

Universidade de Évora – Escola de Ciência e Tecnologia - Departamento de Engenharia Rural

**UNIVERSIDADE DE ÉVORA**  
**ESCOLA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - DEPARTAMENTO DE**  
**ENGENHARIA RURAL**



**RESISTÊNCIA DE MATERIAIS**  
**DEFORMAÇÃO DEVIDA A MOMENTO FLECTOR**  
**INSTABILIDADE EM COMPRESSÃO AXIAL**

(Apontamentos para uso dos Alunos)

**JOSÉ OLIVEIRA PEÇA**

**ÉVORA**

**2016**

## INDICE

Nota do autor .....	3
1. Deformação devida a momento flector .....	4
1.1. Deformação em flexão circular recta.....	4
1.2. Teoremas de Mohr.....	4
1.3. Resolução para diversos tipos de apoios e carregamentos .....	6
1.3.1. Vigas em consola.....	7
1.3.2. Vigas bi-apoiadas (apoios nas extremidades).....	7
1.3.3. Vigas bi-apoiadas estendendo-se para além dos apoios .....	13
1.4. Tabela .....	14
1.5. Caderno de problemas de deformação em momento flector .....	14
1.5.1. Vigas em consola.....	14
1.5.2. Vigas bi-apoiadas .....	17
1.5.3. Vigas bi-apoiadas estendendo-se para além dos apoios .....	19
2. Instabilidade em compressão axial .....	19
2.1. Generalidades .....	19
2.2. Carga crítica de Euler .....	20
2.3. Efeito dos diferentes tipos de apoio na carga crítica .....	20
2.4. Expressão geral da carga crítica e coeficiente de esbelteza.....	21
2.5. Domínio de aplicação da carga crítica de Euler .....	22
2.6. Dimensionamento em compressão axial .....	22
2.7. Problema resolvido .....	23
2.8. Problemas não resolvidos .....	24
2.9. Caderno de problemas de instabilidade em compressão axial .....	26
Referências .....	34

## Nota do autor

Tendo sido interrompido, a partir do ano lectivo de 2015/2016, o 1º Ciclo do Curso de Engenharia Civil, o autor resolveu reunir toda a informação que foi disponibilizada aos alunos da disciplina de Resistência de Materiais, durante os 8 anos em que o curso funcionou na Universidade de Évora.

O presente trabalho versa os temas do *Deformação devida a momento flector* e da *Instabilidade em compressão axial* da Resistência de Materiais e é uma edição revista e acrescentada das edições que foram publicadas em 2010; 2009 e 2008.

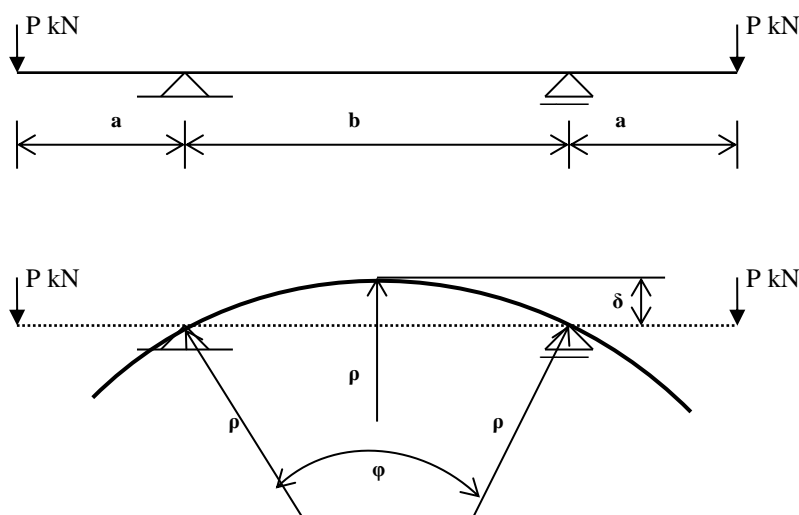
No curso, a disciplina de Resistência de Materiais tinha a duração de um único semestre (4º semestre), pelo que foi necessário seleccionar os temas mais relevantes a ensinar dos temas acima referidos.

Nos diversos pontos deste trabalho são apresentados os aspectos formais importantes, completados com problemas resolvidos e não resolvidos de aplicação. Estão, ainda, incluídos todos os exercícios de aplicação abordados nas aulas práticas e os que foram alvo de avaliação nas provas de frequência e de exame.

## 1. Deformação devida a momento flector

### 1.1. Deformação em flexão circular recta

As deformações em flexão circular recta ( $M=\text{constante}$ ;  $T=0$ ;  $N=0$ ;  $M_t=0$ ) foram abordadas no capítulo III.2.1. Como se viu na altura, a forma particular da deformada em flexão circular (arco de circunferência), permite conhecer, com base na geometria, o ângulo relativo ( $\varphi$ ) entre as secções dos apoios e o valor do deslocamento na vertical ( $\delta$ ). O exemplo seguinte permitirá recordar este tema:



Admitindo que o material tem comportamento elástico linear, então, conhecendo o momento flector ( $M$ ) podemos facilmente obter o raio da deformada ( $\rho$ ):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

O valor do ângulo relativo entre as secções dos apoios será obtido pela expressão:

$$\varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{M}{EI} \times b$$

Finalmente, atendendo a razões geométricas, facilmente se obtém:

$$\delta = \rho - \rho \cos \frac{\varphi}{2}$$

### 1.2. Teoremas de Mohr

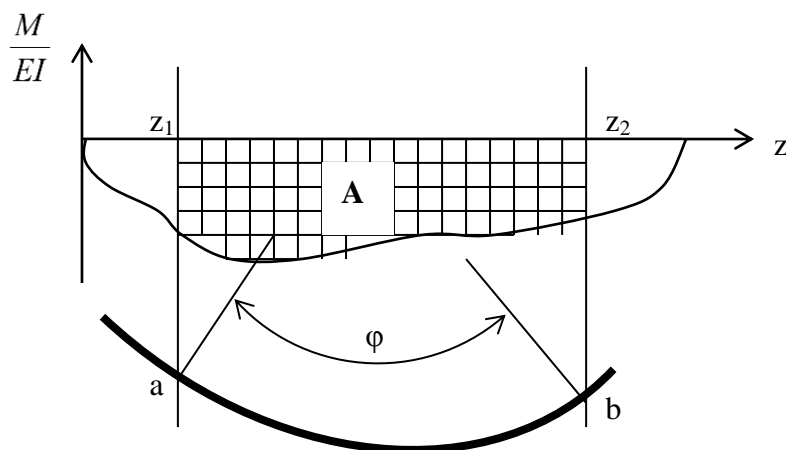
Nos casos mais gerais de flexão simples ( $M \neq \text{constante}$ ;  $T \neq 0$ ;  $N=0$ ;  $M_t=0$ ), a forma da deformada **não** é um arco de circunferência, pelo que há que recorrer a outros métodos para avaliar a deformação.

Seguidamente aborda-se um desses métodos, conhecido como os Teoremas de Mohr.

1º teorema de Mohr:

*A rotação ( $\varphi$ ) relativa de duas secções (a e b), é igual à área (A) do diagrama de curvaturas entre essas duas secções.*

$$\varphi = \int_{z_1}^{z_2} \frac{M}{EI} dz = A$$



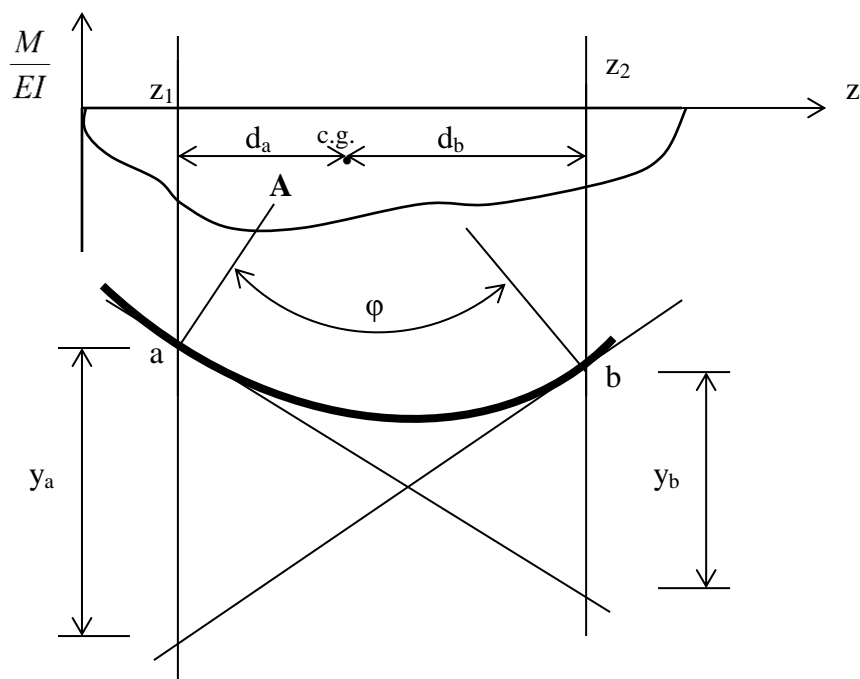
A figura anterior mostra a deformada de uma barra sujeita a um momento flector não constante  $M=f(z)$ . Nessa deformada estão marcadas duas secções a e b.

A figura anterior mostra, igualmente, o diagrama das curvaturas da barra, o qual é obtido dividindo o momento flector (M) pela rigidez à flexão (EI).

2º teorema de Mohr:

*As tangentes à deformada em dois pontos a e b, cruzam a recta perpendicular ao eixo da peça, que passa pelo ponto a, em dois pontos; estes pontos distam entre si o valor igual ao momento estático da área (A) do diagrama de curvaturas definida entre a e b, em relação à recta perpendicular que passa pelo ponto a.*

$$y_a = \int_{z_1}^{z_2} \frac{M}{EI} (z - z_1) dz = A \times d_a$$



De igual modo: *as tangentes à deformada em dois pontos a e b, cruzam a recta perpendicular ao eixo da peça, que passa pelo ponto b, em dois pontos; estes pontos distam entre si o valor igual ao momento estático da área (A) do diagrama de curvaturas definida entre a e b, em relação à recta perpendicular que passa pelo ponto b.*

$$y_b = \int_{z_1}^{z_2} \frac{M}{EI} (z_2 - z) dz = A \times d_b$$

A aplicação dos teoremas de Mohr pressupõe o conhecimento de áreas e momento estáticos de áreas que se definem na função  $M/EI = f(z)$ . Esta pode ser uma curva do 1º grau (recta), ou de grau superior. No final deste capítulo apresenta-se uma tabela com informação respeitante a curvas mais usualmente encontradas nos problemas.

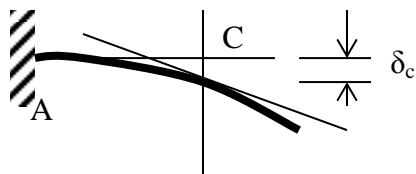
### **1.3. Resolução para diversos tipos de apoios e carregamentos**

Os pontos seguintes mostram exemplos em que a utilização dos teoremas de Mohr permite determinar deslocamentos da barra quando sujeitas a flexão simples provocada por esforços concentrados ou carregamentos contínuos. Cada um dos exemplos terá uma abordagem diferente na aplicação dos teoremas de Mohr.

