UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Construções Geométricas

Rute Isabel Pereira Pardal

Orientação: Professor Doutor Pedro Macias Marques

Mestrado em Matemática para o Ensino

Dissertação

Évora, 2014

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Construções Geométricas

Rute Isabel Pereira Pardal

Orientação: Professor Doutor Pedro Macias Marques

Mestrado em Matemática para o Ensino

Dissertação

Évora, 2014

Dedicatória

Para o meu marido e para o meu filho – Sem o seu apoio e compreensão este trabalho podia estar ainda por terminar.

Resumo

O presente trabalho incide num estudo sobre construções geométricas com régua e compasso. A régua utilizada é não graduada possibilitando apenas a construção de rectas que passem por dois pontos dados e o compasso não transporta medidas. São exploradas construções recorrendo a ambos os instrumentos ou a exclusivamente um deles. Em cada um dos casos, usamos ferramentas e conceitos da álgebra, para estudar o conjunto de pontos construtíveis.

Palavras-chave: Construções Geométricas, régua, compasso.

Abstract

Geometric Constructions

In this work we study geometric constructions with ruler and compass. The ruler is not marked and is therefore used only to construct straight lines through two given points, and the compass does not transfer distances. We explore constructions that make use of both instruments, as well as constructions made with only one of them. In each case, we use tools from algebra to study the set of constructible points.

Key words: geometric constructions, ruler, compass

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, o professor Pedro Macias Marques, pelo incentivo e ajuda prestada na realização deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Maria e Joaquim, e ao meu irmão Rui, pelo apoio de uma vida e particularmente por terem tornado possível a concretização deste trabalho ajudando-me a dispor de tempo para o realizar.

Índice

Introdução

A geometria surgiu do interesse do homem pela forma e medida das coisas e desenvolveu-se no Egipto e na Babilónia pela necessidade da medição de terras.

Esta ciência está impreterivelmente associada ao nome de Euclides de Alexandria que, por volta do século III a. C., a colocou assente em definições, axiomas e postulados, e que partindo de noções puramente abstractas e perfeitamente definidas formulou com elas teoremas rigorosamente demonstrados. A geometria de Euclides foi publicada na obra *Os Elementos*, vista por muitos como o grande compêndio da geometria e o primeiro modelo de perfeita construção matemática (Pereira, 1999; Amorim, 2000).

A geometria desempenha um papel importante na compreensão e resolução de questões relacionadas não só com a matemática mas também com outras áreas de conhecimento, nomeadamente na astronomia, arquitectura, no desenvolvimento de softwares, entre outras. Facilita também a compreensão da matemática pela sua aplicabilidade na resolução de problemas práticos do quotidiano. Consideramos que estes factos sejam motivadores, entre outros, para a aprendizagem da matemática.

No que diz respeito ao contexto escolar, a geometria permite desenvolver competências que servem de base a várias disciplinas, tais como a capacidade de resolução de problemas, de análise, visualização, argumentação, preceção espacial, criatividade, construção, classificação, dedução de propriedades e prova de conjecturas. Nos primeiros anos de escolaridade os alunos fá-lo-ão de um modo experimental com recurso ao desenho e a medições, em anos mais avançados começam a deduzir uma propriedade a partir de outras e a provar conjecturas. Assim sendo, esta é uma área propícia à realização de actividades que envolvem aspectos essenciais de natureza matemática, como fazer conjecturas e validá-las. Por essa razão, consideramos de extrema importância a sua abordagem nos vários níveis de ensino.

A realização de construções geométricas permite desenvolver nos alunos a criatividade e o gosto por investigar. Ao ser-lhes pedido para construirem uma figura geométrica eles terão de definir estratégias para a concretizarem. Para além disso, ao realizar uma construção geométrica, o aluno terá de conhecer, perceber e implementar os conceitos da geometria envolvidos. Mobilizar os conhecimentos é mais exigente do que saber enunciá-los, pois é preciso conhece-los suficientemente bem para os pôr em prática. Posteriormente, para explicar a construção realizada, terá de formular argumentos válidos e explicá-los em linguagem corrente, desenvolvendo desta forma a comunicação e a argumentação.

O presente trabalho incide num estudo das construções geométricas que se podem executar usando o compasso e a régua. No entanto, não vamos trabalhar com as características usuais destes instrumentos. Na verdade, utilizamos estes instrumentos de forma condicionada, isto é, com a particularidade de não conservarem nem medirem comprimentos ou distâncias. Vamos imaginar que o compasso que usamos está “ sem memória” e quando o levantamos do papel não conserva a abertura, portanto não permite transportar a medida do raio. Por seu lado a régua não é graduada, logo não permite fazer medições, apenas serve para traçar rectas que passem por dois pontos dados. O programa de geometria dinâmica Cabri Geometre II foi o escolhido para a realização destas construções geométricas.

Com a realização deste estudo, explorámos os pontos possíveis de construir utilizando os instrumentos de medida, a régua e o compasso, com as particularidades já referidas, ou exclusivamente um deles.

No primeiro capítulo, apresentamos a descrição de construções de figuras também presentes nos Elementos de Euclides, embora nem sempre feitas da mesma forma. Algumas delas serão utilizadas na demonstração de resultados ao longo dos vários capítulos, outras foram descritas apenas por se tratar de construções interessantes.

No segundo capítulo, partimos da elaboração de construções geométricas, no plano cartesiano, com a régua e o compasso, sendo a régua apenas usada para traçar a recta que passa por dois pontos dados, e o compasso unicamente para traçar uma circunferência de centro dado e que passa por um determinado ponto, também ele dado. Aos pontos que se podem construir desta forma vamos chamar pontos-rc e às coordenadas destes pontos no plano cartesiano vamos chamar números-rc. Ainda neste capítulo, demonstramos que os racionais são números-rc, assim como todas as raízes, de índice potência de dois, de qualquer número-rc; os números resultantes da soma, diferença, produto e quociente entre os números-rc são também possíveis de construir com a régua e o compasso. Para provar estes resultados, recorremos a conceitos e resultados da álgebra.

No terceiro capítulo, partimos da elaboração de construções geométricas, no plano cartesiano, feitas somente com o compasso, a partir de um conjunto inicial de pontos dados. O uso da régua não é permitido e o uso do compasso restringe-se apenas à construção de circunferências centradas em pontos já construídos e passando por pontos também já construídos. Neste capítulo demonstramos a possibilidade de construção dos mesmos pontos obtidos com a régua e o compasso no capítulo anterior, chegando ao resultado conhecido como o *Teorema de Mohr-Mascheroni*.

No quarto capítulo, partimos da elaboração de construções geométricas, no plano cartesiano, cuja realização se restringe ao uso exclusivo da régua. Esta será utilizada apenas para traçar a recta que passa por dois pontos pertencentes a um conjunto de pontos inicialmente dados, ou que passa por pontos já construídos. Aos pontos assim construídos chamaremos pontos-régua e às coordenadas destes pontos no plano cartesiano chamaremos números-régua. Neste capítulo demonstramos que os números-régua são os racionais.

Notação e Convenções

Neste trabalho usaremos letras maiúsculas para designar pontos (A: Ponto A) e letras minúsculas para designar rectas e circunferências (s: Recta s; c:Circunferência). Utilizaremos para os diversos objectos a seguinte notação:

$A - B - C$: O ponto B está entre os pontos A e C.

$\overline{AB}$: Segmento de recta entre A e B; distância entre A e B; Comprimento do segmento de recta compreendido entre A e B.

$\overrightarrow{AB}$: Semi-recta com vértice em A que contém B.

AB: Recta que contém A e B.

A_B : Circunferência com centro em A que contém B.

Obs.: Nas representações gráficas, por limitação do software, esta notação passa a AB.

A_{BC} : Circunferência com centro em A e com medida de raio congruente ao segmento de recta $\overline{BC}$.

$AB \parallel CD$: Recta AB paralela à recta CD.

$AB \perp CD$: Recta AB perpendicular à recta CD.

$\square ABCD$: Quadrilátero com os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

ΔABC: Triângulo com os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

ABC: Ângulo com vértice em B.

Quando dizemos que os triângulos ΔABC e ΔDEF são semelhantes estamos a referir-nos à correspondência ordenada dos pontos que denotam os vértices: $A \rightarrow D$, $B \rightarrow E$ e $C \rightarrow F$.

Aplicaremos os seguintes critérios de semelhança de triângulos:

Critério AA: Dois triângulos são semelhantes se e só se têm dois ângulos geometricamente iguais.

Critério LAL: Dois triângulos são semelhantes se e só se têm dois lados, correspondentes, proporcionais; e são geometricamente iguais os ângulos formados por esses lados.

Critério LLL: Dois triângulos são semelhantes se e só se têm os três lados, correspondentes, proporcionais.

1 Construções Geométricas *Euclideanas*

Neste capítulo serão descritas construções de figuras que são desafios clássicos da geometria. As mesmas figuras foram construídas por Euclides embora de forma diferente daquela que apresentamos. Algumas delas serão utilizadas em demonstrações de resultados de teoremas, proposições e lemas dos capítulos subsequentes. Com o intuito de clarificar os resultados demonstrados por Euclides, para além da descrição detalhada do processo de construção, todas as construções apresentadas serão acompanhadas da imagem gráfica do processo de construção.

Construção 1.1 (Proposição 2 do livro I dos Elementos de Euclides): Dado três pontos A, B e C construir um ponto F tal que $\overline{AF} = \overline{BC}$.

Descrição da construção:

Sejam A, B e C três pontos. Inicie-se a construção traçando o segmento de recta $\overline{AB}$. Seguidamente, as circunferência A_B e B_A. Da intersecção destas circunferências resultam dois novos pontos, tome-se um deles e denomine-se por D. Construa-se a circunferência B_c e a semi-recta $\overrightarrow{DB}$. A intersecção de $\overrightarrow{DB}$ com B_c dará origem a dois novos pontos, tome-se um deles e designe-se por E esse ponto. Construa-se D_E e $\overrightarrow{DA}$. A intersecção de $\overrightarrow{DA}$ com D_E dará origem a um novo ponto, designe-se por F esse ponto.

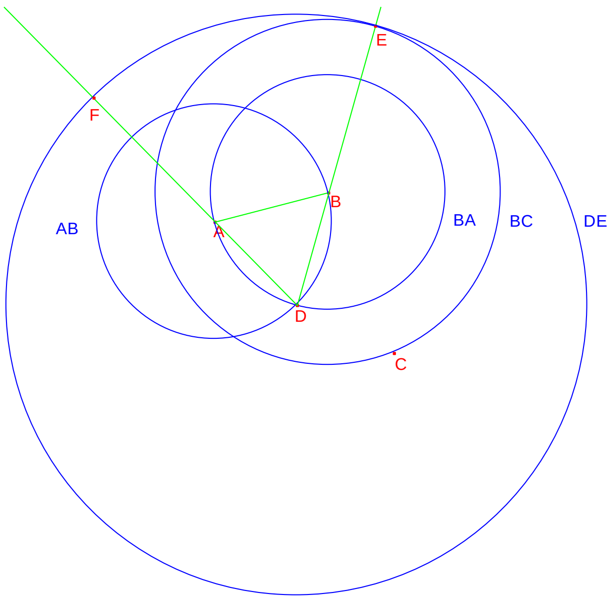

Figura 1: Construção 1.1

Vejamos de seguida que a distância de entre A e F é igual à distância entre B e C:

O comprimento do segmento de recta $\overline{AD}$ é igual ao comprimento do segmento de recta $\overline{DB}$, pois D pertence à mediatriz de $\overline{AB}$. O comprimento do segmento de recta $\overline{DF}$ é igual ao comprimento do segmento de recta $\overline{DE}$, pois são ambos raios da mesma circunferência (D_E). O ponto E pertence a B_C, logo o comprimento do segmento de recta $\overline{BE}$ é igual ao comprimento do segmento de recta $\overline{BC}$.

Assim, como $\overline{DA} = \overline{DB}$ e $\overline{DF} = \overline{DE}$ então $\overline{AF} = \overline{BE}$, dado que D-A-F e D-B-E. Portanto, pode concluir-se que $\overline{AF} = \overline{BE} = \overline{BC}$.

<u>Construção 1.2 (Proposição 11 do livro IV dos Elementos de Euclides)</u>:
Construção de um pentágono regular.

Descrição da construção:

Sejam A e B dois pontos e A_B uma circunferência de centro em A que contém B. Inicie-se a construção traçando a semi-recta $\overrightarrow{BA}$. A intersecção de A_B com $\overrightarrow{BA}$ dará origem a um novo ponto, designemo-lo F. Assim, $\overline{FB}$ será um diâmetro de A_B. Construa-se as circunferências B_F e F_B. Da intersecção destas resultam dois pontos, aos quais chamamos L e K. Construa-se a recta que contém L e K e designe-se por m (mediatriz de $\overline{FB}$). A intersecção de m e A_B dará origem a dois novos pontos, tome-se um deles e denomine-se por C. Construa-se a circunferência C_A e note-se que a circunferência A_C coincide com a circunferência A_B. Da intersecção de A_C e C_A resultam dois pontos, designemo-los por O e P. Construa-se a recta que contém O e P e designe-se por m' (mediatriz de $\overline{AC}$). A intersecção de $\overline{AC}$ e m' dará origem a um novo ponto, designemo-lo por D. Construa-se a circunferência D_B. A intersecção de D_B com m dará origem a dois novos pontos, tome-se um deles e designe-se por E.

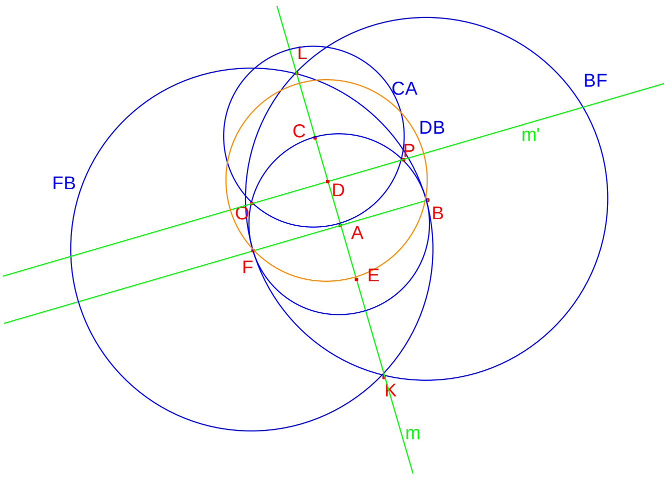

Figura 2: Construção 1.2 (parte 1 de 3)

Note-se que na representação gráfica que se segue omitiu-se parte desta construção de modo a tornar mais perceptível a ilustração.

Construa-se a circunferência B_E. A intersecção de B_E com A_B dará origem a dois novos pontos, designe-se por G e J esses pontos. Pretende-se que $\overline{GB}$ e $\overline{JB}$ sejam dois dos lados do pentágono regular. Construa-se a circunferência G_B, a sua intersecção com A_B dará origem a um novo ponto, designe-se por H esse ponto. Construa-se a circunferência H_G, a sua intersecção com A_B dará origem a um novo ponto, designe-se por I esse ponto. Construindo os segmentos de recta $\overline{GH}$, $\overline{HI}$ e $\overline{IJ}$ obtém-se um pentágono.

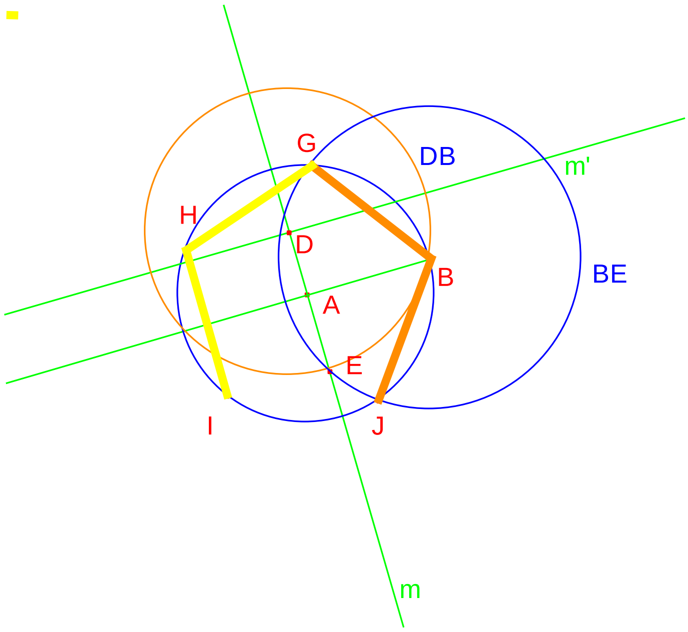

Figura 3: Construção 1.2 (parte 2 de 3)

Por construção podemos afirmar que $\overline{JB} = \overline{GB} = \overline{GH} = \overline{HI}$. Vejamos de seguida a justificação:

A intersecção da circunferência B_E com A_B deu origem aos vértices G e J, assim pode-se concluir que os lados do pentágono $\overline{BG}$ e $\overline{BJ}$ têm o mesmo comprimento. Analogamente obtemos as igualdades $\overline{GB} = \overline{GH} = \overline{HI}$.

Para provar que se trata de um pentágono regular ter-se-á de provar que o lado do pentágono correspondente ao segmento de recta $\overline{IJ}$ é igual a todos os outros já construídos.

Vejamos então qual o comprimento do segmento de recta $\overline{IJ}$:

Tome-se, sem perda de generalidade, o raio da circunferência A_B igual a 1.

$\overline{AB} = 1$ (raio da circunferência A_B)

$\overline{AC} = 1$ (raio da circunferência A_B)

$\overline{AD} = \frac{1}{2}$ (D resulta da intersecção de *m e m'*)

Determine-se o comprimento do lado do pentágono inscrito na circunferência de raio 1:

Seja $S_n = 2\sin\left(\frac{180}{n}\right)^{\circ}$, o comprimento do lado do polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de raio 1 (ver teorema da pág. 17, Martin, 1997).

Assim, $S_5 = 2\sin\left(\frac{180}{5}\right)^{\circ} = 2\sin(36^{\circ}) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

Determine-se o comprimento do lado $\overline{BG}$ sabendo que $\overline{BG} = \overline{BE}$, pois ambos são raios da mesma circunferência. Para tal tomemos os triângulos rectângulos ΔADB e ΔAEB.

