hallaria del mismo modo que el cero de la alidada cae encima de 40° 14.' De estos exemplos se saca que las divisiones de la alidada subdividen los espacios del semicírculo de 2' en 2.'

El limbo donde están estas divisiones se llama Nuñez, (*Nonius* dicen los escritores estrangeros) ó *Vernier.*

943 El grafómetro ha de estar armado sobre un pie muy sólido, y de modo que el plano del semicírculo se pueda asegurar en la situacion que se quiera, orizontal, vertical é inclinada al orizonte. Los grafómetros mas perfectos llevan tornillos, con los

los quales se hacen los mas minimos movimientos, Fig. ya para acabar de poner con toda la puntualidad posible el plano del instrumento en la inclinacion que se desea, ya para colocar con entera precision la alidada en la direccion del objeto que se quiere mirar por las pinulas. En lugar de las pinulas son mejores dos anteojos de larga vista, asegurados el uno en el semicírculo, paralelo al diámetro que pasa ó real ó mentalmente por las divisiones o y 180. Este anteojo está colocado debajo del semicírculo, á fin de que no estorbe á la alidada el dar vueltas con desahogo por encima de la superficie superior. El otro anteojo está colocado en la alidada, con tal arte que puede inclinarse un poco verticalmente al plano de la misma alidada. En ambos anteojos, hay dos hilos muy tirantes puestos en cruz en el focus comun de los vidrios, ó por lo menos un hilo vertical muy tirante.

Finalmente en el grafómetro hay una brújula, cuyo destino es señalar el ángulo que forma la visual con la linea meridiana, conforme se dirá mas adelante.

944 El uso del grafómetro es muy fácil de entender. Supongamos que se haya de medir la distancia angular de dos objetos *F*, *G*, mirados desde un punto qualquiera. Se colocará perpendicularmente á dicho punto el centro *A* del grafómetro, y se inclinará ó dispondrá el instrumento de 247. modo que mirando por las pinulas fijas parezca que el hilo vertical parte por medio el uno *F* de los dos objetos, y que al mismo tiempo el plano del instrumento, si se le prolongara, pudiese encontrar el otro objeto *G*. Despues se dará vuelta á la alidada *EC*, hasta que el hilo de sus pinulas parta por medio el objeto *G*. Se mirará á que punto del semicírculo corresponde la linea de *fee* de la alidada

Fig. da; la distancia de este punto á la primer division del grafómetro en *B*, será el arco *BC*, cuyo arco señalará los grados y minutos del ángulo *BAC* ó *FAG*.

Este ángulo, medido en un plano comun á los tres puntos *A*, *F*, *G*, no es igual al ángulo *GAF*, medido en el plano orizontal del punto *A*, sino
247. quando los puntos *F* y *G* están en este último plano. Habria, pues, que hacer una operacion para valuar y corregir esta diferencia; pero esto será escusado siempre que el grafómetro esté armado de anteojos, y solo uno de los objetos esté fuera del orizonte del observador. Porque entónces se podrá dirigir la puntería á dicho objeto por medio del movimiento vertical que hemos dexado (943) al anteojo de la alidada, dexando siempre el plano del semicírculo en el plano del orizonte.

945 Todo práctico que ha de executar operaciones con algun instrumento, debe primero comprobarle, quiero decir asegurarse de que no tiene defectos; este es un preliminar sumamente esencial. Al artífice que le vende se le puede obligar á que manifieste, ó dé medios de explorar su bondad. Pero como en las operaciones comunes las imperfecciones de poco momento no son reparables, y los errores de consideracion son fáciles de descubrir, nos detendrémos poco en este asunto.

Lo primero que conviene mirar en todo grafómetro es si las visuales que pasan por las pinulas fijas, y las del alidada, se cruzan en el verdadero punto que corresponde al centro del semicírculo; y si el arco de 180° es cabal, quiero decir, si las divisiones señaladas o y 180 están puntualmente en los puntos donde han de estar. Para estas comprobaciones, basta observar si los quatro hilos se confunden unos con otros en un mismo plano, quando los ceros de los Nuñez de las alidadas coinciden pun-

puntualmente con las divisiones o y 180; si esto se Fig. verifica en ambas posiciones de la alidada, quiero decir quando la pinula *E* está del lado de la pinula *D*, y quando la misma pinula *E* está del lado de la pinula *B*; y finalmente, si dando vuelta á la ali- 247. dada, el borde de los Nuñez cubre ó corta igual parte en cada una de las divisiones del semicírculo. Estas operaciones manifestarán si el punto *A*, al rededor del qual se mueve la alidada, es el verdadero punto céntrico del instrumento; si está, como debe, en la interseccion comun del plano de los hilos del semicírculo y del plano de los hilos de la alidada; finalmente, si el arco de 180 grados es de todo punto cabal. Hecha esta última comprobacion, será fácil conocer si hay errores reparables en la posicion de las demas divisiones, cotejándolas succesivamente con el Nuñez, ó midiendo las cuerdas con un compas de puntas muy sútiles.

946 Quando el grafómetro lleva anteojos, no necesita mas que un nuñez del lado del objetivo del anteojo movible; la linea de *fee* de este nuñez de- 248. be colocarse de modo que coincida con la primera division *B* del semicírculo, y se mirará si los hilos verticales de ambos anteojos cubren unos mismos puntos de un mismo objeto v. g. *C*. Esta operacion supone que los hilos están muy verticales, lo que se puede comprobar desde luego mirando si cubren un plomo colgado á cierta distancia. Despues se dará vuelta á la alidada de modo que la linea de *fee* del nuñez coincida con la última division del semicírculo en *D*. Si el hilo vertical, ó la interseccion de los dos hilos no cae entónces sobre puntos reparables de un objeto qualquiera, será preciso plantar uno v. g. *E*. Despues de reconocidos con toda puntualidad los puntos precisos del objeto *E* que cubre el hilo del anteojo movible,

Fig. ble, y los del objeto C que cubre el hilo del anteojo fixo, se dará vuelta al grafómetro de modo que el punto D esté donde estaba primero el punto B, y al reves. Esto se logra facilmente señalando en el terreno por medio de un plomo, antes de mover el grafómetro, los puntos correspondientes á
247. los puntos B y D. Hecho esto, se mirará si dirigiendo el hilo del anteojo fijo á los puntos reparados del objeto E, el hilo del anteojo movible cubre tambien los puntos reparados del objeto C. Por esta operacion quedará comprobado el arco de 180°, igualmente que la posicion cabal del centro del instrumento en la interseccion comun de los planos verticales de los exes opticos de ambos anteojos.

Las demas comprobaciones se harán conforme diximos (945).

Si en todas estas operaciones, que para mayor seguridad conviene repetir muchas veces, se descubriere algun error, será indispensable averiguar su cantidad por medio del nuñez ó del tornillo que le mueve (942), como algun índice ó mano mida los movimientos de este tornillo. Al hacer uso del instrumento, se llevarán en cuenta los errores averiguados.

947 Otro instrumento de uso muy dilatado es
247. el quadrante de círculo, mitad no mas DL del grafómetro, por cuyo motivo no sirve para la medicion de los ángulos obtusos, sino despues de divididos en dos ángulos agudos por medio de un objeto intermedio qualquiera. Para comprobar este instrumento, se compara el arco de 90° con quatro ángulos rectos contiguos unos á otros, dando vueltas al quadrante alrededor de su centro, conforme diximos (946) que para comprobar el arco de 180° del grafómetro, se le habia de comparar con dos ángulos de 180° cada uno. Respecto del grafómetro, el

el error averiguado por la comparacion es doblado Fig.
del error del arco de 180°; y respecto del quadrante de círculo, el error que se halla al medir el quarto ángulo es quádruplo del error del arco de 90.°

Para las operaciones mas delicadas sirve el quadrante de círculo; porque de un mismo peso y volumen, puede ser de radio mayor que no el grafómetro; y no hay duda en que quanto mayor es el radio de un instrumento, con tanto mayor puntualidad se miden los ángulos.