### 1.3.1. Vigas em consola



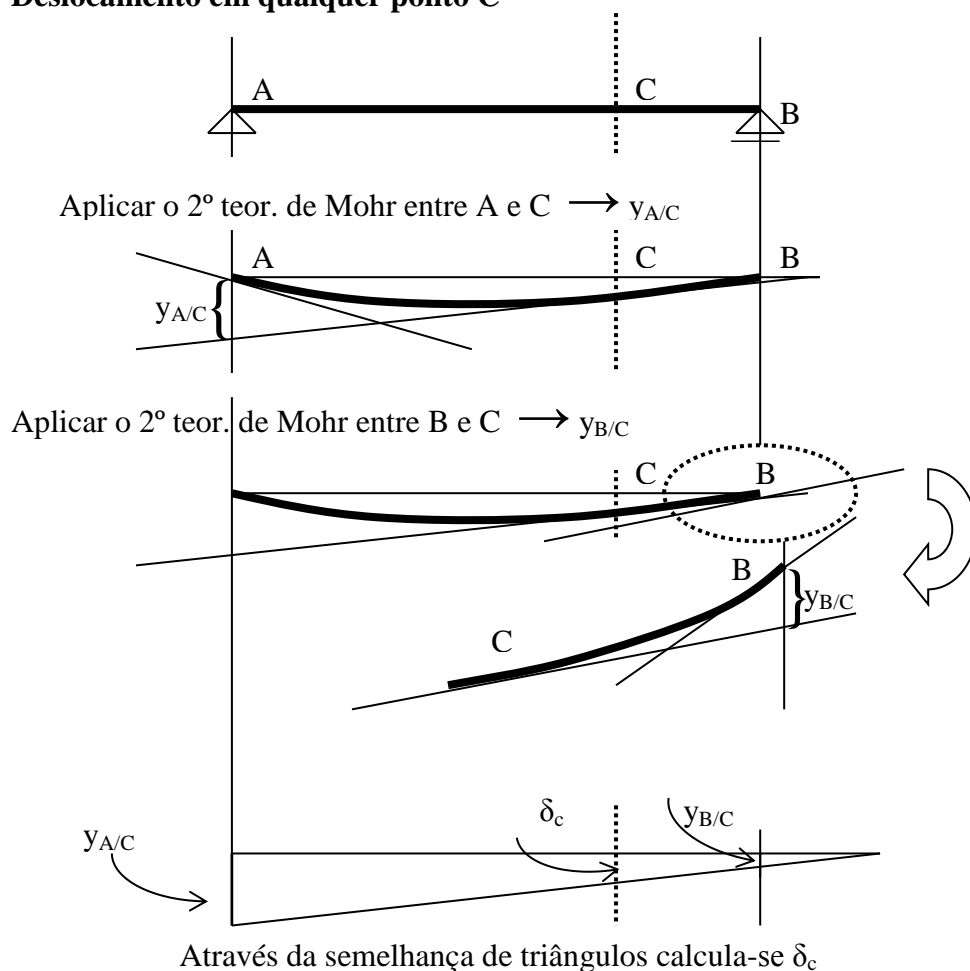
Deslocamento em qualquer ponto C: Aplicar o 2º teorema de Mohr entre C e A



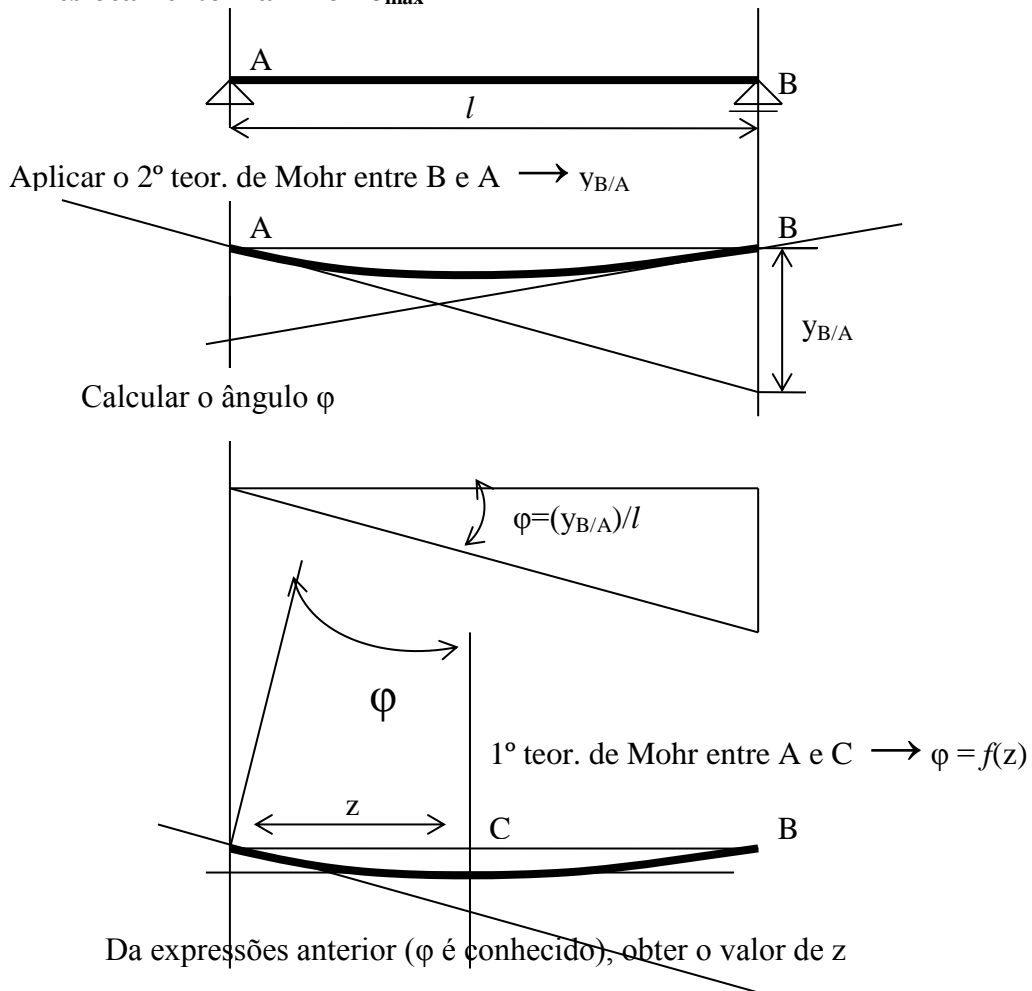
### 1.3.2. Vigas bi-apoiadas (apoios nas extremidades)

No caso das barras bi-apoiadas há ainda que distinguir se o objectivo é a determinação do deslocamento devido à flexão num ponto concreto, ou a determinação do deslocamento máximo.

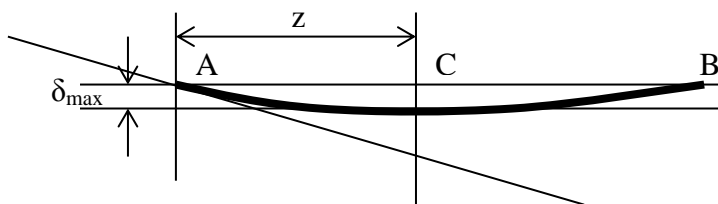
#### Deslocamento em qualquer ponto C



**Deslocamento máximo -  $\delta_{\max}$**

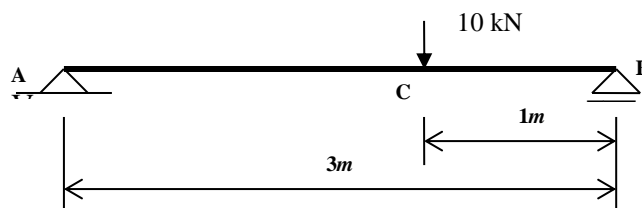


2ª teorema de Mohr entre A e C  $\rightarrow \delta_{\max}$



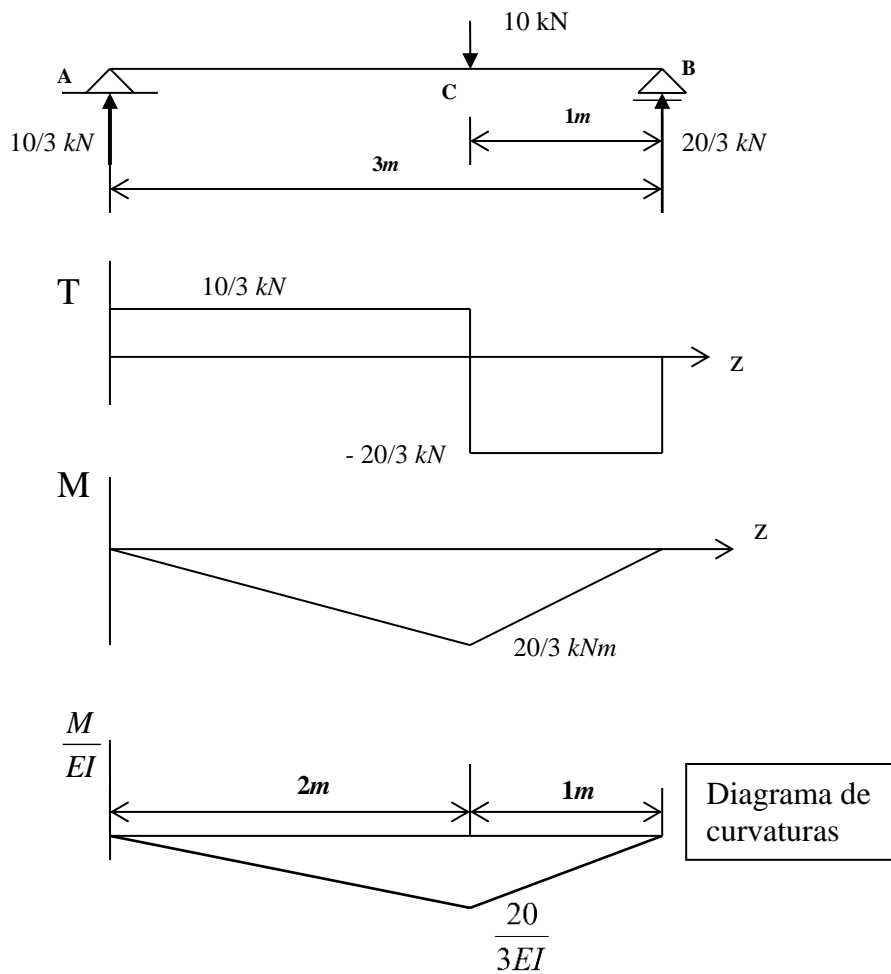
**Exemplo**

Calcular o deslocamento máximo verificado na barra da figura seguinte



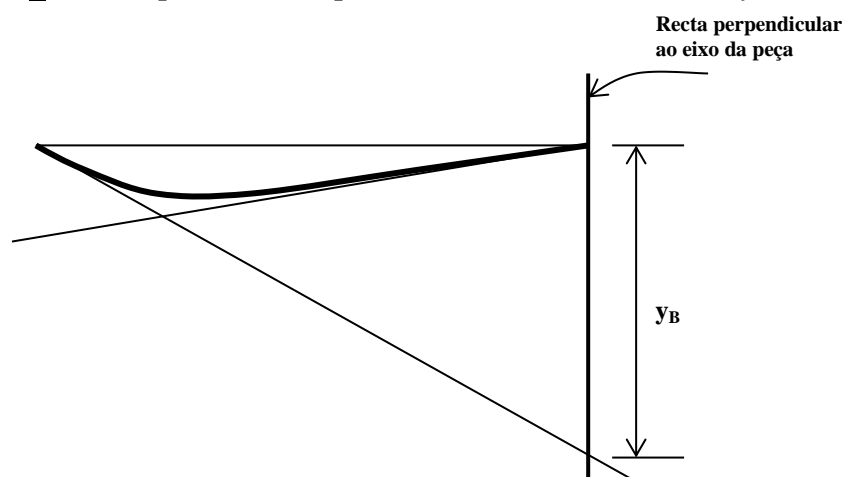


Resolução:

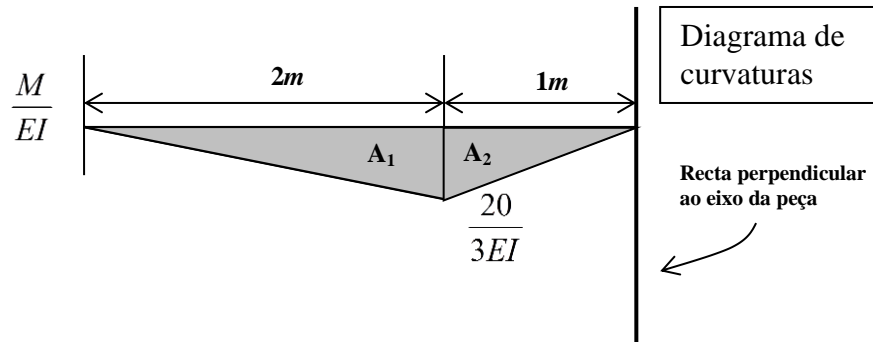


Aplicando o 2º teorema de Mohr entre B e A:

*As tangentes à deformada nas secções B e A cruzam a recta perpendicular ao eixo da peça que passa por  $\underline{b}$  em dois pontos; estes pontos distam entre si o valor ( $y_b$ ).*



*A distância  $y_b$  é igual ao momento estático da área (sombreada na figura seguinte), em relação à recta perpendicular que passa por  $\underline{b}$ .*

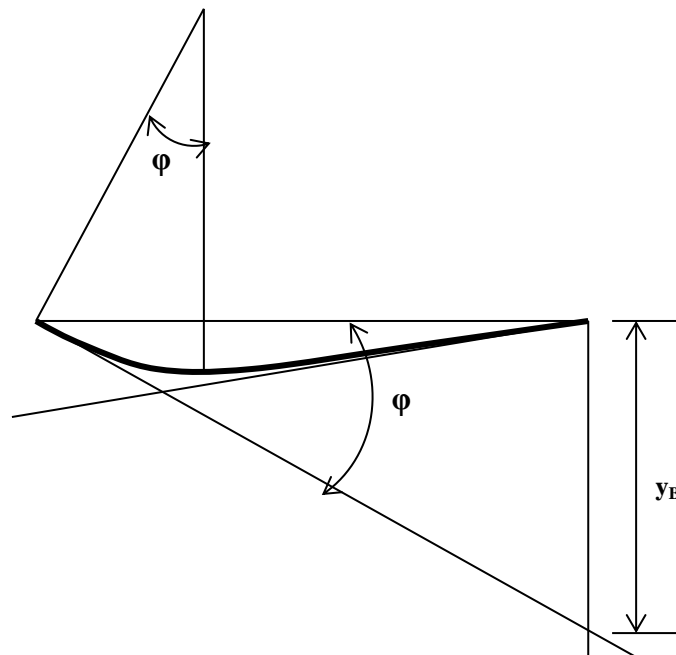


$$y_b = A_1 \times \left(1 + \frac{1}{3} \times 2\right) + A_2 \times \frac{2}{3} \times 1$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3EI} \times 2 = \frac{20}{3EI} \quad A_2 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3EI} \times 1 = \frac{10}{3EI}$$

$$y_b = \frac{40}{3EI}$$

Atendendo à figura seguinte:

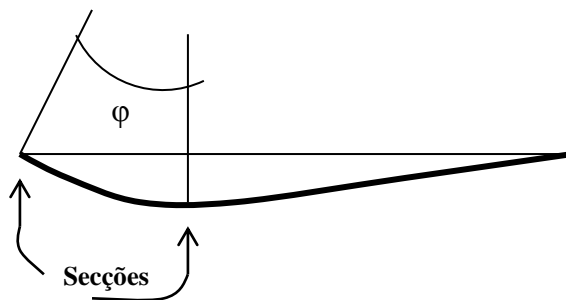


$$\tan \varphi = \frac{y_B}{3} = \frac{40}{9EI}$$

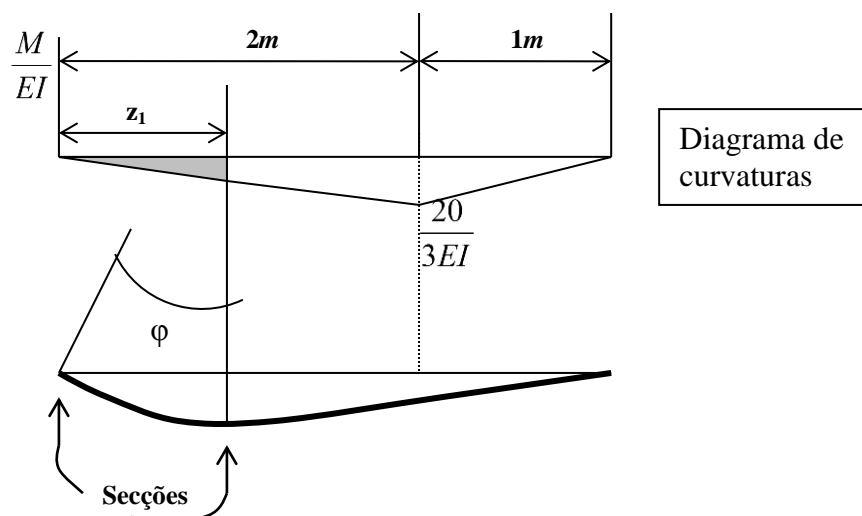
Uma vez que as deformações são sempre muito pequenas, o ângulo  $\varphi$  é pequeno, o que significa que a tangente de  $\varphi$  é muito semelhante ao valor do próprio ângulo  $\varphi$  expresso em radianos:  $\tan \varphi \approx \varphi$  (rad)

Aplicando o 1º teorema de Mohr:

**A rotação ( $\varphi$ ) relativa das duas secções (ver figura seguinte),**



é igual à área sombreada do diagrama de curvaturas (figura seguinte).



A altura do triângulo sombreado pode ser obtido da equação da função  $\frac{M}{EI} = f(z)$ , ou neste caso, pela lei da semelhança dos triângulos:

$$\frac{20}{3EI} \square\square\square\square 2$$

$$x \square\square\square\square z_1$$

obtendo-se:  $\frac{10z_1}{3EI}$

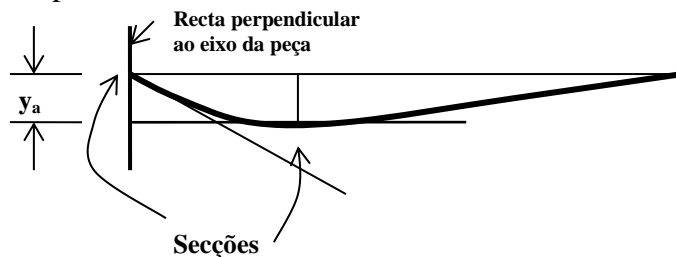
O ângulo  $\varphi$  é igual à área triangular marcada na figura anterior:

$$\varphi = \frac{1}{2} \left( z_1 \times \frac{10z_1}{3EI} \right) = \frac{10z_1^2}{6EI}$$

Igualando as duas deduções do ângulo  $\varphi$ :

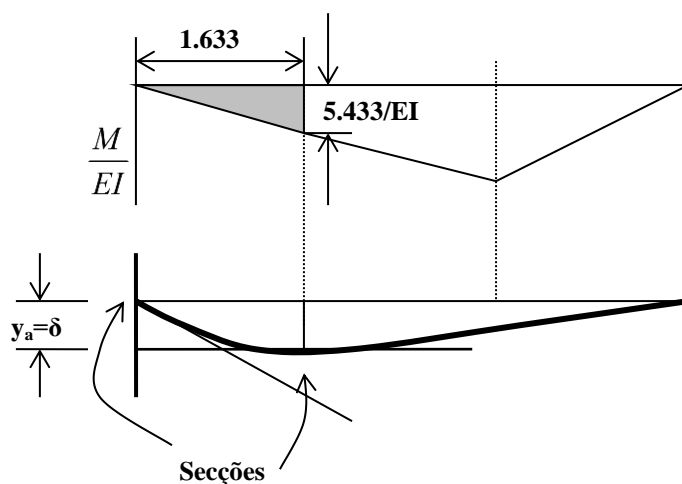
$$\varphi = \frac{10z_1^2}{6EI} = \frac{40}{9EI} \Rightarrow z_1 = 1.633m$$

Aplicando o 2º teorema de Mohr entre A e C:



*As tangentes à deformada nas duas secções (ver figura anterior) cruzam a recta perpendicular ao eixo da peça, em dois pontos; estes pontos distam entre si o valor  $y_a$ .*

*A distância  $y_a$  é igual ao momento estático da área (sombreada na figura seguinte), em relação à recta indicada na figura.*



A altura do triângulo sombreado pode ser obtido da função  $\frac{M}{EI} = f(z)$  ou, neste caso, pela lei da semelhança dos triângulos:

$$\frac{20}{3EI} \quad \square\square\square\square\square \quad 2$$

$$x \quad \square\square\square\square\square \quad 1.633$$

obtendo-se:  $\frac{5.443}{EI}$

O valor de  $y_a$ , o qual é igual à deformação máxima da peça, será:

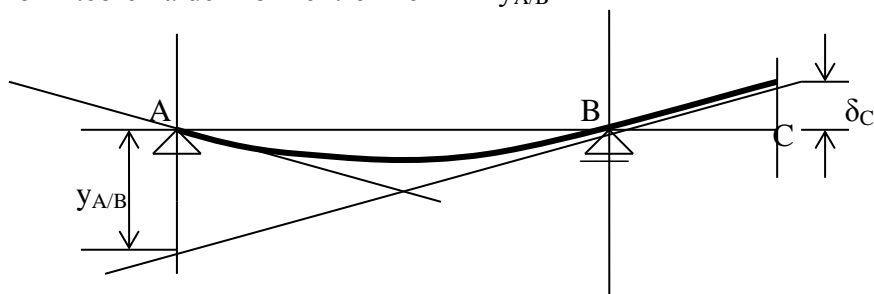
$$y_a = \delta = \frac{1}{2} \left( 1.633 \times \frac{5.433}{EI} \right) \times \frac{2}{3} \times 1.633 = \frac{4.829}{EI} \quad (m)$$

### 1.3.3. Vigas bi-apoiadas estendendo-se para além dos apoios

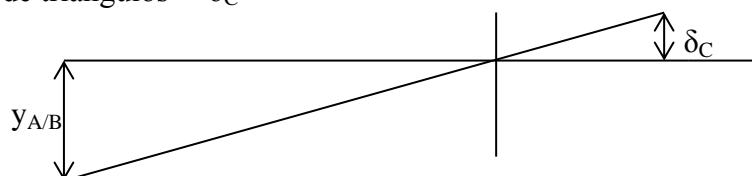
No caso de barras vigas bi-apoiadas estendendo-se para além dos apoios, há ainda a distinguir se a extensão tem ou não carregamento.

