



SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS EM ÁLGEBRAS

Alexandra Cristina Ferros dos Santos Nascimento Baptista

Tese apresentada à Universidade de Évora
para obtenção do Grau de Doutor em Matemática

ORIENTADORES: *Carlos Correia Ramos*
Nuno Miguel Matos Ramos Martins

ÉVORA, MAIO DE 2012





Contactos:

Universidade de Évora
Instituto de Investigação e Formação Avançada - IIFA
Palácio do Vimioso | Largo Marquês de Marialva, Apart. 94
7002-554 Évora | Portugal
Tel: (+351) 266 706 581
Fax: (+351) 266 744 677
email: iifa@uevora.pt

AGRADECIMENTOS

O início do meu projecto de doutoramento foi marcado pela perda do Professor Sousa Ramos. Apesar de não ter tido a oportunidade de desenvolver este projecto com ele, tive a sorte de ser orientada e de me cruzar com pessoas que guardam em si um pouco do seu espírito de trabalho e da sua forma de estar na ciência. Agradeço a todas elas por partilharem comigo o legado que receberam.

Em particular, aos meus orientadores, Professor Doutor Carlos Correia Ramos e Professor Doutor Nuno Martins, agradeço o aliciente tema de dissertação, o apoio durante a realização deste trabalho, as discussões e trocas de ideias, o estímulo, os conselhos e sugestões e, não menos importante, a compreensão, o lado humano e a amizade.

Obrigada ao Instituto Politécnico de Leiria e à Fundação para a Ciência e Tecnologia por, em determinada fase do trabalho, me terem permitido criar as condições necessárias para a realização do mesmo, através do Programa de Apoio à Formação Avançada de Docentes do Ensino Superior Politécnico (PROTEC).

Ao Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (CIMA) dirijo uma palavra de agradecimento, por ter possibilitado a minha participação em diversos congressos internacionais.

Ao Departamento de Matemática e à Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria, agradeço o apoio institucional e o estímulo de colegas e alunos, sem os quais a minha profissão não teria sentido.

A todos os amigos, obrigada pelos momentos de partilha e alegria que me deram incentivo e ânimo, pelas mensagens carinhosas à distância e pelos mimos dos que estão mais perto. Em especial à minha amiga Li, que fez comigo este caminho, sempre cúmplice, agradeço a amizade presente nos momentos bons e nos momentos em que as dificuldades pareciam incontornáveis. É bem verdade: “. . . Quando estiver desanimado, dai-me alguém para eu encorajar. . .”

À minha família, pelo amor, pelos valores e ensinamentos que me transmitiram ao longo da vida, dois dos quais, a perseverança e capacidade de acreditar que sou capaz, que foram fundamentais para ultrapassar os obstáculos que foram surgindo ao longo do caminho. Uma palavra especial à minha mãe, exemplo de que nunca é tarde para abraçar um grande desafio.

Ao Diogo, tenho tudo a agradecer: o seu estímulo, encorajamento, ajuda, dedicação e paciência; o companheirismo, apoio e cumplicidade durante toda a nossa vida em comum, que espero que continue sempre.

Ao meu filho, a criança carinhosa que sempre me lembrou como a vida pode ser bela na descoberta das coisas simples e “pikis”, como o próprio diz.

Gostaria ainda de expressar a minha gratidão e o meu reconhecimento a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta dissertação.

Sistemas Dinâmicos Discretos em Álgebras

RESUMO

Neste trabalho é feito o estudo de sistemas dinâmicos discretos em álgebras de matrizes. Este tema é explorado recorrendo a várias ferramentas da álgebra linear, com o objectivo de tirar partido da estrutura algébrica do espaço.

É estudada a aplicação quadrática matricial, tomando uma matriz como parâmetro, aliando as propriedades algébricas à teoria das aplicações quadráticas escalares já existente, no caso real e complexo. São exploradas diversas características da dinâmica, tais como, a existência de ciclos comutativos e não-comutativos, a sua estabilidade, entre outras. São estudadas possíveis generalizações para o caso matricial das noções de conjunto de Mandelbrot e de conjunto de Julia.

Os resultados atingidos são aplicados ao estudo da dinâmica da aplicação quadrática em diferentes álgebras hipercomplexas.

É explorada a iteração quadrática no conjunto das matrizes estocásticas simétricas; as conclusões ilustram o comportamento do sistema dinâmico discreto definido no espaço das cadeias de Markov reversíveis.

PALAVRAS-CHAVE: Dinâmica em álgebras de matrizes, ciclos comutativos, ciclos não-comutativos, conjunto de Mandelbrot matricial, conjunto de Julia matricial, matrizes estocásticas, cadeias de Markov reversíveis

Discrete Dynamical Systems in Algebras

ABSTRACT

In this work we study discrete dynamical systems in matrix algebras. This subject is explored using different tools of linear algebra, in order to take advantage of the algebraic structure of the space.

It is studied the iteration of a quadratic family in the algebra of real matrices, with a parameter matrix, combining the properties of the algebraic theory with the theory of the quadratic map in the real and complex cases. Several characteristics of the dynamics are explored, such as, the existence of commutative and non-commutative cycles, its stability, among others. Possible generalizations of the Mandelbrot set and Julia set are considered and studied.

The results obtained are applied to the study of the quadratic dynamic in different hypercomplex algebras.

Quadratic iteration is explored in the set of symmetric stochastic matrices; the findings illustrate the behavior of the discrete dynamical system on the space of reversible Markov chains.

KEYWORDS: Matrix dynamics, commutative cycles, non-commutative cycles, Mandelbrot set in a matrix algebra, Julia set in a matrix algebra, stochastic matrices, reversible Markov chains

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	A dinâmica da aplicação quadrática	1
1.2	Conjuntos de Mandelbrot e de Julia	2
1.3	Generalizações do estudo da dinâmica da aplicação quadrática a outros espaços	3
1.4	O estudo do caso matricial	6
2	Preliminares	9
2.1	Conceitos básicos de sistemas dinâmicos	9
2.2	A aplicação quadrática nos casos real e complexo	21
2.2.1	A iteração sob a acção da família quadrática real	22
2.2.2	A iteração sob a acção da família quadrática complexa - Conjunto de Julia e conjunto de Mandelbrot	29
3	Iteração em $M_n(\mathbb{R})$	37
3.1	Generalizações do caso unidimensional ao caso matricial	38
3.2	Iteração em $M_2(\mathbb{R})$ - a aplicação quadrática matricial	43
3.2.1	Forma canónica de Jordan e comutador	43
3.2.2	Conjuntos geradores	45
3.2.3	Tipos distintos de órbitas matriciais	48

3.2.4	A aplicação quadrática em $M_2(\mathbb{R})$ vista como uma aplicação de \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^4	50
3.3	Caracterização da dinâmica no caso comutativo	52
3.3.1	Dinâmica nos planos canônicos de Jordan	52
3.3.2	Ciclos comutativos e sua caracterização	54
3.4	Caracterização da dinâmica no caso não-comutativo	56
3.4.1	Ciclos não-comutativos e sua caracterização	57
3.4.2	As órbitas dos pontos críticos	61
3.4.3	O formato dos ciclos não-comutativos	73
4	Conjunto de Mandelbrot matricial e conjunto de Julia matricial	85
4.1	Generalização do conjunto de Mandelbrot ao caso matricial	85
4.2	Generalização do conjunto de Julia ao caso matricial	89
5	Aplicação ao estudo da dinâmica em álgebras hipercomplexas	99
5.1	A formulação matricial	99
5.2	Dinâmica em subálgebras hipercomplexas de duas componentes	101
5.2.1	Conjunto dos números complexos	103
5.2.2	Conjunto dos números perplexos ou split-complexos	104
5.2.3	Conjunto dos números duais	106
5.3	Dinâmica em subálgebras hipercomplexas de quatro componentes	109
6	A iteração em matrizes estocásticas	113
6.1	O conjunto Ω_n	114
6.2	Dinâmica discreta no conjunto das cadeias de Markov	133
6.2.1	O caso redutível	133
6.2.2	O caso primitivo	138

6.3 Conclusões 142

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de bifurcação da função quadrática $f_c(x) = x^2 + c$	25
2.2	Ampliação do diagrama de bifurcação da aplicação f_c	26
2.3	Conjuntos de Julia preenchidos \mathcal{K}_c : (a) $c = -0.25 - 0.5i$; (b) $c = 0.278 + 0.525i$; (c) $c = -0.2057 - 0.648079i$; (d) $c = -0.0694 + 0.663i$; (e) $c = -0.6 - 0.6i$; (f) $c = i$	31
2.4	Conjunto de Julia preenchido \mathcal{K}_0	32
2.5	Conjunto de Mandelbrot \mathcal{M}	33
2.6	Conjunto de Mandelbrot como catálogo dos conjuntos de Julia preenchidos	35
2.7	Períodos da órbita atractiva de f_c , a órbita do ponto crítico	36
3.1	Exemplo de conjunto crítico para a aplicação logística	63
3.2	Domínio de estabilidade no plano (a, b) de um 2-ciclo não-comutativo quando C é do tipo III	77
3.3	Domínio de estabilidade no plano (a, b) do 4-ciclo não-comutativo dado no Teorema 3.31	84
4.1	Conjunto de Mandelbrot M_{III}	87
4.2	Conjunto M'_{III} para o ponto crítico $X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$	89
4.3	Diferentes perspectivas do conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G , com $C = \begin{bmatrix} -1 & 0.22 \\ -0.22 & -1 \end{bmatrix}$	90

4.4 Conjunto de Julia preenchido matricial K_C^I , com $C = \begin{bmatrix} -1 & 0.22 \\ -0.22 & -1 \end{bmatrix}$ 91

4.5 Conjunto de Julia preenchido K_C^I , com $C = \begin{bmatrix} -1 & 0.22 \\ -0.22 & -1 \end{bmatrix}$; as órbitas das matrizes X do tipo I cujos valores próprios (x, y) estão situados nos subconjuntos marcados com um círculo e que são atraídas para o ciclo comutativo; se os valores próprios (x, y) estão situados nos subconjuntos marcados com um quadrado, então a órbita de X é atraída para o ciclo não-comutativo 92

4.6 Diferentes perspectivas do conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G , com $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.3 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix}$ 93

4.7 Diferentes perspectivas do conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G , com $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.3 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix}$ 94

4.8 Conjunto de Julia preenchido matricial K_C^I , com $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.3 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix}$ 95

4.9 Limites das subregiões do conjunto de Julia preenchido matricial K_C^I no caso em que a matriz parâmetro C é escalar, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 96

4.10 Diferentes perspectivas do conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G , com $C = \begin{bmatrix} -1.26 & 0.05 \\ -0.05 & -1.26 \end{bmatrix}$ 96

4.11 Conjunto de Julia preenchido matricial K_C^I , com $C = \begin{bmatrix} -1.26 & 0.05 \\ -0.05 & -1.26 \end{bmatrix}$. . . 97

5.1 Conjunto de Mandelbrot definido no conjunto dos números perplexos, $M_{\mathbb{P}}$. 105

5.2 Conjunto de Julia preenchido definido em \mathbb{P} , com $a = -0.3$ e $b = 0.4$ 106

5.3 Conjunto de Julia preenchido definido em \mathbb{P} , com $a = -1.8$ e $b = 0.26$ 106

5.4 Conjunto de Julia preenchido definido em \mathbb{P} , com $a = -2.3$ e $b = 0.2$ 107

5.5 Conjunto de Mandelbrot definido no conjunto dos números duais, $M_{\mathbb{D}}$ 108

5.6 Conjunto de Julia preenchido definido em \mathbb{D} , com $a = -0.4$ 108

5.7 Conjunto de Julia preenchido definido em \mathbb{D} , com $a = -1$ 109

5.8 Conjunto de Julia preenchido definido em \mathbb{D} , com $a = -1.3$ 109

6.1	Gráfico do conjunto invariante $\tilde{\Lambda}(\lambda)$ para $\lambda = 3.9$	120
6.2	Detalhe do conjunto invariante $\tilde{\Lambda}(\lambda)$ para $\lambda = 3.9$	121
6.3	Domínio Δ no plano (a, b)	121
6.4	Domínio inicial	125
6.5	Domínio inicial - outra perspectiva	126
6.6	Região E constituída pelos pares (a, b) de possíveis valores próprios da matriz inicial X_0 com entradas reais, sendo $z = 0.3$	127
6.7	Região Λ_z para o Exemplo 6.5	128
6.8	Região Λ_z , com $z = 0.330023$	131
6.9	Região Λ_z , com $z = 0.1$	132
6.10	Região Λ_z , com $z = 0.4$	132
6.11	Grafos associados à evolução das cadeias de Markov redutíveis, com $n = 4$, sendo y_k e z_k as probabilidades de transição na k -ésima iteração	135
6.12	Evolução da probabilidade de manter o mesmo estado, y_k , considerando $\lambda = 3$ e a condição inicial $y_0 = 0.7$	136
6.13	Evolução da probabilidade de manter o mesmo estado, y_k , considerando $\lambda = 4$ e a condição inicial $y_0 = 0.7$	136
6.14	Diagrama de bifurcação da aplicação h_λ	137
6.15	Grafos associados à evolução das cadeias de Markov primitivas, para $n = 5$, sendo y_k e x_k as probabilidades de transição na k -ésima iteração	140
6.16	Evolução da probabilidade de mudar de estado, y_k , considerando $\lambda = 4$ e a condição inicial $y_0 = 0.1850217\dots$ (período 4)	141
6.17	Evolução da probabilidade de mudar de estado, y_k , considerando $\lambda = 4$ e a condição inicial $y_0 = 0.1889865\dots$ (não periódica)	141

Capítulo 1

Introdução

1.1 A dinâmica da aplicação quadrática

A aplicação logística $y_{n+1} = \mu y_n (1 - y_n)$, proposta em 1975 pelo biólogo Robert May como modelo para estudar o crescimento de populações, é uma versão discreta do modelo demográfico originalmente introduzido por Pierre François Verhulst em [Ver45]. Este sistema dinâmico não linear é amplamente citado na ilustração de fenómenos complexos, já que exhibe diferentes comportamentos característicos dos sistemas caóticos.

Após a sua apresentação, algo que impressionou a comunidade científica foi o facto de, apesar do sistema dinâmico ser determinístico e definido por uma equação não linear simples, existem valores do parâmetro μ para os quais o comportamento do sistema é bastante complexo. Um exemplo desta complexidade é o facto de estados tão próximos quanto se queira poderem sofrer evoluções muito diferentes, o que condiciona o seu estudo numérico, pois um erro de cálculo pode produzir soluções completamente alteradas.

Surge então o conceito de caos determinístico, introduzido na ciência na década de setenta por Li e Yorke, em [LY75]. No entanto, já tinham sido desenvolvidos alguns trabalhos que são hoje pilares no desenvolvimento dos sistemas dinâmicos caóticos, tais

como, [Sha95] de Alexander Sharkovsky. Durante as décadas de setenta e oitenta do século XX, o interesse na dinâmica caótica explodiu e apareceram então as primeiras tentativas de formalizar matematicamente a noção de caos, tais como, a definição de Devaney, apresentada em [Dev86] e neste trabalho.

A dependência das condições iniciais, conhecida como sensibilidade às condições iniciais, é uma das propriedades dos sistemas caóticos presente nas diferentes definições matemáticas de caos apresentadas por vários autores. Esta é uma das características da dinâmica da aplicação logística. Como iremos verificar, a riqueza de fenómenos observados nesta aplicação é comum à aplicação quadrática $x_{n+1} = x_n^2 + c$, já que estas aplicações são dinamicamente equivalentes, facto que se deve à existência de uma conjugação topológica.

1.2 Conjuntos de Mandelbrot e de Julia

Gaston Julia e Pierre Fatou foram dos primeiros matemáticos a estudar as propriedades dos conjuntos de Julia, durante a segunda década do século XX, [Jul18] e [Fat17]. Introduziram os métodos iterativos no estudo dos sistemas dinâmicos sem recurso ao computador, que nos dias de hoje é das ferramentas mais úteis na reprodução do comportamento de funções iteradas.

Na década de 70, o estudo da dinâmica da aplicação quadrática f_c , definida no plano complexo por

$$f_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C},$$

foi amplamente aprofundado. Em [Man82], o matemático Mandelbrot foi um dos primeiros autores a apresentar imagens de um novo objecto matemático, designado por conjunto de Mandelbrot, definido através da iteração do ponto crítico sob a acção de f_c . Este é um

dos mais belos objectos matemáticos, tanto do ponto de vista estético, como também pelo imprevisível salto da simplicidade da sua definição para a complexidade da sua imagem. Combinando a computação gráfica com a teoria de iteração em \mathbb{C} , já estudada por Julia e Fatou, foi explorada a aplicação quadrática neste plano, obtendo-se assim conjuntos fractais de extrema complexidade, permitindo a classificação dos parâmetros de acordo com a conexidade dos conjuntos de Julia. Apesar do recurso à computação gráfica ter sido um grande passo, uma parte considerável da teoria hoje conhecida sobre o extremamente intrigante conjunto de Mandelbrot deve-se a Douady e Hubbard, [DH82] e [DH85].

Até aos dias de hoje, as propriedades dos conjuntos de Mandelbrot e de Julia foram exploradas profundamente, desde os aspectos geométricos, tais como, o detalhe infinito ou a auto-semelhança, aos aspectos mais analíticos, nomeadamente, a periodicidade, estabilidade, espaços invariantes, entre muitos outros.

Coloca-se então a questão: como será a dinâmica desta aplicação noutros espaços? E os conjuntos análogos, serão tão reveladores do comportamento da aplicação ou poderão não caracterizar tantas propriedades como no caso complexo?

1.3 Generalizações do estudo da dinâmica da aplicação quadrática a outros espaços

A observação de características inesperadas, vindas de uma aplicação cuja definição é tão simples, bem como a beleza e complexidade dos conjuntos obtidos, gerou um grande interesse e entusiasmo por parte da comunidade científica nas possíveis generalizações deste estudo.

Surgiram assim vários trabalhos que abordam a generalização a outros conjuntos. Senn, em [Sen90], demonstrou que todo o sistema numérico de duas componentes é isomorfo,

como anel, aos números complexos \mathbb{C} , perplexos \mathbb{P} ou duais \mathbb{D} . Em [Fis05], Fishback descreve o estudo da dinâmica da aplicação quadrática em subálgebras hipercomplexas de duas componentes, também designadas por sistemas numéricos de duas componentes.

As generalizações dos conjuntos fractais a dimensões superiores foi essencialmente feita usando a álgebra dos quaterniões, como extensão natural dos números complexos. Norton, em [Nor82] e [Nor89], apresentou pela primeira vez os conjuntos de Julia de funções definidas na álgebra dos quaterniões. Como os fractais quaterniônicos são 4-dimensionais, os gráficos 3-dimensionais apresentados nos seus trabalhos ilustram o comportamento de apenas três das quatro componentes, ou seja, são projecções destes conjuntos. Na mesma altura, Holbrook apresenta em [Hol87] um algoritmo para gerar nuvens de pontos representativos dos conjuntos de Julia quaterniônicos. Em [HKS90], Hart *et al.* desenvolvem este algoritmo, criando um outro alternativo, apresentado em [HSK89], mais satisfatório quanto à observação de detalhes dos conjuntos fractais. Os trabalhos que acabámos de mencionar foram mais orientados para a parte gráfica e computacional da aplicação quadrática quaterniônica, isto é, para a construção de algoritmos que gerassem os respectivos fractais. Gomatam *et al.* [GDSM95] orientaram o estudo para os aspectos analíticos deste problema, analisando a estabilidade dos ciclos e caracterizando os conjuntos de Julia associados. Embora Bedding e Briggs tenham defendido que não existe uma dinâmica interessante resultante do estudo da aplicação quadrática quaterniônica, alegando em [BB95] que os conjuntos fractais obtidos são localmente uma rotação dos fractais do plano complexo, os trabalhos nesta área continuaram. Em [GM99], Gomatam e McFarlane exploraram os domínios de estabilidade dos k -ciclos do conjunto de Mandelbrot, para diferentes classes de aplicações quaterniônicas, apresentando-os explicitamente. Usando a análise de teoria

de grupos, Bogush *et al.* [BAKS01] analisaram propriedades algébricas e geométricas dos conjuntos de Julia na álgebra dos quaterniões, mostrando que as simetrias intrínsecas a estes números dão origem a classes de conjuntos de Julia idênticos, situação que não se verifica no conjunto dos números complexos. Os autores acrescentam ainda que a parte vectorial do conjunto de Julia pode ser obtida pela rotação de um subconjunto de Julia bidimensional arbitrário, em torno de um determinado eixo. Simultaneamente, a generalização dos conjuntos fractais a dimensões superiores tomou um outro rumo: iniciou-se o estudo de outros tipos de álgebras hipercomplexas 4-dimensionais. Em [Roc00], Rochon provou que, na álgebra dos números bicomplexos, onde é válida a propriedade comutativa, os conjuntos de Mandelbrot 4-dimensionais são conexos. Ainda na álgebra dos quaterniões, em [BGS02], Gomatam *et al.* analisaram as aplicações meromorfas. Rochon apresentou em [Roc03] uma versão do teorema de Fatou-Julia para a álgebra dos números bicomplexos e caracterizou topologicamente os conjuntos de Julia preenchidos, mostrando que a dinâmica na álgebra dos números bicomplexos é uma generalização interessante dos conjuntos de Mandelbrot clássicos. Nakane, em [Nak05], investigou a dinâmica das aplicações quadráticas quaterniônicas e a respectiva conectividade dos conjuntos fractais. Petek *et al.* aplicaram a dinâmica simbólica ao estudo destas aplicações no conjunto dos quaterniões, em [LŠRP05]. Martineau e Rochon apresentaram em [MR05] várias fórmulas para estimar a distância nos conjuntos fractais bicomplexos no espaço tridimensional. Além dos trabalhos na álgebra dos números bicomplexos, em [Gin02], Gintz introduziu a álgebra dos quaterniões complexificada (CQUAT). Cheng apresentou em [CT07] dois novos métodos para gerar conjuntos fractais tridimensionais. Em [WS07], Wang *et al.* discutiu as características dos conjuntos de Julia e Mandelbrot para as aplicações $z \rightarrow z^\alpha + c$,

$\alpha \in \mathbb{N}$, definidas na álgebra dos quaterniões, entre elas, a conectividade e os limites das regiões de estabilidade dos pontos fixos. Em [SW09a] e [SW09b], os mesmos autores exploraram a estrutura topológica dos conjuntos de Mandelbrot quaterniônicos sob a acção de determinada perturbação e os conjuntos de Mandelbrot quaterniônicos associados a pontos críticos não nulos, respectivamente.

1.4 O estudo do caso matricial

A análise da dinâmica da iteração da aplicação quadrática em álgebras de matrizes é o grande objectivo deste trabalho; este tópico pode ser visto como a generalização do estudo já realizado em \mathbb{R} ou \mathbb{C} a estruturas algébricas mais abrangentes. A potencialidade deste tema é especialmente evidenciada se tivermos em conta que a estrutura algébrica deste espaço é bastante rica e que esta poderá trazer uma mais-valia ao estudo. Esta estrutura poderá também permitir uma generalização a espaços de dimensão superior, resultante da iteração em matrizes de ordem superior ou da iteração em matrizes com entradas complexas, quaterniônicas ou outras. As ferramentas existentes na álgebra linear são poderosas e a dinâmica que obtemos é muito diversificada, apresentando, por vezes, fenómenos inesperados.

A pesquisa de artigos sobre este tópico específico resultou num único trabalho, [Ser02], onde Amanda Sereney analisa a iteração em $M_2(\mathbb{R})$ sob a acção do polinómio quadrático $z \rightarrow z^2 + c$.

Na sequência de alguns dos factos analisados por Sereney, no primeiro trabalho feito sobre este tema, em [NBCRM10], abordámos a existência de ciclos não-comutativos, caracterizando analiticamente um caso particular dos 2-ciclos deste tipo.

A procura de aplicação de alguns dos resultados observados levou-nos ao estudo da dinâmica da família quadrática em certas subálgebras de $M_n(\mathbb{R})$, em particular, nas subálgebras das matrizes estocásticas simétricas. O comportamento dinâmico, já bem conhecido, da família quadrática no intervalo é reproduzido no espectro das matrizes estocásticas e, para determinadas subclasses de matrizes estocásticas, o referido comportamento dinâmico é também obtido nas entradas da matriz. Uma vez que uma matriz estocástica caracteriza uma cadeia de Markov, obtemos um sistema dinâmico discreto no espaço das cadeias de Markov reversíveis. Portanto, dependendo do parâmetro, existem condições iniciais para as quais a correspondente cadeia de Markov reversível será atraída, sob a iteração, para um ponto fixo, para um ponto periódico ou para um ponto aperiódico. Além disso, verifica-se a sensibilidade às condições iniciais e a coexistência de infinitas órbitas periódicas repulsivas, duas das características do caos. Este trabalho deu origem ao artigo [CRMNB11].

No seguimento do trabalho [NBCRM10], o estudo dos ciclos não-comutativos foi aprofundado, o que deu origem ao artigo [CRMNB12], onde foram estabelecidos resultados que caracterizam os ciclos matriciais comutativos e não-comutativos. Além disso, foram apresentados todos os tipos de 2-ciclos matriciais não-comutativos em função do parâmetro considerado e estudada a sua estabilidade.

Capítulo 2

Preliminares

Na primeira secção são introduzidos alguns conceitos e resultados fundamentais de sistemas dinâmicos discretos. Na segunda secção é apresentada a iteração quadrática nos casos real e complexo. No caso complexo, o comportamento desta família de funções é ilustrado através dos conjuntos de Julia, Fatou e Mandelbrot, com definições e propriedades básicas sobre estes conjuntos. Para mais detalhes sobre as suas propriedades, poderão ser consultadas as referências [Bea91], [Mil06], [CG93], [Rob99], entre outras.

Dada a natureza deste capítulo, as demonstrações não são apresentadas já que estes resultados não constituem, por si só, o objectivo deste trabalho, mas sim uma contextualização do estudo que se segue; no entanto, é indicada uma referência onde essa mesma demonstração pode ser encontrada.

2.1 Conceitos básicos de sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico é um modelo da evolução de algo ao longo do tempo, durante o qual essa entidade vai ocupando determinado estado. Dada a regra determinística que define a evolução dos estados e o conjunto de estados possíveis, o principal objectivo do seu estudo é compreender o seu comportamento assintótico e a sua dinâmica.

Recordamos de seguida alguns resultados essenciais, bem como a definição de certos tipos de pontos que têm um papel decisivo no estudo do comportamento dinâmico de uma aplicação, designadamente os pontos fixos, os pontos periódicos e os pontos críticos.

Definição 2.1 *Um sistema dinâmico S é um triplo (E, T, f^t) , onde T é um conjunto tempo com estrutura de grupo, o conjunto E é um espaço de estados e $f^t : E \rightarrow E$ é uma lei de evolução parametrizada em $t \in T$ que satisfaz as propriedades:*

- $f^0 = id_E$;
- $f^{t+s} = f^t \circ f^s, \forall t, s \in T$, sempre que ambos os membros da igualdade estejam definidos.

E é um espaço métrico completo, usualmente designado por *espaço de fases*. Quando $T \subseteq \mathbb{Z}$, o sistema dinâmico S diz-se *discreto*; quando $T \subseteq \mathbb{R}$, este diz-se *contínuo*. Ao longo deste trabalho estudamos sistemas dinâmicos discretos, cuja evolução é determinada pela iteração de uma certa aplicação.

Sendo $f : E \rightarrow E$ a regra determinística que determina a evolução dos estados no espaço de fases e $x \in E$, denotamos por $f^k(x)$ a k -ésima iterada do ponto inicial x por f , ou seja, $f^k(x) = f^{k-1}(f(x))$; assim, f^k significa a composição de f consigo própria $k-1$ vezes. A iteração de x sob a acção de f gera a *órbita de x* , dada por $O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$, onde x é o *ponto inicial*. Quando conveniente, poderemos considerar a notação $x \equiv x_0$ e $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, indicando que f transforma cada estado x_n no estado seguinte x_{n+1} . Dado um ponto y , um ponto x tal que $f(x) = y$ é chamado *pré-imagem de y* .

Os sistemas dinâmicos estudados ao longo deste trabalho são não lineares, já que as aplicações consideradas são não lineares. A definição destas aplicações envolve um

parâmetro fixo; o domínio desse parâmetro é chamado *espaço dos parâmetros*.

Dado um sistema dinâmico, o objectivo principal é conhecer e caracterizar as diferentes dinâmicas admitidas por f , tendo como ponto inicial um elemento de E . De seguida, são definidos alguns destes tipos de comportamento, comuns à generalidade dos sistemas dinâmicos.

Definição 2.2 *Seja $f : E \rightarrow E$ a regra determinística que determina a evolução dos estados no espaço de fases e $x, p, q \in E$.*

- x diz-se um ponto periódico de período n de f se $f^n(x) = x$, e $f^k(x) \neq x$, para $1 \leq k \leq n - 1$. Neste caso, f tem uma órbita periódica ou um ciclo de período n , $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$. Se $n = 1$, x diz-se um ponto fixo de f . Um ponto periódico de período n pode também designar-se por n -ciclo.

- x diz-se um ponto pré-periódico (ou eventualmente periódico) se existe um inteiro $k > 0$ tal que $f^k(x)$ é um ponto periódico.

- x diz-se um ponto estritamente pré-periódico se é pré-periódico mas não é periódico.

- x diz-se um ponto aperiódico se não existe um inteiro k tal que $f^k(x)$ é um ponto periódico.

- a órbita de x diverge, sob a acção de f , se $f^n(x) \rightarrow \infty$, quando n tende para infinito.

Definição 2.3 *O conjunto dos pontos que são fixos por f^n denota-se por $Per(n, f)$, ou seja, $Per(n, f) = \{x : f^n(x) = x\}$.*

Definição 2.4 *Seja d a métrica considerada em E e p um ponto periódico.*

- Diz-se que um ponto q é assintótico a p no futuro se $d(f^k(q), f^k(p))$ converge para

0 quando $k \rightarrow +\infty$. O conjunto dos pontos assintóticos a p no futuro, definido como

$$W^s(p) = \left\{ q \in E : d\left(f^k(q), f^k(p)\right) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty \right\},$$

diz-se o conjunto estável de p .

• Se a função f é invertível, diz-se que um ponto q é assintótico a p no passado se $d\left(f^k(q), f^k(p)\right)$ converge para 0 quando $k \rightarrow -\infty$. O conjunto dos pontos assintóticos a p no passado, definido como

$$W^u(p) = \left\{ q \in E : d\left(f^k(q), f^k(p)\right) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow -\infty \right\},$$

diz-se o conjunto instável de p . Se f não é invertível, então diz-se que um ponto q é assintótico a p no passado se existirem sequências p_{-k} e q_{-k} tais que $p_0 = p$, $q_0 = q$, $f(p_{-k}) = p_{-k+1}$, $f(q_{-k}) = q_{-k+1}$ e $d(p_{-k}, q_{-k})$ converge para 0 quando $k \rightarrow +\infty$.

Os conjuntos estável e instável de um ponto periódico p verificam a relação $f^k(W^{s,u}(p)) \subseteq W^{s,u}(p)$, para todo o $k \in T$.

Dado um ponto periódico p , o conjunto estável $W^s(p)$ também se designa por *bacia de atracção do ponto p* .

Definição 2.5 A *bacia de atracção de uma órbita periódica* $O = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ é o conjunto dos pontos x tais que $d\left(f^k(x), f^{k+m}(p_0)\right) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$ para algum m .

Assim, a bacia de atracção da órbita O consiste nos pontos que são assintóticos a algum ponto p_i da órbita, $0 \leq i \leq n-1$.

Definição 2.6 A *bacia de atracção imediata do ponto periódico p_0* é a vizinhança máxima I que contém p_0 tal que $d\left(f^k(x), f^k(p_0)\right) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$ para qualquer $x \in I$. A

bacia de atracção imediata de uma órbita periódica é a união das componentes conexas da sua bacia de atracção que contêm um ponto da sua órbita.

Definição 2.7 *Um subconjunto A do espaço de fases de um sistema dinâmico (E, T, f^t) diz-se f^t -invariante se $f^t(A) = A$.*

Como exemplo de um conjunto invariante podemos indicar uma qualquer órbita do sistema dinâmico. Alguns dos exemplos mais simples de conjuntos invariantes fechados são os pontos fixos e as órbitas periódicas.

Uma ligeira perturbação numa órbita poderá ou não ter impacto na sua evolução futura. As noções de estabilidade que definimos de seguida ilustram diferentes tipos de comportamento.

Definição 2.8 *Seja d a métrica considerada em E . A órbita de um ponto x diz-se:*

- *Lyapunov estável se, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $d(f^k(x), f^k(q)) < \epsilon$ sempre que $d(x, q) < \delta(\epsilon)$, $\forall k \geq 0$.*

- *assimptoticamente estável se for Lyapunov estável e se existe um $\epsilon > 0$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^k(x), f^k(q)) = 0$ sempre que $d(x, q) < \epsilon$, ou seja, se $W^s(x)$ contiver uma vizinhança de x .*

Definição 2.9 *Um ponto p diz-se:*

- *atractivo se for periódico e assimptoticamente estável;*
- *repulsivo se $W^u(p)$ contém uma vizinhança de p .*

A estabilidade de um ponto fixo de uma determinada aplicação não linear estuda-se usando o método de linearização, fazendo a análise do sinal dos valores próprios

da linearização do sistema em torno desse ponto, ou pelo método directo de Lyapunov, fazendo a análise de uma função de Lyapunov apropriada. Em alguns casos, pode ser feito o estudo quantitativo determinando os vectores próprios associados a cada valor próprio.

Se a matriz Jacobiana no ponto fixo x possuir valores próprios que se situam no interior do círculo unitário do plano complexo, estabelecemos o resultado que se segue.

Proposição 2.10 *Seja (E, T, f) um sistema dinâmico definido num aberto $E \subset \mathbb{R}^m$ por um difeomorfismo f de classe C^r com $r \geq 1$. Se x é o único ponto fixo do sistema, então x é assintoticamente estável se os valores próprios de $Df(x)$ se encontram todos no interior do círculo unitário do plano complexo.*

Dem. [ASY97]. ■

Quando existir mais do que um ponto fixo, o que geralmente acontece quando trabalhamos com aplicações não lineares, poderão existir vários pontos fixos assintoticamente estáveis; nesse caso, diz-se que o sistema exhibe multi-estabilidade e nenhum dos pontos fixos tem estabilidade assintótica global.

Quando falamos de estabilidade de aplicações lineares de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^m , isto é, aplicações do tipo

$$\mathbf{p} \mapsto A\mathbf{p},$$

onde A é uma matriz $m \times m$ tal que a aplicação $A(\mathbf{p})$ é linear para cada $a, b \in \mathbb{R}$, e $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$, tem-se

$$A(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) = aA(\mathbf{p}) + bA(\mathbf{q}).$$

Toda a aplicação linear tem a origem $\mathbf{0}$ como ponto fixo. Se todos os pontos que estão numa vizinhança do ponto fixo $\mathbf{0}$ se aproximam deste quando iterados pela aplicação, con-

sideramos o ponto fixo como sendo um atrator. Este comportamento pode ser explicado recorrendo aos valores próprios da matriz A . O próximo teorema ilustra este facto.

Teorema 2.11 *Seja $A(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então:*

- *a origem é atractiva se todos os valores próprios de A são menores do que 1, em valor absoluto;*

- *a origem é repulsiva se todos os valores próprios de A são maiores do que 1, em valor absoluto.*

Dem. [ASY97]. ■

Outro aspecto importante, que acontece em dimensão superior a um, é o facto de se poder considerar aplicações lineares para as quais numa direcção a origem é atractiva e noutra a origem é repulsiva, ou seja, a origem é um ponto de sela.

