

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

直昇機複材葉片耦合系統動態響應分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC92-2212-E-032-008-

執行期間：92年08月01日至93年07月31日

執行單位：淡江大學航空太空工程學系(所)

計畫主持人：王怡仁

計畫參與人員：蔡曜昌，張穎巽

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 10 月 1 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

直昇機複材葉片耦合系統動態響應分析

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 92-2212-E-032-008

執行期間：92年8月1日至93年7月31日

計畫主持人：王怡仁

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：淡江大學航太工程學系

中 華 民 國 93 年 10 月 1 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

直昇機複材葉片耦合系統動態響應分析

計畫編號： NSC 92-2212-E-032-008

執行期限： 92 年 8 月 1 日至 93 年 7 月 31 日

主持人： 王怡仁 淡江大學航太工程學系

計畫參與人員：蔡曜昌，張穎巽 淡江大學航太工程學系

一、中文摘要

本文將分析複材葉片在直昇機非穩態氣體彈性系統中扮演的角色。本研究第一部份為求出線性複材葉片的振動模態解析解，並對於各種不同的結構系統做一模態分析，以瞭解各種不同複材疊層組合的特性。第二部份則為非線性複材葉片耦合系統的動態響應分析，其中將建立尾流之誘導流、動態失速及非線性複材葉片各項要素之動態耦合模式，允許直昇機在懸停時，主懸翼複材葉片在各個轉距角及展弦位置的升力負載響應。並經由考慮誘導流之複材葉片系統與無誘導流之系統的動態響應結果相互比對，以進一步瞭解複合材料及誘導流這兩個物理量對於主旋翼非穩態系統的影響。

關鍵字：直昇機、複材葉片、動態失速、誘導流、氣彈力學

Abstract

In this research, the rotating composite blade behavior will be analyzed by the mode shapes, and the wake induced flow effects will be studied by the aeroelastic system's dynamic response. The coupled system includes the wake induced flow, linear part of ONERA dynamic stall model and non-autonomous nonlinear composite rotor blade flap-lag-torsion model. The mode shape of a composite blade will be solved analytically. The Jordan canonical form and matrix skills are used for obtaining composite blades mode shapes. The Galerkin's method is employed for numerical approach of the dynamic response. The results discover that the bending-torsion stiffness for a composite blade dominates the utilizable property for a rotating blade. The wake induced flow effects play an important role in higher pitch angles in hover, even for a composite rotor.

Keywords: Helicopter, Composite Blade, Dynamic Stall, Induced flow, Aeroelasticity.

二、緣由與目的

隨著時代的進步，直昇機主旋翼的葉片皆以複合材料為主；相對於等向性材料而言，複合材料，尤其是非線性複合材料，表現在直昇機主旋翼的非

穩態氣體彈性力學耦合系統，卻鮮少有人研究。準此，本文將針對複材葉片在直昇機非穩態氣體彈性系統中扮演的角色分析之。

由於直昇機主旋翼系統包含了細長（彈性）葉片在各方位之振動及其尾流和空氣動力相互間的影響，因此若要對此系統有較具實際上的模擬，似乎得考慮尾流、葉片上之空氣動力（包含非線性的動態失速現象）及彈性葉片之振動三者的耦合。

首先就一般空氣動力流場之尾流場的預估而言，大致分為實驗量測 [1,2]及數值模擬 [3,4]兩種，另外有關尾流及葉片振動的研究及該模式之建立可從 Ormiston 及 Peters 等人的論文中窺知 [5,6]。當時的學者多假設一剛性葉片與一簡單的尾流模式耦合而探討尾流對葉片振動（拍撲振動）之影響。接著有從事結構動力的研究人員致力於非線性彈性葉片運動方程式之推導如 Hodges 等人 [7,8]，希望能對旋翼葉片有更真實的模擬。然都屬於 moderate deflection type beam theory, [9]。

此外，空氣動力流場中還有一個重要的物理量，就是動態失速的因素，由於動態失速是一個非線性的現象，早期大多以實驗觀測模擬之。在 1980 左右，正是研究的極盛時期 [10,11]，然而其中不乏艱深數學推導及計算極為耗時之模式 [10]，不適用於本研究最終考慮之特徵值分析。而法國 ONERA 發展一套半經驗半解析的數學模式 [11]，經過評估之後 [12,13] 已超越現在的大部分理論方程式。因此廣為被研究動態失速的人採用 [12,13]。由於這些耦合現象的高度非線性，其完整的理論預估值，直至 1990 年代末期才有初步的結果 [12,13]。這一系列的研究雖然注重了空氣動力環境的模擬，卻無法完全滿足葉片結構的變化；其結構行為的描述太過簡化，且無法允許往後複合材料葉片後續之研究，因此這些模式的建立，其應用有限。

許多從事結構的學者也領悟了葉片運動的重要性，因此在 1992 年以後開始推導或建立各種非線性或是複材的旋翼葉片運動方程式。這其中較具代表性的大概是 Hodges [8,14]，Pai [15~17] 及 DeSilva [8,18]。然而 DeSilva 的模式並未與任何尾流效應耦合。Hodges 在非線性旋翼葉片的理論模式是一位具有一定的影響力的學者，許多研究人員

皆使用其結構模式。在最近與 Peters 的文獻中也利用動態尾流理論結合其最新之複材非線性結構運動方程而減低了大部分的擺振阻尼誤差 [19]。可惜他們並未考慮動態失速的效應。Pai 等人是另一派解析結構力學的研究學者。他們的高非線性複材結構葉片方程式已證實具有模擬高應變量或位移的準確性 [17]。這其中葉片的運動方程由剛體葉片、彈性葉片、非線性葉片到完全非線性葉片對於葉片結構本身各自由度在各截面 (cross section) 變形量的模擬的基本假設將會影響整個方程式的描述。筆者不敢斷論何者為正確，然而在筆者以往的分析比較 Pai 及 Hodges 的結構方程式，相信 Pai 的結構模式或許是一個較為保守的選擇。

基於上述之回顧，本研究所考慮的耦合系統在葉片結構方面包含一組可允許在擺振、拍撲及扭轉三個自由度上有大的變形量，且可有多層重疊之複合材料矩形葉片。在空氣動力方面則將利用非穩態翼剖面理論 (unsteady airfoil theory) 及葉片元素理論推導出葉片上的升力函數，並加入 ONERA 的動態失速方程式。而至於誘導流的影響則將由動量理論及葉片元素理論模擬之。