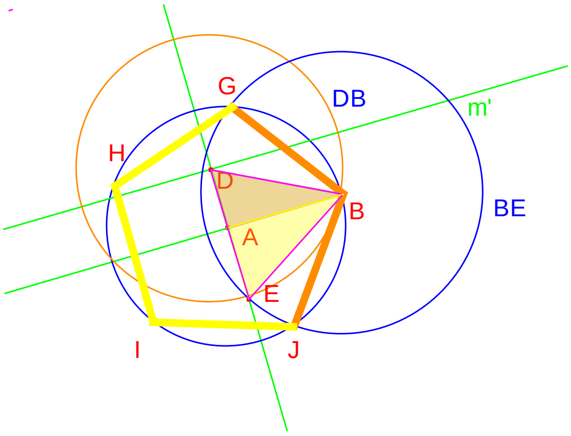

Figura 4: Construção 1.2 (parte 3 de 3)

Em primeiro lugar temos

$$\left(\overline{DB}\right)^2 = \left(\overline{DA}\right)^2 + \left(\overline{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2.$$

Portanto,

$$\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo,

$$\overline{AE} = \overline{DE} - \overline{AD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Como

$$\left(\overline{BE}\right)^2 = \left(\overline{AE}\right)^2 + \left(\overline{AB}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{BE} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

Então, pode-se concluir que $\overline{BE} = \overline{BG} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Os lados do pentágono $\overline{GH}$ e $\overline{HI}$ foram gerados pela intersecção de circunferências de raio $\overline{BG}$ com a circunferência A_B, portanto pode-se garantir que estes também medem $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ de comprimento.

Os lados de um pentágono regular inscrito numa circunferência correspondem, respectivamente, a um dos lados dos cinco triângulos isósceles cujo ângulo ao centro tem de amplitude 72º. Provámos que quatro desses triângulos são geometricamente iguais, assim sendo, o ângulo ao centro do triângulo que tem lado $\overline{IJ}$ também terá de amplitude 72º e portanto esse lado terá de medir $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

<u>Construção 1.3 (Proposição 46 do livro I dos Elementos de Euclides)</u>:: Dado o segmento de recta $\overline{AB}$, construir os pontos E e F tal que $\square ABEF$ seja um quadrado.

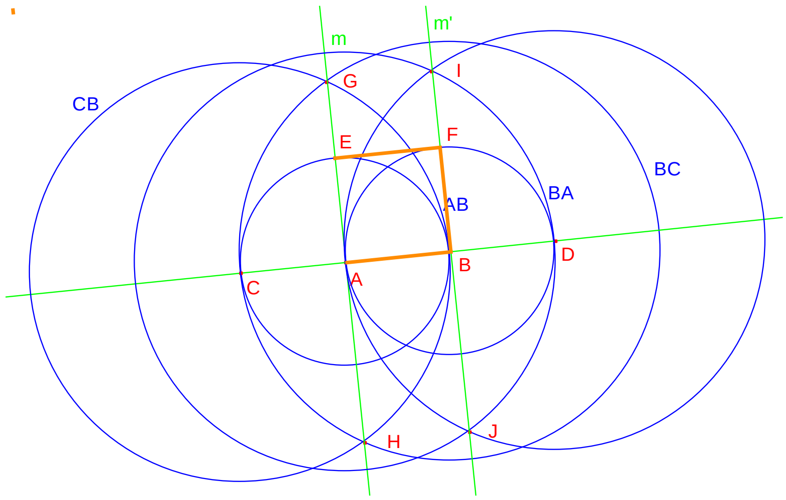

Figura 5: Construção 1 3

Descrição da construção:

Seja $\overline{AB}$ o segmento de recta entre A e B. Construa-se a circunferência A_B e a semi-recta $\overrightarrow{BA}$. A intersecção de $\overrightarrow{BA}$ com A_B dará origem a um novo ponto, designe-se por C esse ponto. Construa-se as circunferências C_B e B_C. Da intersecção destas resultam dois novos pontos, designe-se por G e H esses pontos. Construa-se a recta que contém G e H e designe-se por m (mediatriz de $\overline{CB}$). A intersecção de m com A_B dará origem a dois novos pontos, tome-se um deles e designe-se por E. Construa-se a circunferência B_A e a semi-recta $\overrightarrow{AB}$. A intersecção de $\overrightarrow{AB}$ com B_A dará origem a um novo ponto, designe-se por D esse ponto. Construa-se as circunferências D_A e A_D. Da intersecção destas resultam dois novos pontos, designe-se por I e J esses pontos. Construa-se a recta que contém I e J e designe-se por m' (mediatriz de $\overline{AD}$). A intersecção de m' com B_A dará origem a dois novos pontos, tome-se o ponto mais próximo de E e designe-se por F.

Teremos de justificar que $\square ABEF$ se trata de um quadrado, vejamos:

O segmento de recta $\overline{AB}$ é raio das circunferências A_B e B_A, também $\overline{AE}$ e $\overline{FB}$ são raios dessas circunferências, pois os pontos E e F foram obtidos pela intersecção das referidas circunferências com as mediatrizes dos diâmetros $\overline{CB}$ e $\overline{AD}$, respectivamente. Os segmentos de recta $\overline{AE}$ e $\overline{FB}$ são perpendiculares a $\overline{AB}$, pois E e F estão contidos nas mediatrizes m e m'. Assim, podemos concluir que $\overline{AB} = \overline{FB} = \overline{AE}$.

Se construirmos a diagonal $\overline{AF}$ obtemos os triângulos ΔABF e ΔAFE que terão dois lados e um ângulo iguais, logo pelo critério AA podemos concluir também que $\overline{EF} = \overline{AE}$ e $\overline{EF} \perp \overline{AE}$.

Se construirmos a diagonal $\overline{EB}$ obtemos os triângulos ΔBFE e ΔBAE que terão dois lados e um ângulo iguais, logo pelo critério AA podemos concluir também que $\overline{EF} = \overline{FB}$ e $\overline{EF} \perp \overline{FB}$.

Em suma, se $\overline{AB} \perp \overline{FB} \perp \overline{EF} \perp \overline{AE}$ e $\overline{AB} = \overline{FB} = \overline{EF} = \overline{AE}$ podemos concluir que $\square ABEF$ é um quadrado.

<u>Construção 1.4 (Proposição 5 do livro IV dos Elementos de Euclides)</u>: Num triângulo dado circunscrever um círculo.

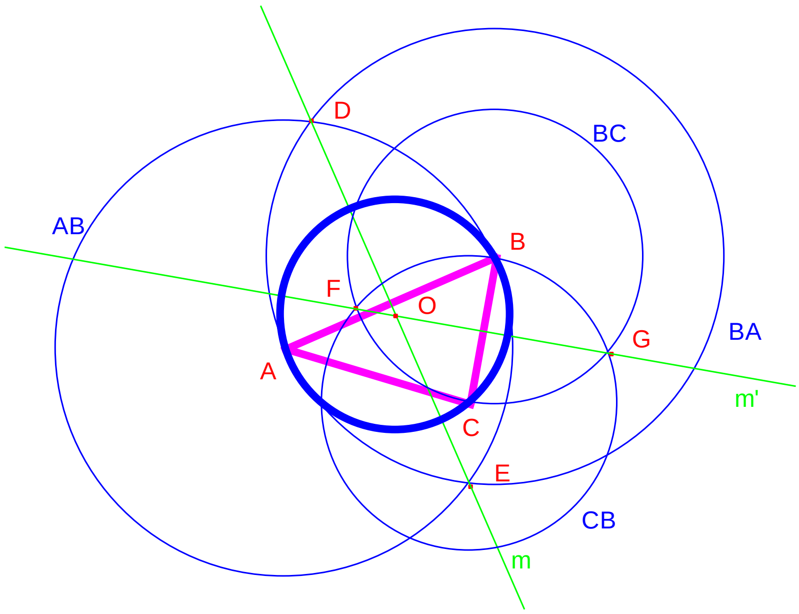

Figura 6: Construção 1.4

Descrição da construção:

Seja ΔABC o triângulo de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$. Construa-se as circunferências A_B e B_A. A intersecção das circunferências A_B e B_A dará origem a dois novos pontos, designe-se por D e E esses pontos. Construa-se a recta que contém D e E e designe-se por m (mediatriz de $\overline{AB}$). Construa-se as circunferências B_C e C_B. A intersecção das circunferências B_C e C_B dará origem a dois novos pontos, designe-se por F e G esses pontos. Construa-se a recta m' que contém F e G (mediatriz de $\overline{BC}$). A intersecção das rectas m e m' dará origem a um novo ponto, designe-se por O esse ponto. Por fim construa-se a circunferência O_A.

Vejamos que a circunferência O_A circunscreve o triângulo ΔABC:

Na recta m encontram-se todos os pontos equidistantes de A e B, pois m é a mediatriz de $\overline{AB}$.

Na recta m' encontram-se todos os pontos equidistantes de B e C, pois m' é a mediatriz de $\overline{BC}$.

Na intersecção de m e m' (ponto O) encontra-se o ponto equidistante de A, B e C, vértices do triângulo ΔABC. Assim, podemos concluir que a circunferência O_A contém os pontos B e C e que circunscreve o triângulo dado.

<u>Construção 1.5 (Proposição 2 do livro I dos Elementos de Euclides)</u>: Num triângulo dado inscrever um círculo.

Descrição da construção:

Seja ΔABC o triângulo com os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$. Construa-se a circunferência C_A e a semi-recta $\overrightarrow{CB}$. A intersecção da circunferência C_A com $\overrightarrow{CB}$ dará origem a um novo ponto, designe-se por Z esse ponto. Construa-se o segmento de recta $\overline{AZ}$ e as circunferências A_Z e Z_A. A intersecção das circunferências A_Z e Z_A dará origem a dois novos pontos, designe-se por V e X esses pontos. Construa-se a recta que contém V e X e designe-se por m'' (mediatriz de $\overline{AZ}$). Construa-se a circunferência A_B e a semi-recta $\overrightarrow{AC}$. A intersecção da circunferência A_B com $\overrightarrow{AC}$ dará origem a um novo ponto, designe-se por D esse ponto. Construa-se o segmento de recta $\overline{BD}$ e as circunferências D_B e B_D. A intersecção das circunferências D_B e B_D dará origem a dois novos pontos, designe-se por F e E esses pontos. Construa-se a recta que contém F e E e designe-se por m (mediatriz de $\overline{BD}$).

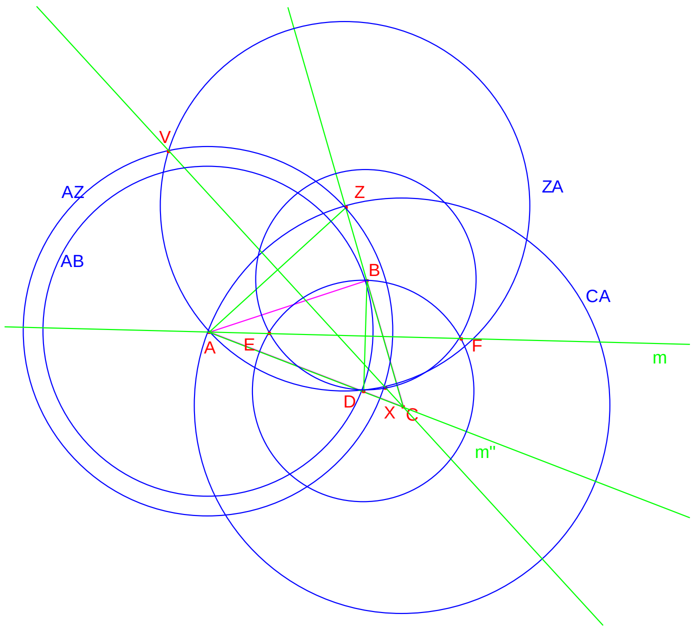

Figura 7: Construção 1.5 (parte 1 de 3)

Construa-se a circunferência B_A e a semi-recta $\overrightarrow{BC}$. A intersecção da circunferência B_A com $\overrightarrow{BC}$ dará origem a um novo ponto, designe-se por G esse ponto. Construa-se o segmento de recta $\overline{AG}$ e as circunferências A_G e G_A. A intersecção das circunferências A_G e G_A dará origem a dois novos pontos, designe-se por I e H esses pontos. Construa-se a recta que contém I e H e designe-se por m' (mediatriz de $\overline{AG}$). Da intersecção de m, m' e m'' resulta um novo ponto, designe-se por O esse ponto.

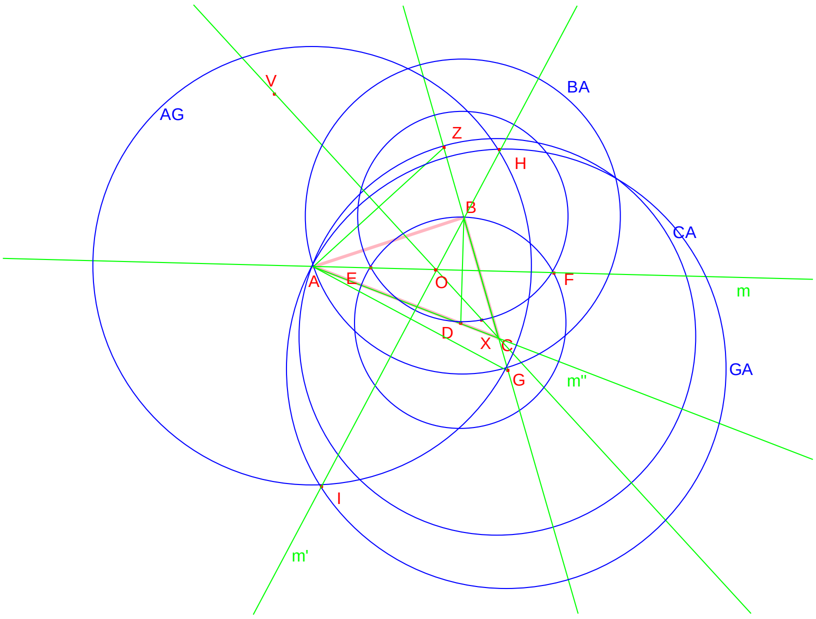

Figura 8: Construção 1.5 (parte 2 de 3)

Note-se que na representação gráfica que se segue omitiu-se parte desta construção de modo a tornar mais perceptível a ilustração gráfica.

Construa-se a recta AC e considere-se um ponto J sobre essa recta. Construa-se a circunferência O_J. A intersecção de O_J com AC dará origem a um novo ponto, designe-se por K esse ponto. Construa-se as circunferências J_K e K_J. Da intersecção destas circunferências resultam dois novos pontos, considere-se um deles e denomine-se por M. Construa-se o segmento de recta $\overline{OM}$. Este segmento de recta está contido na mediatriz do segmento de recta que contém J e K. A intersecção do segmento de recta $\overline{OM}$ com o triângulo ΔABC dará origem a um novo ponto, designe-se por N esse ponto. Construa-se a recta BC e considere-se um ponto P sobre essa recta. Construa-se a circunferência O_P. A intersecção de O_P com BC dará origem a um novo ponto, designe-se por Q esse ponto. Construa-se as circunferências P_Q e Q_P. A intersecção destas circunferências dará origem a dois novos pontos, considere-se um deles e designe-se por R. Construa-se o segmento de recta $\overline{OR}$, este segmento de recta está contido na mediatriz do segmento de recta que contém P e Q. A intersecção do segmento de recta $\overline{OR}$ com o triângulo ΔABC dará origem a um novo ponto, designe-se por W esse ponto. Construa-se a recta AB e considere-se um ponto S sobre essa recta. Construa-se a circunferência O_S. A intersecção de O_S com AB dará origem a um novo ponto, designe-se por T esse ponto. Construa-se as circunferências T_S e S_T. A intersecção destas circunferências dará origem a dois novos pontos, considere-se um deles e designe-se por U. Construa-se o segmento de recta $\overline{OU}$, este segmento de recta está contido na mediatriz do segmento de recta que contém T e S. A intersecção do segmento de recta $\overline{OU}$ com o triângulo ΔABC dará origem a um novo ponto, designe-se por Y esse ponto. Por fim construa-se a circunferência O_N.

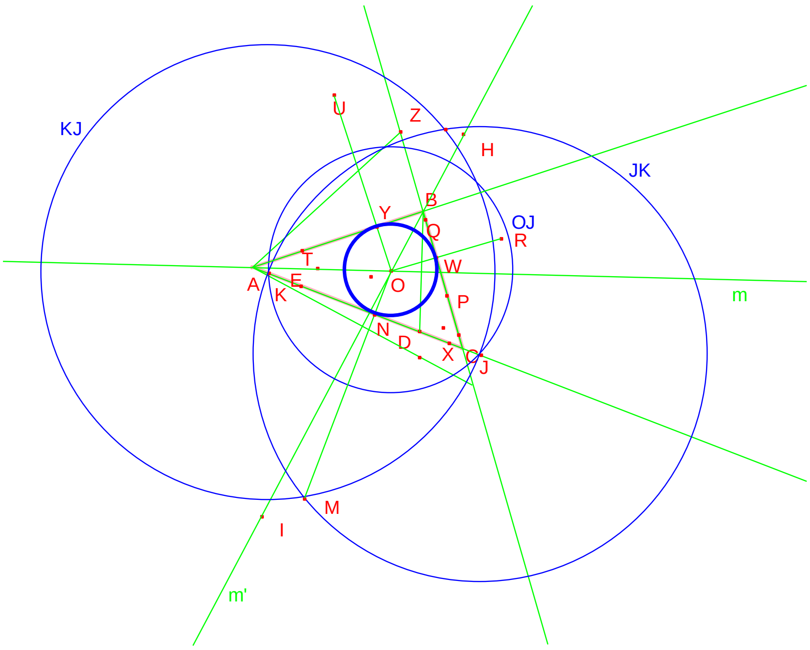

Figura 9: Construção 1.5 (parte 3 de 3)

Vejamos que a circunferência O_N se encontra inscrita no triângulo ΔABC:

As rectas m, m' e m'' bissectam os ângulos BAC, ABC e ACB, respectivamente (Proposição 9 do livro I de Euclides). Desta forma construiu-se o ponto O que será o centro da circunferência que se quer inscrever.

Os segmentos de recta $\overline{OM}, \overline{OR}$ e $\overline{OU}$ são perpendiculares aos lados do triângulo dado, pois estão contidos nas mediatrizes dos segmentos de recta que contêm os pontos J e K, P e Q e T e S, respectivamente.

O triângulo ΔOAY é semelhante a ΔOAN, pelo critério LAL, assim como os triângulos ΔOBN e ΔOBW e os triângulos ΔOCW e ΔOCY.

Desta forma, pode-se concluir que os segmentos de recta $\overline{OM}, \overline{OR}$ e $\overline{OU}$ são iguais e assim prova-se que a circunferência O_N está inscrita no triângulo dado.

2 A Régua e o Compasso

A régua e o compasso são instrumentos de medida conhecidos e usados vulgarmente em diversas situações do quotidiano, mas a régua que conhecemos é graduada e o compasso permite traçar circunferências com o comprimento de raio que se pretenda. Neste capítulo iremos usar um compasso e uma régua com características diferentes, digamos que o compasso está “sem memória” e que a régua não é graduada, portanto não permitem a conservação de comprimentos ou distâncias.