Definição 2.12 *Seja A uma aplicação linear definida em \mathbb{R}^m . Dizemos que A é hiperbólica se A não tem valores próprios de valor absoluto igual a 1. Se uma aplicação linear hiperbólica A tem pelo menos um valor próprio maior que 1, em valor absoluto, e pelo menos um valor próprio menor que 1, em valor absoluto, então a origem é definida como ponto de sela.*

Assim, existem três tipos de aplicações hiperbólicas: um tipo para o qual a origem é um ponto atractivo, outro onde a origem é um ponto repulsivo e um terceiro onde a origem é um ponto de sela. As aplicações lineares hiperbólicas são um importante objecto de estudo, pois estas têm bem definidas as direcções de contracção e de expansão. Neste sentido, podemos definir três tipos de subespaços: o subespaço próprio instável, \mathbb{E}^u , o subespaço próprio estável, \mathbb{E}^s , e o subespaço próprio centro, \mathbb{E}^C .

Definição 2.13 *Seja A uma aplicação linear definida em \mathbb{R}^m . Representamos por*

$$\mathbb{E}^s = \text{span}\{v : v \text{ é vector próprio associado ao valor próprio } \lambda \text{ de } A, \text{ com } |\lambda| < 1\}$$

$$\mathbb{E}^C = \text{span}\{v : v \text{ é vector próprio associado ao valor próprio } \lambda \text{ de } A, \text{ com } |\lambda| = 1\}$$

$$\mathbb{E}^u = \text{span}\{v : v \text{ é vector próprio associado ao valor próprio } \lambda \text{ de } A, \text{ com } |\lambda| > 1\}$$

onde $\text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$ representa o espaço gerado pelos vectores v_1, \dots, v_r .

Nas aplicações não lineares, como podemos estudar a estabilidade dos pontos fixos ou de pontos pertencentes a uma órbita periódica? A ideia usada tem presente o que é feito no estudo da estabilidade de pontos fixos de aplicações não lineares de dimensão um. Em dimensão um, o processo que determina se um ponto fixo é repulsivo ou atractivo passa pela linearização da aplicação em torno desse ponto, linearização essa que é feita usando a noção de derivada.

Teorema 2.14 *Seja x um ponto periódico de período n e seja λ o valor da derivada de f^n em x , $(f^n)'(x) = \lambda$. O ponto x é:*

- *atractivo se $|\lambda| < 1$.*
- *neutro se $|\lambda| = 1$.*
- *repulsivo se $|\lambda| > 1$.*

Dem. [Rob99] ■

Em dimensão superior a um a situação é similar, tendo em atenção que o estudo da derivada da função no ponto é agora substituído pelo estudo do valor absoluto dos valores próprios da matriz Jacobiana nesse ponto.

Seja $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ uma aplicação em \mathbb{R}^m e seja $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$. Dado um ponto

$\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_m)$ onde h_i toma valores suficientemente pequenos, tem-se

$$F(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{p}) \approx DF(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h},$$

onde $DF(\mathbf{p})$ é a matriz Jacobiana da aplicação F no ponto \mathbf{p} , sendo o erro de aproximação proporcional ao quadrado da norma de \mathbf{p} . Enquanto o erro de aproximação permanecer pequeno, a acção da aplicação F perto do ponto fixo \mathbf{p} é essencialmente a mesma que a acção da aplicação linear

$$\mathbf{h} \mapsto A\mathbf{h},$$

onde $A = DF(\mathbf{p})$ perto do ponto fixo $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Teorema 2.15 *Seja F uma aplicação em \mathbb{R}^m e $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.*

- *Se o valor absoluto de cada valor próprio de $DF(\mathbf{p})$ é menor do que 1, então \mathbf{p} é um ponto fixo atractivo.*
- *Se o valor absoluto de cada valor próprio de $DF(\mathbf{p})$ é maior do que 1, então \mathbf{p} é um ponto fixo repulsivo.*

Dem. [ASY97]. ■

Definição 2.16 *Seja F uma aplicação em \mathbb{R}^m e $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Então o ponto fixo \mathbf{p} é designado como hiperbólico se nenhum dos valores próprios de $DF(\mathbf{p})$ tem norma igual a um. Se \mathbf{p} é hiperbólico e se existe pelo menos um valor próprio de $DF(\mathbf{p})$ com norma menor que um e pelo menos um valor próprio de $DF(\mathbf{p})$ com norma maior que um, então \mathbf{p} é designado por ponto de sela.*

Se, em vez de um ponto fixo, \mathbf{p} for um ponto periódico de período k , isto é, $F^k(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, basta tomar F^k em vez de F .

Se \mathbf{p} se trata de um ponto periódico de período k interessa saber qual é o comportamento dos valores próprios de DF^k em cada um dos pontos da órbita periódica de período k , $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}$. Vamos considerar uma aplicação F definida em \mathbb{R}^m tal que existe uma órbita periódica $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}$ de período k . É sabido que o conjunto dos valores próprios do produto de várias matrizes é inalterado quando se faz uma permutação cíclica desse produto. Por outro lado, usando a regra da derivada da função composta, temos

$$DF^k(\mathbf{p}_1) = DF(\mathbf{p}_k) DF(\mathbf{p}_{k-1}) \dots DF(\mathbf{p}_1). \quad (2.1)$$

Assim, os valores próprios da matriz Jacobiana determinada no ponto \mathbf{p}_1 , $DF^k(\mathbf{p}_1)$, vão determinar a estabilidade no ponto $F^k(\mathbf{p}_1)$ mas também de toda a órbita de período k . De facto, se examinarmos os valores próprios, por exemplo, de $DF^k(\mathbf{p}_r)$ onde \mathbf{p}_r é um dos pontos da órbita periódica, verificamos que

$$DF^k(\mathbf{p}_r) = DF(\mathbf{p}_{r-1}) DF(\mathbf{p}_{r-2}) \dots DF(\mathbf{p}_1) DF(\mathbf{p}_k) \dots DF(\mathbf{p}_r). \quad (2.2)$$

Pelo que foi dito, concluímos que os valores próprios de 2.1 e 2.2 são idênticos. Assim, temos a garantia que os valores próprios são sempre os mesmos, qualquer que seja o ponto da órbita periódica considerado.

Definição 2.17 *Seja F uma aplicação em \mathbb{R}^m e \mathbf{p} um ponto da órbita periódica $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}$ de período k . Representamos por*

$$\mathbb{E}^s = \text{span}\{v : v \text{ é vector próp. associado ao valor próp. } \lambda \text{ de } DF^k(\mathbf{p}), \text{ com } |\lambda| < 1\}$$

$$\mathbb{E}^C = \text{span}\{v : v \text{ é vector próp. associado ao valor próp. } \lambda \text{ de } DF^k(\mathbf{p}), \text{ com } |\lambda| = 1\}$$

$$\mathbb{E}^u = \text{span}\{v : v \text{ é vector próp. associado ao valor próp. } \lambda \text{ de } DF^k(\mathbf{p}), \text{ com } |\lambda| > 1\}$$

onde $\text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$ representa o espaço gerado pelos vectores v_1, \dots, v_r .

Assim, é possível provar que um ponto fixo atractivo de uma aplicação não linear é topologicamente conjugado ao ponto fixo de uma aplicação linear, onde esta última é induzida pela Jacobiana da aplicação não linear. Consideremos então o teorema de Hartman-Grobman.

Teorema 2.18 (*Teorema de Hartman-Grobman*) *Seja $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um difeomorfismo de classe C^r e \mathbf{p} um ponto fixo hiperbólico. Então, existem as vizinhanças \mathcal{U} de \mathbf{p} e \mathcal{V} de $\mathbf{0}$ e um homeomorfismo $h : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ tal que*

$$F(h(\mathbf{q})) = h(A\mathbf{q}),$$

para todo $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$, onde $A = DF(\mathbf{p})$.

Dem. [ASY97]. ■

Corolário 2.19 *Seja $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um difeomorfismo de classe C^r e \mathbf{p} um ponto fixo hiperbólico. Se \mathbf{p} é um ponto repulsivo então não é Lyapunov estável; se \mathbf{p} é um ponto atractivo então é assintoticamente estável.*

Se a matriz Jacobiana possuir um valor próprio na circunferência unitária, o estudo da estabilidade é mais exigente.

Um dos aspectos mais relevantes da teoria dos sistemas dinâmicos é exactamente a distinção entre as regiões de estabilidade e as regiões onde o comportamento é caótico. Mas o que entendemos por caótico?

Definição 2.20 (*Definição de caos segundo Devaney*) *Sejam (E, T, f^t) um sistema dinâmico, $J \subseteq E$ um subconjunto invariante e f^t uma aplicação contínua. Dizemos que o sistema dinâmico é caótico em J se:*

- f^t apresenta sensibilidade às condições iniciais em J ;
- f^t é topologicamente transitiva em J ;
- os pontos periódicos de f^t são densos em J .

Nesta definição de caos segundo Devaney, verificamos que o comportamento caótico de determinada aplicação caracteriza-se pela sensibilidade às condições iniciais, isto é, existe uma constante $\beta > 0$ tal que, por muito pequena que seja a vizinhança de um ponto p considerada, existe sempre um outro ponto nessa vizinhança cuja órbita, a partir de certa iterada, dista da órbita de p pelo menos β . Outro dos requisitos é a transitividade topológica, caracterizada pela transição, através da iteração, de pontos de uma vizinhança arbitrariamente pequena para outra, e pela impossibilidade de decompor o sistema dinâmico em dois conjuntos abertos disjuntos que sejam invariantes sob a ação de f^t . Finalmente, o último requisito para o caos: os pontos periódicos são densos em E , isto é, para qualquer ponto periódico, existe um ponto de E arbitrariamente próximo do primeiro.

Outra questão que surge no estudo de sistemas dinâmicos prende-se com a distinção entre dois sistemas dinâmicos. O estudo deste problema pode ser feito através de grandezas numéricas, características qualitativas ou estruturas algébricas, estabelecendo relações de equivalência ou outras entre os sistemas dinâmicos.

A definição que apresentamos de seguida caracteriza a conjugação topológica, que preserva o número de pontos periódicos das dinâmicas dos sistemas envolvidos e também as órbitas densas, já que aplica homeomorficamente as órbitas de um dos sistemas dinâmicos nas do outro que lhe é conjugado.

Definição 2.21 *Sejam $f : I \rightarrow I$ e $g : J \rightarrow J$ duas aplicações. Dizemos que f e g são topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo $h : I \rightarrow J$ tal que $h \circ f = g \circ h$.*

Neste caso, diz-se também que f é topologicamente equivalente a g e que h é uma conjugação topológica entre f e g .

2.2 A aplicação quadrática nos casos real e complexo

Tal como referimos, a aplicação logística, $y_{n+1} = \mu y_n (1 - y_n)$, é um sistema dinâmico não linear muito citado quando se retratam as características dos sistemas caóticos. No entanto, apesar de bem conhecido, apresentamos algumas das características que serão úteis na compreensão de certos fenómenos nos capítulos que se seguem.

Usualmente, a família quadrática é definida na literatura usando uma das seguintes formas:

$$y_{n+1} = \mu y_n (1 - y_n) \quad (2.3)$$

ou

$$x_{n+1} = x_n^2 + c. \quad (2.4)$$

Assim, tendo presente a Definição 2.21, podemos verificar que (2.3) e (2.4) são dinamicamente equivalentes, já que são topologicamente conjugadas, considerando a conjugação $h(x) = -\mu x + \frac{\mu}{2}$ e $c = \frac{1}{4}(2\mu - \mu^2)$. Ao longo deste estudo, é usada a forma (2.4), sendo c um parâmetro real/complexo. Assim, ao estudar o sistema dinâmico regido por (2.4), será possível compreender o comportamento de qualquer outro sistema dinâmico definido, em \mathbb{R} ou \mathbb{C} , por qualquer outra aplicação polinomial quadrática.

2.2.1 A iteração sob a acção da família quadrática real

Consideremos a família quadrática f_c definida em \mathbb{R} por $f_c(x_n) = x_n^2 + c$, sendo $c \in \mathbb{R}$ um parâmetro fixo. Ao resolver a condição $f_c(x) = x$, com o objectivo de determinar os pontos fixos, obtemos as soluções $x_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$ e $x_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$ (que são reais se e só se $c \leq \frac{1}{4}$) e verificamos que $\lambda = f'(x_{\pm}) = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}$. Os pontos fixos, bem como os outros pontos periódicos, são essenciais na descrição do comportamento dinâmico de f_c ; usando o Teorema 2.14, o comportamento assintótico desta família é descrito ao longo dos resultados que se seguem.

Definição 2.22 *Uma família de funções a um parâmetro F_λ sofre uma bifurcação do tipo sela-nó ou bifurcação tangente em λ_0 se existir um intervalo aberto I e um valor $\varepsilon > 0$ tal que:*

1. *para $\lambda_0 - \varepsilon < \lambda < \lambda_0$, F_λ não tem pontos fixos em I ;*
2. *para $\lambda = \lambda_0$, F_λ tem um ponto fixo no intervalo I e este ponto fixo não é atractivo nem repulsivo;*
3. *para $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$, F_λ tem dois pontos fixos no intervalo I , um atractivo e outro repulsivo.*

Note-se que não é relevante o facto da definição anterior estar formulada para o caso em que a bifurcação ocorre à medida que λ cresce, já que é sempre possível encontrar uma outra família de funções $F_{-\lambda}$ que terá o comportamento adequado quando $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

Como podemos observar na Figura 2.1, quando $c = \frac{1}{4}$, ocorre a primeira bifurcação, do tipo bifurcação de sela-nó ou bifurcação tangente, caracterizada pela criação (ou des-

truição) de um par de pontos de equilíbrio com estabilidades contrárias. Usando o que vimos anteriormente, demonstra-se o seguinte resultado.

Proposição 2.23 *A aplicação $f_c(x_n) = x_n^2 + c$, $x_n, c \in \mathbb{R}$, é tal que:*

- se $c > \frac{1}{4}$, todas as órbitas divergem para ∞ ;
- se $c = \frac{1}{4}$, f_c tem um único ponto fixo, $x_+ = x_- = \frac{1}{2}$ e este é neutro;
- se $c < \frac{1}{4}$, f_c tem dois pontos fixos distintos, x_+ e x_- . O ponto fixo x_+ é repulsivo enquanto que:

- se $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, então todas as órbitas de f_c em $]-2; 2[$ são assintóticas ao ponto fixo x_- , ou seja, x_- é um ponto fixo atractivo;
- se $c = -\frac{3}{4}$, o ponto fixo x_- é neutro;
- se $c < -\frac{3}{4}$, o ponto fixo x_- é repulsivo.

Ao resolver a condição $f_c^2(x) = x$, com o objectivo de determinar os pontos periódicos de período 2, obtemos as soluções $q_+ = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-4c-3})$ e $q_- = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-4c-3})$ (que são reais se e só se $c \leq -\frac{3}{4}$) e verificamos que

$$\lambda = (f^2)'(q_{\pm}) = f'(f(q_{\pm}))f'(q_{\pm}) = 4(c+1).$$

Como verificamos na Figura 2.1, para $c = -\frac{3}{4}$ surge um novo tipo de bifurcação, designada por bifurcação de duplicação de período, caracterizada pela perda de estabilidade do ponto fixo e pelo aparecimento de uma nova órbita periódica de período 2.

Definição 2.24 *Uma família de funções a um parâmetro F_λ sofre uma bifurcação de duplicação de período em λ_0 se existir um intervalo aberto I e um valor $\varepsilon > 0$ tal que:*

1. se $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_0 + \varepsilon]$, então F_λ tem um único ponto fixo p_λ em I ;
2. se $\lambda_0 - \varepsilon < \lambda < \lambda_0$, então F_λ não tem 2-ciclos no intervalo I e o ponto fixo p_λ é atractivo;
3. se $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$, então F_λ tem um único 2-ciclo $\{q_{\lambda_1}, q_{\lambda_2}\}$ no intervalo I , com $F_\lambda(q_{\lambda_1}) = q_{\lambda_2}$. Este 2-ciclo é atractivo e o ponto fixo p_λ é repulsivo.
4. se $\lambda \rightarrow \lambda_0^+$, então $q_{\lambda_1}, q_{\lambda_2} \rightarrow p_{\lambda_0}$.

Também nesta definição, e por motivos análogos, não é relevante o facto da formulação estar feita para o caso em que a bifurcação ocorre à medida que λ cresce.

Proposição 2.25 A aplicação $f_c(x_n) = x_n^2 + c$, com $x_n, c \in \mathbb{R}$, é tal que:

- se $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, então f_c tem um único ponto fixo atractivo x_- ;
- se $c = -\frac{3}{4}$, então o ponto fixo $x_- = q_\pm$ é neutro;
- se $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$, então x_\pm são pontos fixos repulsivos e todas as órbitas de f_c e as suas pré-imagens em $]-2; 2[$ são assintóticas a um 2-ciclo $\{q_+, q_-\}$ atractivo.
- se $c < -\frac{5}{4}$, então x_\pm são pontos fixos repulsivos e $\{q_+, q_-\}$ é um 2-ciclo repulsivo.

Em $c = -\frac{5}{4}$ o 2-ciclo torna-se instável e surge um 4-ciclo estável; à medida que o valor de c vai decrescendo, este tipo de bifurcação vai-se repetindo, observando-se um fenómeno designado por cascata de duplicação de período, que podemos observar na Figura 2.1. Ao contrário do que poderemos pensar, este fenómeno não se estende ilimitadamente até $-\infty$. Com o crescimento do número de bifurcações, o período do ciclo aumenta exponencialmente e as sucessivas bifurcações ocorrem cada vez mais rapidamente; devido à

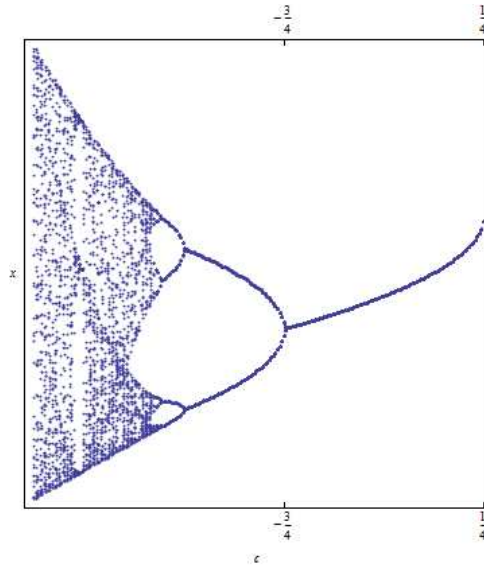


Figura 2.1: Diagrama de bifurcação da função quadrática $f_c(x) = x^2 + c$

escala de auto-semelhança, o ponto de acumulação $c_k = -1.401155$, designado por ponto de Myrberg-Feigenbaum, determina a paragem deste comportamento e a passagem ao caos. Surgem algumas "janelas de regularidade" ou de dinâmica periódica, como o caso do período 3 ou do período 5, que podem ser observados na Figura 2.2.

Quando $c = -2$, verificamos que f_c aplica o intervalo $[-2; 2]$ em si próprio.

Teorema 2.26 *Consideremos $I = [-2; 2]$ e $c = -2$. Então a função f_c tem pelo menos 2^n pontos fixos de período n no intervalo I .*

Dem. [Dev86]. ■

Se $c < -2$, existem pontos do intervalo $I = [-2; 2]$ cujas iteradas por f_c não permanecem contidas em I , escapando para infinito. Coloca-se a questão: qual é o conjunto dos pontos cuja órbita permanece no intervalo I ?

Definição 2.27 *Um conjunto de Cantor é um conjunto não vazio $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tal que:*

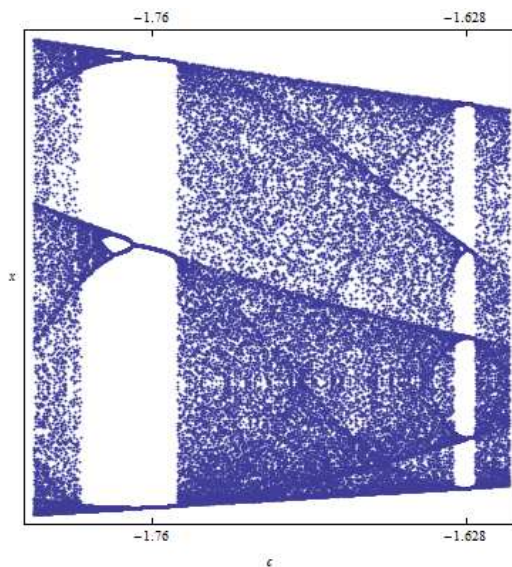


Figura 2.2: Ampliação do diagrama de bifurcação da aplicação f_c

- Σ é compacto (fechado e limitado);
- Σ é totalmente desconexo;
- todos os pontos de Σ são pontos de acumulação.

Proposição 2.28 *Sejam $c < -2$, $\Lambda_n = \{x \in [-2; 2] : f_c^n(x) \in [-2; 2]\}$ e $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \{x \in [-2; 2] : f_c^n(x) \in [-2; 2] \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$. Então*

- Para qualquer n , Λ_n é formado pela união de 2^n intervalos fechados em I .
- Sendo J qualquer um dos 2^n intervalos fechados em Λ_n , temos que $f_c^n : J \rightarrow [-2; 2]$ é bijectiva.
- Λ é um conjunto de Cantor.

Dem. [Dev86]. ■

Recorrendo a resultados de dinâmica simbólica, em [Dev86] prova-se que, para $c < -2$, a dinâmica da aplicação quadrática f_c no conjunto de Cantor Λ , ou seja, no conjunto dos pontos cuja órbita se mantém no intervalo I , é caótica.

Ao estudar o comportamento das órbitas à medida que o valor do parâmetro c cresce, verificamos que existe uma determinada regularidade quanto à existência de pontos periódicos de diferentes períodos.

O resultado que se segue, publicado em 1975 por Li e Yorke, mostra que a existência de um ponto periódico de período 3 implica a existência de pontos periódicos de todos os outros períodos.

Teorema 2.29 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua num ponto a tal que*

$$f^3(a) \leq a \leq f(a) \leq f^2(a) \quad \text{ou} \quad f^3(a) \geq a \geq f(a) \geq f^2(a).$$

Então f tem pontos periódicos de todos os períodos.

Dem. [LY75]. ■

Só mais tarde se verificou que o teorema de Li e Yorke era, na realidade, um corolário do teorema de Sharkovsky, resultado que não teve grande impacto quando foi publicado em 1964, mas que hoje é reconhecido como um marco no estudo da família de aplicações unimodais. Antes de enunciarmos o teorema, consideremos a ordem de Sharkovsky, uma nova ordenação dos números naturais definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright 11 \triangleright \dots \triangleright 2n+1 \triangleright 2(n+1)+1 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \\ & \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright \\ & \dots \triangleright 2^{n+1} \cdot 3 \triangleright 2^{n+1} \cdot 5 \triangleright 2^{n+1} \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^n \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1. \end{aligned}$$

Teorema 2.30 (Teorema de Sharkovsky) *Suponhamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua num intervalo J , com $f(J) \subseteq J$. Se f tem um ponto periódico de período m então f também tem pontos periódicos de período n , para todo o n tal que $m \triangleright n$.*

Dem. [Sha95]. ■

É interessante observar que este padrão, no que concerne ao aparecimento de órbitas periódicas, é independente da família de funções contínuas considerada.

No entanto, o teorema de Sharkovsky não é garantidamente válido em sistemas dinâmicos definidos em outros espaços topológicos.

Uma outra característica do comportamento de certas aplicações não lineares é a possibilidade destas apresentarem mais do que um atrator. No caso da aplicação quadrática f_c , para cada valor de c , constatamos a existência de um único atrator. De seguida, iremos verificar que este comportamento se relaciona directamente com o facto de f_c ter um único ponto crítico.

Definição 2.31 *Seja f uma função de classe C^3 . Define-se a derivada de Schwarz de f como*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Pela regra da cadeia,

$$S(g \circ f)(x) = Sg(f(x)) |f'(x)|^2 + Sf(x),$$

logo

$$Sf^n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} Sf(f^i(x)) |(f^i)'(x)|^2.$$

Assim, se uma aplicação f tiver derivada de Schwarz negativa, o mesmo se passa com todas as suas iteradas f^n , para $n > 1$.

Em [Sin78], Singer provou um resultado que relaciona o número de pontos críticos com o número de órbitas periódicas atractivas.

Teorema 2.32 (*Teorema de Singer*) *Seja $f : I \rightarrow I$ uma aplicação de classe C^3 com derivada de Schwarz negativa em todos os pontos do intervalo compacto I ; então a bacia de atracção imediata de qualquer órbita periódica atractiva contém um ponto crítico de f ou um dos extremos de I .*

Dem. [Dev86]. ■

Assim, segundo este resultado, uma aplicação com n pontos críticos e com os extremos repulsivos tem no máximo n órbitas periódicas atractivas. Concluimos então que, no caso da família quadrática, como existe apenas um ponto crítico, existe no máximo uma órbita periódica atractiva.

2.2.2 A iteração sob a acção da família quadrática complexa - Conjunto de Julia e conjunto de Mandelbrot

Consideremos a família quadrática f_c definida em \mathbb{C} por $f_c(x_n) = x_n^2 + c$, sendo $c \in \mathbb{C}$ um parâmetro fixo. Fixado o parâmetro complexo c , temos como objectivo definir o conjunto de Julia de f_c . O nome deste conjunto deriva do nome do matemático francês Gaston Julia, que estudou a iteração de funções racionais complexas em pormenor, a par de Pierre Fatou.

As demonstrações dos resultados apresentados nesta secção podem ser consultadas em bibliografia variada, como por exemplo [Dev86], [DH85], [CG93], [ASY97].

Para qualquer aplicação polinomial, o infinito é sempre um ponto fixo atractivo, logo,

para cada parâmetro fixo c , é sempre possível definir o conjunto

$$A_c(\infty) = \left\{ z_0 \in \mathbb{C} : f_c^k(z_0) \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty \right\}.$$

Existem sempre pontos z_0 cuja órbita $f_c^k(z_0)$ não é ilimitada, como os pontos periódicos, logo definimos o seguinte:

Definição 2.33 *O conjunto de Julia preenchido \mathcal{K}_c é composto pelos pontos cujas órbitas permanecem limitadas sob a acção de f_c , ou seja, o conjunto definido por*

$$\mathcal{K}_c = \{z_0 \in \mathbb{C} : f_c^k(z_0) \not\rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\} = \mathbb{C} \setminus A_c(\infty).$$

O conjunto \mathcal{K}_c é um subconjunto compacto de \mathbb{C} .

Definição 2.34 *O conjunto de Julia de f_c , que denotamos por \mathcal{J}_c , é a fronteira do conjunto de Julia preenchido, ou seja, $\mathcal{J}_c = \partial\mathcal{K}_c$.*

Definição 2.35 *O conjunto de Fatou \mathcal{F}_c é o conjunto complementar em \mathbb{C} de \mathcal{J}_c , $\mathcal{F}_c = \mathbb{C} \setminus \mathcal{J}_c$.*

Por vezes, os conjuntos \mathcal{K}_c e \mathcal{J}_c são ambos designados por conjuntos de Julia, embora se deva distinguir que o primeiro é o conjunto de Julia preenchido, enquanto que o segundo é a fronteira do conjunto de pontos cuja órbita é atraída para o infinito, que será igual à fronteira do conjunto de pontos cuja órbita permanece limitada sob a acção de f_c .

Podemos observar na Figura 2.3 vários conjuntos de Julia preenchidos \mathcal{K}_c .

Estes conjuntos são bastantes distintos, consoante o valor do parâmetro c considerado. Para a maior parte dos valores de c , o conjunto \mathcal{J}_c é um fractal. Observamos que \mathcal{J}_c delimita as órbitas que permanecem limitadas e aquelas que são atraídas para ∞ , sob a

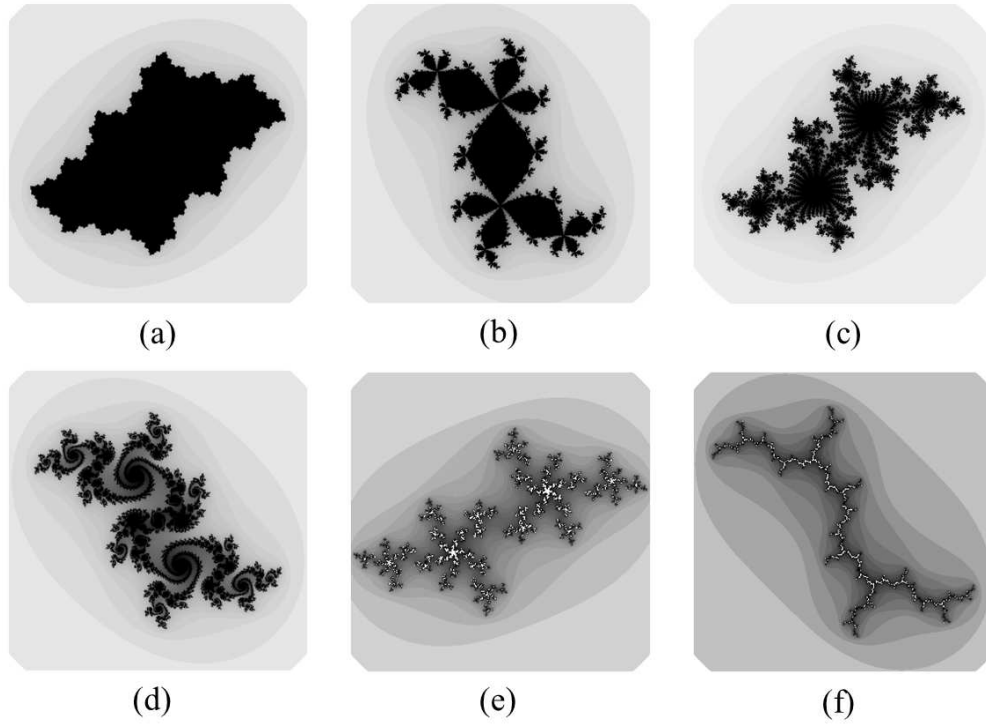


Figura 2.3: Conjuntos de Julia preenchidos \mathcal{K}_c : (a) $c = -0.25 - 0.5i$; (b) $c = 0.278 + 0.525i$; (c) $c = -0.2057 - 0.648079i$; (d) $c = -0.0694 + 0.663i$; (e) $c = -0.6 - 0.6i$; (f) $c = i$

acção de f_c . Assim, outra forma de caracterizar o conjunto de Julia \mathcal{J}_c é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 2.36 \mathcal{J}_c é o fecho do conjunto de todos os pontos periódicos repulsivos de f_c .

Proposição 2.37 \mathcal{J}_c é um conjunto compacto, não-vazio, e invariante sob a acção de f_c .

Proposição 2.38 Seja $c = 0$. Se $|z| < 1$ então $f_0^k(z) \rightarrow 0$, enquanto que se $|z| > 1$ então $f_0^k(z) \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$.

Assim, o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ é a bacia de atracção do ponto fixo 0, representada na Figura 2.4.

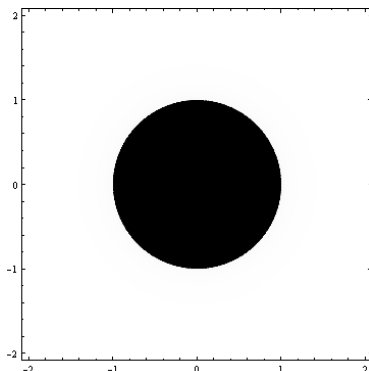


Figura 2.4: Conjunto de Julia preenchido \mathcal{K}_0

Os pontos pertencentes ao círculo unitário $|z| = 1$, que é a fronteira de \mathcal{K}_0 , formam o conjunto de Julia \mathcal{J}_0 . Mas este caso particular é a exceção, no sentido em que a maior parte dos conjuntos de Julia \mathcal{J}_c são fractais.

Quanto ao espaço de parâmetros, este pode ser decomposto em diferentes regiões, consoante o comportamento do único ponto crítico da aplicação, $z = 0$, sob a acção de f_c . Esta decomposição é ilustrada no conjunto de Mandelbrot, um dos mais populares e admirados objectos matemáticos, dado a conhecer em 1980 por Benoît Mandelbrot, quando o estudo analítico realizado por Gaston Julia e por Pierre Fatou pôde ser complementado com recurso ao computador, o que permitiu ilustrar e reproduzir a iteração de funções racionais complexas.

Definição 2.39 *O conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} é o conjunto de todos os pontos c do espaço dos parâmetros, definido no plano complexo, tais que a órbita do ponto crítico, $z = 0$, é limitada:*

$$\mathcal{M} = \left\{ c \in \mathbb{C} : f_c^k(0) \not\rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty \right\}.$$

Mas este conjunto extremamente complexo, ilustrado na Figura 2.5, pode ser descrito

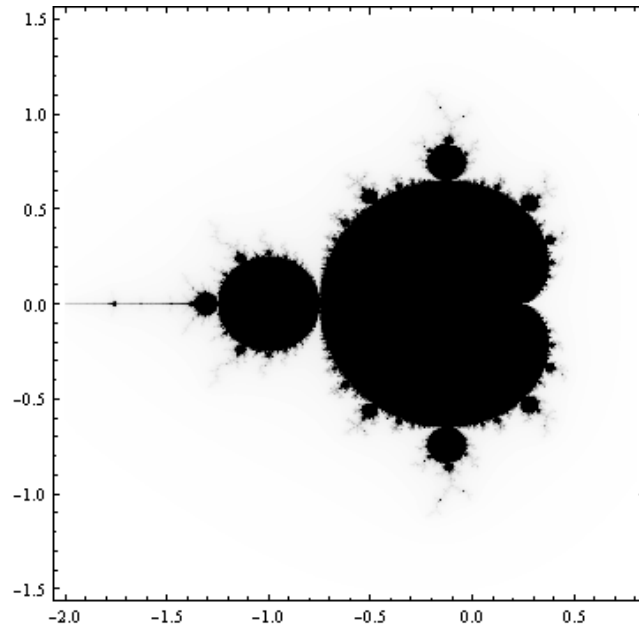


Figura 2.5: Conjunto de Mandelbrot \mathcal{M}

de outra forma equivalente, recorrendo à dicotomia existente no comportamento dinâmico de f_c , expressa pelo facto do conjunto de Julia preenchido ser conexo ou ser um conjunto de Cantor,

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \text{o conjunto de Julia preenchido } \mathcal{K}_c \text{ é conexo}\},$$

visto que, pelos trabalhos de Fatou, Julia, Douady e Hubbard, se o ponto crítico de f_c pertence a \mathcal{K}_c , então \mathcal{K}_c é conexo, sendo o recíproco válido, já que, se o conjunto de Julia preenchido \mathcal{K}_c é conexo, então a órbita de 0, $\{0, f_c(0), f_c^2(0), \dots\}$, é limitada, [Dev86]. Assim, a órbita do ponto crítico 0 permite caracterizar a geometria dos conjuntos de Julia \mathcal{J}_c :

- se as iteradas de 0 são atraídas para um ponto fixo atractivo, então \mathcal{J}_c é uma curva fechada simples, não diferenciável, como por exemplo a fronteira do conjunto de Julia

preenchido $\mathcal{K}_{-0.25-0.5i}$, ilustrado na Figura 2.3 (a).