三、複材葉片結構動力方程的推導

本研究使用 Pai 的非線性複材葉片理論做為結構動力方程的理論依據，詳參考文獻 [15,16]。簡要而言該方程式是使用牛頓法推導而出，而基於細長葉片之彎曲及變形的程度，相較於 Hodges 之固定 x-y-z 座標，其結果是一組極為複雜之高非線性方程組，其中包含 4 個未知量 (3 個位移，1 個旋轉)，雖然數值法可解得其近似解，但本研究並非單純解此結構方程，而是要建立一套解析的氣彈耦合模式。首先得將原始之方程式以泰勒級數展開並保留至三階非線性項，以利於將該方程式表成多項式的形式。而由於本研究之尾流方程為無因次化之運動方程，因此我們也必須將原先的非線性葉片方程式無因次化；此外一般直昇機旋翼葉片由於不考慮徑向 (radial) 的振動，因此都假設是一個 inextensional 葉片；如此則簡化為 3 個運動方程及三個未知量 (弦向(chordwise)，撲拍向 (flapping) 及扭曲方向 (torsion))。而由於 Peters 及 Hodges 的座標設定與 Pai 之座標相差 90 度的旋轉角(圖一、二)，因此我們仍得將無因次化之三非線性偏微方程式轉換到與 Peters (或 Hodges) 相同之座標，以利於和空氣動力座標相耦合。經由圖一得知由於 Pai 之方程式中的 u 、 r 與本文所用座標相同，因此只需將 v 轉換為 $-w$ ； w 轉換為 v ，並依照如下整理方式將 Pai 座標轉換成 Peters 座標， $j_2 \rightarrow j_3$ ， $j_3 \rightarrow j_2$ ， $\mu_2 \rightarrow \mu_3$ ， $\mu_3 \rightarrow \mu_2$ ， $D_{22} \rightarrow D_{33}$ ， $D_{33} \rightarrow D_{22}$ ， $D_{12} \rightarrow -D_{13}$ ， $D_{13} \rightarrow D_{12}$ ， $D_{23} \rightarrow -D_{32}$ 。而無因次化後的複材結構方程經轉

換後可得 v 、 w 、 r 的非線性運動方程式 (non-autonomous nonlinear equation) 如下：

$$\ddot{v} + \mu_3 \dot{v} + D_{33} v'''' - j_3 \dot{v}''' - v + v'' \int_1^x x dx + v' \left(\int_1^x x dx \right)' = \gamma L_v \quad (1)$$

$$\ddot{w} + \mu_1 \dot{w} + D_{22} w'''' - D_{12} r'''' - j_3 \dot{w}''' + (j_3 - j_2 - j_1) \dot{r}' - (j_3 - j_1) w'' + w'' \int_1^x x dx + w' \left(\int_1^x x dx \right)' = \gamma L_w \quad (2)$$

$$j_1 \ddot{r} + \mu_2 \dot{r} - D_{11} r'' + D_{12} w'' + (j_3 - j_2 - j_1) \dot{w}' + (j_3 - j_2) r = L_r \quad (3)$$

其中， $\dot{v} = dv/dt$ ， $v' = dv/dx$ ，以此類推。此外， v 乃是 lead-lag 之位移， w 為 flapping 之位移， r 為 torsion 之旋轉，而 Ω 為旋翼旋轉之角速度。就一平板葉片而言， $j_1 = j_2 + j_3 = \frac{h^2}{12L^2} + \frac{c^2}{12L^2}$ ， L 為葉片長度 (length)， h 為葉片厚度 (thickness)， c 為葉片寬度 (chord-wise length)。而 D_{11} 、 D_{22} 、 D_{33} 及 D_{12} 則分別代表 torsion， w (flapping) 方向之 bending 的剛性 (stiffness)， v (lead-lag) 方向之 bending 的剛性以及 flapping-twisting 互相耦合的剛性值。 m = 單位長度質量 = M/L ， $\bar{t} = \Omega t$ ， $x = s/L$ ， $\bar{v} = v/L$ ， $\bar{w} = w/L$ ， $\bar{D}_{xx} = D_{xx}/m\Omega^2 L^4$ ， $\bar{\mu}_{1,3} = \mu_{1,3}/m\Omega$ ， $\bar{\mu}_2 = \mu_2/m\Omega^2$ ， $\bar{j}_x = j_x/mL^2$ ，而 v - 及 w - 等二個力方程式皆以 $m\Omega^2 L$ 正向化 (normalized)，而 r - 力矩方程式則以 $m\Omega^2 L^2$ 無因次化。為了便於慣用符號的辨識，式(2.2)~(2.4)皆將無因次化後的 upper-script “-” 省略；此外，吾人定義 $\gamma = \text{lock number} = (\rho L^2)/m$ ，而 ρ 為大氣密度。

四、葉片上空氣動力表示式之推導

四.1 葉片上的空氣動力表示式之推導

就一個完整的旋翼氣體彈性力學系統而言，應該包含了結構動力、尾流動力與空氣動力之間耦合的系統；對於本模式而言由於是一振動的葉片，因此相對之運動應以葉片為參考座標，詳圖三。

現將空氣動力的理論表示如下，由圖三得知， U 是翼剖面相對於流場之速度，而在 v 及 w 方向及第 q 片葉片之升力可表成如下：

$$L_{vi} = -[U_p \Gamma + U_T \Gamma_d + L_o \sin \theta]_i \quad (4)$$

$$L_{wi} = \{[U_T \Gamma - U_p \Gamma_d] + L_o \cos \theta\}_i \quad (5)$$

$$M_{\phi i} \text{ (or } L_{yi}) = [2bU\Gamma_m + M_o]_i \quad (6)$$

其中， L_o 為非環流升力 (non-circulatory lift)， M_o 為非環流力矩 (non-circulatory moment)，足標 i 代表葉片上分割的元素。我們將 U 分為 U_p 與 U_T 兩分量，則 $U = \sqrt{U_p^2 + U_T^2}$ ， $\phi = \tan^{-1} U_p / U_T$ ， $\alpha = \theta - \phi$ ，此外， Γ 、 Γ_d 及 Γ_m 分別代表 ONERA

