

Universidade de Évora – Escola de Ciência e Tecnologia - Departamento de Engenharia Rural

**UNIVERSIDADE DE ÉVORA**  
**ESCOLA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - DEPARTAMENTO DE**  
**ENGENHARIA RURAL**



**RESISTÊNCIA DE MATERIAIS**

**MOMENTO TORÇOR**

(Apontamentos para uso dos Alunos)

**JOSÉ OLIVEIRA PEÇA**

**ÉVORA**

**2016**

## INDICE

Nota do autor .....	3
1. Generalidades .....	4
1.1. Problema resolvido .....	4
1.2. Problemas não resolvidos .....	6
2. Torção de uma barra de secção circular .....	7
2.1. Problemas resolvidos .....	10
2.2. Problemas não resolvidos .....	11
2.3. Peças cilíndricas formadas por dois materiais concêntricos e diferentes .....	12
3. Momento torçor em peças fechadas de paredes finas.....	12
3.1. Problema resolvido .....	13
3.2. Problemas não resolvidos .....	17
4. Momento torçor em peças de secção rectangular .....	19
4.1. Problemas não resolvidos .....	20
5. Momento torçor em peças abertas de paredes finas .....	21
5.1. Problema resolvido .....	23
5.2. Problemas não resolvidos .....	25
6. Expressões gerais.....	27
6.1. Comparação de secções resistentes à torção.....	28
7. Caderno de problemas de momento torçor.....	29
7.1. Diagramas de esforços.....	29
7.2. Barras de secção circular .....	30
7.3. Peças fechadas de paredes finas .....	31
7.4. Barras de secção rectangular .....	32
7.5. Peças abertas de paredes finas .....	32
7.6. Verificação do estado de tensão .....	34
Referências .....	41

## Nota do autor

Tendo sido interrompido, a partir do ano lectivo de 2015/2016, o 1º Ciclo do Curso de Engenharia Civil, o autor resolveu reunir toda a informação que foi disponibilizada aos alunos da disciplina de Resistência de Materiais, durante os 8 anos em que o curso funcionou na Universidade de Évora.

O presente trabalho versa o tema do *Momento torçor* da Resistência de Materiais e é uma edição revista e acrescentada das edições que foram publicadas em 2013; 2010; 2009 e 2008.

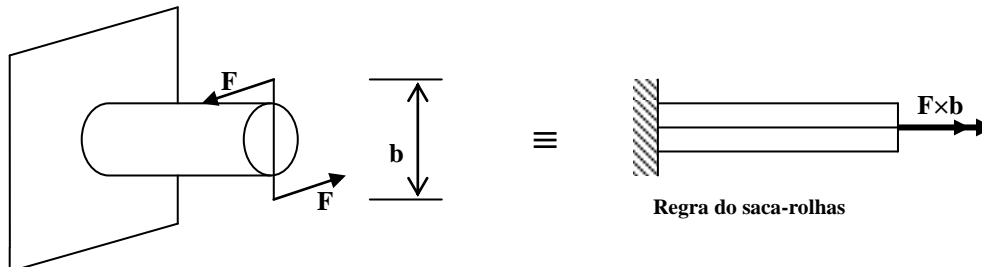
No curso, a disciplina de Resistência de Materiais tinha a duração de um único semestre (4º semestre), pelo que foi necessário seleccionar os temas mais relevantes a ensinar sobre *Momento torçor*.

Nos diversos pontos deste trabalho são apresentados os aspectos formais importantes, completados com problemas resolvidos e não resolvidos de aplicação.

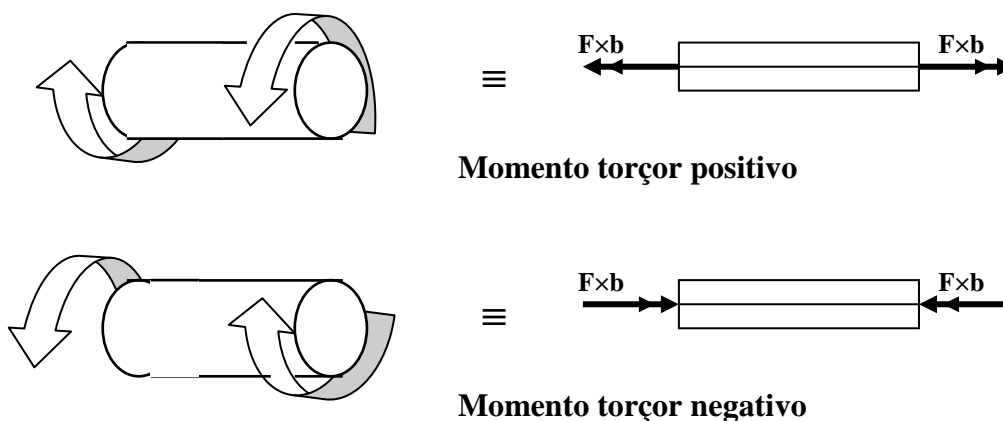
No último ponto estão incluídos todos os exercícios de aplicação sobre *Momento torçor* abordados nas aulas práticas e os que foram alvo de avaliação nas provas de frequência e de exame.

## 1. Generalidades

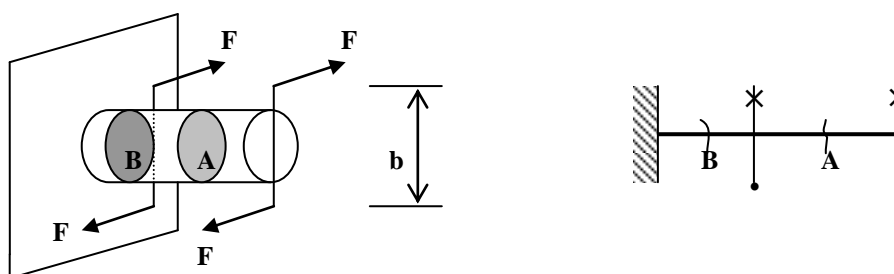
Uma barra está apenas sujeita a momento torçor (*twisting moment*), se:  $M=0$ ;  $N=0$ ;  $T=0$ ;  $M_t \neq 0$ .



Convenção de sinais



Para uma dada secção de uma barra, define-se momento torçor como a soma algébrica dos momentos orientados segundo o eixo da barra que actuam num dos lados da secção.

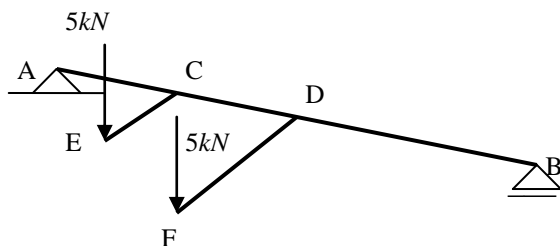


O momento torçor na secção A é igual a  $F \times b$  e o momento torçor na secção B é  $2(F \times b)$ .

Na prática a torção está associada a outros esforços, pelo que há que recorrer aos diagramas de esforços para se conhecerem as secções mais solicitadas.

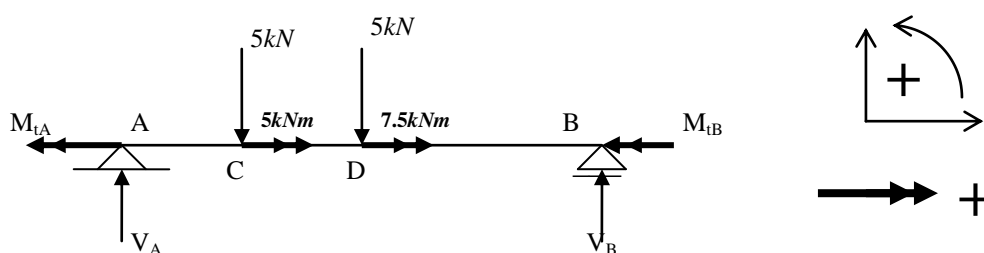
### 1.1. Problema resolvido

1) Trace os diagramas de esforços, admitindo que as secções dos apoios estão impedidas de rodar em torno do eixo da viga.



$AC = CD = 1m$   
 $DB = 2m$   
 $CE = 1m$   
 $DF = 1.5m$

Resolução



Equações do equilíbrio estático:

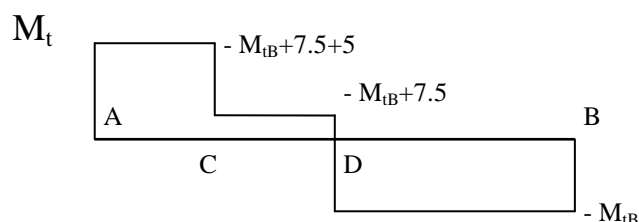
$$V_A - 5 - 5 + V_B = 0 \quad -V_A \times 4 + 5 \times 3 + 5 \times 2 = 0$$

$$V_A = 6.25kN \quad V_B = 3.75kN$$

$$-M_{tA} + 5 + 7.5 - M_{tB} = 0$$

Uma vez que, quer a secção A, quer a secção B estão impedidas de rodar, então o ângulo de rotação de uma destas secções relativamente à outra tem de ser zero. A expressão da rotação relativa entre as secções A e B, constitui a segunda equação que permitirá obter  $M_{tB}$  e  $M_{tA}$ .

Com base na figura anterior podemos traçar o diagrama de momento torçor: .



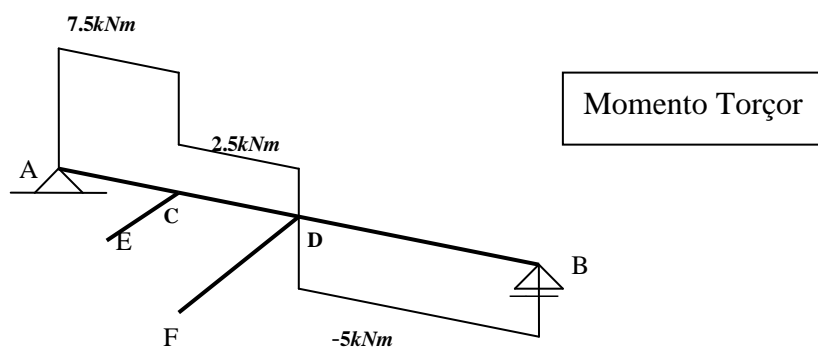
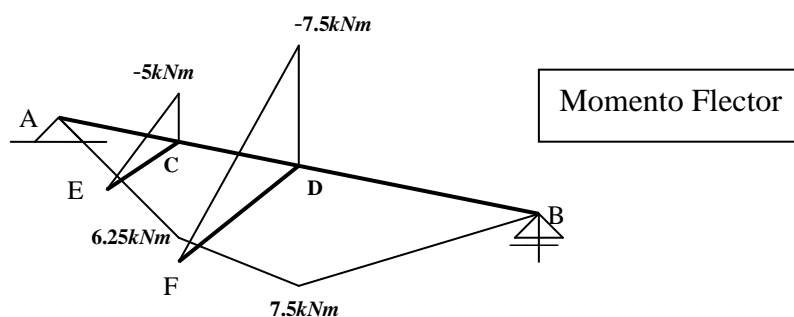
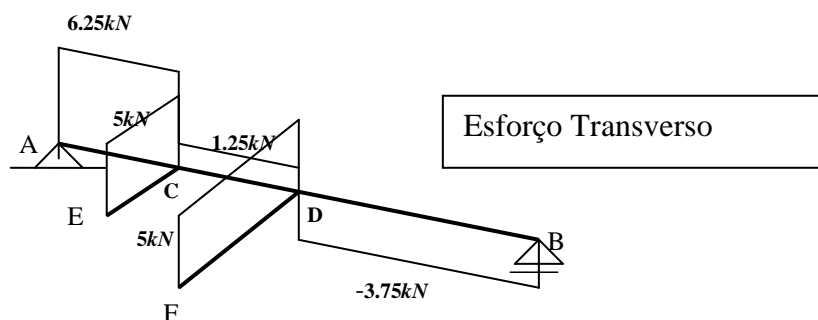
Atendendo à noção de ângulo de rotação por unidade de comprimento, podemos escrever, sucessivamente, o ângulo de rotação entre a secção A e C; adicionar o ângulo de rotação entre a secção C e D; adicionar o ângulo de rotação entre a secção D e B. O resultado será o ângulo de rotação entre a secção A e B, o qual é zero.

$$\frac{(-M_{tB} + 7.5 + 5)}{GJ_t} \times 1 + \frac{(-M_{tB} + 7.5)}{GJ_t} \times 1 + \frac{(-M_{tB})}{GJ_t} \times 2 = 0$$

Da equação anterior:  $M_{tB} = 5kNm$

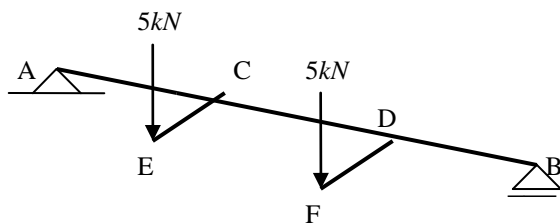
Substituindo na equação do equilíbrio estático:  $M_{tA} = 7.5kNm$

Diagramas:



## 1.2. Problemas não resolvidos

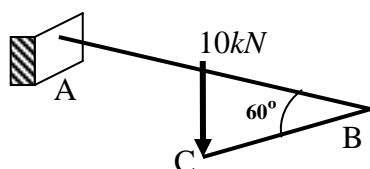
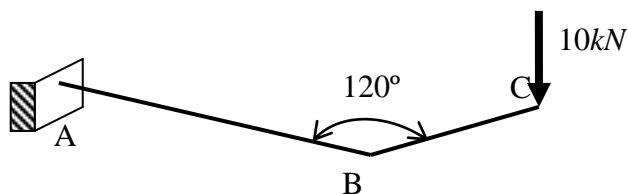
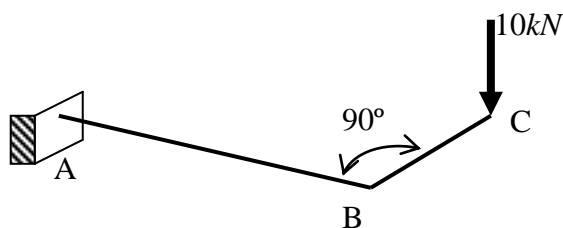
P1.1) Trace o diagrama de esforço transverso, de momento flector e de momento torçor, admitindo que as secções dos apoios estão impedidas de rodar em torno do eixo da viga.



$$AC = CD = DB = 2m$$

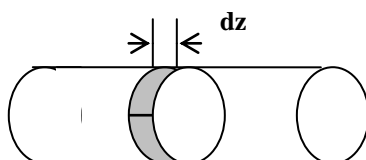
$$CE = DF = 0.75m$$

P1.2) Trace o diagrama de esforço transversal, de momento flector e de momento torção das seguintes estruturas, admitindo  $AB = 3m$  e  $BC = 1.5m$ .