A régua apenas poderá ser utilizada para traçar rectas, passando por pontos dados, e o compasso só poderá traçar circunferências com centro num ponto dado e que passe por um ponto também já construído.

Ao longo deste capítulo iremos demonstrar diversos resultados com o intuito de averiguar quais os pontos possíveis de construir, geometricamente, usando estes instrumentos com características tão peculiares. Tal como no capítulo anterior, todas as demonstrações apresentadas serão acompanhadas da imagem gráfica.

Utilizaremos o plano cartesiano para representar os pontos construídos possibilitando desta forma a associação da geometria à álgebra.

Como é conhecido, o plano cartesiano é obtido fixando duas rectas perpendiculares no plano euclideano. Ao ponto de intersecção destas rectas chamamos origem, a uma das rectas chamamos eixo das abcissas (ou eixo dos xx) e à outra eixo das ordenadas (ou eixo dos yy). Atribuímos a cada um dos eixos uma métrica e uma orientação, por meio de uma bijecção com o conjunto dos números reais, de tal modo que a origem corresponde ao número zero. É habitual representar o eixo das abcissas na horizontal com direcção positiva para a direita e o eixo das ordenadas na vertical com direcção positiva para cima, e é isso que faremos nas ilustrações que se seguem.

Os pontos representados no plano cartesiano podem ser escritos sob a forma de pares ordenados procedendo-se da seguinte forma: consideramos um ponto P do plano e traçamos a recta perpendicular ao eixo das abcissas que passa por P, obtendo a sua primeira coordenada, x, como o valor do eixo no ponto de intersecção; traçamos também a perpendicular ao eixo das ordenadas que passa por P e obtemos analogamente a segunda coordenada, y. Desta forma, escrevemos o ponto P sob a forma de par ordenado (x,y).

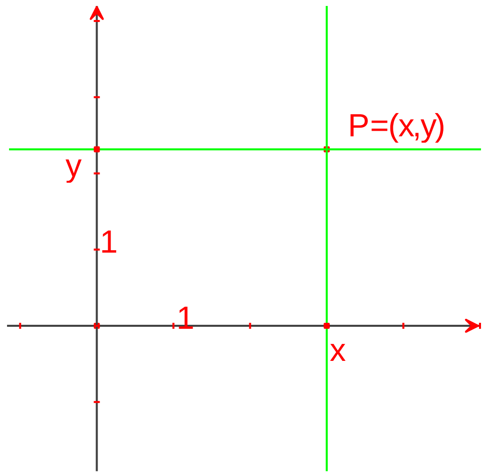

Figura 10: Plano cartesiano

Comecemos o capítulo denominando os pontos, rectas, circunferências e números obtidos por estes instrumentos, por ponto-régua-e-compasso, recta-régua-e-compasso, circunferência-régua-e-compasso e número-régua-e-compasso, respectivamente, e formalizando estas denominações utilizando definições.

Iremos tomar dois pontos-régua-e-compasso de partida $P0$ e $P1$, e usar o plano cartesianos para os representar geometricamente sob a forma de pares ordenados: $P0=(0,0)$ e $P1=(1,0)$.

<u>Definição 2.1:</u> Sejam $P0=(0,0)$ e $P1=(1,0)$ dois pontos-rc do plano cartesiano. Um ponto do plano é um **ponto-régua-e-compasso (ponto-rc)** se for o último de uma sequência finita $P0, P1, P2, P3, ..., Pn$ em que cada ponto da sequência é obtido de uma das três formas seguintes:

(i) Como intersecção de uma recta que passa por dois pontos anteriores da sequência com uma circunferência passando por um ponto anterior da sequência e com centro num ponto anterior da sequência.

Exemplo: O ponto $P2$ resulta da intersecção da recta $P0P1$ com a circunferência $P0_{P1}$.

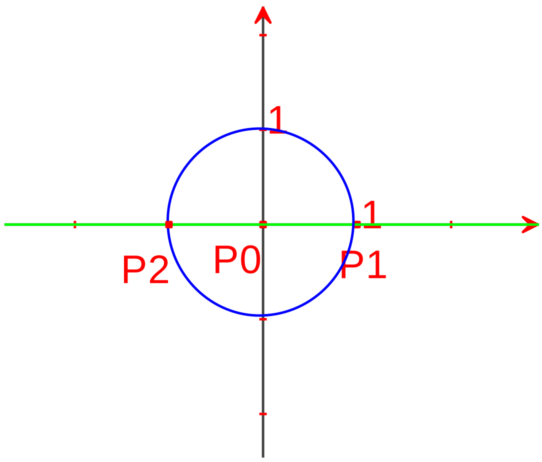

Figura 11: Definição 2.1 (i)

(ii) Como intersecção de duas circunferências, cada uma das quais passando por um ponto anterior da sequência e com centro num ponto anterior da sequência.

Exemplo: Os pontos $P3$ e $P4$ resultam da intersecção das circunferências $P2_{P1}$ e $P1_{P2}$.

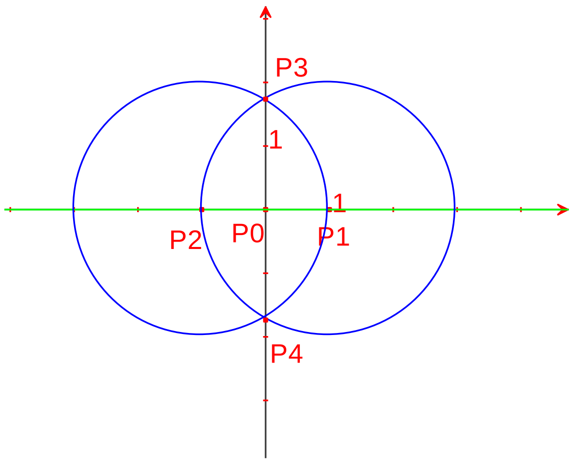

Figura 12: Definição 2.1 (ii)

(iii) Como intersecção de duas rectas, cada uma das quais passando por dois pontos anteriores da sequência.

Exemplo: O ponto $P5$ foi obtido pela intersecção da circunferência $P3_{P1}$ com a recta $P4P1$ (ii). O ponto $P6$ resulta da intersecção das rectas $P2P5$ e $P1P3$.

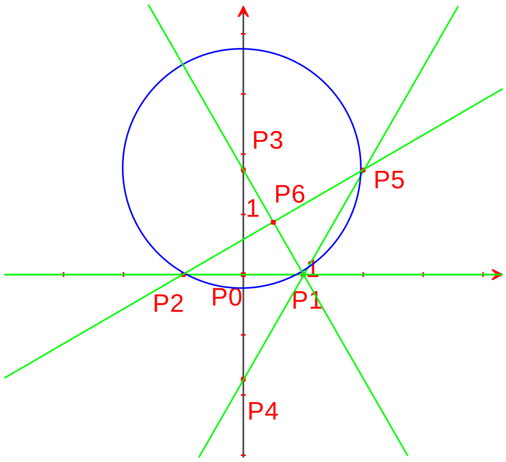

Figura 13: Definição 2.1 (iii)

Uma recta do plano é uma **recta-régua-e-compasso (recta-rc)** se passa por dois pontos-rc. Uma circunferência do plano é uma **circunferência-régua-e-compasso (circunferência-rc)** se passa por um ponto-rc e tem como centro um ponto-rc. Um número x é um **número-régua-e-compasso (número-rc)** se $(x,0)$ é um ponto-rc.

Vamos dar inicio às construções geométricas com a régua e o compasso começando por enunciar o seguinte teorema:

<u>Teorema 2.2:</u>

a) O ponto de intersecção de duas rectas-rc é um ponto-rc;
b) O ponto de intersecção de uma recta-rc e uma circunferência-rc é um ponto-rc;
c) O ponto de intersecção de duas circunferências-rc é um ponto-rc.

Demonstração:

a) Vamos supor que Z é o ponto de intersecção de duas rectas-rc r_1 e r_2. Então podemos considerar T e Q dois pontos-rc em r_1 e R e S dois pontos-rc em r_2. Assim, os pontos T, Q, R e S são os últimos das sequências finitas $P1, P2, T1, T2, ..., T; P1, P2, Q1, Q2, ..., Q; P1, P2, R1, R2, ..., R; P1, P2, S1, S2, ..., S$, respectivamente. Assim, pela definição 2.1 o ponto Z é um ponto-rc, pois foi obtido pela intersecção de rectas que contêm pontos da sequência finita $P1, P2, T1, T2, ,...,T,Q1, Q2, ...,Q,R1, R2,..., R,S1, S2,...S,Z.$

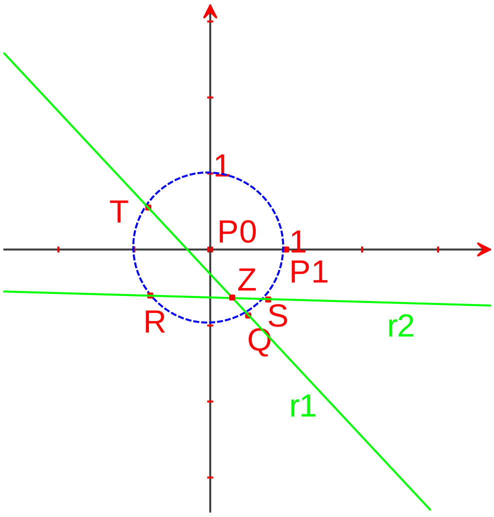

Figura 14: Teorema 2.2 a)

b) Vamos supor que Z é um ponto de intersecção da recta-rc r_1 com a circunferência-rc R_s, os pontos P e Q são pontos-rc em r_1, os pontos R e S são pontos-rc em R_s. A intersecção da recta-rc r_1 com a circunferência régua compasso R_s dará origem ao ponto Z. Assim, pela definição 2.1 o ponto Z é um ponto-rc, pois foi obtido pela intersecção de uma recta e uma circunferência que contêm pontos da sequência finita $P1, P2, P3, \ldots, P, Q1, Q2, \ldots, Q, R1, R2, \ldots, R, S1, S2, \ldots S, Z$.

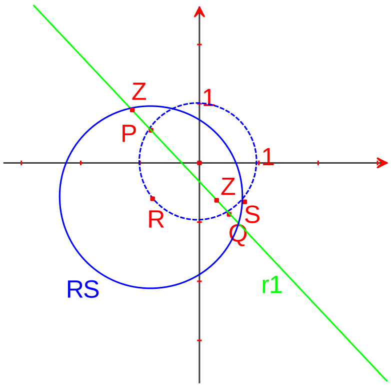

Figura 15: Teorema 2.2 b)

c) Vamos supor que Z é um ponto de intersecção de duas circunferências-rc P_Q e R_s, os pontos P e Q são pontos-rc em P_Q, os pontos R e S são pontos-rc em R_s. A intersecção das circunferências P_Q e R_s dará origem ao ponto Z. Assim, pela definição 2.1 o ponto Z é um ponto-rc, pois foi obtido pela intersecção de circunferências que contêm pontos da sequência finita *P1, P2, P3,…,P,Q1, Q2, …,Q,R1, R2,…, R,S1, S2,…S,Z.*

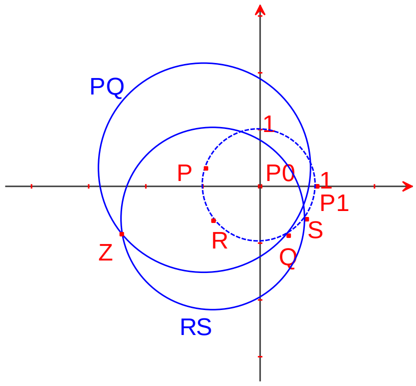

Figura 16: Teorema 2.2 c)

<u>Teorema 2.3:</u> Se A, B, C são três pontos-rc então A_{BC} é uma circunferência-rc.

Demonstração:

Vamos supor que A, B e C são pontos-rc. Seja D um dos dois pontos de intersecção das circunferências-rc A_B e B_A. Então, pelo teorema 2.2 o ponto D é ponto-rc. Seja E um ponto de intersecção da circunferência-rc B_C com a recta-rc DB de tal forma que D-B-E. Então, pelo teorema 2.2 o ponto E é ponto-rc. Seja F um ponto de intersecção da circunferência-rc D_E com a recta-rc DA de tal forma que D-A-F. Então, pelo teorema 2.2 o ponto F é ponto-rc. Se $\overline{BC} = \overline{AF}$ (construção 1.1) então $A_{BC} = A_F$. Como os pontos F e A são ponto-rc a circunferência A_{BC} também será.

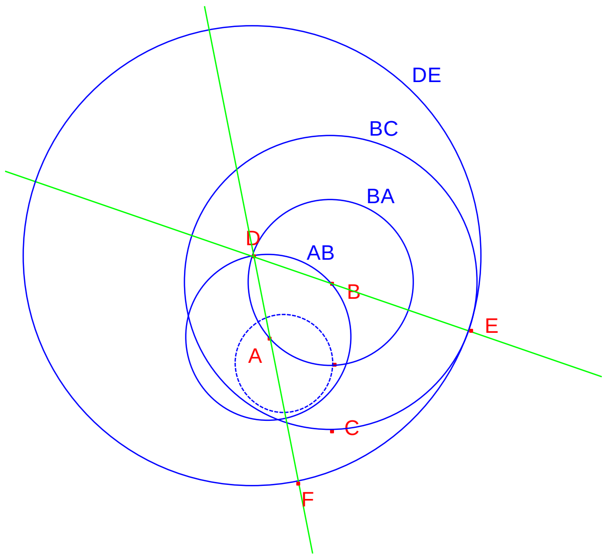

Figura 17: Teorema 2.3

Teorema 2.4:

a) Os eixos coordenados são rectas-rc.

b) Todos os pontos *(p,0), (-p,0), (0,p) e (0,-p)* são pontos-rc se um deles for ponto-rc.

c) O número x é número-rc se e só se $-x$ for número-rc.

d) O ponto de coordenadas *(p,q)* é ponto-rc se e só se p e q forem ambos números-rc.

Demonstração:

a) O eixo Ox é recta-rc, pois contém os pontos-rc *P1=(0,0)* e *P2=(1,0)* (definição 2.1).

Consideremos $P1_{P2}$ uma circunferência-rc de raio 1 e Ox uma recta-rc. Pela definição 2.1 (ii) o ponto *P3=(-1,0)* é um ponto-rc. Consideremos $P3_{P2}$ e $P2_{P3}$ duas circunferências-rc, pela definição 2.1 a sua intersecção dará origem a um ponto-rc, designe-se por *P4* esse ponto. O ponto *P4* pertence ao eixo Oy, pois os segmentos de recta $\overline{P1P3}$ e $\overline{P1P2}$ são raios da circunferência $P1_{P2}$. Assim, *P4* encontra-se na mediatriz de *P3* e *P2*, ou seja no eixo Oy. Como *P1* e *P4* são dois pontos-rc, pela definição 2.1 podemos afirmar que a recta que passa por eles é recta-rc, logo o eixo Oy é recta-rc.

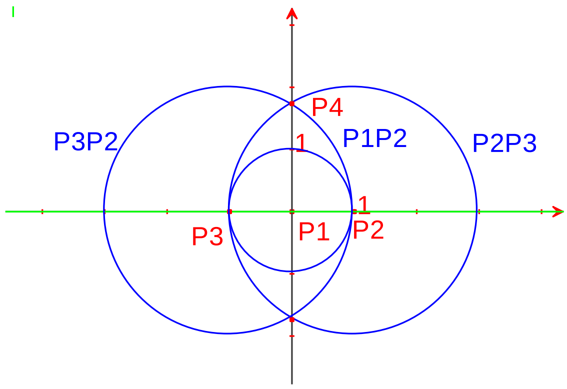

Figura 18: Teorema 2.4 a)

b) Vamos supor que *(0,p)* é um ponto-rc. A circunferência de centro em *(0,0)* que passo por *(0,p)* é uma circunferência-rc, pela definição 2.1. A intersecção da circunferência-rc com os eixos coordenados vai gerar pontos-rc (pela definição 2.1 (ii)), pois os eixos coordenados são rectas-rc, como demonstrado na alínea anterior. Assim, podemos concluir que os pontos *(0,-p), (p,0) e (-p,0)* são pontos-rc.

Demonstra-se analogamente para os casos em que um dos pontos de coordenadas *(-p,0)*, *(0,p)* e *(0,-p)* é ponto-rc.

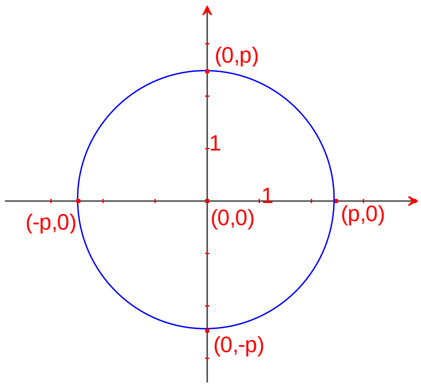

Figura 19: Teorema 2.4 b)

c) Seja x um número número-rc qualquer e consideremos $A=(x,0)$ um ponto-rc. Por b) podemos afirmar que $(-x,0)$ é ponto-rc. Assim, pela definição 2.1 podemos concluir que $-x$ é número-rc. Demonstra-se analogamente se para o caso em que $-x$ é número-rc.

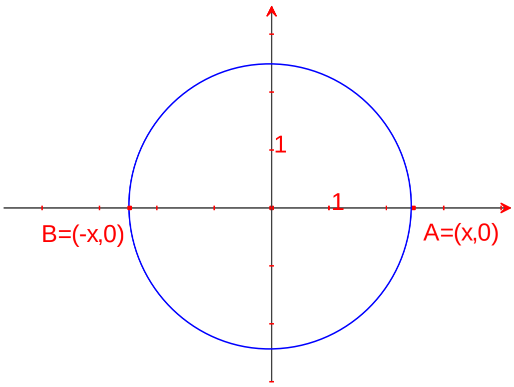

Figura 20: Teorema 2.4 c)

d) Sejam p e q dois números-rc e consideremos $A=(p,0)$ e $B=(q,0)$ pontos-rc. Por b) podemos afirmar que os pontos $(-p,0)$, $(-q,0)$, $(0,-p)$, $(0,-q)$, $(0,p)$ e $(0,q)$ são pontos-rc. Se construirmos a circunferência-rc com centro em $(p,0)$ que passa em $(0,0)$, a intersecção desta circunferência com a circunferência-rc de centro em $(0,p)$ que passa em $(0,0)$ dará origem ao ponto (p,p). Analogamente se constrói o ponto (q,q). A recta-rc que passa pelos pontos (p,p) e $(p,0)$ intersectada com a recta que passa pelos pontos (q,q) e $(0,q)$ dará origem ao ponto-rc (p,q).