動態失速方程式的升力、阻力及扭力矩的影響，其細節將於下一節中討論。

在式(4~6)中；

$$U_p = \dot{w} + \mu \cos(\psi + \frac{v}{r}) \sin(w') - (\mu \tan \alpha_s + v_i) \cos(w')$$

$$= \dot{w} + \mu \sin(w') (\cos \psi \cos \frac{v}{r} - \sin \psi \sin \frac{v}{r}) - \cos(w') (\mu \tan \alpha_s + v_i)$$

$$U_T = (\dot{v} + \dot{r} \cos(w') + \mu \sin(\psi + \frac{v}{r}))$$

而 $[\bar{r} = \frac{x}{R}$, x from root to tip]

$$L_{oi} = [b \cdot S_l \cdot \dot{U}_y]_i = \frac{\bar{c}}{2} \cdot \frac{1}{4} \bar{a} \bar{c} \cdot (U_T \sin \theta - U_p \cos \theta) \cdot$$

$$M_{oi} = [b \cdot S_m \cdot \dot{U}_y]_i = -\frac{\bar{c}}{2} \cdot \frac{1}{16} \bar{a} \bar{c}^2 \cdot (U_T \sin \theta - U_p \cos \theta) \cdot$$

此外，

$$(U_T \sin \theta - U_p \cos \theta) \cdot \dot{U}_y$$

$$\theta = \theta_0 + \theta_s \sin \psi + \theta_c \cos \psi + \gamma$$

$$\dot{U}_y = \dot{U}_T \sin \theta + U_T \dot{\theta} \cos \theta - \dot{U}_p \cos \theta + U_p \dot{\theta} \sin \theta$$

四.2 ONERA 動態失速理論

簡要而言, ONERA 的模式是利用半經驗及半解析的方法將影響旋翼葉片上的氣動力分為升力、阻力及扭力矩三部分。ONERA 的動態失速模式除了包含一個線性方程來模擬低攻角之氣動力特性外, 另外加入一個非線性方程式來模擬高攻角時分別對升力、阻力及扭力矩三種現象的影響 [11]。為簡化問題, 吾人只取線性方程來模擬之。此模式之數學式依氣動力特性可以如下三部分表示。

(1) Dynamic Stall Lift

$$\bullet \Gamma = \Gamma_l = a U_y \cos \alpha + \delta_l \bar{b} \dot{\varepsilon} \quad (7)$$

(2) Dynamic Stall Drag

$$\bullet \Gamma_d = \Gamma_{d1} = U C_{d0} \quad (8)$$

(3) Dynamic Stall Pitching Moment

$$\bullet \Gamma_m = \Gamma_{m1} = \delta_m \bar{b} \dot{\varepsilon} \quad (9)$$

(7~9) 式中的一些參數, 就一 NACA 0012 葉片翼剖面而言,

$$a = 5.9, a_{ss} = 13^\circ \text{ (static stall a.o.a)},$$

$$c_{zi} = a \sin \alpha \cos \alpha, \delta = \frac{\partial c_{zi}}{\partial \alpha} - \frac{a}{2},$$

$$c_{ds} = \begin{cases} 0.008 + 0.0005\alpha^2 & 0 \leq \alpha \leq 20^\circ \\ 1.04 - (1.04 - 0.008) \cos 2\alpha & 20^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \end{cases}$$

其中 “s” 代表失速 (stall) 時的狀況, K 代表 reduced frequency = $\Omega b / U_0 = \bar{b} / \bar{r}$, $\dot{\varepsilon}$ 代表為翼剖面

在俯仰方向的角速度 = $\dot{\phi} + w' \cos \theta \approx \dot{\phi} + w' \cos \theta$,

$C_z \approx C_l$ 。此外, $C_d = C_{d0} + C_{d3}^3$ 為阻力係數, c 為無因次化葉片弦長, $b=c/2$, a 為葉片翼剖面升力係數斜率。

四.3 尾流函數

尾流函數可以用動量理論 (Momentum Theory) 及葉片元素理論 (Blade Element Theory) 推導之; 以下先由葉片元素理論推導誘導流 v_i (induced velocity) 來說明之。

$$dL \approx dT \approx \frac{1}{2} \rho a c d s [(\Omega s)^2 \theta - \Omega s (v_i + \theta)]$$

$$dp = dD(\Omega s) = \frac{1}{2} \rho a c d s [\Omega^3 s^3 \frac{C_p}{a} + \Omega^2 s^3 \theta (v_i + \theta) - \Omega s (v_i + \theta)^2]$$

其中, L 為升力 (Lift), T 為推力 (Thrust), P 為旋翼產生的功率 (power), C_T 升力係數, C_P 功率係數。無因次化之後, 再由結合理論得出,

$$dC_{T(Momentum)} = dC_{T(Blade)}$$

$$\Rightarrow 4(\eta + 2)v_i x = \frac{\sigma a}{2} x [x\theta - (\eta + v_i)]$$

$$v_i = -(\frac{\eta}{2} + \frac{\sigma a}{10}) + \sqrt{(\frac{\eta}{2} + \frac{\sigma a}{16})^2 + \frac{\sigma a}{8}(\theta x - \eta)} \quad (10)$$

v_i 即為吾人所要導出的誘導流函數。

五、複材葉片 尾流耦合方程式

五.1 類非線性耦合方程式之展開

首先從結構的方程來看, 要解此一方程式, 必須採用半解析半數值方法, 我們利用 Galerkin method, 將變數轉換為:

$$v = \sum_{k=1}^5 v_k(t) \Psi_k(\bar{x})$$

$$w = \sum_{k=1}^5 w_k(t) \Pi_k(\bar{x}) \quad (11)$$

$$r = \sum_{k=1}^5 r_k(t) \Theta_k(\bar{x})$$

其中, Ψ_k, Π_k, Θ_k 為比較函數 (comparison function), 而隨著葉片組成的材質 (複材或等向) 及邊界條件不同, 其比較函數也不同。至於比較函數的求法將於後續章節中詳述之。然後是將比較函數連同式(11)代入式 (1~6) 對其中的 v, w, r 做展開, 其結果太過繁雜故不在此贅述。