- se as iteradas de 0 são atraídas para um ciclo atractivo de período $n \geq 2$, então \mathcal{J}_c é um conjunto conexo mais complexo: contém um número infinito de curvas simples fechadas, como por exemplo a fronteira do conjunto de Julia preenchido $\mathcal{K}_{0.278+0.525i}$, ilustrado na Figura 2.3 (b).

- se as iteradas de 0 são atraídas para ∞ , então \mathcal{J}_c é um conjunto de Cantor, um conjunto totalmente desconexo designado por *Poeira de Fatou*, como por exemplo a fronteira do conjunto de Julia preenchido $\mathcal{K}_{-0.6-0.6i}$, ilustrado na Figura 2.3 (e).

Observamos então que a caracterização da dinâmica de f_c é dominada pelo comportamento do ponto crítico:

Teorema 2.40 (*Teorema de Fatou*) *Todo o ciclo atractivo de uma função polinomial ou racional complexa atrai, pelo menos, um ponto crítico.*

Pelos resultados anteriores, caracterizando os parâmetros para os quais a órbita de 0 é limitada, iremos caracterizar as órbitas atractivas e também todos os parâmetros para os quais o conjunto de Julia preenchido \mathcal{K}_c é conexo. Assim, o conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} pode ser visto como um catálogo dos conjuntos de Julia, como ilustra a Figura 2.6, ou como algo análogo ao diagrama de bifurcação do caso real, representado anteriormente na Figura 2.1, mas para o caso da aplicação quadrática definida em \mathbb{C} .

As regiões do conjunto de Mandelbrot indicam qual o período da única órbita atractiva de f_c , como ilustramos na Figura 2.7. Por exemplo, os valores de c pertencentes ao cardióide principal de \mathcal{M} são tais que a aplicação quadrática f_c possui um único ponto fixo atractivo.

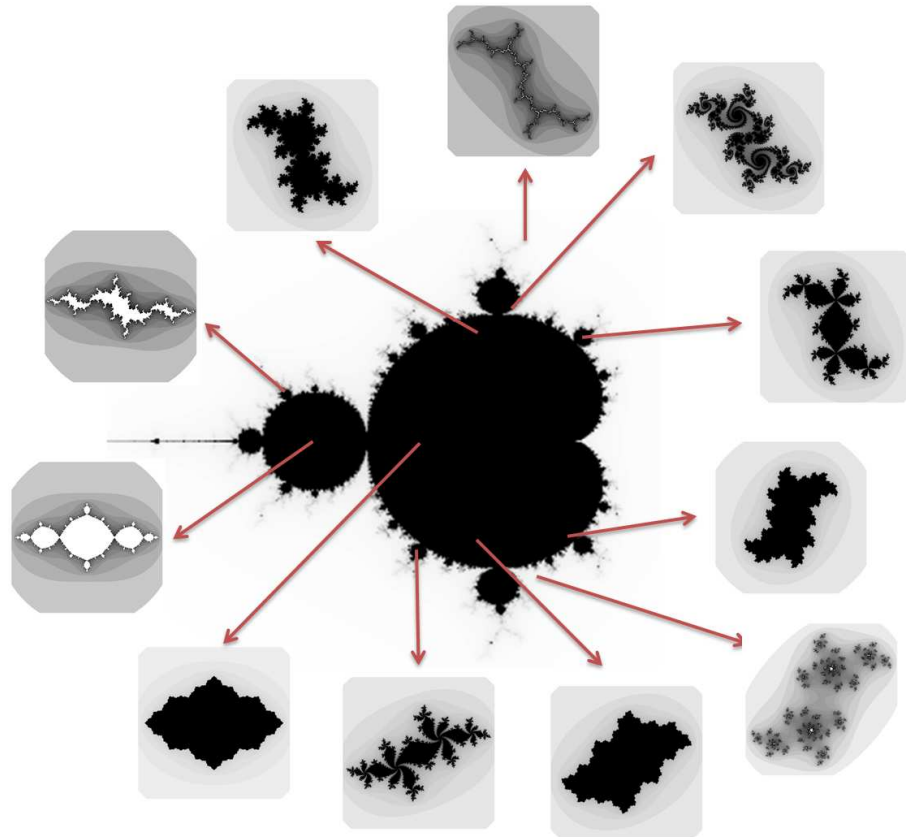


Figura 2.6: Conjunto de Mandelbrot como catálogo dos conjuntos de Julia preenchidos

Quanto às propriedades do conjunto de Mandelbrot, podemos ainda afirmar:

Proposição 2.41 \mathcal{M} contém todos os parâmetros c tais que $|c| \leq \frac{1}{4}$.

Proposição 2.42 Se $c \in \mathcal{M}$, então $|c| \leq 2$.

Proposição 2.43 Se $|c| \leq 2$ e $|f_c^n(0)| > 2$ para algum n , então $f_c^k(0) \rightarrow \infty$.

Proposição 2.44 O conjunto de Mandelbrot, \mathcal{M} , é um conjunto compacto e conexo.

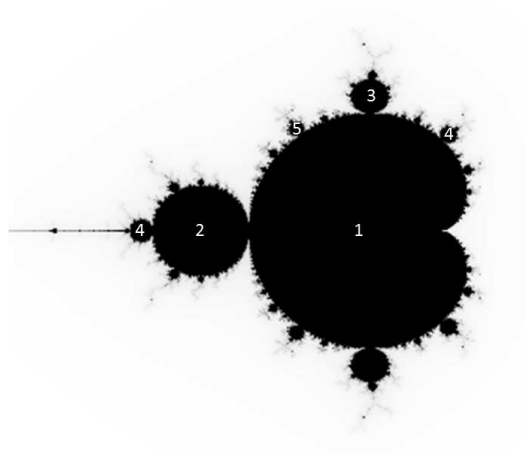


Figura 2.7: Períodos da órbita atractiva de f_c , a órbita do ponto crítico

No estudo do conjunto de Mandelbrot, existe um outro valor do parâmetro relevante:

Definição 2.45 *Um ponto de Misiurewicz é um ponto $c \in \mathcal{M}$ tal que $f_c^k(0)$ é estritamente pré-periódico.*

Exemplo 2.46 *Se considerarmos:*

- $c = i$, a órbita $f_c^k(0)$ será $\{0, i, -1 + i, i, -1 + i, \dots\}$.
- $c = -2$, a órbita $f_c^k(0)$ será $\{0, -2, 2, 2, \dots\}$.

Os pontos de Misiurewicz pertencem à fronteira do conjunto de Mandelbrot, $\partial\mathcal{M}$, e formam um conjunto enumerável denso em $\partial\mathcal{M}$. Além disso, se c é um ponto de Misiurewicz, o conjunto de Julia é igual ao conjunto de Julia preenchido, $\mathcal{J}_c = \mathcal{K}_c$, como podemos ver na Figura 2.3, caso (f), quando $c = i$. Neste caso, o conjunto de Julia define-se como *dendrite* e todos os ciclos pertencentes a \mathcal{J}_c são repulsivos, inclusivamente o ciclo onde cai a órbita do ponto crítico, $f_c^k(0)$.

Capítulo 3

Iteração em $M_n(\mathbb{R})$

Sendo este um trabalho que tem como principal objectivo o estudo de sistemas dinâmicos discretos em álgebras de matrizes, é essencial começar por abordar as formas distintas que poderemos considerar quando generalizamos uma aplicação polinomial escalar f , definida em \mathbb{R} ou em \mathbb{C} , a uma aplicação matricial, definida na álgebra $M_n(\mathbb{R})$, das matrizes reais do tipo $n \times n$.

Tomemos, por exemplo, a aplicação quadrática, definida por

$$f_c(z) = z^2 + c, \quad z, c \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Com base em 3.1, podemos considerar a aplicação matricial

$$F_c(Z) = Z^2 + cI, \quad Z \in M_n(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

ou podemos fazer uma generalização mais ampla, dada por

$$F_C(Z) = Z^2 + C, \quad Z \in M_n(\mathbb{R}), C \in M_n(\mathbb{R}). \quad (3.3)$$

É importante clarificarmos que, ao longo deste estudo, trabalharemos com os dois tipos de generalização. Iniciaremos este capítulo caracterizando a iteração sob a acção de aplicações matriciais que resultam directamente de uma aplicação escalar, na medida em

que deixamos de ter um objecto real $x \in \mathbb{R}$ e passamos a ter uma matriz $X \in M_n(\mathbb{R})$, como por exemplo a generalização 3.2. No capítulo 6 regressaremos a este tipo de generalização, ao efectuarmos o estudo de sistemas dinâmicos discretos no espaço das cadeias de Markov reversíveis.

Generalizações de aplicações polinomiais que envolvam a passagem a parâmetros matriciais, como por exemplo a generalização 3.3, serão abordadas de seguida.

São descritos neste capítulo os resultados apresentados nos artigos [NBCRM10] e [CRMNB12], sendo que este último já foi aceite e está em fase de publicação.

3.1 Generalizações do caso unidimensional ao caso matricial

A decomposição canónica de Jordan é uma das ferramentas algébricas que usamos na caracterização que pretendemos fazer.

Segundo um dos resultados básicos de álgebra linear, qualquer matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ pode ser expressa na forma canónica de Jordan

$$P^{-1}AP = J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_p)$$

com

$$J_k = J_k(\lambda_k) = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix} \in M_{m_k}(\mathbb{C}),$$

onde P é uma matriz invertível, λ_j são os valores próprios de A e $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$.

A matriz de Jordan J é única a menos da ordem dos blocos J_i , mas a matriz P não é única. Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ forem os valores próprios distintos de A , à ordem n_i do maior bloco de Jordan em que λ_i aparece chamamos *índice* de λ_i .

Duas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ dizem-se *semelhantes* se existir uma matriz invertível $P \in M_n(\mathbb{C})$, tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Como a semelhança de matrizes é uma relação de equivalência, em cada classe de equivalência é possível considerar uma matriz que está na forma canónica de Jordan.

Uma matriz quadrada A é *diagonalizável* se for semelhante a uma matriz diagonal D , isto é, se $A = PDP^{-1}$ para alguma matriz invertível P e alguma matriz diagonal D . Usualmente a matriz D é chamada de matriz espectral de A .

Assim, se A é diagonalizável, a sua forma canónica de Jordan reduz-se a uma decomposição pelos valores próprios, com todos os blocos de Jordan tais que $m_i = 1$. Neste caso, $A = PDP^{-1}$ com $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ e as colunas de P são os vectores próprios de A .

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, a sua forma canónica de Jordan pode ou não ser real; no entanto, existe uma matriz real P invertível tal que $P^{-1}AP = J$ é uma matriz real diagonal por blocos, sendo cada bloco um bloco de Jordan real. Um bloco de Jordan real é idêntico a um bloco de Jordan complexo se o correspondente valor próprio λ_j é real; no caso do valor próprio ser complexo da forma $\lambda_j = a_j + b_j i$, o bloco de Jordan real será composto por blocos 2×2 da forma

$$L_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix}.$$

Assim os blocos serão dados por

$$J_k = J_k(\lambda_k) = \begin{bmatrix} L_i & I & & \\ & L_i & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & L_i \end{bmatrix},$$

sendo I a matriz identidade.

Desta forma, qualquer que seja a matriz quadrada A , com entradas reais ou complexas, é possível determinar a sua forma canónica de Jordan. Podemos então considerar o conjunto das matrizes de Jordan que são semelhantes a alguma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ e tomá-las como representantes das diferentes classes de equivalência; estas são uma mais-valia no estudo da dinâmica que se segue.

Dois tipos distintos de generalização

Como mencionámos anteriormente, o estudo da iteração de matrizes pode ser feito de diferentes perspectivas.

Consideremos uma aplicação escalar f definida em \mathbb{R} ou em \mathbb{C} . Dizemos que f está definida no espectro $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ de $Z \in M_n(\mathbb{R})$ se os valores $f^{(j)}(\lambda_i)$ existem, com $j \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, s$. Estes são os chamados *valores da aplicação no espectro de Z* .

Ao estudarmos um sistema dinâmico matricial discreto $(M_n(\mathbb{R}), \tilde{F}_c)$ tal que \tilde{F}_c é uma aplicação matricial da forma

$$\tilde{F}_c(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + cI, \quad Z \in M_n(\mathbb{R}), a_i, c \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

que resultou da generalização directa da aplicação escalar \tilde{f}_c , dada por

$$\tilde{f}_c(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + c, \quad z, a_i, c \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

com c um parâmetro real, definida no espectro de Z , a caracterização pode ser feita tendo por base a dinâmica das diferentes matrizes de Jordan que representam as diferentes classes de equivalência referidas anteriormente, partindo da forma canónica de Jordan de Z , $P^{-1}ZP = J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_p)$.

Se \tilde{f}_c é uma aplicação escalar e $\tilde{f}_c^{(m_k-1)}$ é a sua derivada de ordem $m_k - 1$, ambas

definidas no espectro de Z , então a aplicação matricial que resulta da generalização directa da aplicação escalar \tilde{f}_c , no sentido de passarmos a ter como objecto uma matriz Z , é dada por

$$\tilde{F}_c(Z) = P\tilde{F}_c(J)P^{-1} = P\text{diag}\left(\tilde{F}_c(J_k)\right)P^{-1}$$

onde

$$\tilde{F}_c(J_k) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_c(\lambda_k) & \tilde{f}'_c(\lambda_k) & \cdots & \frac{\tilde{f}_c^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} \\ & \tilde{f}_c(\lambda_k) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \tilde{f}'_c(\lambda_k) \\ & & & \tilde{f}_c(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

ou, de forma geral,

$$\tilde{F}_c^n(Z) = P\tilde{F}_c^n(J)P^{-1} = P\text{diag}\left(\tilde{F}_c^n(J_k)\right)P^{-1}. \quad (3.6)$$

Assim, a órbita de uma matriz $Z \in M_n(\mathbb{R})$ pode ser analisada pela iteração da matriz de Jordan J , semelhante à matriz Z . De notar que, a cada matriz invertível P , está associado o subespaço no qual ocorrem as iterações; por outro lado, para cada n , $\tilde{F}_c^n(J)$ representa a classe de equivalência a que $\tilde{F}_c^n(Z)$ pertence.

No caso em que Z é diagonalizável, isto é, se $Z = PDP^{-1}$ com $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, então

$$\begin{aligned} \tilde{F}_c(Z) &= \tilde{F}_c(PDP^{-1}) = P\tilde{F}_c(D)P^{-1} = \\ &= P\text{diag}\left(\tilde{f}_c(\lambda_1), \tilde{f}_c(\lambda_2), \dots, \tilde{f}_c(\lambda_n)\right)P^{-1}. \end{aligned}$$

Para mais detalhes, consultar [HJ85] ou [Hig08].

Estas relações permitem-nos usar resultados bem conhecidos da iteração em aplicações definidas no intervalo, de forma a obtermos resultados quanto à dinâmica matricial.

Proposição 3.1 *A matriz diagonalizável $X \in M_n(\mathbb{R})$ é um ponto periódico de \tilde{F}_c se e só se o espectro de X , $sp(X)$, é um conjunto de pontos periódicos de \tilde{f}_c . Mais ainda: o período de X é o mínimo múltiplo comum dos períodos dos valores próprios de X , relativamente a \tilde{f}_c .*

Dem. Seja $X \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz diagonalizável por uma certa matriz P tal que $P^{-1}XP = \text{diag}(sp(X))$. Se $sp(X)$ é um conjunto de pontos periódicos de \tilde{f}_c , então existe um inteiro positivo m (o mínimo múltiplo comum dos períodos de $sp(X)$ relativamente a \tilde{f}_c) para o qual

$$\text{diag}\left(\tilde{f}_c^m(x_1), \dots, \tilde{f}_c^m(x_n)\right) = \text{diag}(x_1, \dots, x_n),$$

logo $\tilde{F}_c^m(X) = P\text{diag}\left(\tilde{f}_c^m(x_1), \dots, \tilde{f}_c^m(x_n)\right)P^{-1} = P\text{diag}(x_1, \dots, x_n)P^{-1} = X$. Reciprocamente, se existe uma matriz $X \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $\tilde{F}_c^m(X) = X$, para algum inteiro positivo m , então isto implica que $\text{diag}\left(\tilde{f}_c^m(x_1), \dots, \tilde{f}_c^m(x_n)\right) = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ e ainda que o espectro de X é composto por n pontos periódicos de \tilde{f}_c . ■

Pelo que vimos anteriormente, concluímos então que o estudo de um sistema dinâmico matricial discreto $(M_n(\mathbb{R}), \tilde{F}_c)$ tal que \tilde{F}_c é uma aplicação matricial da forma (3.4) pode ser feito recorrendo à iteração no conjunto de todas as formas canónicas de Jordan.

O estudo do sistema dinâmico matricial discreto $(M_n(\mathbb{R}), \tilde{F}_C)$ é mais complexo, pois neste caso a iteração de matrizes é feita sob a acção de uma aplicação matricial \tilde{F}_C da forma

$$\tilde{F}_C(Z) = A_n Z^n + A_{n-1} Z^{n-1} + \dots + A_1 Z + C, \quad Z, A_i, C \in M_n(\mathbb{R}), \quad (3.7)$$

com C um parâmetro matricial; esta resultou de uma generalização da aplicação escalar \tilde{f}_c distinta da que acabámos de expor, já que os coeficientes e parâmetro são matriciais. Esta complexidade, entre outras razões, resulta da não comutatividade da multiplicação

de matrizes. Devido a este facto, a descrição das aplicações tem de ser mais cuidada, já que, por exemplo, aplicações descritas pelos polinómios $AX^2 + BX + C$, $X^2A + BX + C$ ou $X^2A + XB + C$, com $A, B, C, X \in M_n(\mathbb{R})$, não são equivalentes.

Nas próximas secções deste capítulo, iremos focar-nos no estudo do sistema dinâmico discreto $(M_2(\mathbb{R}), F_C)$, em que a aplicação F_C é do tipo (3.7), dada por $F_C(X) = X^2 + C$.

3.2 Iteração em $M_2(\mathbb{R})$ - a aplicação quadrática matricial

Consideremos a aplicação quadrática matricial definida em $M_2(\mathbb{R})$ por

$$\begin{aligned} F_C : M_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto F_C(X) = X^2 + C \end{aligned}$$

Temos como objectivo descrever algumas das propriedades do sistema dinâmico discreto $(M_2(\mathbb{R}), F_C)$, onde C é uma matriz parâmetro fixa.

A órbita de uma matriz inicial $X_0 \in M_2(\mathbb{R})$ é o conjunto $\{X_0, X_1, \dots, X_n, \dots\}$, onde $X_{k+1} = F_C(X_k)$ para a matriz parâmetro C fixada.

A partir deste ponto, ao longo do texto, denotaremos por f_c o caso da aplicação quadrática unidimensional, ou seja, $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é um parâmetro real/complexo, consoante o contexto.

3.2.1 Forma canónica de Jordan e comutador

Tal como referimos anteriormente, existem ferramentas algébricas que serão fundamentais na concretização do objectivo deste trabalho; exemplos disso são a forma canónica de Jordan e o comutador.

Sendo $X \in M_2(\mathbb{R})$, denotaremos a forma canónica de Jordan da matriz X por J_X e

distinguiremos os três tipos de classificação:

Tipo I : $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ - matriz com valores próprios reais distintos x e y

Tipo II : $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ - matriz com um único valor próprio real x

Tipo III : $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ - matriz com valores próprios complexos $x \pm yi$

Se X já se encontra numa destas formas, dizemos que X está na forma canónica de Jordan.

Lema 3.2 *Se P é uma matriz invertível tal que $P^{-1}CP = J_C$ então o sistema dinâmico discreto $(M_2(\mathbb{R}), F_C)$ é equivalente, por um homeomorfismo/conjugação, ao sistema dinâmico $(M_2(\mathbb{R}), F_{J_C})$.*

Dem. Usando o automorfismo definido em $M_2(\mathbb{R})$ por

$$\begin{aligned} \alpha_P : M_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto \alpha_P(X) = P^{-1}XP \end{aligned}$$

obtemos

$$\alpha_P^{-1} \circ F_{J_C} \circ \alpha_P(X) = F_C(X)$$

já que

$$\begin{aligned} P^{-1}F_C(X)P &= P^{-1}X^2P + P^{-1}CP = (P^{-1}XP)(P^{-1}XP) + (P^{-1}CP) = \\ &= F_{P^{-1}CP}(P^{-1}XP) = F_{J_C}(P^{-1}XP). \end{aligned}$$

■

Logo, sendo conveniente para o estudo, podemos assumir que a matriz parâmetro C se encontra na forma canónica de Jordan, enquadrada num dos três tipos apresentados.

Apesar da complexidade existente no caso em que a aplicação F_C é do tipo (3.7), se restringirmos o estudo a certas subálgebras, é possível usarmos argumentos semelhantes

aos usados na caracterização do caso (3.4). Mas como podemos então distinguir estas situações?

O comutador é o instrumento algébrico que usaremos nesta distinção, já que permitirá escolher a abordagem a utilizar no estudo da dinâmica resultante da acção de F_C em X_0 , sendo X_0 a matriz inicial e C a matriz parâmetro (que assumiremos ser não escalar, já que esta situação se reduz ao caso particular (3.2) do caso (3.4), descrito anteriormente).

Consideremos o comutador

$$[X_0, C] := X_0C - CX_0. \quad (3.8)$$

Se $[X_0, C] = 0$ então existe uma base de \mathbb{R}^2 na qual as matrizes X_0 e C estão simultaneamente na mesma forma canónica de Jordan, ou seja, existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$, tal que

$$P^{-1}X_0P = J_{X_0} \quad \text{e} \quad P^{-1}CP = J_C. \quad (3.9)$$

Lema 3.3 *Consideremos a matriz parâmetro C na forma canónica de Jordan. Uma matriz X comuta com C , $[X, C] = 0$, se e só se X está na mesma forma canónica que C .*

Dem. Estudando o caso particular de cada um dos diferentes tipos de matriz parâmetro C , na forma canónica de Jordan, verificamos algebricamente que $[X, C] = 0$ se e só se X está na mesma forma canónica que C , já que assumimos que a matriz parâmetro C não é escalar. ■

3.2.2 Conjuntos geradores

Consideremos X_0 e C pertencentes a $M_2(\mathbb{R})$, pressupondo que apenas C está na forma canónica de Jordan. Em [Ser02], Serenevy demonstrou o resultado que se segue.

Teorema 3.4 *A dinâmica de F_C está restrita ao subespaço $\langle I, X_0, C \rangle$ de $M_2(\mathbb{R})$, de dimensão 3.*

Dem. [Ser02]. ■

Este resultado é consequência do teorema de Cayley-Hamilton, [HJ85], que estabelece que, se $p = p(x) = \det(xI - X)$ é o polinómio característico associado à matriz X de ordem n , então $p(X) = 0$. Isto implica que, se $X \in M_2(\mathbb{R})$, então

$$X^2 = \operatorname{tr}(X)X - \det(X)I, \quad (3.10)$$

sendo $\operatorname{tr}(X)$ e $\det(X)$ o traço e o determinante da matriz X , respectivamente, e I a matriz identidade de ordem 2. Logo

$$F(X_0) = \operatorname{tr}(X_0)X_0 - \det(X_0)I + C$$

e todas as iterações posteriores irão pertencer ao subespaço gerado pelas matrizes I, C e X_0 . Assim, podemos escrever cada elemento de uma dada órbita como combinação linear de I, C e X_0 , como definido em [CRMNB12].

Proposição 3.5 *As iteradas de uma dada matriz inicial X_0 , sob a acção de F_C , podem ser dadas por*

$$X_n = F_C(X_{n-1}) = \alpha_n X_0 + \beta_n C + \gamma_n I,$$

onde $X_0 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_n = \operatorname{tr}(X_{n-1})\alpha_{n-1},$$

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_n = 1 + \operatorname{tr}(X_{n-1})\beta_{n-1},$$

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_n = -\det(X_{n-1}) + \operatorname{tr}(X_{n-1})\gamma_{n-1}.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dem. Por indução, para $n = 1$, o resultado $X_1 = F_C(X_0) = \text{tr}(X_0)X_0 + C - \det(X_0)I$ é válido por (3.10), que é consequência do teorema de Cayley-Hamilton para matrizes de ordem 2. Supondo, por hipótese, que o resultado é válido para $n = k$, provamos por cálculos que este é válido para $n = k + 1$, ou seja, todas as iteradas de X_0 por F_C podem ser escritas como combinação linear das matrizes I, X_0 e C da forma indicada. ■

Se X_0 comuta com a matriz parâmetro C , pelo Lema 3.3, estará na mesma forma canónica que C , logo a dinâmica sob a acção de F_C está restrita ao subespaço $\langle I, C \rangle$ de $M_2(\mathbb{R})$, de dimensão 2, como estabelece o resultado seguinte.

Corolário 3.6 *Se X_0 comuta com C , então o subespaço $\langle I, C \rangle$ de $M_2(\mathbb{R})$ de dimensão 2 é invariante sob a acção de F_C . Neste caso, as iteradas de uma dada matriz inicial X_0 são dadas por*

$$X_n = F_C(X_{n-1}) = \beta_n C + \gamma_n I,$$

com

$$\beta_n = (\beta_{n-1})^2 \text{tr}(C) + 2\beta_{n-1}\gamma_{n-1} + 1,$$

$$\gamma_n = -(\beta_{n-1})^2 \det(C) + (\gamma_{n-1})^2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Os valores iniciais β_0 e γ_0 dependem da forma canónica de Jordan de X_0 :

$$\begin{aligned} & \text{- Se } X_0 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \text{ são do tipo } I, \text{ com } a \neq b, \text{ então } \beta_0 = -\frac{-x+y}{a-b} \text{ e} \\ & \gamma_0 = -\frac{bx-ay}{a-b}; \end{aligned}$$

- Se $X_0 = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ são do tipo II, então $\beta_0 = 1$ e $\gamma_0 = -a + x$;
- Se $X_0 = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ são do tipo III, então $\beta_0 = \frac{y}{b}$ e $\gamma_0 = -\frac{-bx + ay}{b}$.

Dem. A partir da Proposição 3.5, recorrendo a cálculo algébrico. ■

3.2.3 Tipos distintos de órbitas matriciais

Pelas características específicas de certos tipos de órbitas matriciais, é essencial estabelecer certas designações:

Definição 3.7 Seja $X_0 \in M_2(\mathbb{R})$. A órbita $\{X_0, X_1, \dots, X_n, \dots\}$ da matriz X_0 diz-se:

- *comutativa* se $X_i C = C X_i$, para todo o $i \in \mathbb{N}_0$.
- *pré-comutativa* se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que a órbita de $X_k = F_C^k(X_0)$ é comutativa.
- *não-comutativa* se $X_i C \neq C X_i$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$.
- *um n -ciclo* se é periódica de período n , ou seja, se $F_C^n(X_0) = X_0$ e $F_C^k(X_0) \neq X_0$, para $1 \leq k \leq n - 1$.

De acordo com as definições dadas, um *n -ciclo comutativo* será uma órbita $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ tal que $F_C^n(X_0) = X_0$ e $X_i C = C X_i$, para todo o $i \in \mathbb{N}_0$; um *n -ciclo não-comutativo* será uma órbita tal que $F_C^n(X_0) = X_0$ e $X_i C \neq C X_i$, para todo o $i \in \mathbb{N}_0$.

É relevante notar que faz sentido definir o conceito de órbita pré-comutativa, mas não faz qualquer sentido definir o conceito de órbita "pré-não-comutativa", já que é impossível que as iteradas iniciais X_0, X_1, \dots, X_k de uma órbita comutem com a matriz parâmetro C e depois se verifique que $F_C^n(X_k) C \neq C F_C^n(X_k)$, para algum $n \geq k + 1$.

Exemplo 3.8 Consideremos a matriz parâmetro $C = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.15 \\ -0.15 & -0.9 \end{bmatrix}$ do tipo III. Fixando

este C , podemos exemplificar dois tipos de 2-ciclos, tomando diferentes matrizes iniciais:

um 2-ciclo comutativo $\{X_0, X_1\}$, com

$$X_0 = \begin{bmatrix} -0.0744815\dots & -0.176256\dots \\ 0.176256\dots & -0.0744815\dots \end{bmatrix} \quad e \quad X_1 = \begin{bmatrix} -0.925519\dots & 0.176256\dots \\ -0.176256\dots & -0.925519\dots \end{bmatrix}$$

totalmente determinado pelo isomorfismo canónico existente entre determinada subálgebra de $M_2(\mathbb{R})$ e o conjunto \mathbb{C} dos números complexos, e um 2-ciclo não-comutativo, relatado em [NBCRM10] e descrito mais adiante neste trabalho, tomando

$$X_0 = \begin{bmatrix} -0.894493\dots & 0.075 \\ -0.075 & -0.105507\dots \end{bmatrix} \quad e \quad X_1 = \begin{bmatrix} -0.105507\dots & 0.075 \\ -0.075 & -0.894493\dots \end{bmatrix}.$$

Os n -ciclos podem ainda ser caracterizados da seguinte forma:

Definição 3.9 Um n -ciclo $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ diz-se:

- em fase se existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_C^k(\mathbf{0}) = X_0$, isto é, se existe um $k \in \mathbb{N}$ a partir do qual a órbita da matriz nula coincide com o n -ciclo.
- fora de fase se não existir tal valor k .

Como iremos ver na secção 3.3, as entradas dos elementos da órbita de um ciclo matricial que esteja em fase obtêm-se directamente dos elementos dos ciclos existentes no caso unidimensional. Realçamos também que um n -ciclo não-comutativo é sempre um n -ciclo fora de fase, caso contrário entraríamos em contradição. No entanto o recíproco não se verifica: um n -ciclo fora de fase não é necessariamente um ciclo não-comutativo, como ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 3.10 Consideremos a matriz parâmetro $C = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & -1.1 \end{bmatrix}$. Verificamos a existência de dois 2-ciclos comutativos, um em fase, dado por

$$\{X_0, X_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} -0.887298\dots & 0 \\ 0 & -1.09161\dots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.112702\dots & 0 \\ 0 & 0.091608\dots \end{bmatrix} \right\},$$

para onde a órbita da matriz nula é atraída, e outro 2-ciclo comutativo, mas fora de fase, dado por

$$\{X_0, X_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} -0.887298\dots & 0 \\ 0 & 0.091608\dots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.112702\dots & 0 \\ 0 & -1.09161\dots \end{bmatrix} \right\}.$$

Ambos resultam directamente dos dois ciclos de período 2 existentes no caso unidimensional f_c , $\{-0.887298\dots, -0.112702\dots\}$ e $\{-1.09161\dots, 0.091608\dots\}$, com $c = -0.9$ e $c = -1.1$, respectivamente.

3.2.4 A aplicação quadrática em $M_2(\mathbb{R})$ vista como uma aplicação de \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^4

Para que possamos posteriormente estudar outros aspectos da dinâmica, é útil, em certos pontos, encarar a aplicação matricial como uma aplicação de \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^4 .

Consideremos a matriz inicial $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ z_0 & w_0 \end{bmatrix}$ e a matriz parâmetro $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, que se encontra na forma canónica de Jordan, enquadrada num qualquer dos três tipos apresentados. A iteração sob a acção de F_C pode ser vista como uma aplicação de \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^4 dada por

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 + y_n z_n + a \\ y_{n+1} = (x_n + w_n) y_n + b \\ z_{n+1} = (x_n + w_n) z_n + c \\ w_{n+1} = w_n^2 + y_n z_n + d \end{cases}$$

para $n \geq 0$. Logo a matriz Jacobiana de F_C em X_n , denotada por $D(X_n)$, é dada por

$$D(X_n) = \begin{bmatrix} 2x_n & z_n & y_n & 0 \\ y_n & x_n + w_n & 0 & y_n \\ z_n & 0 & x_n + w_n & z_n \\ 0 & z_n & y_n & 2w_n \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

com determinante igual a

$$\begin{aligned} \det(D(X_n)) &= 4w_n^3x_n + 8w_n^2x_n^2 - 4y_nz_nw_n^2 + 4w_nx_n^3 - 8y_nz_nw_nx_n - 4y_nz_nx_n^2 \\ &= 4(\operatorname{tr}(X_n))^2 \det(X_n). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Os valores próprios de $D(X_n)$ são

$$w_n + x_n \quad \text{e} \quad w_n + x_n \pm \sqrt{w_n^2 - 2w_nx_n + x_n^2 + 4y_nz_n}, \quad (3.13)$$

ou seja,

$$\operatorname{tr}(X_n) \quad \text{e} \quad \operatorname{tr}(X_n) \pm \sqrt{(\operatorname{tr}(X_n))^2 - 4\operatorname{Det}(X_n)}$$

com $\operatorname{tr}(X_n) \pm \sqrt{(\operatorname{tr}(X_n))^2 - 4\operatorname{Det}(X_n)} = 2(u \pm vi)$, onde $(u \pm vi)$ são os valores próprios de X_n .

Teorema 3.11 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $D^{(n)}(X_0)$ a matriz Jacobiana de F_C^n em X_0 . O determinante da matriz Jacobiana, também designado por Jacobiano de F_C^n em X_0 , é dado por*

$$\det\left(D^{(n)}(X_0)\right) = \prod_{k=0}^{n-1} 4(\operatorname{tr}(X_k))^2 \det(X_k),$$

sendo $\{X_0, X_1, \dots\}$ a órbita de X_0 .

Dem. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} D^{(n)}(X_0) &= D(F_C^{n-1}(X_0)) \times \dots \times D(F_C(X_0)) \times D(X_0) = \\ &= D(X_{n-1}) \times \dots \times D(X_2) \times D(X_1) \times D(X_0) = \prod_{k=0}^{n-1} D(X_k). \end{aligned}$$

Logo, pelo que vimos em (3.12),

$$\det \left(D^{(n)}(X_0) \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \det(D(X_k)) = \prod_{k=0}^{n-1} 4(\operatorname{tr}(X_k))^2 \det(X_k).$$

■

As definições e resultados que acabámos de enunciar, presentes em [CRMNB12], caracterizam alguns dos aspectos gerais do sistema dinâmico $(M_2(\mathbb{R}), F_C)$. No entanto, para descrever algumas das características e aspectos mais específicos, necessitamos de dividir o estudo em duas situações distintas: o caso em que a matriz inicial X_0 comuta com a matriz parâmetro C , $[X_0, C] = 0$, em oposição ao caso em que tal não acontece, $[X_0, C] \neq 0$. Tal como já referimos, o comutador definido em (3.8) é o instrumento algébrico que permite diferenciar as duas situações. Nas secções que se seguem, estudaremos cada um destes casos em particular.

3.3 Caracterização da dinâmica no caso comutativo

Se X_0 e C comutam, o estudo da dinâmica pode fazer-se usando argumentos semelhantes aos usados na caracterização do caso em que a aplicação é do tipo (3.4), já que a caracterização do sistema dinâmico $(M_2(\mathbb{R}), F_C)$ nos três subespaços canónicos de Jordan distintos permite efectuar um paralelo com o caso real/complexo. De seguida descreveremos a dinâmica nestes três subespaços, resultados que foram apresentados em [Ser02] e [NBCRM10].

3.3.1 Dinâmica nos planos canónicos de Jordan

O plano canónico de Jordan do tipo I

Se as matrizes X_0 e C têm ambas valores próprios reais distintos (são ambas do tipo I) estaremos a estudar a iteração por F_C na subálgebra de $M_2(\mathbb{R})$ composta pelas matrizes

diagonais com entradas distintas.

Considerando

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & y_0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

o sistema dinâmico $X_0 \mapsto F_C(X_0)$ é equivalente ao espaço produto das dinâmicas das aplicações quadráticas reais f_a e f_b ,

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_a(x_k) \\ y_{k+1} = f_b(y_k) \end{cases},$$

sendo a e b parâmetros reais.

