

中間固定矩形彈性薄板之動態數學模式發展及控制

計畫編號：NSC 89-2213-E-032-024

執行期限：88 年 8 月 1 日至 89 年 7 月 31 日

計畫主持人：蕭照焜 淡江大學航空太空工程學系

計畫參與人員：王志偉、莊崇立 淡江大學航空太空工程研究所

中文摘要

本研究探討中間固定矩形彈性薄板之狀態空間動態數學模式發展和抑制此彈性結構體振動的控制器設計。本彈性薄板之振動動態特性是以 4 節點、16 自由度的有限元素法，直接在 MATLAB 環境上建立一個四個輸入和四個輸出的狀態空間動態數學模式，並設計一個分散式 H_{∞} 強健控制器來抑制彈性薄板之振動現象。

關鍵詞：彈性薄板、有限元素法、強健控制、模式匹配

1. 緣由與目的

為了解及分析彈性結構體的動態特性與抑制振動的方法，我們可將彈性結構體模式化成一個具有類似動態特性的彈性矩形薄板。本研究將彈性結構體模式化成板面中間固定、垂直地面且懸空的矩形薄板，且在此薄板的四個角落分別置放位移感應器和制動器。並且，在 MATLAB 環境上，利用 4 節點、16 自由度之有限元素法 [1]，建立此彈性矩形薄板的狀態空間動態模式，和設計一強健穩定的 H_{∞} 控制器。

本研究主要包括兩部分，第一部分以有限元素法在 MATLAB 環境下，建立一個多重輸入和多重輸出的長方形彈性薄板之動態特性數學模式。此數學模式是第二部份控制器設計的基準，亦可當作以後控制理論發展的一個測試模式。第二部份為控制器的設計，目的是設計一達到強健穩定效果的分散式 H_{∞} 控制器，以抑制彈性薄板之振動現象。

對了解及控制一含有無限多個阻

尼模態之連續體，如太空彈性結構體等，此彈性薄板之數學模型無論是在動態模式之發展及分析上、控制理論發展及控制器設計上、或是系統測試及驗證上，都提供了一個有系統且方便的研究發展及分析環境。

2. 彈性薄板之數學模式

本研究所分析之彈性薄板測試平台為一中間固定、板面垂直懸空、初始狀態為靜止的矩形彈性薄板。其物理參數為長 47.25in，寬 31.5in，厚 0.0787in(2mm)，密度 0.098 lb/in³，Young's Modulus 1×10^7 lb/in²，Poisson's Ratio 0.345。

建立一個系統的動態數學模式，首先需選擇適當的狀態變數、輸入訊號 (u) 及輸出信號 (y)。為了計算出此研究之彈性薄板系統動態特性的數學模式，我們採用 [1] 中 4 節點、16 自由度之矩形的有限元素法來建立此彈性薄板之動態數學模式。

在此系統中，我們採共點位置 (colocate) 的方式在彈性薄板的四個角落同時分置位移感測器，量測薄板角落的位移，及致動器，控制薄板角落的位移，以達到抑制振動的目的。

有限元素法基本上是將一連續結構體分成有限個元素，各元素特性利用數學模式加以描述並以節點相連。待各元素結合成一整體時，原結構之物理性質即可由各元素結合成整體後的數學模式加以表示，再利用此數學模式可求出此結構體之各種特性，例如，結構體的位移量、應力、共振頻率、質量矩陣、韌度矩陣等，再進一步地，可以求得結構體的系統矩陣。

由 [1] 中的有限元素分析方法，我們將彈性薄板切分成 4×8 個大小相同的基本元素，如圖 1 所示，共由 32 個

元素方格所組成。每一元素方格分別有四個節點，這四個節點分別位於每個元素方格的四個端點，如圖 2 所示，其中 1, 2, 3, 4 為節點編號。在每個節點裡，都考慮四個自由度，即 z 方向的位移量、 y 方向的旋轉量 ($\partial z/\partial x$)、 x 方向的旋轉量 ($\partial z/\partial y$) 及扭曲量 ($\partial^2 z/\partial x\partial y$)，如圖 2 所示，因此，每一元素共有 16 個自由度。單一元素之運動方程式可描述為

$$M_e \ddot{x}_e + K_e x_e = F_e \quad (1)$$

其中， $x_e \in R^{16}$ 代表狀態變數，16 個自由度； M_e 為單一元素的質量矩陣； K_e 為單一元素的韌度矩陣； F_e 表對單一元素的輸入。