五.2 複材葉片 尾流耦合方程式

經由前一節的展開, 可得到一組複材葉片尾流耦合方程式, 將其以矩陣形式表成如下,

$$[K_{ij}] \begin{Bmatrix} v_q^* \\ v_q \\ w_q^* \\ w_q \\ r_q^* \\ r_q \end{Bmatrix} + [L_{ij}] \begin{Bmatrix} v_q^* \\ v_q \\ w_q^* \\ w_q \\ r_q^* \\ r_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{vq}\} \\ \{F_{wq}\} \\ \{F_{rq}\} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

由於結構方程與空氣動力在 v, w, r 方向相耦合，並且因為程式中含有 ψ ($\psi = \bar{t} + 2\pi(q-1)/3$ = 第 q 個旋翼葉片方向角)，亦即當在同一瞬間(ψ)不同的旋翼葉片基於旋翼面位置的不同，有不同的弦向、拍撲向及扭曲角向的位移，因此必須考量旋翼葉片數的影響。事實上式 (12) 矩陣內的元素 ($[K_{ij}]$, $[L_{ij}]$) 大都是比較函數(Ψ_k, Π_k, Θ_k) 對於葉片長度之積分值，而這一切必需仰賴比較函數的求得，因此下一章節將說明比較函數之求法。

五.3 複材葉片振動模態之建立

為了要求得能夠讓類非線性複材葉片在求解時使用的比較函數 (comparison function)，吾人簡化此問題，假設線性複材葉片與類非線性複材葉片的運動方程不相同，然而其物理上的邊界狀況是一樣的。如此，吾人可先利用解析法求得線性複材葉片的振動模態以做為類非線性複材葉片求解動態負載時的比較函數之用。準此，線性複材葉片振動模態之解析解如下：

首先，考慮線性複材葉片無結構阻尼及忽略轉動慣量 (moment of inertia) (亦即考慮細長葉片) 的運動方程 [20]，

$$v'' + D_{33}v^{iv} - j_3v^{*iv} - v = 0 \quad (13)$$

$$w'' - j_3w^{*iv} + D_{22}w^{iv} - D_{12}r'' = 0 \quad (14)$$

$$j_1\ddot{r} - D_{11}r'' + D_{12}w'' = 0 \quad (15)$$

假設 $v(x,t) = V(x)e^{i\omega t}$ ， $w(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$ ， $r(x,t) = \Gamma(x)e^{i\omega t}$ ，其中 ω_v 是擺振模式(lead-lag mode) 的自然振動頻率， ω 則為揮舞--扭曲耦合模式(lead-lag mode) 的自然振動頻率。其邊界狀況如下，

(a) 固定端(Fixed end)，

$$V(0)=0, V'(0)=0, W(0)=0, W'(0)=0, \Gamma(0)=0$$

(b) 自由端(Free end)，

$$D_{22}W(1)''' - j_2\omega^2W(1)' - D_{12}\Gamma(1)'' - j_2\omega\Gamma(1) = 0$$

$$D_{33}V(1)''' - j_3\omega^2V(1)' = 0$$

$$\Gamma'(1) = 0, W''(1) = 0, V''(1) = 0$$

首先將扭轉向的方程式 (15) 對葉片 x 向 (i.e. s/L) 微分，再代入揮舞向的方程式 (13) 以消去 Γ''

項，則揮舞向的方程式可改寫為

$$(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}})W'''' - j_3(\omega)^2 W'' + \omega^2 W - \frac{D_{12}}{D_{11}}[(j_1)(\omega)^2]\Gamma' = 0 \quad (16)$$

扭轉向的方程式 在空間座標 (spatial coord.) 可改寫為

$$j_1\omega^2\Gamma - D_{11}\Gamma'' + D_{12}W'' = 0 \quad (17)$$

則式(16)，(17) 可用矩陣形式表成，

$$\{x'\} = [A]\{x\} \quad (18)$$

$$\text{其中 } \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 (= W) \\ x_2 (= W') \\ x_3 (= W'') \\ x_4 (= W''') \\ x_5 (= \Gamma) \\ x_6 (= \Gamma') \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{41} & 0 & A_{43} & 0 & 0 & A_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & A_{64} & A_{65} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } A_{41} = \frac{-\omega^2}{D_{22} - D_{12}^2/D_{11}}, \quad A_{43} = \frac{j_3\omega^2}{D_{22} - D_{12}^2/D_{11}},$$

$$A_{46} = \frac{j_1\omega^2 D_{12}}{D_{22}D_{11} - D_{12}^2}, \quad A_{64} = \frac{D_{12}}{D_{11}}, \quad A_{65} = \frac{j_1\omega^2}{D_{11}}$$

就扭轉向的方程式 (15) 而言，代入自由端邊界狀況的方程式組 (16) 以消去 Γ'' 項，則自由端邊界狀況的方程式組 (16)可改寫為

$$(D_{22} - D_{12}^2/D_{11})W(1)''' - j_2(\omega)^2 W(1)' - \frac{D_{12}}{D_{11}}(j_1)(\omega)^2 \Gamma(1) - j_2\omega\Gamma(1) = 0$$

根據參考文獻 [20] 的基本矩陣法 (the fundamental-matrix method) 矩陣方程式 (18) 能夠用一個通式表示，

$$\{x\} = [R]e^{[J]t}\{K\}$$

其中矩陣[R] 是一個 6X6 的矩陣，而其縱向分量則為矩陣[A] 的特徵向量，[J] 則為矩陣[A] 的 Jordan基本形式 (Jordan canonical form)，而{K}則是一個六個元素構成的常數向量。接下來再與邊界條件相結合，則吾人可得

$$[B_{01}]\{K\} = \{0\},$$

其中

$$[B_{01}] = \begin{bmatrix} [B_0]_{3 \times 6} \\ [B_1]_{3 \times 6} \end{bmatrix}_{6 \times 6}, \quad [B_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [R],$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} 0 & -j_2\omega^2 & 0 & D_{22} - D_{12}^2/D_{11} & -(j_2\omega^2 D_{12} + j_2\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [R]e^{[L]}$$