Notemos que as entradas diagonais são totalmente independentes uma da outra.

O plano canônico de Jordan do tipo II

Se as matrizes X_0 e C têm ambas apenas um valor próprio real (são ambas do tipo II), estaremos a estudar a iteração por F_C na subálgebra de $M_2(\mathbb{R})$ composta pelas matrizes triangulares superiores com entradas diagonais idênticas.

Considerando

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ 0 & x_0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

o sistema dinâmico $X_0 \mapsto F_C(X_0)$ é equivalente a

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_a(x_k) \\ y_{k+1} = f'_a(x_k)y_k + 1 \end{cases},$$

sendo f_a a aplicação quadrática de parâmetro real a e f'_a a sua derivada.

Também neste caso as entradas diagonais são totalmente independentes; contudo, a outra entrada não nula depende do comportamento da entrada diagonal.

O plano canônico de Jordan do tipo III

Se as matrizes X_0 e C têm ambas valores próprios complexos (são ambas do tipo III), estaremos a estudar a iteração por F_C na subálgebra de $M_2(\mathbb{R})$ composta pelas matrizes reais de valores próprios complexos.

Considerando

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ -y_0 & x_0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

o sistema dinâmico $X_0 \mapsto F_C(X_0)$ é equivalente a

$$z_{k+1} = f_c(z_k)$$

sendo $c = a + bi$ um dos valores próprios complexos de C e $z_0 = x_0 + y_0i$ um dos valores próprios complexos de X_0 , considerando o isomorfismo

$$\phi \left(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \right) = x + iy$$

definido entre os valores $\phi(X) \in \mathbb{C}$ e as matrizes X pertencentes à referida subálgebra de $M_2(\mathbb{R})$. Esta correspondência respeita a adição e multiplicação de matrizes, verificando-se

$$\phi(F_C(Z)) = f_{\phi(C)}(\phi(Z)).$$

3.3.2 Ciclos comutativos e sua caracterização

Em qualquer um dos planos canônicos que acabámos de definir verificamos que os n -ciclos existentes são sempre comutativos. Verifica-se que existe uma relação estreita entre estes e a aplicação unidimensional que tem como parâmetro o(s) valor(es) próprio(s) da matriz parâmetro C .

Teorema 3.12 *Seja λ um valor próprio da matriz parâmetro C . A aplicação F_C tem um n -ciclo comutativo se e só se f_λ tem um n -ciclo.*

Dem. Se F_C tem um n -ciclo comutativo $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ então, pelo Corolário 3.6,

$$X_n = F_C(X_{n-1}) = \beta_n C + \gamma_n I, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

e todo o X_n está no mesmo tipo de forma canónica de Jordan que a matriz parâmetro C , considerando a matriz invertível P a que nos referimos em (3.9), tal que $P^{-1}CP = J(C)$ e $P^{-1}X_iP = J(X_i)$, $0 \leq i \leq n-1$. Logo a iteração matricial é totalmente caracterizada pela iteração nos valores próprios, tendo em conta o que vimos quanto à dinâmica nos planos canónicos de Jordan. De salientar que, no caso particular do plano canónico de Jordan do tipo II, a entrada não nula da diagonal secundária também será regida por um n -ciclo, caso as entradas da diagonal principal o sejam, como provou Sereney em [Ser02]. A implicação contrária resulta directamente da existência dos ciclos no caso unidimensional para os parâmetros dados pelos valores próprios de C . Logo obtemos o resultado enunciado.

■

De notar que, no caso do plano canónico de Jordan do tipo I, no teorema anterior f_λ deverá ter um n -ciclo qualquer que seja o valor próprio considerado.

Salientamos ainda que a órbita da matriz nula é sempre atraída para o ciclo comutativo induzido pelo caso unidimensional.

No caso dos ciclos comutativos, os únicos existentes quando nos cingimos aos planos canónicos de Jordan, podemos caracterizar com mais pormenor os valores próprios da matriz Jacobiana, recorrendo aos valores próprios dos elementos da órbita periódica.

Teorema 3.13 Se $\{X_0, \dots, X_{n-1}, \dots\}$ é uma órbita comutativa, os valores próprios da matriz Jacobiana $D^{(n)}(X_0)$ são $\prod_{k=0}^{n-1} \text{tr}(X_k)$ e $\prod_{k=0}^{n-1} 2(u_k \pm v_k i)$, sendo $u_k \pm v_k i$ os valores próprios de X_k .

Dem. Se $\{X_0, \dots, X_{n-1}, \dots\}$ é uma órbita comutativa, pelo Corolário 3.6, X_n pode ser escrito como combinação linear de C e I , para todo o n , logo concluímos que $X_i X_j = X_j X_i$, para $0 \leq i, j < n$. Como consequência, usando (3.11), provamos que $D(X_i) D(X_j) = D(X_j) D(X_i)$, para $0 \leq i, j < n$. Por outro lado, se temos um conjunto de matrizes comutativas entre si, então elas terão os mesmos vectores próprios. Como consequência, o valor próprio associado a um vector próprio do produto de matrizes comutativas é o produto dos valores próprios das matrizes correspondentes a esse mesmo vector próprio. Assim, tendo em conta que $D^{(n)}(X_0) = \prod_{k=0}^{n-1} D(X_k)$ e que os valores próprios da matriz Jacobiana $D(X_k)$ são o traço de X_k , com multiplicidade 2, e ainda o par $2(u \pm vi)$, sendo $(u \pm vi)$ os valores próprios de X_k , como vimos em (3.13), então concluímos que os valores próprios da matriz Jacobiana $D^{(n)}(X_0)$ são $\prod_{k=0}^{n-1} \text{tr}(X_k)$ (de multiplicidade 2) e $\prod_{k=0}^{n-1} 2(u_k \pm v_k i)$, sendo $u_k \pm v_k i$ os valores próprios de X_k . ■

De realçar que este resultado é válido apenas para as órbitas comutativas, quer estejam em fase ou fora de fase.

3.4 Caracterização da dinâmica no caso não-comutativo

Quando a matriz inicial X_0 não comuta com a matriz parâmetro C , o estudo da dinâmica é mais complexo do que no caso comutativo, que acabámos de apresentar. No entanto, alguns aspectos continuam a ter uma forte relação com o caso real/complexo. O caso não-comutativo é aquele que demonstra ser mais rico na variedade de fenómenos ap-

resentados. De seguida, são estabelecidos resultados gerais sobre os ciclos não-comutativos e sobre o estudo da sua estabilidade, publicados em [CRMNB12].

3.4.1 Ciclos não-comutativos e sua caracterização

Os ciclos não-comutativos da aplicação F_C verificam certas igualdades, que descrevemos no resultado que se segue.

Teorema 3.14 *Se $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ é um n -ciclo não-comutativo de F_C então*

- (1) $\prod_{i=0}^{n-1} \text{tr}(X_i) = 1$;
- (2) $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\det(X_i)}{\prod_{j=0}^i \text{tr}(X_j)} = 0$;
- (3) $\sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i}^{n-1} \text{tr}(X_j) = 0$.

Dem. Pela Proposição 3.5, sabemos que $\alpha_n = \text{tr}(X_{n-1}) \alpha_{n-1}$. Como $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ é um ciclo de período n , então $\alpha_0 = \alpha_n$, e concluímos então que

$$\alpha_n = \text{tr}(X_{n-1}) \dots \text{tr}(X_1) \text{tr}(X_0) \alpha_n \Leftrightarrow \alpha_n \left(1 - \prod_{i=0}^{n-1} \text{tr}(X_i) \right) = 0.$$

Por outro lado, pelo Lema 3.3 e pelo Corolário 3.6, se temos um n -ciclo não-comutativo $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ então $\alpha_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, como consequência, $\prod_{i=0}^{n-1} \text{tr}(X_i) = 1$. Novamente pela Proposição 3.5, concluímos que $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\det(X_i)}{\prod_{j=0}^i \text{tr}(X_j)} = 0$ e $\sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i}^{n-1} \text{tr}(X_j) = 0$. ■

Suponhamos agora que $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ é um n -ciclo comutativo de F_C induzido por $X_0 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Se x não pertence à bacia de atracção de y , sob a acção de f_a , apesar dos elementos da diagonal principal de cada um dos elementos do ciclo matricial serem os elementos do n -ciclo $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ de f_a , o n -ciclo comutativo

está fora de fase. Desta forma, embora $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ seja um n -ciclo comutativo, pelo Teorema 3.5, a primeira igualdade do Teorema 3.14 é válida. Como consequência, verificamos que o produto da soma das iteradas (duas a duas) da aplicação quadrática no caso unidimensional é igual a 1, o que nos permite tirar a seguinte conclusão quanto à aplicação unidimensional:

Proposição 3.15 *Seja c um parâmetro real, $c \in \mathbb{R}$. Qualquer ciclo $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ de período n de f_c verifica*

$$\prod_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1}) = \prod_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+2}) = \dots = \prod_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+n-1}) = 1$$

Este resultado também é válido se o parâmetro c for complexo.

Relativamente à caracterização dos ciclos não-comutativos, o Teorema 3.14 permite simplificar/particularizar alguns dos resultados já enunciados e salientar mais algumas propriedades dos ciclos não-comutativos.

Lema 3.16 *Se $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ é um n -ciclo não-comutativo, o determinante da matriz Jacobiana é dado por*

$$\det \left(D^{(n)}(X_0) \right) = 4^n \prod_{k=0}^{n-1} \det(X_k).$$

Dem. Pelo Teorema 3.14, o produto dos traços das matrizes que compõem o n -ciclo não-comutativo, $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$, é $\prod_{k=0}^{n-1} \text{tr}(X_k) = 1$. Como consequência do Teorema 3.11, concluímos que $\det \left(D^{(n)}(X_0) \right) = \prod_{k=0}^{n-1} 4 (\text{tr}(X_k))^2 \det(X_k) = 4^n \prod_{k=0}^{n-1} \det(X_k)$. ■

Apesar de não apresentarmos os valores próprios da matriz Jacobiana de forma explícita, como fizemos no Teorema 3.13 para o caso comutativo, podemos apresentar um valor próprio da Jacobiana, comum a todos os ciclos não-comutativos.

Teorema 3.17 *Se $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ é um n -ciclo não-comutativo, então $\prod_{k=0}^{n-1} \text{tr}(X_k) = 1$ é um valor próprio da matriz Jacobiana $D^{(n)}(X_0)$.*

Dem. Como $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ é um ciclo não-comutativo, pelo Teorema 3.14, $\prod_{k=0}^{n-1} \text{tr}(X_k) = 1$. Para demonstrar que 1 é valor próprio da matriz Jacobiana $D^{(n)}(X_0)$, provamos que $\det(D^{(n)}(X_0) - I) = 0$. Pela regra da cadeia, $D^{(n)}(X_0) = \prod_{k=0}^{n-1} D(X_k)$, logo, para mostrar que $\det\left(\prod_{k=0}^{n-1} D(X_k) - I\right) = 0$, substituímos $\prod_{k=0}^{n-1} \text{tr}(X_k)$ por 1 na segunda e terceira linhas e, de seguida, efectuamos algumas operações elementares nas linhas da matriz, verificando que duas delas ficam idênticas, tendo também em atenção o formato das matrizes que compõem o ciclo. Assim, pelas propriedades dos determinantes, concluímos que $\det(D^{(n)}(X_0) - I) = 0$, ou seja, 1 é um valor próprio da matriz Jacobiana.

■

De uma forma geral, o estudo de um sistema dinâmico analisa a estabilidade do sistema relativamente a um determinado ponto de equilíbrio, em relação a todas as variáveis de estado. No entanto, existem estudos que se focam na análise desta estabilidade num subconjunto do espaço de estados. No caso da aplicação F_C , a dinâmica está restrita ao subespaço $\langle I, X_0, C \rangle$ de $M_2(\mathbb{R})$ de dimensão 3, como vimos anteriormente no Teorema 3.4. Assim, se deixarmos de encarar a aplicação quadrática em $M_2(\mathbb{R})$ como uma aplicação de \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^4 e limitarmos o estudo ao subespaço invariante de dimensão 3 onde a dinâmica se desenvolve, 1 não será necessariamente um valor próprio da matriz Jacobiana $D^{(n)}(X_0)$ associada ao n -ciclo não-comutativo $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$. Desta forma, a noção de atractividade que definimos para os subespaços $\langle I, X_0, C \rangle$ de $M_2(\mathbb{R})$ de dimensão 3 é estabelecida da seguinte forma:

Definição 3.18 Um n -ciclo não-comutativo $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ de F_C diz-se um ciclo atrativo se $D^{(n)}(X_i)$ tem três valores próprios de valor absoluto inferior a 1 (sendo o quarto valor próprio igual a 1).

Esta definição de atractividade de um n -ciclo não-comutativo limita o estudo da atractividade dos ciclos não-comutativos a uma subálgebra onde F_C é invariante.

Mas como surge um ciclo não-comutativo? Para que existam ciclos não-comutativos, a dinâmica de F_C terá que envolver uma matriz parâmetro C e uma matriz inicial X_0 de tipos diferentes, de forma que estas não comutem. Mas esta condição não é suficiente, já que, mesmo satisfazendo esta exigência, verifica-se que, para um dado parâmetro C fixo, certas matrizes iniciais originam ciclos comutativos enquanto outras originam ciclos não-comutativos, como podemos observar no exemplo que se segue:

Exemplo 3.19 Fixemos a matriz parâmetro C do tipo III e consideremos a matriz inicial X_0 do tipo I dadas por:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0.22 \\ -0.22 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad X_0 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

Verificamos que:

- a órbita de alguns casos particulares de X_0 é atraída para um ciclo comutativo de período 2 contido no subespaço $\langle I, C \rangle$, que coincide com a órbita da matriz nula, a partir de certa ordem:

$$\dots \xrightarrow{F_C} \begin{bmatrix} 0.039 & -0.204 \\ 0.204 & 0.039 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_C} \begin{bmatrix} -1.039 & 0.204 \\ -0.204 & -1.039 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_C} \begin{bmatrix} 0.039 & -0.204 \\ 0.204 & 0.039 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_C} \dots$$

- algumas matrizes iniciais X_0 são atraídas para um ciclo não-comutativo de período

2, que não permanece no subespaço $\langle I, C \rangle$:

$$\dots \xrightarrow{F_G} \begin{bmatrix} 0.012 & 0.11 \\ -0.11 & -1.012 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_G} \begin{bmatrix} -1.012 & 0.11 \\ -0.11 & 0.012 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_G} \begin{bmatrix} 0.012 & 0.11 \\ -0.11 & -1.012 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_G} \dots$$

Este facto leva-nos a questionar qual será o factor que levará a que determinada órbita seja atraída para um ciclo não-comutativo. Outra questão directamente relacionada com esta, que poderá guiar o estudo, é a seguinte: será que na dinâmica matricial se passa algo análogo aos casos real e complexo, em que todo o ciclo atractivo de uma função polinomial atrai, pelo menos, um ponto crítico?

3.4.2 As órbitas dos pontos críticos

Tendo como motivação as questões colocadas no final da subsecção anterior, será útil estudar o comportamento dos pontos críticos. Mas como definir ponto crítico de uma aplicação definida de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n ? Recorremos à noção de conjunto crítico, definida por Gumovski e Mira em [GM80] e [MGBC96].

Conjuntos críticos

Os conjuntos críticos são ferramentas importantes quando estudamos aplicações não invertíveis. Quando a aplicação é definida da recta para a recta, o conjunto crítico reduz-se aos pontos críticos; nas aplicações definidas do plano para o plano, definimos as curvas críticas e nas aplicações definidas de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n teremos os conjuntos críticos.

A utilização dos conjuntos críticos no estudo da dinâmica de uma aplicação é feita com o objectivo de entender a estrutura dos atractores/bacias de atracção.

A definição de conjunto crítico CS que apresentamos de seguida é a generalização, para a dimensão n , da noção de valor crítico (imagem de um ponto crítico) de uma aplicação

definida na recta e da noção da curva crítica LC (do francês "Ligne Critique") de uma aplicação não invertível definida no plano.

Definição 3.20 *O conjunto crítico CS de uma aplicação contínua F é o conjunto dos pontos que têm pelo menos duas pré-imagens coincidentes, que estão localizadas no conjunto CS_{-1} , definido como o conjunto das pré-imagens coincidentes.*

Assim, o conjunto CS_{-1} é a generalização, para a dimensão n , da noção de ponto crítico de uma aplicação definida na recta e da noção de *fold curve* LC_{-1} de uma aplicação não invertível definida no plano.

Apresentamos de seguida um exemplo que, apesar de ser apenas a uma dimensão, já que envolve uma aplicação simples da recta para a recta, permite ilustrar melhor o conceito que acabámos de definir e o que se entende por "pré-imagens coincidentes".

Exemplo 3.21 *Consideremos a aplicação logística definida por*

$$x_{n+1} = f(x_n) = \alpha x_n(1 - x_n).$$

Sabemos que esta aplicação tem um único ponto crítico em $x = \frac{1}{2}$, cujo valor crítico é $c = \frac{\alpha}{4}$. Como podemos observar na Figura 3.1, este valor divide a recta real em dois conjuntos: $Z_0 =]c, +\infty[$, onde não existe inversa definida, e $Z_2 =]-\infty, c[$, onde os pontos têm duas pré-imagens, dadas por

$$f^{-1}(x_n) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\alpha(\alpha - 4x_n)}}{2\alpha} \quad e \quad f^{-1}(x_n) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\alpha(\alpha - 4x_n)}}{2\alpha}.$$

Se $x_n \in Z_2$, as suas duas pré-imagens vão estar localizadas simetricamente, relativamente ao ponto $c_{-1} = \frac{1}{2}$. Assim, c_{-1} é o ponto onde temos as pré-imagens coincidentes.

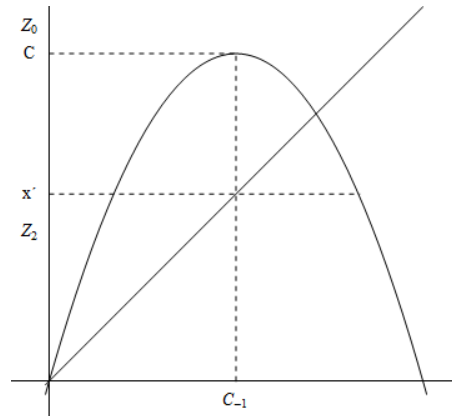


Figura 3.1: Exemplo de conjunto crítico para a aplicação logística

O conjunto crítico CS é geralmente formado por hiper-superfícies de \mathbb{R}^n de dimensão $n - 1$ em que os subconjuntos do CS separam o espaço de fases em diferentes regiões que são caracterizadas por um número diferente de pré-imagens.

Da definição de conjunto crítico podemos concluir que $CS = F(CS_{-1})$ e ainda que os pontos de CS_{-1} , para os quais a aplicação F é diferenciável, são necessariamente pontos onde o determinante da Jacobiana é igual a zero. Assim, se F é suave, teremos

$$CS_{-1} \subset \{p \in \mathbb{R}^n : \det(DF(p)) = 0\}.$$

Logo CS está contido nas curvas (ou conjuntos equivalentes de dimensão superior) que separam regiões caracterizadas por um número diferente de pré-imagens.

Pontos críticos de F_C

Os pontos críticos de F_C serão então as matrizes X tais que $\det(DF(X)) = 0$, logo, recorrendo a (3.12), serão as matrizes X tais que

$$4(\operatorname{tr}(X))^2 \det(X) = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{tr}(X) = 0 \vee \det(X) = 0).$$

Pontos críticos de traço nulo

Quanto aos pontos críticos que verificam a primeira condição, isto é, as matrizes X_0 cujo traço é nulo, podemos afirmar que:

Teorema 3.22 *Se $\text{tr}(X_0) = 0$, a dinâmica de X_0 sob a acção de F_C é caracterizada pelos casos em que a matriz parâmetro comuta com a matriz inicial.*

Dem. Seja X_0 uma qualquer matriz inicial tal que $\text{tr}(X_0) = 0$, ou seja, $X_0 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$. Isto significa que $X_0^2 = \begin{bmatrix} x^2 + yz & 0 \\ 0 & x^2 + yz \end{bmatrix}$ será uma matriz escalar. Logo, qualquer que seja o tipo da matriz parâmetro C , $F_C(X_0) = X_0^2 + C$ irá comutar com C . Assim, $F_C(X_0)$ irá gerar uma órbita comutativa, totalmente caracterizada e enquadrada num dos casos dos planos canónicos de Jordan que expusemos anteriormente, apresentados em [Ser02] e [NBCRM10]. ■

De notar que, no caso em que $\text{tr}(X_0) = 0$, a órbita de X_0 coincidirá, a partir da primeira iteração, com a órbita de $X'_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{-\det(X_0)} & 0 \\ 0 & \sqrt{-\det(X_0)} \end{bmatrix}$. Logo, neste caso, o $\det(X_0)$ será o factor determinante para o comportamento da matriz inicial X_0 sob a acção de F_C . Como acabámos de ver, a órbita de uma matriz de traço nulo é sempre pré-comutativa. Logo, caso seja atraída para um n -ciclo, será sempre para um n -ciclo comutativo.

Pontos críticos de determinante nulo

O outro tipo de pontos críticos já não tem uma caracterização tão directa, uma vez que, se X_0 é tal que $\det(X_0) = 0$, existem casos para os quais a sua órbita é pré-comutativa e outros para os quais é não-comutativa. Como distinguir estas situações?

Começemos por notar que, se X_0 é um ponto crítico de determinante nulo do tipo

II, $X_0 = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$, ou do tipo III, $X_0 = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$, então o traço deste ponto crítico também será obrigatoriamente nulo, $\text{tr}(X_0) = 0$; assim, se a matriz inicial se enquadrar num destes dois casos, o estudo reduz-se à situação que acabámos de abordar no Teorema 3.22. Concluimos então que, em $M_2(\mathbb{R})$, tendo como matriz inicial X_0 um ponto crítico de determinante nulo, os ciclos não-comutativos poderão surgir apenas no caso em que X_0 é do tipo I, $X_0 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$, (assumindo que X_0 se encontra na forma canónica de Jordan).

Se X_0 é um ponto crítico do tipo I com $\det(X_0) = 0$, apesar da situação não se resumir ao que descrevemos no resultado anterior, sabemos que os seus valores próprios são 0 e $\text{tr}(X_0)$ e ainda que $F_C(X_0) = \text{tr}(X_0)X_0 + C$, ou seja, o traço de X_0 é decisivo no comportamento da órbita de X_0 .

Notemos que as entradas da diagonal secundária mantêm o formato consoante a matriz parâmetro C . Assumindo, sem perda de generalidade, que $X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{tr}(X_0) \end{bmatrix}$, com $\text{tr}(X_0) \neq 0$, estudemos os dois casos separadamente.

Matriz parâmetro C do tipo II

Se C é do tipo II, $C = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, as entradas da diagonal principal de cada uma das iteradas da órbita matricial são dadas pelos elementos da órbita da quadrática unidimensional f_a , de forma totalmente independente da outra entrada não nula; quanto à diagonal secundária, uma das entradas é nula e outra não nula, ou seja, $X_k = F_C(X_{k-1}) = \begin{bmatrix} x_k & y_k \\ 0 & z_k \end{bmatrix}$, com

$$\begin{cases} x_k = f_a^k(0) \\ y_k = \text{tr}(X_{k-1})y_{k-1} + 1 \\ z_k = f_a^k(\text{tr}(X_0)) \end{cases} .$$

Assim, se a aplicação quadrática unidimensional f_a induz um n -ciclo $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ e $\text{tr}(X_0)$ pertence à bacia de atracção deste ciclo, então existe um t tal que $x_t = u_i$ e $z_t = u_j$, para algum i, j . Quando isto acontecer, o $\text{tr}(X_t)$ entra num n -ciclo e a entrada não-nula y_k da diagonal secundária é tal que

$$y_{t+n} = \text{tr}(X_{t+n-1})y_{t+n-1} + 1 \Leftrightarrow y_{t+n} = \text{tr}(X_{t+n-1}) \dots \text{tr}(X_t)y_t + v,$$

com $v = \sum_{i=t}^{t+n-1} \prod_{j=t+i}^{t+n-1} \text{tr}(X_j)$. Se as entradas x_k e z_k estiverem desfasadas para todo o k , ou seja, se $x_k \neq z_k$ para todo o k , então, pela Proposição 3.15, $\text{tr}(X_{t+n-1}) \dots \text{tr}(X_t) = 1$.

Assim a n -ésima composição da qual resulta y_{t+n} é linear em y_t , com declive igual a 1. Desta forma, para termos um n -ciclo na entrada y_n , e consequentemente um n -ciclo

matricial não-comutativo, terá de se verificar a condição $v = \sum_{i=t}^{t+n-1} \prod_{j=t+i}^{t+n-1} \text{tr}(X_j) = 0$, para que a aplicação linear que resulta da composição tenha ordenada na origem nula.

Notemos que esta condição é equivalente à referida no Teorema 3.14, que caracteriza os ciclos não-comutativos. A questão que se coloca agora é a seguinte: será que esta condição se verifica, qualquer que seja o desfasamento feito nas entradas da diagonal principal, isto é, nos elementos do n -ciclo unidimensional? Poderíamos pensar que existiriam sempre $n - 1$ ciclos matriciais não-comutativos, já que podemos desfasar as entradas da diagonal principal de $n - 1$ formas distintas, mas tal não é verdade, já que a condição referida nem sempre se verifica.

Tendo presentes as três condições que um n -ciclo não-comutativo $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ de FC tem de verificar, enunciadas no Teorema 3.14, comecemos por notar que, se $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ é um n -ciclo de f_a de período par e o $\text{tr}(X_0)$ pertence ao conjunto estável de $f^{\frac{n}{2}}(0)$, isto é, se $d\left(f^k(\text{tr}(X_0)), f^k\left(f^{\frac{n}{2}}(0)\right)\right)$ converge para 0 quando $k \rightarrow +\infty$, então as entradas da diagonal principal da órbita do ponto crítico matricial X_0 serão atraídas para o n -ciclo

e a órbita matricial será tal que $\text{tr}(X_i) = \text{tr}\left(X_{i+\frac{n}{2}}\right)$, a partir de certa ordem. Assim, a partir de $\prod_{i=0}^{n-1} \text{tr}(X_i) = 1$, teremos

$$\left(\text{tr}(X_0)\right)^2 \dots \left(\text{tr}\left(X_{\frac{n}{2}-1}\right)\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \text{tr}(X_i)\right)^2 = 1,$$

e conseqüentemente, $\prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \text{tr}(X_i) = \prod_{i=\frac{n}{2}-1}^{n-1} \text{tr}(X_i) = -1$, já que se $\prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \text{tr}(X_i) = 1$, então $\{X_0, \dots, X_{\frac{n}{2}-1}\}$ seria um $\left(\frac{n}{2}\right)$ -ciclo não-comutativo. Logo a segunda condição do Teorema 3.14 é verificada, já que os factores de $\sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i}^{n-1} \text{tr}(X_j)$ se anulam. Quanto à terceira condição, como neste caso $\det(X_k) = x_k z_k$, então teremos também $\det(X_i) = \det\left(X_{i+\frac{n}{2}}\right)$, a terceira igualdade do Teorema 3.14.

Conjectura 3.23 *Seja $X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{tr}(X_0) \end{bmatrix}$ um ponto crítico de determinante nulo, com $\text{tr}(X_0) \neq 0$, e $C = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ uma matriz parâmetro do tipo II. Se $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ é um n -ciclo de f_a de período ímpar ou se n é par mas $\text{tr}(X_0)$ não pertence ao conjunto estável de $f^{\frac{n}{2}}(0)$, então a segunda condição do Teorema 3.14 não se verifica, ou seja, $\sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i}^{n-1} \text{tr}(X_j) \neq 0$, logo não existirá o n -ciclo não-comutativo matricial induzido por este ponto crítico.*

Se as entradas x_k e z_k estiverem em fase a partir de determinada iterada k , isso significa que $d(f^k(\text{tr}(X_0)), f^k(0))$ converge para 0 quando $k \rightarrow +\infty$, ou seja, $\text{tr}(X_0)$ pertence ao conjunto estável de 0, $W^s(0)$. Neste caso a órbita será pré-comutativa. Assim, temos:

Lema 3.24 *Se a matriz inicial X_0 do tipo I é um ponto crítico de F_C tal que $\det(X_0) = 0$ e se os seus valores próprios pertencem ao conjunto estável de 0, relativamente a f_a , então a órbita de X_0 sob a acção de F_C será pré-comutativa.*

Matriz parâmetro C do tipo III

Se C é do tipo III, $C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, o caso é mais complexo, já que cada uma das entradas da diagonal principal não é independente das outras entradas. Para analisar este caso, usaremos o isomorfismo entre $M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ descrito por Crilly em [Cri03], já que este será útil no estudo deste caso em que a matriz parâmetro C é do tipo III e a matriz inicial X_0 é do tipo I.

A decomposição de Crilly Consideremos novamente o isomorfismo ϕ , a que já recorremos anteriormente quando descrevemos a dinâmica do plano canônico de Jordan do tipo III; este isomorfismo, definido entre o subgrupo H de $M_2(\mathbb{R})$, dado por

$$H = \left\{ Z \in M_2(\mathbb{R}) : Z = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}, z_1, z_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

e o conjunto dos números complexos \mathbb{C} , é caracterizado por

$$\begin{aligned} \phi : H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} &\mapsto z_1 + z_2 i \end{aligned}$$

Começemos por observar que qualquer matriz 2×2 real $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ se pode escrever de forma única como soma de duas matrizes, da seguinte forma:

$$X = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_2 & w_1 \\ w_1 & -w_2 \end{bmatrix},$$

sendo $z_1 = \frac{\alpha + \delta}{2}$, $w_2 = \frac{\alpha - \delta}{2}$, $z_2 = \frac{\gamma - \beta}{2}$ e $w_1 = \frac{\gamma + \beta}{2}$. Verificamos que apenas a primeira matriz pertence ao subgrupo H de $M_2(\mathbb{R})$, definido anteriormente. No entanto, considerando a matriz $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, esta soma pode ser reescrita como

$$X = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} + E \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix},$$

logo

$$X = Z + EW,$$

com as matrizes Z e W pertencentes ao subgrupo H de $M_2(\mathbb{R})$. Assim, existe um isomorfismo entre $M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ que a cada matriz X faz corresponder o par ordenado de números complexos (z, w) , em que $z = z_1 + z_2i$ é o número complexo associado à matriz $Z = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}$ e $w = w_1 + w_2i$ é o número complexo associado à matriz $W = \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix}$. Denotaremos a correspondência entre a matriz real X e o par ordenado (z, w) de números complexos por $X \equiv (z, w)$. Verificamos ainda que $\text{tr}(X) = 2 \text{Re}(z)$ e que $\det(X) = |z|^2 - |w|^2$.

Esta representação das matrizes reais 2×2 como pares ordenados de matrizes (Z, W) e, conseqüentemente, como pares ordenados de números complexos e a comutatividade da multiplicação existente em \mathbb{C} permitem-nos fazer uma caracterização das matrizes que comutam em função deste par ordenado:

Teorema 3.25 *Consideremos $X \equiv (x_1, x_2)$ e $Y \equiv (y_1, y_2)$, com $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$. Tem-se $XY = YX$ se e só se $(x_2)^* y_2 = x_2 (y_2)^*$ e $x_2 (y_1 - (y_1)^*) = y_2 (x_1 - (x_1)^*)$, ou seja, X comuta com Y se e só se $(x_2)^* y_2$ é real e $x_2 \text{Im}(y_1) = y_2 \text{Im}(x_1)$.*

Dem. [Cri03]. ■

Este resultado permite-nos fazer algumas observações que serão úteis no estudo deste caso da iteração em $M_2(\mathbb{R})$:

- caso X seja tal que $X \equiv (x_1, 0)$, ou seja, caso X pertença ao subgrupo H de $M_2(\mathbb{R})$, então X comutará com Y se e só se $y_2 \text{Im}(x_1) = 0$. Se $\text{Im}(x_1) = 0$ então X seria

uma matriz escalar $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, que comuta com qualquer matriz. Se $\text{Im}(x_1) \neq 0$, então $y_2 = 0$, ou seja, concluímos que $Y \equiv (y_1, 0)$ também pertence ao subgrupo H .

- caso X seja tal que $X \equiv (x_1, x_2)$, com $x_2 \neq 0$, então X não pertence ao subgrupo H . Como vimos, X comuta com Y se e só se $(x_2)^* y_2$ é real, ou seja, $(x_2)^* y_2 = k$, com $k \in \mathbb{R}$, e $x_2 \text{Im}(y_1) = y_2 \text{Im}(x_1)$. Multiplicando a primeira igualdade por x_2 , obtemos

$$(x_2)^* y_2 x_2 = k x_2 \Leftrightarrow y_2 = \frac{k}{|x_2|^2} x_2$$

e assim $y_2 = t x_2$ com $t = \frac{k}{|x_2|^2}$ um número real. Multiplicando a igualdade $x_2 \text{Im}(y_1) = y_2 \text{Im}(x_1)$ por $(x_2)^*$, obtemos

$$\begin{aligned} (x_2)^* x_2 \text{Im}(y_1) &= (x_2)^* y_2 \text{Im}(x_1) \\ \Leftrightarrow |x_2|^2 \text{Im}(y_1) &= (x_2)^* y_2 \text{Im}(x_1) \\ \Leftrightarrow \text{Im}(y_1) &= \frac{(x_2)^* y_2 \text{Im}(x_1)}{|x_2|^2} \\ \Leftrightarrow \text{Im}(y_1) &= \frac{(x_2)^* \frac{k}{|x_2|^2} x_2}{|x_2|^2} \text{Im}(x_1) \\ \Leftrightarrow \text{Im}(y_1) &= \frac{k}{|x_2|^2} \text{Im}(x_1) \end{aligned}$$

ou seja

$$\text{Im}(y_1) = t \text{Im}(x_1).$$

Assim, se X não pertence ao subgrupo H , X comuta com Y se e só se $y_2 = t x_2$, onde t é um número real dado por $\text{Im}(y_1) = t \text{Im}(x_1)$.

No caso particular que estamos a estudar, em que X_0 é do tipo I e C é do tipo III, ao

iterarmos X_0 sob a acção de F_C , qualquer iterada pertence à subálgebra

$$G = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) : X = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & z \end{bmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3.14)$$

Cada elemento $X_0 = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & z \end{bmatrix}$ desta subálgebra tem a seguinte decomposição de Crilly:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{x+z}{2} & y \\ -y & \frac{x+z}{2} \end{bmatrix} + E \begin{bmatrix} 0 & \frac{-x+z}{2} \\ -\left(\frac{-x+z}{2}\right) & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $X_0 = Z_0 + EW_0$, com a matriz Z_0 associada ao número complexo $z = z_1 + z_2i = \frac{x+z}{2} + yi$ e a matriz W_0 associada ao número complexo $w = w_1 + w_2i = \frac{-x+z}{2}i$. Notemos que a decomposição de qualquer um dos elementos X_i da órbita é tal que $\text{Re}(w) = 0$, e assim, tendo em conta a decomposição de Crilly, a iteração sob a acção de F_C é dada por

$$X_1 = F_C(X_0) = Z_1 + EW_1$$

sendo $z = (w_1^2 + w_2^2 + z_1^2 - z_2^2 + a) + (b + 2z_1z_2)i$ o número complexo associado à matriz Z_1 e $w = (2w_2z_1)i$ o número complexo associado à matriz W_1 .