#### Sem carregamento entre B e C:

Aplicar o 2º teorema de Mohr entre A e B  $\rightarrow y_{A/B}$

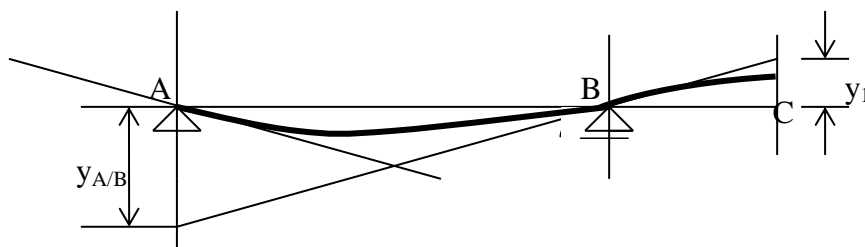


Da semelhança de triângulos  $\rightarrow \delta_C$

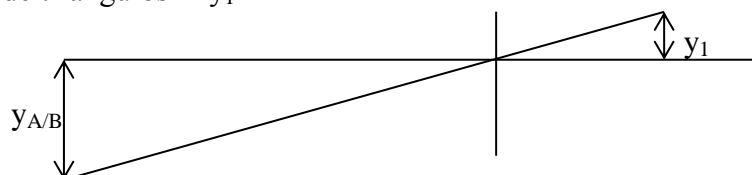


#### Com carregamento entre B e C:

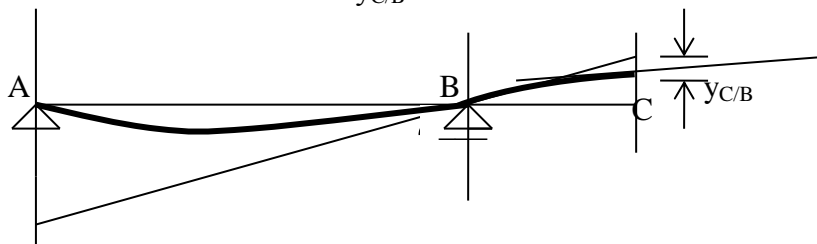
Aplicar o 2º teorema de Mohr entre A e B  $\rightarrow y_{A/B}$



Da semelhança de triângulos  $\rightarrow y_1$

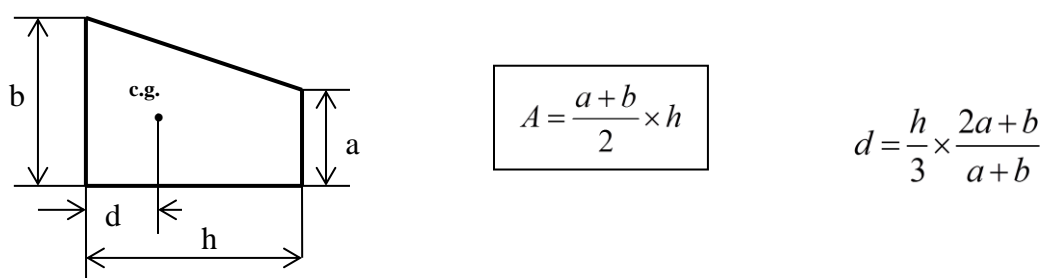
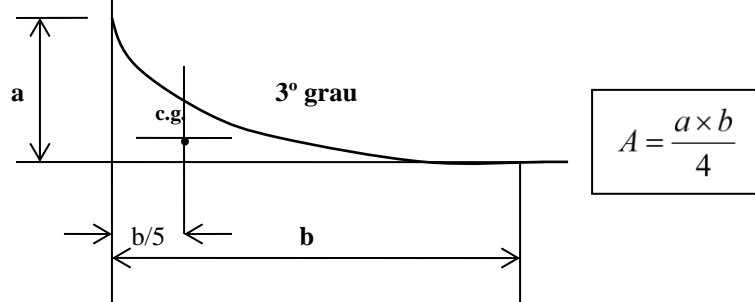
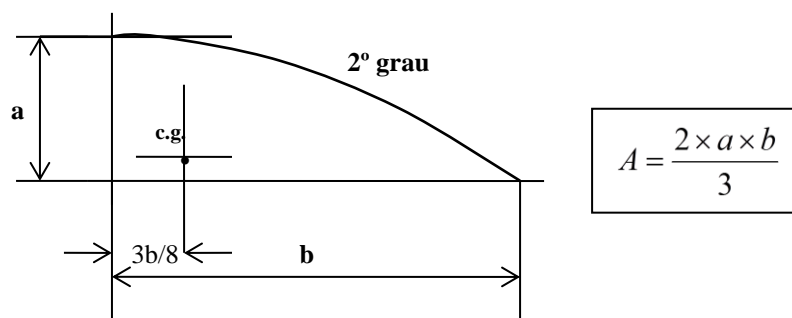
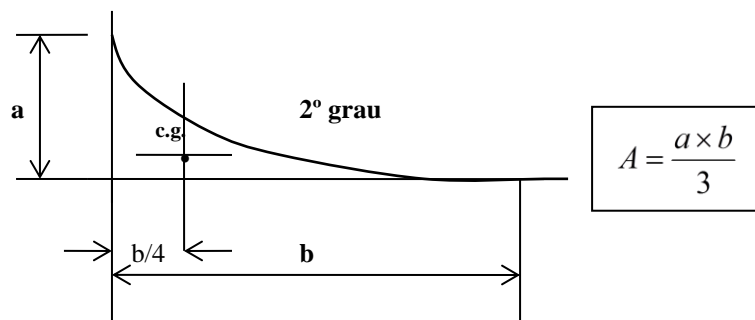


Aplicar o 2º teorema de Mohr entre C e B  $\rightarrow y_{C/B}$



$$\delta_C = y_1 - y_{C/B}$$

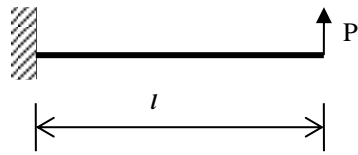
### 1.4. Tabela



### 1.5. Caderno de problemas de deformação em momento flector

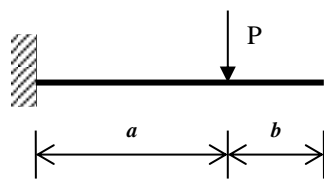
#### 1.5.1. Vigas em consola

1) Para a barra da figura seguinte, com rigidez de flexão igual a EI, calcule a expressão do deslocamento da extremidade.



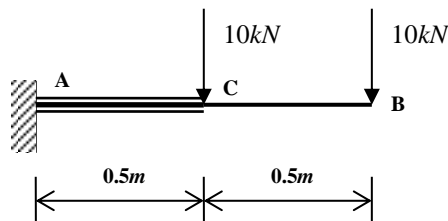
Solução:  $\delta = \frac{1 \cdot Pl^3}{3 EI}$

2) Para a barra da figura seguinte, com rigidez de flexão igual a  $EI$ , calcule a expressão do deslocamento da extremidade livre.



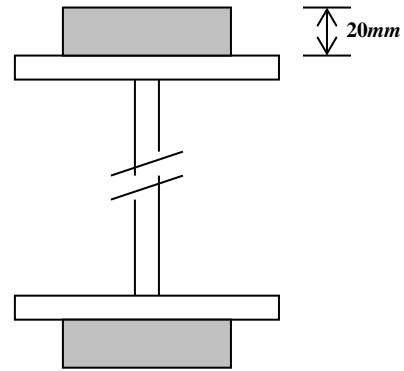
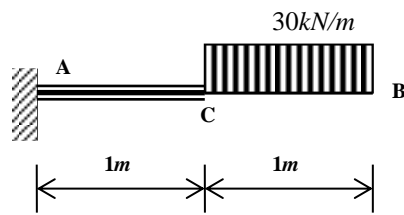
Solução:  $\delta = \frac{Pa^2}{2EI} \left( \frac{2}{3}a + b \right)$

3) A consola da figura seguinte, é constituída por um perfil INP 12, sendo que no troço AC o perfil está reforçado por chapa de secção  $70mm \times 6mm$ , soldada em ambos os banzos. Admita material com  $E = 200GPa$ . Calcule o deslocamento da extremidade B.



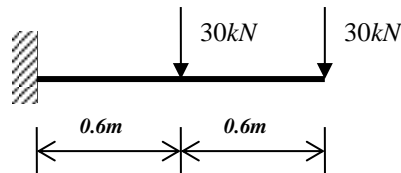
Solução:  $\delta = 3.6mm$

4) A consola AB da figura seguinte, é constituída por um perfil INP 16, sendo que no troço AC o perfil está reforçado por barra de secção  $50mm \times 20mm$ , soldada em ambos os banzos. Admita material com  $E = 200GPa$ . Calcule o deslocamento da extremidade B.



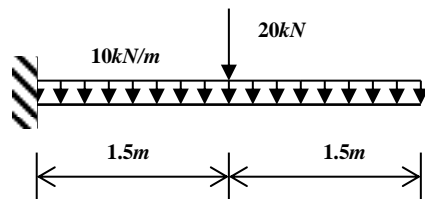
Solução:  $\delta = 11.28 \text{ mm}$

5) Para a barra da figura seguinte, calcule o valor do deslocamento da extremidade livre. Admita um perfil com momento de inércia em relação ao eixo neutro  $I = 4580 \text{ cm}^4$  e feito de material com módulo de elasticidade  $E = 200 \text{ GPa}$



Solução:  $\delta = 2.48 \text{ mm}$

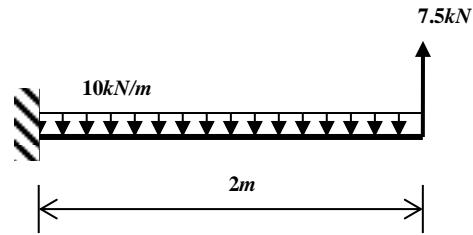
6) Para a barra da figura seguinte, com rigidez de flexão igual a  $EI$ , calcule a expressão do deslocamento da extremidade. Sugere-se a utilização do princípio da sobreposição.



Solução:  $\delta = \frac{157.5}{EI}$  (em metros)

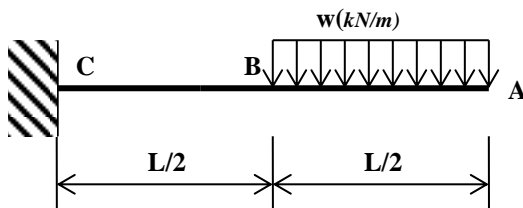
7) Para a barra da figura seguinte, com rigidez de flexão igual a  $EI$ , calcule o deslocamento da extremidade. Sugere-se a utilização do princípio da sobreposição.