Medicion de las alturas.

948 Quiero saber *quanto coge de alto un campanario figurado en la linea oculta* AB, siendo B el centro de la basa del campanario ó el punto que perpendicularmente corresponde al punto A. 249.

Estando el grafómetro (lo propio digo del quadrante de círculo) armado verticalmente, esto es, en el plano de la vertical AB, le planto á una distancia conveniente, de modo que el diámetro CD sea paralelo al orizonte; esto lo da á conocer el plomo, el qual tocando entónces un si es no es el plano del instrumento, corresponde á un tiempo á la division señalada 90 y al centro N. Doy vuelta á la alidada EF hasta que veo en medio del hilo de sus pinulas ó de su anteojo la punta A del campanario. Los grados y minutos del arco FD del grafómetro serán el valor del *ángulo de elevacion* ANH. Desde el punto G del terreno al qual corresponde á plomo el centro N del instrumento, mido (929) la distancia orizontal $GK=NH$, siguiendo siempre la direccion del anteojo CD; añado á GK la distancia $BK=MH$. Una vez que conozco NM y ANM hallaré AM del mismo modo que en el exem-

Fig. exemplo (726); añadiré (y esto debe practicarse en todas las operaciones como esta) la altura del anteojo inmoble respecto del terreno, esto es $GN=KH=BM$, y sacaré la altura AB.

949 *Midamos una altura inaccesible por su pie*, esto es, á cuyo pie no se puede llegar.

250. Sea CD dicha altura. Ya que por el rio AD no se puede medir una distancia orizontal desde el punto D á la estacion del observador; medirémos la linea orizontal AB en el plano de la altura CD, y tomarémos los ángulos de elevacion B y CAD. En el triángulo CAB conoceremos los tres ángulos y el lado AB; buscarémos el valor del uno de los otros dos lados (733) y sacarémos CD.

950 Propongámonos ahora *determinar una altura* AB *v. g. en cuyo plano no se puede medir una distancia orizontal*.

Desde luego eligirémos dos estaciones, C y D, tales que la una esté en un mismo plano orizontal con el punto A, y con la circunstancia que
251. se pueda medir la distancia efectiva CD; medirémos los ángulos BCD y CDB, colocando el instrumento en el plano oblicuo de los tres puntos B, C, D. Desde la una de las dos estaciones que está en el plano orizontal de A, tomarémos con el instrumento dirigido verticalmente, el ángulo de elevacion BDA ó BCA. Una vez que conocemos los ángulos y el uno CD de los lados del triángulo BCD, hallarémos el uno de los otros dos lados BC, BD, y será $AB=BD$ sen. BDA, ó $AB=BC$ sen. BCA.

951 Siempre que el práctico esté á mucha distancia del objeto, las alturas determinadas por los métodos antecedentes necesitan de algunas correcciones por dos causas que conviene dar á conocer.

I. Desde luego el orizonte del observador no es el

mismo que el del objeto observado. Sea C el centro de la tierra, R la cumbre de una montaña, A el punto desde el qual se ha observado el ángulo de elevacion RAB; ORI, perpendicular á CR, es el orizonte del punto R; BAD perpendicular á CA, es el orizonte del punto A. Si hacemos $CE=CA$, será RE la altura verdadera de la montaña, respecto del punto A. Si se tira la cuerda oculta AE, el verdadero ángulo de elevacion de la montaña seria RAE; pero RAB es el ángulo de elevacion aparente, quiero decir, el que se ha observado con los instrumentos, el qual siempre se refiere al orizonte BAD del observador. Luego la altura de la montaña determinada por los métodos antecedentes será BR y no RE. Fig. 252.

A mas de esto, en el cálculo de las alturas siempre hemos supuesto $RBA=90^\circ$; hablando con rigor RBA es igual á la suma de los dos ángulos internos C y BAC, ó $RBA=90^\circ+C$; pero como C nunca pasa de muy pocos minutos (290), se puede resolver el triángulo RBA como rectángulo en B, sin que de aquí se siga error reparable en el cálculo de BR.

Por consiguiente el único error procedente de la diferencia de los orizontes que sea necesario llevar en cuenta, es BE. Su valor se saca de $BE=\frac{AB^2}{2BC}$ (539) lo que manifestará si BE se puede despreciar, substituyendo en lugar de las lineas sus valores en pies ó varas; $2BC$ es el diámetro de la tierra.

952 II. En segundo lugar las refracciones causan un error quando se toman los ángulos de elevacion, como RAB. Los rayos de luz que atraviesan oblicuamente la atmosféra se tuercen ó doblan de contino ácia la tierra, cuya mudanza de direccion se llama *refraccion*. De donde se sigue que los ra-

Fig. rayos trazan una linea curva, y que como el ojo ve el objeto por la tangente de esta curva, es causa la refraccion de que los objetos parezcan mas altos de lo que son en realidad.

953 Representa AD el globo de la tierra, AB su superficie, AE la altura de la atmosféra, M un objeto que envia á la tierra el rayo de luz MK; este rayo en K se desvia de su primer direccion torciéndose ácia A, desde donde parece que viene por
253. KN, y el observador que desde A mira el objeto le ve en N mas alto que en M el valor del ángulo MKN; este ángulo es lo que se llama refraccion.

954 Sea, pues, C el centro de la tierra. Por la naturaleza de los triángulos rectilineos tenemos $C = 180° - CRA - CAR$; pero $CRA = 90° - IRA$, y $CAR = 90° + RAB$. Substituyendo estos dos valores, la primera equacion se transforma en $C = IRA - RAB$. El ángulo C siempre es conocido quando lo
252. es AR, se puede tomar sin error perceptible en lugar del arco AE. Por consiguiente si puesto el práctico en R mide con un instrumento el ángulo IRA, y desde el punto A el ángulo RAB, y la diferencia de los dos ángulos no sale igual al ángulo C, lo que faltáre será la suma de las dos refracciones. Y de hecho, si puesto el observador en R, la refraccion señala el punto A mas alto de lo que es, el ángulo observado IRA será menor de lo que es en realidad. Por la misma razon, si desde el punto A se ve el punto R mas arriba de su verdadero lugar, la observacion dará demasiado grande el ángulo RAB. Luego la diferencia de estos dos ángulos se hallará demasiado corta, y lo que le faltáre será la suma de los dos errores originados de la refraccion, la qual quedará por este medio determinada y conocida.

955 De muchas observaciones se ha sacado una regla general bastante segura para enmendar el error

ror de la refraccion en un ángulo observado, quando no se quiera ó no se pueda determinar cada vez esta correccion por la observacion de los dos ángulos. Los PP. Boscovich y Maire estiman que el efecto de la refraccion es la 18va parte del arco terrestre interceptado. Lambert halla que la refraccion es la 14va parte del arco de la tierra interceptado. Otros muchos Matemáticos estan tambien por la 14va parte. Entre todos estos valores se puede tomar un medio, porque son tan inconstantes las refracciones, que no es posible contar con una suma precision. Los PP. citados dicen que quanto menos elevado está el objeto respecto del orizonte, tanto mas expuesta está á variar de un instante para otro la refraccion. Encargan que estas observaciones no se hagan en horas muy cercanas al nacer ó ponerse el sol, y sobre todo que no esté el observador de cara á este astro. Prevenimos tambien que las refracciones son en general muy irregulares, siempre que por alguna causa metereológica varía rápidamente el termómetro. Fig.

956 Con dificultad sale cabal la determinacion de la altura de las montañas por los métodos declarados hasta aquí; el ángulo de elevacion siempre es demasiado pequeño, por manera que un leve error en la medida de este ángulo, le causa reparable en la altura que se busca. Es con efecto muy fácil cometer un error de 1′ por lo menos, ya por la inconstancia de las refracciones, ya por causa de la pequeñez de los instrumentos que sirven para estas observaciones, ya por lo que hace dificultosa la observacion el bamboleo que parece padecen los objetos terrestres en el anteojo por causa de los vapores de la atmosféra, ya finalmente porque rara vez permite el viento hacer con la debida puntualidad la observacion esencialísima del plomo (948).