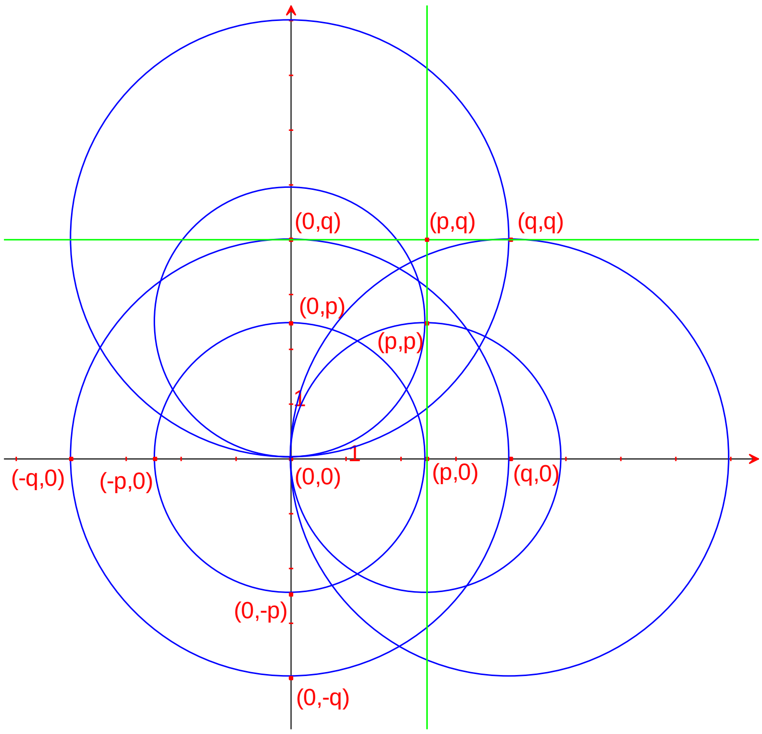

Figura 21: Teorema 2.4 d)

Demonstremos de seguida o recíproco:

Sejam *(p,q)* as coordenadas de um ponto-rc. Construímos a circunferência-rc *c1* de centro em *(0,0)* que contém *(p,q)*. A intersecção de *c1* com os eixos coordenados dará origem a quatro pontos-rc (teorema 2.2). Vamos considerar os pontos *A* e *D* como a intersecção da circunferência *c1* com os semi-eixos positivos do Ox e Oy, respectivamente. Construímos as circunferências-rc *c2* e *c3* de centro em *A* e centro em *D*, respectivamente, que passam por *(p,q)*. Construímos a recta-rc que passa por *(p,q)* e *B* e a recta-rc que passa por *(p,q)* e *C*. A intersecção da primeira com eixo do Ox dará origem a um novo ponto-rc de coordenadas *(p,0)*, por outro lado a intersecção da segunda dará origem a um novo ponto-rc de coordenadas *(0,q)*. Portanto, por definição de número-rc podemos concluir que *p* e *q* são números-rc.

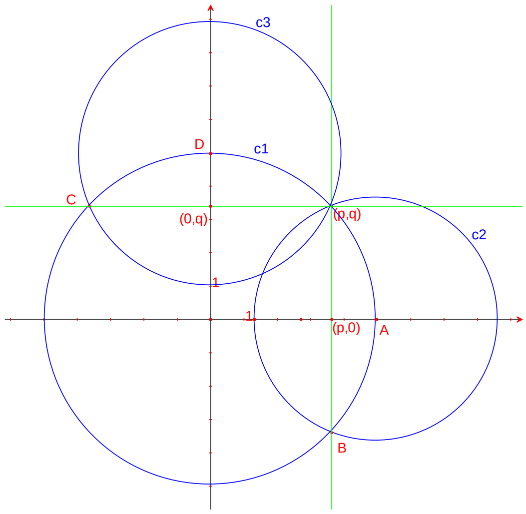

Figura 22: Teorema 2.4 (recíproco)

<u>Lema 2.5</u>: Dado um ponto-rc P e uma recta-rc r a recta perpendicular a r que contém P é recta-rc.

Demonstração:

Seja r uma recta-rc e P um ponto-rc. Suponhamos em primeiro lugar que P não incide em r. Como r é recta-rc contém pelo menos dois pontos-rc, A e B. Construímos as circunferências B_P e A_P, a sua intersecção dará origem a um novo ponto-rc ao qual chamamos C. Como A e B pertencem à recta r e se encontram a igual distância de C e P, vemos que r é a mediatriz do segmento de recta $\overline{CP}$. Assim, podemos concluir que a recta CP é perpendicular a r e como passa por dois pontos-rc é uma recta-rc.

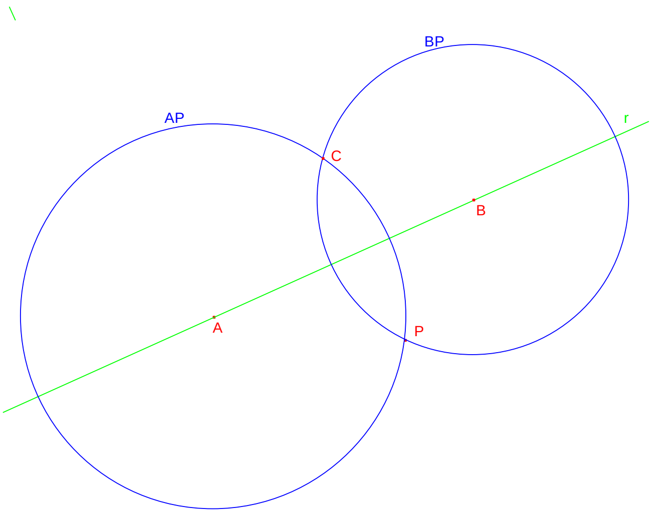

Figura 23: Lema 2.5 (1º caso)

Vejamos de seguida o caso em que P incide na recta r:

Seja r uma recta-rc e P um ponto-rc pertencente a r. Como r é uma recta-rc contém pelo menos dois pontos-rc, A e B. Construímos a circunferência-rc P_B. A intersecção desta com a recta r dará origem a um novo ponto-rc que denominamos por C. Construímos as circunferências C_B e B_C, a sua intersecção dará origem a dois novos pontos-rc aos quais chamamos D e E. Como C e B pertencem à recta r e se encontram a igual distância de D e E, então r é a mediatriz do segmento de recta $\overline{DE}$. Como P é centro da circunferência P_B incide no segmento de recta $\overline{DE}$. Assim, podemos concluir que a recta DE é perpendicular a r e como passa por dois pontos-rc é uma recta-rc.

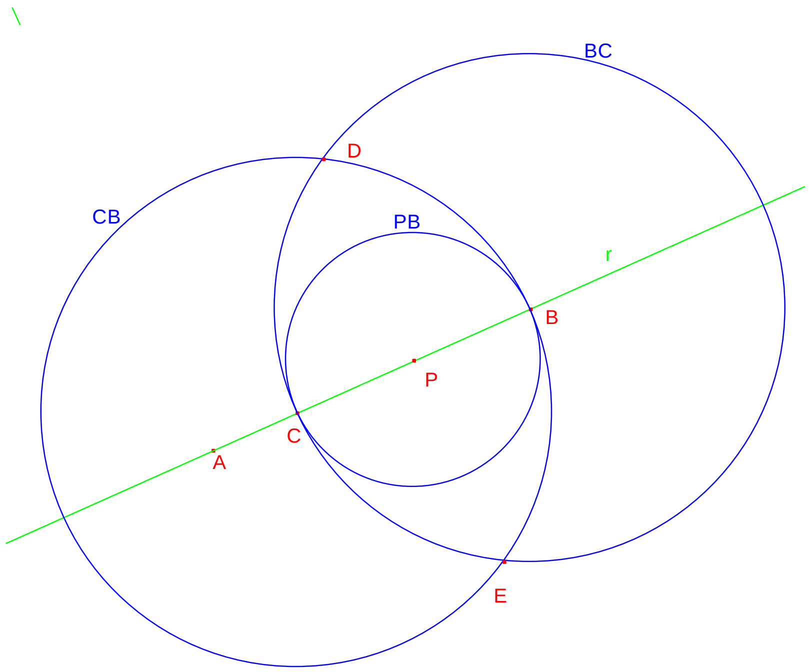

Figura 24: lema 2.5 (2º caso)

<u>Lema 2.6</u>: Dado um ponto P ponto-rc e uma recta r recta-rc a recta paralela a r que passa por P é recta-rc.

Demonstração:

Seja r uma recta-rc e P um ponto-rc. Construímos a recta s perpendicular a r que passa em P (lema 2.5). De seguida construímos a recta t perpendicular a s que passa pelo ponto P. Assim, podemos concluir que t é paralela a r.

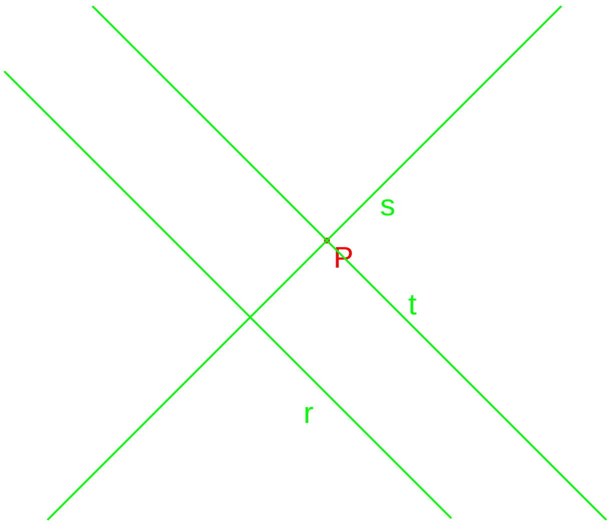

Figura 25: lema 2.6

<u>Definição 2.7</u>: A mediatriz de um segmento de recta $\overline{AB}$ é a recta perpendicular a $\overline{AB}$ que contém o seu ponto médio.

<u>Lema 2.8</u>: Dados dois pontos-rc A e B, a mediatriz do segmento de recta $\overline{AB}$ e o ponto médio deste são recta-rc e ponto-rc, respectivamente.

Demonstração:

Construímos o segmento de recta $\overline{AB}$ e as circunferências-rc A_B e B_A. A intersecção das circunferências dará origem aos pontos-rc C e D. Construímos a recta-rc CD (mediatriz do segmento de recta $\overline{AB}$), a intersecção desta recta com o segmento de recta $\overline{AB}$ dará origem ao ponto-rc M (ponto médio do segmento de recta $\overline{AB}$). Assim, podemos concluir que a mediatriz (CD) e o ponto médio (M) de $\overline{AB}$ são recta-rc e ponto-rc, respectivamente.

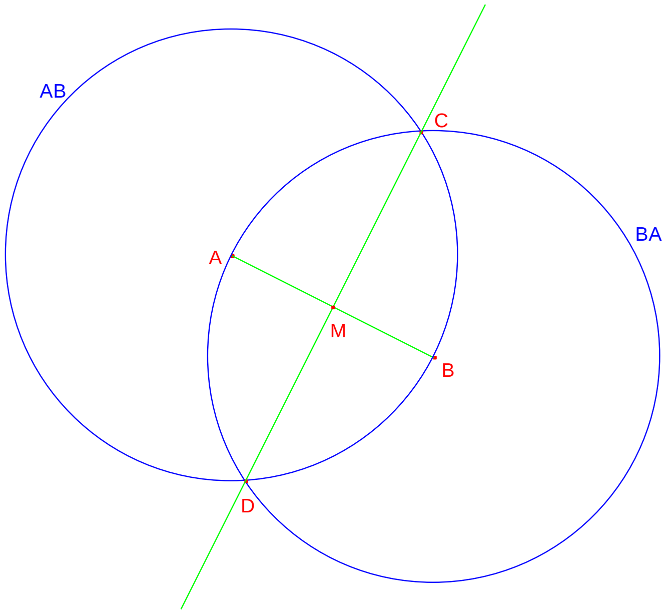

Figura 26: Lema 2.8

De seguida iremos estudar construções relacionadas com a inversão. Comecemos por definir esta transformação geométrica:

Definição 2.9: Seja c uma circunferência de raio r e centro O e P um ponto qualquer, tal que P não coincide com O. O inverso P' de P em relação a C é o único ponto P' pertencente à semi-recta $\overrightarrow{OP}$ tal que $(\overline{OP})(\overline{OP'}) = r^2$.

A definição enunciada está expressa em termos de medida, mas de seguida iremos verificar que com as ferramentas régua e compasso que estamos a utilizar, aos quais foi retirada a capacidade de medida, é possível construir o inverso de um ponto. Portanto, podíamos apresentar como alternativa à definição 2.9 uma definição de inverso de um ponto como aquele que é obtido pelas construções descritas no lema que se segue. Esta definição seria completamente independente da noção de medida.

Lema 2.10: Dados dois pontos-rc A e C, o inverso de qualquer ponto em relação à circunferência-rc A_C também é um ponto-rc.

Demonstração:

Na realização desta demonstração teremos de considerar três casos: P um ponto-rc exterior a A_C, P um ponto-rc interior a A_C e P um ponto-rc que incide em A_C.

- Sejam A e C dois pontos-rc e P um ponto-rc exterior a A_C. Construímos a recta-rc AP. O ponto médio do segmento de recta $\overline{AP}$ é um ponto-rc (lema 2.8), denominemos por E esse ponto. Construímos a circunferência-rc E_P. A sua intersecção com a circunferência A_c dará origem a um novo ponto-rc, denominemos por F o ponto de intersecção. Construímos a recta-rc perpendicular a AP que passa por F (lema 2.5). A intersecção da perpendicular com AP dará origem a P'. P' é ponto-rc, pois resulta da intersecção de rectas-rc.

Vejamos de seguida que o ponto P' é o inverso do ponto P em relação a A_C:

O triângulo ΔAFP é rectângulo, pois está inscrito numa semi-circunferência de E_P.

Os triângulos $\Delta AFP'$ e ΔAPF são semelhantes, pelo critério AA, assim $\frac{\overline{AP'}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP'} \times \overline{AP} = \overline{AF}^2$. Portanto, pela definição 2.9, podemos concluir que P' será o inverso de P em relação à circunferência A_C.

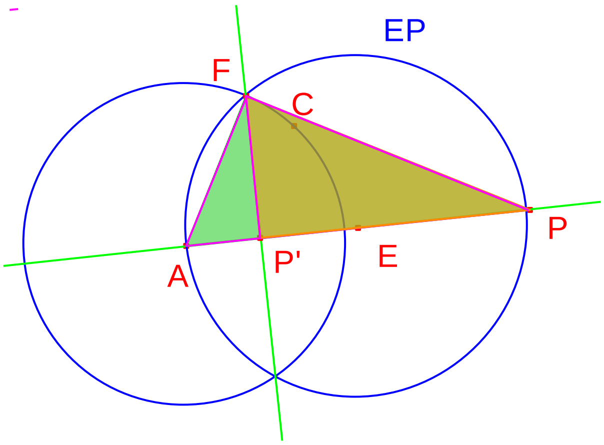

Figura 27: Lema 2.10 (1º caso)

- Sejam A e C dois pontos-rc e P um ponto-rc interior a A_C. Construímos a semi-recta $\overrightarrow{AP}$ e a perpendicular a esta que contém P. A intersecção da perpendicular com a circunferência-rc A_C dará origem a dois pontos-rc, tomamos um deles e denominamo-lo F. Construímos o segmento de recta $\overline{AF}$ e a perpendicular a este que contém F. A intersecção desta perpendicular com a semi-recta $\overrightarrow{AP}$ dará origem a um novo ponto, seja P' esse ponto. P' será o inverso de P em relação à circunferência A_C.

Vejamos de seguida que o ponto P' é o inverso do ponto P em relação a A_C:

O triângulo $\Delta AFP'$ é rectângulo, pois $\overline{AF}$ e $\overline{FP'}$ são perpendiculares. Os triângulos $\Delta AFP'$ e ΔAPF são semelhantes, pelo critério AA.

Assim, $\frac{\overline{AP'}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} \times \overline{AP'} = \overline{AF}^2$. Portanto, pela definição 2.8, podemos concluir que P' será o inverso de P em relação à circunferência A_C.

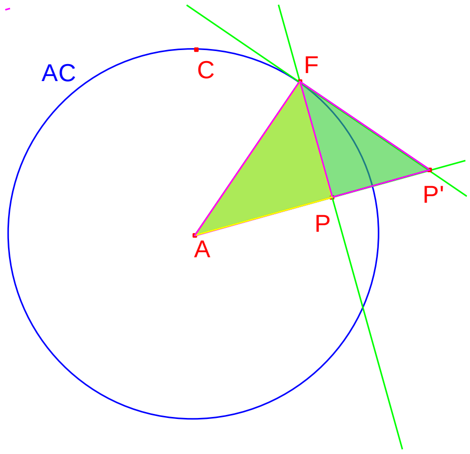

Figura 28: Lema 2.10 (2º caso)

- No caso em que P é um ponto-rc que incide em A_C, o inverso de P em relação a A_C é o próprio P, logo é ponto-rc

De seguida iremos recorrer a conceitos e resultados da álgebra para estudar o conjunto de pontos-rc que se podem construir.
O primeiro conceito que vamos abordar é o de corpo que em matemática é muito mais abrangente do que aqui necessitamos, iremos por isso restringir-nos a subconjuntos dos números reais.

Definição 2.11:

(i) Um subconjunto de números reais F chama-se um corpo se contém 0 e 1, e satisfaz as seguintes condições: para quaisquer números a, b, c pertencentes a F, com $c \neq 0$, $a+b$, a-b, $a.b$ e $\frac{a}{b}$ estão em F.

(ii) Seja $\mathbb{Q}$ o corpo de números racionais e $\mathbb{R}$ o corpo de números reais. O corpo F é euclideano se para cada x pertencente a F, se x>0 então $\sqrt{x}$ pertence a F.

Lema 2.12: Um subconjunto de números reais F é um corpo se e só se os números 0 e 1 pertencem a F e para quaisquer a, b e c pertencentes a F, com c diferente de zero, a-b e $\frac{a}{c}$ também pertencem a F.

Demonstração:

Seja F um subconjunto de números reais que contém os elementos *0* e *1*. Suponhamos que para quaisquer *a, b e c* pertencentes a F com $c \neq 0$, *a-b* pertence a F e $\frac{a}{c}$ também pertence a F.

<u>Observação:</u> De acordo com a definição 2.11 teremos apenas de garantir que $a+b$ e $a.b$ pertencem a F.

Sejam *a* e *b* dois elementos de F quaisquer. Como 0 e *b* pertencem a F então 0-*b*=-*b* também pertence a F. Logo $a-(-b)=a+b$ pertence a F.

Se *b*=0 então $a.b=a.0=0$ pertence a F.

Se *b* for diferente de zero, $\frac{1}{b}$ pertence a F. Como $\frac{1}{b}$ é diferente de zero $\frac{a}{\frac{1}{b}}$ também pertence a F.