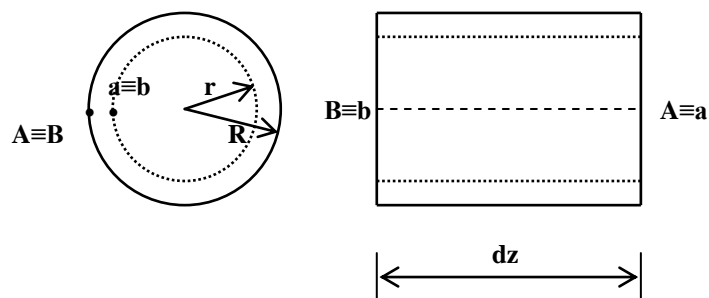


## 2. Torção de uma barra de secção circular

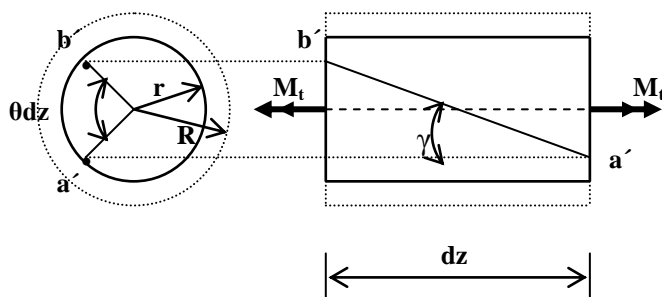
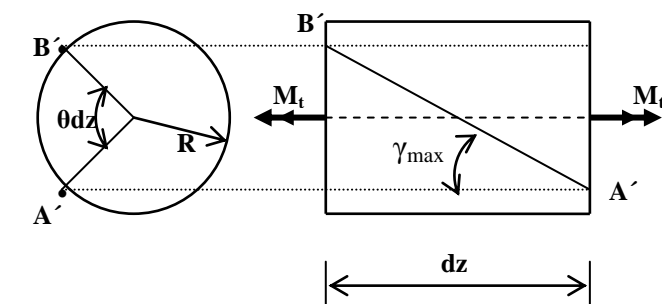
Admitamos a torção de uma barra de secção circular (*torsion of a rod of circular cross section*). Para se estudar a rotação de uma secção relativamente a outra, consideremos uma fatia de barra com comprimento infinitesimal:



Admitamos que uma geratriz  $AB$  na face externa da barra (raio  $R$ ) e uma geratriz  $ab$ , interna no barra situada no raio  $r$ .



Após a aplicação de um momento torçor  $M_t$ , os pontos A e B tomam agora as posições A' e B', enquanto os pontos a e b tomam as posições a' e b'.



O ângulo  $\theta dz$  (em radianos) é o ângulo de rotação das secções afastadas de  $dz$ , uma em relação à outra. Assim:

$\theta \equiv$  ângulo de rotação por unidade de comprimento de barra (*angle of twist per unit of length*). Exprime-se em *rad/m*.

$\gamma \equiv$  ângulo de distorção (*angle of shear*) que ocorre ao raio  $r$ . Exprime-se em radianos.

O ângulo de distorção é uma função de  $r$ , atingindo o seu valor máximo ( $\gamma_{max}$ ) na superfície cilíndrica.

Por razões geométricas e atendendo a que as deformações são infinitesimais, prova-se que:

$$\gamma = \theta \times r$$

Relação entre rotação e momento torçor:

Admitamos que o material de que é feito a barra circular tem comportamento elástico linear, isto é, apresenta a relação seguinte entre a tensão tangencial induzida na torção e o conseqüente ângulo de distorção:

$$\tau = G \times \gamma$$



$\tau \equiv$  tensão tangencial (*shearing stress*).

$G \equiv$  Módulo de distorção (*shearing modulus*).

$\gamma \equiv$  ângulo de distorção (*angle of shear*).

Prova-se que:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p}$$

$\theta \equiv$  ângulo de rotação por unidade de comprimento de barra (*angle of twist per unit of length*). Exprime-se em *rad/m*.

$M_t \equiv$  Momento torçor (*twisting moment*). Exprime-se em *kNm*.

$G \equiv$  Módulo de distorção (*shearing modulus*). Exprime-se em *kPa*.

$I_p \equiv$  Momento polar de inércia da secção (*polar moment of inertia*). Exprime-se em *m<sup>4</sup>*.

$GI_p \equiv$  Módulo de rigidez à torção (*torsional rigidity*). Exprime-se em *kNm<sup>2</sup>*.

Prova-se que a relação entre tensão tangencial e momento torçor é dada pela seguinte expressão:

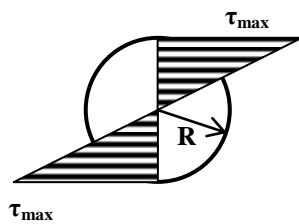
$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \times r$$

$\tau \equiv$  tensão tangencial (*shearing stress*) à distância  $r$  do centro da peça. Exprime-se em *kPa*.

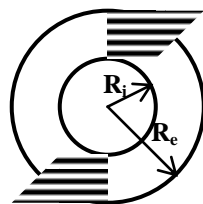
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \times R = \frac{M_t}{\frac{I_p}{R}}$$

$I_p/R \equiv$  Módulo de torção (*polar section modulus*). Exprime-se em *m<sup>3</sup>*.

As expressões acima indicadas são válidas para peças circulares cheias ou ocas, sendo que a diferença está na expressão do momento polar de inércia.



$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$



$$I_p = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4)$$

## 2.1. Problemas resolvidos

1) Um momento torçor de  $1kNm$  é aplicado num veio de secção cilíndrica com  $44mm$  de diâmetro.

a) Qual o valor da tensão tangencial máxima;

b) Qual o valor do ângulo de rotação, sabendo que o veio tem  $1.2m$  de comprimento e é feito de material com  $G = 80GPa$ .

Resolução:

$$a) \tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \times R = \frac{1}{I_p} \times 0.022 \quad I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi \times (0.022)^4}{2}$$

$$\tau_{\max} = 59.79 \text{ MPa}$$

$$b) \theta = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{1}{80 \times 10^6 \times \frac{\pi(0.022)^4}{2}} = 0.03397 \text{ rad/m}$$

O ângulo de rotação entre as extremidades do veio =  $0.03397 \times 1.2 = 0.0408 \text{ rad} = 2.3$  graus.

2) Um veio transmite um binário de  $10kNm$ . Admitindo um valor de cálculo para a tensão resistente do material de  $60MPa$ :

a) Dimensione a secção do veio em (i) secção circular cheia; (ii) secção circular oca, com  $d = \frac{7}{8}D$ .

b) Compare as duas secções no que respeita a material.

Resolução:

a) (i)

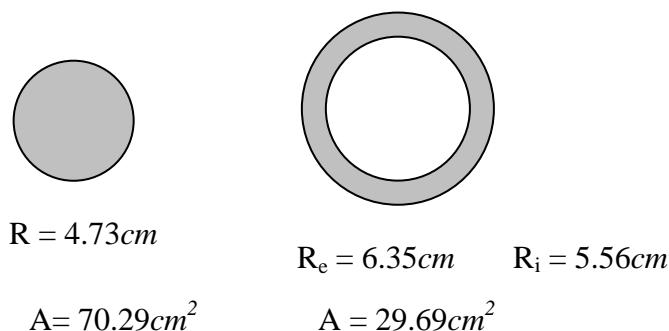
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \times R = \frac{2M_t}{\pi R^3} \leq 60 \times 10^3 \Rightarrow R^3 \geq \frac{2 \times 10}{\pi \times 60 \times 10^3} \Rightarrow R \geq 0.0473 \text{ m} = 4.73 \text{ cm}$$

a) (ii)

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{2}(R_e^4 - R_i^4)} \times R_e = \frac{2M_t}{\pi R_e^3 \left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^4 \right]} \leq 60 \times 10^3$$

$$R_e^3 \left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^4 \right] \geq \frac{2M_t}{\pi \times 60 \times 10^3} \Rightarrow R_e^3 \left[ 1 - \left( \frac{7}{8} \right)^4 \right] \geq \frac{2 \times 10}{\pi \times 60 \times 10^3} \Rightarrow R_e \geq 0.0635 \text{ m} = 6.35 \text{ cm}$$

b)

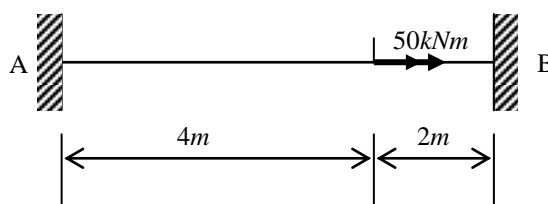


A secção oca tem 42% do material da secção cheia.

## 2.2. Problemas não resolvidos

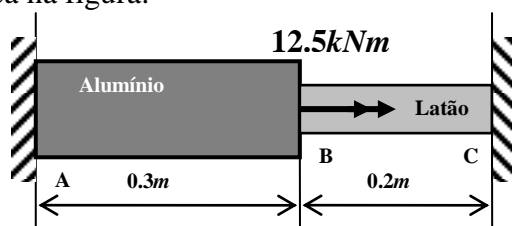
P2.1) Dimensione a barra AB submetida a um momento torçor de  $50\text{kNm}$  utilizando um aço com valor de cálculo da tensão resistente igual a  $235\text{MPa}$  e as seguintes secções:

- Secção circular cheia;
- Secção circular oca com  $1\text{cm}$  de espessura.



Solução: a)  $R \geq 5.39\text{cm}$ ;  $R_e \geq 6.98\text{cm}$

P2.2) A viga ABC é feita de cilindros maciços de alumínio e de latão. Está sujeita ao momento que se indica na figura:



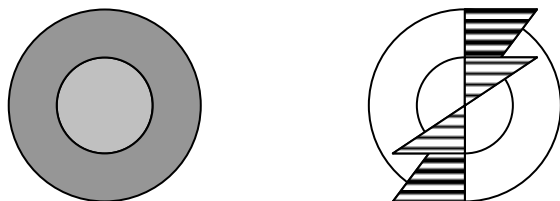
Admita: Diâmetro do alumínio =  $125\text{mm}$  e  $G_{\text{alumínio}} = 26\text{GPa}$   
 Diâmetro do latão =  $75\text{mm}$  e  $G_{\text{latão}} = 39\text{GPa}$

- Calcule os momentos de reacção nos apoios;
- Calcule a tensão máxima no alumínio;
- Calcule a tensão máxima no latão;
- Na secção A (quando observada de B) faça uma representação das tensões devidas ao momento torçor, mostrando o fluxo das tensões e o seu valor relativo na secção;
- Na secção C (quando observada de B) faça uma representação das tensões devidas ao momento torçor, mostrando o fluxo das tensões e o seu valor relativo na secção.

Solução: a)  $|M_{tA}| = 9.68\text{kNm}$ ;  $|M_{tC}| = 2.82\text{kNm}$ ; b)  $\tau_{\text{max}} = 25.236\text{MPa}$ ; c)  $\tau_{\text{max}} = 34.04\text{MPa}$

### 2.3. Peças cilíndricas formadas por dois materiais concêntricos e diferentes

Suponhamos dois materiais a e b com comportamento elástico-linear.



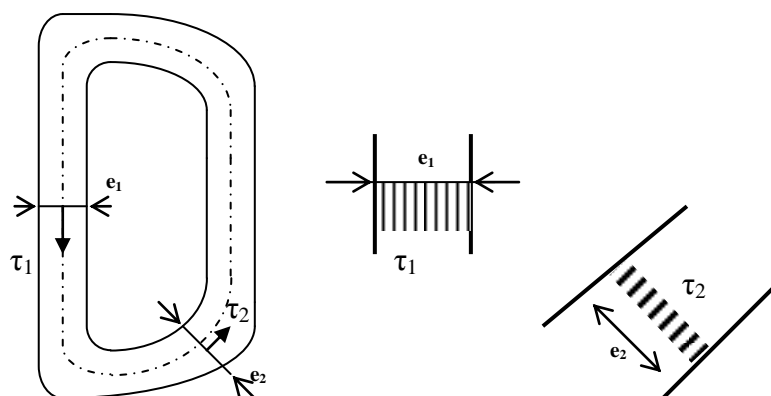
Atendendo a que o ângulo de rotação por unidade de comprimento de barra tem de ser igual nos dois materiais, prova-se que:

$$\theta = \frac{M_t}{G_a I_{pa} + G_b I_{pb}}$$

$$\tau_a = \frac{M_t}{I_{pa} + \frac{G_b}{G_a} I_{pb}} r$$

$$\tau_b = \frac{M_t}{I_{pb} + \frac{G_a}{G_b} I_{pa}} r$$

### 3. Momento torçor em peças fechadas de paredes finas



A torção em peças fechadas de paredes finas (*torsion of a thin-walled closed rod*) pode ser abordada atendendo às fórmulas de Bredt.

O valor aproximado da tensão tangencial num local de espessura  $e$ , pode ser calculado pela 1ª fórmula de Bredt:

$$\tau = \frac{M_t}{2Ae}$$

$A \equiv$  Área da superfície definida pela linha média da peça.

A expressão anterior mostra que o produto  $\tau \times e = \text{constante}$ , isto é a tensão tangencial aumenta nos locais da secção em que a parede é mais fina e, inversamente, diminui nos locais onde a parede é mais espessa.

O valor máximo de tensão tangencial na secção, será:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2Ae_{\min}}$$

No caso de secções com espessura uniforme feitas de material com comportamento elástico linear, o valor do ângulo de rotação, por unidade de comprimento de barra, pode ser calculado pela 2ª fórmula de Bredt:

$$\theta = \frac{M_t}{GJ_t} \quad J_t = \frac{4A^2e}{p}$$

em que  $p$  é o perímetro da linha média da secção.