如此則複材葉片的擺振、揮舞、扭曲三個自由度的振動模態及自然振動頻率皆可求得。而至於其硬度則可用簡易的板層理論求出 (laminare theory of plates)。而至於複材葉片的初探，我們選用的複材其資料(具原先之因次)有關擺振方向之扭轉及彎曲硬度 (D_{11} , D_{22})，拍樸方向之彎曲硬度 (D_{33})及彎曲-扭轉相耦合的硬度 (D_{12}) 可求得如下

$$D_{11} = 436.23 \text{ lbf-in}^2, D_{33} = 1532.4 \text{ lbf-in}^2 \\ D_{22} = 5547.2 \text{ lbf-in}^2, D_{12} = 252.02 \text{ lbf-in}^2$$

事實上依循上列之方法，可求得各種不同的複材組合之硬度，而可進一步求得線性複材運動方程式之模態 (mode shape)，並可作為類非線性複材運動方程之比較函數。如此，則耦合的偏微分方程將可化為常微分方程了。

六、 結果與討論

本研究的主要目的乃是要求解整個複材彈性葉片尾流耦合方程式的動態響應分析以尋求葉片上的負載。其求解方法將詳述於後。

吾人所建立之類非線性彈性葉片尾流耦合方程組可大略包含類非線性的複材葉片結構運動方程式 (分為 v 、 w 、 r 三個方向)，式 (1~3) 其中包含展開的各個空氣動力項 (Lv , Lw , 及 Lr)。其中之誘導流速 (induced velocity V_i) 則以誘導流函數代入。針對最終之方程式的架構，式 (12) 動態耦合方程的矩陣式而言，利用 Galerkin 的展開，可得到動態響應方程式的外力項。由於所有的結構方程之比較函數皆先已假設且滿足邊界條件，因此利用 Galerkin 法，必須先將式 (1~3) 的結構方程式皆乘以比較函數將其正交化。而且這些外力函數也必須正交化之。如此可得到一個二階的聯立耦合動力方程式。如此，利用 Runge-Kutta 法求得在某個飛行狀態之下的所有葉片的動態位移 (v 、 w 、 r)，再將各個諧模相加，則可得到整個系統的位移。此外利用式 (5) 之揮舞方向的升力表示式則可求得沿著葉片根部到尖端的動態負載。

在此，吾人先驗證比較函數之正確性，我們代入 Pai 的材料資料 (詳 4.3 的材料硬度值 (D_{11} , D_{22} , D_{33} , 及 D_{12}))，其中 $j_3 = 0.0000362191$ ，無因次之 $D_{22} = 3.619942574$ ，我們取前三個特徵值：43.7611324, 1756.920915, 13771.23683。也因此，

我們可以得到三個頻率：6.615219, 41.91564, 117.35091。以下就是 lead-lag 方向的三個 mode shape：

First mode：

$$V(x) = 0.4999495628 \cosh(1.875151664x) \\ - 0.3669906017 \sinh(1.875151664x) \\ - 0.4999495628 \cos(1.875268411x) \\ + 0.3669677543 \sin(1.875268411x)$$

Second mode：

$$V(x) = -0.4993802491 \cosh(4.693402539x) \\ + 0.5086238759 \sinh(4.693402539x) \\ + 0.4993802491 \cos(4.695274874x) \\ - 0.5084210521 \sin(4.695274874x)$$

Third mode：

$$V(x) = 0.4983330759 \cosh(7.849340356x) \\ - 0.4979427825 \sinh(7.849340356x) \\ - 0.4983330759 \cos(7.858112447x) \\ + 0.4973869239 \sin(7.858112447x)$$

而揮舞向 (w) 及扭曲向 (r) 所求得之自然振動頻率為 3.3445, 20.955 和 58.647，以下即其振動模態。

First mode

$$W(x) = x_1 = \sum_{i=1}^6 R_{1i} K_i e^{\lambda_i x} \\ = -1.0000 \cosh(1.8750x) \\ + 0.73411 \sinh(1.8750x) + 1.0000 \cos(1.8751x) \\ - 0.73406 \sin(1.8751x) - 4.6296 \times 10^{-8} \cos(0.04063x) \\ - 7.3628 \times 10^{-10} \sin(0.04063x)$$

$$\Gamma(x) = x_5 = \sum_{i=1}^6 R_{5i} K_i e^{\lambda_i x}$$

$$= -0.76480 \cosh(1.8750x) + 1.0827 \sinh(1.8750x) \\ + 0.79557 \cos(1.8751x) \\ + 1.0838 \sin(1.8751x) - 7.4673 \times 10^{-4} \cos(0.04063x) \\ + 4.6954 \times 10^{-2} \sin(0.04063x)$$

Second mode

$$W(x) = -1.0002 \cosh(4.6928x) + 1.0187 \sinh(4.6928x) \\ + 1.0002 \cos(4.6938x) \\ - 1.0184 \sin(4.6938x) - 1.9034 \times 10^{-8} \cos(0.25455x) \\ - 1.0037 \times 10^{-7} \sin(0.25455x)$$

$$\Gamma(x) = -2.7535 \cosh(4.6928x) + 2.7035 \sinh(4.6928x) \\ + 2.7698 \cos(4.6938x) \\ + 2.7201 \sin(4.6938x) - 1.6248 \times 10^{-2} \cos(0.25455x) \\ - 3.0812 \times 10^{-1} \sin(0.25455x)$$

Third mode

$$W(x) = -1.0004 \cosh(7.8493x) + 0.99960 \sinh(7.8493x) \\ + 1.0004 \cos(7.8541x) \\ - 0.99899 \sin(7.8541x) - 1.7688 \times 10^{-5} \cos(0.71243x) \\ - 1.2905 \times 10^{-8} \sin(0.71243x)$$

$$\Gamma(x) = -4.4957 \cosh(7.8493x) + 4.4992 \sinh(7.8493x) \\ + 4.5704 \cos(7.8541x) \\ + 4.5768 \sin(7.8541x) - 7.4640 \times 10^{-2} \cos(0.71243x) \\ + 1.0230 \sin(0.71243x)$$

以上的振動模態也已滿足其正交性(orthogonality)，滿足式(13~15)。與 Pai[20]的結果做比較，未將模態無因次化之前，比較可發現其模態結果是一樣的，在此就不再重覆附上 Pai 之結果。吾人在此僅列出 v 方向的前三個模態於圖四~六以工參考。