Como $\frac{a}{\frac{1}{b}} = a.b$, então $a.b$ pertence a F.

<u>Teorema 2.13</u>: Os números-rc formam um corpo.

Demonstração:

Como *(1,0)* e *(0,0)* são pontos-rc *0* e *1* são números-rc.

Sejam *x* e *y* dois números-rc. Então (*x*,0) e (*y*,0) são pontos-rc. De acordo com o lema 2.12 basta garantir que *x-y* e $\frac{x}{y}$, para *y* diferente de zero, para que formem um corpo.

No entanto, como as construções geométricas são interessantes em si, vamos mostrar também que $a+y$ e $a.y$ são números-rc.

❖ Vamos mostrar que $x+y$ é um número-rc:

Pelo teorema 2.3 como $P1=(0,0)$, $A=(x,0)$ e $B=(y,0)$ são três pontos-rc, sabemos que B_{P1A} é uma circunferência-rc. A intersecção desta circunferência com o eixo Ox dará origem a dois pontos-rc em que um deles é $(x+y,0)$. Logo $x+y$ é um número-rc.

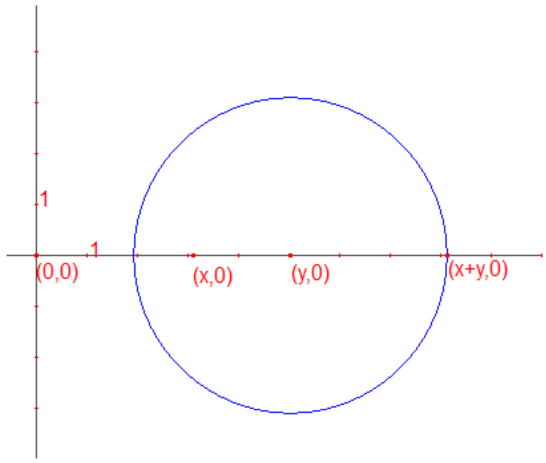

Figura 29: Teorema 2.13 (soma)

❖ Vamos mostrar que x-y é um ponto-rc:

Pelo Teorema 2.3, como $P1=(0,0)$, $A=(x,0)$ e $B=(y,0)$ são três pontos-rc sabemos que $P1_{AB}$ é uma circunferência-rc. A intersecção desta circunferência-rc com o eixo Ox dará origem a dois novos pontos-rc em que um deles é $(x\text{-}y,0)$.

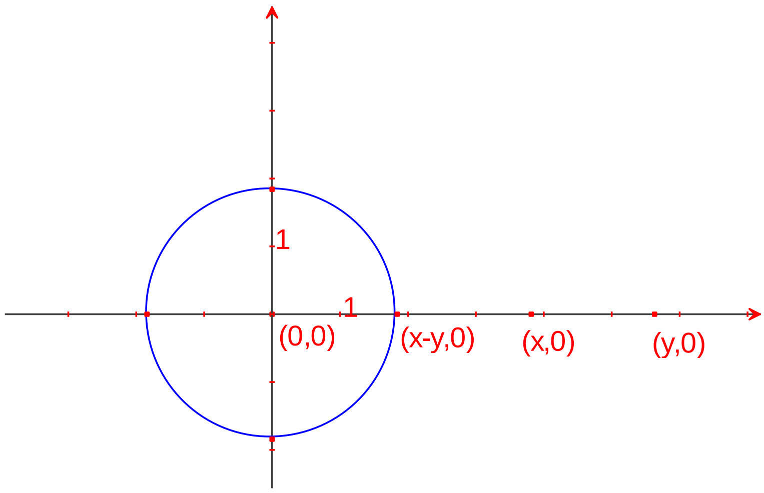

Figura 30: Teorema 2.13 (diferença)

❖ Vamos mostrar que $x.y$ é um número-rc:

Sejam $P1=(0,0)$, $P4=(0,1)$, $A=(x,0)$, $B=(y,0)$ e $C=(0,y)$ cinco pontos-rc e consideremos a recta-rc $P4A$. Pelo Lema 2.6, é possível construir a recta-rc paralela a $P4A$ que passa em C. A intersecção dessa paralela com o eixo Ox dará origem a um ponto-rc ao qual chamamos D.

Teremos que demonstrar que o as coordenadas do ponto *D* são *(x.y,0)*, para tal iremos considerar a relação de semelhança entre os triângulos $\Delta P1P4A$ e $\Delta P1CD$:

$$\frac{\overline{P1D}}{\overline{P1A}} = \frac{\overline{CP1}}{1} \Leftrightarrow \frac{\overline{P1D}}{x} = \frac{y}{1} \Leftrightarrow \overline{P1D} = x.y\,.$$

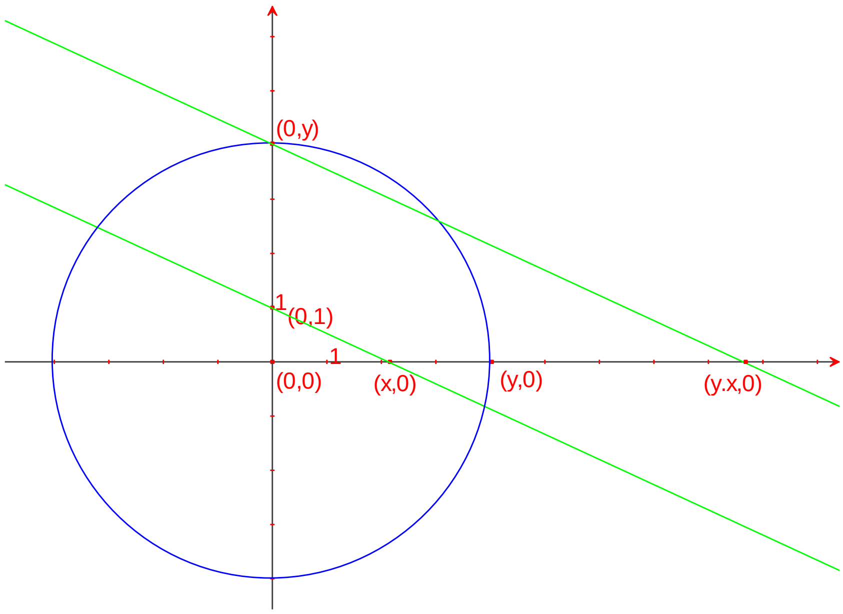

Figura 31: Teorema 2.13 (produto)

❖ Vamos mostrar que se y diferente de zero, $\frac{x}{y}$ é um número-rc:

Sejam *P1=(0,0), P4=(0,1), A=(x,0), B=(y,0)* quatro pontos-rc e consideremos a circunferência-rc com centro em *P1* que passa por *P4*. Construímos o ponto-rc *B'=(y',0)* inverso de *B* em relação à circunferência referida (lema 2.8). Construímos a circunferência com centro em *P1* que passa por *B'*. A sua intersecção com o eixo Oy dará origem a dois novos pontos-rc de coordenadas *(0,y')* e *(0,-y')*. Chamemos *C* ao ponto de coordenadas *(0,y')*. Construímos a recta-rc *P4A* e a recta-rc paralela a *P4A* que passa por *C*. A intersecção desta paralela com o eixo Ox dará origem ao ponto-rc *E*.

Teremos que demonstrar que as coordenadas do ponto *E* são $(z,0)=(\frac{x}{y},0)$, para tal iremos considerar a relação de semelhança entre os triângulos $\Delta P1P4A$ e $\Delta P1CE$:

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{y'} \Leftrightarrow x \times y' = z \Leftrightarrow \frac{x}{y} = z\,.$$

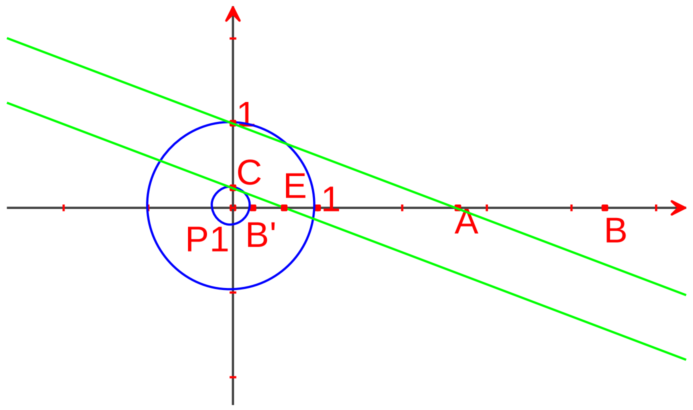

Figura 32: Teorema 2.13 (quociente)

Como resultado do Teorema 2.13 surge o seguinte corolário:

<u>Corolário 2.14:</u> Todos os números racionais são números-rc.

Como o número 1 é um número-rc e a soma de dois números-rc também é um número-rc, então 2, 3, 4, … também são números-rc, pois podem ser obtidos pela soma de dois números-rc. Assim, podemos afirmar que os números naturais são números-rc.

Como o número 0 é um número-rc e a diferença de dois números-rc é um número-rc, os simétricos dos números naturais também são números-rc. Logo, todos os números inteiros são régua e compasso.

Como os números-rc formam um corpo para quaisquer x e y inteiros, com y diferente de zero, $\frac{x}{y}$ é número-rc, logo os números racionais também são números-rc**.**

<u>Teorema 2.15</u>: Os números-rc formam um corpo euclideano[1].

Demonstração:

Seja x um número-rc positivo e sejam $P1=(0,0)$, $P2=(1,0)$ e $P=(-x,0)$ três pontos-rc. Construímos a circunferência-rc de centro em P que passa em $P2$. A intersecção desta com os eixos coordenados dará origem a três novos pontos-rc. Vamos tomar o novo ponto resultante da

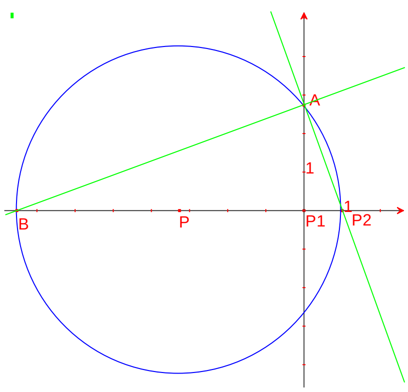

Figura 33: Teorema 2.15

[1] Um corpo F diz-se corpo euclideano se para cada x pertencente a F, se x>0 então $\sqrt{x}$ pertence a F.

intersecção com o eixo Ox e o ponto que resulta da intersecção da circunferência com o semi eixo positivo Oy , denominemos por A e B esses pontos, respectivamente. Os pontos-rc A e B têm coordenadas $A=\left(0,\overline{P1A}\right)$ e $B=\left(-\overline{BP1},0\right)$.

Pela definição 2.1, o número a tal que $a=\overline{P1A}$ é número-rc. Teremos mostrar que $\sqrt{a}$ também é um número-rc, vejamos:

Construímos as rectas-rc BA e $AP2$ e consideremos os triângulos rectângulos $\Delta BP1A$ e $\Delta AP1P2$. Os triângulos são semelhantes por terem dois ângulos de igual amplitude. Assim podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{\overline{BP1}}{\overline{P1A}}=\frac{\overline{P1A}}{\overline{P1P2}} \Leftrightarrow \overline{BP1}\times\overline{P1P2}=\left(\overline{P1A}\right)^2$$

Como $\overline{P1P2}=1$, então $\sqrt{\overline{BP1}}=\overline{P1A}$

Como $\sqrt{x}$ é um número-rc, pelo teorema 2.14 $\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$ também é um número-rc, assim como $\sqrt{\sqrt[4]{x}}=\sqrt[8]{x}$ e todas as raízes que tenham como índice uma potência de dois. Será também possível construir números-rc que resultem da soma, da diferença, do produto ou do quociente de uma raiz que tenha como índice uma potência de dois com um número racional.

3 O Compasso

No capítulo anterior, mostrámos que é possível construir geometricamente os números racionais; todas as raízes de índice potência de dois e os números resultantes da soma, diferença, produto e quociente entre estes, utilizando a régua apenas para traçar rectas, passando por pontos dados, e o compasso para traçar circunferências com centro num ponto dado e que passe por um ponto também já construído.

Neste capítulo vamos restringir-nos à utilização do compasso nas condições, referidas anteriormente, e mostrar o resultado conhecido como o "O Teorema de Mohr-Mascheroni".

Definição 3.1: consideremos os pontos do plano cartesiano $P1=(0,0)$ e $P2=(1,0)$. Um ponto do plano é um ***ponto-compasso*** se for o último de uma sequência finita $P1, P2, P3, P4, ..., Pn$ ou for obtido pela intersecção de duas circunferências que contenham um ponto e o centro num ponto anterior da sequência.
Uma recta do plano é uma ***recta-compasso*** se passa por dois pontos compasso.
Uma circunferência do plano é uma ***circunferência-compasso*** se passa por um ponto-compasso e tem como centro um ponto-compasso.
Um número x é um ***número-compasso*** se $(x,0)$ é um ponto-compasso.

Teorema 3.2: Os pontos de intersecção de duas circunferências-compasso são pontos-compasso.

Demonstração:

Sejam c_1 e c_2 duas circunferências-compasso e A, B, C e D quatro pontos-compasso tais que $c_1 = A_B$ e $c_2 = C_D$. Como A, B, C e D são pontos-compasso, então são os últimos das sequências finitas $P_1, P_2, A_1, A_2, ..., A$; $P_1, P_2, B_1, B_2, ..., B$; $P_{1}, _{2}, C_1, C_2, ..., C$ e $P_1, P_2, D_1, D_2, ..., D$, respectivamente. A intersecção das circunferências c_1 e c_2 dará origem a dois novos pontos que denominamos por E e F. Estes pontos são os últimos das sequências finitas $P_1, P_2, A_1, A_2, ..., A, B_1, B_2, ..., B, C_1, C_2, ..., C, D_1, D_2, ...D, E$ e $P_1, P_2, A_1, A_2, ..., A, B_1, B_2, ..., B, C_1, C_2, ..., C, D_1, D_2, ...D, F$.

Assim, pela definição 3.1, E e F são pontos-compasso, pois resultam da intersecção de duas circunferências-compasso que contêm pontos da sequência finita $P_1, P_2, A_1, A_2, ..., A, B_1, B_2, ..., B, C_1, C_2, ..., C, D_1, D_2, ...D, E, F$.

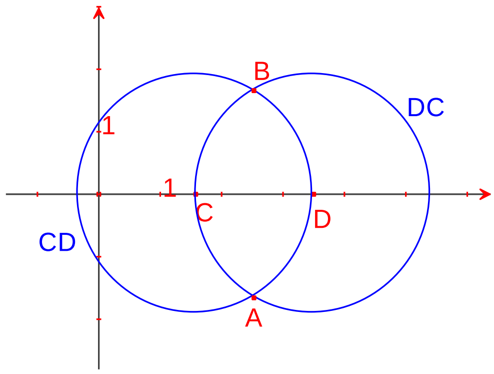

Figura 34: Teorema 3.2

Teorema 3.3: Se P e Q são dois pontos-compasso, a mediatriz de $\overline{PQ}$ é uma recta-compasso.

Demonstração:

Sejam P e Q dois pontos-compasso. Construímos as circunferências P_Q e Q_P . Denominemos por R e S os pontos-compasso resultantes da intersecção de P_Q e Q_P (definição 3.1). Consideremos a recta t que passa por R e S (mediatriz de $\overline{PQ}$). A recta t é compasso, pois passa por dois pontos-compasso (definição 3.1).

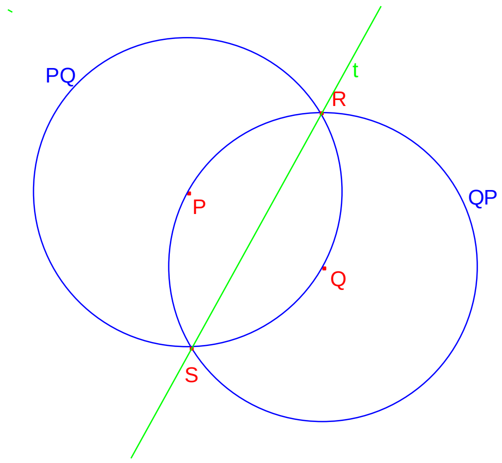

Figura 35: Teorema 3.3

De seguida iremos utilizar uma transformação geométrica, a reflexão, que será uma ferramenta muito útil. Comecemos por definir reflexão:

Definição 3.4: Dado uma recta r, a reflexão de eixo r é a transformação do plano que a cada ponto P faz corresponder o único ponto, da recta perpendicular a r, que passa por P, que está a igual distância de r e é distinto de P.

Teorema 3.5: O transformado de um ponto-compasso por uma reflexão cujo eixo é uma recta-compasso, é também um ponto-compasso.

Demonstração:

Seja r uma recta-compasso e sejam A e B dois pontos-compasso pertencentes a r. Consideremos C um ponto-compasso exterior à recta. Construímos as circunferências-compasso A_C e B_C. Estas circunferências intersectam-se no ponto C e num outro ponto ao qual chamamos D. O ponto D resultante da intersecção de duas circunferências-compasso é um ponto-compasso (definição 3.1). Como A e B se encontram a igual distância dos pontos-compasso C e D, podemos afirmar que a recta AB é a mediatriz do segmento de recta $\overline{CD}$. Sendo os pontos A e B pertencentes à recta r, esta é a mediatriz do segmento de recta $\overline{CD}$. Assim, podemos concluir que o ponto D é a imagem do ponto C pela reflexão de eixo r.

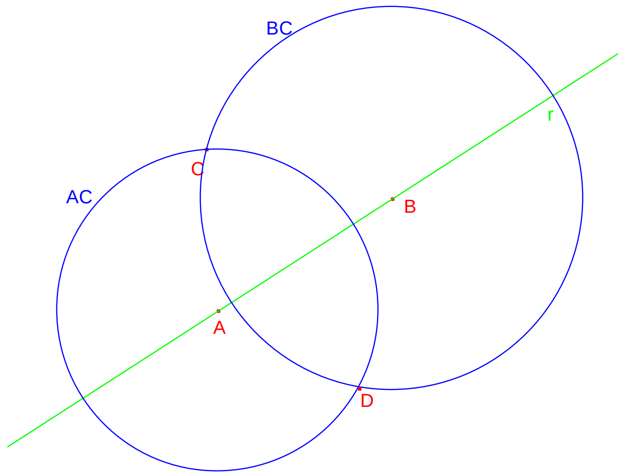

Figura 36: Teorema 3.5

Teorema 3.6: Se A, B e C são três pontos-compasso, então A_{BC} é uma circunferência-compasso.