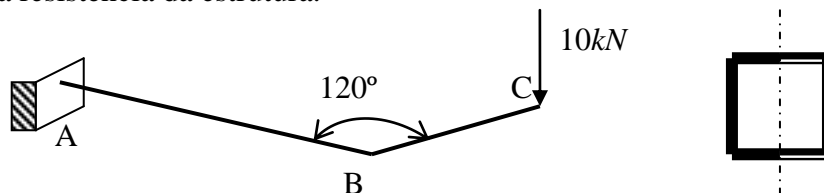
Na expressão anterior o produto  $GJ_t$  é a rigidez de torção.

### 3.1. Problema resolvido

Suponha que a secção transversal da estrutura seguinte é constituída por dois perfis UPN 140 de aço com valor de cálculo da tensão resistente igual a  $235\text{MPa}$ .

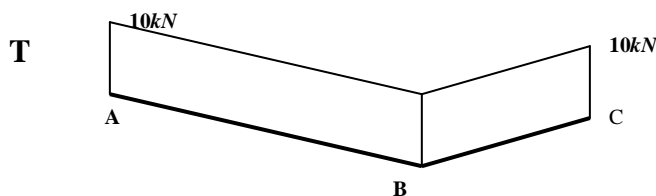
Admita  $AB = 3\text{m}$  e  $BC = 1.5\text{m}$ .

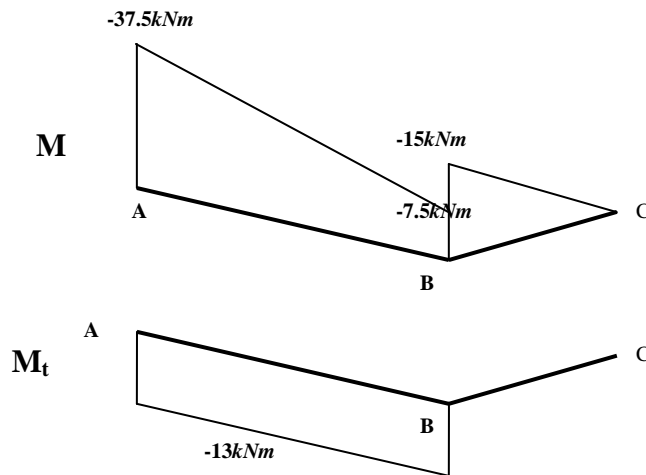
Verifique a resistência da estrutura.



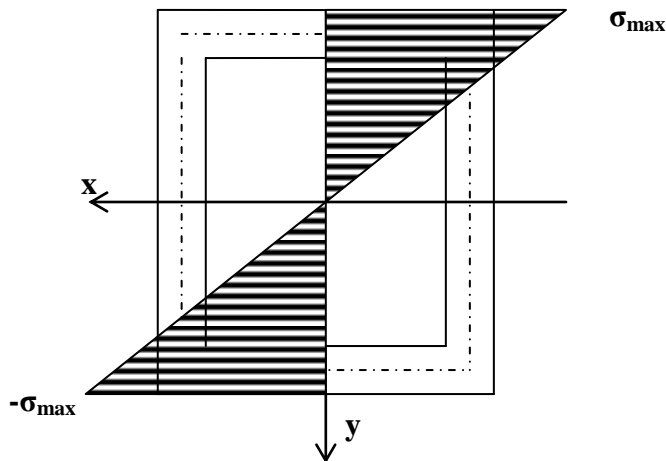
Resolução:

Diagrama de esforços





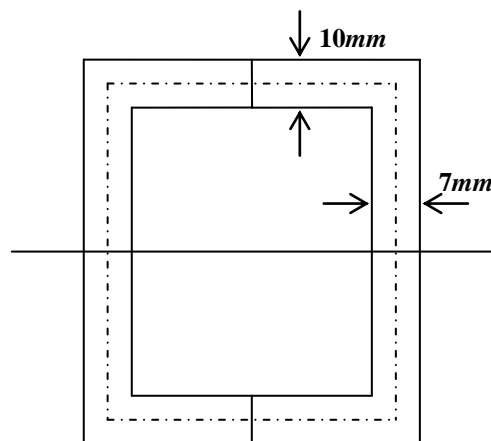
Tensões normais devido a momento flector na **secção A**



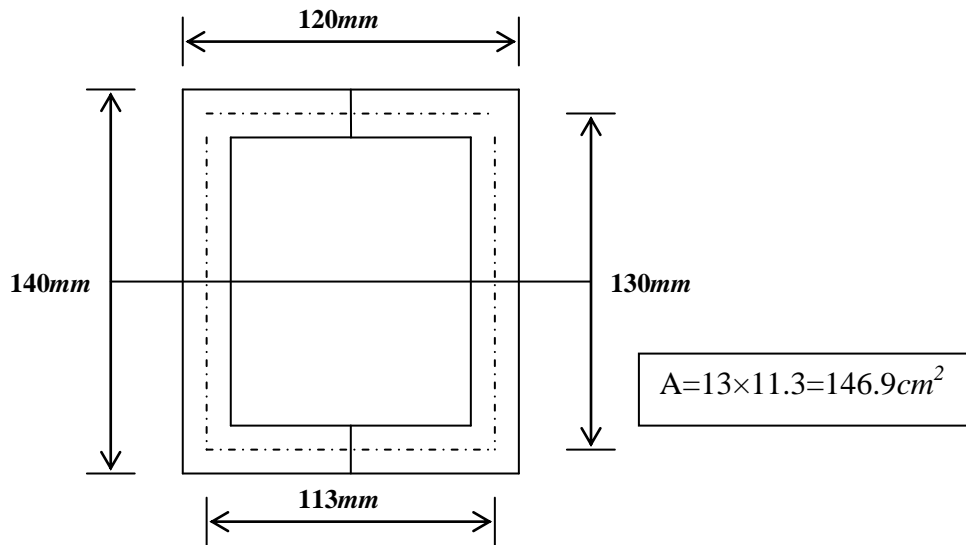
$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{37.5}{2 \times 86.4 \times 10^{-6}} = 0.217 \times 10^6 \text{ kPa} = 217 \text{ MPa} \leq 235 \text{ MPa}$$

Tensões tangenciais devido a momento torçor

Admitamos a seguinte simplificação da secção, em que a parte vertical tem a espessura da alma do perfil U e a parte horizontal tem a espessura a meia largura da aba do U:



A figura seguinte mostra a dimensão da linha média da secção fechada de paredes finas e o cálculo da área interior a essa linha média:

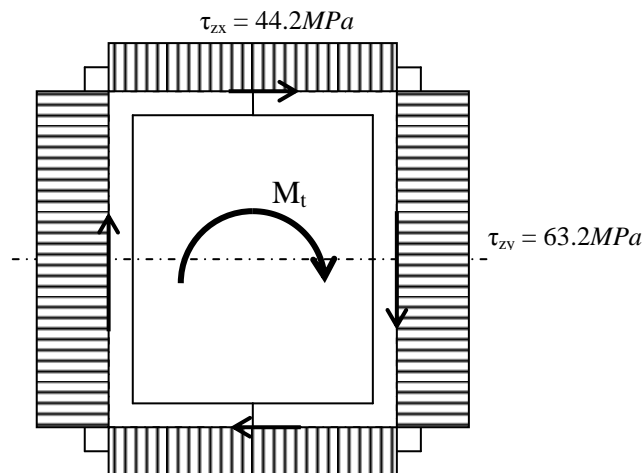


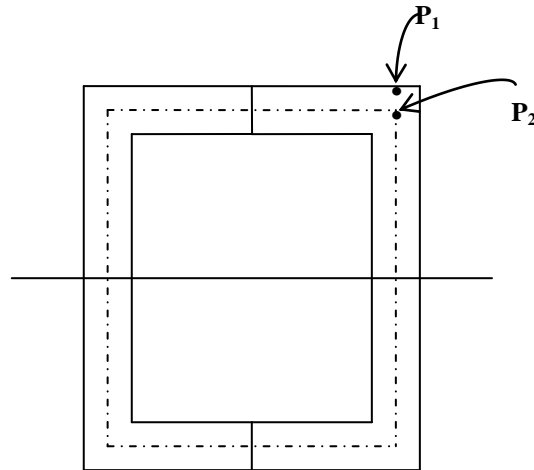
Tensões na parte horizontal da secção:

$$\tau_{zx} = \frac{M_t}{2Ae} = \frac{13}{2 \times 146.9 \times 10^{-4} \times 1 \times 10^{-2}} = 0.0442 \times 10^6 \text{ kPa} = 44.2 \text{ MPa}$$

Tensões na parte vertical da secção:

$$\tau_{zy} = \frac{M_t}{2Ae} = \frac{13}{2 \times 146.9 \times 10^{-4} \times 0.7 \times 10^{-2}} = 0.0632 \times 10^6 \text{ kPa} = 63.2 \text{ MPa}$$





Verifiquemos a tensão composta nos pontos  $P_1$  e  $P_2$  (sem incluir as tensões tangenciais devido ao esforço transversal):

Ponto  $P_1$ :  $\sqrt{217^2 + 3 \times 44.2^2} = 230.1 \text{ MPa} \leq 235 \text{ MPa}$

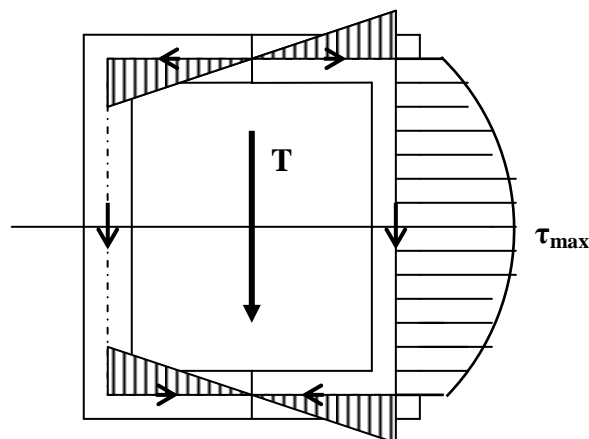
Ponto  $P_2$ :

Tensão normal em  $P_2$ :

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{-37.5}{2 \times 605 \times 10^{-8}} \times (-6.5) \times 10^{-2} = 0.201 \times 10^6 \text{ kPa} = 201 \text{ MPa}$$

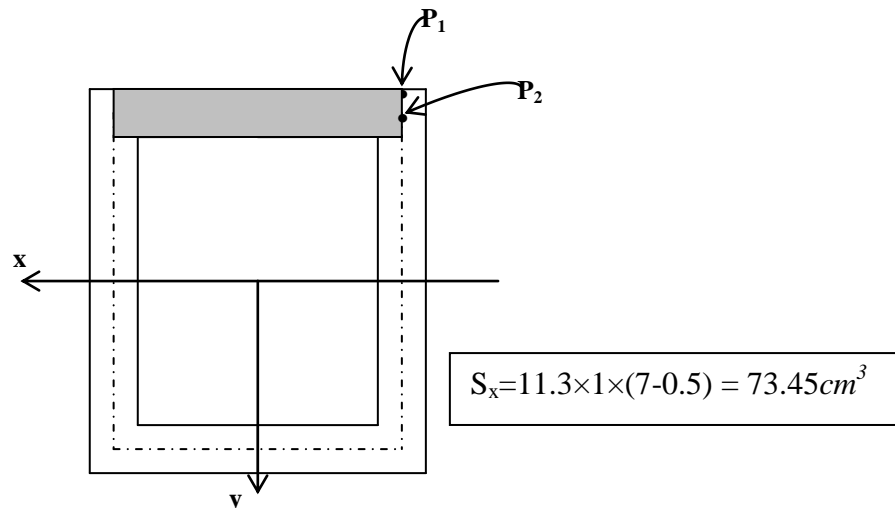
$$\sqrt{201^2 + 3 \times 63.2^2} = 229.3 \text{ MPa} \leq 235 \text{ MPa}$$

Em virtude da proximidade das tensões ao valor de cálculo da tensão resistente do material, vamos calcular e incluir as tensões tangenciais devido a esforço transversal



Para facilitar a compreensão, no desenho anterior foi omitida a representação das tensões no troço vertical do lado esquerdo.





$$\tau_{zx} = \frac{S_x}{2eI_x} T_y = \frac{73.45}{2 \times 1 \times 2 \times 605} \times 10 = 0.304 \text{ kNcm}^{-2} = 3.04 \text{ MPa}$$

Verifiquemos a tensão composta no ponto P<sub>1</sub>:

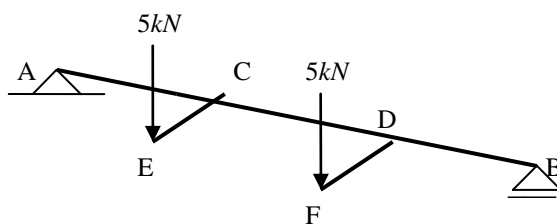
$$\sqrt{217^2 + 3 \times (44.2 + 3.04)^2} = 231.9 \text{ MPa} \leq 235 \text{ MPa}$$

Verifiquemos a tensão composta no ponto P<sub>2</sub>:

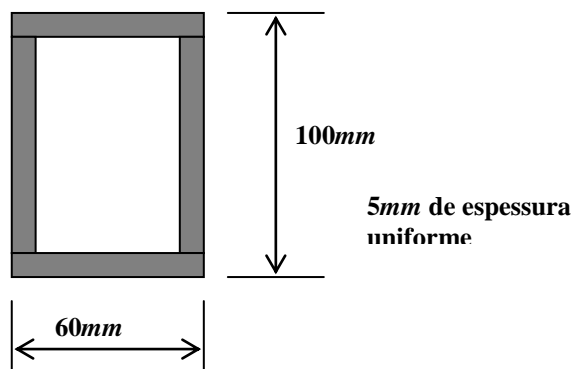
$$\sqrt{201^2 + 3 \times (63.2 + 3.04)^2} = 231.4 \text{ MPa} \leq 235 \text{ MPa}$$

### 3.2. Problemas não resolvidos

P3.1) Na estrutura apresentada, os apoios A e B impedem qualquer rotação em torno do eixo da viga. Verifique a segurança do perfil apresentado, admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material de 235MPa.