由於所有的元素方格大小都一樣，故其 M_e 、 K_e 都相同。在將單一元素的狀態變數定義之後，需將分割彈性薄板的每單一元素組合起來，使其能夠表示彈性薄板的物理特性。最後將所有元素依其實際位置重整後，將重疊的節點的狀態變數疊加，即可得整個彈性薄板的運動方程式

$$M\ddot{\eta} + K\eta = F_p \quad (2)$$

其中， η 為整個薄板的所有元素之狀態變數； M 為薄板的質量矩陣； K 為薄板的韌度矩陣； F_p 為外界對薄板的輸入。

因為只在四個角落裝置致動器，故 F_p 可以 $B_c u$ 表示，又感應器及致動器的置放位置相同 (collocated)，所以，彈性薄板之輸出為 $B_c^T \eta$ ，所以，為了設計上的方便，將 (2) 之運動方程式以狀態空間形式表示如下：

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \quad (3)$$

$$y_p = C_p x_p$$

其中，

$$x_p = \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix}, \quad A_p = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_c \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} B_c^T & 0 \end{bmatrix}$$

由於利用有限元素，我們只能求出薄板系統的質量矩陣及韌度矩陣，

為了使系統更接近實際物理特性及簡化控制器的設計，我們假設每一個定義的自由度都存在著 2% 的阻尼量。

由有限元素法所得之彈性薄板系統，為一個非常高階的動態系統，若是直接以此高階的系統來設計控制器以抑制彈性系統之振動並不實際，我們將高階的彈性薄板系統之動態模式做適度的降階，以設計一個較實際的控制器。所以我們將以較低階的彈性薄板系統作為受控體，進行控制器設計。並且，在降階過程所消去的系統的特性，將視為系統乘積性的不確定因素 (multiplicative uncertainty)，融入控制器的設計。

令 $P(s)$ 、 $P_0(s)$ 分別為彈性薄板原本高階之系統的轉移函數矩陣和降階之後之系統的轉移函數矩陣。這兩個轉移函數矩陣之間的關係可表示成，

$$P(s) = (I + \Delta(s))P_0(s) \quad (4)$$

$\Delta(s)$ 即視為原系統 $P(s)$ 的乘積性不確定因素。在本研究中我們以 8 階的系統保留低頻震動模式，將高頻震動模式視為系統之不確定因素進行研究。

3. 強健穩定控制器之設計

本研究之目的是抑制彈性薄板受外力後所產生的振動現象，也就是說我們希望迴授系統的阻尼量提高。強健控制設計的系統方塊圖，如圖 3 所示。強健控制設計的目的是要設計一個控制器 $K(s)$ ，來抑制彈性薄板之震動。其中 $W_y(s)$ 、 $W_e(s)$ 及 $W_d(s)$ 為滿足使系統性能及強健特性之權函數。

分散式控制是設計一個分散式控制器 $K_d(s)$ ，以達到強健穩定之效用。因此我們的控制器結構為

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{d1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{d2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{d3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{d4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = K_d(s)e \quad (5)$$

其中 K_{d1} 、 K_{d2} 、 K_{d3} 、 K_{d4} 皆為單輸入單輸出的強健控制器。因此我們的控制問題為設計一個分散式控制器 $u = K_d(s)e$ ，使得

$$\|T(K_d)\|_\infty < \gamma \quad (6)$$

其中 $T(K_d)$ 為從干擾輸入 d 至性能輸出 z ， $(z=[Z_e, Z_y]^T)$ ，的閉迴路系統之轉移函數而 γ 為設計者事先選定之正實數。

現在我們以狀態空間來描述系統，首先我們將系統表示成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 d + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} d + D_{12} u \\ e &= C_2 x + D_{21} d + D_{22} u \end{aligned} \quad (7)$$

同時我們做如下的假設：

(i). (A, B_2) 為 stabilizable 且 (A, C_2) 為 detectable

(ii). $D_{11}=0, D_{22}=0$

(iii). D_{12} 為 full column rank, D_{21} 為 full row rank

(iv). $\begin{bmatrix} j\omega I - A & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ full column rank

for all $\omega \in \Re$

(v). $\begin{bmatrix} j\omega I - A & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ full row rank for

all $\omega \in \Re$

(vi). 在分散式控制器結構下系統不含不穩定的 decentralized fixed eigenvalue。

分散式 H_∞ 強健控制問題為設計一個分散式控制器 $K_d(s)$ 以滿足(6)。我們所提供的設計方法的第一步驟包含標準的 H_∞ 控制器設計，即先設計一個集中式控制器 $u=K(s)e$ ，如圖 4 所示，且滿足

$$\|T(K(s))\|_\infty < \gamma \quad (8)$$

同時我們知道滿足(8)之所有控制器可以一個穩定的轉移函數 $M(s)$ 結合一個的參數 $Q(s)$ 來規範，如圖 5 所示，其中 $Q(s)$ 為一個穩定的轉移函數且滿足

$$\|Q(s)\|_\infty < \gamma \quad (9)$$

我們以定理一來說明描述所有控制器的穩定轉移函數 $M(s)$ 之特性

定理一：對一個事先選定的 $\gamma > 0$ 若系統(7)