Fig.

Medida de las distancias.

957 Sea BC el ancho de un rio, ó una distancia qualquiera, de la qual, uno por lo menos de los puntos extremos v. gr. C, sea accesible, se trata de ave-
254. riguar quanto coge de largo BC.

Se medirá (933) una basa AC v. gr. en la direccion y de largo que acomode, se medirán tambien (942) los ángulos A y C; con esto ya será conocido el tercer ángulo B, y se calculará la distancia BC.

958 Con la plancheta se hará la operacion como sigue. Se trazará en el papel por lo dicho (939) un ángulo a igual al ángulo A del terreno; se plantará un jalon en el punto A; se trasladará la plancheta á C; y despues de colocar por medio de las pínulas la linea ca en el plano vertical de CA, y de modo que el punto c corresponda á plomo al punto C, se dará vuelta á la alidada, centrándola en el punto c hasta que el objeto puesto en B esté tambien en medio de las pínulas. Hecho esto, se tirará á lo largo de la regla la linea cb hasta que encuentre la linea ba, y quedará trazado en el papel un triángulo cab semejante al triángulo CAB del terreno. Si suponemos que la basa medida AC sea de 1000 varas, y llamamos x el número de varas que coge de largo la distancia BC por medir, será $ac : bc :: 1000 : x = 1000.\frac{bc}{ac}$ Luego para sacar el valor de x basta saber que razon hay entre bc y ac; cuya razon se sacará facilmente por una escala qualquiera de partes iguales, determinando puntualmente con un compas quantas de estas partes corresponden al intervalo bc, y quantas al intervalo ac.

Se viene á los ojos que ac la qual hace oficios de basa en el papel, es arbitraria, y que segun sea de larga ó corta, será tambien mayor ó menor el triángulo abc.

Mi-

959 Midamos ahora la distancia CD inaccesible Fig.
por ambos extremos C y D. 255.

Despues de escoger con las circunstancias mas favorables la basa AB, la medirémos; desde el punto B medirémos los ángulos CBD, CBA, y desde el punto A, los ángulos CAD, DAB; con esto conocerémos en los triángulos CAB, DAB los tres ángulos y un lado AB; calcularémos (733) los lados AC, AD, ó los lados BC, BD; y una vez que en el triángulo CAD, ó en el triángulo CBD conocemos dos lados con el ángulo que forman, sacarémos el tercer lado (739) el qual es la distancia por medir CD.

960 Si los ángulos se midieren con la plancheta, las lineas tiradas en el papel serán 1.° la basa ab de largo arbitrario; las lineas indefinidas ac, ad, tiradas quando se miden los ángulos desde el punto A; 3.° las lineas bc, bd, tiradas respectivamente hasta el encuentro de las dos antecedentes, para formar los ángulos medidos desde el punto B. Hecho esto, entre los puntos de interseccion c y d, se tirará la cd, y quedará trazada en el papel una figura $abcd$, semejante al quadrilátero $ABCD$ en el terreno, y por lo mismo sabiendo quantas varas coge AB, se sacará por una escala de partes iguales la razon $\frac{cd}{ab}$, y de la proporcion $ab : cd :: AB : CD$ se sacará en varas el valor de la distancia CD.

Esto manifiesta quan acomodada es la plancheta, pues da las distancias sin necesidad de conocer el valor de los ángulos, ni de resolver triángulo alguno. Prevenimos sin embargo que no los da tan cabales, porque las operaciones prácticas jamas llegan á la precision del cálculo.

961 Si los puntos A, B, C, D no estan todos

 qua-

Fig. quatro en un mismo plano, la suma de los ángulos *CAD* y *BAD*, medidos en el plano de cada triángulo respectivo, no será igual al ángulo *CAB*. Este error no sufre enmienda quando se usa la plancheta;
255. pero por lo comun es corto, y aun imperceptible. Para las operaciones delicadas sirve el grafómetro ó el quadrante de círculo, y se corrige el error por el cálculo ó, con el fin de evitar todo error en la distancia por medir *CD*, lo mejor será medir tambien los ángulos *CAB*, *ABD*, y valerse para la resolucion de cada triángulo, de solos los ángulos del mismo triángulo medidos inmediatamente por observacion.

962 Si no fuese posible medir cómodamente una basa *AB*, tal que desde sus puntos *A* y *B* se puedan ver los objetos *C* y *D*, se practicarán en este caso, para medir la distancia *AB*, las operaciones indicadas (957 y 958) ó las propuestas (959 y 960) segun esté situada la basa que se pueda medir. Una vez conocido por este medio el intervalo *AB*, se inferirá *CD*, conforme queda dicho.

Qualquiera se hará cargo de que con medir una sola basa, se puede pasar midiendo solos los ángulos, de un triángulo á otro, y determinar las distancias respectivas de todos los lugares de una provincia, de un Reyno &c.

Reduccion de los ángulos al centro.

963 Hemos visto como despues de observar desde una estacion algun objeto, se pasa á este desde el qual se observan otros para tomar algun ángulo. Bien se percibe que el centro del instrumento deberia corresponder al centro del nuevo objeto, cosa imposible las mas veces, v. gr. quando es la aguja de un campanario. De aquí se sigue que el ángulo observado no sale el mismo que si se tomára desde el centro correspondiente, y es forzoso reducirle á lo que debe ser, mediante una reduccion que á la verdad no pasa de algunos segundos, y solo se calcula en las operaciones delicadas.

964 Por lo general, de tres modos distintos puede estar colocado un observador respecto del centro y de los objetos que han de formar el ángulo que se va á tomar; ó está en la linea que va desde el centro á uno de los objetos, ó en una direccion que pasa por entre las visuales, ó finalmente, puede ser tal su situacion respecto del centro y de los objetos, que la visual desde el observador al centro donde ha de estar el vértice del ángulo cayga enteramente fuera del ángulo que forman las visuales que van desde el centro á cada uno de los objetos *A* y *B*. Especificaremos estos tres casos.

965 I. Quando el observador está en la linea que va desde el centro á uno de los objetos puede estar ó entre el centro y el objeto, v. gr. en *D* ó *F*, ó al otro lado del centro respecto de los objetos *A* 256.
y *B*, v. gr. en *d* ó *f*. Si se tiran las visuales *DB*, *dB*, ó *FA*, *fA*, es patente que el ángulo observado *ADB* será el que hemos de reducir al centro *C*, para que sea el verdadero ángulo *ACB*. Pero como el ángulo *ADB* es externo al triángulo *DBC*, será (448) $ADB = ACB + DBC$; luego $ACB = ADB - DBC$; quiero decir, que *quando el observador está entre el centro y el objeto, del ángulo observado se ha de restar el ángulo en uno de los objetos, cuya base es la distancia entre el centro y el observador.* Pero quando este se halla mas allá del centro respecto del objeto, v. gr. en *d*; como entónces $ACB = AdB + dBC$, *al ángulo observado* AdB *se le añadirá el ángulo que tiene su vértice en* B, *y cuya base es la distancia del observador al centro.* Muy en breve dirémos como se saca el valor de los ángulos en *B*.

 II.