Solução:  $\delta = 0$

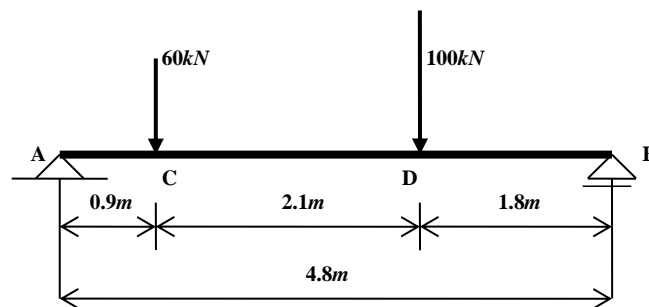
8) Determine o deslocamento do ponto A da viga, admitindo  $EI$  como valor de rigidez à flexão:



Solução:  $\delta = \frac{0.107wL^4}{EI}$

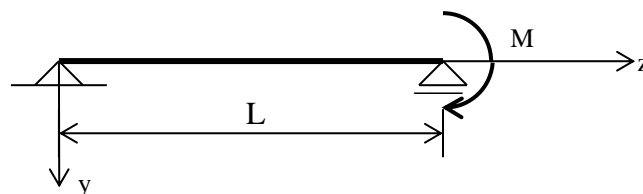
### 1.5.2. Vigas bi-apoiadas

9) Determine o deslocamento do ponto D da viga, admitindo:  
 $E = 200\text{GPa}$  e  $I = 216 \times 10^{-6}\text{m}^4$ .



Solução:  $\delta_D = 6.17\text{mm}$

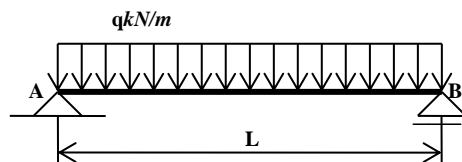
10) Considere a seguinte viga sujeita a um momento no apoio simples.



- Utilize os teoremas de Mohr para determinar a distância  $z$  que localiza, no vão da viga, o ponto onde se dá o deslocamento máximo.
- Determine o deslocamento máximo.

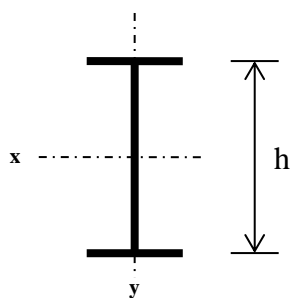
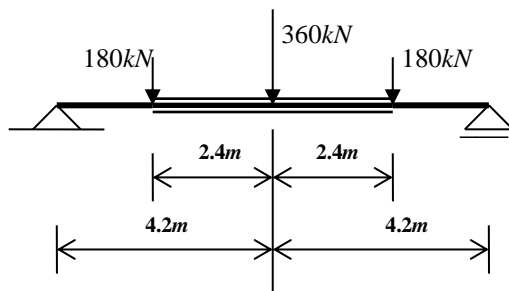
Solução a)  $z = 0.577 \times L$ ; b)  $\delta_{\max} = 0.064L^2 \frac{M}{EI}$

11) Determine o deslocamento máximo da viga, admitindo uma rigidez à flexão de  $EI$ .



Solução:  $\delta = \frac{5qL^4}{384EI}$

12) A viga da figura seguinte, é constituída por um perfil I (características abaixo indicadas), reforçado na parte central por chapa de secção  $320\text{mm} \times 14\text{mm}$ , soldada em ambos os banzos. Admita material com  $E = 200\text{GPa}$ . Calcule o deslocamento máximo. (5 valores)

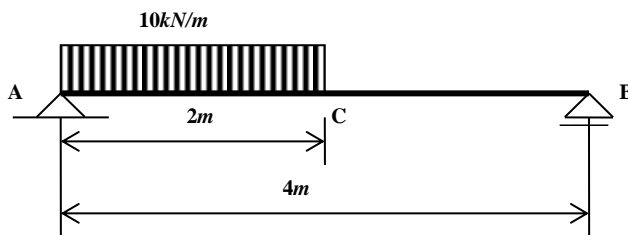


$I_x = 166000\text{cm}^4$   
 $h = 753\text{mm}$

Solução:  $\delta_D = 6.17\text{mm}$

Solução:  $\delta = 12.9\text{mm}$

- 13) Determine o deslocamento do ponto C da viga, admitindo:  
 $E = 200GPa$  e  $I = 452cm^4$ .

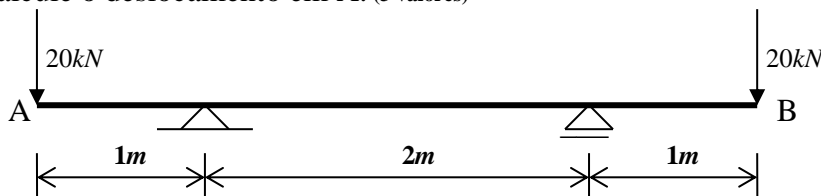


Solução:  $\delta_C = 18.44mm$

### 1.5.3. Vigas bi-apoiadas estendendo-se para além dos apoios

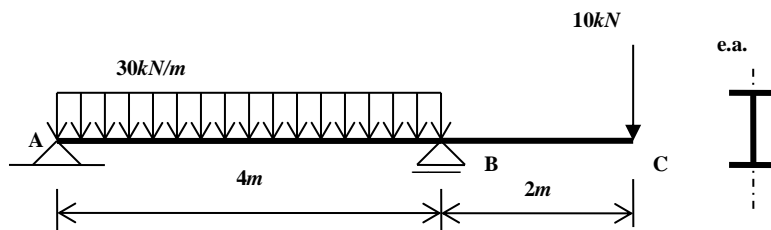
- 14) Considere a viga AB da figura e com uma rigidez à flexão de  $EI$ :

- a) Calcule o deslocamento a meio vão; (3 valores)  
 b) Calcule o deslocamento em A. (3 valores)



Solução: a)  $\delta = \frac{10}{EI}$ ; b)  $\delta = \frac{80}{3EI}$

- 15) Determine o deslocamento na secção C da seguinte viga. Admita um INP200 e um material com  $E = 206GPa$ . Sugere-se a utilização do princípio da sobreposição.



Solução:  $\delta = -18.1mm$

## 2. Instabilidade em compressão axial

### 2.1. Generalidades

Define-se estabilidade como a capacidade do sistema de recuperar o seu estado inicial, após ter sido perturbado da sua posição de equilíbrio. Se o sistema não possuir esta capacidade é classificado como instável.

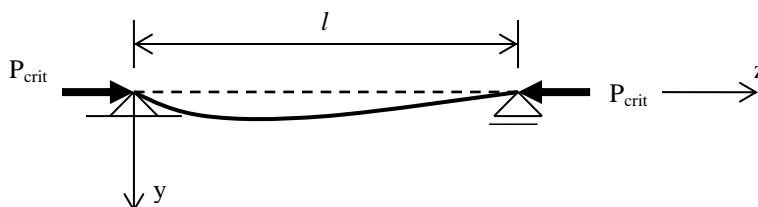
A consola da figura seguinte, comprimida axialmente, ilustra um caso simples de perda de estabilidade:



Acima de determinada força axial verifica-se uma flexão de toda a barra – a barra encurva. A força axial acima da qual se dá a encurvadura (*buckling*) chama-se carga crítica (*critical load*)

## 2.2. Carga crítica de Euler

O matemático suíço do século 18 Leonhard Euler deduziu o valor da carga crítica para uma barra apoiada nas duas extremidades, como indicado na figura seguinte:



$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

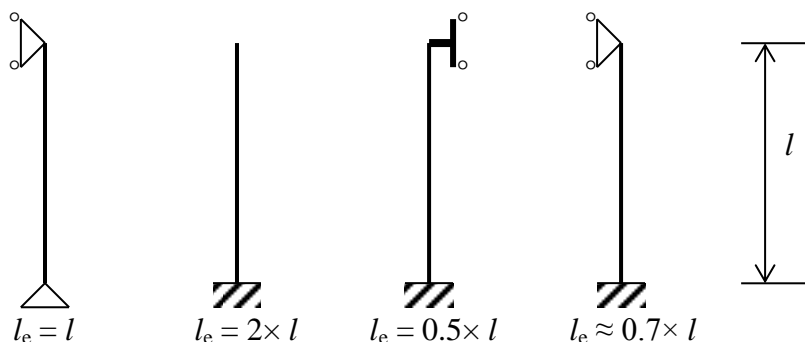
A carga  $P_{crit}$  é conhecida como a carga de encurvadura de Euler. A dedução assenta no pressuposto de que o material tem comportamento elástico linear e que as deformações são muito pequenas.

## 2.3. Efeito dos diferentes tipos de apoio na carga crítica

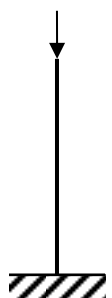
Admitindo um comportamento elástico linear do material e compressão axial (linha de acção da força passa no centro de gravidade da secção) a carga de encurvadura de Euler toma a seguinte expressão geral:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2}$$

A  $l_e$  dá-se o nome de comprimento de encurvadura, o qual depende do tipo de apoio da barra:



Por exemplo a carga crítica de Euler para o pilar da figura seguinte, será:



$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

A encurvadura dar-se-á em torno do eixo (que passa no c.g. da secção transversal) em relação ao qual o momento de inércia é mínimo.

#### **2.4. Expressão geral da carga crítica e coeficiente de esbelteza**

Denomina-se coeficiente de esbelteza (*slenderness ratio*):

$$\lambda = \frac{l_e}{i}$$

$l_e$  - comprimento de encurvadura;  
 $i$  - raio de giração (*radius of gyration*).

Atendendo à noção de raio de giração (*radius of gyration*):

$$i = \sqrt{\frac{I}{\Omega}}$$

$I$  – Momento de inércia da secção;  
 $\Omega$  - área da secção transversal.

A carga de encurvadura de Euler toma a seguinte expressão geral:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2} = \frac{\pi^2 E \Omega}{\lambda^2}$$

Notar portanto que uma peça tem um  $P_{crit}$  baixo (e por isso mais fácil de atingir e a peça encurvar) quanto maior for o seu coeficiente de esbelteza.

A tensão crítica (*critical stress*):

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{\Omega} = \frac{\pi^2 E}{l_e^2} \frac{I}{\Omega}$$

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{l_e^2} i^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

## 2.5. Domínio de aplicação da carga crítica de Euler

A tensão crítica (*critical stress*):

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{\Omega} = \frac{\pi^2 E \Omega}{\lambda^2} \frac{1}{\Omega}$$

Tendo em consideração que o material tem comportamento elástico linear, com tensão limite de proporcionalidade (*proportional limit stress*)  $\sigma_p$ :

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p \Rightarrow \lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

A tensão limite de proporcionalidade  $\sigma_p$  é, no caso dos aços  $\approx 0.8 \times \sigma_{Rd}$ . Desta forma é possível determinar o coeficiente de esbelteza a partir do qual a carga crítica de Euler passa a ser determinante em compressão axial.