Demonstração:

Sejam A, B e C três pontos-compasso. Consideramos a recta-compasso r, mediatriz de $\overline{AB}$ (teorema 3.3). Construímos o ponto-compasso C' como uma reflexão de C em relação a r (teorema 3.5). Assim, podemos concluir que $A_{C'} = A_{BC}$ é uma circunferência-compasso, pois a distância $\overline{AC'}$ é igual à distância $\overline{BC}$.

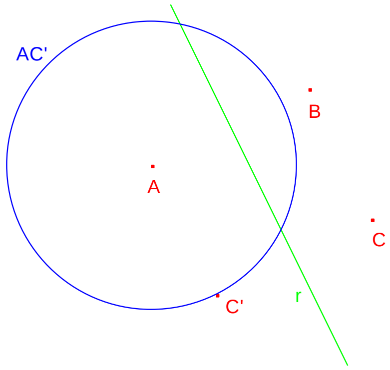

Figura 37: Teorema 3.6

<u>Teorema 3.7:</u> Sejam A, B e C três pontos-compasso, e sejam D e E os pontos de intersecção de A_B e B_A. Seja F tal que os pontos C e F são pontos de intersecção de D_C e E_C. Então A_{BC} é a circunferência-compasso A_F.

Demonstração:

Sejam A, B e C três pontos-compasso, e D e E os pontos de intersecção de A_B e B_A, e seja F tal que os pontos C e F são os pontos de intersecção de D_C e E_C.

O comprimento do segmento de recta $\overline{DB}$ é igual ao comprimento do segmento de recta $\overline{DA}$, pois D é um ponto-compasso que resulta da intersecção de A_B e B_A (circunferências-compasso), como C e F são pontos-compasso da circunferência-compasso D_C, o comprimento do segmento de recta $\overline{DC}$ é igual ao comprimento do segmento de recta $\overline{DF}$. Assim, podemos concluir que a distância $\overline{AF}$ é igual à distância $\overline{BC}$, portanto A_{BC} é a circunferência-compasso A_F.

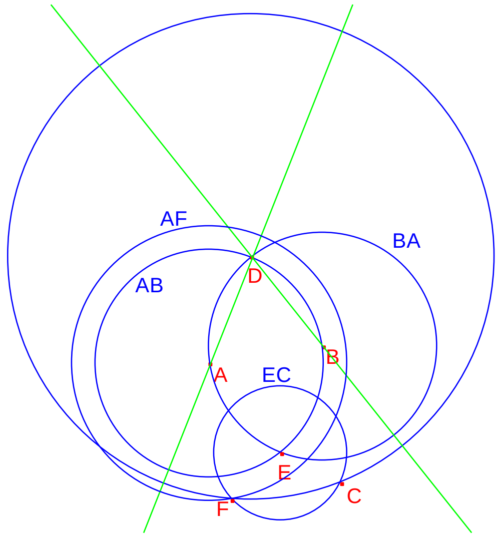

Figura 38: Teorema 3.7

<u>Observação:</u> No caso em que C se encontra na mediatriz de $\overline{AB}$, a demonstração também é válida, sendo que neste caso $C=F$.

<u>Teorema 3.8 (Teorema do ponto-médio-compasso):</u>

a) Se A e B são pontos-compasso e N é um ponto tal que B é o ponto médio do segmento de recta $\overline{AN}$, então N é ponto-compasso.
b) Se A e B são pontos-compasso e M é o ponto médio do segmento de recta $\overline{AB}$, então M é ponto-compasso.

Demonstração a):

Sejam A e B dois pontos-compasso. Construímos as circunferências A_B e B_A. Seja C um ponto-compasso de intersecção das circunferências A_B e B_A. Construímos a circunferência-compasso C_B. A intersecção desta com a circunferência B_A dará origem a num novo ponto-compasso que representamos por D. Construímos a circunferência D_C. A intersecção de D_C com a circunferência B_A dará origem a um novo ponto que designamos por N.

Como ΔABC e ΔBCD são triângulos equiláteros, esta construção permite gerar triângulos equiláteros, portanto ΔBDN também é um triângulo equilátero. Como os segmentos de recta $\overline{BA}$ e $\overline{BN}$ são raios da circunferência B_A podemos concluir que B é o ponto médio-compasso de $\overline{AN}$.

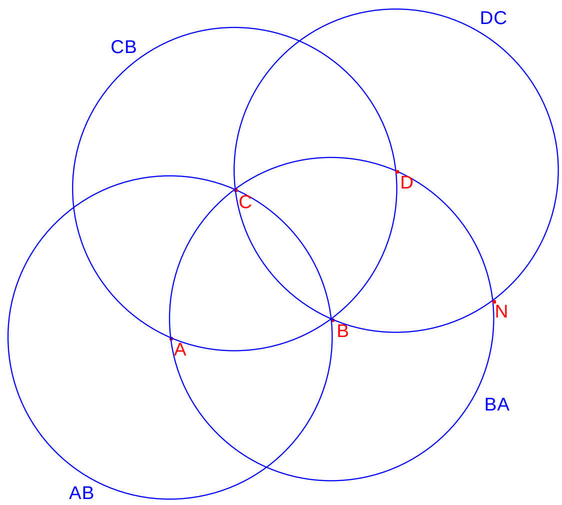

Figura 39: Teorema 3.8 a)

Demonstração b):

Sejam A e B dois pontos-compasso, e seja N o ponto-compasso tal que B é o ponto médio de $\overline{AN}$. Construímos as circunferências-compasso A_B e N_A. A intersecção de A_B e N_A dará origem a dois novos pontos que designamos por E e F. Construímos as circunferências-compasso F_A e E_A. Designamos por M o novo ponto-compasso resultante da intersecção das circunferências F_A e E_A.

Vamos mostrar que M é ponto médio de $\overline{AB}$:

Consideremos os triângulos ΔANE e ΔAEM. O triângulo ΔANE é isósceles, pois os segmentos $\overline{NE}$ e $\overline{NA}$ têm o mesmo comprimento, uma vez que são raios da mesma circunferência (N_A). O triângulo ΔAEM também é isósceles, pois tem dois lados com igual comprimento ($\overline{EA} = \overline{EM}$) tratando-se de raios da mesma circunferência (E_A).

Os triângulos ΔAEM e ΔENA têm um ângulo interno comum, como são isósceles terão dois ângulos com a mesma amplitude, assim pelo critério AA podemos afirmar que os triângulos ΔAEM e ΔENA são semelhantes.

Consideremos a seguinte relação:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \frac{2\overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow 2 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

(nota: $\overline{AE} = \overline{AB}$, pois são raios da circunferência-compasso A_B).

Assim, podemos concluir que M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

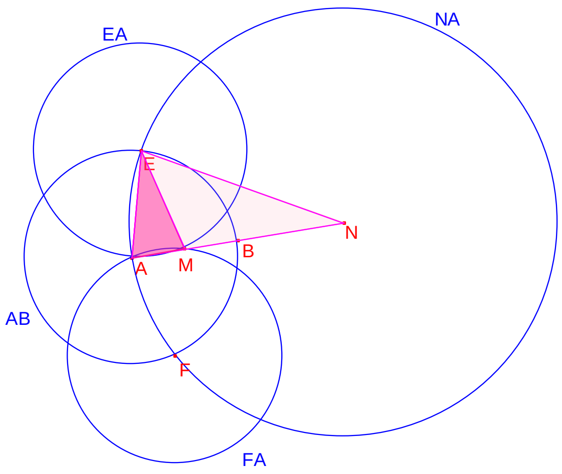

Figura 40: Teorema 3.8 b)

<u>Teorema 3.9:</u>

a) Se A e B são dois pontos-compasso e n um número inteiro positivo, então o ponto F em $\overrightarrow{AB}$, de tal forma que $\overline{AF} = n\overline{AB}$ é ponto-compasso.
b) Se A e B são dois pontos-compasso e n um número inteiro positivo, então o ponto Q em $\overrightarrow{AB}$, de tal forma que $\overline{AQ} = \frac{\overline{AB}}{n}$, é ponto-compasso.

Demonstração a):

Demonstração análoga à do teorema 3.8 a) usando um processo iterativo.

Demonstração b):

Sejam A e B dois pontos-compasso. E seja N um ponto-compasso resultante do processo iterativo (teorema 3.8 a)), tal que $\overline{AF} = n\overline{AB}$. Construímos a circunferência-compasso N_A. A intersecção de N_A com a circunferência A_B dará origem a dois novos pontos que designamos por F e G. Construímos as circunferências F_A e G_A. Chamamos Q ao novo ponto-compasso resultante da intersecção das circunferências F_A e G_A.

Vejamos se o ponto-compasso Q é tal que $\overline{AF} = n\overline{AB}$:

Os triângulos ΔAFQ e ΔFNA são isósceles e semelhantes, portanto consideremos a seguinte relação:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{QF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AQ}} \Leftrightarrow \frac{n\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AQ}} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{\overline{AF}^2}{n\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{\overline{AB}^2}{n\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{\overline{AB}}{n}$$

(nota: $\overline{AF} = \overline{AB}$, pois são raios da circunferência-compasso A_B).

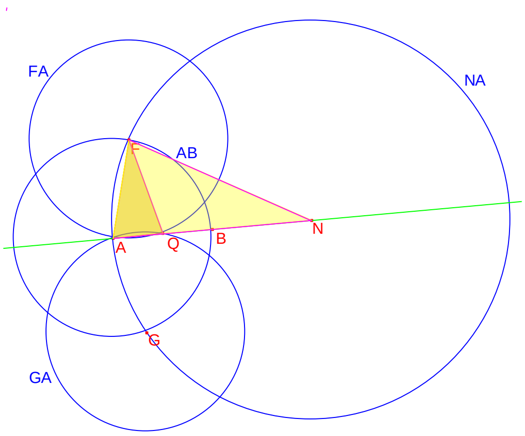

Figura 41: Teorema 3.9 b)

Nos teoremas 3.8 e 3.9 analisámos os transformados de pontos-compasso, por meio de uma inversão (ver definição 2.8), em casos particulares. De seguida, iremos estudar um caso geral.

<u>Lema 3.10:</u> Se A, B e C são pontos-compasso tal que C é exterior à circunferência A_B, então o ponto C', inverso a C em relação à circunferência A_B , é ponto-compasso.

<u>Demonstração:</u>

Sejam A, B e C pontos-compasso tal que C é exterior à circunferência A_B . Construímos a circunferência-compasso C_A. A intersecção da circunferência C_A com a circunferência A_B dará origem a dois pontos-compasso que designamos por D e E. Construímos a as circunferências D_A e E_A. Chamamos C' ao novo ponto-compasso resultante da intersecção de D_A e E_A.

Teremos de mostrar que C' é o inverso de C em relação a A_B:

Consideremos os triângulos $\Delta ADC'$ e ΔDCA. Por construção os pontos D e E são equidistantes de C' e de A, assim C' pertence a $\overline{AC}$.

Os triângulos $\Delta ADC'$ e ΔDCA são isósceles. O triângulo $\Delta ADC'$ é isósceles, pois os segmentos de recta $\overline{DA}$ e $\overline{DC'}$ são raios da circunferência D_A. O triângulo ΔDCA é isósceles, pois os segmentos de recta $\overline{CD}$ e $\overline{CA}$ são raios da circunferência C_A. Podemos também afirmar que os triângulos $\Delta ADC'$ e ΔDCA são semelhantes, pois são isósceles e têm um ângulo em comum (critério A.A).

Assim, podemos considerar a seguinte relação:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC'}} \Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AC'} = \overline{AD}^2$$

Portanto, podemos concluir que C' e C são inversos em relação a A_B.

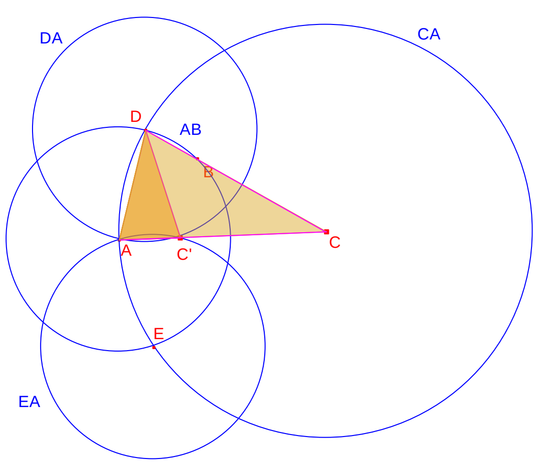

Figura 42: Lema 3.10

<u>Lema 3.11:</u> Se A, B e C são pontos-compasso tal que C é interior à circunferência A_B e cuja distância ao centro A é maior que metade do raio, então o ponto C', inverso a C em relação à circunferência A_B, é ponto-compasso.

<u>Demonstração:</u>

Sejam A, B e C pontos-compasso tal que C é interior à circunferência A_B e cuja distância ao centro A é maior que metade do raio. Construímos a circunferência-compasso C_A. A intersecção das circunferências A_B e C_A dará origem a dois novos pontos-compasso aos quais chamamos D e E. Construímos as circunferências-compasso D_A e E_A . A sua intersecção dará origem a um novo ponto-compasso ao qual chamamos C'. O ponto C' é o inverso de C em relação a A_B e a demonstração é análoga à do lema 3.10.

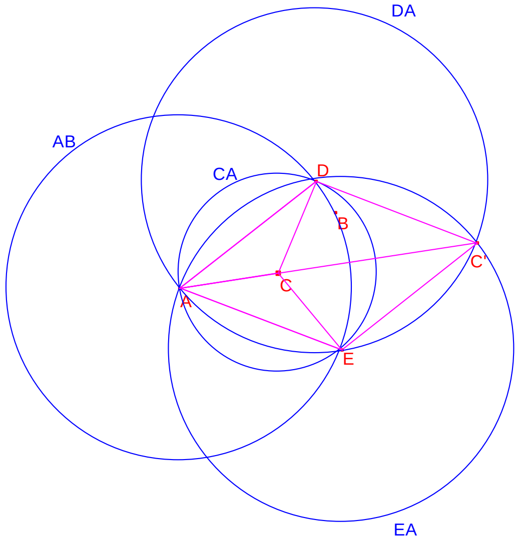

Figura 43: Lema 3.11

Lema 3.12: Se A, B e C são pontos-compasso tal que C é interior à circunferência A_B e cuja distância ao centro A é menor que metade do raio, então o ponto C', inverso a C em relação à circunferência A_B , é ponto-compasso.

Demonstração:

Consideramos a circunferência-compasso A_B e o ponto-compasso C interior à circunferência e cuja distância ao centro A é menor que metade do raio. Aplicamos a construção realizada na demonstração do teorema 3.7 a) tantas vezes quanto necessário até obtermos um ponto cuja distância ao centro A seja maior que metade do raio, denominamos esse ponto por I.

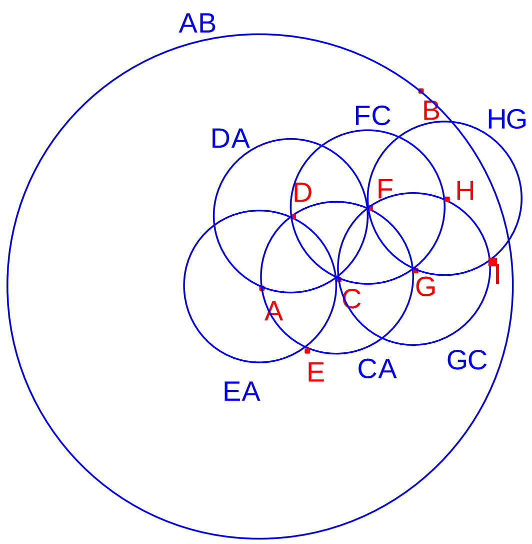

Figura 44: Lema 3.12 (parte 1 de 3)

De seguida aplicamos a construção realizada na demonstração do lema 3.11 e obtemos o ponto I' inverso a I em relação a A_B .

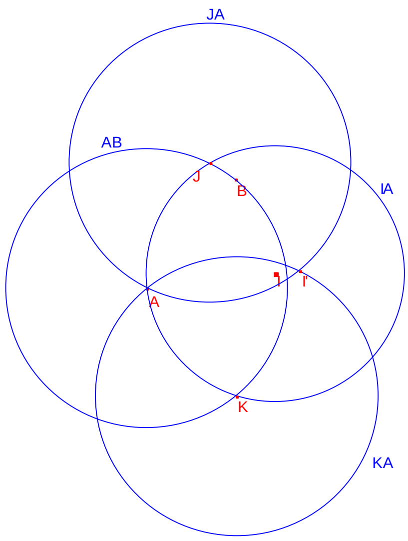

Figura 45: Lema 3.12 (parte 2 de 3)

Aplicamos ao ponto I' a construção realizada na demonstração do teorema 3.7 a) tantas vezes quanto as realizadas para obter o ponto I, no final desta construção obteremos um ponto-compasso ao qual chamamos C'.

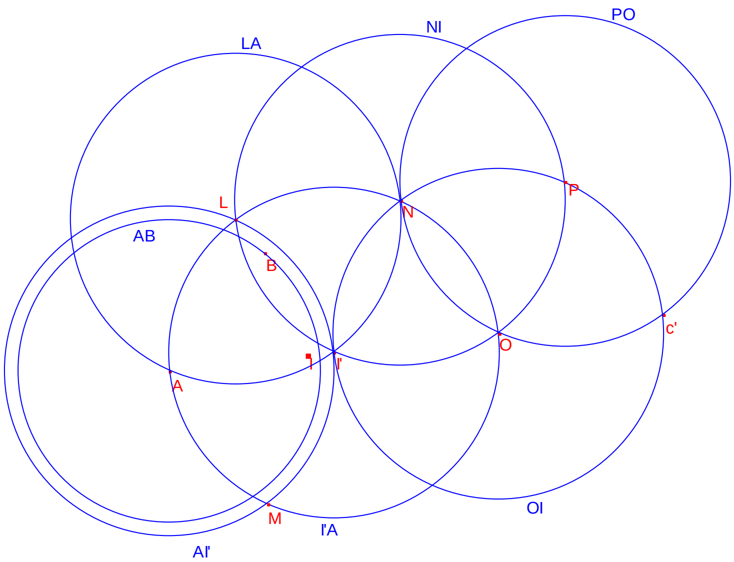

Figura 46: Lema 3.12 (parte 3 de 3)

Teremos de mostrar que C' é o inverso de C em relação a A_B:

No lema 3.11 mostrámos que I e I' são inversos em relação a A_B, portanto $\overline{AI}.\overline{AI'} = r^2$.