Fig. 966 II. Quando la direccion del observador al centro pasa por entre las visuales que desde el centro van á los dos objetos A y B, v. gr. quando es-
257. tá en D ó d; es patente que si se tirá el diámetro DCd prolongándole ácia F, respecto del punto D, el ángulo ACB ha de ser menor que el ángulo observado ADB: y respecto del punto d, el mismo ángulo ACB ha de ser mayor que el ángulo observado AdB. Para hallar la correccion necesaria en ambos casos, se observará tambien con atencion uno de los ángulos ADF ó BDF, como tambien uno de los ángulos AdF ó BdF quando el observador está en d. Sentado esto, es patente que el ángulo total ACB se compone de los dos ángulos ACF y BCF, que corresponden á los ángulos ADF y BDF. Pero como el ángulo ADF es externo, será $ADF = ACF + DAC$; luego $ACF = ADF - DAC$; y tambien $BCF = BDF - DBC$; luego $ACF + BCF$ ó $ACB = ADF + BDF - DAC - DBC$, ó si no, $ACB = ADB - DAC - DBC$. Síguese de aquí que quando el observador se halla entre las visuales tiradas desde el ángulo que se busca á los extremos de la base, y está al mismo tiempo entre dicha base y el vértice del ángulo, para sacar el ángulo del centro, *del ángulo observado se restarán los dos ángulos en que se veria la distancia del observador al centro, si se mirára desde los vértices de los otros dos ángulos del triángulo.*

Si el práctico estuviera en d, manteniéndose en tal posicion que la visual desde él al objeto pase por entre las visuales que desde el centro van á los extremos de la base; el ángulo del centro seria mayor que el ángulo tomado AdB, y por razon de los ángulos ACF, BCF externos á los triángulos CAd, BCd, será $ACF = AdF + CAd$, y $BCF = BdF + dBC$; luego $ACF + BCF$ ó $ACB = AdF + BdF + CAd + CBd = AdB + CAd + CBd$; quiero de- Fig.
cir que en este caso *se sacará el ángulo del centro sumando con el ángulo tomado la suma de los ángulos en que desde los puntos* A y B *se ve la distan-* 257.
cia del observador al centro.

967 III. Finalmente, quando es tal la posicion del práctico respecto del centro y de los objetos A y B, que la visual desde el punto de estacion al centro no pasa por dentro del ángulo que forman las visuales que van á los extremos de la base, como á D ó d; despues de observar los ángulos ADB y ADC, se sacará el ángulo AOB externo así respecto del triángulo ADO, como respecto del triángulo BCd; lo que dá dos valores del ángulo AOB, 258.
es á saber, $AOB = ADB + DAC$, y $AoB = ACB + CDB$; luego si comparamos estos dos valores del ángulo AoB, saldrá $ADB + DAC = ACB + CBD$, y $ACB = ADB + DAC - CBD$.

Si el práctico estuviese en d, tambien se sacaria $ACB = AdB + dBC - CAd$, de lo qual se infiere la siguiente regla general para reducir al centro los ángulos en la tercer posicion. *Añádase al ángulo tomado la diferencia de los ángulos en que desde los puntos* A *y* B *se veria la distancia del punto de estacion al centro, y se sacará el ángulo del centro*; ó lo que es lo mismo; *al ángulo tomado añádase el ángulo en que se veria la distancia del observador al centro, desde el punto que está al mismo lado del centro que la estacion, y réstese el que está del otro lado.*

968 De todo lo dicho hasta aquí se sigue que en la primer posicion, al ángulo tomado se le ha de añadir ó rebajar aquel de los dos ángulos A y B en cuya direccion no esté el observador; en la segunda posicion, del ángulo observado se rebajarán los ángulos en A y B, cuya base es la distancia desde el

Fig. el punto de estacion al centro, quando el práctico está entre la base y el centro; y si está á mayor distancia de la base que el centro ó vértice del ángulo que se busca, se le añadirán los mismos ángulos al ángulo observado. Finalmente, en la tercer posicion, al ángulo observado se le añadirá el que estuviese del lado del observador, y se le rebajará el otro.

969 Se ha de poner sumo cuidado en medir con escrupulosa prolixidad la distancia desde el punto de estacion al centro, igualmente que el ángulo que forma dicha distancia con una visual que va á parar á cada uno de los objetos. Con estas precauciones, la posicion del observador quedará determinada con quanta puntualidad requieren las correcciones de que acabamos de hablar; bien que como los objetos estan por lo regular muy apartados de la distancia del observador al centro, estas últimas operaciones pueden bastar aunque no se hagan con el mayor rigor.

Para calcular los ángulos cuyos vértices estan en uno de los objetos, y sus bases son la distancia del observador al centro, se calculan primero los lados
257. *AC*, *CB*, por el ángulo *ADB* ó *AdB*, qual se ha observado; de donde se infieren los valores de los ángulos *CAD* y *CBD*, por medio de la siguiente analogía (733): el lado *AC* que se acaba de calcular, es al seno del ángulo *ADC* ó *ADF* que se ha procurado observar, como la distancia del observador al centro, es al seno del ángulo en *A* ó *DAC*, que se debe restar ó añadir. Tambien se hará *BC*: sen *BDF*:: *CD* : sen *DBC*, &c.

Reduccion de los triángulos á un mismo plano.

970 Despues de reducidos los ángulos al centro de la estacion, es necesario reducir los triángulos á

á un mismo plano orizontal, en el caso de estar en planos diferentes los objetos observados; porque claro está que los ángulos tomados con visuales dirigidas á objetos puestos en planos diferentes no pueden menos de discrepar de los ángulos que se sacarian si todos los objetos observados estuviesen en un mismo orizonte. Digamos como se hace esta reduccion. Fig.

971 Sean *A*, *B*, *C* v. gr. tres puntos puestos en distintas alturas respecto del orizonte, siendo sus alturas respectivas *AD*, *BF*, *CE*, por manera que 259.
sea *FDE* un plano orizontal. Suponemos tomado ya el ángulo *BAC*; pero como queremos reducir los tres objetos al plano *FDE*, fingimos que *B* está en *F*, *A* en *D* y *C* en *E*, y buscamos el ángulo *FDE*.

En la estacion donde se mida el ángulo *BAC*, se medirán tambien los ángulos *BAD*, *CAD*, que forman las visuales *AB*, *AC* con el plomo en *A*, y se practicará lo dicho (948).

Supongamos ahora que *AB* y *AC*, prolongados si es necesario encuentran el plano orizontal *FDE* en los puntos *G*, *I*; si en los triángulos *ADG*, *ADI* rectángulos en *D*, miramos *AD* como el radio de las tablas serán (725) *DG* y *DI* las tangentes de los ángulos observados *GAD*, *IAD*, y serán *AG*, *AI* sus secantes; luego si tomamos en las tablas las secantes y las tangentes de los ángulos *GAD*, *IAD*, conocerémos 1.° en el triángulo *GAI*, los lados *GA*, y *AI*, y el ángulo observado *IAG*; será pues fácil por lo dicho (738) calcular el lado *GI*; 2.° en el triángulo *GDI* conocerémos los lados *GD*, *DI*, y el lado *GI* calculado antes, y por consiguiente será fácil (736) calcular el ángulo *GDI*.

Lo propio se practicará para reducir el ángulo observado en el punto *B*; y despues que en un trián-

Fig. triángulo esten reducidos dos ángulos, será escusado hacer cálculo alguno para la reduccion del tercer ángulo; porque se le sacará facilmente teniendo presente que los tres juntos no valen sino 180°.

Reducidos por este medio los ángulos, se reducirán facilmente las distancias ó una de ellas, porque basta la reduccion de una en cada triángulo. Y de hecho, si nos figuramos la orizontal *BO*, en el
259. triángulo *BAO*, rectángulo en *O*, conocerémos *BA* por haberla medido, el ángulo recto, y el ángulo *BAO*; se hallará pues facilmente el valor de *BO*, ó *FD* (727).

Aclararémos con un exemplo quanto acabamos de decir. Supongamos que se ha observado el ángulo *BAC* de 62° 37′, el ángulo *BAD* de 88° 5′, y el ángulo *CAD* de 78° 17′.

Busco las secantes y tangentes de los ángulos *BAD*, *CAD*, y hallo los valores siguientes despues de desechar las tres últimas decimales.