Aço	$\sigma_{Rd}$ (MPa)	$\lambda$
Fe 360	235	$\geq 105$
Fe 430	275	$\geq 96$
Fe 510	355	$\geq 85$

Notar, portanto, que para valores de coeficiente de esbelteza indicados na tabela, o cálculo da carga crítica é determinante.

Para valores inferiores do coeficiente de esbelteza a carga crítica não é válida porque se ultrapassa a tensão limite de proporcionalidade (deixa de ser válida a fórmula de Euler). Para valores de  $\lambda \leq 20$ , a tensão limite é o valor de cálculo da resistência do material ( $\sigma_{Rd}$ ), pelo que a carga de compressão terá de ser  $\leq \sigma_{Rd} \times \Omega$ .

## 2.6. Dimensionamento em compressão axial

Para  $\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$

A carga admissível de compressão axial é dada por:  $P_{adm} = \frac{P_{crit}}{\psi}$ , onde  $\psi$  é o coeficiente de segurança ( $> 1$ ).

Para  $\lambda \leq 20$

A carga admissível de compressão axial é dada por:  $P_{adm} = \sigma_{Rd} \times \Omega$

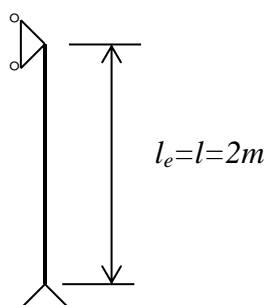
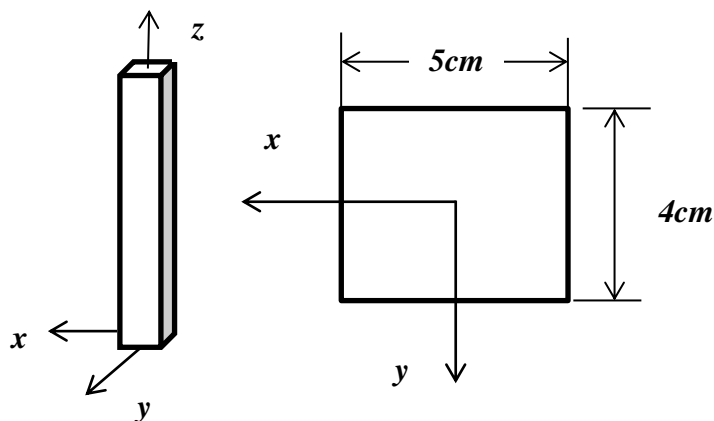
Para  $20 \leq \lambda \leq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$

A carga admissível de compressão axial é dada por:  $P_{adm} = \sigma_{adm} \times \Omega$

O valor de  $\sigma_{adm} = f(\lambda)$  é retirado de curvas empíricas das quais a mais utilizada para o aço é a recta de Tetmayer.

## 2.7. Problema resolvido

Uma barra muito esbelta de secção rectangular  $40\text{mm}\times 50\text{mm}$ , articulada em ambas as extremidades, está sujeita a uma compressão axial. A barra tem  $2\text{m}$  de comprimento e é feita de material com  $\sigma_p=230\text{MPa}$  e  $E=200\text{GPa}$ . Determine a carga crítica.



Determinação da esbelteza da barra:

$$\lambda = \frac{l_e}{i} \quad \text{em que } i = \sqrt{\frac{I}{\Omega}}$$

No plano xz:

$$\lambda_y = \frac{l_e}{i_y} = \frac{200}{1.443} = 138.6 \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{\Omega}} = \sqrt{\frac{4 \times 5^3}{4 \times 5}} = 1.443\text{cm}$$

No plano yz:

$$\lambda_x = \frac{l_e}{i_x} = \frac{200}{1.154} = 173.3 \quad i_x = \sqrt{\frac{I_x}{\Omega}} = \sqrt{\frac{5 \times 4^3}{4 \times 5}} = 1.154\text{cm}$$

A maior esbelteza é encontrada no plano yz. Será nesse plano que se dará encurvadura, caso se atinja a carga crítica:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2} = \frac{\pi^2 E\Omega}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^6 \times 20 \times 10^{-4}}{173.3^2} = 131.5kN$$

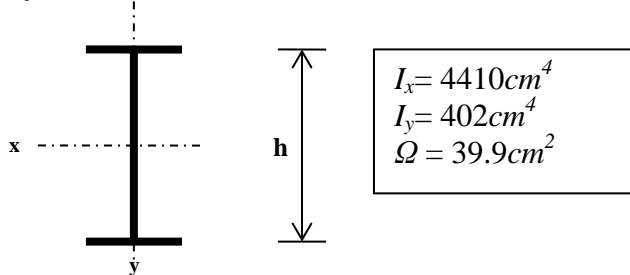
Verificação da validade de utilizar a carga crítica de Euler neste problema:

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{200 \times 10^6}{230 \times 10^3}} = 92.64 \quad 173.3 \geq 92.64 \quad , \text{ logo é válido.}$$

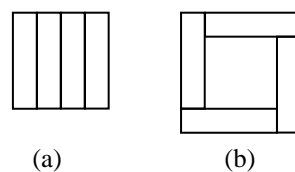
## 2.8. Problemas não resolvidos

1) Uma barra muito esbelta de secção I, articulada em ambas as extremidades, está sujeita a uma compressão axial. A barra tem 4m de comprimento e  $E=200GPa$ . Determine a carga crítica.

Solução:  $P_{crit} = 495.95kN$



2) Um pilar de comprimento equivalente  $l_e$  pode ser fabricado unindo firmemente quatro componentes de secção  $d \times d/4$ , tal como indicado na figura. Determine a razão entre os valores da carga crítica da opção (a) e opção (b).

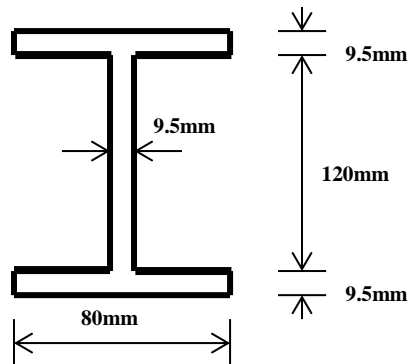


Solução:  $P_{crit}$  da opção b é 2.125 vezes o  $P_{crit}$  da opção a

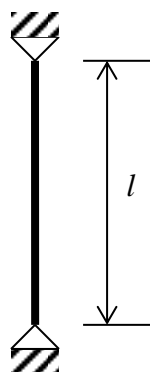
3) Um pilar de comprimento equivalente de 6m tem a secção da figura. Admitindo um material com  $E = 200GPa$ , determine o coeficiente de segurança usado em relação à encurvadura quando a carga axial admissível for de 16kN.

Solução: Coeficiente de segurança = 2.81





4) O pilar da figura tem secção  $100\text{mm} \times 100\text{mm}$ .



Está articulado em ambas as extremidades, e sujeito unicamente a um aumento de temperatura  $\Delta T = 25^\circ\text{C}$ . Admita que o material tem  $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$  e  $E = 200\text{GPa}$ . Determine o comprimento  $l$  acima do qual haverá encurvadura do pilar.

Solução:  $l \geq 5.3\text{m}$

Nota: Recordar de II.3. Deformações axiais:

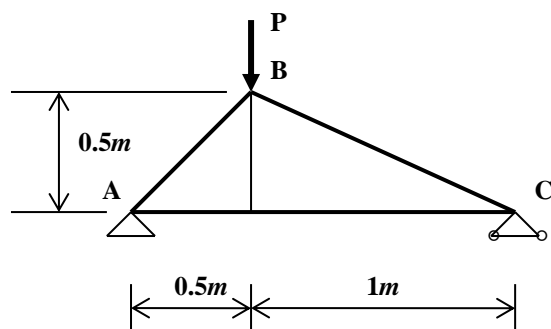
Se além disso a peça estiver sujeita a uma temperatura diferente da de fabrico ou montagem, o alongamento é dado por:

$$\Delta l = \left( \frac{N}{E\Omega} + \alpha \Delta T \right) \times l$$

sendo  $\Delta T$  o acréscimo de temperatura relativamente à temperatura de montagem e  $\alpha$  o coeficiente de dilatação linear do material (*coefficient of thermal expansion of the material*).

5) A estrutura da figura é feita de perfis circulares de aço ( $E = 200\text{MPa}$ ) com as seguintes dimensões:

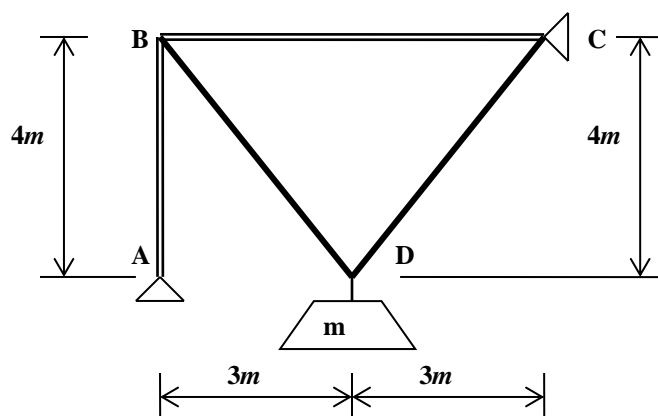
$AB = 15\text{mm}$  de diâmetro;  $BC = 20\text{mm}$  de diâmetro;  $AC = 15\text{mm}$  de diâmetro.



Considerando a possibilidade de encurvadura no plano da estrutura, determine o valor **admissível** para a carga P, adoptando um coeficiente de segurança de 2.6.

Solução:  $P_{adm} = 4kN$

6) As barras articuladas AB e BC da estrutura da figura são perfis tubulares de alumínio ( $E = 70MPa$ ) com 120mm de diâmetro exterior e 10mm de espessura.



Um cabo (BDC) ligado à estrutura, suspende uma massa m. Considerando a possibilidade de encurvadura no plano da estrutura, determine o valor **admissível** para a massa m, adoptando um coeficiente de segurança de 3.5.

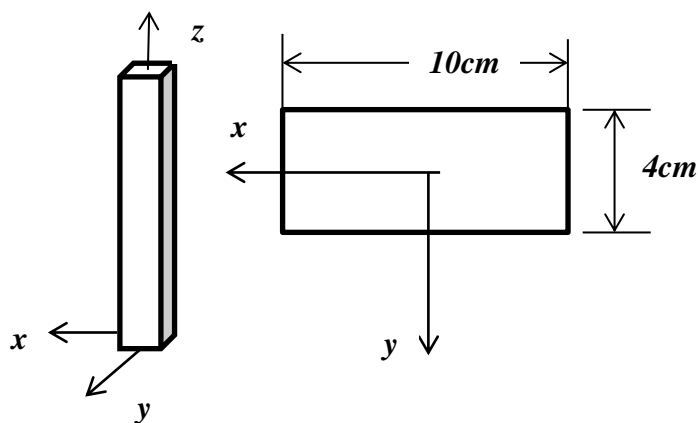
Solução:  $m_{adm} = 7855kg$

## 2.9. Caderno de problemas de instabilidade em compressão axial

7) Uma barra muito esbelta de secção rectangular  $4cm \times 10cm$  está sujeita a uma compressão axial. A barra tem 2m de comprimento e é feita de material com  $\sigma_{Rd} = 235MPa$  e  $E = 210GPa$ .