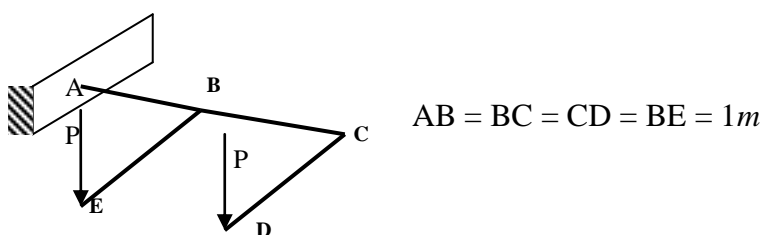


$$\begin{aligned} AC = CD = DB &= 2m \\ CE = DF &= 0.75m \end{aligned}$$

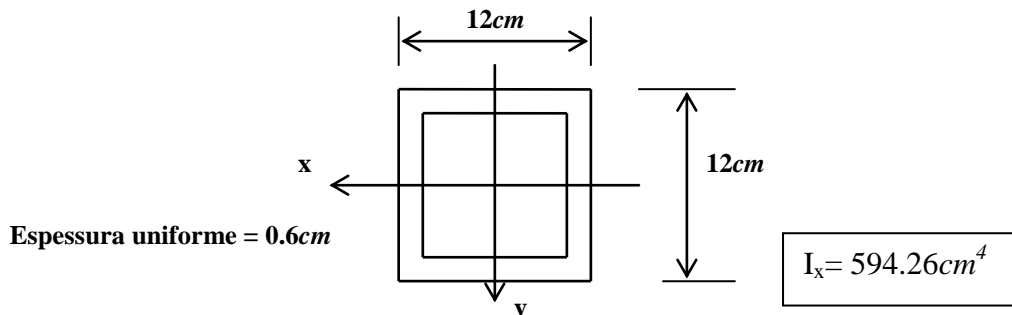


Solução : Não verifica. Tentar as mesmas dimensões externas mas com 6.3mm de espessura uniforme.

P3.2) Considere a estrutura encastrada da figura seguinte:



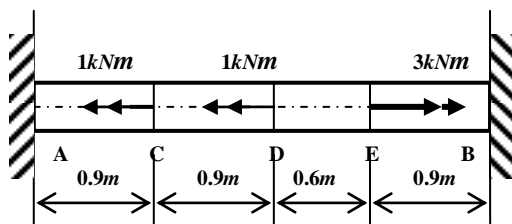
A barra ABC é o perfil tubular quadrado de paredes finas da figura seguinte:



- a) Para a barra **ABC**, trace os diagramas de esforços (T; M;  $M_t$ );
- b) Determine o máximo valor das cargas P que a barra ABC pode suportar, admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material,  $\sigma_{Rd} = 235 \text{ MPa}$ .  
Sugestão: faça o cálculo atendendo ao critério de Von Mises e desprezando o efeito devido às tensões provocadas pelo esforço transversal.
- c) Num desenho da secção do encastramento, vista de C, faça uma representação das tensões tangenciais devido ao esforço transversal em que mostre o fluxo das tensões e o seu valor relativo (não necessita de quantificar);
- d) Num desenho da secção do encastramento, vista de C, faça uma representação das tensões tangenciais devido ao momento torçor em que mostre o fluxo das tensões e o seu valor relativo (não necessita de quantificar);
- e) Num desenho da secção do encastramento faça uma representação das tensões normais devido ao momento flector em que mostre o seu valor relativo (não necessita de quantificar);
- f) Conclua sobre quais os pontos da secção mais críticos sobre o ponto de vista das tensões. Marque esses pontos num desenho da secção.

Solução : b)  $P \leq 6.26 \text{ kN}$ ;

P3.3) A viga AB está sujeita a momentos como se indica na figura:



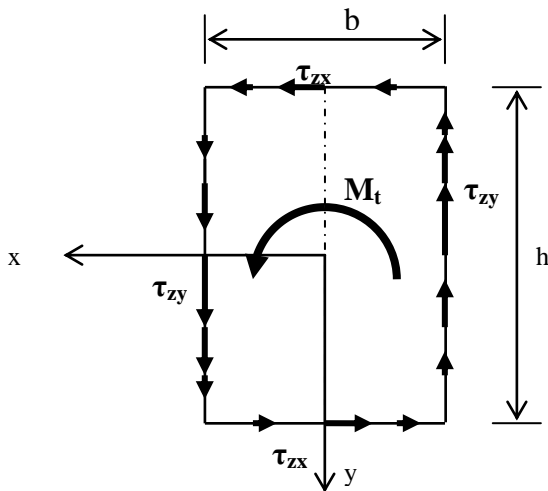
- Determine os momentos de reacção nos apoios;
  - Trace o diagrama de momento torçor;
  - Admitindo um perfil tubular de secção quadrada  $70\text{mm} \times 70\text{mm}$  (tabela técnica) e um valor de cálculo de resistência do material  $\tau_{Rd} = 50\text{MPa}$ , dimensione a espessura do tubo.
- Solução: a)  $|M_{tA}| = 0.36\text{kNm}$ ;  $|M_{tB}| = 1.36\text{kNm}$ ; c) Espessura =  $4\text{mm}$ .

#### 4. Momento torçor em peças de secção rectangular

Para a secção rectangular de altura  $h$  e base  $b$ , com  $h > b$ , a Teoria da Elasticidade indica que a rotação por unidade de comprimento, pode ser calculada pela expressão:

$$\theta = \frac{M_t}{GJ_t} \quad J_t = c_1hb^3$$

Na expressão anterior o produto  $GJ_t$  é a rigidez de torção.



A figura anterior mostra a distribuição das tensões tangenciais na periferia da secção, provocadas por um momento torçor positivo.

A tensão tangencial máxima ocorre a meio do lado maior do rectângulo e o seu valor é dado pela seguinte expressão:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{c_2hb^2}$$

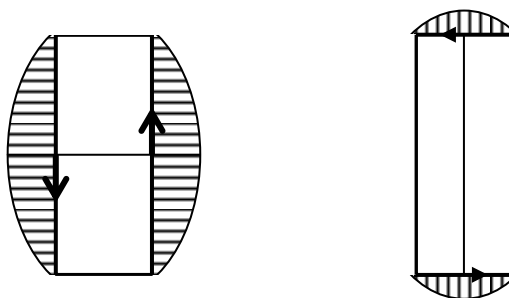
Ao longo do lado menor, a tensão atinge o seu maior valor é igualmente a meio. Este valor é proporcional ao valor de  $\tau_{\max}$ .

$$\tau_B = \eta \times \tau_{\max}$$

Os coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $\eta$  dependem da relação entre a altura e a largura da secção rectangular e encontram-se na tabela seguinte:

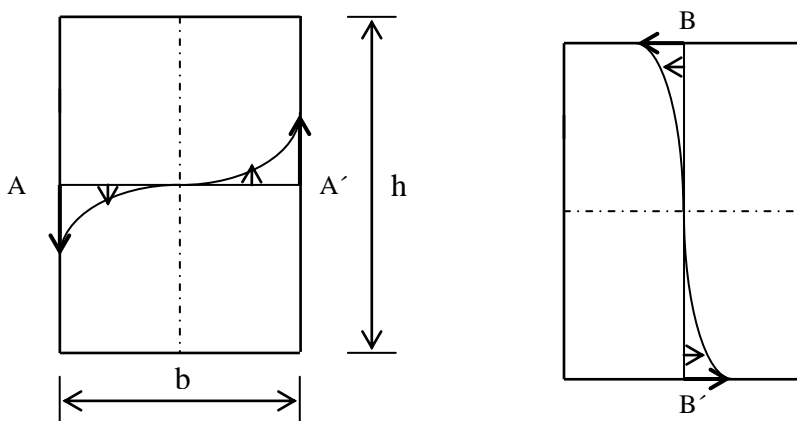
h/b	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4.00	5.00	6.00	8.00	10.00	$\infty$
$c_1$	0.141	0.172	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.299	0.307	0.313	$\frac{1}{3}$
$c_2$	0.208	0.221	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.292	0.299	0.307	0.313	$\frac{1}{3}$
$\eta$	1.000	0.916	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.743	0.742	0.742	0.742

A figura seguinte mostra a distribuição dos valores da tensão ao longo dos lados da secção rectangular.



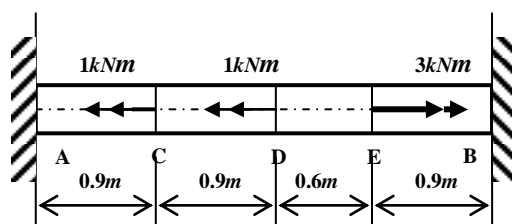
Em cada lado o valor máximo verifica-se a meio, sendo o máximo absoluto atingido, como se disse anteriormente, no lado maior. Nos vértices da secção a tensão é nula.

A figura seguinte mostra a distribuição das tensões tangenciais para o interior da secção, provocadas por um momento torçor positivo. Quer ao longo da linha AA', quer ao longo da linha BB', as tensões tangenciais diminuem para o interior da secção.



#### 4.1. Problemas não resolvidos

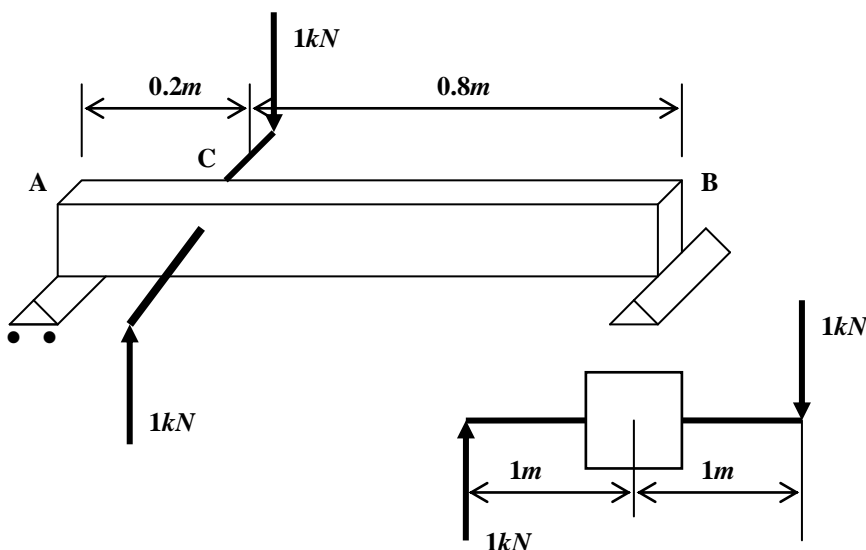
P4.1) A viga AB está sujeita a momentos como se indica na figura:



a) Determine os momentos de reacção nos apoios;

- b) Trace o diagrama de momento torçor;  
 c) Admitindo uma secção quadrangular cheia e um valor de cálculo de resistência do material  $\tau_{Rd}=50MPa$ , dimensione a barra;  
 d) Na secção a meio do troço  $DE$ , quando observada da direita, faça uma representação do fluxo das tensões na periferia da secção, respeitando o sentido correcto;  
 e) Mostre, através do diagrama rebatido das tensões, o seu valor relativo, indicando no diagrama o valor máximo;  
 f) Calcule, **em graus**, o ângulo de rotação da secção da alínea  $d$  relativamente à secção  $A$  no encastramento, admitindo que o material tem um módulo de distorção  $G= 85GPa$ .  
 Solução: a)  $|M_{tA}| = 0.36kNm$ ;  $|M_{tB}| = 1.36kNm$ ; c) Lado  $\geq 5.4cm$ ; e)  $\tau_{max} = 50MPa$ ; f)  $0.42^\circ$

P4.2) A viga AB tem aplicadas acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura:

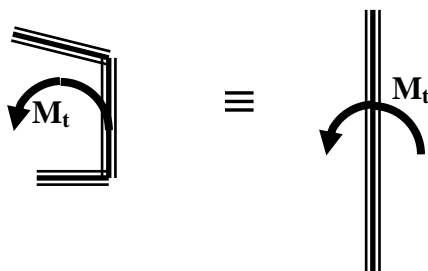


- a) Admitindo uma secção quadrangular cheia e um valor de cálculo de resistência do material  $\tau_{Rd}=136MPa$ , dimensione a barra;  
 b) Calcule, **em graus**, o ângulo de rotação entre as secções A e C, admitindo que o material tem um módulo de distorção  $G= 81GPa$ .

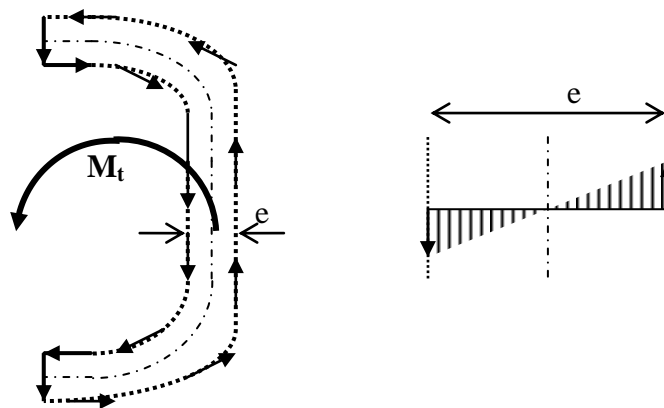
Solução: a) Lado  $\geq 3.84cm$ ; b)  $0.46^\circ$

## 5. Momento torçor em peças abertas de paredes finas

Uma secção aberta de paredes finas (*thin-walled open section*) pode ser analisada como uma secção rectangular com altura igual ao comprimento da linha média da parede ( $l$ ) e uma base igual à espessura ( $e$ ) da mesma.



A figura seguinte mostra, à esquerda; a distribuição das tensões tangenciais na periferia da secção, provocadas por um momento torçor positivo. À direita, mostra a distribuição das tensões tangenciais para o interior da secção, evidenciando que as tensões tangenciais diminuem para o interior da secção.