滿足上述之假設(i)到(v)，且

$$H_\gamma \in \text{dom}(\text{Ric}), \quad X_\infty = \text{Ric}(H_\gamma) \geq 0,$$

$$J_\gamma \in \text{dom}(\text{Ric}), \quad Y_\infty = \text{Ric}(J_\gamma) \geq 0,$$
 則

此時描述所有 H_∞ 控制器， $K(s)$ ，的穩定轉移函數 $M(s)$ 之狀態空間描述為

$$M(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} A_{pp} - \tilde{B}_2 F - L \tilde{C}_2 & L & \tilde{B}_2 S_u^{-1} \\ -F & 0 & S_u^{-1} \\ -S_y \tilde{C}_2 & S_y & 0 \end{array} \right] \quad (10)$$

其中

$$A_{pp} = A + \gamma^{-2} \hat{B}_1 \hat{B}_1^T X_\infty - B_2 F + \tilde{B}_2 F$$

$$F = -S_u^{-1} F_\infty, \quad L = -Z_\infty L_\infty S_y$$

$$\tilde{B}_2 = Z_\infty (\hat{B}_2 + Y_\infty \hat{C}_1^T \hat{D}_{12}) S_u$$

$$\tilde{C}_2 = S_y^{-1} (\hat{C}_2 + \hat{D}_{21} \hat{B}_1^T X_\infty)$$

$$Z_\infty = (I - Y_\infty X_\infty)^{-1},$$

$$F_\infty = -(\hat{B}_2^T X_\infty + \hat{D}_{12}^T \hat{C}_1)$$

$$L_\infty = -(Y_\infty \hat{C}_2^T + \hat{B}_1 \hat{D}_{21}^T)$$

$$\tilde{B}_1 = \hat{B}_1 (I - \hat{D}_{21}^T \hat{D}_{21})$$

$$\tilde{C}_1 = (I - \hat{D}_{12} \hat{D}_{12}^T) \hat{C}_1$$

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A - \hat{B}_2 \hat{D}_{12}^T \hat{C}_1 & \gamma^{-2} \hat{B}_1 \hat{B}_1^T - \hat{B}_2 \hat{B}_2^T \\ -\hat{C}_1^T \hat{C}_1 & -(A - \hat{B}_2 \hat{D}_{12}^T \hat{C}_1)^T \end{bmatrix}$$

$$J_\gamma = \begin{bmatrix} (A - \hat{B}_1 \hat{D}_{21}^T \hat{C}_2)^T & \gamma^{-2} \hat{C}_1^T \hat{C}_1 - \hat{C}_2^T \hat{C}_2 \\ -\hat{B}_1 \hat{B}_1^T & -(A - \hat{B}_1 \hat{D}_{21}^T \hat{C}_2) \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_1 = B_1 U_d^T, \quad \hat{B}_2 = B_2 S_u^{-1}, \quad \hat{C}_1 = U_z C_1, \quad \hat{C}_2 = S_y C_2$$

$$\hat{D}_{12} = U_z D_{12} S_u^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_{21} = S_y D_{21} U_d^T = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

分散式控制器設計的第二步驟，我們設法尋找一個穩定的參數 $Q(s)=Q_d(s)$ 使得

$K(s)=M(Q_d(s))=K_d(s)$ ，以達到分散式控制器

之目的。在這裡我們同時將此分散式控制器限制為 generalized-observer 之結構。即

$K_{di}(s)$ 之結構為

$$K_{d_i}(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_p - \tilde{B}_2 \hat{F} - \tilde{L}_i \tilde{C}_2 & \tilde{L}_i \\ \hline -\tilde{F}_i & 0 \end{array} \right] \quad (11)$$

其中 \tilde{F}_i 為分散式迴授增益 (decentralized feedback gain), 而 \tilde{L}_i 為分散式觀測增益 (decentralized observer gain), 此外

$$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} & \tilde{B}_{23} & \tilde{B}_{24} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{21} \\ \tilde{C}_{22} \\ \tilde{C}_{23} \\ \tilde{C}_{24} \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \end{bmatrix}$$