Sec. 88° 5′ ó *AG*...... 29, 90
Sec. 78° 17 ó *AI*...... 4, 92
Tang. 88° 5′ ó *DG*...... 29, 88
Tang. 78° 17 ó *DI*...... 4, 82

Calculo en el triángulo *AGI* (738) la semidiferencia de los ángulos *AGI*, *AIG* por esta analogía *AG*+*AI* : *AG*—*AI* : : tang. 58° 41′, semisuma de dichos ángulos, á un quarto término tang. 49° 42′, que será la semidiferencia que busco: sale por lo mismo que el ángulo *AGI* es de 8° 59′, y será (733) *GI* de 27, 98.

Una vez hallado el valor de los tres lados *DG*, *DI*, *GI*, se sacará (736) que el ángulo *GDI* es de 62° 27′.

'Ad-

Advertencias acerca de los triángulos y de las señales. Fig.

972 Ningun práctico que se precia de puntual debe contentarse con medir dos ángulos; siempre que pueda los ha de medir todos tres. Si la suma de los tres ángulos reducidos al centro de las estaciones respectivas discrepa poquísimo de 180° por sobra ó falta, podrá estar seguro el observador de haberlos observado bien, y repartirá por igual el error entre los tres, con tal que no tenga motivo de desconfiar de una operacion mas que de otra. Si la suma de los tres ángulos observados fuese v. gr. 180° o 30″, rebajará 10″ de cada ángulo, antes de calcular los lados, y de hacer la reduccion á un orizonte comun. Matemáticos de mucha práctica aseguran que este error es el máximo que cabe, aun en operaciones hechas con cuidado, quando se hacen con un quadrante de círculo de 42 pies castellanos de radio, y verificado con el mayor escrúpulo. Quando el radio del instrumento es de siete pulgadas no mas, el error puede llegar á 3′, quando el Nuñez dá el minuto; y á 6′ quando el Nuñez da los 2′, &c.

Ya que es imposible precaver todo error en la observacion de los ángulos, conviene procurar que este error altere lo menos que se pueda la determinacion de los lados, objeto principal de estas operaciones. Todo está, pues, en averiguar de que cantidad han de ser los ángulos, á fin de que el error que pueda introducirse en su medicion estorbe tan poco como quepa la puntual determinacion de los lados. A la verdad las circunstancias locales permiten rara vez formar los triángulos como seria menester; sin embargo no han dexado de sacarse sobre este punto reglas generales que trasladarémos aquí.

973 Sabemos que en un triángulo rectilineo no bas-

Fig. basta medir los ángulos para determinar los lados (694), siendo preciso conocer en cada triángulo un lado, bien midiéndole inmediatamente, bien sacándole por Trigonometría con el auxilio de otros triángulos, en el primero de los quales es preciso haber medido inmediatamente una basa. Por consiguiente la operacion fundamental es la eleccion de la basa, lo que incluye dos puntos, su longitud y su direccion.

En quanto al primer punto dan los prácticos la siguiente

Regla general. *La circunstancia mas aventajada de un triángulo, quando se ha de determinar solo un lado, es que la basa sea igual al lado por determinar*; esta es circunstancia esencial. En quanto á los ángulos de la basa conviene no sean demasiado pequeños.

974 Luego, ya que por la regla general la basa ha de ser igual al lado que se busca, *la circunstancia mas aventajada de un triángulo, quando se han de determinar dos lados, es que sea equilátero.*

Quando la basa no pueda ser igual al lado ó á los lados por determinar, la circunstancia mas aventajada del triángulo es que la basa sea tan larga como pueda, y que los ángulos de la basa sean iguales.

La regla fundamental es que la basa sea igual á los lados buscados; cuya regla nunca debe quebrantarse. Pero en los casos donde sea forzoso, podrán minorarse los errores que se originen con hacer isósceles el triángulo.

975 Sobre las señales hay poco que decir. Son necesarias en muchos casos, porque no siempre se encuentran objetos altos y distintos á los quales se pueda dirigir con los instrumentos la puntería para formar triángulos de las circunstancias expresadas. Estas señales suelen ser chozas quadradas ó redondas de competente diámetro y altura, hechas de ramas de árboles, metidas lo bastante en tierra, inclinadas unas á otras cerca de la cumbre, y aseguradas con otras ramas puestas al traves, aseguradas con sogas, clavos y vestidas de hojas. Se plantan estas señales en lo mas alto de las eminencias, ascuetas por todos lados, mediante lo qual se ven desde muy lexos aun con anteojos de corto alcance. Si no se pueden plantar ascuetas, será necesario que esten á menor distancia, cubrirlas con una sábana, ó con tela de cáñamo dada de cal. En lugar de chozas se encienden hogueras; una hoguera de 3 pies franceses de ancho se veía á 36 millas de distancia.

Modo de levantar planes, mapas topográficos, y mapas geográficos de corta extension.

976 Llámase *plan* de un terreno, de una Ciudad &c. un dibujo donde estan trazadas las lineas que representan los contornos de dicho terreno, y de sus principales partes, de modo que las tales lineas juntas formen una figura de todo punto parecida á la del terreno ó Ciudad considerada sobre un plano orizontal, prescindiendo de las eminencias. Figurémonos un campanario arrasado á nivel del suelo; la figura que formarán las lineas exteriores é interiores de sus paredes vistas sobre la superficie plana del suelo, es lo que se llama plan ó planta del campanario. Quando se levanta el plan de un edificio solo, se puede señalar el grueso de las paredes con dos lineas; pero quando el plan ha de representar un espacio mas dilatado, no es posible por lo comun trazar el perímetro de los edificios sino con sola una linea.

Mapa *Topográfico* es el que pone á la vista todas las particularidades del terreno dibujado, v. gr. las Iglesias, las casas ó manzanas, los molinos, parques, Fig. ques, jardines, ambas orillas de los rios, canales, torrentes, aqüeductos, caminos reales ú veredas &c. Un *mapa geográfico* señala solamente la situacion de las Ciudades, Villas, bosques, montañas y el curso de los rios. Aquí solo hablarémos de los mapas de Paises de corta extension, para los quales basta la Trigonometría plana sin necesidad de la esférica.

977 Hemos visto (960) como con la plancheta se traza el quadrilátero *abcd*, de todo punto pare-
255. cido al quadrilátero *ABDC* del terreno; ó, lo que viene á ser lo mismo, como se señala la situacion de dos objetos *C* y *D*, respecto de las dos estaciones *A* y *B*. Por el mismo método se señala la posicion de un número qualquiera de objetos visibles desde las estaciones *A* y *B* por medio de lineas tiradas desde los puntos *a* y *b* en la direccion de cada objeto, conforme se ha hecho con las lineas *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, cuyas lineas suelen señalarse con lapiz, y se borran con miga de pan, despues de señalados con tinta los puntos *C*, *D*, &c. Tambien se borra la basa, así que queda señalada la posicion de todos los objetos que el plan ha de representar.

Si ademas de esto se quiere representar en el plan el contorno de una tierra, una huerta, &c. se señalarán con tinta las lineas del perímetro tiradas succesivamente desde un ángulo á otro, como *AB*, *BD*, *CD*, *AC*, en el supuesto de ser *ABCD* el contorno de la tierra, huerta, &c. Por lo que mira á los objetos que desde los puntos *A* y *B* no se ven sino en ángulos muy desiguales (974), bueno será que el práctico se traslade para determinar sus posiciones por observacion á los extremos del uno de los lados, v. gr. de *AC*, ó *CD* ó *BD* &c. determinándolos primero desde las estaciones *A* y *B*, y dando la preferencia á aquel de los tres lados que dé ángulos menos desiguales. Desde este lado preferido, que se puede considerar como otra basa, se practicará lo mismo que en la primera *AB*, y se pasará á este tenor de una basa á otra, hasta que esté señalada en el mapa la posicion de todos los objetos que se quiere.