Podemos ainda concluir que o traço de cada iterada é dado por $2\text{Re}(z)$ e que o determinante será dado por $|z|^2 - |w|^2 = |z|^2 - (\text{Im}(w))^2$. Logo os valores próprios das iteradas serão

$$\text{Re}(z) \pm \sqrt{-(\text{Im}(z))^2 + (\text{Im}(w))^2} \quad (3.15)$$

$$= z_1 \pm \sqrt{-(z_2)^2 + (w_2)^2} \quad (3.16)$$

Tendo em conta o descrito, analisemos a iteração no caso em que X_0 é um ponto crítico do tipo I com $\det(X_0) = 0$. Tal como fizemos anteriormente, assumimos, sem

perda de generalidade, que $X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{tr}(X_0) \end{bmatrix}$, com $\text{tr}(X_0) \neq 0$. Se C é do tipo III, $C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, as sucessivas iteradas de X_0 podem ser dadas por

$$X_{k+1} = X_k^2 + C = Z_{k+1} + EW_{k+1},$$

com Z_{k+1} a matriz associada ao número complexo $z_{k+1} = (z_1)_{k+1} + (z_2)_{k+1}i$ e W_{k+1} a matriz associada ao número complexo $w_{k+1} = (w_1)_{k+1} + (w_2)_{k+1}i$, sendo as componentes $((z_1)_{k+1}, (z_2)_{k+1}, (w_1)_{k+1}, (w_2)_{k+1})$ dadas por

$$\begin{cases} (z_1)_{k+1} = ((z_1)_k)^2 - ((z_2)_k)^2 + ((w_2)_k)^2 + a \\ (z_2)_{k+1} = 2(z_1)_k(z_2)_k + b \\ (w_1)_{k+1} = 0 \\ (w_2)_{k+1} = 2(z_1)_k(w_2)_k \end{cases} \quad (3.17)$$

De notar que, se o ciclo é não-comutativo, então $(w_2)_k \neq 0$ para toda a iterada X_k .

Definindo como *anti-traço* de uma matriz qualquer $Y = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ o valor

$$\text{at}(Y) = x - w,$$

verificamos ainda que o n -ciclo não-comutativo é tal que

$$\text{at}(X_i) = \text{at}(X_{i-1}) \text{tr}(X_{i-1}),$$

já que

$$u_{i+1} - u_{j+1} = (u_i - u_j)(u_i + u_j),$$

pois $u_{i+1} = u_i^2 + c$ e $u_{j+1} = u_j^2 + c$. Assim, tendo em conta a iteração descrita em (3.17), $\text{tr}(X_i) = 2(z_1)_i$ e $\text{at}(X_i) = -2(w_2)_i$.

Neste caso, as entradas da diagonal principal de cada uma das iteradas da órbita matricial não são dadas directamente pelos elementos da órbita da quadrática unidimensional

f_a , já que não são independentes do valor da entrada y_k da diagonal secundária. Quer isto dizer que o facto da aplicação quadrática unidimensional f_a induzir um n -ciclo no caso unidimensional, para um determinado ponto inicial x_0 , não tem como consequência directa a existência de um n -ciclo matricial para $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 & \dots \\ \dots & x_0 \end{bmatrix}$. Podemos também observar que a entrada $(z_2)_{k+1}$ é linear em $(z_2)_k$, com declive igual a $2(z_1)_k = \text{tr}(X_k)$. Então, à semelhança do que aconteceu no caso da matriz parâmetro C do tipo II, a composição desta expressão n vezes resultará numa aplicação linear com declive igual ao produto dos traços de cada uma das iteradas matriciais, que é igual a 1, se tivermos um ciclo não-comutativo. Assim, para obtermos um n -ciclo na entrada y_n , e consequentemente um n -ciclo matricial não-comutativo, terá de se verificar a condição $\sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i}^{n-1} \text{tr}(X_j) = 0$, a terceira do Teorema 3.14. Quando isto acontecer, o traço $2(z_1)_n$ estará também num n -ciclo, bem como o anti-traço $-2(w_2)_n$.

Conjectura 3.26 *Seja $X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{tr}(X_0) \end{bmatrix}$ um ponto crítico de determinante nulo, com $\text{tr}(X_0) \neq 0$, e $C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ uma matriz parâmetro do tipo III. Se existir um n -ciclo unidimensional induzido por f_a então existirá um n -ciclo não-comutativo matricial induzido por este ponto crítico, caso os valores próprios de X_0 não pertençam ao mesmo conjunto estável, relativamente a f_a ; se os valores próprios de X_0 pertencerem ao conjunto estável de 0, a órbita de X_0 sob a acção de F_C será pré-comutativa.*

3.4.3 O formato dos ciclos não-comutativos

De seguida será estudado o formato dos n -ciclos não-comutativos.

Pontos fixos não-comutativos

Por definição, os pontos fixos da aplicação F_C serão os pontos X tais que $F_C(X) = X$.

Para que tal se verifique

$$X^2 + C = X \Leftrightarrow C = X - X^2$$

concluindo então que C e X comutam, pois

$$XC = X(X - X^2) = (X - X^2)X = CX,$$

e assim F_C não tem pontos fixos não-comutativos - só existem pontos fixos comutativos.

Ciclos de período 2 não-comutativos

Seja $\{X_0, X_1\}$ um ciclo não-comutativo de período 2. Em [CRMNB12] estudámos todos os tipos de 2-ciclos não-comutativos, estabelecendo os resultados que apresentamos de seguida.

Teorema 3.27 *Se $\{X_0, X_1\}$ é um ciclo não-comutativo de período 2 então $\text{tr}(X_i) = -1$, $\det(X_i) = 1 + \frac{\text{tr}(C)}{2}$ e os valores próprios de X_i serão $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3 - 2\text{tr}(C)})$, para $i = 0, 1$.*

Dem. Pelo Teorema 3.14, concluímos que, se $\{X_0, X_1\}$ é um 2-ciclo não-comutativo, então

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tr}(X_0) \text{tr}(X_1) = 1 \\ \frac{\det(X_0)}{\text{tr}(X_0)} + \frac{\det(X_1)}{\text{tr}(X_0) \text{tr}(X_1)} = 0 \\ \text{tr}(X_0) \text{tr}(X_1) + \text{tr}(X_1) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{tr}(X_0) = -1 \\ \det(X_0) = \det(X_1) \\ \text{tr}(X_1) = -1 \end{array} \right.$$

como vimos em (3.10), como consequência do Teorema de Cayley-Hamilton, temos

$$F(X_0) = X_0^2 + C = \text{tr}(X_0)X_0 - \det(X_0)I + C,$$

então

$$\operatorname{tr}(F(X_0)) = (\operatorname{tr}(X_0))^2 - 2(\det(X_0)) + \operatorname{tr}(C).$$

Como $\operatorname{tr}(X_i) = -1$, para $i = 1, 2$, então

$$\det(X_i) = 1 + \frac{\operatorname{tr}(C)}{2}$$

para $i = 1, 2$. Visto que os valores próprios de uma matriz $X \in M_2(\mathbb{R})$ são dados por

$$\frac{\operatorname{tr}(X) \pm \sqrt{(\operatorname{tr}(X))^2 - 4\det(X)}}{2}$$

então os valores próprios das matrizes que compõem o ciclo não-comutativo periódico de período 2 são

$$\frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{-3 - 2\operatorname{tr}(C)} \right).$$

■

Em função do tipo da matriz parâmetro C , podemos descrever três tipos de órbitas não-comutativas.

Proposição 3.28 *Seja C a matriz parâmetro associada a um 2-ciclo não-comutativo $\{X_0, X_1\}$ de F_C .*

- Se $C = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ é do tipo I, então

$$\{X_0, X_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & -y \\ -z & -x-1 \end{bmatrix} \right\}$$

com

$$x = \frac{1}{4}(-2 + a - b) \quad e \quad y = \frac{-12 - 8a - a^2 - 8b + 2ab - b^2}{16z}.$$

- Se $C = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ é do tipo II, então

$$\{X_0, X_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & -x-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x-1 & 1-y \\ 0 & x \end{bmatrix} \right\}$$

com

$$x = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3-4a}).$$

- Se $C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ é do tipo III, então

$$\{X_0, X_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & b+z \\ z & -x-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x-1 & -z \\ -b-z & x \end{bmatrix} \right\}$$

com

$$x = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3-4a-4bz-4z^2}).$$

Dem. Usando as condições dadas no Teorema 3.27 para um ciclo não-comutativo $\{X_0, X_1\}$ de período 2, designadamente $\text{tr}(X_i) = -1$ e $\det(X_i) = 1 + \frac{\text{tr}(C)}{2}$, e o facto que $\prod_{i=0}^{n-1} \text{tr}(X_i) = 1$, provado no Teorema 3.14, bastará resolver um sistema para cada um dos três casos, tendo em conta o tipo de matriz parâmetro C . ■

Quanto à atractividade destes ciclos, dada na Definição 3.18, quais serão as matrizes parâmetro C tais que $\{X_0, X_1\}$ é atractivo?

Teorema 3.29 *Se um 2-ciclo não-comutativo $\{X_0, X_1\}$ é atractivo, então a matriz C é do tipo III, $C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, e o domínio de estabilidade, no plano (a, b) , é o representado na Figura 3.2.*

Dem. Pelo Teorema 3.17, $\prod_{k=0}^{n-1} \text{tr}(X_k) = 1$ é um valor próprio da matriz Jacobiana $DF^{(2)}(X)$, logo as raízes do polinómio característico, soluções da equação

$$\lambda^4 + k_1\lambda^3 + k_2\lambda^2 + k_3\lambda + k_4 = 0,$$

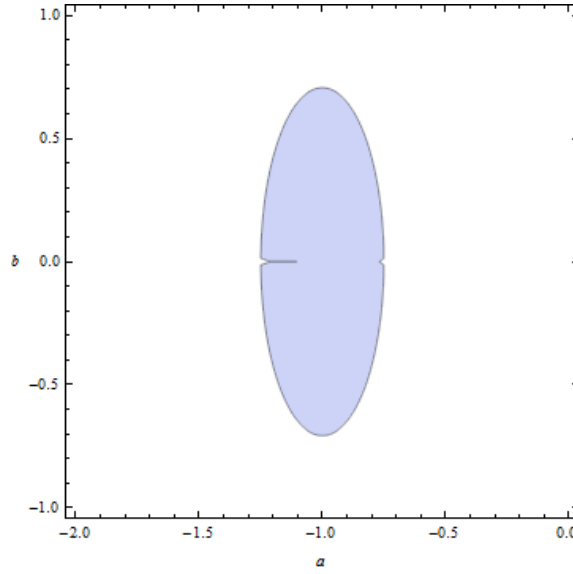


Figura 3.2: Domínio de estabilidade no plano (a, b) de um 2-ciclo não-comutativo quando C é do tipo III

podem ser determinadas resolvendo $(\lambda - 1)(\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3) = 0$, com $c_1 = k_1 + 1$, $c_2 = k_2 + c_1$ e $c_3 = k_3 + c_2$. Estes coeficientes são dados por $c_1 = -9 + 4d_C - 4t_C - t_C^2$, $c_2 = 4\left(2 + t_C + \left(2 - d_C + t_C + \frac{t_C^2}{4}\right)^2\right)$ e $c_3 = -4(2 + t_C)^2$, com t_C e d_C o traço e o determinante da matriz parâmetro C , respectivamente. As raízes do polinómio cúbico $\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3$ são dadas por:

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{c_1}{3} - \frac{P}{3} - \frac{c_1^2 - 3c_2}{3P}, \\ z_2 &= -\frac{c_1}{3} + \frac{P(1 + i\sqrt{3})}{6} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(c_1^2 - 3c_2)}{6P}, \\ z_3 &= -\frac{c_1}{3} + \frac{P(1 - i\sqrt{3})}{6} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(c_1^2 - 3c_2)}{6P}, \end{aligned}$$

com $P = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(Q + 2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3)}$ e $Q = \sqrt{(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3)^2 - 4(c_1^2 - 3c_2)^3}$. De forma que o ciclo não-comutativo de período 2 seja atractivo, temos de exigir que o raio espectral da matriz Jacobiana seja igual a 1, ou seja, temos de exigir que todas as raízes

z_1, z_2, z_3 tenham valor absoluto inferior a 1. Logo, analisando cada um dos tipos de matriz parâmetro C , concluímos que: se C é do tipo I ou tipo II, não existirão matrizes parâmetro tais que $\{X_0, X_1\}$ é um 2-ciclo atractivo não-comutativo. Se C é do tipo III, as condições impostas levam-nos ao domínio de estabilidade representado na Figura ?? . ■

De notar que o domínio de estabilidade que determinámos para os ciclos não-comutativos, quando a matriz parâmetro C é do tipo III, não coincide com o domínio de estabilidade dos ciclos comutativos de período 2 (que será igual ao do caso complexo, caracterizado no conjunto de Mandelbrot pelo bolbo imediatamente à esquerda do bolbo principal, ver Figura 2.5). Realçamos ainda que este domínio de estabilidade, representado na Figura 3.2, caracteriza a atractividade dos 2-ciclos não-comutativos na subálgebra $G = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) : X = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & z \end{bmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ sob a acção de F_C , com C a matriz parâmetro do tipo III. Fixada a matriz parâmetro C , se estudarmos a atractividade em $M_2(\mathbb{R})$, verificamos que, numa vizinhança do ciclo não-comutativo $\{X_0, X_1\}$, uma matriz que não pertença à subálgebra referida não é atraída para este, mas sim para outro ciclo não-comutativo $\{Y_0, Y_1\}$, com $\{X_0, X_1\}$ e $\{Y_0, Y_1\}$ n -ciclos semelhantes entre si, segundo a seguinte definição:

Definição 3.30 *Fixada a matriz parâmetro C , dois n -ciclos matriciais $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ e $\{Y_0, \dots, Y_{n-1}\}$ de F_C dizem-se semelhantes entre si se os n -ciclos no traço e no determinante são os mesmos, isto é,*

$$\{\operatorname{tr}(X_0), \dots, \operatorname{tr}(X_{n-1})\} = \{\operatorname{tr}(Y_k), \dots, \operatorname{tr}(Y_{n-1+k})\}$$

e

$$\{\det(X_0), \dots, \det(X_{n-1})\} = \{\det(Y_k), \dots, \det(Y_{n-1+k})\},$$

para algum $0 \leq k \leq n - 1$.

Assim, embora na Proposição 3.28 seja apresentado um número infinito de 2-ciclos não-comutativos, considerando quaisquer dois ciclos obtidos a partir do mesmo parâmetro C , eles serão semelhantes entre si, segundo a noção de semelhança entre ciclos introduzida na Definição 3.30.

Consideremos uma outra perspectiva: fixado o parâmetro $C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ do tipo III, o 2-ciclo não-comutativo pertencente à subálgebra G é da forma

$$\{X_0, X_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & \frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} & -x - 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x - 1 & \frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} & x \end{bmatrix} \right\},$$

com

$$x = \frac{1}{2} \left(-1 - \sqrt{-3 - 4a + b^2} \right)$$

e valores próprios iguais a $vp_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{-3 - 4a} \right)$. Observamos que $f_a(vp_{\pm}) = vp_{\mp}$, sendo f_a a quadrática unidimensional de parâmetro a , ou seja, $\{vp_+, vp_-\}$ é um 2-ciclo no caso unidimensional. Neste caso, a iteração sob a acção de F_C , que se desenvolve na subálgebra G , pode ser dada por

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = (x_n + z_n) y_n + b \\ z_{n+1} = z_n^2 - y_n^2 + a \end{cases}$$

e como vimos, se $\{X_0, X_1\}$ é um 2-ciclo em G , então o traço das iteradas matriciais é sempre constante e igual a -1 . Assim, $y_{n+1} = -y_n + b$. Se $y = \frac{b}{2}$, teremos um ponto fixo desta aplicação logo, neste caso, as entradas x_i e z_i da diagonal principal do 2-ciclo serão regidas por uma aplicação quadrática de parâmetro $c = -\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a$. Se $y \neq \frac{b}{2}$, o 2-ciclo não está contido na subálgebra G , mas qualquer que seja o valor de y , a aplicação

$y_{n+1} = -y_n + b$ terá período 2, pelo que o 2-ciclo será da forma $\{y, -y + b\}$. A outra entrada da diagonal secundária também entrará num 2-ciclo $\{-y + b, y\}$, e assim as entradas da diagonal principal do 2-ciclo matricial também serão regidas por uma mesma aplicação quadrática de parâmetro $c = (y^2 - by) + a$, mas desfasada. Salientamos assim que, no caso dos 2-ciclos não-comutativos, fixada a matriz parâmetro C , as entradas da diagonal principal são dadas por uma única aplicação quadrática e, como já foi referido, quaisquer dois ciclos não-comutativos originados por um mesmo parâmetro C são semelhantes entre si.

Ciclos não-comutativos de período $n > 2$

No caso dos ciclos não-comutativos de período $n > 2$, não teremos apenas uma aplicação quadrática unidimensional no controlo das entradas da diagonal principal. Notemos que o aparecimento dos ciclos não-comutativos pode ser relacionado com um determinado desfazamento nas entradas da diagonal principal. Foquemo-nos no caso $n = 4$, com X_0 do tipo I e a matriz parâmetro C do tipo III, cuja dinâmica se desenrola na subálgebra G . Existe mais do que um ciclo não-comutativo de período 4; um deles é o ciclo descrito no resultado que se segue.

Teorema 3.31 *Seja C a matriz parâmetro associada a um 4-ciclo não-comutativo $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ de F_C . Um dos 4-ciclos não-comutativos existente é dado por*

$$\{X_0, X_1, X_2, X_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_3 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_4 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix} \right\}, \quad (3.18)$$

sendo

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{2} \left(t_1 - \sqrt{-4d_1 + t_1^2 + 4y_1^2} \right) \\
 x_2 &= \frac{1}{2} \left(t_2 - \sqrt{-4d_2 + t_2^2 + 4y_2^2} \right) \\
 x_3 &= \frac{1}{2} \left(t_1 + \sqrt{-4d_1 + t_1^2 + 4y_1^2} \right) \\
 x_4 &= \frac{1}{2} \left(t_2 + \sqrt{-4d_2 + t_2^2 + 4y_2^2} \right) \\
 y_1 &= \frac{1}{2} b (1 + t_2) \\
 y_2 &= \frac{1}{2} b (1 + t_1),
 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
 t_2 &= -t_1 (-4a + 4(1 + b^2)t_1 + 4at_1^2 + t_1^4) \\
 d_1 &= t_1^2 + (d_2 - a)t_1 + a \\
 d_2 &= 2b^2t_1 + \frac{1}{2}t_1^4 + 2at_1^2 + \frac{3}{2}t_1 - a \\
 d_3 &= d_1 \\
 d_4 &= d_2
 \end{aligned}$$

e t_1 uma das raízes reais da equação $-1 - 4ax^2 + (4 + 4b^2)x^3 + 4ax^4 + x^6 = 0$.

Dem. Fixado o parâmetro C , as componentes deste ciclo obtêm-se considerando o sistema composto pelas condições dadas no Teorema 3.14 e pelas condições

$$x_{(i+1) \bmod n} = x_{i \bmod n}^2 + a_{i \bmod n},$$

na perspectiva de que a dinâmica é controlada pela composição de diferentes aplicações quadráticas de parâmetros a_i . Da sua solução, concluímos que os traços t_1 e t_2 são as raízes

reais da equação $-1 - 4ax^2 + (4 + 4b^2)x^3 + 4ax^4 + x^6 = 0$ e que, a partir das mesmas, é possível explicitar por completo o ciclo dado em (3.18) em função de t_1 , sendo

$$\begin{aligned} t_2 &= -t_1(-4a + 4(1 + b^2)t_1 + 4at_1^2 + t_1^4) \\ y_1 &= \frac{1}{2}b(1 + t_2) \\ y_2 &= \frac{1}{2}b(1 + t_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left(4at_2 - 4(1 + b^2)t_2^2 - 4at_2^3 - t_2^5 - \sqrt{b^2 - 2(1 + b^2)t_2 + (-4a + b^2)t_2^2 - t_2^4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(t_1 - \sqrt{-4d_1 + t_1^2 + 4y_1^2} \right) \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left(4at_1 - 4(1 + b^2)t_1^2 - 4at_1^3 - t_1^5 - \sqrt{b^2 - 2(1 + b^2)t_1 + (-4a + b^2)t_1^2 - t_1^4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(t_2 - \sqrt{-4d_2 + t_2^2 + 4y_2^2} \right) \\ x_3 &= \frac{1}{2} \left(4at_2 - 4(1 + b^2)t_2^2 - 4at_2^3 - t_2^5 + \sqrt{b^2 - 2(1 + b^2)t_2 + (-4a + b^2)t_2^2 - t_2^4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(t_1 + \sqrt{-4d_1 + t_1^2 + 4y_1^2} \right) \\ x_4 &= \frac{1}{2} \left(4at_1 - 4(1 + b^2)t_1^2 - 4at_1^3 - t_1^5 + \sqrt{b^2 - 2(1 + b^2)t_1 + (-4a + b^2)t_1^2 - t_1^4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(t_2 + \sqrt{-4d_2 + t_2^2 + 4y_2^2} \right) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} d_1 &= t_1^2 + (d_2 - a)t_1 + a \\ d_2 &= 2b^2t_1 + \frac{1}{2}t_1^4 + 2at_1^2 + \frac{3}{2}t_1 - a \\ d_3 &= d_1 \\ d_4 &= d_2. \end{aligned}$$

Determinamos ainda os parâmetros das duas quadráticas que regem a dinâmica nas entradas da diagonal principal:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{4}(4a - b^2 - 2b^2t_1 - b^2t_1^2) = \\
 &= -y_2^2 + a = -\left(\frac{1}{2}b(1+t_1)\right)^2 + a \\
 a_2 &= a - \frac{b^2}{4} + ab^2 - b^2(1+2a+b^2)t_1 + b^2(2-a+2b^2)t_1^2 + 2ab^2t_1^3 - \frac{b^2t_1^4}{4} + \frac{b^2t_1^5}{2} = \\
 &= -y_1^2 + a = -\left(\frac{1}{2}b(1+t_2)\right)^2 + a
 \end{aligned}$$

■

Os parâmetros a_1 e a_2 das quadráticas $f_{a_1} = x^2 + a_1$ e $f_{a_2} = x^2 + a_2$ que controlam o 4-ciclo em que se encontram os elementos da diagonal principal são tais que $f_{a_1}(f_{a_2}(f_{a_1}(f_{a_2}(x_i)))) = x_i$, $i = 1, 3$, e $f_{a_2}(f_{a_1}(f_{a_2}(f_{a_1}(x_i)))) = x_i$, $i = 2, 4$.

Teorema 3.32 *O domínio de estabilidade, no plano (a, b) , do 4-ciclo $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ dado em (3.18) é o representado na Figura 3.3.*

Dem. De forma análoga ao que foi feito relativamente à região de estabilidade do ciclo de período 2, sabemos que, pelo Teorema 3.17, 1 é um valor próprio da matriz Jacobiana $D^{(4)}(X)$, logo as raízes do polinómio característico podem ser determinadas resolvendo a equação $(\lambda - 1)(\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3) = 0$. O raio espectral da matriz Jacobiana deverá ser 1, de modo que o ciclo não-comutativo seja atractivo, e assim chegamos ao domínio de estabilidade no plano (a, b) representado na Figura 3.3. ■

De notar que alguns dos 4-ciclos não-comutativos que não estão contidos na subálgebra G são semelhantes a este ciclo. Os outros dois 4-ciclos não-comutativos são ciclos semelhantes entre si.

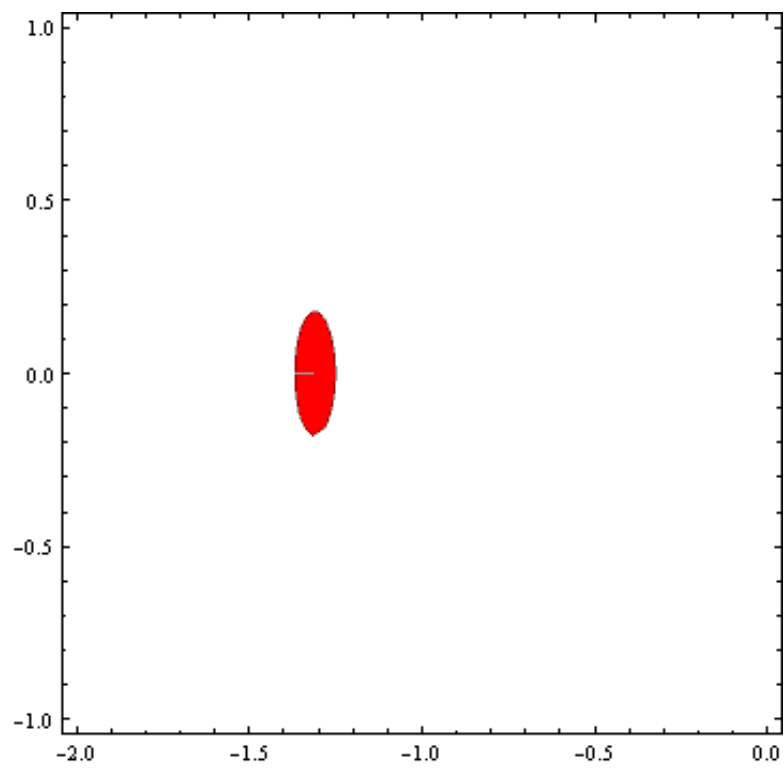


Figura 3.3: Domínio de estabilidade no plano (a, b) do 4-ciclo não-comutativo dado no Teorema 3.31

Capítulo 4

Conjunto de Mandelbrot matricial e conjunto de Julia matricial

Neste capítulo são estudadas possíveis generalizações das noções de conjunto de Mandelbrot e de conjunto de Julia, apresentadas no capítulo 2, ao caso da aplicação quadrática matricial. Tal como no caso complexo, o estudo dos ciclos atractivos e suas bacias de atracção faz sentido no caso alvo deste estudo e muitas das características da dinâmica podem ser ilustradas recorrendo aos conjuntos de Mandelbrot e de Julia matriciais que iremos considerar.

4.1 Generalização do conjunto de Mandelbrot ao caso matricial

Numa primeira abordagem a esta questão, podemos definir o conjunto de Mandelbrot da aplicação quadrática matricial F_C como

$$M = \{C \in M_2(\mathbb{R}) : \text{a órbita da matriz nula, } \{F_C^n(\mathbf{0})\}, \text{ é limitada}\}, \quad (4.1)$$

generalização feita tendo como base o caso clássico dos números complexos.

Apesar do conjunto de Mandelbrot matricial definido em (4.1) ser 4–dimensional, o resultado que se segue permitirá caracterizá-lo recorrendo apenas ao plano.

Teorema 4.1 *O parâmetro matricial $C \in M_2(\mathbb{R})$ pertence ao conjunto de Mandelbrot matricial dado em (4.1) se e só se os valores próprios de $J_C = P^{-1}CP$ pertencem ao conjunto de Mandelbrot unidimensional.*

Dem. O facto do parâmetro matricial C pertencer ao conjunto de Mandelbrot unidimensional é equivalente a dizer que a órbita da matriz nula é limitada sob a acção de F_C e, conseqüentemente, pela acção de F_{J_C} já que, como vimos anteriormente, o sistema dinâmico $(M_2(\mathbb{R}), F_C)$ é equivalente ao sistema dinâmico $(M_2(\mathbb{R}), F_{J_C})$. Como vimos no Teorema 3.12, sendo λ um valor próprio de uma matriz parâmetro que esteja na forma canónica de Jordan, a aplicação matricial tem um n –ciclo comutativo se e só se f_λ tem um n –ciclo, já que a órbita da matriz nula é atraída para este ciclo comutativo. Podemos então concluir que a órbita da matriz nula é limitada sob a acção de F_{J_C} se e só se os valores próprios de J_C pertencem ao conjunto de Mandelbrot complexo. ■

Assim, podemos ilustrar o conjunto M tomando cada um dos parâmetros na sua forma canónica de Jordan; desta forma, caracterizamos este conjunto 4–dimensional usando apenas duas dimensões, fazendo-o no plano dos parâmetros a e b . Por exemplo,

$$M_{\text{III}} = \{J_C \text{ do tipo III : a órbita da matriz nula, } \{F_{J_C}^n(\mathbf{0})\}, \text{ é limitada}\}$$

ou seja,

$$M_{\text{III}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \text{a órbita da matriz nula, } \{F_{J_C}^n(\mathbf{0})\}, \text{ é limitada} \right\} \quad (4.2)$$

O conjunto M_{III} , apresentado em (4.2) e na Figura 4.1, coincide com o conjunto de Mandelbrot complexo, ilustrado na Figura 2.5.

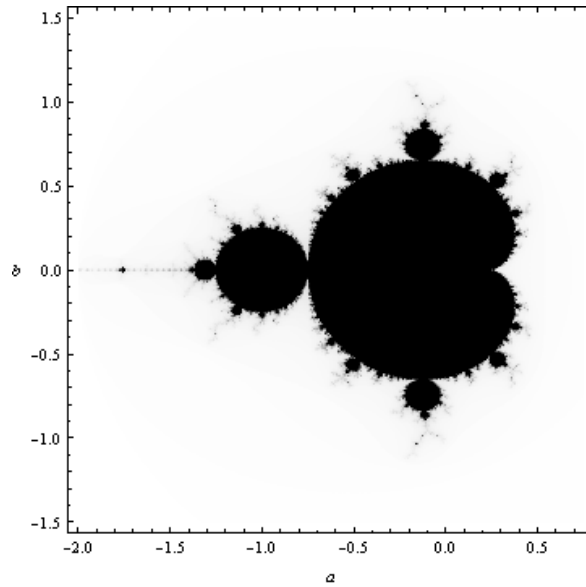


Figura 4.1: Conjunto de Mandelbrot M_{III}

Mas o conjunto de Mandelbrot, definido como o conjunto dos parâmetros para os quais a órbita da matriz nula é limitada, não terá o mesmo significado nem caracterizará a dinâmica de forma tão completa como o conjunto de Mandelbrot faz no caso complexo. Notemos que, pelo teorema de Fatou, todo o ciclo atrativo de uma função polinomial ou racional complexa atrai, pelo menos, um ponto crítico. No caso da aplicação quadrática complexa, como 0 é o único ponto crítico, caracterizando os parâmetros para os quais a sua órbita é limitada, caracterizamos as órbitas atractivas. Assim, o conjunto de Mandelbrot complexo \mathcal{M} indica e caracteriza todos os parâmetros para os quais existem órbitas atractivas. Tal não acontece com o conjunto de Mandelbrot matricial M , se o definirmos da forma (4.1), já que existem matrizes parâmetro C que geram ciclos atractivos (tendo em conta a noção de atractividade matricial definida anteriormente) para as quais $\{F_{J_C}^m(\mathbf{0})\}$ não é limitada, ou seja, o ciclo atrativo que está definido fora do espaço gerado por C e I

não atrai a órbita da matriz nula. Assim, o conjunto de Mandelbrot matricial M , definido como em (4.1), caracterizará apenas os parâmetros para os quais existe um ciclo atractivo comutativo e não irá conter todos os parâmetros para os quais existem órbitas atractivas, como acontece com o conjunto de Mandelbrot complexo.

Exemplo 4.2 *Consideremos a matriz parâmetro C do tipo III e a matriz inicial X_0 do tipo I dadas por*

$$X_0 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.3 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix},$$

cuja dinâmica se desenvolve, sob a acção de F_C , na subálgebra G , definida em (3.14). Verificamos que o parâmetro complexo $c = -1.1 + 0.3i$, associado à matriz parâmetro C , não pertence ao conjunto de Mandelbrot complexo, logo, pelo Teorema 4.1, $C \notin M$, definido como em (4.1). Isto significa que a órbita da matriz nula não é limitada, sob a acção de F_C , ou seja, não existe um ciclo matricial comutativo. No entanto, existe um 2-ciclo atractivo não-comutativo, como podemos observar no conjunto de Julia preenchido K_C , ilustrado na Figura 4.8.

Assim podemos estudar a possibilidade de definir o conjunto de Mandelbrot matricial de outra forma, ou de considerar mais do que um conjunto de Mandelbrot matricial, já que F_C tem outros pontos críticos para além da matriz nula. Por exemplo, considerar o conjunto

$$M'_{\text{III}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \text{a órbita } \left\{ F_{J_C}^n \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) \right\} \text{ é limitada} \right\},$$

representado na Figura 4.2, já que $X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ é um ponto crítico de F_C .

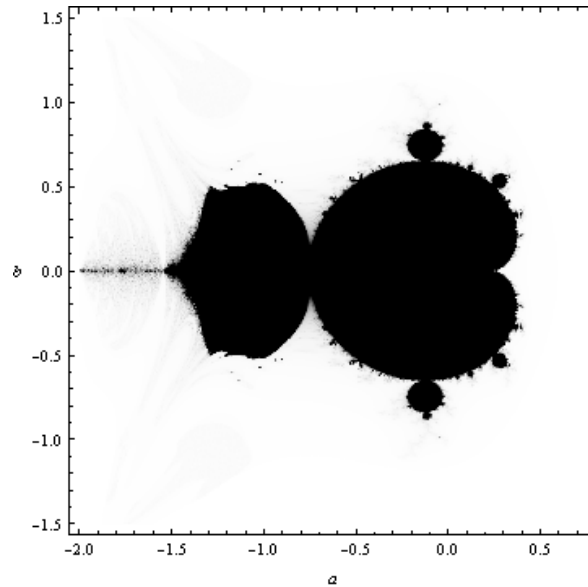


Figura 4.2: Conjunto M'_{III} para o ponto crítico $X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

4.2 Generalização do conjunto de Julia ao caso matricial

Podemos também generalizar a noção de conjunto de Julia tendo como base o caso clássico; como vimos anteriormente, o conjunto de Julia complexo \mathcal{J}_c é caracterizado por ser a fronteira do conjunto de Julia preenchido \mathcal{K}_c , o conjunto constituído pelos pontos cujas órbitas permanecem limitadas sob a acção de f_c .

Fazendo um paralelo com o caso complexo, podemos definir o conjunto de Julia preenchido matricial K_C como

$$K_C = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : \text{a órbita da matriz } X, \text{ sob a acção de } F_C, \text{ é limitada}\},$$

e o conjunto de Julia matricial J_C como a fronteira de K_C , sendo $C \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz parâmetro matricial.

Dada a dificuldade em representar um conjunto a 4 dimensões, há necessidade de

considerar um corte do conjunto K_C , o que permite representá-lo a três dimensões. Por exemplo, considerando a subálgebra G , definida em (3.14), podemos definir o conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G em G da seguinte forma

$$K_C^G = \left\{ X = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & z \end{bmatrix} \in G : \text{a órbita da matriz } X, \text{ sob a acção de } F_C, \text{ é limitada} \right\}.$$

Exemplo 4.3 Quando $C = \begin{bmatrix} -1 & 0.22 \\ -0.22 & -1 \end{bmatrix}$, obtemos o conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G representado na Figura 4.3.



Figura 4.3: Diferentes perspectivas do conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G , com $C = \begin{bmatrix} -1 & 0.22 \\ -0.22 & -1 \end{bmatrix}$

Ao considerarmos o subconjunto de K_C constituído pelas matrizes X do tipo I definido por

$$K_C^I = \left\{ X = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \text{a órbita da matriz } X, \text{ sob a acção de } F_C, \text{ é limitada} \right\},$$

iremos obter um corte do conjunto K_C^G . É possível representar este conjunto no plano, tomando como representantes da matriz X o par (x, y) , que é composto pelos valores próprios de X .