Uma vez que  $l \gg e$ , então os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  podem ser considerados igual a  $1/3$ . Deste modo:

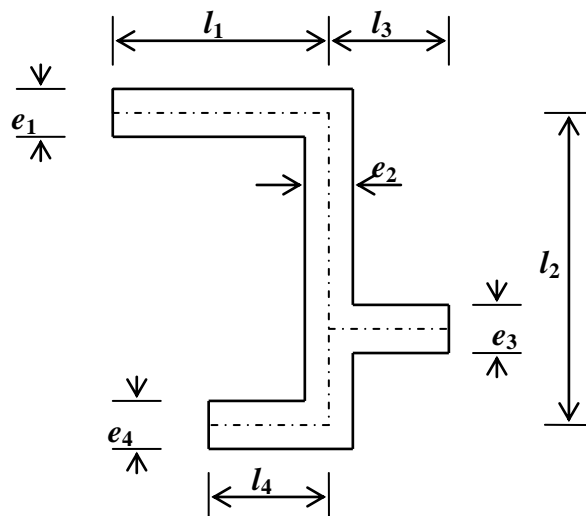
$$\theta = \frac{3M_t}{Gle^3} \quad \tau_{\max} = \frac{3M_t}{le^2}$$

Na expressão anterior o factor  $Gle^3/3$  é a rigidez de torção.

Notar que das expressões anteriores se deduz uma relação entre  $\tau_{\max}$  e  $\theta$ :

$$\tau_{\max} = \frac{3M_t}{le^2} = \frac{\theta Gle^3}{le^2} = \theta Ge$$

Frequentemente as secções abertas de paredes finas apresentam diferentes espessuras ao longo da secção (*thin-walled open compound sections*)



Pode admitir-se, sem grande erro, que a rigidez de torção de cada troço de espessura constante é a mesma que ele teria isoladamente. A rigidez total pode então ser obtida

adicionando os diferentes valores de rigidez e afectando esta soma de um coeficiente ( $k$ ) o qual tem em conta o acréscimo de rigidez devido às ligações entre os diversos troços. Assim temos no caso do exemplo anterior:

$$\text{Rigidez de torção da secção} = GJ_t = k \sum_{i=1}^4 \frac{Gl_i e_i^3}{3} = k \frac{1}{3} G \sum_{i=1}^4 l_i e_i^3$$

Deste modo:

$$\theta = \frac{3M_t}{kG \sum_{i=1}^4 l_i e_i^3}$$

Como a rotação é a mesma em todos os troços da secção, então, atendendo à expressão que relaciona  $\tau_{\max}$  e  $\theta$ , acima apresentada, a tensão tangencial máxima num troço de espessura  $e_i$ , fica

$$\tau_{i\max} = \theta G e_i$$

Substituindo, fica:

$$\tau_{i\max} = \frac{3M_t e_i}{k \sum_{i=1}^4 l_i e_i^3}$$

O valor máximo de tensão tangencial na secção, será:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_t e_{\max}}{k \sum_{i=1}^4 l_i e_i^3}$$

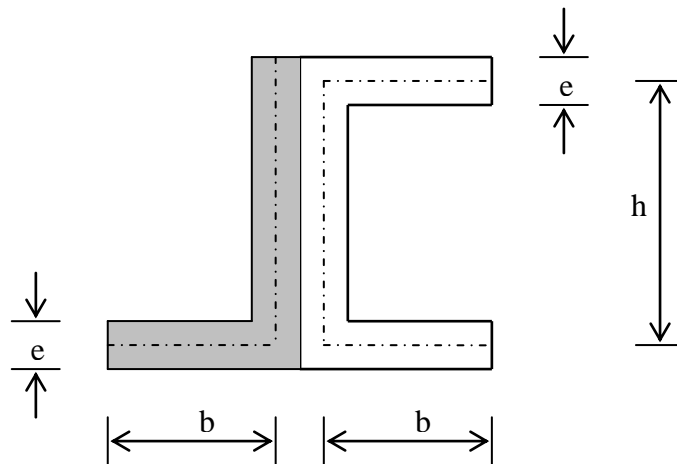
Adoptam-se os seguintes valores de  $k$ :

Perfil	L	U	T	I
k	1.00	1.10	1.10	1.25

## 5.1. Problema resolvido

Uma cantoneira é soldada a uma barra U. Admita uniformidade de espessura em cada barra, a qual é uma dimensão muito inferior às outras dimensões das barras.

- Determine o aumento de rigidez à torção que a cantoneira trouxe ao conjunto.
- Determine para o mesmo momento torçor, a diminuição na tensão tangencial máxima que a cantoneira trouxe ao conjunto.



Resolução

a) Seja  $GJ_{t1}$  e rigidez à torção da barra U;

$$GJ_{t1} = G \frac{1}{3} (2b + h) e^3$$

Seja  $GJ_{t2}$  e rigidez à torção do conjunto;

$$GJ_{t2} = k \frac{1}{3} G \sum_{i=1}^n l_i e_i^3 = k \frac{1}{3} G [be^3 + h(2e)^3 + be^3 + be^3] = k \frac{1}{3} G (3be^3 + 8he^3) = k \frac{1}{3} Ge^3 (3b + 8h)$$

Considerando  $k=1$ , fica:

$$\frac{GJ_{t2}}{GJ_{t1}} = \frac{3b + 8h}{2b + h}$$

b) A tensão tangencial máxima que se verificaria se a secção fosse apenas a barra em U:

$$\tau_{1\max} = \frac{3M_t e}{(2b + h)e^3} = \frac{3M_t}{(2b + h)e^2}$$

A tensão tangencial máxima que se verifica no conjunto:

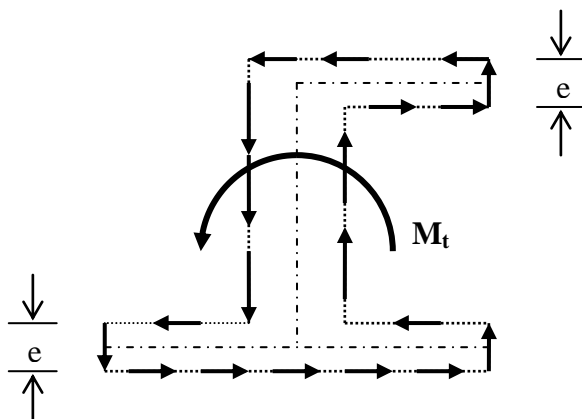
$$\tau_{2\max} = \frac{3M_t e_{\max}}{k \sum_{i=1}^n l_i e_i^3} = \frac{3M_t (2e)}{ke^3 (3b + 8h)}$$

Considerando  $k=1$ , fica:

$$\frac{\tau_{2\max}}{\tau_{1\max}} = \frac{2(2b + h)}{3b + 8h}$$

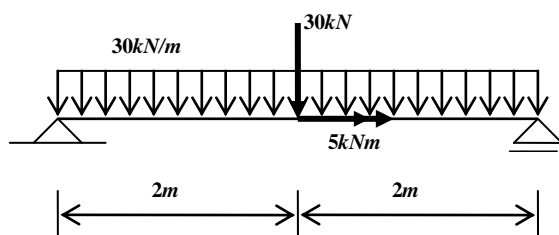
A figura seguinte mostra a distribuição das tensões tangenciais na periferia da secção do conjunto, provocadas por um momento torçor positivo.





## 5.2. Problemas não resolvidos

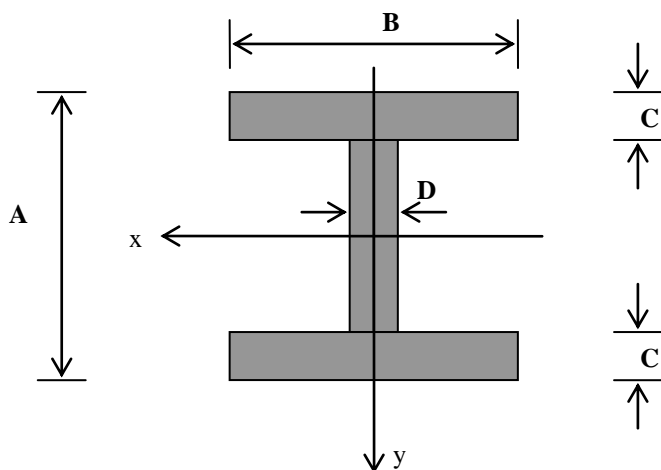
P5.1) Dimensione a seguinte viga submetida a um momento torçor de  $5kNm$ , usando um perfil INP. Admita que as secções dos apoios estão impedidas de rodar em torno do eixo da viga. O aço tem um valor de cálculo da tensão resistente igual a  $235MPa$ .



Sugestões:

I) Dimensionar a secção mais desfavorável à flexão, utilizando as dimensões e propriedades das áreas indicadas nas Tabelas Técnicas;

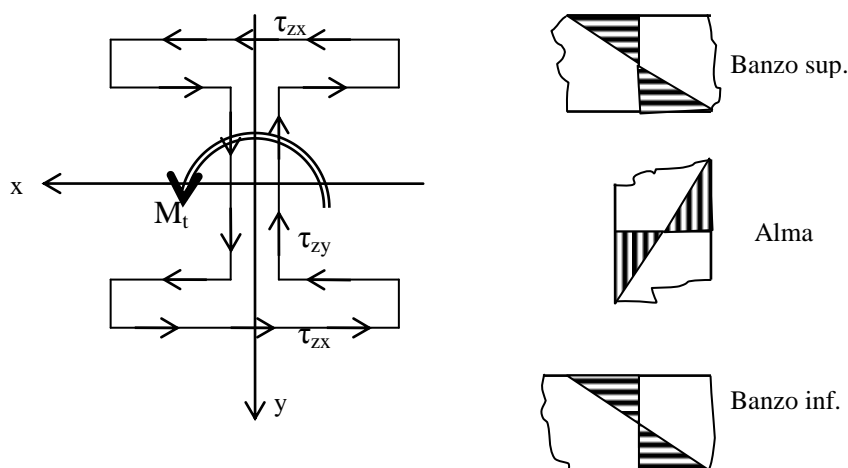
II) Na mesma secção e para o perfil seleccionado, calcular as tensões tangenciais devido a momento torçor, quer na alma quer nos banzos. Exclusivamente para efeitos de cálculo das tensões tangenciais devido a momento torçor, pode utilizar a seguinte aproximação para o perfil INP:



$A \equiv$  Altura total do INP;

$B \equiv$  Largura do banzo do INP;  
 $C \equiv$  Espessura da aba do INP, a meia distância da extremidade;  
 $D \equiv$  Espessura da alma do INP.

III) Uma vez que o fluxo das tensões tangenciais devido a momento torçor se apresenta como na figura seguinte, pode tirar conclusões de qual os sectores do perfil INP mais desfavoráveis sob o ponto de vista da combinação das tensões normais (devidas a momento flector) e tensões tangenciais (devidas a momento torsor).

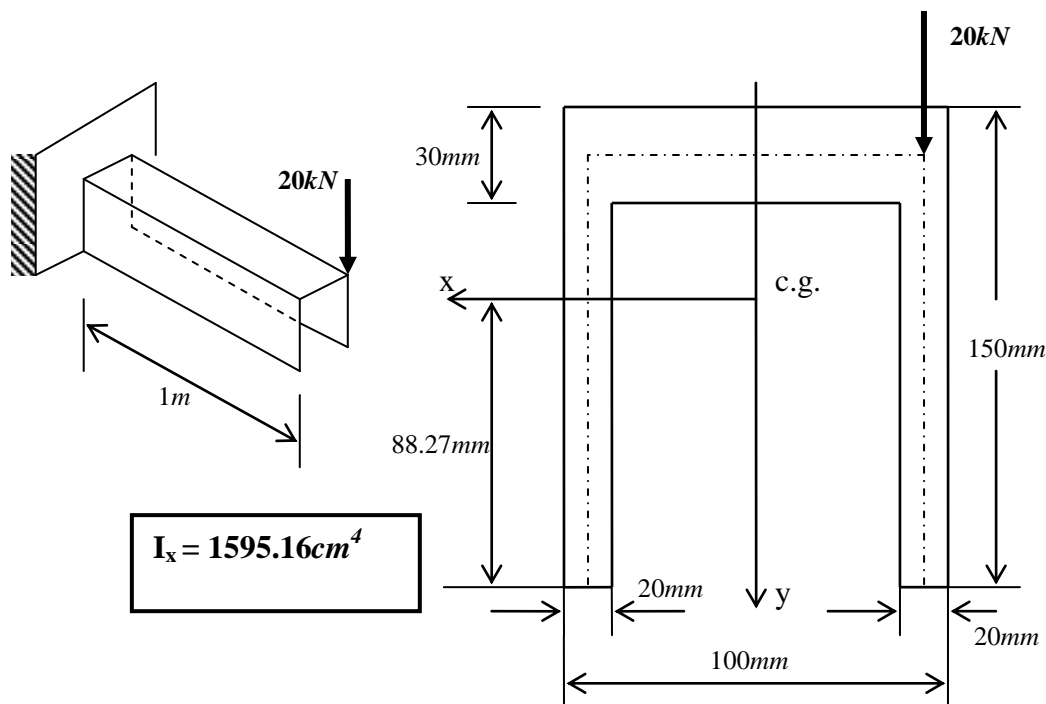


IV) Verifique se no ponto que considera mais desfavorável do perfil, a combinação das tensões normais (devidas a momento flector) e tensões tangenciais (devidas a momento torsor), não ultrapassam o valor de cálculo da tensão resistente do material ( $\sigma_{Rd}$ ).

V) Após decisão sobre o perfil a utilizar, calcule a soma das tensões tangenciais devidas a momento torçor e tensões tangenciais devido a esforço transversal, a meio da alma, na secção mais desfavorável, verificando se o valor encontrado não ultrapassa o valor de cálculo da tensão resistente do material ( $\frac{\sigma_{Rd}}{\sqrt{3}}$ ).