978 Lo primero es señalar al pie del plan una escala correspondiente al tamaño que se le quiere dar; en cuya escala se tomará el largo de la basa medida por varas en el terreno. Sea esta basa de 1000 varas de largo, y supongamos la escala dividida en pulgadas y lineas; si en la escala se toma un intervalo de 8 pulgadas 4 lineas, ó de 100 lineas para que represente la basa en el papel, un espacio de una linea en el dibujo, corresponderá á 10 varas en el terreno. Se procurará que la basa esté quanto quepa en medio del terreno cuyo mapa se ha de levantar, y de modo que desde sus extremos se puedan ver muchos de los objetos que el plan ha de incluir. Segun sea la situacion de la basa en el terreno, respecto de su perímetro, se trazará del mismo modo en el papel la linea que representará la basa, colocándola bien en medio, bien mas arriba, bien mas abaxo, mas á la derecha ó mas á la izquierda, tomando el largo desta linea, conforme queda dicho en la escala. Hecho esto, las intersecciones de las lineas tiradas con arreglo á los objetos observados, desde dos estaciones diferentes, darán la situacion respectiva de cada objeto en el mapa, el qual estará concluido.

979 Para precaver equivocaciones, se apuntará al extremo de cada linea el nombre del objeto en cuya direccion se tire. Se apuntarán unos pocos puntos de los caminos, por no multiplicar lineas que confundirian el dibujo, dando la preferencia á los puntos extremos, y á los puntos de entremedias que estén en los ángulos mas señalados de los ca-

 mi-

Fig. minos. Si no hubiese allí objetos reparables á que apuntar, se mandarán plantar jalones ú otras señales; y lo mismo digo de los rios. Mas adelante enseñarémos como se pueden dibujar en el plan los caminos de un extremo á otro, los rios con sus recodos y su ancho, los contornos de las Iglesias, casas, &c. determinando por los métodos antecedentes los dos puntos extremos del ancho de una fachada; bien entendido que debe darse la preferencia á la que se pueda observar con mas comodidad desde los dos puntos extremos de la estacion.

980 Si el mapa por levantar fuese el de una ciudad, se colocarán las estaciones en las encrucijadas, y medirá puntualmente con la vara la distancia de una estacion á otra, dado caso que cada distancia no esté determinada en el dibujo por la interseccion de dos lineas tiradas desde dos estaciones diferentes. Conviene empezar por la mayor de todas las plazas, y poner para formar su plan en medio con corta diferencia el punto de estacion. Desde el centro de la alidada se tirará en el papel una linea ácia cada esquina de las calles que desembocan en la plaza; se medirán cuidadosamente con la vara todas las distancias de cada una de estas esquinas al punto del terreno que corresponde á plomo al centro de la alidada; y despues se sacará por la escala la longitud de las lineas del plan correspondiente á las del terreno. Estando así fijados los extremos de estas lineas, se tirarán de unos á otros lineas, dexando en blanco los huecos correspondientes á las bocas calles. Con esto se tendrán bastantes puntos fijos que sirvan para enlazar unas con otras todas las calles, empezando desde la plaza. Seria muy largo especificar todas las maniobras del arte de levantar planes: mas enseñará un dia de práctica, que no una multitud de preceptos.

To-

Todo práctico que observa mucho con la plancheta, particularmente en el campo, adquiere con el tiempo tal tino, que á ojo aprecia los ángulos y las distancias: con tal que tenga á lo mas un semicírculo ó un semicírculo graduado, con una alidada qualquiera para dirigir la visual, medirá los ángulos con diferencia de un grado mas ó menos; y si tuviese práctica de medir las distancias por pasos, podrá dibujar un terreno con tal puntualidad, que el dibujo se arrimará mucho al original.

981 El ancho de los caminos se mide con la vara. Para señalar el de los rios, se puede apuntar á lo acostumbrado desde cada una de las dos estaciones á dos objetos ó señales plantadas una enfrente de otra en cada rivera. Pero el medio mas expedito para trazar los recodos de los caminos y rios, y tambien su ancho, es valerse de la brújula.

982 Es la brújula un instrumento á manera de caxa de cobre, marfil, madera ú otra materia sólida, cuyo diámetro suele ser desde dos hasta seis pulgadas; por su parte interior es de forma circular, donde van señalados dos diámetros que se cortan en ángulos rectos para que señalen con sus extremos los quatro puntos del mundo llamados *puntos cardinales*, y son *Norte*, *Sur*, *Oriente y Poniente*. En el extremo que ha de señalar el norte hay una flor de lis, desde la qual empieza la division del expresado círculo en 360° ácia oriente, ó ácia la derecha, estando en la parte de arriba la flor de lis; tambien se divide el círculo en 720 partes con lo que proporciona apreciar los medios grados. La punta de la aguja ha de enrasar con el borde graduado sin tocarle, á fin de ver con mas distincion á que division corresponde la tal punta.

Para entender esto, que despues se declarará con mas individualidad, conviene considerar que el que

Hh 2 mi-

Fig. mira la brújula estando arriba la flor de lis, está en *la misma situacion que si mirara al* cielo, puesto de cara al norte ó cierzo, el qual siempre tiene el sur ó mediodia á las espaldas, el poniente á mano izquierda, y el oriente ó sol naciente á la derecha.

En el centro del círculo de la brújula hay un exe de cobre ó acero muy puntiagudo, sobre el qual se coloca una aguja de acero tocada á la piedra iman, muy en equilibrio para que pueda dar vueltas con sumo desahogo. Tapa todo lo dicho un cristal redondo, el qual encaja en un rebaxo hecho de intento al rededor del círculo, para precaver que el ayre menee la aguja.

260. Fuera de la caxa hay una pieza *EF* de forma prismática, paralela al diámetro *AB* ó á la linea nortesur, en cuyos extremos hay pínulas omitidas en la figura. El tornillo *V* sirve para afianzar la pieza *EF*, la qual conviene sin embargo que pueda dar vueltas, bien que premiosas, sobre la parte lisa del tornillo, de modo que las pínulas se puedan dirigir á los altos ó baxos, quedando la caxa de la brújula siempre paralela al orizonte, á fin de que el movimiento de la aguja se haga con desahogo y puntualidad.

La construccion y el uso de la brújula va fundada en la propiedad que tiene la piedra iman de dirigir el uno de sus polos ácia el norte, y el sur, cuya propiedad tambien se pega á una barra de hierro si se la pasa por uno de los polos del iman, ó cerca de él. Ademas de la propiedad expresada goza tambien el iman la de atraer el hierro, y esta tambien se la comunica al hierro que toca el uno de sus polos.

Pero aunque la piedra iman dirige el uno de sus polos al norte y el otro al sur, la aguja tocada á la piedra no se encamina puntualmente al norte, ni lo que se desvia de este punto es cantidad invariable

ble aun en un mismo parage. El número de grados Fig.
que la aguja se desvia del norte se llama su *declinacion*; constando de repetidos experimentos y observaciones que varía mucho la declinacion, y que aun en un mismo lugar, es en unos tiempos occidental y en otros oriental.

983 Bien se percibe que para averiguar por medio de la brújula la verdadera situacion de los puntos que se han de señalar en un mapa, es indispensable saber primero la cantidad de su declinacion en el parage donde se hace uso de este instrumento. Esto se averigua indagando en que situacion está la aguja respecto de una linea dirigida de norte á sur, llamada linea meridional, y el ángulo que la aguja forma en el plano orizontal con dicha linea señala su declinacion.

Todo esto presupuesto, sean *K*, *H* dos objetos 261.
cuya distancia angular queremos medir desde el punto *C*. Desde este punto observarémos por las pínulas el uno de los objetos v. gr. *K*. Supongamos que estando en esta disposicion la brújula, la aguja esté en la direccion *CF*. Por ser la direccion *CK* de las pínulas paralela al diámetro *AB* de la brújula, el ángulo que forme la aguja con este diámetro ha de ser igual al ángulo *FCK*. Apuntarémos el valor de este ángulo que señalan las divisiones, y darémos vuelta á la brújula hasta que por sus pínulas veamos el objeto *H*; la aguja se pondrá otra vez en la direccion *CF*, y entónces señalará el ángulo *FCH*. La diferencia de los dos ángulos observados, será el ángulo que buscamos *KCH*.