我們以定理二來說明達成分散式控制器 $K_d(s)$ 結構的相對之參數 $Q_d(s)$ 的特性。

定理二：對一個事先選定的 $\gamma > 0$, 如果

$$H_\gamma \in \text{dom}(\text{Ric}), \quad X_\infty = \text{Ric}(H_\gamma) \geq 0 \text{ 且}$$

$$J_\gamma \in \text{dom}(\text{Ric}), \quad Y_\infty = \text{Ric}(J_\gamma) \geq 0, \text{ 則我}$$

們有如下的結果

(1) $K_d(s) = M(Q_d(s))$ 其參數化 $Q_d(s)$ 為

$$Q_d(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_F & \tilde{B}_2 \bar{F} \\ \hline 0 & \bar{A}_L \end{array} \middle| \begin{array}{c} LS_y^{-1} \\ (\hat{L} - \bar{L})S_y^{-1} \\ \hline 0 \end{array} \right] \quad (12)$$

(2) 若 \bar{F} 和 \bar{L} 滿足 $\|Q_d(s)\|_\infty < \gamma$, 則

$$K_d(s) \text{ 為一個滿足 } \|T(K_d(s))\|_\infty < \gamma$$

之分散式控制器。

其中

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{F}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{F}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{F}_4 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} L \\ L \\ L \\ L \end{bmatrix}, \quad \bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{L}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{L}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{L}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{L}_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_F = A_p - \tilde{B}_2 \hat{F} \quad \bar{A}_L = \bar{A} - \bar{L} \bar{C}_2$$

$$\bar{A} = [\bar{A}_1 \quad \bar{A}_2]$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A_p - (\tilde{B}_{22} \bar{F}_2 + \tilde{B}_{23} \bar{F}_3 + \tilde{B}_{24} \bar{F}_4) & \tilde{B}_{22} \bar{F}_2 \\ \tilde{B}_{21} \bar{F}_1 & A_p - (\tilde{B}_{21} \bar{F}_1 + \tilde{B}_{23} \bar{F}_3 + \tilde{B}_{24} \bar{F}_4) \\ \tilde{B}_{21} \bar{F}_1 & \tilde{B}_{22} \bar{F}_2 \\ \tilde{B}_{21} \bar{F}_1 & \tilde{B}_{22} \bar{F}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{23} \bar{F}_3 & \tilde{B}_{24} \bar{F}_4 \\ \tilde{B}_{23} \bar{F}_3 & \tilde{B}_{24} \bar{F}_4 \\ A_p - (\tilde{B}_{21} \bar{F}_1 + \tilde{B}_{22} \bar{F}_2 + \tilde{B}_{24} \bar{F}_4) & \tilde{B}_{24} \bar{F}_4 \\ \tilde{B}_{23} \bar{F}_3 & A_p - (\tilde{B}_{21} \bar{F}_1 + \tilde{B}_{22} \bar{F}_2 + \tilde{B}_{23} \bar{F}_3) \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{24} \end{bmatrix}$$

所以我們將分散式控制器的設計問題轉

為求解分散式迴授增益 $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4)$, 及

分散式觀測增益 $(\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3, \bar{L}_4)$ 以滿足

$$\|Q_d(s)\|_\infty < \gamma.$$

為了簡化問題, 我們選擇 $\bar{F}_i = F_i$, 如此則 $Q_d(s)$ 可簡化成

$$Q_d(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_L & (\hat{L} - \bar{L})S_y^{-1} \\ \hline S_u \bar{F} & 0 \end{array} \right] \quad (13)$$

也就是說我們只求解分散式觀測增益

$(\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3, \bar{L}_4)$ 以滿足 $\|Q_d(s)\|_\infty < \gamma$ 。此問題

仍為 non-convex, 無法直接解析求解, 必須以數值方法來求解, 可能之選擇包括

iterative Lyapunov equation approach [2],

iterative Riccati equation approach [3],

LMI approach [5], 及 sequential design

approach [5]. 其中 [2], [3] 及 [4] 皆因設計問題之系統階數過高面臨運算誤差及收斂之挑

戰, 而 sequential design approach, 則較容易克服這些困難。

4. 模擬與分析

利用 MATLAB 與 Simulink 功能，將開回路系統與迴授系統做比較。假設薄板僅在時間一開使的 1 秒內，在第一個節點施 1 磅的干擾輸入。開回路系統，在受有外力干擾時，其反應如圖 6 所示。而圖 7 為迴授系統在受干擾之後之反應。系統之阻尼由 2% 提高到 23.4%。由結果上可看出所設計的強健控制器有效的抑制了彈性薄板受外力干擾後的振動現象。