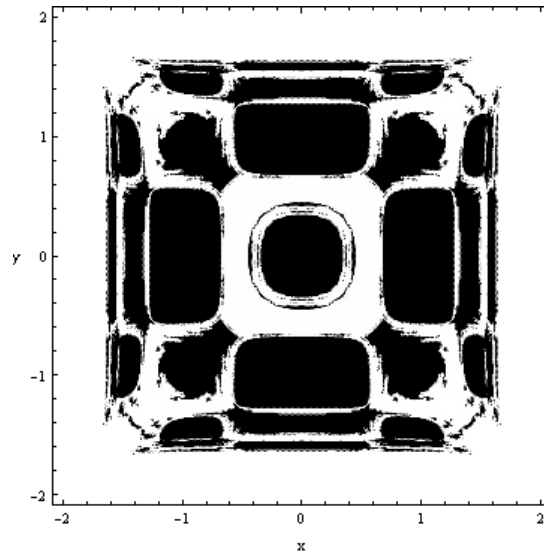


Figura 4.4: Conjunto de Julia preenchido matricial K_C^I , com $C = \begin{bmatrix} -1 & 0.22 \\ -0.22 & -1 \end{bmatrix}$

Exemplo 4.4 Considerando a matriz parâmetro $C = \begin{bmatrix} -1 & 0.22 \\ -0.22 & -1 \end{bmatrix}$, o conjunto K_C^I será o representado na Figura 4.4.

- Verificamos que, sob a acção de F_C :

A órbita da matriz nula $X_0 = \mathbf{0}$ é atraída para um ciclo atractivo de período 2, permanecendo como esperado, no subespaço $\langle I, C \rangle$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_C} \dots \xrightarrow{F_C} \begin{bmatrix} 0.039 & -0.204 \\ 0.204 & 0.039 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_C} \begin{bmatrix} -1.039 & 0.204 \\ -0.204 & -1.039 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_C} \begin{bmatrix} 0.039 & -0.204 \\ 0.204 & 0.039 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_C} \dots$$

- A órbita de alguns dos outros pontos críticos (de determinante nulo e traço não nulo) é atraída para um ciclo atractivo não-comutativo de período 2, que não está no subespaço $\langle I, C \rangle$:

$$\dots \xrightarrow{F_C} \begin{bmatrix} 0.012 & 0.11 \\ -0.11 & -1.012 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_C} \begin{bmatrix} -1.012 & 0.11 \\ -0.11 & 0.012 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_C} \begin{bmatrix} 0.012 & 0.11 \\ -0.11 & -1.012 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_C} \dots$$

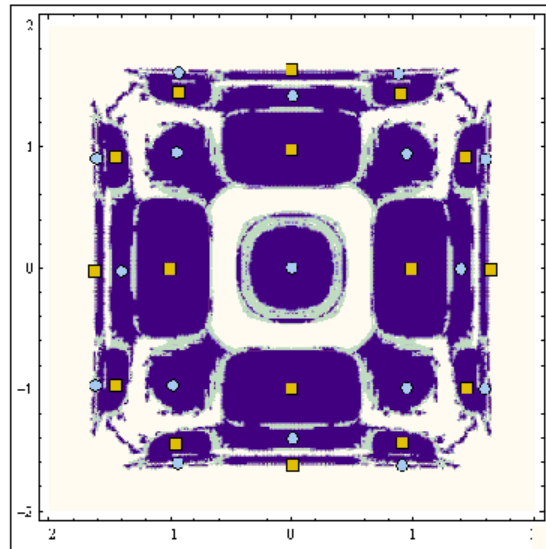


Figura 4.5: Conjunto de Julia preenchido K_C^I , com $C = \begin{bmatrix} -1 & 0.22 \\ -0.22 & -1 \end{bmatrix}$; as órbitas das matrizes X do tipo I cujos valores próprios (x, y) estão situados nos subconjuntos marcados com um círculo e que são atraídas para o ciclo comutativo; se os valores próprios (x, y) estão situados nos subconjuntos marcados com um quadrado, então a órbita de X é atraída para o ciclo não-comutativo

- *O conjunto de Julia preenchido matricial K_C^I apresentado na Figura 4.4, composto pelas matrizes iniciais $X_0 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ do tipo I para as quais as órbitas permanecem limitadas, sob a acção de F_C , tem um padrão tipo "tabuleiro de damas", referenciado no artigo de Sereney, [Ser02]. Este padrão descreve o comportamento das órbitas, consoante a matriz inicial X_0 : as órbitas das matrizes associadas aos pontos (x, y) situados nos subconjuntos marcados com um círculo na Figura 4.5 são atraídas para a órbita que atrai a matriz nula; as órbitas das matrizes associadas aos pontos (x, y) situados nos subconjuntos marcados na Figura 4.5 com um quadrado são atraídas para um ciclo atractivo não-comutativo. Nota: Os valores apresentados são valores arredondados.*

Tal como já referimos, para alguns valores da matriz parâmetro C do tipo III, a órbita do ponto crítico $\mathbf{0} \in M_2(\mathbb{R})$ não é limitada, ou seja, não existe um ciclo comutativo, apesar de existir um ciclo não-comutativo. Este facto também pode ser ilustrado recorrendo ao conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G , como ilustramos no exemplo que se segue.

Exemplo 4.5 Quando $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.3 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix}$, o parâmetro matricial usado no Exemplo 4.2, obtemos o conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G , representado nas Figuras 4.6 e 4.7. Considerando o corte em K_C^G em que se obtém o conjunto composto pelas matrizes iniciais X_0 do tipo I, obtemos a representação no plano de K_C^I , dada na Figura 4.8.



Figura 4.6: Diferentes perspectivas do conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G , com $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.3 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix}$

Notemos que este padrão tipo "tabuleiro de damas" é facilmente compreendido no caso simples em que a dinâmica de cada uma das entradas das iteradas matriciais é totalmente independente das outras, ou seja, o caso em que a dinâmica se desenrola no plano canónico de Jordan do tipo I. Nesse caso ou no caso em que a matriz parâmetro é



Figura 4.7: Diferentes perspectivas do conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G , com $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.3 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix}$

escalar, a construção da bacia de atracção é feita através das intersecções sucessivas entre rectas definidas a partir dos pontos de intersecção das sucessivas compostas da aplicação f ($f^{n-1} = f^n$, $n \in \mathbb{N}$). Assim, teremos o "cruzamento" das bacias de atracção das entradas x e y , como podemos observar na Figura 4.9, para o caso em que $a = -1$ (e $b = 0$).

A região quadrada que observamos é limitada pelas rectas $x = \pm q$ e $y = \pm q$, com $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$, já que, no caso real, a bacia de atracção é o intervalo $]-q; q[$.

Neste caso, conseguimos delimitar analiticamente as regiões que são atraídas para o ciclo comutativo e as que são atraídas para o não-comutativo; o mesmo não acontece nos casos mais gerais em que X e C são de tipos diferentes, por exemplo.

De seguida, apresentamos um exemplo relativo a uma matriz parâmetro C que induz ciclos de período 4.

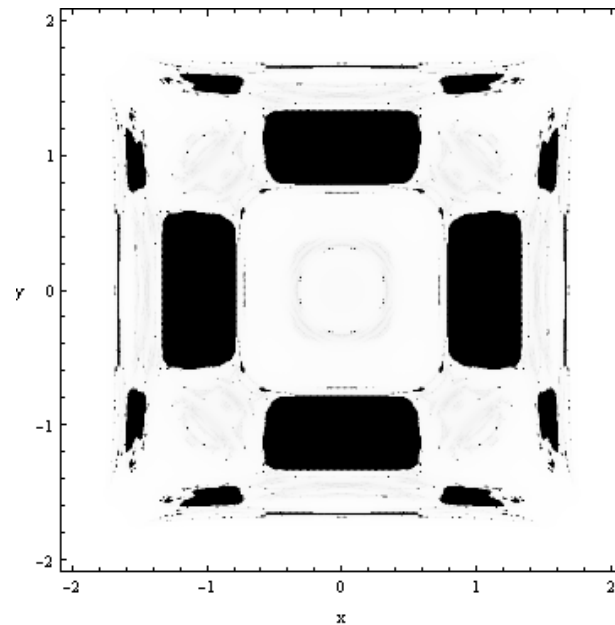


Figura 4.8: Conjunto de Julia preenchido matricial K_C^I , com $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.3 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix}$

Exemplo 4.6 Quando $C = \begin{bmatrix} -1.26 & 0.05 \\ -0.05 & -1.26 \end{bmatrix}$, obtemos o conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G representado na Figura 4.10. O conjunto K_C^I será o conjunto representado na Figura 4.11.

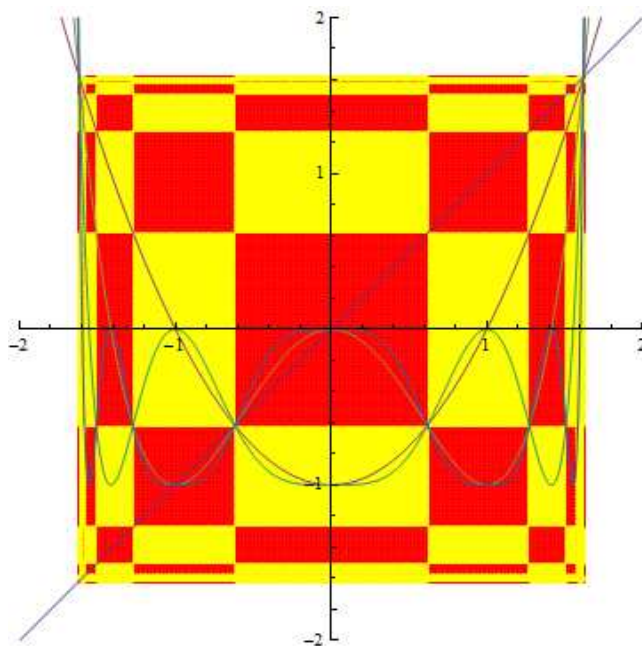


Figura 4.9: Limites das subregiões do conjunto de Julia preenchido matricial K_C^I no caso em que a matriz parâmetro C é escalar, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

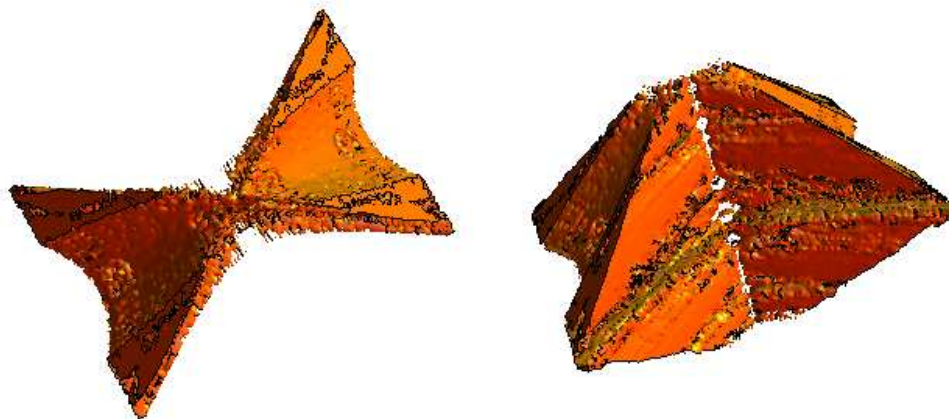


Figura 4.10: Diferentes perspectivas do conjunto de Julia preenchido matricial K_C^G , com $C = \begin{bmatrix} -1.26 & 0.05 \\ -0.05 & -1.26 \end{bmatrix}$

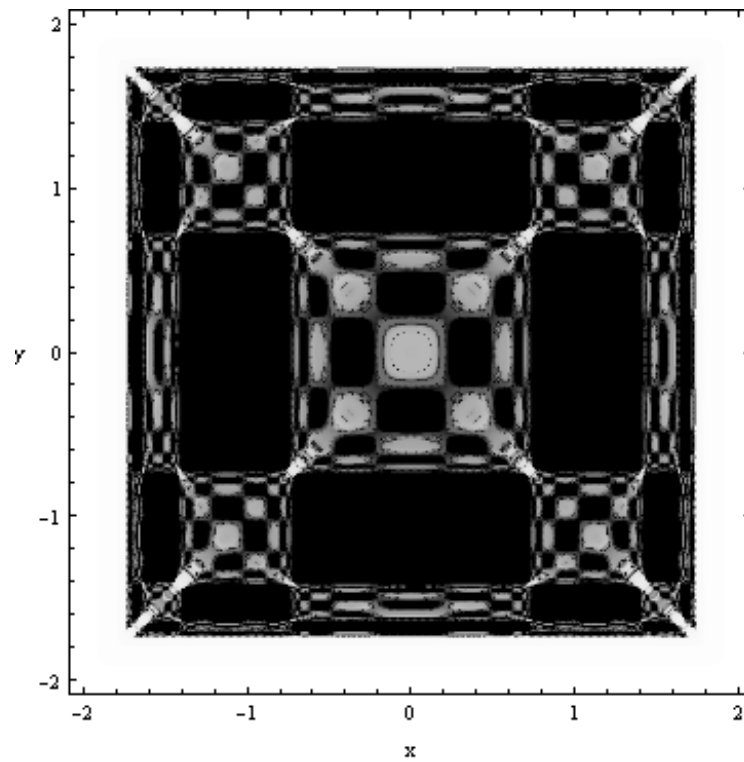


Figura 4.11: Conjunto de Julia preenchido matricial K_C^I , com $C = \begin{bmatrix} -1.26 & 0.05 \\ -0.05 & -1.26 \end{bmatrix}$

Capítulo 5

Aplicação ao estudo da dinâmica em álgebras hipercomplexas

Motivados pelo facto de uma álgebra hipercomplexa \mathbb{A} poder ser representada por uma álgebra de matrizes, neste capítulo fazemos o estudo da dinâmica da aplicação quadrática nos diversos sistemas numéricos de duas componentes, considerando a abordagem matricial introduzida nos capítulos anteriores. Este tópico foi estudado por Semm, Metzler, Artzy e Fishback em [Sen90], [Met94], [Art92] e [Fis05], respectivamente. Em [IKP01], Isaeva *et al.* descrevem algumas aplicações deste estudo em sistemas de duas componentes a um sistema electrónico.

É também salientado o paralelo existente entre a álgebra dos números split-quaterniões e a álgebra das matrizes reais de ordem 2, útil na caracterização do comportamento da aplicação quadrática no conjunto dos números split-quaterniões.

5.1 A formulação matricial

Uma *álgebra hipercomplexa* \mathbb{A} , n -dimensional, é constituída pelos elementos

$$a = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + \dots + a_n \mathbf{i}_n = \sum_{v=1}^n a_v \mathbf{i}_v \in \mathbb{A}, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

e definida através de vectores unitários imaginários $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n$, onde $\mathbf{i}_1 = \mathbf{1}$ representa o vector identidade, e de uma tabela de multiplicação que define o produto de qualquer unidade imaginária com cada uma das outras e consigo própria. Esta é tal que $\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_v = \mathbf{i}_v \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_v \mathbf{1} = \mathbf{i}_v$, $v = 1, \dots, n$, e todas as suas entradas se restringem aos produtos $\mathbf{i}_\lambda \mathbf{i}_\mu = \pm \mathbf{i}_v$, com $\lambda, \mu, v = 1, \dots, n$.

Duas álgebras hipercomplexas são isomorfas se as suas tabelas de multiplicação podem tornar-se idênticas pela troca ou combinação linear das unidades imaginárias da base.

Consideremos, por exemplo, a álgebra dos quaterniões \mathbb{H} , uma das álgebras hipercomplexas 4-dimensionais mais estudadas. Esta álgebra hipercomplexa é isomorfa à álgebra real

$$\mathbb{R}\mathbf{1} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i} \oplus \mathbb{R}\mathbf{j} \oplus \mathbb{R}\mathbf{k}$$

e gerada pela base $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$; podemos considerar qualquer uma das tabelas da multiplicação

	$\mathbf{1}$	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}	\mathbf{i}	$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{k}$	\mathbf{j}
\mathbf{j}	\mathbf{j}	\mathbf{k}	$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{i}$
\mathbf{k}	\mathbf{k}	$-\mathbf{j}$	\mathbf{i}	$-\mathbf{1}$

	$\mathbf{1}$	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}	\mathbf{i}	$-\mathbf{1}$	\mathbf{k}	$-\mathbf{j}$
\mathbf{j}	\mathbf{j}	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{1}$	\mathbf{i}
\mathbf{k}	\mathbf{k}	\mathbf{j}	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$

já que estas são equivalentes.

A comutatividade e/ou associatividade da multiplicação são das principais propriedades a analisar quando pretendemos caracterizar uma álgebra hipercomplexa. Como podemos verificar, na álgebra dos quaterniões, \mathbb{H} , a multiplicação não é comutativa mas goza da propriedade associativa.

Um facto importante para este estudo é que uma álgebra hipercomplexa \mathbb{A} pode ser representada por uma álgebra de matrizes. Exemplo disso é o isomorfismo ϕ , já referido

anteriormente, definido entre o subgrupo H de $M_2(\mathbb{R})$, dado por

$$H = \left\{ Z \in M_2(\mathbb{R}) : Z = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}, z_1, z_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

e o conjunto dos números complexos \mathbb{C} , caracterizado por

$$\begin{aligned} \phi : H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} &\mapsto z_1 + z_2 i \end{aligned} .$$

Neste exemplo particular verificamos ainda que $\det(Z) = |z|^2$ e que a representação matricial de um número complexo z pode basear-se na correspondência entre os elementos da base de \mathbb{C} e as duas matrizes

$$\mathbf{1} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{i} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Assim, muitas propriedades da iteração em álgebras hipercomplexas podem ser observadas pela análise feita quanto à iteração em álgebras de matrizes.

5.2 Dinâmica em subálgebras hipercomplexas de duas componentes

Nesta secção aplicaremos alguns dos resultados do caso comutativo, descritos anteriormente no capítulo 3, ao estudo da dinâmica em subálgebras hipercomplexas de duas componentes, também designadas por sistemas numéricos de duas componentes.

No artigo [Fis05], Fishback descreve o estudo da dinâmica da aplicação quadrática nos diversos sistemas numéricos de duas componentes; são exploradas propriedades da família quadrática real a fim de fornecer uma descrição mais completa da dinâmica quadrática nestes sistemas de números. A abordagem feita pelos autores que estudaram estes sistemas numéricos não recorre à estrutura de uma álgebra de matrizes, algo que faremos de seguida, sendo o estudo apresentado equivalente aos referenciados ao longo do capítulo.

Dados dois números reais fixos, α e β , o sistema numérico $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ é definido por

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta} = \{a + b\epsilon : a, b \in \mathbb{R}, \epsilon \notin \mathbb{R}, \epsilon^2 = \alpha + \beta\epsilon\}.$$

Os elementos de $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ são adicionados componente a componente e são multiplicados usando a lei distributiva e a identidade $\epsilon^2 = \alpha + \beta\epsilon$. Três dos mais importantes exemplos destes sistemas numéricos são:

- O conjunto dos números complexos, \mathbb{C} , quando $\alpha = -1$ e $\beta = 0$;
- O conjunto dos números perplexos ou números de Minkowski, \mathbb{P} , quando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$;
- O conjunto dos números duais, \mathbb{D} , quando $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Em [Sen90], Senn demonstrou que todo o sistema numérico $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ é isomorfo, como anel, aos números complexos \mathbb{C} , perplexos \mathbb{P} ou duais \mathbb{D} , consoante o valor $\kappa = \alpha + \frac{\beta^2}{4}$ seja negativo, positivo ou nulo, respectivamente.

Podemos observar que, identificando ϵ com a matriz ϵ_M dada por

$$\epsilon_M = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix},$$

a condição que envolve κ pode ser dada, de forma equivalente, em termos dos valores próprios da matriz ϵ_M : se ϵ_M tiver valores próprios complexos, $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ é isomorfo a \mathbb{C} ; se ϵ_M tiver valores próprios reais distintos, $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ é isomorfo a \mathbb{P} ; se ϵ_M tiver um único valor próprio real, $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ é isomorfo a \mathbb{D} . Em [Fis05], este isomorfismo é usado para estabelecer que a família quadrática, quando actua em determinado sistema numérico binário $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$, é topologicamente conjugada à família quadrática complexa, perplexa ou dual. De notar

que a forma matricial de representar ϵ , ϵ_M , não é única, mas o polinómio característico correspondente, $p(x) = x^2 - \beta x - \alpha$, é determinado de forma única através da definição de $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$.

Tal como exemplificámos anteriormente para os números complexos, estes sistemas numéricos de duas componentes podem ser expressos como anéis de matrizes reais 2×2 . Assim, o estudo da dinâmica da aplicação quadrática em $M_2(\mathbb{R})$, feito anteriormente, permite-nos caracterizar os diversos comportamentos em cada uma destas subálgebras, já que, em cada um dos casos, $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ é isomorfo a uma subálgebra de $M_2(\mathbb{R})$.

5.2.1 Conjunto dos números complexos

O conjunto dos *números complexos* \mathbb{C} é definido por

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta} = \{a + b\epsilon : a, b \in \mathbb{R}, \epsilon \notin \mathbb{R}, \epsilon^2 = \alpha + \beta\epsilon\},$$

com $\alpha = -1$ e $\beta = 0$. Identificando ϵ com a matriz

$$\epsilon_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

podemos também identificar cada um dos elementos $a + b\epsilon$ de $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ com a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, já que

$$aI + b\epsilon_M = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

O comportamento de F_C nesta subálgebra já foi estudado anteriormente, quando descrevemos a dinâmica de F_C no plano canónico de Jordan do tipo III.

5.2.2 Conjunto dos números perplexos ou split-complexos

O conjunto dos *números perplexos* \mathbb{P} , também designados por números split-complexos por alguns autores, é definido por

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta} = \{a + b\epsilon : a, b \in \mathbb{R}, \epsilon \notin \mathbb{R}, \epsilon^2 = \alpha + \beta\epsilon\},$$

com $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Identificando ϵ com a matriz

$$\epsilon_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

podemos também identificar cada um dos elementos $a + b\epsilon$ de $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ com a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, já que

$$aI + b\epsilon_M = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

A dinâmica nesta subálgebra sob a acção da aplicação quadrática F_C , sendo $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, será equivalente a um dos comportamentos descritos anteriormente. Como X_0 e C comutam, a dinâmica é totalmente caracterizada fazendo um paralelo com o caso unidimensional, como vimos anteriormente, já que existe uma base na qual estas matrizes estão simultaneamente na mesma forma canónica de Jordan. Dado que as matrizes X_0 e C têm valores próprios reais distintos $\alpha_0 = x_0 - y_0$ e $\beta_0 = x_0 + y_0$, e $u = a - b$ e $v = a + b$, respectivamente, (excluimos o caso trivial em que as matrizes são nulas), devemos estudar o comportamento de J_{X_0} sob a acção de F_{J_C} , sendo

$$J_{X_0} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J_C = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}.$$

Este caso já foi descrito quando caracterizámos o comportamento de F_C no plano canónico de Jordan do tipo I.

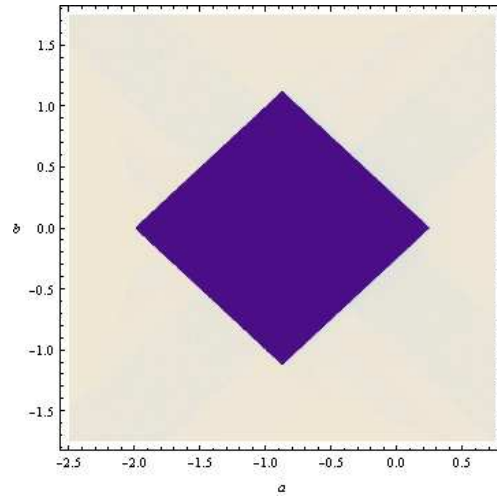


Figura 5.1: Conjunto de Mandelbrot definido no conjunto dos números perplexos, $M_{\mathbb{P}}$

Assim, para obter a órbita do número perplexo associado à matriz $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix}$, bastará tomar os números perplexos associados a $P(J_{X_0})_k P^{-1}$, sendo $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}X_0P = J_{X_0}$ e $P^{-1}CP = J_C$.

Logo, tal como foi descrito por Metzler em [Met94], por Artzy em [Art92] e por Fishback em [Fis05], o conjunto de Mandelbrot definido no conjunto dos números perplexos por

$$M_{\mathbb{P}} = \{a + b\epsilon \in \mathbb{P} : \text{a órbita da origem, } \{f_{a+b\epsilon}^n(0)\}, \text{ é limitada quando } n \rightarrow \infty\}$$

é um quadrado, sem qualquer estrutura fractal, como podemos observar na Figura 5.1. Quanto aos conjuntos de Julia preenchidos definidos em \mathbb{P} , discutidos por Artzy, surgem diversos tipos distintos: retângulos, conjuntos de Cantor e produtos destes conjuntos, consoante seja a combinação feita entre os casos da função quadrática real, quando os parâmetros são $\alpha_0 = x_0 - y_0$ e $\beta_0 = x_0 + y_0$, exemplificados nas Figuras 5.2, 5.3 e 5.4.

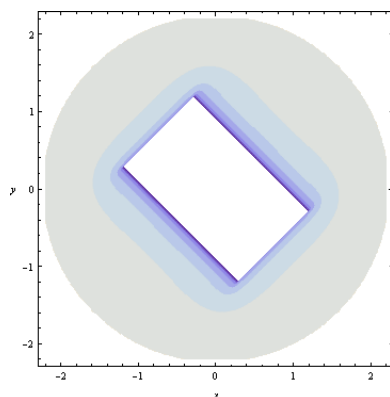


Figura 5.2: Conjunto de Julia preenchido definido em \mathbb{P} , com $a = -0.3$ e $b = 0.4$

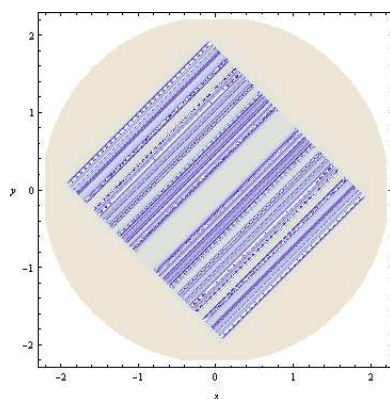


Figura 5.3: Conjunto de Julia preenchido definido em \mathbb{P} , com $a = -1.8$ e $b = 0.26$

5.2.3 Conjunto dos números duais

O conjunto dos *números duais* \mathbb{D} é definido por

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta} = \{a + b\epsilon : a, b \in \mathbb{R}, \epsilon \notin \mathbb{R}, \epsilon^2 = \alpha + \beta\epsilon\},$$

com $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Identificando ϵ com a matriz

$$\epsilon_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

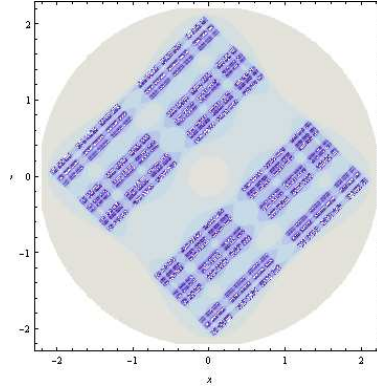


Figura 5.4: Conjunto de Julia preenchido definido em \mathbb{P} , com $a = -2.3$ e $b = 0.2$

podemos também identificar cada um dos elementos $a + b\epsilon$ de $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ com a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, já que

$$aI + b\epsilon_M = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Sendo $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ 0 & x_0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ matrizes que comutam, com um único valor próprio real, α_0 e u , respectivamente, para estudar a dinâmica desta subálgebra sob a acção da aplicação quadrática F_C recorreremos ao caso do plano canónico de Jordan do tipo II, um dos casos estudados anteriormente, para descrever o comportamento de J_{X_0} sob a acção de F_{J_C} , sendo

$$J_{X_0} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J_C = \begin{bmatrix} u & 1 \\ 0 & u \end{bmatrix}.$$

Para obter a órbita do número dual associado à matriz $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ 0 & x_0 \end{bmatrix}$, bastará tomar os números duais associados a $P(J_{X_0})_k P^{-1}$, sendo $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}X_0P = J_{X_0}$ e $P^{-1}CP = J_C$.

O conjunto de Mandelbrot definido no conjunto dos números duais, representado na

Figura 5.5, é dado por

$$M_{\mathbb{D}} = \{a + b\epsilon \in \mathbb{D} : \text{a órbita da origem, } \{f_{a+b\epsilon}^n(0)\}, \text{ é limitada quando } n \rightarrow \infty\}.$$

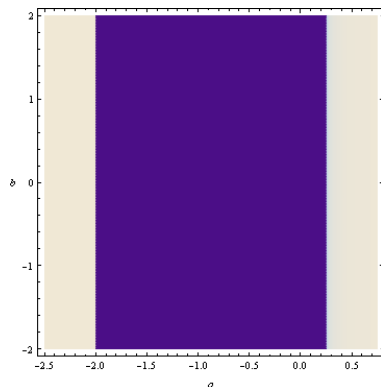


Figura 5.5: Conjunto de Mandelbrot definido no conjunto dos números duais, $M_{\mathbb{D}}$

Quanto aos conjuntos de Julia preenchidos definidos em \mathbb{D} , estes são constituídos por bandas verticais, como observamos nas Figuras 5.6, 5.7 e 5.8.

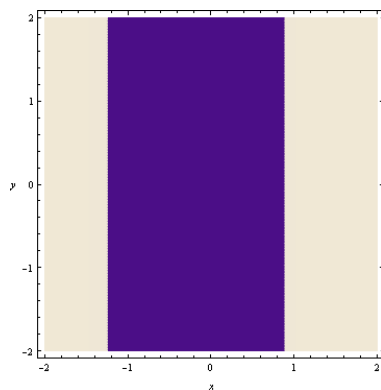


Figura 5.6: Conjunto de Julia preenchido definido em \mathbb{D} , com $a = -0.4$

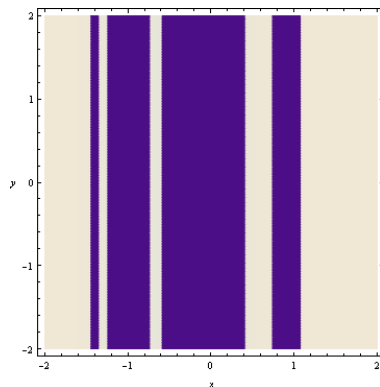


Figura 5.7: Conjunto de Julia preenchido definido em \mathbb{D} , com $a = -1$

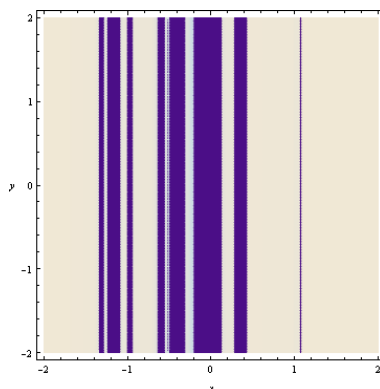


Figura 5.8: Conjunto de Julia preenchido definido em \mathbb{D} , com $a = -1.3$

5.3 Dinâmica em subálgebras hipercomplexas de quatro componentes

A álgebra dos quaterniões, cuja iteração sob a acção da aplicação quadrática foi amplamente estudada por diversos autores, e a álgebra dos split-quaterniões são as únicas álgebras quaterniónicas sobre \mathbb{R} , a menos de isomorfismo. De seguida, iremos considerar a álgebra dos split-quaterniões e fazer o paralelo entre o estudo efectuado nos capítulos anteriores e a iteração sob a acção da aplicação quadrática neste conjunto de números.

Álgebra dos números split-quaterniões

A álgebra dos números split-quaterniões (designados também por para-quaterniões ou coquaterniões), que denotaremos por \mathbb{H}' , é isomorfa à álgebra real

$$\mathbb{R}\mathbf{1} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i} \oplus \mathbb{R}\mathbf{j}' \oplus \mathbb{R}\mathbf{k}',$$

e é gerada pela base $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$, com a seguinte tabela de multiplicação

	$\mathbf{1}$	\mathbf{i}	\mathbf{j}'	\mathbf{k}'
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	\mathbf{i}	\mathbf{j}'	\mathbf{k}'
\mathbf{i}	\mathbf{i}	$-\mathbf{1}$	\mathbf{k}'	$-\mathbf{j}'$
\mathbf{j}'	\mathbf{j}'	$-\mathbf{k}'$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{i}$
\mathbf{k}'	\mathbf{k}'	\mathbf{j}'	\mathbf{i}	$\mathbf{1}$

Sendo $q' = q_0\mathbf{1} + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j}' + q_3\mathbf{k}'$ um número split-quaternião, tem-se

$$q'\overline{q'} = (q_0)^2 + (q_1)^2 - (q_2)^2 - (q_3)^2.$$

Esta álgebra hipercomplexa é isomorfa a uma álgebra de matrizes, já que a cada número split-quaternião $q' = q_0\mathbf{1} + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j}' + q_3\mathbf{k}' \in \mathbb{H}'$ podemos associar a matriz

$$\begin{bmatrix} q_0 - q_3 & -q_1 + q_2 \\ q_1 + q_2 & q_0 + q_3 \end{bmatrix},$$

identificando cada elemento da base de \mathbb{H}' com as seguintes matrizes:

$$\mathbf{1} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j}' \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}' \leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta correspondência ilustra o isomorfismo existente entre \mathbb{H}' e a álgebra $M_2(\mathbb{R})$ das matrizes reais de ordem 2 :

$$(q_0, q_1, q_2, q_3) \longleftrightarrow q_0\mathbf{1} + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j}' + q_3\mathbf{k}'.$$

Assim salientamos que, ao estudar a iteração em $M_2(\mathbb{R})$, podemos observar as características da iteração na álgebra dos números split-quaterniões. Notemos o paralelo existente

entre o paraquaternião (q_0, q_1, q_2, q_3) , cuja matriz associada é $\begin{bmatrix} q_0 - q_3 & -q_1 + q_2 \\ q_1 + q_2 & q_0 + q_3 \end{bmatrix}$, e a decomposição de Crilly desta matriz, descrita no capítulo 3, dada por $X = Z + EW$, sendo $z = z_1 + z_2i$ o número complexo associado à matriz $Z = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}$ e $w = w_1 + w_2i$ o número complexo associado à matriz $W = \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix}$. Temos então

$$\begin{cases} q_0 = z_1 = \operatorname{Re}(z) \\ q_1 = z_2 = \operatorname{Im}(z) \\ q_2 = w_1 = \operatorname{Re}(w) \\ q_3 = -w_2 = -\operatorname{Im}(w) \end{cases} . \quad (5.1)$$

Assim, o estudo de F_C efectuado em $M_2(\mathbb{R})$ será proveitoso no estudo da iteração quadrática na álgebra dos números split-quatérniões.

Capítulo 6

A iteração em matrizes estocásticas

Neste capítulo será estudada a iteração polinomial no conjunto das matrizes estocásticas simétricas. Concentramo-nos, em particular, no caso de uma determinada família de aplicações quadráticas. O comportamento dinâmico da família quadrática no intervalo, já bem conhecido, e sua dependência do parâmetro é reproduzido no espectro das matrizes estocásticas.

Já que uma matriz estocástica caracteriza uma cadeia de Markov, obtemos um sistema dinâmico discreto no espaço das cadeias de Markov reversíveis. Portanto, dependendo do parâmetro, há condições iniciais para as quais a correspondente cadeia de Markov reversível será atraída para um ponto fixo, para um ponto periódico ou para um ponto aperiódico.

Os conceitos e resultados clássicos de álgebra linear usados ao longo deste capítulo podem ser consultados em [HJ85].

Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados em [CRMNB11].