Es patente que si los dos objetos fuesen *N*, *K*, ó, lo que es lo mismo, estuviesen el uno á la derecha, el otro á la izquierda de la direccion *CF* de la aguja, el ángulo *NCK* seria la suma de los dos ángulos observados *NCF*, *FCK*.

 Sue-

Fig. 984 Suele haber en el grafómetro una brújula la qual sirve para *orientar los objetos*, ó conocer con diferencia de medio grado su situacion respecto de los quatro puntos cardinales, ó respecto de la linea norte sur. Con esta mira se traza la linea norte sur paralela al diámetro del grafómetro; porque como la base comun de todos los triángulos observados es paralela á dicho diámetro, basta mirar que ángulo forma con la aguja tocada al iman, y será facil averiguarlo dirigiendo la linea de *fe* de la alidada paralela á la aguja. Hecho esto, se dibuja en el plan una roseta de los rumbos de viento, donde van señalados los principales con sus nombres, y colocados conforme se han observado en el terreno.

984 Seria la brújula un instrumento sumamente apreciable para levantar planos, porque con ella se levantan con suma facilidad, sea el que fuere el terreno, cubierto de maleza, irregular, &c. si no tuviera algunos defectos de los quales pueden originarse equivocaciones muy sustanciales. 1.° como no se pueden usar agujas muy largas, cogen muy poco espacio los grados de la graduacion del instrumento, y no se pueden medir los ángulos con igual puntualidad que con el grafómetro ó el quadrante de círculo; 2.° como todo plan, despues de formado en borrador en el mismo sitio cuya figura ha de representar, se ha de poner en limpio, sirve ó puede servir en esta segunda operacion la misma brújula ú otra para colocar en el plan las lineas con arreglo á la inclinacion que se echó de ver tenian en el terreno con la linea norte sur. Pero es obra sumamente larga sacar esta copia con la brújula, y por razon de la virtud atractiva de la aguja, es preciso que el que la saca esté quatro ó cinco pies distante de qualquier cosa de hierro, que la mesa donde trabaja no tenga ningun clavo, que no se arrimen mas de medio pie las puntas del compas &c. y si hubiese otra brújula, será indispensable que esté un pie distante por lo menos de la que sirva; 3.° Al tiempo de levantar el plan en el terreno, es importantísimo que el práctico no se acerque á ninguna mina de hierro, sin cuyo cuidado, saldrá forzosamente la aguja de su declinacion natural.

985 No obstante, como pueden ocurrir casos donde el práctico no tenga mas instrumento que la brujula, dirémos como se averigua su declinacion, sin cuyo conocimiento es imposible saber á punto fixo la verdadera situacion de un objeto terrestre respecto de los quatro puntos cardinales. El método que vamos á proponer, bien que no tan riguroso como otro fundado en principios de Astronomía, es bastante para los usos comunes.

Trácese con piquetes ó de otro modo una linea que se dirija al sol quando nace, y desde el mismo punto y en el mismo dia trácese otra linea dirigida al sol quando se pone; formarán estas dos lineas un ángulo que se partirá por medio (333) con una linea; esta linea será la *meridiana*; si se tira una perpendicular á la meridiana, sus extremos señalarán los puntos de oriente y poniente. Las dos lineas que forman el ángulo que la meridiana parte por medio han de ser largas 30 ó 40 estadales cada uno por lo menos.

Despues de trazada la meridiana, que dirige el uno de sus extremos al norte, será fácil averiguar la declinacion de la brujula ó de su aguja. Se colocará el instrumento de modo que la base del uno de los lados de la caxa paralelos á la linea norte sur enrase con la meridiana trazada, en cuya situacion la linea norte sur de la brujula será paralela á la meridiana; estando así el instrumento, se mirará á que grado corresponde la aguja, y restán-

Fig. tándole de 360°, la resta señalará la declinacion de la aguja.

986 Todo esto presupuesto, vamos á enseñar como se dibuja el ancho de un rio. Plantarémos jalones en los puntos D, E, F, G, H &c. donde los recodos son mas reparables; medirémos con la vara las distancias DE, EF, FG, GH, y con la brújula los ángulos que forman unas con otras. Supongamos que la aguja siga succesivamente las direc-
262. ciones DN, EN, FN, GN, HN; claro está que si desde el punto G v. g. observamos el objeto H, resultará el ángulo NGH, y el ángulo NGF si observamos el objeto F; y si en el caso de la figura restamos de 360° la suma de los dos ángulos, la resta será el valor del ángulo FGH.

Por no multiplicar demasiado las estaciones, al tiempo de medir las basas DE, FE &c. mediriamos tambien las distancias perpendiculares á la orilla, si estas distancias discrepan notablemente unas de otras; aquí las figuramos con las lineas ocultas que caen sobre GH, medirémos tambien las distancias de las estaciones G, H &c. á la orilla. Estas distancias nos ahorrarían el trabajo de observar los ángulos, si se trazasen las basas GH, FG, &c. en el plan, ajustadas á la direccion y á las proporciones de tamaño correspondiente. al tiempo de señalar los objetos mirados por las pínulas de la plancheta ó de la brújula.

Los mismos métodos sirven para señalar los contornos irregulares de una tierra, un bosque &c. y los recovecos de los caminos.

Quando se quiera medir con la brújula el ancho de un rio, desde dos estaciones como F, G se observará un objeto ó señal S de la orilla opuesta. Si de los ángulos NGS, NFS restamos los ángulos NGF, NFG, resultarán los ángulos SGF, SFG. Con formar estos sobre la basa FG del plan, sacarémos el punto S.

Si despues de trazada en el plan la una de las Fig. fachadas de un edificio, cerca, manzana de casas, &c. se mide con la vara el largo de los otros lados, y con la brújula los ángulos que forman unos con otros, quedará trazado en el plan el contorno entero.

De todos los instrumentos que hemos dado á conocer para medir ángulos en el terreno, es á saber, el grafómetro, el quadrante de círculo, la plancheta y la brújula, el último no sirve quando se necesita mucha precision; y los dos primeros deben tambien preferirse á la plancheta quando los triángulos son muy grandes, ó hay que levantar el mapa geográfico de una provincia.

987 Una vez medidos los ángulos y las distancias en el terreno, solo falta hacer el dibujo, ó delinear en el papel los objetos con la verdadera situacion y distancia á que están unos de otros, respecto de los quatro puntos cardinales, ó de los quatro vientos, como dicen algunos. Aplicarémos el método con que esto se executa á un caso figurado, previniendo que ⊙ significa estacion; P posicion y D distancia. Por posicion ó situacion entiendo el ángulo que forman en una estacion las visuales que desde ella se dirigen á dos objetos, y llamo distancia los pies, varas, estadales &c. que hay desde una estacion á otra.

Esto presupuesto, supongamos que los ángulos observados, y las distancias medidas al levantar el mapa de un terreno sean las siguientes.

Fig.

⊙1	*P*	70°	50′	*D*	1080	varas	
⊙2	*P*	128	10	*D*	580		
⊙3	*P*	32	15	*D*	605		
⊙4	*P*	287	30	*D*	766		
⊙5	*B*	50	45	*D*	940		
⊙6	*P*	273	55	*D*	1085		
⊙7	*P*	183	25	*D*	700		
⊙8	*P*	133	30	*D*	510	hasta	⊙5
⊙9	*P*	186	30	*D*	390	hasta	⊙2
⊙10	*P*	209	20	*D*	668	que corta la primer dist.	
⊙11	*P*	275	30	*D*	800		
⊙12	*P*	171	50	*D*	784	hasta	⊙1

Esto quiere decir que el ángulo observado en ⊙1 apuntando á ⊙12 y ⊙2 es de 70° 50′, y la distancia desde ⊙1 á ⊙2 de 1080 varas v. g.; que el ángulo observado en ⊙2 apuntando á ⊙1 y ⊙3 es de 128° 10′, y la distancia desde ⊙2 á ⊙3 de 580 varas.