Solução: INP280

P5.2) Considere a viga encastrada sujeita à acção cujo valor de cálculo está indicado na figura:



$$I_x = 1595.16 \text{ cm}^4$$

- Trace os diagramas de esforços (T; M;  $M_t$ );
- Na secção junto do encastramento determine a tensão tangencial máxima devido a momento torçor;
- Na secção junto do encastramento, determine a tensão tangencial máxima devido a esforço transversor;
- Num desenho da secção faça uma representação das tensões tangenciais devido ao esforço transversor em que mostre o fluxo das tensões e o seu valor relativo (rebatimentos). Marque no desenho o valor obtido na alínea c.
- Num desenho da secção faça uma representação das tensões tangenciais na periferia da secção, devido ao momento torçor, em que mostre o fluxo das tensões e o seu valor relativo (rebatimentos). Marque no desenho o valor obtido na alínea b.
- Com base nas respostas das 2 alíneas anteriores, marque num desenho da secção os pontos da secção mais críticos unicamente sob o ponto de vista das tensões tangenciais.

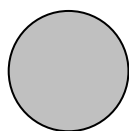
Solução: b)  $\tau_{\max} = 15.152 \text{ MPa}$ ; c)  $\tau_{zy\max} = 4.88 \text{ MPa}$

## 6. Expressões gerais

As expressões apresentadas anteriormente, referentes à rotação por unidade de comprimento ( $\theta$ ) e à tensão tangencial máxima ( $\tau_{\max}$ ), em função do momento torçor ( $M_t$ ), podem ser reunidas nas seguintes expressões:

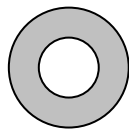
$$\theta = \frac{M_t}{GJ_t} \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$

Os valores de rigidez de torção ( $GJ_t$ ) e módulo de torção ( $W_t$ ) dependem da secção, como mostra o quadro seguinte:



$$W_t = \frac{\pi R^3}{2}$$

$$J_t = \frac{\pi R^4}{2}$$



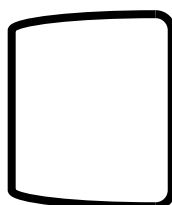
$$W_t = \frac{\pi R_e^3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^4 \right]$$

$$J_t = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4)$$



$$W_t = c_2 h b^2$$

$$J_t = c_1 h b^3$$



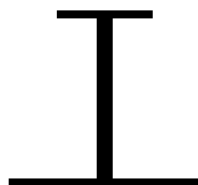
$$W_t = 2Ae_{\min}$$

$$J_t = \frac{4A^2e}{p}$$



$$W_t = \frac{1}{3} l e^2$$

$$J_t = \frac{1}{3} l e^3$$



$$W_t = \frac{1}{3e_{\max}} k \sum_{i=1}^n l_i e_i^3$$

$$J_t = \frac{1}{3} k \sum_{i=1}^n l_i e_i^3$$

### 6.1. Comparação de secções resistentes à torção

Como já se verificou, as secções cheias, quando comparadas com as secções ocas, conduzem a um mau aproveitamento do material. Assim, as secções ocas e de paredes finas são um melhor compromisso para resistir à torção.

Na comparação de secções de paredes finas, as secções fechadas são muito mais resistentes à torção do que as de paredes abertas, como se comprova seguidamente:

Determine-se a relação dos valores de rigidez à torção ( $GJ_t$ ) de duas secções de paredes finas, com a mesma espessura ( $e$ ), com o mesmo perímetro de linha média ( $p$ ), sendo uma fechada (índice f) e a outra aberta (índice a):

De acordo com a tabela anterior:

$$\frac{J_{tf}}{J_{ta}} = \frac{\frac{4A^2e}{p}}{\frac{pe^3}{3}} = 12 \frac{A^2}{p^2e^2} = 12 \left( \frac{A}{\Omega} \right)^2$$

Uma vez que em secções de paredes finas, a área ( $A$ ) da superfície definida pela linha média, é muito superior à área ( $\Omega$ ) efectiva da secção, fica provado que as secções fechadas são mais resistentes à torção.

Admitamos uma secção fechada de espessura uniforme  $e$ . O valor aproximado da tensão tangencial calculado pela 1ª fórmula de Bredt, fica:

$$\tau = \frac{M_t}{2Ae}$$

o que significa que se  $\tau_{Rd}$  for o valor de cálculo da tensão resistente do material, então o momento torçor admissível é:

$$M_{tRd} = 2Ae \tau_{Rd}$$

Uma vez que a área efectiva da secção é:  $\Omega = p \times e$ , obtém-se:

$$M_{tRd} = 2\Omega \frac{A}{p} \tau_{Rd}$$

A forma de linha média que apresenta maior relação  $A/p$ , é a circunferência.

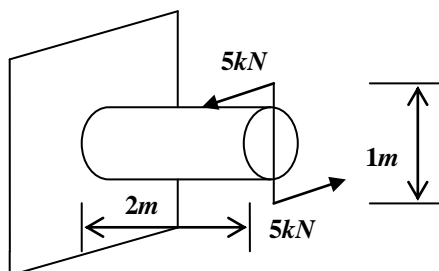
Fica, assim verificado que o tubo circular de paredes finas é o melhor compromisso para resistir a momento torçor.

## 7. Caderno de problemas de momento torçor

### 7.1. Diagramas de esforços

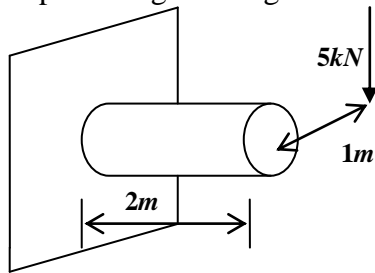
1) Admita a viga encastrada onde se aplicam acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura.

- Trace os diagramas de esforços;
- Admitindo um módulo de torção  $W_t$ , escreva a expressão da tensão máxima;
- Admitindo uma rigidez à torção  $GJ_t$  escreva a expressão que permite determinar o ângulo de rotação da extremidade livre em relação ao encastramento.



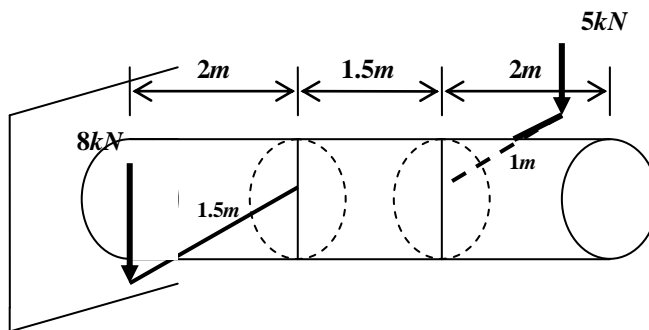
Solução: b)  $\tau_{\max} = \frac{5}{W_t}$  c)  $Ang = \frac{10}{GJ_t}$

2) Repita para a seguinte viga:



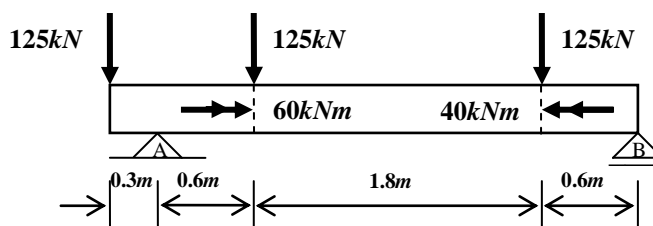
Solução: b)  $\tau_{\max} = \frac{-5}{W_t}$  c)  $Ang = \frac{-10}{GJ_t}$

3) Repita para a seguinte viga:



Solução: b)  $\tau_{\max} = \frac{7}{W_t}$  c)  $Ang = \frac{6.5}{GJ_t}$

4) A viga está sujeita a acções cujos valores de cálculo estão representados na figura:



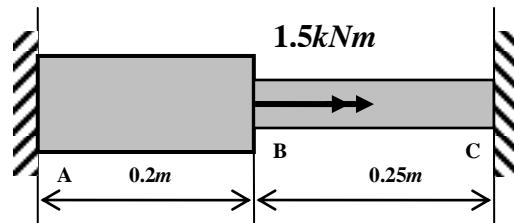
Admita que as secções nos apoios estão impedidas de rodar em torno do eixo da viga.

- Determine as forças de reacção nos apoios;
- Determine os momentos de reacção nos apoios;
- Trace os diagramas de esforços

Solução: a)  $V_A = 262.5kN$ ;  $V_B = 112.5kN$ ; b)  $|M_{tA}| = 40kNm$ ;  $|M_{tB}| = 20kNm$

## 7.2. Barras de secção circular

5) A viga ABC é feita de cilindros maciços de aço ( $G_{aço} = 77Gpa$ ). Está sujeita ao momento que se indica na figura:



Admita: Diâmetro entre A e B = 50mm;

Diâmetro entre B e C = 38mm;

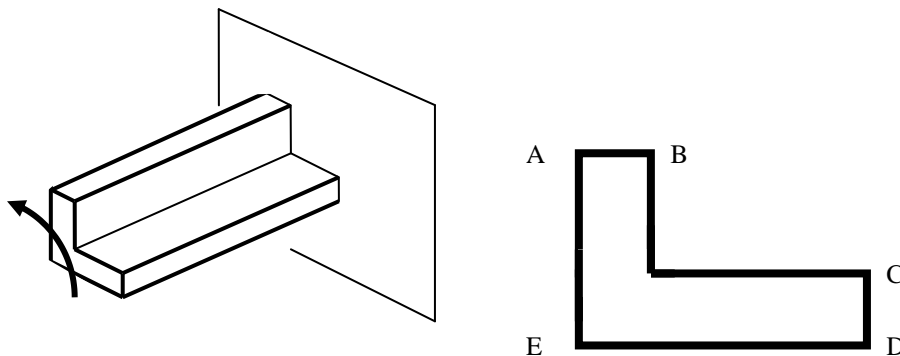
a) Calcule os momentos de reacção nos apoios;

b) Calcule a tensão máxima

Solução: a)  $|M_A|=1.184kNm$ ,  $|M_C|=0.316kNm$ ; b)  $\tau_{max}=48.24MPa$

### 7.3. Peças fechadas de paredes finas

6) A barra encastrada da figura tem 1m de comprimento e uma secção tubular com 3mm de espessura uniforme.



As dimensões marcadas entre faces externas estão indicadas seguidamente:

$\overline{AB} = 30mm$  ;  $\overline{CD} = 30mm$  ;  $\overline{ED} = 120mm$  ;  $\overline{AE} = 80mm$

Sabendo que é feita de material com valor de cálculo da tensão resistente  $\tau_{Rd} = 29MPa$  e módulo de distorção  $G = 25.5GPa$ :

a) Calcule o maior momento torçor admissível;

b) Determine o ângulo de rotação, em graus, verificado entre as secções livre e encastrada devido à aplicação do momento calculado na alínea anterior;

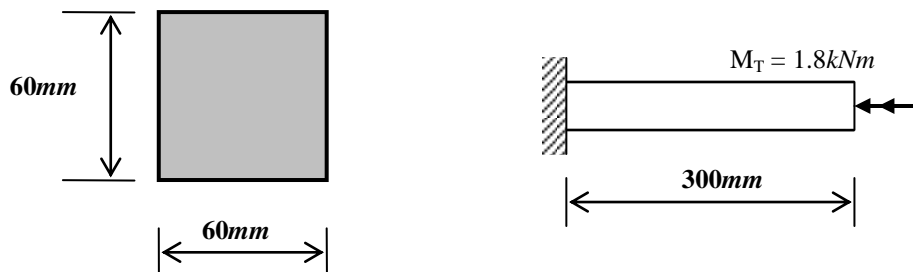
c) Num desenho de uma secção (vista da extremidade livre da barra) faça uma representação das tensões tangenciais devido ao momento torçor em que seja possível visualizar-se o fluxo em sentido correcto das tensões e a distribuição das tensões através da espessura da barra (não necessita de quantificar).

Solução: a)  $M_t \leq 0.785kNm$ ; b)  $2.8^\circ$

E

### 7.4. Barras de secção rectangular

7) A figura mostra uma barra de secção quadrangular, cheia, sujeita a um momento torçor:

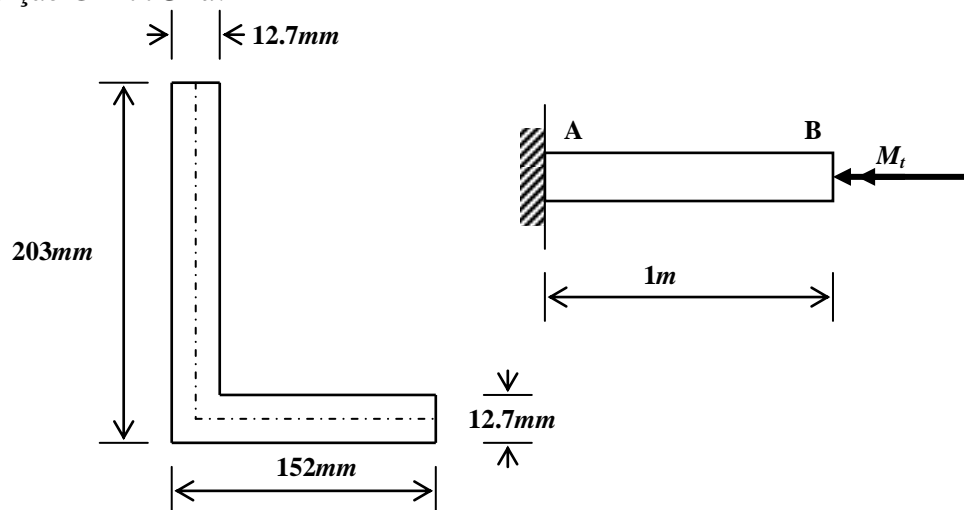


- Calcule a tensão máxima na secção;
- Faça uma representação do fluxo das tensões na periferia da secção, respeitando o sentido correcto.
- Mostre, através do diagrama rebatido das tensões, o seu valor relativo, indicando no diagrama o valor máximo;
- Calcule, **em graus**, o ângulo de rotação da secção livre relativamente à secção no encastramento, admitindo que o material tem um módulo de distorção  $G = 26GPa$ .