6.1 O conjunto Ω_n

Seja Ω_n o conjunto das matrizes $n \times n$, estocásticas, simétricas e definidas positivas. Assim, se $X = (x_{ij}) \in \Omega_n$, a matriz X é duplamente estocástica, já que é estocástica e simétrica, todas as suas entradas são não negativas, $x_{ij} \geq 0$, e a soma dos elementos de cada linha/coluna é igual a 1, $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$ e $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$. Por ser estocástica, a matriz tem 1 como valor próprio.

Por outro lado, uma matriz simétrica é definida positiva se e só se os seus valores próprios são positivos, logo concluímos que o espectro de X , $sp(X)$, é tal que $sp(X) \subset]0, 1]$.

Pelo teorema de Perron–Frobenius, se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz não negativa, então $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in sp(A)\}$, o raio espectral de A , é um valor próprio de A e existe um vector próprio não negativo de A correspondente a $\rho(A)$. Logo 1 é o valor próprio de Perron associado ao vector próprio de Perron à direita $u := (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos a aplicação polinomial g_λ , definida por $g_\lambda(x) := 1 - \lambda x(1 - x)$, topologicamente equivalente à aplicação logística e alterada de modo que $x = 1$ seja um ponto fixo.

Seja G_λ a aplicação matricial, induzida por g_λ , definida por

$$G_\lambda : \Omega_n \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ X \mapsto \mathbf{1} - \lambda X(\mathbf{1} - X) \quad ,$$

onde $\mathbf{1}$ denota a matriz identidade e $\lambda \in [0, 4]$.

O facto de 1 ser um ponto fixo de g_λ é essencial no estudo, já que garante que a iteração de uma matriz estocástica, pela acção da aplicação G_λ , seja ainda uma matriz estocástica.

Como vimos anteriormente, a dinâmica matricial em Ω_n e alguns dos seus aspectos podem ser estudados recorrendo à dinâmica unidimensional no espectro da matriz.

Já que toda a matriz simétrica é diagonalizável, qualquer $X \in \Omega_n$ é diagonalizável, logo existe uma matriz invertível P tal que $D = P^{-1}XP$ é uma matriz diagonal, $D = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$. Como as entradas da diagonal correspondem aos elementos do espectro de X , sabemos que estas são tais que $x_i \in]0, 1]$, $i = 1, \dots, n$. Então, como vimos em (3.6),

$$\begin{aligned} G_\lambda^k(X) &= G_\lambda^k(PDP^{-1}) = PG_\lambda^k(D)P^{-1} = \\ &= P \text{diag}(g_\lambda^k(x_1), \dots, g_\lambda^k(x_n)) P^{-1}. \end{aligned}$$

Esta relação permite-nos usar alguns dos resultados bem conhecidos da iteração em aplicações definidas no intervalo, de forma a obtermos resultados quanto à dinâmica matricial, como vimos, por exemplo, na Proposição 3.1.

Dado que pretendemos trabalhar com cadeias de Markov, o ideal seria que o conjunto Ω_n fosse invariante, ou seja, que $G_\lambda(X) \in \Omega_n$ sempre que $X \in \Omega_n$. Tal não se verifica, visto que algumas entradas de $G_\lambda^k(X)$ poderão ser negativas, para algum $k \geq 1$. No entanto, algumas das características mantêm-se pela iteração de G_λ , como é estabelecido no seguinte lema.

Lema 6.1 *Se $X \in \Omega_n$, então $G_\lambda(X)$ é simétrica, definida positiva e $u := (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ é o vector próprio de Perron associado a 1, o valor próprio de Perron.*

Dem. A matriz $G_\lambda(X)$ é simétrica, pois $X^T = X$ e, como consequência,

$$\begin{aligned} (G_\lambda(X))^T &= (\mathbf{1} - \lambda X (\mathbf{1} - X))^T \\ &= \mathbf{1} - \lambda (\mathbf{1} - X^T) X^T \\ &= \mathbf{1} - \lambda X (\mathbf{1} - X) \\ &= G_\lambda(X) \end{aligned}$$

Por outro lado, a matriz X é diagonalizável, dado que é simétrica, logo existe uma matriz invertível P tal que $D = P^{-1}XP$ é uma matriz diagonal, $D = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, com $x_i \in]0, 1]$, $i = 1, \dots, n$, e

$$G_\lambda(X) = G_\lambda(PDP^{-1}) = PG_\lambda(D)P^{-1}.$$

Então

$$\begin{aligned} G_\lambda^k(X) &= G_\lambda^k(PDP^{-1}) = PG_\lambda^k(D)P^{-1} = \\ &= P \text{diag}(g_\lambda^k(x_1), \dots, g_\lambda^k(x_n)) P^{-1}. \end{aligned}$$

Logo concluímos que $sp(G_\lambda^k(X)) \subset]0, 1]$ e assim $G_\lambda^k(X)$ é definida positiva para todo o $k \in \mathbb{N}$. Finalmente,

$$G_\lambda(X)u = u - \lambda X(\mathbf{1} - X)u = u - \lambda X(u - Xu) = u$$

já que u é o vector próprio de Perron de X associado a 1, o valor próprio de Perron. ■

Assim, a única condição necessária que poderá falhar, de forma a termos $G_\lambda(X) \in \Omega_n$ sempre que $X \in \Omega_n$, é a estocacidade, já que não é assegurada a não negatividade das entradas da matriz $G_\lambda^k(X)$, para todo o $k \geq 1$.

De forma a contornarmos esta questão, definimos o seguinte conjunto:

$$\Lambda_n(\lambda) := \left\{ X \in \Omega_n : G_\lambda^k(X) \in \Omega_n, \text{ para todo o } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Este conjunto é invariante, ou seja, $G_\lambda(\Lambda_n(\lambda)) = \Lambda_n(\lambda)$, e é análogo ao conjunto de Cantor invariante no caso da iteração no intervalo, [Fal97].

Alguns resultados em baixa dimensão

O caso $n = 2$

Quando consideramos $n = 2$, verificamos que $G_\lambda(\Omega_2) = \Omega_2$.

Uma matriz $X \in M_2(\mathbb{R})$ estocástica é da forma

$$X = \begin{bmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{bmatrix}, \quad x \in [0, 1],$$

com $sp(X) = \{1, 2x-1\}$. Assim, para garantir que X é definida positiva, temos de considerar $x \in]1/2, 1]$. Por outro lado, temos

$$G_\lambda(X) = \begin{bmatrix} 1 + \lambda - 3x\lambda + 2x^2\lambda & (-1 + 3x - 2x^2)\lambda \\ (-1 + 3x - 2x^2)\lambda & 1 + \lambda - 3x\lambda + 2x^2\lambda \end{bmatrix}.$$

Como $\lambda \in [0, 4]$, quando $x \in]1/2, 1]$, a matriz $G_\lambda^k(X)$ tem entradas não negativas para todo o $k \in \mathbb{N}$. Logo teremos $G_\lambda(\Omega_2) = \Omega_2$, ou seja, $\Omega_2 = \Lambda_2(\lambda)$, para todo o $\lambda \in [0, 4]$.

Para cada k -ciclo $\{a_1, \dots, a_k\}$ de g_λ , temos a órbita de G_λ

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{a_1+1}{2} & \frac{1-a_1}{2} \\ \frac{1-a_1}{2} & \frac{a_1+1}{2} \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{cc} \frac{a_k+1}{2} & \frac{1-a_k}{2} \\ \frac{1-a_k}{2} & \frac{a_k+1}{2} \end{array} \right],$$

com o mesmo período k . De notar que, após a diagonalização, temos

$$\begin{bmatrix} a_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Contudo, esta matriz não é estocástica, já que $a_i \neq 1$ para todo o $i = 1, \dots, k$, caso contrário teríamos o caso trivial do ponto fixo.

Quando $n = 2$, não existe $Y \in \Omega_2$ semelhante a um dado $X \in \Omega_2$, ou seja, não existe uma matriz não trivial P tal que $PXP^{-1} \in \Omega_2$. Mais ainda, existe uma correspondência biunívoca entre as órbitas em Ω_2 , sob a acção de G_λ , e as órbitas no intervalo $[0, 1]$, sob a acção de g_λ . Logo a dinâmica matricial em Ω_2 é essencialmente equivalente à dinâmica no caso unidimensional no intervalo.

O caso $n = 3$

Neste caso, não é verdade que $\Omega_3 = \Lambda_3(\lambda)$, para todo o $\lambda \in [0, 4]$, como podemos verificar no seguinte exemplo.

Exemplo 6.2 Consideremos a matriz $X \in \Omega_3$ dada por

$$X = \begin{bmatrix} 0.615903 & 0.114583 & 0.269514 \\ 0.114583 & 0.615903 & 0.269514 \\ 0.269514 & 0.269514 & 0.460972 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de X são 1, 0.50132 e 0.191458 (arredondamento dos valores feito à sexta casa decimal). Para $\lambda = 3.9$, embora $G_\lambda(X)$ tenha todas as entradas positivas, a segunda iterada $G_\lambda^2(X) = G_\lambda(G_\lambda(X))$ tem duas entradas negativas,

$$G_\lambda^2(X) = \begin{bmatrix} 0.796950 & -0.107963 & 0.311013 \\ -0.107963 & 0.796950 & 0.311013 \\ 0.311013 & 0.311013 & 0.377974 \end{bmatrix},$$

e, por essa razão, $G_\lambda^2(X) \notin \Omega_3$. Neste caso, para a matriz X dada como exemplo, temos $X \notin \Lambda_3(\lambda)$, para $\lambda = 3.9$.

Para $n = 3$, uma matriz estocástica simétrica é da forma

$$X = \begin{bmatrix} x & y & 1 - x - y \\ y & z & 1 - y - z \\ 1 - x - y & 1 - y - z & x + 2y + z - 1 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

com $x, y, z \in [0, 1]$. Neste caso, tanto as condições necessárias em x, y, z para que a matriz seja definida positiva como as condições que asseguram a não negatividade das entradas da iterada são mais complicadas que no caso em que $n = 2$. De forma a introduzir a ideia do que devemos fazer, consideremos o caso particular em que $z = x$.

A subfamília em que $z = x$

Analisemos a subfamília das matrizes dadas em (6.1) caracterizada por $z = x$. Neste caso, $G_\lambda(X)$ também pertence a esta subfamília. Coloca-se então a questão: quais são os subconjuntos invariantes minimais $\Lambda_n(\lambda)$, dado um determinado n ? O conjunto Ω_n não é ele próprio um conjunto minimal, como vimos no exemplo para $n = 3$.

Consideremos então a família de matrizes da forma

$$X = \begin{bmatrix} x & y & 1 - x - y \\ y & x & 1 - x - y \\ 1 - x - y & 1 - x - y & 2y + 2x - 1 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

com $x, y \in [0, 1]$.

Temos de impor condições adicionais a x, y para garantir que $X \in \Omega_3$. Os valores próprios de X são 1 , $x - y$ e $3x + 3y - 2$. Logo, para garantir que X é definida positiva, temos de considerar $x > y$ e $x > 2/3 - y$. Seja $\tilde{\Lambda}(\lambda)$ o subconjunto de $\Lambda_3(\lambda)$ composto pelas matrizes da forma (6.2). Na Figura 6.1 podemos observar o subconjunto invariante $\tilde{\Lambda}(\lambda)$, para $\lambda = 3.9$, que ilustra o quão diferentes podem ser os conjuntos Ω_3 e $\Lambda_3(\lambda)$.

Na Figura 6.2 pode ver-se um detalhe da Figura 6.1. O exemplo dado no início desta secção foi escolhido a partir da observação desta figura: tomámos o exemplo de um par (x, y) para o qual a cor associada seja o branco (no exemplo escolhemos $x = 0.615903$ e $y = 0.114583$). De notar que, seguindo este mesmo método, é muito mais difícil encontrar um par (x, y) para o qual $G_\lambda^k(X)$ tenha entradas não negativas para todo o inteiro positivo k . Esta dificuldade resulta do facto do conjunto invariante $\tilde{\Lambda}(\lambda)$ ser um conjunto com uma estrutura fractal não trivial.

Uma forma mais eficiente de encontrar uma matriz $X \in \tilde{\Lambda}(\lambda)$, isto é, X da forma (6.2) para a qual $G_\lambda^k(X)$ tenha entradas não negativas para todo o inteiro positivo k , é

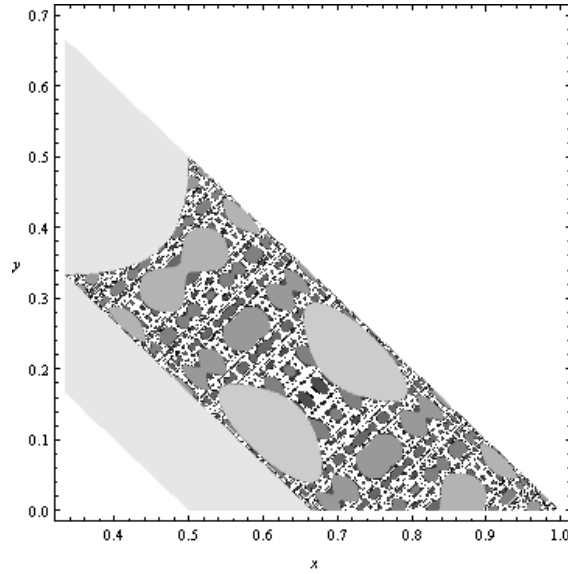


Figura 6.1: Gráfico do conjunto invariante $\tilde{\Lambda}(\lambda)$ para $\lambda = 3.9$

escolher um ponto periódico $X = \{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ de G_λ . Contudo, há que ter alguma prudência na escolha do ponto periódico, já que, mesmo neste caso, há que assegurar a não negatividade das entradas das matrizes X_i , $0 \leq i \leq n-1$.

Sejam $a = x - y$ e $b = 3x + 3y - 2$ os valores próprios de X . Determinando x, y em função de a, b , podemos reescrever a matriz X da seguinte forma:

$$X = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3a + b + 2 & -3a + b + 2 & 2 - 2b \\ -3a + b + 2 & 3a + b + 2 & 2 - 2b \\ 2 - 2b & 2 - 2b & 2 + 4b \end{bmatrix}.$$

De modo a termos $x, y \in [0, 1]$, as condições a impor aos valores próprios a, b são

$$\frac{1}{6}(3a + b + 2) \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{6}(-3a + b + 2) \geq 0.$$

Para assegurar que X seja definida positiva, devemos considerar $0 < a, b \leq 1$, logo determinamos um domínio, no plano (a, b) , de possíveis valores próprios de uma dada matriz pertencente a Ω_3 , representado na Figura 6.3. Consideremos então a região Δ definida por $\Delta = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 < a \leq 1, 0 < b, 3a - 2 \leq b \leq 1\}$. De notar que o facto de $(a, b) \in \Delta$

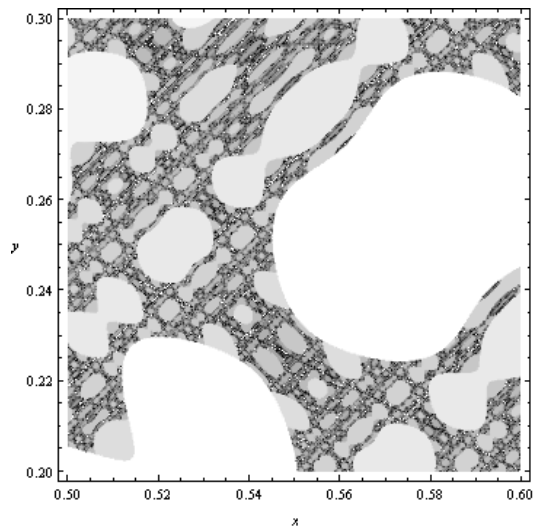


Figura 6.2: Detalhe do conjunto invariante $\tilde{\Lambda}(\lambda)$ para $\lambda = 3.9$

não implica que $(b, a) \in \Delta$.

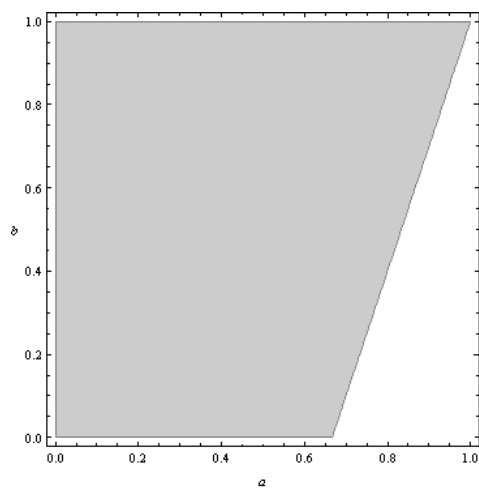


Figura 6.3: Domínio Δ no plano (a, b)

Seja $\{a_1, \dots, a_k\}$ um ciclo de período k da aplicação g_λ , isto é, $g_\lambda(a_i) = a_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$ e $g_\lambda(a_k) = a_1$. Para obter um ciclo matricial de G_λ é necessário escolher um par de pontos de $\{a_1, \dots, a_k\}$. No conjunto considerado, este par (a_i, a_j) irá

gerar um determinado ciclo matricial de G_λ em Ω_3 se e só se $(a_{i+r}, a_{j+r}) \in \Delta$ para todo o inteiro positivo r (tendo em conta que $g_\lambda(a_k) = a_1$). Já que $(a, a) \in \Delta$, para todo o $a \in]0, 1]$, uma escolha possível é o par (a_i, a_i) ; neste caso, dizemos que o ciclo matricial está *em fase*. Caso contrário, dizemos que o ciclo matricial está *fora de fase*. O par (a_i, a_j) gera a matriz

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3a_i + a_j + 2 & -3a_i + a_j + 2 & 2 - 2a_j \\ -3a_i + a_j + 2 & 3a_i + a_j + 2 & 2 - 2a_j \\ 2 - 2a_j & 2 - 2a_j & 2 + 4a_j \end{bmatrix}$$

com $i, j = 1, \dots, k$.

Podemos implementar um algoritmo para obter todos os ciclos de G_λ . Seja $\lambda \in [0, 4]$; cada ciclo de g_λ pode ser determinado usando rotinas numéricas ou dinâmica simbólica e argumentos de combinatória, [LRdSSR86] e [RMR07]. Tendo como base um k -ciclo unidimensional $\{a_1, \dots, a_k\}$, temos um ciclo matricial em fase, gerado pelo par (a_1, a_1) . Para obter todos os outros ciclos, que estarão fora de fase, associados a este ciclo unidimensional, é necessário verificar se $(a_{1+r}, a_{i+r}) \in \Delta$, com $r = 1, \dots, k - 1$, para cada par (a_1, a_i) , com $i = 2, \dots, k$.

Exemplo 6.3 *Consideremos*

$$X = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3a_i + a_j + 2 & -3a_i + a_j + 2 & 2 - 2a_j \\ -3a_i + a_j + 2 & 3a_i + a_j + 2 & 2 - 2a_j \\ 2 - 2a_j & 2 - 2a_j & 2 + 4a_j \end{bmatrix}.$$

Seja $\lambda = 4$. Os dois ciclos de g_λ de período 3 são

$$\begin{aligned} \{a_1, a_2, a_3\} &= \{0.0301537, 0.883022, 0.586824\} \quad e \\ \{a_4, a_5, a_6\} &= \{0.0495156, 0.811745, 0.38874\} \end{aligned}$$

(apresentamos valores aproximados). De notar que nem todos os pares (a_i, a_j) compostos por elementos dos ciclos de g_λ , geram um ciclo matricial com as características desejadas.

Na tabela que se segue, o símbolo \times representa os pares (a_i, a_j) que geram um ciclo de G_λ .

O símbolo \emptyset representa os outros casos.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	\times	\emptyset	\emptyset	\times	\emptyset	\emptyset
a_2	\emptyset	\times	\emptyset	\emptyset	\times	\emptyset
a_3	\emptyset	\emptyset	\times	\emptyset	\emptyset	\times
a_4	\times	\times	\emptyset	\times	\emptyset	\emptyset
a_5	\emptyset	\times	\times	\emptyset	\times	\emptyset
a_6	\times	\emptyset	\times	\emptyset	\emptyset	\times

Isto significa que existem 2 ciclos matriciais de G_λ de período 3 distintos que estão em fase,

$$(a_1, a_1) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0.922015 & 0.0389926 & 0.0389926 \\ 0.0389926 & 0.922015 & 0.0389926 \\ 0.0389926 & 0.0389926 & 0.922015 \end{bmatrix},$$

$$(a_4, a_4) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0.874497 & 0.0627517 & 0.0627517 \\ 0.0627517 & 0.874497 & 0.0627517 \\ 0.0627517 & 0.0627517 & 0.874497 \end{bmatrix},$$

e 3 ciclos matriciais de G_λ de período 3 distintos que estão fora de fase:

$$(a_1, a_4) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0.910135 & 0.027113 & 0.0627517 \\ 0.027113 & 0.910135 & 0.0627517 \\ 0.0627517 & 0.0627517 & 0.874497 \end{bmatrix},$$

$$(a_4, a_1) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0.886376 & 0.074631 & 0.0389926 \\ 0.074631 & 0.886376 & 0.0389926 \\ 0.0389926 & 0.0389926 & 0.922015 \end{bmatrix},$$

$$(a_4, a_2) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0.83701 & 0.0252649 & 0.137725 \\ 0.0252649 & 0.83701 & 0.137725 \\ 0.137725 & 0.137725 & 0.724549 \end{bmatrix}.$$

O caso geral

Estudemos agora o caso geral em que $X \in \Omega_3$, considerando X no formato

$$X = \begin{bmatrix} 1-x-z & x & z \\ x & 1-x-y & y \\ z & y & 1-y-z \end{bmatrix}.$$

O espectro de X é $sp(X) = \{1, a, b\}$, com

$$\begin{aligned} a &= 1-x-y-z + \sqrt{x^2 - xy - xz + y^2 - yz + z^2} \quad \text{e} \\ b &= 1-x-y-z - \sqrt{x^2 - xy - xz + y^2 - yz + z^2}. \end{aligned}$$

Reescrevendo x e y em função dos valores próprios a e b , temos

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{12} \left(6 - 3a - 3b - 6z + \sqrt{3} \sqrt{3a^2 + 3b^2 + b(4 - 12z) - 4(1 - 3z)^2 - 2a(-2 + 5b + 6z)} \right) \\ y &= \frac{1}{12} \left(6 - 3a - 3b - 6z - \sqrt{3} \sqrt{3a^2 + 3b^2 + b(4 - 12z) - 4(1 - 3z)^2 - 2a(-2 + 5b + 6z)} \right) \end{aligned}$$

Recorrendo a estas expressões, podemos também reescrever a matriz X em função dos valores próprios e da entrada z . É também possível determinar a matriz P da decomposição de Jordan de X , $X = PDP^{-1}$, com

$$P = \begin{bmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} \\ 1 & p_{22} & p_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

onde p_{12} , p_{13} , p_{22} e p_{23} dependem da matriz considerada.

Para garantir que os valores próprios da matriz X são reais, terá de se verificar a condição $x^2 - xy - xz + y^2 - yz + z^2 \geq 0$; em termos dos valores próprios a e b , esta condição é equivalente a $3a^2 + 3b^2 + b(4 - 12z) - 4(1 - 3z)^2 - 2a(-2 + 5b + 6z) \geq 0$, que define a região representada nas Figuras 6.4 e 6.5.

Notemos que, apesar de considerarmos inicialmente $0 \leq z \leq 1$, o valor de z é sempre tal que $z \leq 0.5$, dado que $0 < a, b \leq 1$.

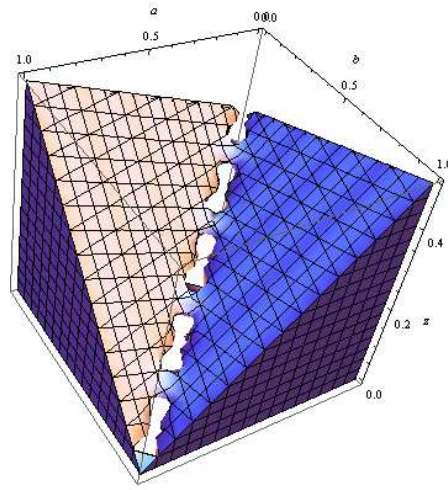


Figura 6.4: Domínio inicial

Particularizando o valor de z , existem pares de valores próprios (a, b) que estão excluídos à partida como valores próprios de X_0 , já que fazem com que as entradas de X_0 não sejam reais. O domínio E , composto por pares de valores próprios (a, b) tais que X_0 tem entradas reais, é definido por:

$$E = \left\{ (a, b) \in]0, 1] \times]0, 1] : \left(\frac{1}{3} (2 + a - 6z) \geq b \wedge -2 + 3a + 6z \geq b \right) \vee \left(\frac{1}{3} (2 + a - 6z) \leq b \wedge -2 + 3a + 6z \leq b \right) \right\}.$$

Exemplo 6.4 Tomando $z = 0.3$, a região E constituída pelos pares (a, b) de possíveis valores próprios da matriz inicial X_0 com entradas reais é a representada na Figura 6.6.

Por outro lado, dada uma determinada matriz inicial X_0 , podemos identificar directamente o valor de z e o par de valores próprios (a, b) .

Tendo isto em conta, como podemos determinar a região composta pelas matrizes de entradas não negativas pretendidas, denotada por Λ_z ? Começemos com um exemplo.

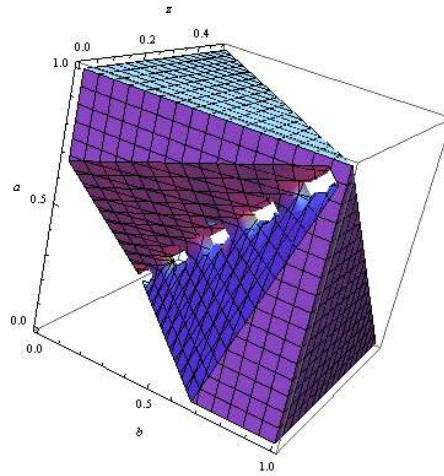


Figura 6.5: Domínio inicial - outra perspectiva

Exemplo 6.5 Consideremos a matriz

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 - x_0 - z_0 & x_0 & z_0 \\ x_0 & 1 - x_0 - y_0 & y_0 \\ z_0 & y_0 & 1 - y_0 - z_0 \end{bmatrix},$$

com $x_0 = 0.356728$, $y_0 = 0.0883057$, $z_0 = 0.3$ e $\lambda = 3.9602701272205008$. Esta matriz tem o par de valores próprios $(a_0, b_0) = (0.00993247, 0.5)$. Note-se que, neste primeiro exemplo, nem o parâmetro nem a matriz foram escolhidos ao acaso. O parâmetro λ é tal que, na aplicação unidimensional g_λ , temos um ciclo de período 4, dado por $\{u_0, u_1, u_2, u_3\} = \{0.00993247, 0.961055, 0.851775, 0.5\}$. Como a matriz X_0 tem como valores próprios o par $(a_0, b_0) = (0.00993247, 0.5)$, um par fora de fase resultante de um desfasamento do ciclo de período 4, a aplicação G_λ gera um ciclo matricial de período 4, $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$. A partir do z_0 e de (a_0, b_0) determinamos a matriz P ,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2.42546 & -0.110483 \\ 1 & 1.42546 & -0.889517 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

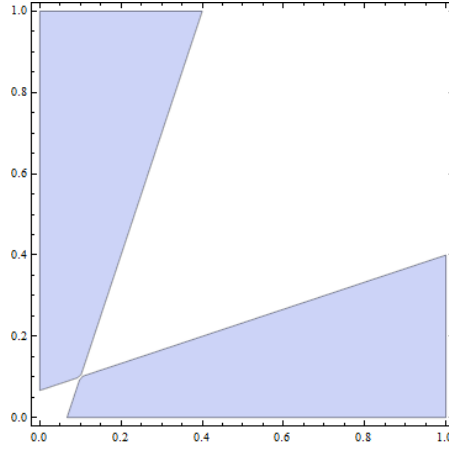


Figura 6.6: Região E constituída pelos pares (a, b) de possíveis valores próprios da matriz inicial X_0 com entradas reais, sendo $z = 0.3$

Assim, $X_0 = PD_0P^{-1}$ e as seguintes iteradas serão tais que

$$G_\lambda^k(X_0) = P \text{diag} \left(1, g_\lambda^k(a_0), g_\lambda^k(b_0) \right) P^{-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned} G_\lambda^k(X_0) &= \begin{bmatrix} 1 & -2.42546 & -0.110483 \\ 1 & 1.42546 & -0.889517 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_k & 0 \\ 0 & 0 & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.333333 & 0.333333 & 0.333333 \\ -0.272071 & 0.159898 & 0.112173 \\ -0.061262 & -0.493232 & 0.55449 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.333333 + 0.659898a_k + 0.00676839b_k & 0.333333 - 0.387827a_k + 0.0544936b_k & 0.333333 - 0.272071a_k - 0.061262b_k \\ 0.333333 - 0.387827a_k + 0.0544936b_k & 0.333333 + 0.227929a_k + 0.438738b_k & 0.333333 + 0.159898a_k - 0.493232b_k \\ 0.333333 - 0.272071a_k - 0.061262b_k & 0.333333 + 0.159898a_k - 0.493232b_k & 0.333333 + 0.112173a_k + 0.554494b_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Consideremos a matriz $T = (t_{ij})_{3 \times 3}$ dada por

$$T = \begin{bmatrix} 0.333333 + 0.659898a + 0.00676839b & 0.333333 - 0.387827a + 0.0544936b & 0.333333 - 0.272071a - 0.061262b \\ 0.333333 - 0.387827a + 0.0544936b & 0.333333 + 0.227929a + 0.438738b & 0.333333 + 0.159898a - 0.493232b \\ 0.333333 - 0.272071a - 0.061262b & 0.333333 + 0.159898a - 0.493232b & 0.333333 + 0.112173a + 0.554494b \end{bmatrix}$$

que de facto nos fornece as iteradas X_i , em função da sequência dos pares de valores próprios. A região Λ_z fica completamente determinada por

$$\Lambda_z = \{(a, b) \in]0, 1] \times]0, 1] : t_{12} \geq 0 \wedge t_{13} \geq 0 \wedge t_{23} \geq 0\}.$$

No caso do exemplo dado, Λ_z é a região representada na Figura 6.7. Agora basta observar

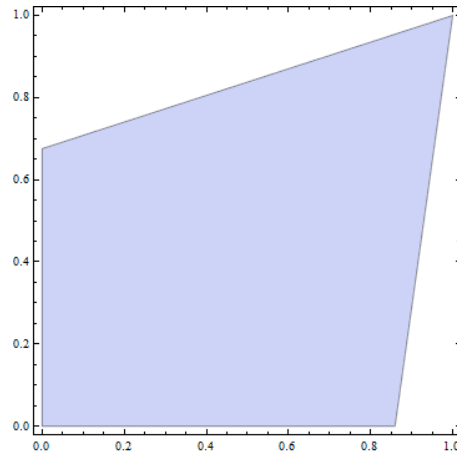


Figura 6.7: Região Λ_z para o Exemplo 6.5

quais são os pares de valores próprios do ciclo

$$\{(a_0, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$$

que pertencem à região.

Tal como foi exemplificado no caso da subfamília em que $z = x$, podemos ver esta questão de uma outra perspectiva: se em vez de iniciarmos com uma matriz X_0 concreta, o fizermos a partir de um ciclo de g_λ de período n , $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, como verificar se cada um dos n ciclos matriciais, obtidos pela iteração das n matrizes diagonais construídas através dos desfasamentos dos valores próprios, dadas por

$$\begin{aligned} X_i &= P \text{diag}(1, u_0, u_0) P^{-1} \\ X'_i &= Q \text{diag}(1, u_0, u_1) Q^{-1} \\ &\dots \\ X_i^{\{n-1\}} &= W \text{diag}(1, u_0, u_{n-1}) W^{-1} \end{aligned}$$

com P, Q, \dots, W matrizes invertíveis que diagonalizam $X_i, X'_i, \dots, X_i^{\{n-1\}}$, pertencem à

região? Neste caso, temos que começar por determinar a matriz que diagonaliza a matriz inicial de cada um dos ciclos e construir a região Λ_z para cada um deles.

Façamos esta análise para os restantes ciclos matriciais de período 4 existentes para $\lambda = 3.9602701272205008$, que têm como valores próprios um par (u_i, u_j) do ciclo $\{u_0, u_1, u_2, u_3\} = \{0.00993247, 0.961055, 0.851775, 0.5\}$ da aplicação unidimensional g_λ .

Exemplo 6.6 Consideremos novamente $\lambda = 3.9602701272205008$ e o ciclo de período 4 :

$$\{u_0, u_1, u_2, u_3\} = \{0.00993247, 0.961055, 0.851775, 0.5\}.$$

Começemos por salientar que existem apenas 4 órbitas matriciais distintas, geradas pelos pares de valores próprios (u_i, u_j) , que podem ser representadas por (u_0, u_0) , (u_0, u_1) , (u_0, u_2) , (u_0, u_3) (note-se que o ciclo representado por (u_1, u_3) é o mesmo que o representado por (u_0, u_2)).

Por outro lado, verificamos que nem todos os pares (u_i, u_j) geram uma órbita matricial relevante para este estudo, já que alguns poderão gerar matrizes X_0 que não têm entradas reais, como é o caso do ciclo em fase (u_0, u_0) . Basta observar que os pares pertencentes ao ciclo em fase são pontos que se encontram na recta $a = b$, logo não pertencerão à região dada na Figura 6.4. Prova-se analiticamente que, quando $a = b$, os valores de x e y são complexos, excepto no caso particular do ponto $z = \frac{1-a}{3}$. Note-se que, para cada órbita $\{(u_i, u_j), (u_{i+1}, u_{j+1}), (u_{i+2}, u_{j+2}), (u_{i+3}, u_{j+3})\}$, este pormenor do domínio apenas tem de se ter em conta para a matriz inicial. A partir do momento em que o primeiro par de valores próprios faz com que a matriz X_0 tenha entradas reais, as outras iteradas de X_0 também terão entradas reais. Assim, para as restantes iteradas de (u_i, u_j) , devemos verificar se estas pertencem à região Λ_z , construída através da matriz que diagonaliza X_0 .

Passemos então à análise da questão levantada. Quando o problema é colocado desta forma, apenas temos o par de valores próprios (u_i, u_j) , não temos uma matriz definida. Assim, para cada par (u_0, u_0) , (u_0, u_1) , (u_0, u_2) , (u_0, u_3) devemos começar por determinar o intervalo de variação de z de forma a que a matriz inicial X_0 tenha entradas reais. Para tal, determinamos quando é que

$$3a^2 + 3b^2 + b(4 - 12z) - 4(1 - 3z)^2 - 2a(-2 + 5b + 6z) \geq 0 :$$

- Para o par (u_0, u_0) , verificamos que X_0 terá entradas complexas, excepto no caso particular em que $z = \frac{1 - u_0}{3} = 0.330023$. Neste caso, a partir do valor de z e de (u_0, u_0) determinamos a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & -2.18816 & 0.0557281 \\ 1 & 1.18816 & -1.05573 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, as seguintes iteradas serão determinadas através da matriz T dada por

$$T = \begin{bmatrix} 0.333333 + 0.668224a - 0.00155765b & 0.333333 - 0.30694a - 0.0263932b & 0.333333 - 0.361284a + 0.0279509b \\ 0.333333 - 0.30694a - 0.0263932b & 0.333333 + 0.166667a + 0.5b & 0.333333 + 0.196175a - 0.529509b \\ 0.333333 - 0.361284a + 0.0279509b & 0.333333 + 0.196175a - 0.529509b & 0.333333 + 0.165109a + 0.501558b \end{bmatrix}$$

A região Λ_z fica completamente determinada por

$$\Lambda_z = \{(a, b) \in]0, 1] \times]0, 1] : t_{12} \geq 0 \wedge t_{13} \geq 0 \wedge t_{23} \geq 0\}$$

Neste caso, Λ_z é a região representada na Figura 6.8. Assim, todos os pares de valores próprios do ciclo $\{(u_0, u_0), (u_1, u_1), (u_2, u_2), (u_3, u_3)\}$ pertencem à região.

