行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

子計劃一：教材發展的研究(III)

計畫類別：整合型計畫
計畫編號：NSC91-2520-S-032-003-
執行期間：91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日
執行單位：淡江大學數學系

計畫主持人：李武炎

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 92 年 10 月 20 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

計畫名稱：微積分學習之多元輔助教材的研發與評量之研究—子計畫一：教材發展的研究(III)

計畫類別：整合型計畫

計畫編號：NSC91-2520-S-032-003

執行期間：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

計畫主持人：李武炎

執行單位：淡江大學數學系

中　華　民　國　九十二　年　八　月　一　日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

計畫名稱：微積分學習之多元輔助教材的研發與評量之研究—子計畫一：教材發展的研究(III)

計畫編號：NSC91-2520-S-032-003

執行期間：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：李武炎

E-mail:lee@math.tku.edu.tw

執行機構及單位名稱：淡江大學數學系

微積分中無窮數列與無窮級數單元之教材設計

一、中文摘要

本計畫為「微積分學習之多元輔助教材的研發與評量之研究」之下的子計畫一：教材發展的研究。其主要研究在於研發微積分媒體教學的輔助教材並探討其成效，在第一年已經完成積分教材的設計，第二年則開發無窮級數的教材設計，同時也建構教學平台，並實際運用媒體教學，評估教學成效，預計在下學年擴大推廣此微積分教學平台，並加以改良實施。

關鍵詞：微積分，無窮數列，無窮級數。

二、英文摘要

The purpose of this project “study of the development of multi-media instructional materials in assisting learing Calculus” is to develop multi-media instructional materials for Calculus. This is a three-years project. During the first year, we have finished the design of the instructional material of integration. We designed the instructtional materials of limit and polar coordinate system for the second year. This year we also finished the design of the instructional material for infinite series. Besides, we construct the teaching platform for Calculus. At the same time, this platform has been implemented and we are evaluating its effect for the learning process of students. We are looking forward to further improvement.

Keywords: calculus, infinite sequences, infinite series.

無窮數列與無窮級數在微積分中的重要性來自牛頓將函數表示為無窮級數的想法，例如在計算面積時為了要計算函數的積分常先將函數表成無窮級數，然後再逐項去積函數的每一項・級數也可以用來解微分方程的問題・在數學、物理與化學中有許多函數常呈現級數和的形式，因此無窮數列與無窮數之收斂與發散的概念變得益形重要・物理學家也常用級數來研究一些不同領域的現象，例如：光學、相對論、電磁學等，他們用代表函數的級數的前面若干項就可以來分析各種不同的現象，並加以解釋・

無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂或發散的檢驗法：

第一種檢驗法：若 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在或 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必發散・

第二種檢驗法：若 f 為定義於 $[1,\infty)$ 之連續函數， $f(x)$>0 且 $f(x)$ 為減函數，設

$a_n = f(n)$，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂 $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx$ 收斂・

第三種檢驗法：$\sum a_n, \sum b_n$ 為兩級數且 $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ ・

(a)若 $a_n \leq b_n \quad \forall n$，且 $\sum b_n$ 收斂，則 $\sum a_n$ 必收斂・

(b)若 $a_n \geq b_n \quad \forall n$，且 $\sum b_n$ 發散，則 $\sum a_n$ 必發散・

第四種檢驗法：$\sum a_n, \sum b_n$ 為兩級數，且 $a_n > 0, b_n > 0$，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c$，且

$0 < c < \infty$，則 $\sum a_n, \sum b_n$ 同時收斂或同時發散。

第五種檢驗法：設 $\sum a_n$ 為正項級數($a_n > 0, \forall n$)且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

(i)若 $L<1$，則 $\sum a_n$ 收斂。

(ii)若 $L>1$，則 $\sum a_n$ 發散。

(iii)若 $L=1$，則 $\sum a_n$ 的斂散性不定。

第六種檢驗法：設 $\sum a_n$ 為正項級數，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$

(i)若 $L<1$，則 $\sum a_n$ 收斂。

(ii)若 $L>1$，則 $\sum a_n$ 發散。

(iii)若 $L=1$，則 $\sum a_n$ 的斂散性不定。

第七種檢驗法：若 $\sum (-1)^{n+1} a_n$ 為一交錯級數且{ a_n }為一減數列，且 $\lim_{n\to\infty} a_n$ =0，則

$\sum (-1)^{n+1} a_n$ 收斂。

第八種檢驗法：若 $\sum |a_n|$ 收斂，則 $\sum a_n$ 收斂。

函數的冪級數表示法：

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

$-1 < x < 1$

2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

$-1 < x \le 1$

3. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots$

$-1 \le x \le 1$

4. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

5. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$

6. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$

Reference

1. James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company,1999.
2. Dale Varberg and Edwin J. Purcell,Calculus, Seventh Edition, Prentice Hall International, Inc. 1997.