Solução: a)  $\tau_{max} = 40.1MPa$ ; c)  $0.65^\circ$

### 7.5. Peças abertas de paredes finas

8) A barra encastrada da figura tem  $1m$  de comprimento e uma secção de cantoneira. Sabendo que é feita de material com valor de cálculo da tensão resistente  $\tau_{Rd} = 50MPa$  e módulo de distorção  $G = 77GPa$ :

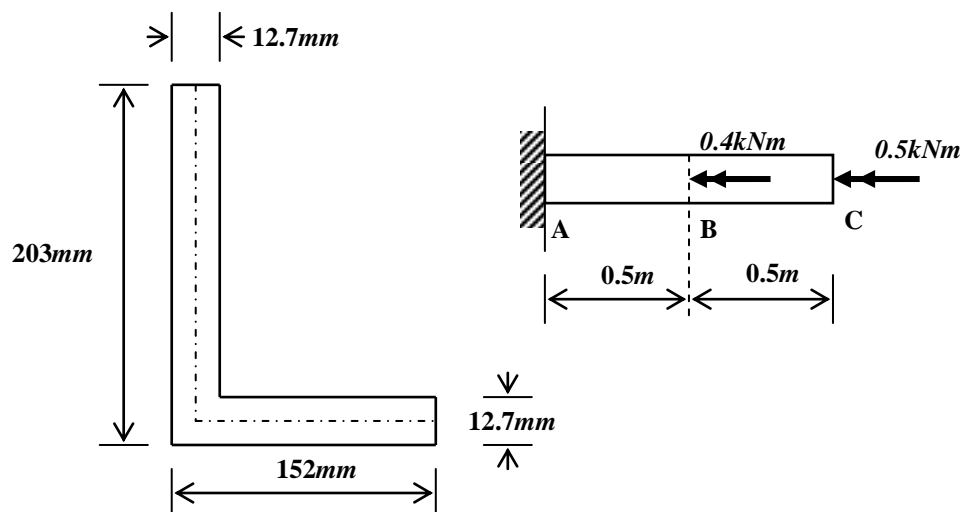


- Calcule o maior momento ( $M_t$ ) admissível.
- Determine o ângulo de rotação, em graus, verificado entre as secções A e B, devido à aplicação do momento calculado na alínea anterior.

Solução: a)  $M_t \leq 0.92kNm$ ; b)  $\alpha = 2.93^\circ$

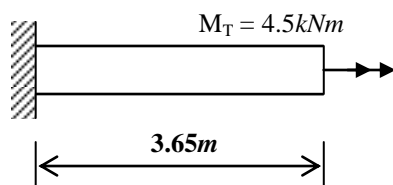
9) A barra encastrada da figura tem  $1m$  de comprimento e uma secção de cantoneira. Sabendo que é feita de material com valor de cálculo da tensão resistente  $\tau_{Rd} = 50MPa$  e módulo de distorção  $G = 77GPa$ :



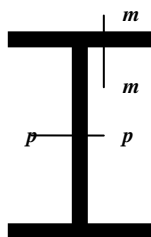


- a) Verifique a resistência .  
 b) Determine o ângulo de rotação, em graus, verificado entre as secções A e C.  
 Solução: a)  $\tau_{max} = 48.9MPa < 50MPa$ ; d)  $\alpha = 2.23^\circ$

10) A figura mostra uma barra de secção HE300B (tabela técnica) sujeita a um momento torçor:



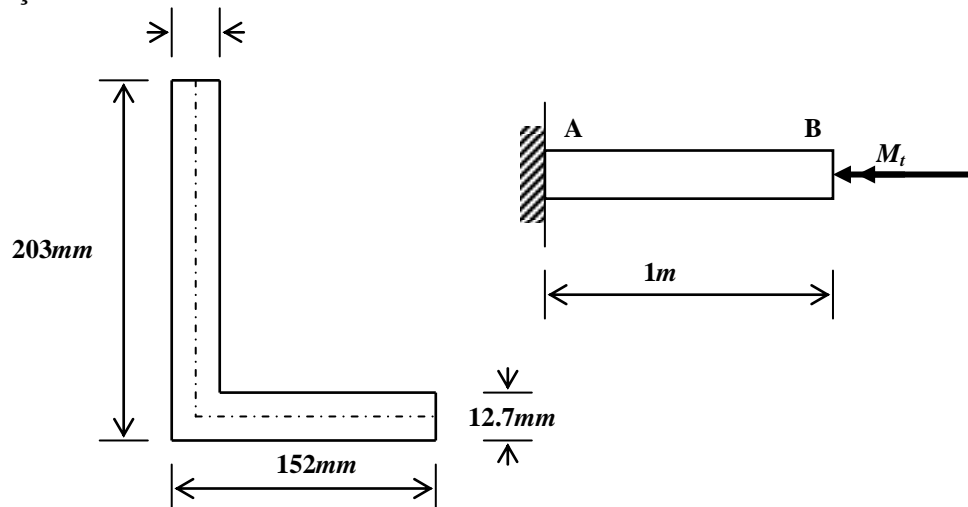
- a) Calcule a tensão máxima na secção;  
 b) Para uma secção observada da extremidade livre, faça uma representação do fluxo das tensões, respeitando o sentido correcto. Nos locais da secção assinalados (figura seguinte), mostre como variam as tensões através da espessura da alma e do banzo:



- c) Complete a sua resposta da alínea anterior, escrevendo o valor da tensão obtido na alínea a) junto dos vectores correspondentes;  
 d) Calcule, **em graus**, o ângulo de rotação da secção livre relativamente à secção no encastramento, admitindo que o material tem um módulo de distorção  $G = 80GPa$ .

Solução: a)  $\tau = 45.71MPa$ ; d)  $\alpha = 6.3^\circ$

11) A barra encastrada da figura tem 1m de comprimento e uma secção de cantoneira. Sabendo que é feita de material com valor de cálculo da tensão resistente  $\tau_{Rd} = 50MPa$  e módulo de distorção  $G = 77GPa$ :

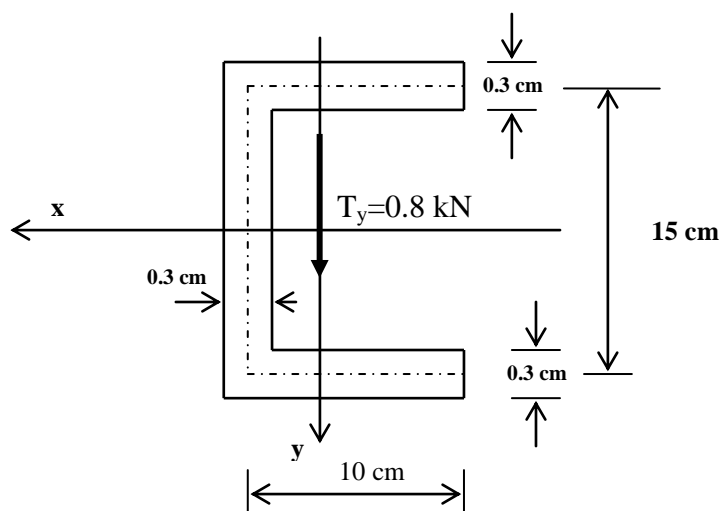


- Calcule o maior momento ( $M_t$ ) admissível para que o ângulo de rotação entre as secções A e B não ultrapasse  $8^\circ$ .
- Verifique a viga com a aplicação do momento torçor calculado na alínea anterior.

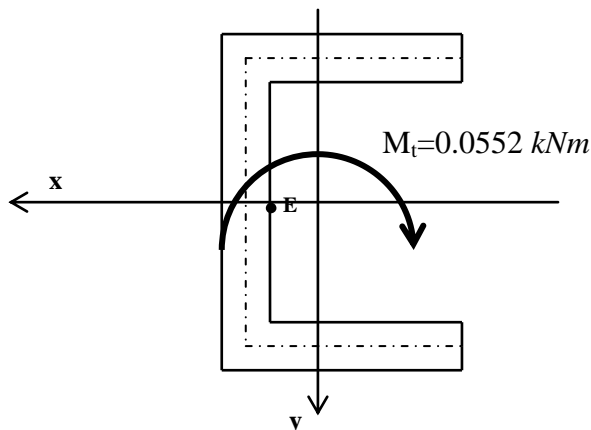
Solução: a)  $M_t \leq 2.51 kNm$ ; b)  $\tau_{max} = 136.55 MPa > 50 MPa$ , Não verifica.

### 7.6. Verificação do estado de tensão

12) Admita que a secção representada na figura seguinte está sujeita a um esforço transverso de  $T_y = 0.8 kN$ .

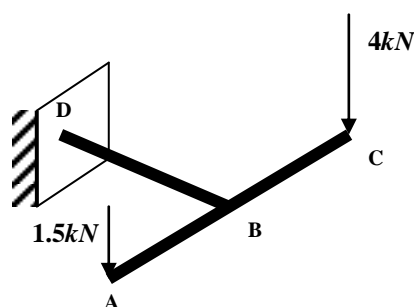


Em virtude do esforço transverso não estar aplicado no centro de corte da secção, vai ainda produzir-se um momento torçor, como mostra a figura:



- Faça uma representação para as tensões tangenciais devido ao esforço transversal em que mostre o fluxo das tensões, o seu valor relativo e como variam na espessura da peça;
  - Faça uma representação para as tensões tangenciais devido ao momento torçor em que mostre o fluxo das tensões, o seu valor relativo e como variam na espessura da peça;
  - Calcule a tensão máxima devido a esforço transversal;
  - Calcule a tensão máxima devido a momento torçor;
  - Localize na secção o ponto no qual a combinação das tensões tangenciais devido a ambos os esforços atinge o valor máximo e junto escreva o seu valor.
- c) Devido ao esforço transversal:  $\tau_{\max}=1.95MPa$ ; d) ) Devido ao momento torçor:  $\tau_{\max}=52.57MPa$ ; e) No ponto E:  $\tau_{\max}=54.52MPa$

13) A barra BD da figura tem soldada a barra ABC:



$$AB = BC = 200mm$$

$$BD = 300mm$$

- Para a barra BD trace os diagramas de esforços (T;M;M<sub>t</sub>);

Admita que as barras são varões circulares cheios.

- Num desenho **da secção D** faça uma representação das tensões tangenciais devido ao momento torçor em que seja possível visualizar-se o fluxo em sentido correcto das

tensões. Noutro desenho represente a distribuição das tensões através da espessura da barra (não necessita de quantificar);

c) Num desenho **da secção D** e correspondente às tensões normais devido ao momento flector, faça uma representação das tensões rebatidas para que possa visualizar-se o seu valor relativo (não necessita de quantificar);

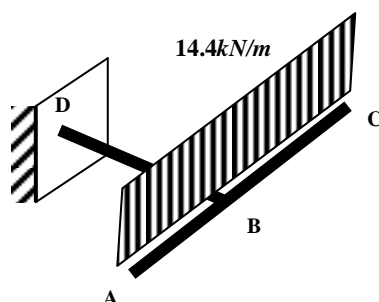
d) Determine o menor diâmetro permitido para a barra BD, admitindo um material com  $\sigma_{Rd} = 235MPa$ .

Despreze a contribuição do esforço transversal

e) Para o diâmetro encontrado na alínea anterior, determine o ângulo de rotação da secção B em relação à secção do encastramento, admitindo  $G = 80GPa$ .

Solução: d)  $d \geq 42mm$ ; e)  $\alpha = 0.352^\circ$

14) A barra BD da figura tem soldada a barra ABC:



$AB = 100mm$

$BC = 282mm$

$BD = 300mm$

a) Para a barra BD trace os diagramas de esforços (T;M;M<sub>t</sub>);

Admita que as barras são varões circulares cheios.

b) Num desenho **da secção D** faça uma representação das tensões tangenciais devido ao momento torçor em que seja possível visualizar-se o fluxo em sentido correcto das tensões e a sua distribuição através da espessura da barra (não necessita de quantificar);

c) Num desenho **da secção D** e correspondente às tensões normais devido ao momento flector, faça uma representação das tensões rebatidas para que possa visualizar-se o seu valor relativo (não necessita de quantificar);

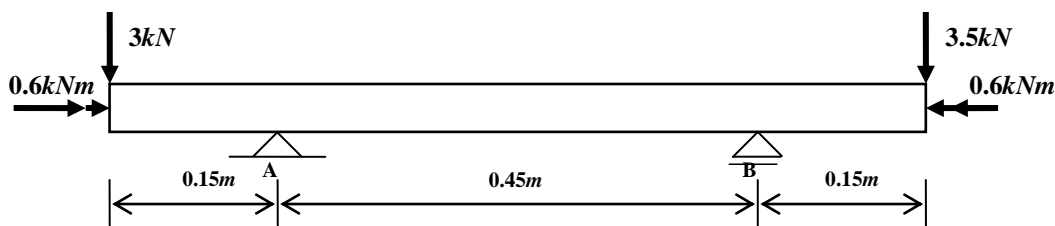
d) Determine o menor diâmetro permitido para a barra BD, admitindo um material com  $\sigma_{Rd} = 235MPa$ .

Despreze a contribuição do esforço transversal

e) Para o diâmetro encontrado na alínea anterior, determine o ângulo de rotação da secção B em relação à secção do encastramento, admitindo  $G = 80GPa$ .

Solução: d)  $d \geq 42mm$ ; e)  $\alpha = 0.352^\circ$

15) A viga está sujeita a acções cujos valores de cálculo estão representados na figura:

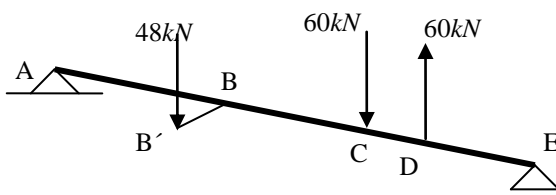


Admita que as secções nos apoios estão impedidas de rodar em torno do eixo da viga.

- Determine as forças de reacção nos apoios;
- Determine os momentos de reacção nos apoios;
- Trace os diagramas de esforços;
- Dimensione a viga de secção circular, utilizando o critério de Von Mises, admitindo um valor de cálculo da tensão resistente de  $83MPa$ . Nota despreze as tensões provocadas pelo esforço transversal.