Por construção podemos afirmar que

$$\overline{AC'} = n.\overline{AI'} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC'}}{n} = \frac{1}{n.\overline{\overline{AC}}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{1}{\overline{\overline{AC'}}}$$

Tomemos $r=1$ e $\overline{AI} = n.\overline{AC}$.

$$\overline{AI}.\overline{AI'} = r^2 \Leftrightarrow \overline{AI'} = \frac{1}{\overline{\overline{AI}}} \Leftrightarrow \overline{AI'} = \frac{1}{n.\overline{\overline{AC}}} \Leftrightarrow \overline{AI'} = \frac{1}{n.\frac{1}{\overline{\overline{AC'}}}} \Leftrightarrow \overline{AI'} = \frac{1}{n}.\overline{AC'}.$$

$$\overline{AI}.\overline{AI'} = r^2 \Leftrightarrow n.\overline{AC}.\frac{1}{n}.\overline{AC'} = r^2 \Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AC'} = r^2$$

<u>**Lema 3.13:**</u> Sejam A, B e C três pontos-compasso não colineares, com A equidistante de B e C. Então a circunferência c', que passa por A, B e C é uma circunferência-compasso.

Demonstração:

Consideremos A, B e C três pontos-compasso, com A equidistante de B e C. Construímos a circunferência-compasso A_B . Construímos as circunferências-compasso C_A e B_A . Chamemos D ao novo ponto-compasso resultante da intersecção de C_A e B_A .

Seja O ponto-compasso e inverso de D em relação a A_B .

Por construção podemos afirmar que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{DB} = \overline{DC} = r$. Como O e D são inversos em relação a A_B , temos $\overline{OA}.\overline{AD} = \overline{AB}^2$.

Por construção de D a recta AD é mediatriz do segmento de recta $\overline{BC}$. Portanto, por definição de inverso podemos afirmar que O também pertence à mediatriz do segmento de recta $\overline{AD}$. Então, conclui-se $\overline{OB} = \overline{OC}$.

Pelo critério LAL podemos afirmar que os triângulos ΔAOB e ΔABD são semelhantes, pois têm um ângulo e dois lados proporcionais $\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$. Assim, podemos afirmar que o triângulo ΔAOB é isósceles tal como ΔABD. Portanto, podemos concluir que $\overline{OA} = \overline{OB}$.

Em suma, o ponto-compasso O é centro da circunferência que designamos por c’, que passa pelos pontos-compasso A, B e C. Assim, concluímos que c' é uma circunferência-compasso.

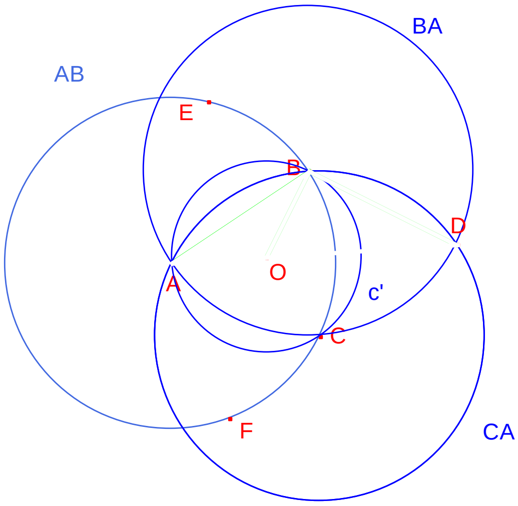

Figura 47: Lema 3.13

Teorema 3.14: A imagem de uma recta s, por uma inversão numa circunferência de centro O e raio r, está contida numa circunferência que contém o ponto O. A saber, o único ponto que não é imagem da recta s é o ponto O.

Demonstração:

Seja c uma circunferência de centro O e raio r e seja s uma recta que não passa por O.

Consideremos a recta perpendicular a s que contém O. A intersecção dessa perpendicular com a recta s dará origem a um ponto ao qual chamamos P. Construímos o inverso de P em relação a c e denominamo-lo P'. Seja I o ponto médio de $\overline{OP'}$ e consideremos a circunferência c' de centro I que passa por O e P'.

Vejamos que as imagens de todos os pontos pertencentes a s, por uma inversão em relação a c, estão em c':

Seja Q um ponto qualquer pertencente a s. Construímos o inverso de Q em relação a c e denominamo-lo Q'. Pela definição de inverso sabemos que $\overline{OP}.\overline{OP'} = r^2 = \overline{OQ}.\overline{OQ'}$. Os triângulos ΔOPQ e $\Delta OQ'P'$ são semelhantes pelo critério LAL, pois têm um ângulo em comum e dois lados proporcionais ($\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ'}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP'}}$). O triângulo $\Delta OP'Q'$ é rectângulo em Q', logo como $\overline{OP'}$ é um diâmetro de c' o ponto Q' pertence a c'.

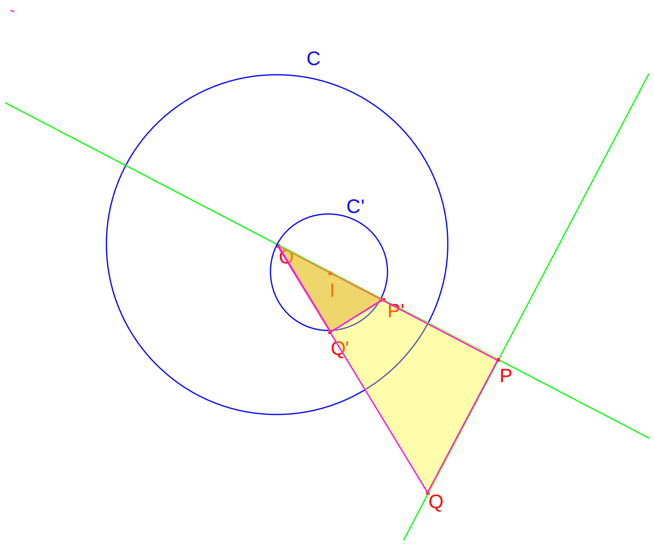

Figura 48: Teorema 3.14

Teorema 3.15: Se A, B, C e D são pontos-compasso de tal forma que AB intersecta C_D e se C não incide na recta AB, então se a recta AB intersecta a circunferência C_D, os pontos de intersecção de AB e C_D são pontos-compasso.

Demonstração:

Sejam A, B, C e D quatro pontos-compasso, r a recta-compasso que passa por A e B e C não pertence a r. Consideremos a circunferência-compasso C_D.

Queremos mostrar que a intersecção da circunferência-compasso C_D com a recta-compasso r dará origem a pontos compasso:

Construímos a o ponto compasso C' como uma reflexão de C em relação a r (teorema 3.4). Construímos a circunferência-compasso C'_{CD} (Teorema 3.6). A intersecção destas duas circunferências vai dar origem a dois novos pontos-compasso que denominamos por E e F. Os pontos E e F pertencem a r uma vez que r é a mediatriz de $\overline{C'C}$ e resultam também da intersecção de r com C_D.

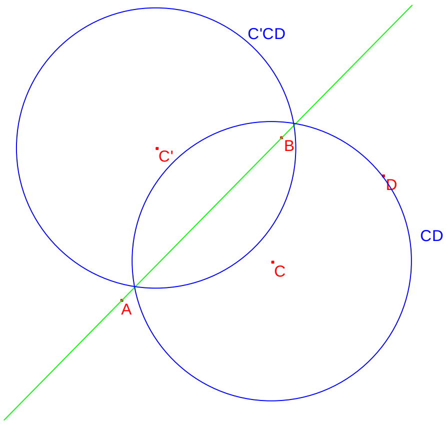

Figura 49: Teorema 3.15

<u>Teorema 3.16</u>: Se A, B e C são três pontos-compasso, então os pontos de intersecção entre AB e A_C são pontos-compasso.

Demonstração:

Sejam A, B e C três pontos-compasso, r a recta-compasso que passa pelos pontos A e B e s a recta-compasso que passa pelos pontos A e C. Consideremos a circunferência-compasso A_C .

Suponhamos que r e s não são perpendiculares e mostremos que a intersecção de A_C com r dará origem a pontos-compasso:

Construímos o ponto-compasso C' como imagem do ponto C pela reflexão de eixo r. Consideramos o ponto D tal que $ACC'D$ é um paralelogramo. Da intersecção das circunferências-compasso $A_{CC'}$ e C'_A (teorema 3.6) resultam dois novos pontos-compasso. Verificamos facilmente que D é um destes pontos, pois a distância $\overline{AD}$ é igual distância de $\overline{CC'}$, assim como a distância $\overline{DC'}$ é igual a $\overline{CA}$. Portanto o ponto D é ponto-compasso e $\overline{DC}$ é uma diagonal do paralelogramo $ACC'D$, assim $\overline{DC'} < \overline{DC}$. Construímos o ponto D' como imagem do ponto D pela reflexão de eixo r. Construímos as circunferências D_C e $D'_{C'}$. É fácil ver que C' está no interior da circunferência D_C uma vez que $\overline{DC'} < \overline{DC}$ .Da intersecção de D_C e $D'_{C'}$ sua resultam dois novos pontos, tomamos um deles e denominamo-lo E. Construímos as circunferências compasso D_{AE} e D'_{AE}

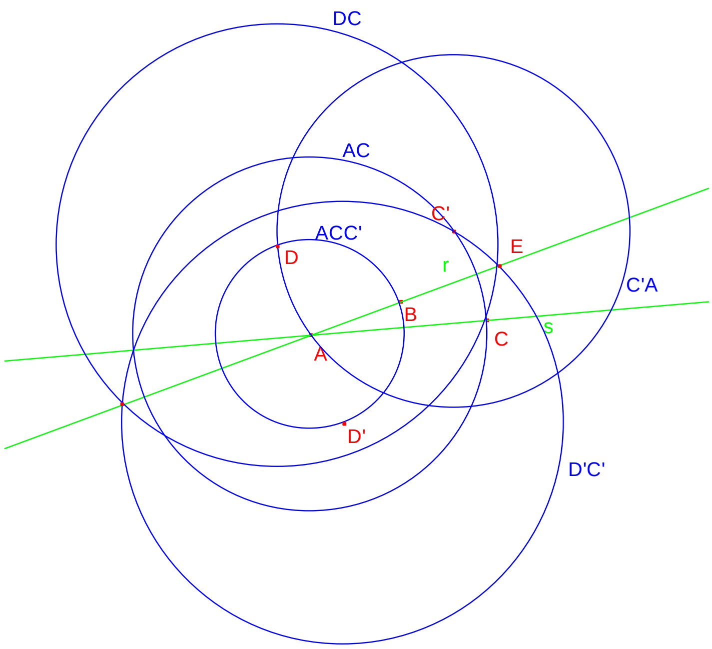

Figura 50: Teorema 3.16 (parte 1 de 2)

Teremos que garantir que D_{AE} e D'_{AE} se intersectam, para tal basta garantir que $\overline{AD} < \overline{AE}$:

Tomemos M como o ponto médio do segmento de recta $\overline{CC'}$ e determinemos o comprimento do segmento de recta $\overline{AE}$.

Sabemos que

$$\overline{AD} = \overline{CC'} = 2\overline{CM}$$

Consideramos o triângulo rectângulo ΔAMC e aplicamos o teorema de Pitágoras para determinar $\overline{CM}$

$$\overline{CM} = \sqrt{\left(\overline{AC}\right)^2 - \left(\overline{AM}\right)^2}$$

Assim, $\overline{AD} = 4\left(\overline{AC}\right)^2 - 4\left(\overline{AM}\right)^2$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo ΔDAE,

Vem, $\overline{AE} = 5\left(\overline{AC}\right)^2 - 4\left(\overline{AM}\right)^2$

Podemos assim concluir que $\overline{AD} < \overline{AE}$ e portanto as circunferências-compasso D_{AE} e D'_{AE} intersectam-se, sendo P e Q os pontos-compasso resultantes dessa intersecção.

Queremos mostrar que P e Q são os pontos de intersecção da recta compasso r e a circunferência compasso A_C:

Por construção, recta r é mediatriz de D' e D e por essa razão P e Q pertencem a r.

Tomamos $\overline{AC} = 1$ e consideramos o triângulo rectângulo ΔPAD. Aplicando o teorema de Pitágoras verificamos que $\overline{AP} = 1$.

Para mostrar que $\overline{AQ} = 1$ basta considerarmos o triângulo rectângulo ΔQAD e proceder de forma análoga.

Assim, podemos afirmar que os pontos P e Q são os pontos-compasso que resultam da intersecção de AB com A_C.

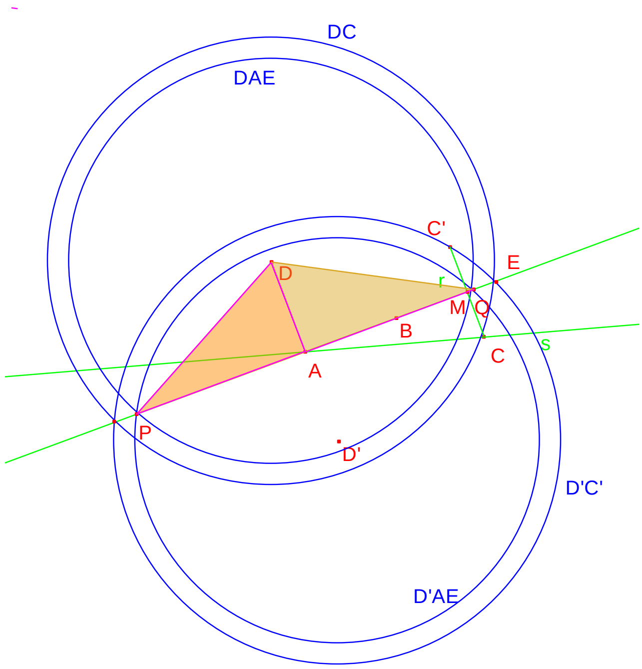

Figura 51: Teorema 3.16 (parte 2 de 2)

No caso em que r e s são perpendiculares seguimos uma construção análoga, mas tomamos o ponto D de tal forma que o segmento de recta $\overline{DA}$ seja um diâmetro da circunferência C'_A.

Dos teoremas 3.15 e 3.16 surge o seguinte resultado:

Teorema 3.17: Os pontos de intersecção de uma recta-compasso e de uma circunferência-compasso são pontos-compasso.

Lema 3.18: Seja c uma circunferência-compasso de centro O e raio r e s uma recta-compasso exterior à circunferência. A imagem da recta s pela inversão em relação a c está contida numa circunferência-compasso que contém O, sendo este o único ponto da circunferência de inversão que não é imagem da recta s.

Demonstração:

Seja c uma circunferência-compasso de centro em O e s uma recta-compasso exterior à circunferência.

Vejamos em primeiro lugar que podemos tomar dois pontos-compasso A e B equidistantes de O. Como por definição s tem dois pontos-compasso podemos tomar um ponto em s tal que a distância de $\overline{OB}$ é maior que a distância de O a s. Traçando a circunferência-compasso O_B a sua intersecção com a recta s dará origem a um novo ponto-compasso F, assim B e F são equidistantes de O. Pelo que vimos no teorema 3.14 os pontos F' e B' pertencem à circunferência s'.

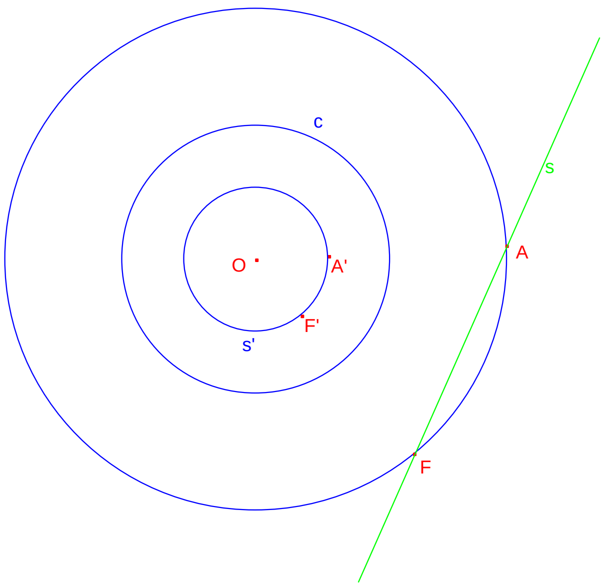

Figura 52: Lema 3.18

Teorema 3.19: A intersecção de duas rectas-compasso é um ponto-compasso.

Demonstração:

Consideremos r e s duas rectas-compasso não perpendiculares. Sejam A e B pontos-compasso pertencentes a r e sejam C e D pontos-compasso pertencentes a s.

Construímos C' como uma reflexão do ponto C, tomando como eixo de reflexão a recta r. Construímos o ponto C'' como imagem de C' pela reflexão de eixo s. Construímos a circunferência-compasso que contém C, C' e C'' usando a construção efectuada na demonstração do lema 3.13. O centro desta circunferência é um ponto-compasso ao qual chamamos I.

Como I é o centro da circunferência-compasso que passa por C, C' e C'' encontra-se equidistante destes pontos, logo pertence à mediatriz de C' e C'' é à mediatriz de C' e C que são as rectas s e r, respectivamente.

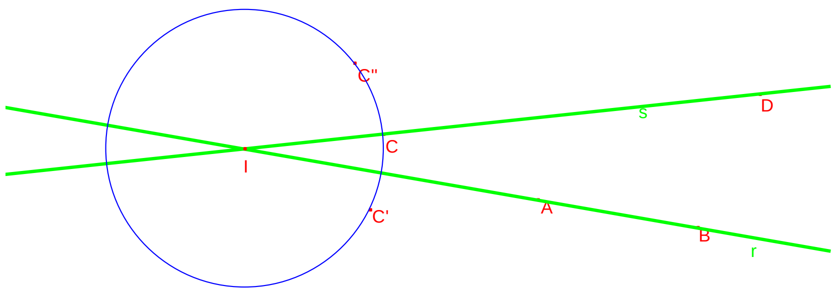

Figura 53: Teorema 3.19

No caso em que r e s são rectas-compasso perpendiculares teremos de construir o ponto A' como imagem de A por uma reflexão de eixo s. O ponto médio de A e A', intersecção de s e r, será um ponto-compasso pelo teorema 3.8.

Teorema 3.20: Se P e O são dois pontos-compasso, então existem pontos-compasso Q, R e S em O_P, de tal forma que $\square PQRS$ é um quadrado. **(Resolução por compasso do Problema de Napoleão)**

Demonstração:

Sejam O e P dois pontos-compasso e O_P uma circunferência-compasso.

Seja R o ponto-compasso resultante da intersecção da circunferência O_P com a recta OP (Teorema 3.17). Construímos a recta-compasso s que é a mediatriz de R e P. Da intersecção de O_P com s resultam dois novos pontos-compasso que denominamos por R e S. Construímos o polígono $PQRS$ e por construção podemos afirmar que $\square PQRS$ é um quadrado.