Basta esto para entender todo lo demas, lo que quedará enteramente aclarado con lo que luego dirémos.

Para trazar en un dibujo ó mapa diferentes objetos con situaciones y distancias proporcionadas á las que tienen en el terreno unos respecto de otros, y respecto de los quatro puntos cardinales, se toma un punto al qual todos los demas se refieren, cuyo punto suele ser el norte, y le tiene enfrente de sí
263. todo hombre que está de cara al cierzo. Estando en esta situacion vuelve el mismo hombre las espaldas al sur ó medio dia, tiene el oriente ó sol naciente á mano derecha, y el poniente á la izquierda. La señal del norte es *N*; la del oriente *O*; la del sur *S*; y la de poniente *P*.

Despues se abre la pantómetra, se toma en la linea de las cuerdas la distancia transversal desde 60 á 60, la qual, sea la que fuere, sirve de radio para

ra trazar un círculo *NOSP*; en este círculo se tiran perpendiculares uno á otro, los diámetros *NS*, *OP*, cuyos extremos señalan los quatro puntos cardinales. Como el norte es el punto fundamental de la operacion, desde allí se cuentan los ángulos ó posiciones y se señalan ácia el oriente ó ácia la derecha. Mediante esto, todo ángulo que no llega á 90°, se ha de señalar entre norte y oriente, esto es, en el primer quadrante; los ángulos que pasan de 90° y no llegan á 180 se señalan en el segundo quadrante, esto es, entre *O* y *S*; los ángulos que pasan de 180° y no llegan á 270 se señalan en el tercer quadrante; finalmente, los que pasan de 270° se señalan entre *P* y *N*, esto es, en el quarto quadrante. Fig. 263.

La primer posicion 70° 50′ cae en el primer quadrante; pero como pasa de 60°, se tomará la distancia transversal de la mitad de 70° 50′, y se la llevará dos veces á la circunferencia desde *N* ácia *O*, y el punto donde rematare se señalará con 1.

Como el segundo ángulo 128° 10′ ha de rematar en el segundo quadrante, se señalará su suplemento para 180°, esto es 51° 50′ contando desde *S*. Se tomará, pues, en la linea de las cuerdas la distancia transversal desde 51° 50′, y se llevará á la circunferencia desde *S* ácia *O*; hallado con esto el punto donde rematará el segundo ángulo, se señalará con un 2.

La tercer posicion 32° 15′ se llevará desde *N* á 3; la quarta posicion 287° 30′ ha de rematar en el quarto quadrante; por lo que, se la rebajará de 360,° y la resta se llevará desde *N* ácia *P*, y el punto donde rematare se señalará con un 4.

Esto está diciendo como se han de señalar las demas posiciones en la circunferencia, señalándolas el que trazare el dibujo con los números 5, 6, 7 &c.
y

y arreglándose á los ángulos observados desde las correspondientes estaciones.

Concluido esto, escójase en el papel donde se ha de trazar el dibujo un punto desde el qual principia la delineacion, cuyo punto supongo que sea ⊙ 1. Aplíquese la una de las reglas paralelas al centro *C* del círculo y al punto 1 de la circunferencia; con la otra regla se tirará por el punto ⊙ 1 una paralela á la direccion *C*1, en cuya paralela se señalará la primer distancia 1080 varas. Con esta mira, en una escala de partes iguales se tomarán 1080 de ellas, se llevarán desde ⊙ 1 á ⊙ 2; tirando finalmente una linea desde el uno de estos puntos al otro, esta linea expresará la primer distancia y su verdadera situacion respecto del círculo trazado.

Aplíquese despues la una regla paralela al centro *C* del círculo y al punto de la circunferencia señalado 2, y con la otra regla tírese desde el punto ⊙ 2 la linea ⊙ 2 ⊙ 3 paralela al radio supuesto *C*2; esta linea á la qual se llevarán desde ⊙ 2 á ⊙ 3, 580 partes iguales de la misma escala en la qual se tomaron las 1080; señalará la segunda distancia medida, situada como corresponde respecto de la primera.

Se proseguirá á este tenor de estacion en estacion hasta quedar señalada ⊙ 7 ⊙ 10.

Entónces llévense 314 partes de la escala á la linea ⊙ 7 ⊙ 10 desde ⊙ 7 hasta ⊙ 8, y quedará señalada en ⊙ 8 la octava estacion. Tírese la linea ⊙ 8 y ⊙ 5 paralela al radio figurado *C* 8; y si la operacion antecedente está bien hecha, esta paralela no solo pasará por ⊙ 5, sino que cogerá 510 partes de la escala, así como la distancia que representa coge 510 varas.

Como la estacion ⊙ 9 coincide con la ⊙ 5, tírese la linea ⊙ 9 ⊙ 2, paralela al radio figurado *C* 9; me-

medida esta paralela con la escala de partes iguales, Fig.
tendrá 390 de ellas, tantas, quantas varas hay en la distancia medida en el terreno desde la estacion ⊙ 9.

La décima estacion está en el extremo de la linea 7 ⊙, medida desde la estacion ⊙ 7; por cuyo motivo, se tirará desde ⊙ 10 una paralela al radio supuesto *C* 10, esta paralela concurrirá con la primer distancia medida á la distancia 668 desde el punto 10.

Vuélvase á la estacion 10, en cuyo punto está 263.
la 11^{ma} estacion; tírese la linea ⊙ 11 ⊙ 12, paralela al radio figurado *C* 11, dándole 800 partes de la escala, y quedará señalada en el punto ⊙ 12 la 12^{ma} estacion. Ultimamente, tírese la linea ⊙ 12 ⊙ 1; si la operacion está bien hecha, esta linea no solo será paralela al radio supuesto *C* 12, sino que tambien tendrá 784 partes de la escala, del mismo modo que en el terreno la distancia ⊙ 12 ⊙ 1 tiene 784 varas.

988 Cuestion. *Por un punto accesible* A *tirar una paralela á una recta inaccesible* CD.

Se sacará primero por lo enseñado (959) el valor de *AC*, *AD* y *CAD*, despues se resolverá el triángulo *CAD*, cuya resolucion dará el valor de 255.
CDA. Hecho esto, solo faltará, para tirar la paralela, formar en *A* con la linea *AD* un ángulo igual á *CDA*, por medio de los instrumentos. Plantando últimamente jalones en la direccion que señalen el anteojo ó las pínulas, quedará determinada en el terreno la posicion de la paralela.

989 Cuestion. *Continuar en el terreno una linea mas allá de un obstáculo que estorba ver la direccion de dicha linea.*

Sea *CD* la linea que hemos de continuar en *EF*. Buscarémos un punto *A* desde el qual podamos ver 264.
los

Fig. los objetos C y D, y tambien el terreno donde queremos determinar la posicion de CF. Medirémos inmediatamente CD; y despues de tomados los ángulos del triángulo CDA, calcularémos AC. Medirémos con un instrumento el ángulo CAE, tomando para AE la direccion que mas acomode. Si suponemos CD prolongada hasta E, conocerémos en
264. el triángulo CAE los ángulos y el lado AC, y sacarémos AE. En la direccion AE dada por el instrumento, medirémos inmediatamente una distancia AE igual á la que diere el cálculo, y conocerémos el punto E por el qual pasará la linea CD prolongada. Entonces harémos en E un ángulo AEF igual al suplemento del ángulo conocido AEC, y quedará señalada la direccion EF.

Si la distancia CD fuese inaccesible mediriamos otra basa AB; haciendo con esta basa lo enseñado (959), determinariamos AC y AD, ó sino BC y BD, y con estos datos el ángulo DCA ó el ángulo DCB. Lo demas es lo mismo que se practica para llegar á EF.