與前人相比，確定吾人模態之正確性後，我們嘗試固定該複材在扭轉向及揮舞向的硬度如同 4.3 所列，而變動無因次化之擺振向硬度(D_{11})及耦合硬度(D_{12})的性質，以期瞭解複材疊層之影響。如圖七所示係固定 D_{22} 及 D_{33} 並令 $D_{11}=0.15$ 時，揮舞向的前三個振動模態之頻率與 D_{12} 之變化圖。而圖八、圖九及圖十則分別為 $D_{11}=0.17$ 、 0.19 及 0.21 時的揮舞向振動頻率變化圖。一般而言，隨著擺振向硬度的增加，在其他方向的硬度固定情況下，揮舞向的頻率並無太大的變化，因此就一單純的結構情況而言，擺振向與揮舞向這兩個自由度並無太大的耦合現象。而至於耦合向(D_{12} ，即揮舞及扭轉之耦合)的影響則出現於 D_{12} 大於 0.3 左右，吾人無法求出一個較為收斂的振動頻率，此即意味複合材料各方向的疊層似乎必須遵循一定的比例，其疊層的角度不可過大，否則可能無法適用於旋轉葉片上。而吾人並無降低 D_{12} 的值於 0.15 以下，其原因係 D_{12} 乃是複材葉片的基本特徵，若是 D_{12} 愈小，則揮舞與扭轉的耦合愈少，則愈趨近等向性葉片了，這與本研究主題無關。其次，吾人探討氣動力對於本耦合系統之影響。圖十一及圖十二是本耦合系統使用 4.3 表列的材料係數與後續推導而出的振動模態做為比較函數，並使用 Galerkin 法求出得此系統之動態分析。其中圖十一是升力分佈的 3-D 曲線，圖十二則是阻力分佈圖，為了瞭解主旋翼之尾流導致的誘導流對於本系統的影響，吾人模擬了有無誘導流兩種情況，於圖十一及十二中的黑點即代表具有誘導流影響之結果，而三角形的點則為無誘導流者。在這個 3-D 的圖形中， x 軸代表轉距角由 $0^\circ \sim 25^\circ$ ， y 軸則為無因次化的葉片弦展向(span-wise $0.0 \sim 1.0$)。其實由圖十一得知升力的分佈都是隨著轉距角的增加及展弦的增加而增加，此結果並不會因為複材而有所改變。而由於誘導流的影響，導致有效攻角減低，因此其升力較無誘導流影響者為低。而於阻力的影響方面，由於無誘導流則無誘導阻力，因此有考慮誘導流之阻力較無誘導流者為高。此現象也表現於圖十二。

七、結論

在分析直昇機的流固耦合系統時，由於方程式

的複雜性往往是用數值法分析，而在這之中又必須事先求得滿足所有邊界條件的比較函數。本文主要針對複合材料樑的特徵函數進行探討，進而建立一套解析的方法及其振動模態，本文所獲得之結論如下所述：

1. 本研究已利用解析法求出線性複合材料樑在擺振、揮舞、扭曲三個自由度的振動模態及自然振動頻率，其結果也可做為分析各種旋轉之複合材料樑，動態響應時的比較函數之用。
2. 以單一結構而言，擺振向的硬度之變化並不會導致揮舞向的自然振動頻率有太大之改變。然而掌控複材特性的耦合向硬度值(D_{12} ，即揮舞及扭轉之耦合)不可太大，否則可能因其疊層的角度過大，而無法求出相對該旋轉葉片上之複材特性的振動模態及自然振動頻率。
3. 就誘導流對於耦合系統之動態分析而言，誘導流的影響，導致有效攻角減低，因此其升力較無誘導流影響者為低。而於阻力的影響方面，由於無誘導流則無誘導阻力，因此有考慮誘導流之阻力較無誘導流者為高。

因為本文所求得的是滿足所有邊界條件及結構動力方程的特徵函數及解析方法，當材料不同、只需改變方程式中的參數值即可得知振動模態及特徵函數，其結果可適用於旋轉複合材料樑，對於往後研究此類系統振動者有莫大的幫助。

八、誌謝

本研究承蒙行政院國科會贊助，計畫編號，NSC 92-2212-E-032-008，作者深表謝忱。

九、參考文獻

- [1] Gray, R. B., "On the Motion of Helical Vortex Shed from a Single-Bladed Hovering Helicopter Rotor and Its Application to the Calculation of the Spanwise Aerodynamic Loading," Princeton University, Aeronautical Engineering Report No. 313, Sept. 1955.
- [2] Gray, R. B., "An Aerodynamic Analysis of a Single-Bladed Rotor in Hovering and Low Speed Forward Flight as Determined from Smoke Studies of the Vorticity Distribution in the Wake," Princeton University, Aeronautical Engineering Report No. 356, Sept. 1956.
- [3] Summa, J.M., and Clark, D.R., A Lifting Surface Method for Hover and Climb Airloads, Paper presented at Annual National Forum of the American Helicopter Society, May 1979.
- [4] Bridgeman, J.O., Strawn, R.C., and Caradonna, F.X., An Entropy and Viscosity Corrected Potential Method for Rotor Performance Prediction, Paper presented at the 44th Annual National Forum of the American Helicopter

Society, 1988.

[5] Ormiston, R. A., "Application of Simplified Inflow Models to Rotorcraft Dynamic Analysis," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 21, No.3, July, 1976, pp. 34 - 37.

[6] Peters, D. A., "Hingeless Rotor Frequency Response with Unsteady Inflow," *Rotorcraft Dynamics*, NASA SP-352, 1974.

[7] Hodges, D. H. and Dowell, E. H., "Nonlinear Equations of Motion for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades," NASA TN D-7818, December, 1974.

[8] Hodges, D. H., Crespo da Silva, M. R. M., and Peters, D. A., "Nonlinear Effects in the Static and Dynamic Behavior of Beams and Rotor Blades," *Vertica*, Vol. 12, pp.243-256, 1988.

[9] Pai, P. F., and Nayfeh, A. H., "Fully Nonlinear Theory of Curved and Twisted Composite Rotor Blades According for Warpings and Three-Dimensional Stress Effects," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.31., No.9, pp.1309-1340, 1994.