No plano ZY a barra considera-se encastrada na base e articulada no topo. No plano ZX a barra considera-se encastrada na base e livre no topo.

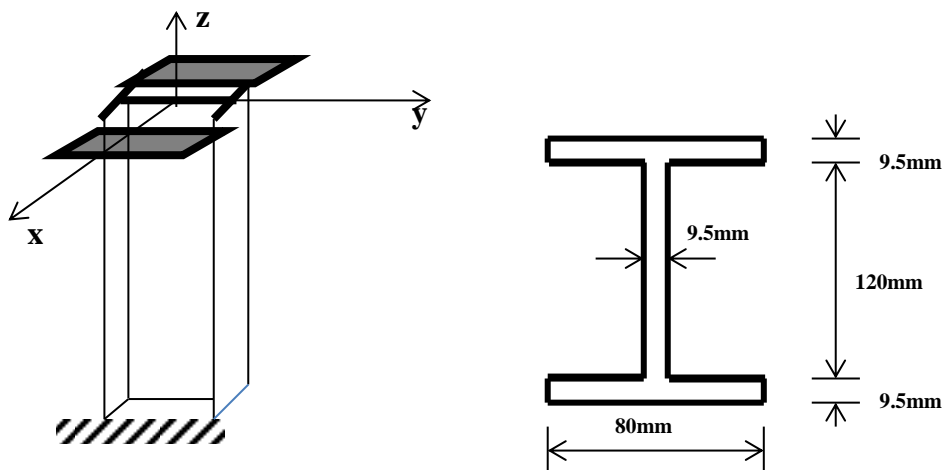
Determine a carga crítica.



Solução:  $P_{crit} = 431.8 kN$

8) Um pilar de secção em I tem 5m de altura. Está encastrado na base. Na extremidade superior existem duas placas finas que impedem essa extremidade de se movimentar num dos planos ortogonais da figura, mas não impedem movimentos no outro plano ortogonal.

Admitindo um material com  $E = 200 GPa$  e um coeficiente de segurança = 2.5

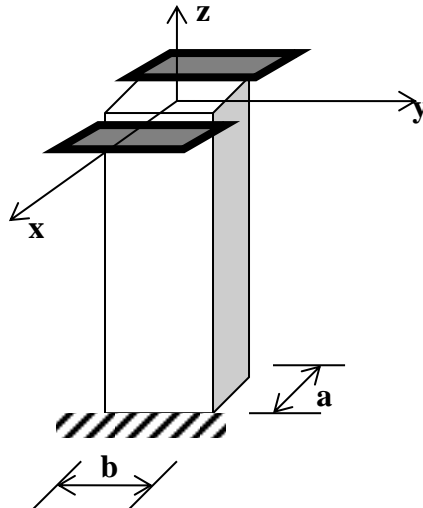


Determine a carga axial admissível.

Solução:  $P_{adm} = 52.8 kN$

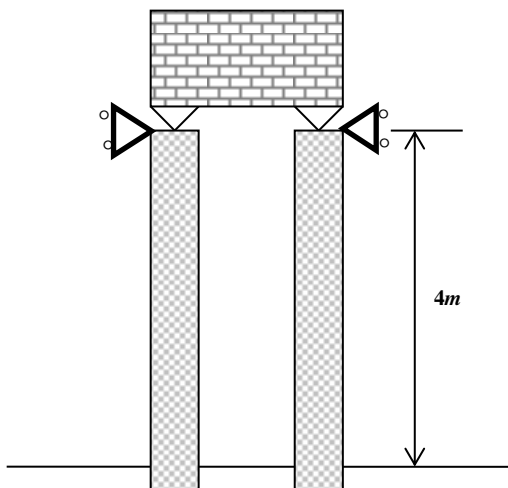
9) Um pilar de secção rectangular tem comprimento  $\ell$ . Está encastrado na base. Na extremidade superior existem duas placas finas que impedem essa extremidade de se movimentar num dos planos ortogonais da figura, mas não impedem movimentos no outro plano ortogonal.

- Determinar a relação  $a/b$  entre os lados da secção transversal por forma a se poder ter uma solução de projecto equilibrada em relação à encurvadura;
- Com base na resposta anterior, dimensionar a barra, sabendo:  
 $L = 500 mm$ ;  $E = 70 GPa$ ; Carga axial =  $20 kN$ ; Coeficiente de segurança = 2.5



Solução: a)  $a/b = 0.35$ ; b)  $a = 13.9\text{mm}$ ;  $b = 39.7\text{mm}$ ;

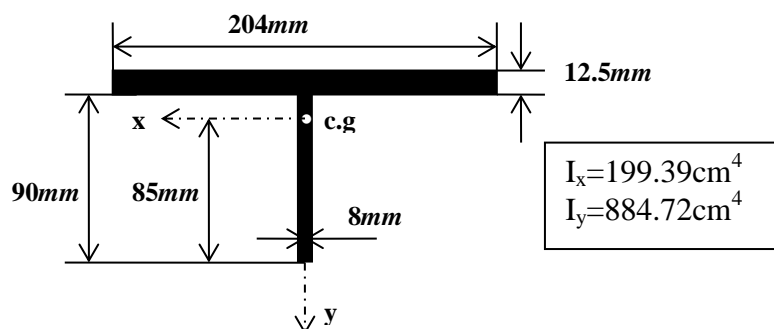
10) Um bloco rígido pesa  $16\text{kN}$  e está suportado por dois pilares.



- a) Admitindo somente a encurvadura no plano da figura, verifique a sua segurança.
- Admita que cada pilar é formado por um tubo com diâmetro exterior de  $44\text{mm}$  e espessura de  $4\text{mm}$ ;
  - Admita  $E = 200\text{Gpa}$ ;
  - Adopte um coeficiente de segurança de 2.8.
- b) Admitindo que, para o aço usado, a fórmula de Euler é válida para valores de esbelteza superiores ou iguais a 105, verifique se está no domínio de aplicação da teoria de Euler.

Solução: a)  $P_{\text{adm}} = 18.26\text{kN} > 16\text{kN}$ ;  $\lambda = 197 > 105$ , válido.

11) Um pilar tem a secção indicada na figura seguinte:



Admita:

- O pilar está biapoiado;
- Comprimento do pilar = 3m;
- $E = 200Gpa$ ;
- Coeficiente de segurança de 2.2.

a) Calcule a carga de segurança segundo a teoria de Euler;

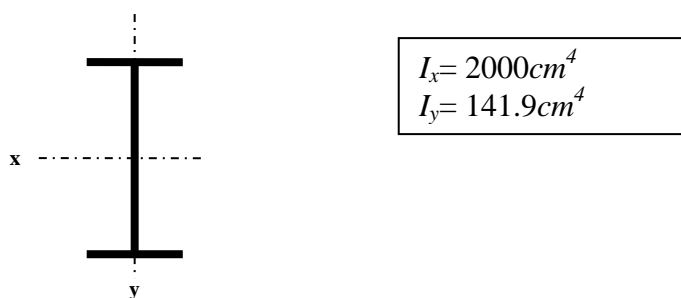
b) Admitindo que, para o aço usado, a teoria de Euler é válida para valores de esbeltez superiores ou iguais a 105, verifique se está no domínio de aplicação desta teoria.

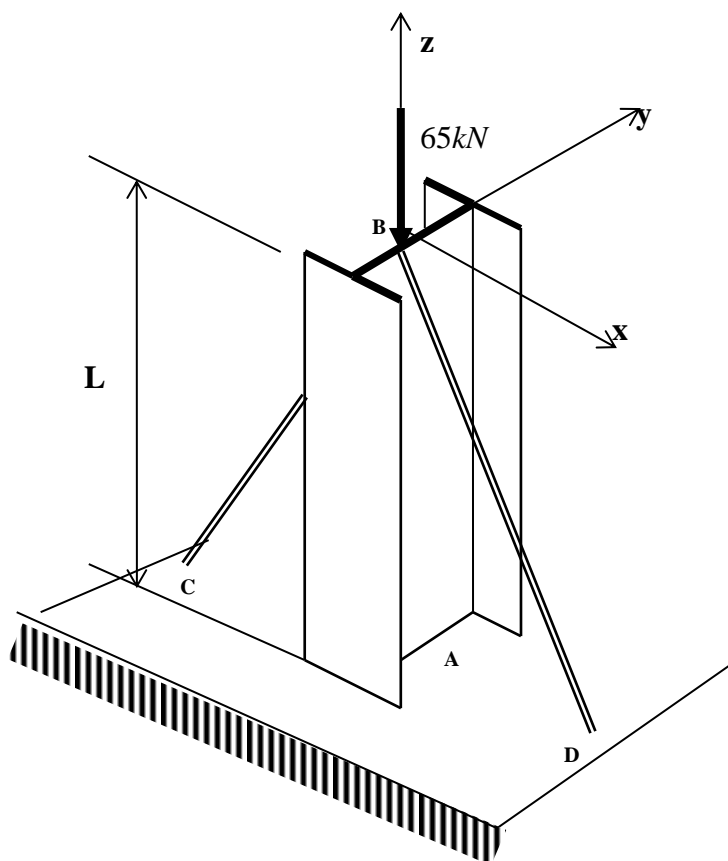
Solução: a)  $P_{adm} = 200kN$ ; b)  $\lambda = 121.5 > 105$ , válido.

12) O pilar AB suporta uma carga centrada de 65kN.

Os cabos BC e BD estão esticados e impedem o movimento do ponto B no plano xz, mas não impedem o movimento no plano yz. Desprezando o efeito da tracção nos cabos determine o máximo valor **admissível** para o comprimento L, adoptando um coeficiente de segurança de 2.2 e um material com  $E = 200GPa$ .

O perfil I tem as seguintes características:

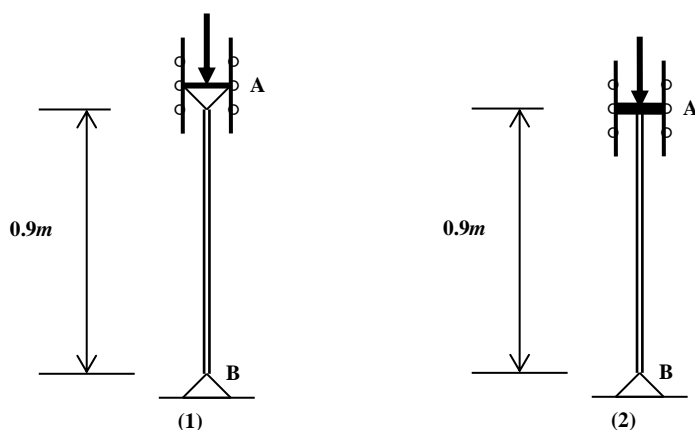




Solução:  $l \leq 6.32\text{ m}$

**13)** O pilar AB da figura (1) tem secção circular cheia com  $20\text{ mm}$  de diâmetro. Suporta uma carga centrada de  $7.5\text{ kN}$ .