Solução: a)  $V_A = 2.83kN$ ;  $V_B = 3.67kN$ ; b)  $|M_{tA}| = |M_{tB}| = 0.6kNm$   
 d)  $d \geq 45mm$ ;

16) A viga AE está sujeita a acções com valores de cálculo indicados na figura seguinte:



$AB = BC = 1.5m$     $CD = 0.6m$     $DE = 0.9m$     $BB' = 0.05m$

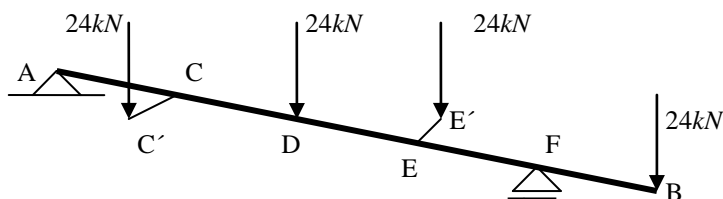
- Trace os diagramas de esforços (T;M; $M_t$ ), admitindo que as secções dos apoios estão impedidas de rodar em torno do eixo da viga;
- Sabendo que a barra é um tubo de secção quadrada (ver tabela anexa) feito de material com  $\sigma_{Rd}=235MPa$ , dimensione apenas à flexão.
- Na secção **B, observada a partir de A** faça a representação das tensões tangenciais devido ao esforço transversal em que seja possível visualizar-se o fluxo e o seu sentido correcto, bem como a sua variação na espessura da secção (não necessita de quantificar);
- Na mesma secção da alínea c) observada a partir de A** faça a representação das tensões tangenciais devido ao momento torçor em que seja possível visualizar-se o fluxo e o seu sentido correcto, bem como a sua variação na espessura da secção (não necessita de quantificar);
- Na mesma secção da alínea c) observada a partir de A**, faça uma representação (em rebatimento) das tensões normais devido ao momento flector, por forma a visualizar-se o seu valor relativo (não necessita de quantificar);
- Num novo desenho **da secção da alínea c) observada a partir de A**, assinale um ponto onde seja relevante verificar a combinação das tensões segundo o critério:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{Rd}$$

**g) Verifique a viga no ponto assinalado na alínea f) utilizando o critério de Von Mises**, admitindo um material com  $\sigma_{Rd} = 235MPa$

Solução: b)  $\square 160 \times 160 \times 10$ ; g)  $224.46MPa < 235MPa$ , Verifica

**17) A viga AB está sujeita a acções com valores de cálculo indicados na figura seguinte:**



$AC = CD = DE = EF = FB = 0.75m$

$CC' = EE' = 0.05m$

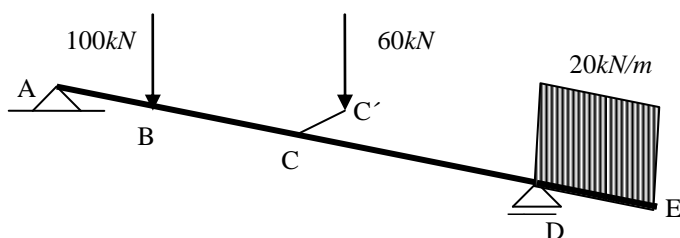
- Trace os diagramas de esforços (T;M;M<sub>t</sub>), admitindo que as secções dos apoios estão impedidas de rodar em torno do eixo da viga;
- Sabendo que a barra é um tubo de secção quadrada (ver tabela anexa) feito de material com  $\sigma_{Rd} = 235MPa$ , dimensione apenas à flexão.
- Na secção **D, observada a partir de E** faça a representação das tensões tangenciais devido ao esforço transversal em que seja possível visualizar-se o fluxo e o seu sentido correcto, bem como a sua variação na espessura da secção (não necessita de quantificar);
- Na mesma secção da alínea c) observada a partir de E** faça a representação das tensões tangenciais devido ao momento torçor em que seja possível visualizar-se o fluxo e o seu sentido correcto, bem como a sua variação na espessura da secção (não necessita de quantificar);
- Na mesma secção da alínea c) observada a partir de E**, faça uma representação (em rebatimento) das tensões normais devido ao momento flector, por forma a visualizar-se o seu valor relativo (não necessita de quantificar);
- Num novo desenho **da secção da alínea c) observada a partir de E**, assinale um ponto onde seja relevante verificar a combinação das tensões segundo o critério:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{Rd}$$

**g) Verifique a viga no ponto assinalado na alínea f) utilizando o critério de Von Mises**, admitindo um material com  $\sigma_{Rd} = 235MPa$

Solução: a)  $\square 120 \times 120 \times 8$ ; g)  $220.35MPa < 235MPa$ , Verifica

**18) A viga AE está sujeita a acções com valores de cálculo indicados na figura seguinte:**



$AB = 1.8m$  ;  $BC = 2.4m$  ;  $CD = 3.0m$  ;  $DE = 2.4m$  ;  
 $CC' = 1m$ .

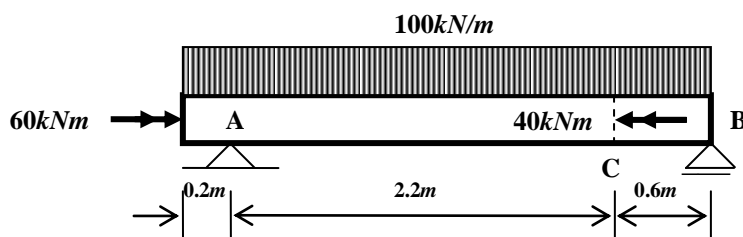
a) Trace os diagramas de esforços ( $T;M;M_t$ ), admitindo que as secções dos apoios estão impedidas de rodar em torno do eixo da viga;

Admita que a viga é um tubo quadrado  $260 \times 260 \times 10$  (tabela anexa) com valor de cálculo da tensão resistente do material,  $\sigma_{Rd} = 235MPa$ ;

b) Verifique a viga imediatamente à esquerda de **B** quanto à combinação das tensões normais e tangenciais (critério de Von Mises).

Solução: b)  $220.14MPa < 235MPa$ , Verifica

19) A viga está sujeita a acções cujos valores de cálculo estão representados na figura:

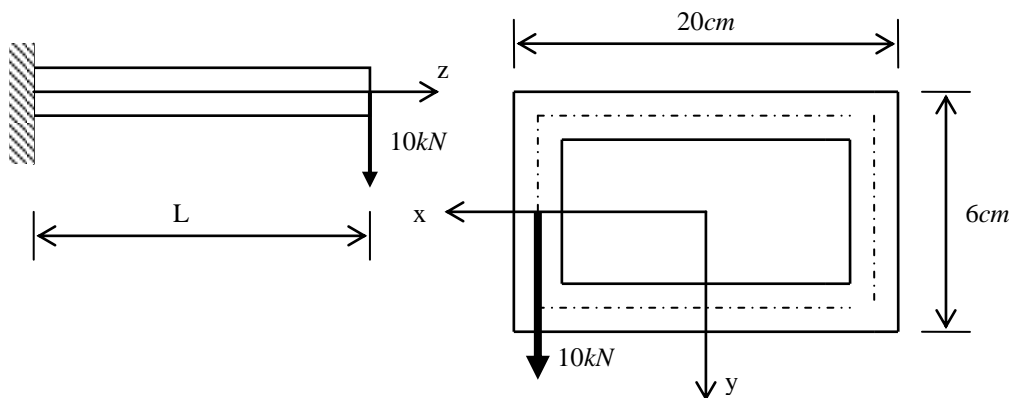


Admita que as secções nos apoios estão impedidas de rodar em torno do eixo da viga.

- Trace os diagramas de esforços ( $T;M;M_t$ )
- Sabendo que a barra é um tubo de secção quadrada (tabela técnica) feito de material com  $\sigma_{Rd} = 235MPa$ , dimensione apenas à flexão.
- Verifique a viga à combinação das tensões normais e tangenciais (critério de Von Mises) na secção C.

Solução: a) Diagrama de momento flector:  $M_A = -2kNm$ ;  $M_C = 65.54kNm$ ;  $M_B = 0$ ;  $M_{max} = 96.98kNm$ , a  $1.39m$  do apoio B; b) Tubo quadrado  $200 \times 200$  com  $10mm$  de espessura; c)  $180.78MPa < 235MPa$ , Verifica

20) Considere a viga sujeita à acção cujo valor de cálculo está indicado na figura. A viga é constituída por tubo estrutural de espessura uniforme de  $0.6cm$ :



- Trace os diagramas de esforços ( $T; M; M_t$ );
- Na secção do encastramento, observada da extremidade livre da barra** faça a representação das tensões tangenciais devidas **ao esforço transversal** em que seja possível visualizar o fluxo no sentido correcto e a distribuição das tensões através da espessura; em desenho separado faça o diagrama das tensões tangenciais (não necessita de quantificar).

c) **Na secção do encastramento, observada da extremidade livre da barra** faça a representação das tensões tangenciais devidas **ao momento torçor** em que seja possível visualizar o fluxo no sentido correcto e a distribuição das tensões através da espessura; em desenho separado faça o diagrama das tensões tangenciais (não necessita de quantificar).

d) **Na secção do encastramento** trace o diagrama das tensões normais devido ao momento flector (não necessita de quantificar);

e) **Na secção do encastramento, observada da extremidade livre da barra** assinale um ponto onde seja relevante verificar a combinação das tensões segundo o critério:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{Rd}$$

f) **Na secção do encastramento, observada da extremidade livre da barra** assinale um ponto onde seja relevante verificar a combinação das tensões segundo o critério:

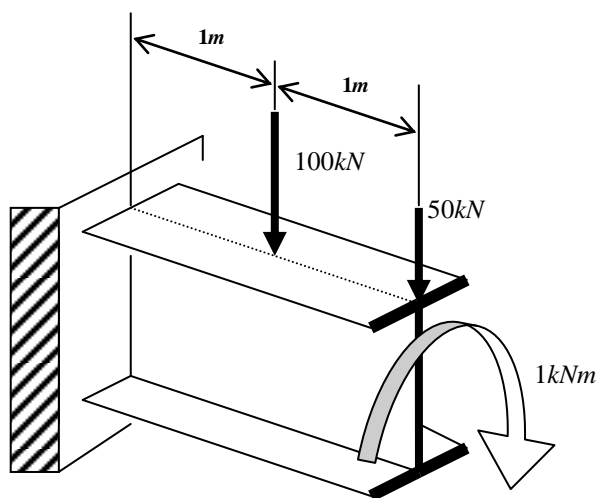
$$\tau_{\max} \leq \frac{\sigma_{Rd}}{\sqrt{3}}$$

g) Utilize o critério de Von Mises e um valor de cálculo da tensão resistente do material,  $\sigma_{Rd} = 235 \text{ MPa}$  para:

- calcular o valor máximo para o comprimento L da viga;

Solução : g)  $L \leq 1.44 \text{ m}$ ;

21) A viga encastrada está sujeita a acções com valores de cálculo indicados na figura seguinte:



a) Trace os diagramas de esforços (T; M;  $M_t$ );

b) Exclusivamente com base nas tensões normais, dimensione a viga como um perfil INP (tabela técnica), admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material,  $\sigma_{Rd} = 235 \text{ MPa}$ .

c) Para o perfil seleccionado e **na secção do encastramento** trace o diagrama das tensões normais devido ao momento flector, indicando **o valor** das tensões normais máximas;

d) **Na secção do encastramento, observada da extremidade livre da barra** faça a representação das tensões tangenciais devidas **ao esforço transversal** em que seja possível visualizar o fluxo no sentido correcto e a distribuição das tensões através da



espessura; em desenho separado faça o diagrama das tensões tangenciais (não necessita de quantificar).

e) **Na secção do encastramento, observada da extremidade livre da barra** faça a representação das tensões tangenciais devidas **ao momento torçor** em que seja possível visualizar o fluxo no sentido correcto e a distribuição das tensões através da espessura;

f) **Na secção do encastramento, observada da extremidade livre da barra** assinale um ponto onde seja relevante verificar a combinação das tensões segundo o critério:

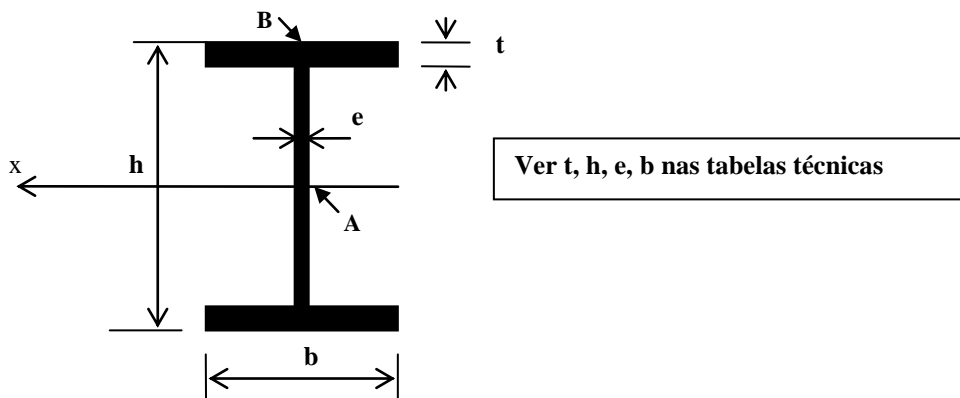
$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{Rd}$$

g) **Na secção do encastramento, observada da extremidade livre da barra** assinale um ponto onde seja relevante verificar a combinação das tensões segundo o critério:

$$\tau_{\max} \leq \frac{\sigma_{Rd}}{\sqrt{3}}$$

h) **Verifique** o perfil INP seleccionado, admitindo um material com  $\sigma_{Rd} = 235MPa$ .

**Para o cálculo das tensões tangenciais devidas a esforço transversal e a momento torçor adopte a secção simplificada apresentada na figura seguinte, onde  $h$ ,  $e$ ,  $b$  são cotas do perfil seleccionado e  $t$  é a espessura do banzo a  $\frac{1}{4}$  da largura deste:**



Solução: b) INP 34; c)  $\sigma_{\max} = 216.68MPa$ ; f) Ponto B; g) Ponto A; h) No ponto B:  $222.68MPa < 235MPa$ , Verifica; No ponto A:  $55.24MPa < 135.7MPa$ , Verifica.

## Referências

Dias da Silva, V. – *Mecânica e Resistência dos Materiais*, capítulo X – Momento Torçor. 2ª Edição. Edição: ZUARI – Edição de Livros Técnicos, Lda. 1999. ISBN: 972-98155-0-X.

William Nash – *Resistência de Materiais*, capítulo 5 – Torção. Edição: McGraw-Hill . 2001. ISBN: 972-773-090-6.