[10] Gangwani, S., "Prediction of Dynamic Stall and Unsteady Airloads for Rotor Blades," *Proceedings of the 37th Annual National Forum of American Helicopter Society*, New Orleans, May 1981, pp.1-17.

[11] Tran, C.T., and Petot, D., "Semi-Empirical Model for the Dynamic Stall of Airfoils in View of the Application to the Calculation of Responses of a Helicopter Blade in Forward Flight," *Sixth European Rotorcraft and Powered Lift Forum*, Bristol, England, Sept. 1980.

[12] Tang, D., and Dowell, E.H., "Damping Prediction for Hingeless Rotor Aeroelastic Stability with Experimental Correlation," *Journal of Aircraft*, Vol. 33, No.6, November-December 1996, pp. 1071-1078.

[13] Tang, D., and Dowell, E.H., "Nonlinear Rotor Aeroelastic Analysis with Stall and Advanced Wake Dynamics," *Journal of Aircraft*, Vol. 34, No.5, September-October 1997, pp. 679-687.

[14] Hodges, D. H., Atilgan, A. R., Cesnik, C. E. S., and Fulton, M. V., "On A Simplified Strain Energy Function for Geometrically Nonlinear Behavior of Anisotropic Beams," *Composite Engineering* Vol. 2, 513-526, 1992.

[15] Pai, P. F., and Nayfeh, A. H., "Three-Dimensional Nonlinear Vibrations of Composite Beams - I. Equations of Motion," *Nonlinear Dynamics 1*, Kluwer Academic Publishers, pp.477-502, 1990.

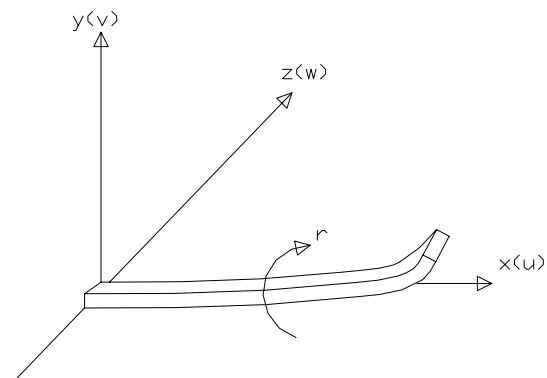
[16] Pai, P. F., and Nayfeh, A. H., "Three-Dimensional Nonlinear Vibrations of Composite Beams - II. Flapwise Excitations," *Nonlinear Dynamics 2*, Kluwer Academic Publishers, pp.1-34, 1991.

[17] Pai, P. F., Anderson, T. J., and Weather, E. A., "Large-Deformation Tests and Total-Lagrangian Finite-Element Analysis of Flexible Beams," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37., No.21, pp.2951-2980, 2000.

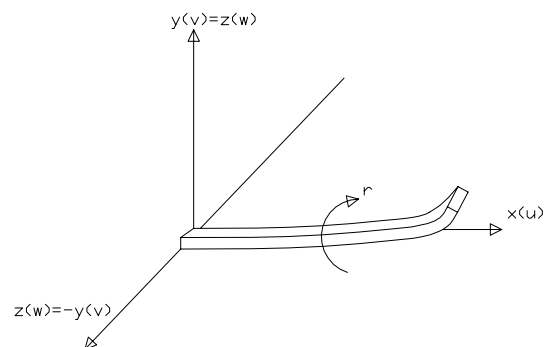
[18] Crespo da Silva, M. R. M., "A Comprehensive Analysis of The Dynamics of A Helicopter Rotor Blade," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 7-8, pp. 619-635., 1998.

[19] Shang, X., Hodges, D.H., and Peters, D.A., "Aeroelastic Stability of Composite Hingeless Rotors in Hover with Finite-State Unsteady Aerodynamics," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 44, No.3, July 1999, pp. 206-221.

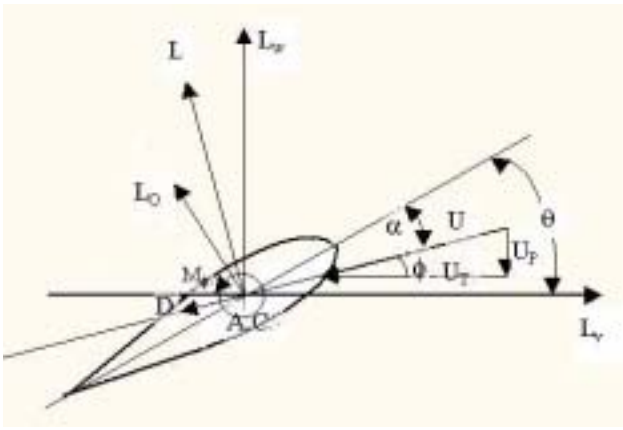
[20] Pai, P. F., "Nonlinear Flexural- Flexural-Torsional Dynamics of Metallic and Composite Beams," Ph. D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, April, 1990.