5. 結論

本研究藉 4 節點、16 自由度的矩形元素之有限元素法，直接在 MATLAB 環境上建立中間固定矩形彈性薄板之狀態空間動態數學模式，同時設計一個分散式 H_∞ 強健控制器成功的抑制彈性薄板受外力干擾後之振動現象。

參考文獻

1. Yang, T. Y., *Finite Element Structural Analysis*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1986.
2. J.-K. Shiau, G.N. Taranto, and J.H. Chow, "A Decentralized Control Design Method for Model-Matching Robustness Problems", *Int. J. Control*, Vol. 68, No. 2, pp. 401-416. 1997.
3. R.A. Date, and J.H. Chow, "A Parametrization Approach to Optimal H_2 and H_∞ Decentralized Control Problems", *Automatica*, **29**, 457-463, 1993.
4. J.-K. Shiau and J. H. Chow, "Structurally Constrained H_∞ Suboptimal Control Design Using an Iterative Linear Matrix Inequality Algorithm Based on a Dual Design Formulation", *Tamkang Journal of Science and Engineering*, Vol. 1, No. 2, pp. 133-143, 1998
5. 王志偉, *Decentralized Control of a*

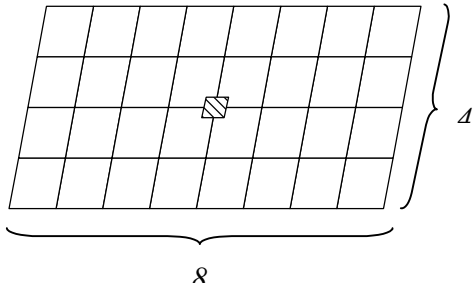


圖 1 4×8之彈性薄板切割

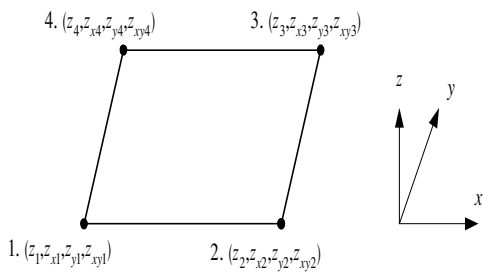


圖2. 單一元素之狀態變數

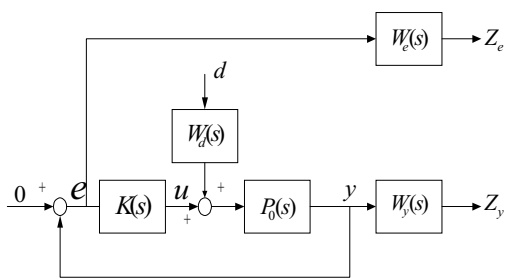


圖 3 系統控制器示意圖

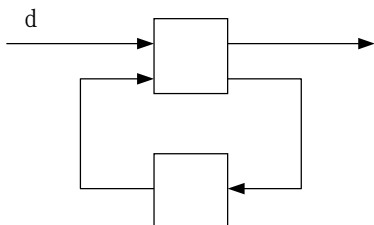


圖 4. 標準 H_∞ 控制問題

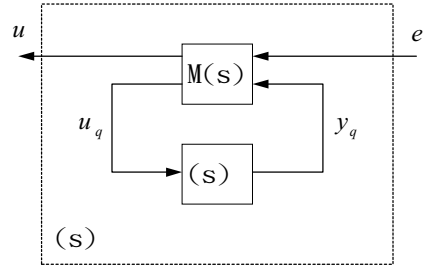


圖 5. 控制器參數化

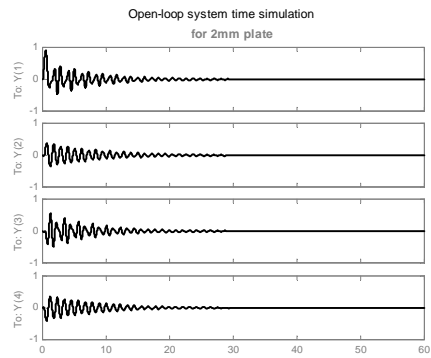


圖 6. 開迴路系統反應

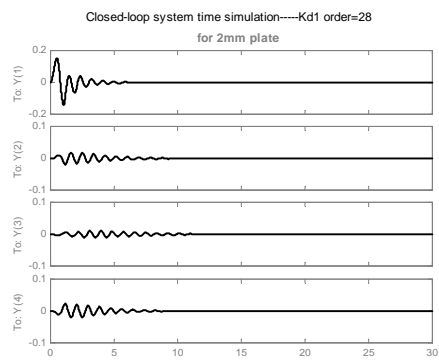


圖 7. 閉迴路系統反應