- Para o par (u_0, u_1) verificamos que, para X_0 ter entradas reais, temos de impor $3a^2 + 3b^2 + b(4 - 12z) - 4(1 - 3z)^2 - 2a(-2 + 5b + 6z) \geq 0$, que é válido sempre que $-0.145539 \leq z \leq 0.488543$, mas como z também tem de ser não negativo, temos $0 \leq z \leq 0.488543$. Para qualquer z neste intervalo, repetimos o processo: determinamos a matriz P através do valor do z escolhido e de (u_0, u_1) e a matriz T (que

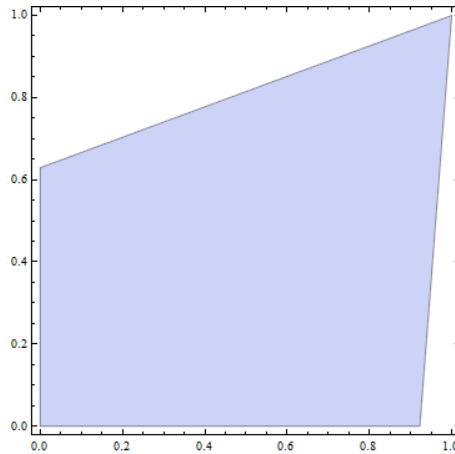


Figura 6.8: Região Λ_z , com $z = 0.330023$

nos dá as iteradas X_i , em função da sequência dos pares de valores próprios). A partir da região Λ_z , verificamos cada par. Por exemplo, para $z = 0.1$, temos a região Λ_z representada na Figura 6.9, e verificamos que

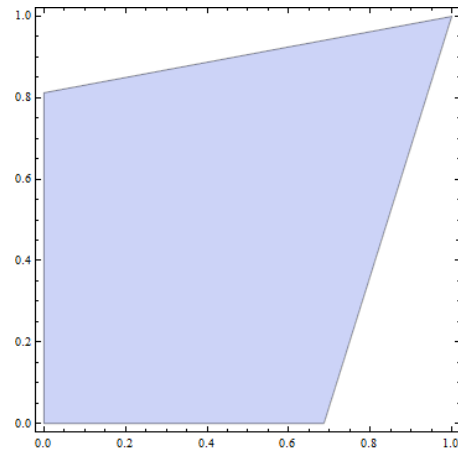
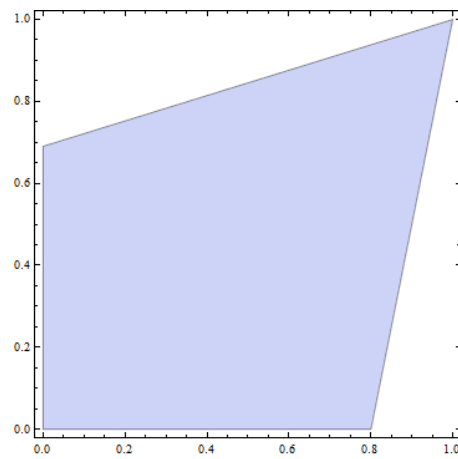
$$(0.00993247, 0.961055) \notin \Lambda_z$$

$$(0.961055, 0.851775) \notin \Lambda_z$$

$$(0.851775, 0.5) \notin \Lambda_z$$

$$(0.5, 0.00993247) \in \Lambda_z.$$

- Para o par (u_0, u_2) verificamos que, para X_0 ter entradas reais, temos de impor $3a^2 + 3b^2 + b(4 - 12z) - 4(1 - 3z)^2 - 2a(-2 + 5b + 6z) \geq 0$, o que é válido sempre que $-0.090899 \leq z \leq 0.47033$, mas como z também tem de ser não negativo, temos $0 \leq z \leq 0.47033$. O restante processo é análogo ao descrito anteriormente. Por exemplo, para $z = 0.4$, temos a região Λ_z representada na Figura 6.10 e verificamos que nenhum dos pares de valores próprios do ciclo pertence à região.

Figura 6.9: Região Λ_z , com $z = 0.1$ Figura 6.10: Região Λ_z , com $z = 0.4$

6.2 Dinâmica discreta no conjunto das cadeias de Markov

Como referimos anteriormente, cada matriz estocástica determina uma cadeia de Markov. Assim, a dinâmica em $\Lambda_n(\lambda)$ gerada pela iteração por G_λ , corresponde a um sistema dinâmico no conjunto das cadeias de Markov reversíveis, já que consideramos matrizes simétricas. Como o conjunto $\Lambda_n(\lambda)$ é muito vasto, iremos estudar famílias de matrizes pertencentes a $\Lambda_n(\lambda)$, para um certo inteiro positivo n , que sejam invariantes sob a iteração de G_λ e que tenham potencial interesse na análise de cadeias de Markov. Salientamos que podem ser obtidas diferentes cadeias de Markov, embora a iteração seja sempre sob a acção da aplicação G_λ .

A ideia geral é a seguinte: seja $\lambda \in [0, 4]$; começamos por considerar uma cadeia de Markov particular caracterizada por uma matriz estocástica $X \in \Lambda_n(\lambda)$. Esta cadeia de Markov pode ser vista como o modelo de um certo sistema num certo estado. As mudanças estruturais periódicas que ocorrem no sistema são caracterizadas pelas iterações da aplicação G_λ . A iteração sob a acção de G_λ do estado inicial X irá corresponder a um novo estado, que é mais uma vez modelado por uma cadeia de Markov caracterizada pela matriz estocástica $G_\lambda(X)$. Desta forma, obtemos um processo evolutivo para as cadeias de Markov que poderá ser estudado aplicando técnicas usadas no estudo da iteração no intervalo.

6.2.1 O caso redutível

Uma matriz $X \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, diz-se redutível se existir uma matriz de permutação P e um inteiro r , com $1 \leq r \leq n - 1$, tal que

$$P^T X P = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

onde $A \in M_r(\mathbb{R})$, $C \in M_{n-r}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{R})$. Caso contrário, a matriz X diz-se irredutível.

Uma das propriedades de uma matriz redutível X é a seguinte: as potências de X , X^k , têm entradas nulas para todo o inteiro positivo k (uma matriz redutível tem de ter pelo menos $n - 1$ entradas nulas).

Consideremos a seguinte matriz redutível

$$Y = \begin{bmatrix} y_0 & 0 & z_0 & 0 \\ 0 & y_0 & 0 & z_0 \\ z_0 & 0 & y_0 & 0 \\ 0 & z_0 & 0 & y_0 \end{bmatrix}.$$

De forma a Y ser estocástica, temos de ter $0 \leq y_0, z_0 \leq 1$ e $y_0 + z_0 = 1$. Os valores próprios de Y são $y_0 - z_0$ e $y_0 + z_0 = 1$, ambos de multiplicidade 2. Logo, se $y_0 > z_0$, a matriz Y é definida positiva, com $Y \in \Omega_4$. A k -ésima iterada de Y por G_λ terá a forma

$$G_\lambda^k(Y) = \begin{bmatrix} y_k & 0 & z_k & 0 \\ 0 & y_k & 0 & z_k \\ z_k & 0 & y_k & 0 \\ 0 & z_k & 0 & y_k \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 1 - \lambda y_k + \lambda y_k^2 + \lambda z_k^2 \quad \text{e} \\ z_{k+1} &= (2y_k - 1) \lambda z_k. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Verificamos que G_λ preserva o formato matricial inicial e que os valores próprios de $G_\lambda(Y)$ são $y_k - z_k$ e $y_k + z_k = 1$. Temos, de facto, um sistema unidimensional com

$$y_{k+1} = 1 - \lambda y_k + \lambda y_k^2 + \lambda (1 - y_k)^2 = 1 + \lambda - 3\lambda y_k + 2\lambda y_k^2. \tag{6.5}$$

Podemos então analisar o comportamento dinâmico de G_λ directamente, a partir das entradas da matriz e, em particular, analisar se alguma das entradas será eventualmente negativa. A aplicação $x \mapsto h_\lambda(x) := 1 + \lambda - 3\lambda x + 2\lambda x^2$, restrita a $x \in [1/2, 1]$, de forma a satisfazer as condições enunciadas anteriormente, permanece no intervalo $[1/2, 1]$. Isto

significa que, para todo o $\lambda \in [0, 4]$, todas as entradas de $G_\lambda^k(Y)$ são não negativas e que, para todo o k , o conjunto destas matrizes é invariante sob a acção da aplicação G_λ , em particular $y_k \in [1/2, 1]$.

Na Figura 6.11 podemos observar a representação das duas cadeias de Markov obtidas, com vértices $\{1, 3\}$ e $\{2, 4\}$, associadas a um 2-full-shift, acoplado pela recorrência (6.4).

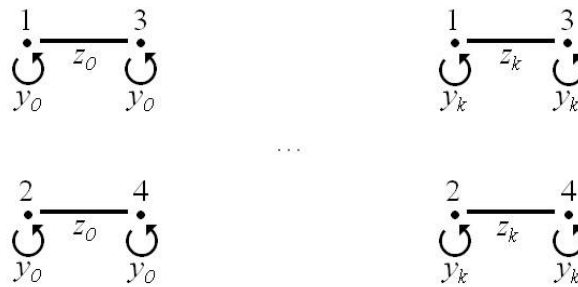


Figura 6.11: Grafos associados à evolução das cadeias de Markov redutíveis, com $n = 4$, sendo y_k e z_k as probabilidades de transição na k -ésima iteração

Para cada iterada k , obtemos uma cadeia de Markov para a qual a probabilidade de manter o mesmo estado é igual a y_k e a probabilidade de transição para um estado diferente é dada por $z_k = 1 - y_k$. Na próxima iteração, ou geração, a probabilidade de manter o mesmo estado é igual a $y_{k+1} = h_\lambda(y_k) = 1 + \lambda - 3\lambda y_k + 2\lambda y_k^2$.

Exemplo 6.7 Nas Figuras 6.12 e 6.13 exemplificamos a evolução desta probabilidade, iniciando em $y_0 = 0.7$ e considerando $\lambda = 3$ e $\lambda = 4$, respectivamente.

É interessante notar que a aplicação h_λ , com $\lambda \in [0, 4]$, reproduz as diferentes características da dinâmica da aplicação quadrática, como podemos ver no diagrama de bifurcação de h_λ , na Figura 6.14.

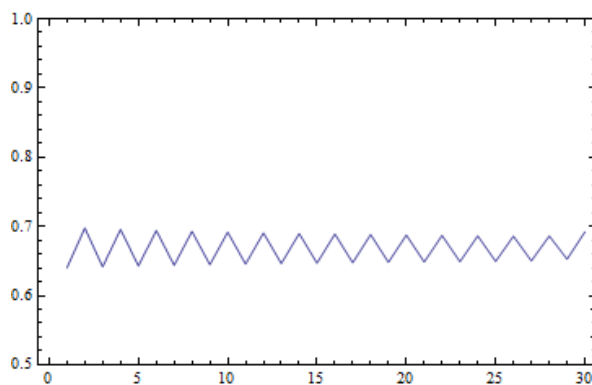


Figura 6.12: Evolução da probabilidade de manter o mesmo estado, y_k , considerando $\lambda = 3$ e a condição inicial $y_0 = 0.7$

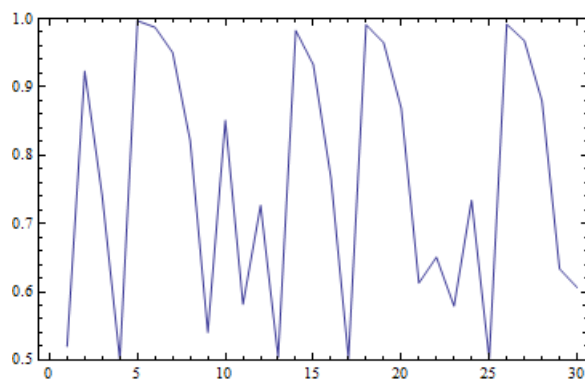


Figura 6.13: Evolução da probabilidade de manter o mesmo estado, y_k , considerando $\lambda = 4$ e a condição inicial $y_0 = 0.7$

Se $\lambda = 2$ (ou $\lambda < 3$), toda a condição inicial pertencente ao intervalo $[1/2, 1[$ é atraída, sob a acção da aplicação h_λ , para o ponto fixo. Se $\lambda = 3.56995\dots$ teremos o ponto de Feigenbaum, que assinala o início do caos. Se $\lambda > 3.56995\dots$ teremos entropia topológica positiva e um número infinito de pontos periódicos repulsivos, [SKSF97].

Estabelecemos a generalização natural do que observámos no próximo resultado:

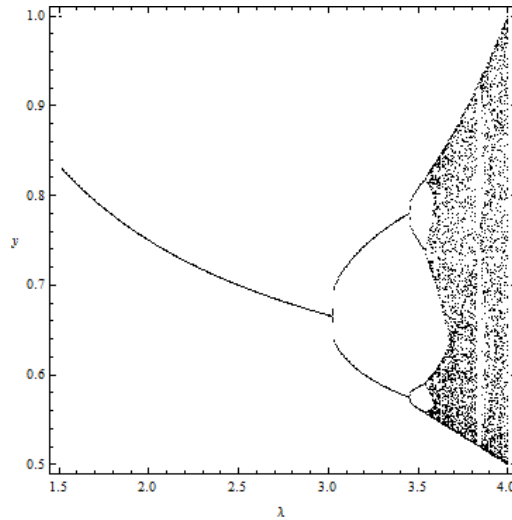


Figura 6.14: Diagrama de bifurcação da aplicação h_λ

Teorema 6.8 *Seja $Y \in \Omega_{2n+2}$, $n \geq 1$, uma matriz estocástica e redutível da forma*

$$Y = \begin{bmatrix} y & 0 & z & 0 & z & \cdots & 0 \\ 0 & y & 0 & z & 0 & \cdots & z \\ z & 0 & y & 0 & z & \cdots & 0 \\ 0 & z & 0 & y & 0 & \cdots & z \\ z & 0 & z & 0 & y & & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots & \cdots \\ 0 & z & 0 & z & 0 & \cdots & y \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

Então

$$Y_k := G_\lambda^k(Y) = \begin{bmatrix} y_k & 0 & z_k & 0 & z_k & \cdots & 0 \\ 0 & y_k & 0 & z_k & 0 & \cdots & z_k \\ z_k & 0 & y_k & 0 & z_k & \cdots & 0 \\ 0 & z_k & 0 & y_k & 0 & \cdots & z_k \\ z_k & 0 & z_k & 0 & y_k & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots & \cdots \\ 0 & z_k & 0 & z_k & 0 & \cdots & y_k \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 1 - \lambda y_k + \lambda y_k^2 + \lambda n z_k^2, \\ z_{k+1} &= (2y_k - 1) \lambda z_k + \lambda (n - 1) z_k^2 \end{aligned} \tag{6.7}$$

e

$$y_0 = y, \quad z_0 = z, \quad y_k + n z_k = 1. \tag{6.8}$$

Em particular $G_\lambda^k(Y) \in \Omega_{2n+2}$ para todo o inteiro positivo k , com $\lambda \in [0, 4]$.

Dem. Se Y é da forma (6.6) e estocástica, então $y = 1 - nz$ e $z \in [0, 1/n]$. Os valores próprios de uma matriz da forma (6.6) são $y + nz$ e $y - z$. Como Y é definida positiva, temos $y > z$ e $G_\lambda(Y_k)$ pertence a Ω_{2n+2} . Além disso, efectuando o cálculo directo de $G_\lambda(Y_k)$, obtemos a referida relação de recorrência para y_{k+1} e a matriz Y_{k+1} também da forma (6.6). Logo $y_{k+1} + nz_{k+1} = 1$. Por indução, o resultado obtém-se para todo o inteiro positivo k . ■

6.2.2 O caso primitivo

Seja $X \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz não negativa e irredutível. A matriz X diz-se primitiva se tem um único valor próprio cujo valor absoluto é máximo. Pode provar-se que, se $X \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz não negativa, então X é primitiva se e só se qualquer entrada de X^k é positiva, para um determinado inteiro positivo k . Pelo Teorema de Perron Frobenius, se X é uma matriz primitiva não negativa, então um dos seus valores próprios é positivo (raiz simples da equação característica de X) e maior, em valor absoluto, que todos os outros valores próprios.

Seja

$$Y = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & y_0 \\ y_0 & x_0 & y_0 \\ y_0 & y_0 & x_0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz é primitiva se e só se $y_0 \neq 0$. Para que Y seja estocástica, temos de impor $0 \leq y_0, x_0 \leq 1$ e $2y_0 + x_0 = 1$. Os valores próprios de Y são 1 e $1 - 3y_0$ (o último tem multiplicidade 2). Neste caso, temos de considerar $y_0 < 1/3$ para assegurar que Y é definida positiva, de modo a que $Y \in \Omega_3$. Calculando $G_\lambda^k(Y)$ explicitamente, verificamos que é sempre da forma

$$G_\lambda^k(Y) = \begin{bmatrix} x_k & y_k & y_k \\ y_k & x_k & y_k \\ y_k & y_k & x_k \end{bmatrix}$$

e, conseqüentemente, temos $x_k = 1 - 2y_k$. Concluimos ainda, por cálculo directo que $y_k = \lambda y_{k-1} (1 - 3y_{k-1})$. Isto significa que, neste caso, a dinâmica das entradas da matriz pode ser dada explicitamente, usando o espectro. Notemos que a aplicação quadrática $f_{\lambda,3}(y) = \lambda y (1 - 3y)$ aplica o intervalo $[0, 1/3]$ nele próprio e reproduz a dinâmica da aplicação logística no intervalo unitário. Concluimos ainda que todas as entradas de $G_\lambda^k(Y)$ são não negativas para todo o $y_0 \in [0, 1/3[$ e todo o k .

Na generalização deste caso, consideramos a família Y de matrizes reais $n \times n$ para a qual as entradas fora da diagonal principal são iguais a y e na diagonal principal são iguais a $x = 1 - (n - 1)y$. Seja $f_{\lambda,n}(y) = \lambda y (1 - ny)$. A aplicação $f_{\lambda,n}(y)$ aplica o intervalo $[0, 1/n]$ nele próprio e reproduz a dinâmica da aplicação logística no intervalo unitário. Assim, temos:

Teorema 6.9 *Seja $Y \in \Omega_n$ uma matriz estocástica e primitiva da forma*

$$Y = \begin{bmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ y & \cdots & y & x \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Então

$$Y_k := G_\lambda^k(Y) = \begin{bmatrix} x_k & y_k & \cdots & y_k \\ y_k & x_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y_k \\ y_k & \cdots & y_k & x_k \end{bmatrix},$$

com

$$x_{k+1} = 1 - (n - 1)y_{k+1}, \quad y_{k+1} = \lambda y_k (1 - ny_k),$$

e

$$y_0 = y, \quad x_0 = x.$$

Em particular, $G_\lambda^k(Y) \in \Omega_n$ para todo o inteiro positivo k , com $\lambda \in [0, 4]$.

Dem. Se Y é da forma (6.9) e pertence a Ω_n , então $x = 1 - (n - 1)y$ e $y \in [0, 1/n]$. Os valores próprios de uma matriz da forma (6.9) são $x + (n - 1)y$ e $x - y$. Como Y é definida positiva, temos $x > y$ e $G_\lambda(Y_k)$ pertence a Ω_n . Calculando explicitamente $G_\lambda(Y_k)$, obtemos a relação de recorrência enunciada para y_{k+1} e uma matriz Y_{k+1} que é também da forma (6.9). Logo $x_{k+1} + (n - 1)y_{k+1} = 1$. Por indução verificamos que o resultado é válido para todo o inteiro positivo k . ■

Exemplo 6.10 Consideremos o caso $n = 5$ e $\lambda = 4$. Na Figura 6.15 observamos a representação das cadeias de Markov obtidas, bem como a representação da dinâmica da própria cadeia, com $y_0 \in [0, 1/5]$ e $x_0 = 1 - 4y_0$.

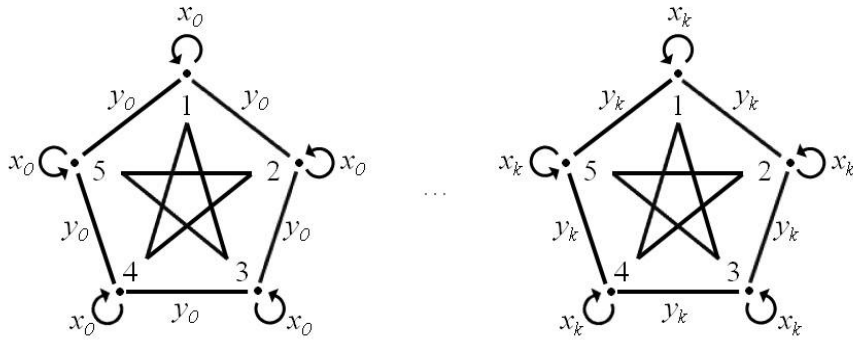


Figura 6.15: Grafos associados à evolução das cadeias de Markov primitivas, para $n = 5$, sendo y_k e x_k as probabilidades de transição na k -ésima iteração

Nas Figuras 6.16 e 6.17 exemplificamos a evolução das iteradas das cadeias de Markov para diferentes condições iniciais. Para cada iterada k , obtemos uma cadeia de Markov para a qual a probabilidade de mudar de estado é igual a y_k e a probabilidade de manter o mesmo estado é dada por $x_k = 1 - (n - 1)y_k$.

Esta família de matrizes estocásticas $Y \in \Omega_n$, caracterizadas pelas duas variáveis x e y

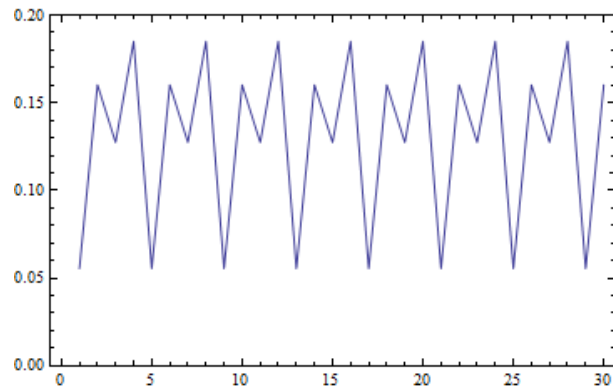


Figura 6.16: Evolução da probabilidade de mudar de estado, y_k , considerando $\lambda = 4$ e a condição inicial $y_0 = 0.1850217\dots$ (período 4)

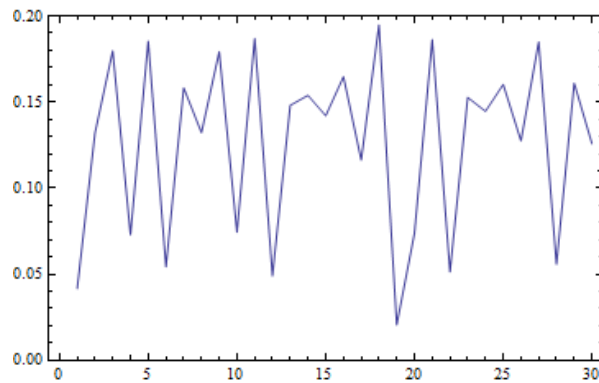


Figura 6.17: Evolução da probabilidade de mudar de estado, y_k , considerando $\lambda = 4$ e a condição inicial $y_0 = 0.1889865\dots$ (não periódica)

associadas à probabilidade de permanecer no mesmo estado e à probabilidade de mudar de estado, respectivamente, é preservada pela aplicação matricial G_λ e a dinâmica é, dadas as entradas da matriz, determinada por uma aplicação unidimensional $f_{\lambda,n}$, onde n é a ordem da matriz. Começando com o parâmetro $\lambda = 0$ e aumentando o seu valor, seguimos a rota para o caos através da duplicação de período, por sucessivas bifurcações. Obtemos assim sucessivas cadeias de Markov: primeiro um ponto fixo, depois o período 2, período 4, e

assim sucessivamente. Como vimos no exemplo, é também possível escolher um parâmetro apropriado, de forma a obter órbitas de cadeias de Markov que são aperiódicas.

6.3 Conclusões

Ao considerarmos certas subálgebras de matrizes estocásticas simétricas, escolhidas pelas suas características e possíveis aplicações, e uma determinada aplicação quadrática, escolhida de forma a que a estocacidade seja preservada, obtemos vários exemplos de sistemas dinâmicos discretos no espaço das cadeias de Markov reversíveis, já que cada uma das matrizes estocásticas caracteriza uma cadeia de Markov.

A análise do comportamento dinâmico destes sistemas nos respectivos subespaços invariantes permite-nos verificar que a dependência do parâmetro da família quadrática é reproduzida no espectro das matrizes estocásticas e que, em certas subclasses, o referido comportamento dinâmico também é obtido nas entradas da matriz. A aplicação matricial reproduz a dinâmica da aplicação logística no intervalo unitário e, assim sendo, verificamos a existência da sensibilidade às condições iniciais que, consoante o parâmetro escolhido, correspondem a cadeias de Markov reversíveis que, pela iteração matricial, são atraídas para um ponto fixo, para um ponto periódico ou para um ponto aperiódico. A coexistência de um número infinito de órbitas periódicas repulsivas é também uma das características do caos, presente nestes sistemas.

Como a dinâmica da aplicação quadrática está amplamente estudada, estamos em condições de estudar e analisar em detalhe o comportamento dinâmico de cadeias de Markov reversíveis, decorrente das matrizes estocásticas simétricas, que evoluem sob a iteração da aplicação quadrática matricial G_λ . Este estudo pode ser feito tendo em conta

a escolha das condições iniciais (correspondente a uma cadeia de Markov inicial) e a dependência do parâmetro $\lambda \in [0, 4]$. Por exemplo, se $\lambda \leq 2$ para toda a condição inicial a órbita correspondente é atraída para o ponto fixo. Se $\lambda \leq 3.56995\dots$ (ponto de Feigenbaum) a ocorrência de pontos periódicos é limitada àqueles cujo período é igual a 2^k , para um certo inteiro positivo k . Se $\lambda > 3.56995\dots$ então existe um número infinito de pontos periódicos repulsivos com períodos condicionados pelo Teorema 2.30, o teorema de Sharkovsky. Este facto tem reflexo directo na dinâmica das matrizes estocásticas e respectiva evolução nas cadeias de Markov.

Bibliografia

- [Art92] Rafael Artzy. Dynamics of quadratic functions in cycle planes. *J. Geom.*, 44(1-2):26–32, 1992.
- [ASY97] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, and James A. Yorke. *Chaos*. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to dynamical systems.
- [BAKS01] A.A. Bogush, Gazizov A.Z., Yu. A. Kurochkin, and V. T. Stosui. On symmetry properties of quaternionic analogs of julia sets. In *Proceedings of 9th Annual Seminar NPCS-2000, Minsk, Belarus*, pages p. 304–309, 2001.
- [BB95] Stephen Bedding and Keith Briggs. Iteration of quaternion maps. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 5(3):877–881, 1995.
- [Bea91] Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions*, volume 132 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Complex analytic dynamical systems.
- [BGS02] Walter Buchanan, Jagannathan Gomatam, and Bonnie Steves. Generalized Mandelbrot sets for meromorphic complex and quaternionic maps. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 12(8):1755–1777, 2002.

- [CG93] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics*. Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Cri03] Tony Crilly. An argand diagram for two by two matrices. *The Mathematical Gazette*, 87(509):209–216, 2003.
- [CRMNB11] C. Correia Ramos, Nuno Martins, and A. Nascimento Baptista. Dynamics on certain sets of stochastic matrices. *Nonlinear Dynamics*, 65(3):301–310, 2011.
- [CRMNB12] C. Correia Ramos, Nuno Martins, and A. Nascimento Baptista. Iteration of quadratic maps on matrix algebras. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, accepted for publication, to appear in 2012.
- [CT07] Jin Cheng and Jian-rong Tan. Generalization of 3d mandelbrot and julia sets. *Journal of Zhejiang University - Science A*, Volume 8, Number 1:134–141, January 2007.
- [Dev86] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc., Menlo Park, CA, 1986.
- [DH82] Adrien Douady and John Hamal Hubbard. Itération des polynômes quadratiques complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 294(3):123–126, 1982.
- [DH85] Adrien Douady and John Hamal Hubbard. On the dynamics of polynomial-like mappings. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 18(2):287–343, 1985.
- [Fal97] Kenneth Falconer. *Techniques in fractal geometry*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.

- [Fat17] P. Fatou. Sur les substitutions rationnelles. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 164:806–808, 1917.
- [Fis05] Paul E. Fishback. Quadratic dynamics in binary number systems. *J. Difference Equ. Appl.*, 11(7):597–603, 2005. American Mathematical Society Special Session on Difference Equations and Discrete Dynamics.
- [GDSM95] Jagannathan Gomatam, John Doyle, Bonnie Steves, and Isobel McFarlane. Generalization of the Mandelbrot set: quaternionic quadratic maps. *Chaos Solitons Fractals*, 5(6):971–986, 1995.
- [Gin02] Terry W. Gintz. Artist's statement cquats—a non-distributive quad algebra for 3d renderings of mandelbrot and julia sets. *Computers & Graphics*, 26(2):367 – 370, 2002.
- [GM80] Igor Gumowski and Christian Mira. *Recurrence and discrete dynamic systems*, volume 809 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.
- [GM99] Jagannathan Gomatam and Isobel McFarlane. Generalisation of the Mandelbrot set to integral functions of quaternions. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 5(1):107–116, 1999.
- [Hig08] Nicholas J. Higham. *Functions of matrices*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2008. Theory and computation.
- [HJ85] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

- [HKS90] John C. Hart, Louis H. Kauffman, and Daniel J. Sandin. Interactive visualization of quaternion julia sets. In *VIS '90: Proceedings of the 1st conference on Visualization '90*, pages 209–218, Los Alamitos, CA, USA, 1990. IEEE Computer Society Press.
- [Hol87] John A. R. Holbrook. Quaternionic Fatou-Julia sets. *Ann. Sci. Math. Québec*, 11(1):79–94, 1987.
- [HSK89] J. C. Hart, D. J. Sandin, and L. H. Kauffman. Ray tracing deterministic 3-d fractals. In *SIGGRAPH '89: Proceedings of the 16th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 289–296, New York, NY, USA, 1989. ACM.
- [IKP01] Olga B. Isaeva, Sergey P. Kuznetsov, and Vladimir I. Ponomarenko. Mandelbrot set in coupled logistic maps and in an electronic experiment. *Phys. Rev. E*, 64(5):055201, Oct 2001.
- [Jul18] G. Julia. Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 8:47–245, 1918.
- [LRdSSR86] J. P. Lampreia, A. Rica da Silva, and J. Sousa Ramos. Subtrees of the unimodal maps tree. *Boll. Un. Mat. Ital. C (6)*, 5(1):159–167 (1987), 1986.
- [LŠRP05] Mitja Lakner, Marjeta Škapin-Rugelj, and Peter Petek. Symbolic dynamics in investigation of quaternionic Julia sets. *Chaos Solitons Fractals*, 24(5):1189–1201, 2005.

- [LY75] Tien Yien Li and James A. Yorke. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, 82(10):985–992, 1975.
- [Man82] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1982. Schriftenreihe für den Referenten. [Series for the Referee].
- [Met94] Wolfgang Metzler. The “mystery” of the quadratic Mandelbrot set. *Amer. J. Phys.*, 62(9):813–814, 1994.
- [MGBC96] Christian Mira, Laura Gardini, Alexandra Barugola, and Jean-Claude Cathala. *Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps*, volume 20 of *World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [Mil06] John Milnor. *Dynamics in one complex variable*, volume 160 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, third edition, 2006.
- [MR05] Étienne Martineau and Dominic Rochon. On a bicomplex distance estimation for the Tetrabrot. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 15(9):3039–3050, 2005.
- [Nak05] Shizuo Nakane. Dynamics of a family of quadratic maps in the quaternions space. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 15(8):2535–2543, 2005.

- [NBCRM10] Alexandra Nascimento Baptista, Carlos Correia Ramos, and Nuno Martins. Difference equations on matrix algebras. In *Discrete dynamics and difference equations - Proceedings of the 12th International Conference on Difference Equations and Applications - Lisbon, Portugal, 23 - 27 July 2007*, pages 181 – 188. World Scientific, 2010.
- [Nor82] Alan Norton. Generation and display of geometric fractals in 3-d. In *SIG-GRAPH '82: Proceedings of the 9th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 61–67, New York, NY, USA, 1982. ACM.
- [Nor89] Alan Norton. Julia sets in the quaternions. *Computers and Graphics*, 13(2):267–278, 1989.
- [RMR07] C. Correia Ramos, N. Martins, and J. Sousa Ramos. Finite dimensional representations of $*$ -algebras arising from a quadratic map. *Chaos Solitons Fractals*, 34(4):1202–1212, 2007.
- [Rob99] Clark Robinson. *Dynamical systems*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 1999. Stability, symbolic dynamics, and chaos.
- [Roc00] Dominic Rochon. A generalized Mandelbrot set for bicomplex numbers. *Fractals*, 8(4):355–368, 2000.
- [Roc03] Dominic Rochon. On a generalized Fatou-Julia theorem. *Fractals*, 11(3):213–219, 2003.

- [Sen90] Peter Senn. The Mandelbrot set for binary numbers. *Amer. J. Phys.*, 58(10):1018, 1990.
- [Ser02] Amanda Katharine Serenevy. Dynamics of polynomial maps of 2×2 real matrices. In *Proceedings of the 16th Summer Conference on General Topology and its Applications (New York)*, volume 26, pages 763–778, 2001/02.
- [Sha95] A. N. Sharkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself. In *Proceedings of the Conference “Thirty Years after Sharkovskii’s Theorem: New Perspectives” (Murcia, 1994)*, volume 5, pages 1263–1273, 1995. Translated from the Russian [Ukrain. Mat. Zh. **16** (1964), no. 1, 61–71; MR0159905 (28 #3121)] by J. Tolosa.
- [Sin78] David Singer. Stable orbits and bifurcation of maps of the interval. *SIAM J. Appl. Math.*, 35(2):260–267, 1978.
- [SKSF97] A. N. Sharkovsky, S. F. Kolyada, A. G. Sivak, and V. V. Fedorenko. *Dynamics of one-dimensional maps*, volume 407 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997. Translated from the 1989 Russian original by Sivak, P. Malyshev and D. Malyshev and revised by the authors.
- [SW09a] Y. Y. Sun and X. Y. Wang. Noise-perturbed quaternionic Mandelbrot sets. *Int. J. Comput. Math.*, 86(12):2008–2028, 2009.
- [SW09b] Yuan-Yuan Sun and Xing-Yuan Wang. Quaternion M set with none zero critical points. *Fractals*, 17(4):427–439, 2009.

- [Ver45] P. F. Verhulst. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux mémoires de l'Academie Royale des Science et Belles-Lettres de Bruxelles*, 18:1–41, 1845.
- [WS07] Xing-Yuan Wang and Yuan-Yuan Sun. The general quaternionic M-J sets on the mapping $z \leftarrow z^\alpha + c$ ($\alpha \in \mathbf{N}$). *Comput. Math. Appl.*, 53(11):1718–1732, 2007.