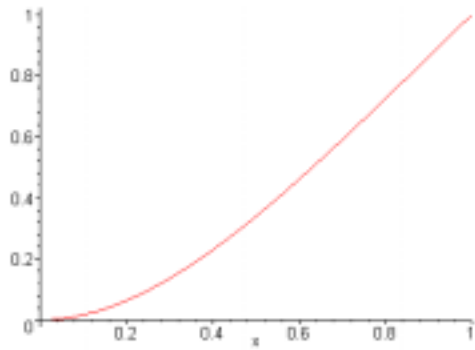
圖一、 Pai's coordinate



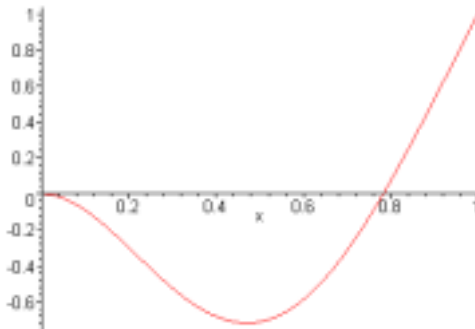
圖二、 本研究轉換之座標



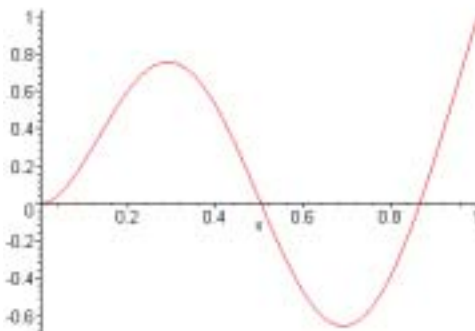
圖三、葉片截面之空氣動力座標



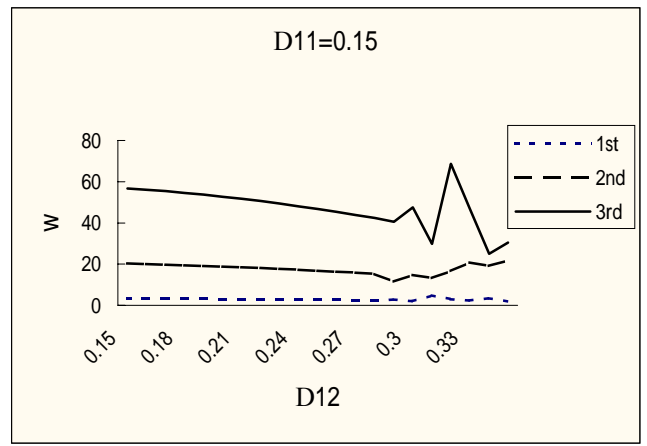
圖四、 v 方向的第一個模態



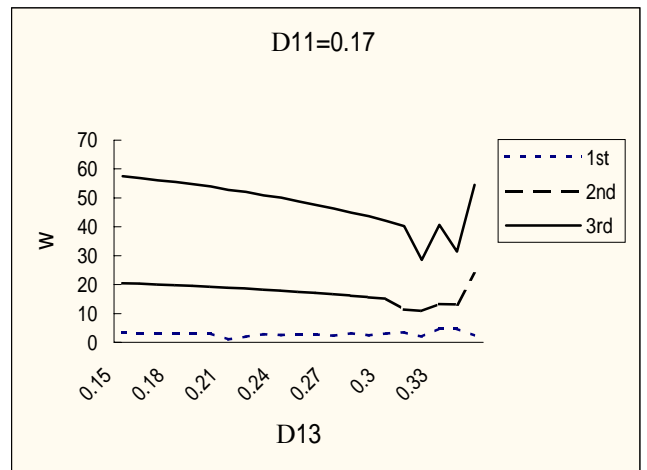
圖五、 v 方向的第二個模態



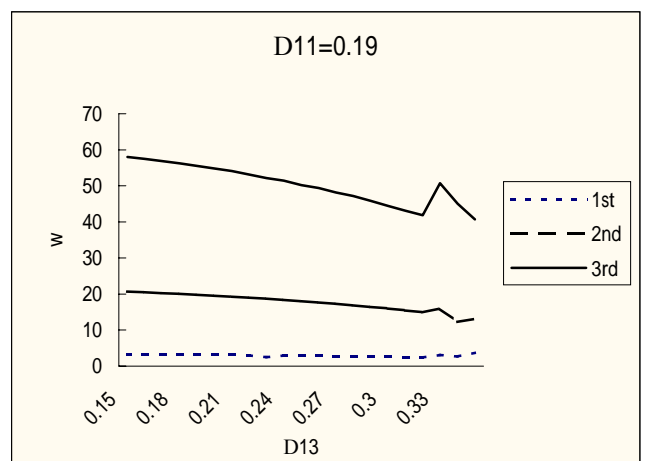
圖六、 v 方向的第三個模態



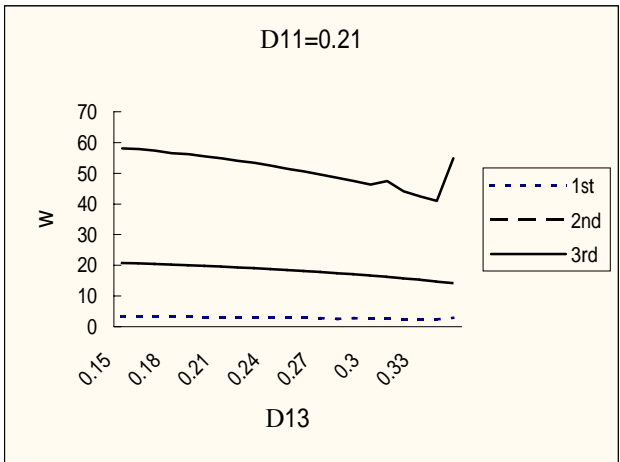
圖七、揮舞向的前三個模態之振動頻率 ($D_{11}=0.15$)



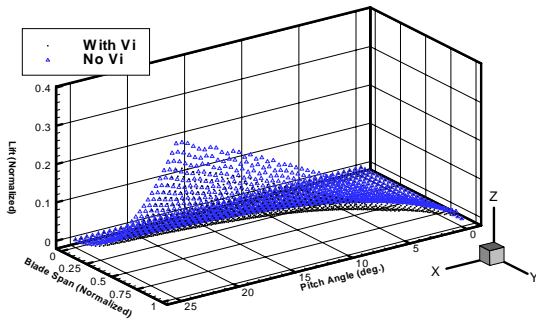
圖八、揮舞向的前三個模態之振動頻率 ($D_{11}=0.17$)



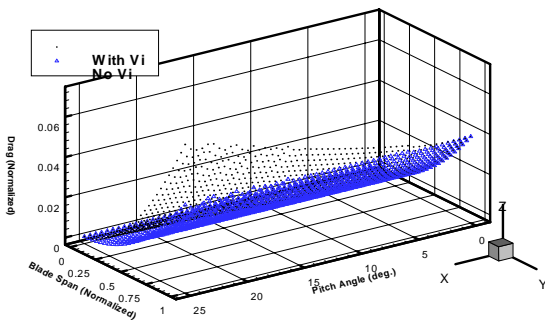
圖九、揮舞向的前三個模態之振動頻率 ($D_{11}=0.19$)



圖十、揮舞向的前三個模態之振動頻率 ($D_{11}=0.21$)



圖十一、誘導流對複材葉片升力之影響



圖十二、誘導流對複材葉片阻力之影響