Uma solução alternativa está contemplada na figura (2):

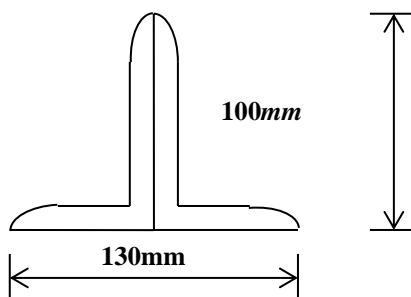


a) Tendo em consideração a figura (1), determine o coeficiente de segurança usado. Admita um material com  $E = 200\text{ GPa}$ .

b) Tendo em consideração a figura (2), determine o diâmetro mínimo para o pilar, admitindo o coeficiente de segurança da alínea anterior e a mesma carga de  $7.5\text{ kN}$ . Admita um material com  $E = 200\text{ GPa}$ .

Solução: a)  $\psi = 2.55$ ; b)  $d \geq 16.73\text{ mm}$

14) Um pilar tem secção formada pela ligação de dois perfis cantoneira de abas desiguais 100×65×8 (ver dados em tabela anexa), como mostra a figura.

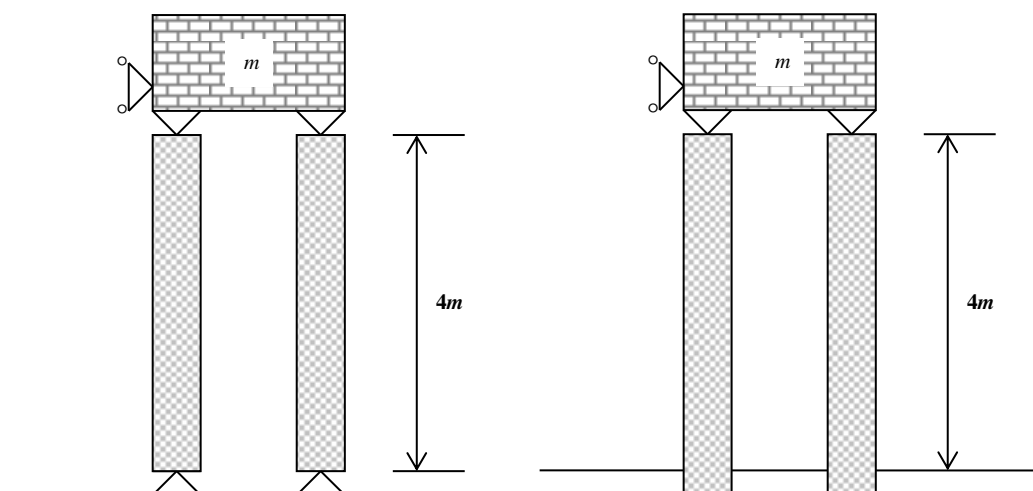


a) Admita que o comprimento efectivo do pilar ( $l_e$ ) é de 3m. Admitindo um material com  $E = 200GPa$  e um coeficiente de segurança de 1.92, calcule a carga centrada de compressão admissível para o pilar;

b) Admitindo que, para o aço usado, a fórmula de Euler é válida para valores de esbeltez superiores ou iguais a 105, verifique se está no domínio de aplicação da teoria de Euler  
 Solução: a)  $P_{adm} = 166.1kN$ ; b)  $\lambda = 125.4 > 105$ , válido.

15) Um bloco rígido de massa  $m$  pode ser suportado por dois pilares, em qualquer das opções indicadas. Cada pilar é formado por um tubo com diâmetro exterior de 44mm e espessura de 4mm. Admita  $E = 70GPa$ .

Admitindo somente a encurvadura no plano da figura e considerando um coeficiente de segurança de 2.8, calcule a massa  $m$  (kg) admissível nas duas opções.

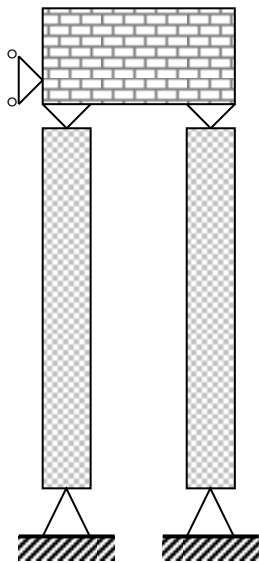


Nota: o momento de inércia de uma secção circular cheia de diâmetro  $d$  é igual a

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Solução:  $m_{adm} = 319.6kg$ , à esquerda;  $m_{adm} = 652.2kg$ , à direita.

16) Um bloco rígido pesa  $16kN$  e está suportado por dois pilares.



Admita:

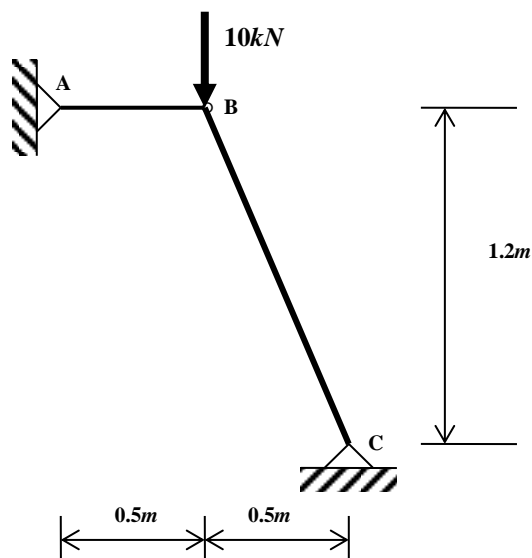
- A encurvadura ocorre preferencialmente no plano da figura;
- Cada pilar é um tubo com diâmetro exterior de  $44mm$  e espessura de  $4mm$ ;
- $E = 200Gpa$ ;
- Coeficiente de segurança de 2.8.

a) Calcule a altura máxima de cada pilar para que se verifique a segurança segundo a teoria de Euler.

b) Admitindo que, para o aço usado, a teoria de Euler é válida para valores de esbeltez superiores ou iguais a 105, verifique se está no domínio de aplicação desta teoria.

Solução: a)  $\ell = 2.99m$ ; b)  $\lambda = 210.4 > 105$ , válido.

17) A estrutura da figura é constituída por duas bielas de aço:

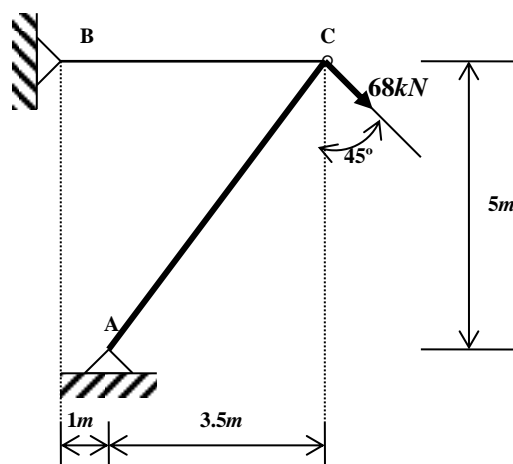


a) Considerando somente a possibilidade de encurvadura no plano da estrutura, dimensione as barras a ela sujeitas.

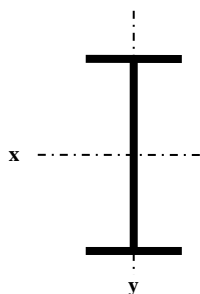


- Admita que as barras são varões (secção circular cheia);
  - Admita  $E = 200GPa$ ;
  - Adopte um coeficiente de segurança de 2.6.
- b) Admitindo que, para o aço usado, a fórmula de Euler é válida para valores de esbeltez superiores ou iguais a 105, verifique se está no domínio de aplicação da teoria de Euler.  
 Solução: a)  $d \geq 1.29cm$ ; b)  $\lambda = 196.42 > 105$ , válido.

18) A estrutura da figura é constituída por duas bielas de aço:



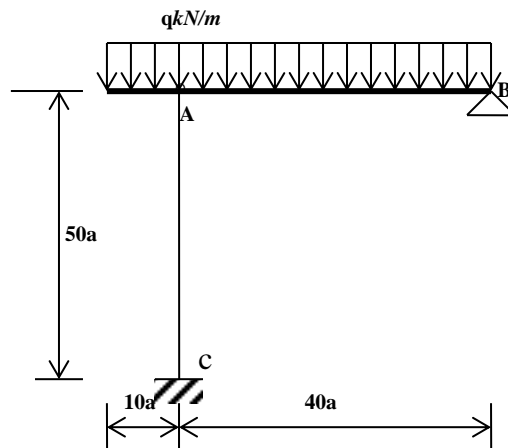
- a) Considerando somente a possibilidade de encurvadura no plano da estrutura, dimensione a barra a ela sujeita.
- Admita que a barra terá de ser um INP;
  - Admita  $E = 210GPa$ ;
  - Adopte um coeficiente de segurança de 5.
- b) Admitindo que, para o aço usado, a fórmula de Euler é válida para valores de esbeltez superiores ou iguais a 105, verifique se está no domínio de aplicação da teoria de Euler.
- c)



Admitindo para o perfil o sistema de eixos  $xyz$ , como se mostra na figura anterior, diga como orienta o perfil na estrutura. Pode, por exemplo, indicar qual dos planos  $xz$  ou  $yz$  é que coincide com o plano da estrutura.

Solução: a) INP14; b)  $\lambda = 111.4 > 105$ , válido.

19) O pilar da estrutura seguinte tem uma secção rectangular cuja dimensão é  $a$  no plano da estrutura e  $2a$  no plano perpendicular. Sabendo que a secção em A não está impedida de se deslocar no plano perpendicular à estrutura, calcule o valor crítico para a carga uniforme  $q$ .

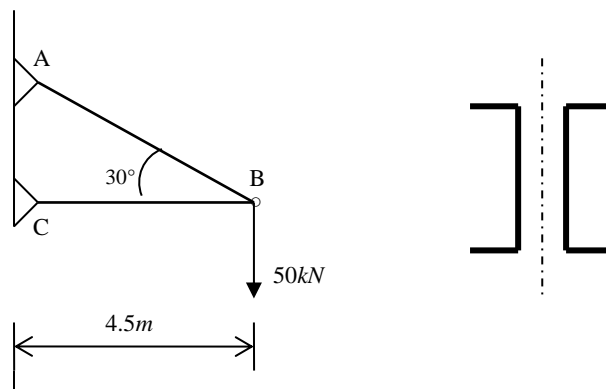


Solução:  $q \leq \frac{\pi^2 E a}{468750} \text{ kN/m}$

20) Calcular a carga admissível para um pilar constituído por um INP20, com 3m de comprimento e articulado nas extremidades. Admita um coeficiente de segurança de 3.8

Solução: 67.6kN

21) Dimensionar a escora BC, admitindo uma secção formada por dois UNP e um coeficiente de segurança de 2.7:



Solução: 2 UNP100, afastados de 2cm.

## Referências

Dias da Silva, V. – *Mecânica e Resistência dos Materiais*, capítulo IX – Deformações em flexão. 2ª Edição. Edição: ZUARI – Edição de Livros Técnicos, Lda. 1999. ISBN: 972-98155-0-X.

Dias da Silva, V. – *Mecânica e Resistência dos Materiais*, capítulo XI – Análise de Fenómenos de Instabilidade. 2ª Edição. Edição: ZUARI – Edição de Livros Técnicos, Lda. 1999. ISBN: 972-98155-0-X.

William Nash – *Resistência de Materiais*, capítulo 14 – Colunas. Edição: McGraw-Hill . 2001. ISBN: 972-773-090-6.