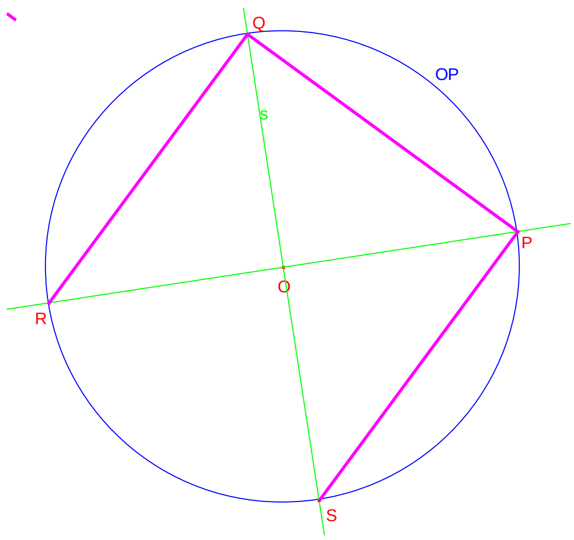

Figura 54: Teorema 3.20

<u>**Teorema 3.21:**</u>

a) Se A, B, C e D são pontos-compasso e se $A \neq B$, então existe um ponto-compasso em AB ao qual chamamos E, de tal forma que $\overline{AE} = \overline{CD}$.

b) Se P e Q são pontos-compasso então PQ é um número-compasso.

Demonstração a):

Sejam A, B, C e D quatro pontos-compasso e $A \neq B$. Consideremos a recta-compasso AB. Construímos a circunferência-compasso A_{CD} e a sua intersecção com a recta-compasso AB dará origem ao ponto-compasso E (teorema 3.17). A distância de A a E será igual à distância de C a D.

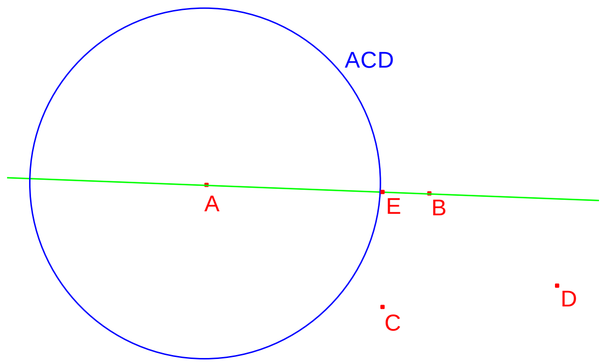

Figura 55: Teorema 3.21 a)

Demonstração b):

Demonstração análoga à anterior tomando $A=P1$ e $B=P2$.

Lema 3.22:

Se p e q são pontos-compasso então $p.q$ é um número-compasso

Demonstração:

Tomemos os pontos-compasso de coordenadas $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$ e sejam p e q dois números-compasso quaisquer. Sejam P e Q os pontos-compasso de coordenadas $(p,0)$ e $(q,0)$, respectivamente. Construímos as circunferências-compasso de centro $(0,0)$ que passam por P e Q, respectivamente, e as rectas-compasso definidas pelos eixos coordenados. A sua intersecção com os eixos coordenados dará origem a seis novos pontos-compasso, consideremos os pontos-compasso de coordenadas $(0,q)$, $(0,p)$, $(p,0)$ e $(q,0)$.

Denominemos por s a recta-compasso que passa por $(0,1)$ e $(p,0)$. Construímos a circunferência de centro $(p,0)$ que passa em $(0,0)$ e a circunferência de centro $(0,p)$ que passa em $(0,0)$. A intersecção destas dará origem a um novo ponto-compasso ao qual chamamos A.

Tomemos a recta que passa por A e P e denominamo-la r, por construção esta será paralela ao eixo das ordenadas.

Construímos a circunferência de centro em P e com raio igual à distância entre $(0,q)$ e $(0,0)$. A intersecção desta com r dará origem a dois novos pontos-compasso. Tomemos o ponto mais próximo de $(0,q)$ e denominamo-lo B. Consideremos a recta-compasso que passa por B e $(0,q)$ e denominamo-la t. Por construção podemos afirmar que t e s são rectas-compasso paralelas.

A intersecção de t com o eixo das abcissas dará origem a um novo ponto-compasso de coordenadas $(p.q,0)$ (demonstração análoga a teorema 2.6). Assim, por definição de número-compasso podemos afirmar que $p.q$ é número-compasso.

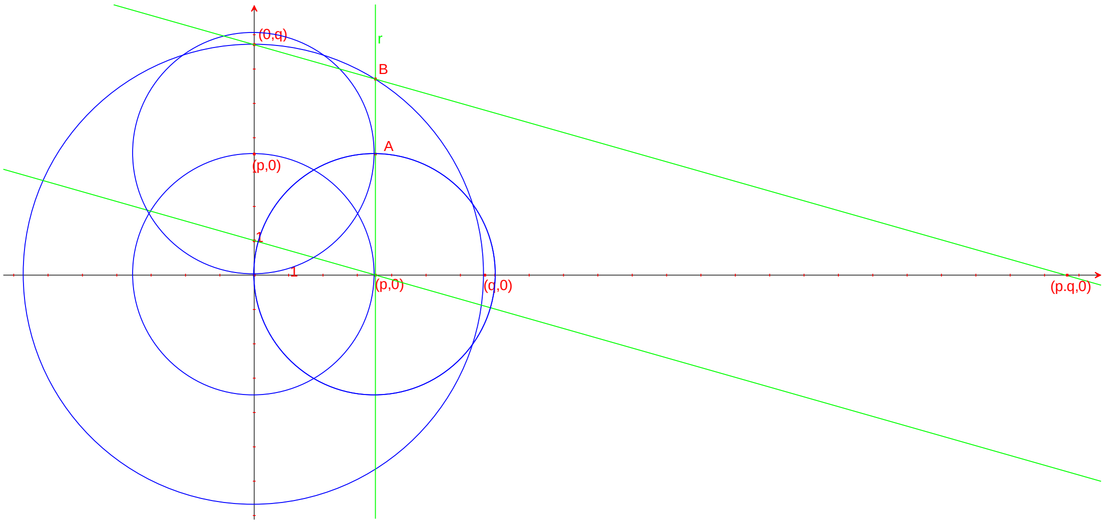

Figura 56: Lema 3.22

Dos resultados nos teoremas 3.2, 3.17 e 3.19 surge o seguinte resultado:

<u>Teorema 3.23 (O Teorema de Mohr-Mascheroni):</u> Um ponto é ponto-compasso se e só se o ponto for ponto-rc.

Neste capítulo mostrámos que é possível usando apenas o compasso traçar os mesmos pontos construídos com a régua não graduada e o compasso que não conserva medidas, uma vez que criámos com o compasso a ferramenta régua ao demonstrarmos os teoremas 3.17 e 3.19.

4 A Régua

O resultado surpreendente do capítulo anterior suscita-nos a curiosidade de averiguar a possibilidade de, utilizando apenas a régua para traçar rectas que passem por dois pontos dados, construir geometricamente os mesmos pontos que foi possível construir usando a régua e o compasso ou apenas o compasso com as particularidades já mencionadas nos capítulos anteriores, a saber, régua não graduada e compasso que não permite transportar a medida do raio.

Vamos iniciar este capítulo com a demonstração de dois resultados que servirão de apoio para algumas demonstrações a realizar posteriormente, usando apenas a régua não graduada.

Teorema 4.1: Se AB e CD são rectas paralelas distintas, E é o ponto de intersecção de AD com BC e F é o ponto de intersecção de AC com BD, então EF bissecta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Demonstração:

Sejam AB e CD duas rectas paralelas distintas. Construímos as rectas AD e BC. Denominamos por E ponto de intersecção dessas rectas. De seguida, construímos as rectas AC e BD, e denominamos por F o ponto resultante da sua intersecção. Construímos a recta EF que intersecta as rectas AB e CD e da qual resultam dois pontos que denominamos por M e L, respectivamente.

Podemos afirmar que os triângulos ΔAME e ΔDLE são semelhantes, assim como os triângulos ΔBME e ΔCLE, pelo critério AA.

Logo, podemos considerar as seguintes relações:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{DL}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{LE}} \text{ e } \frac{\overline{BM}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{LE}}$$

Assim,

$$\overline{ME} = \frac{\overline{BM}.\overline{LE}}{\overline{CL}}$$

Então,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{DL}} = \frac{\overline{DL}}{\overline{CL}}$$

Podemos igualmente afirmar que os triângulos ΔAMF e ΔCLF são semelhantes e os triângulos ΔBMF e ΔDLF também, pelo critério AA.

Assim, podemos considerar as seguintes relações:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{LF}} \text{ e } \frac{\overline{BM}}{\overline{DL}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{LF}}$$

Temos,

$$\overline{MF} = \frac{\overline{BM}.\overline{LF}}{\overline{DL}}$$

logo,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{CL}}{\overline{DL}}$$

Portanto, $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{DL}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{CL}}{\overline{DL}}$ então $\overline{DL} = \overline{CL}$ e $\overline{AM} = \overline{BM}$.

Podemos concluir que EF bissecta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

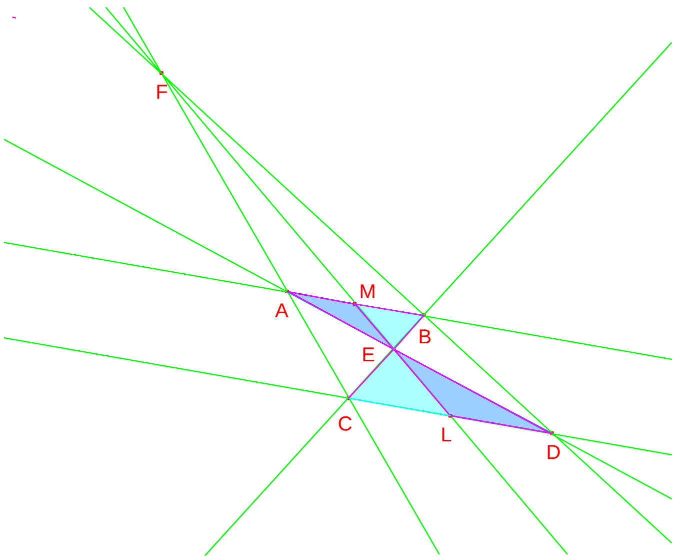

Figura 57: Teorema 4.1

<u>Corolário 4.2</u>: Sejam P, Q e R três pontos quaisquer não colineares. Seja M o ponto médio de $\overline{QR}$ e S um ponto tal que $S - P - Q$. Seja T o ponto de intersecção dos segmentos de recta $\overline{PR}$ e $\overline{SM}$, e seja U a intersecção da semi-recta $\overrightarrow{QT}$ com o segmento de recta $\overline{RS}$, então $PU \parallel QR$.

Demonstração:

Sejam P, Q e R três pontos quaisquer e M o ponto médio de $\overline{QR}$. Tomemos S um ponto tal que $S - P - Q$. Seja U' o ponto de intersecção do segmento de recta $\overline{RS}$ com a paralela à recta QR que contém P. Usando a construção do teorema 4.1 os segmentos de recta $\overline{PR}$ e $\overline{SM}$ são concorrentes. Assim, T pertence a $\overline{QU'}$. Portanto $U'=U$ e $PU \parallel QR$.

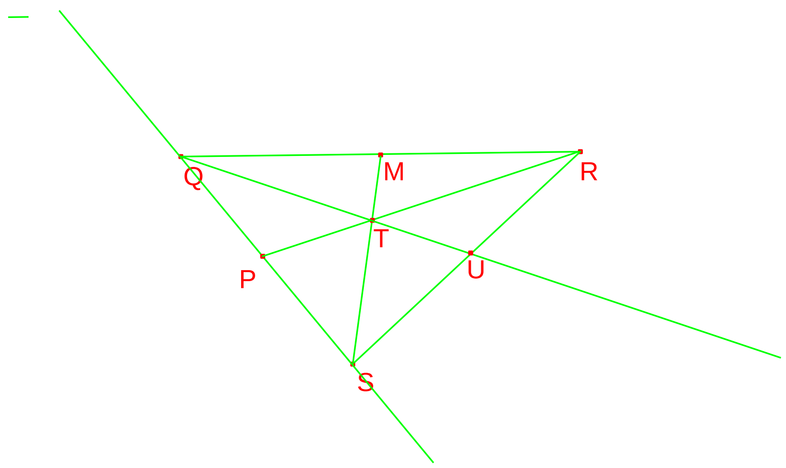

Figura 58: Corolário 4.2

De seguida iremos apresentar a definição formal para ponto, recta, circunferência e coordenadas no plano cartesiano obtidos utilizando a régua não graduada.

<u>Definição 4.3</u>: Consideremos os pontos do plano cartesiano $P1=(1,0)$, $P2=(0,1)$ $P3=(2,0)$ e $P4=(0,2)$. Um ponto do plano é um ***ponto-régua*** se for o último de uma sequência finita $P1$ $P2$ $P3$ $P4$ ... Pn em que cada ponto da sequência é obtido pela intersecção de duas rectas que contenham dois pontos anteriores da sequência.
Uma recta do plano é uma ***recta-régua*** se passa por dois pontos régua.
Uma circunferência do plano é uma ***circunferência-régua*** se passa por um ponto-régua e tem como centro um ponto-régua.
Um número x é um ***número-régua*** se $(x,0)$ é um ponto-régua.

Teorema 4.4: A intersecção de duas rectas-régua é um ponto-régua.

Demonstração:

Suponhamos que Z é o ponto de intersecção de duas rectas-régua r e s. Então, pela definição 4.3, existem pelo menos dois pontos-régua em cada uma das rectas r e s. Denominemos por P e Q dois pontos-régua pertencentes a r e por R e S dois pontos-régua pertencentes a s.

Os pontos P, Q, R e S são os últimos das sequências $P1, P2, ..., P; P1, P2, Q1, Q2, ..., Q; P1, P2, R1, R2, ..., R$ e $P1, P2, S1, S2, ..., S,$ respectivamente.

Assim, pela definição 4.3 o ponto Z é um ponto-régua, pois foi obtido pela intersecção de rectas que contêm pontos da sequência finita $P1, P2, P3,...,P,Q1, Q2, ...,Q,R1, R2,..., R,S1, S2,...S,Z.$

Lema 4.5: Os pontos de coordenadas $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$ são pontos-régua e vértices de um quadrado. Os pontos médios dos lados deste quadrado são pontos-régua. Todas as rectas-régua contêm três pontos-régua tais que um deles é o ponto médio dos outros dois.

Demonstração:

Vamos dar inicio à demonstração mostrando que os pontos de coordenadas $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$ são pontos-régua:

Por definição os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$ são pontos-régua, assim teremos apenas de mostrar que os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ também o são.

Os eixos coordenados ($x=0$ e $y=0$) são rectas-régua, pois cada um contém pelos menos dois pontos-régua, $P1=(1,0)$ e $P3=(2,0)$ no eixo do Ox e $P4=(0,2)$ e $P2=(0,1)$ no eixo dos Oy. A intersecção das rectas-régua $x=0$ e $y=0$ dará origem a um novo ponto-régua O de coordenadas $(0,0)$.

Construímos as rectas-régua $P1P4$ e $P3P2$ e obtemos o ponto-régua A resultante da sua intersecção. Construímos as rectas-régua $P3P4$ e AO que também se intersectam e dão origem ao ponto-régua B.

Teremos de mostrar que o ponto-régua B tem de coordenadas $(1,1)$:

As equações das rectas-régua $P1P4$ e $P3P2$ são $y=-2x+2$ e $y=-\frac{1}{2}x+1$, respectivamente. Logo, da sua intersecção resulta o ponto-régua A de coordenadas $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. Assim, a equação da recta-régua AO é $y=x$ que intersectará $P3P4$, de equação $y=-x+2$, no ponto-régua B de coordenadas $(1,1)$.

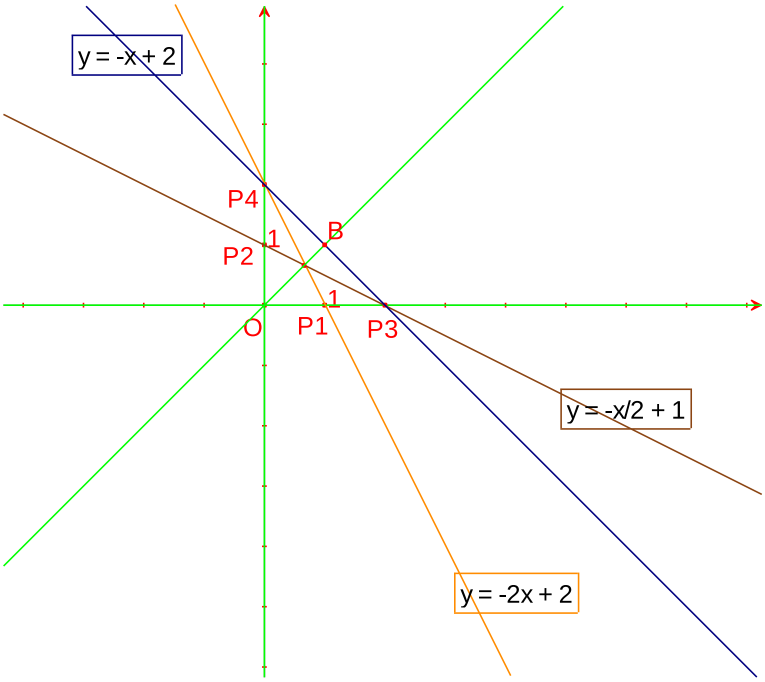

Figura 59: Lema 4.5 (parte 1 de 2)

Vamos mostrar que os pontos médios dos lados do quadrado $\square OP1P2B$ são pontos-régua:

Consideremos os pontos-régua $O=(0,0)$, $P2=(0,1)$, $P1=(1,0)$ e $B=(1,1)$ vértices do quadrado. Construímos a recta-régua $P2B$ de equação $y=1$. A intersecção de $P2B$ com a recta-régua $P1P4$ de equação $y=-2x+2$ dará origem ao ponto-régua C de coordenadas $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Consideramos a recta-régua OB de equação $y=x$ e traçamos a recta $P1P2$ de equação $y=-x+1$. Da intersecção de $y=x$ e $y=-x+1$ resulta o ponto-régua D de coordenadas $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Construímos a recta-régua CD de equação $x=\frac{1}{2}$ e designamos por E o ponto-régua resultante da intersecção do eixo do xx ($y = 0$) com CD. Assim, o ponto-régua E terá de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Construímos as recta-régua OC de equação $y = 2x$ e a recta-régua $P2E$ de equação $y = -2x + 1$. Da intersecção destas resulta um novo ponto-régua ao qual chamamos F, que terá de coordenadas $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Construímos a recta-régua FD de equação $y = 1$, consideramos a recta-régua que coincide com o eixo dos yy ($x = 0$) e a recta-régua $P1B$ de equação $x = 1$. Da intersecção destas rectas resultam os pontos-régua G e H de coordenadas $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, respectivamente.

Assim, podemos concluir que os pontos médios, dos lados quadrado, de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ representados por C, E, G e H, respectivamente, são pontos-régua. Desta forma, concluímos que os pontos médios dos lados do quadrado são pontos-régua.

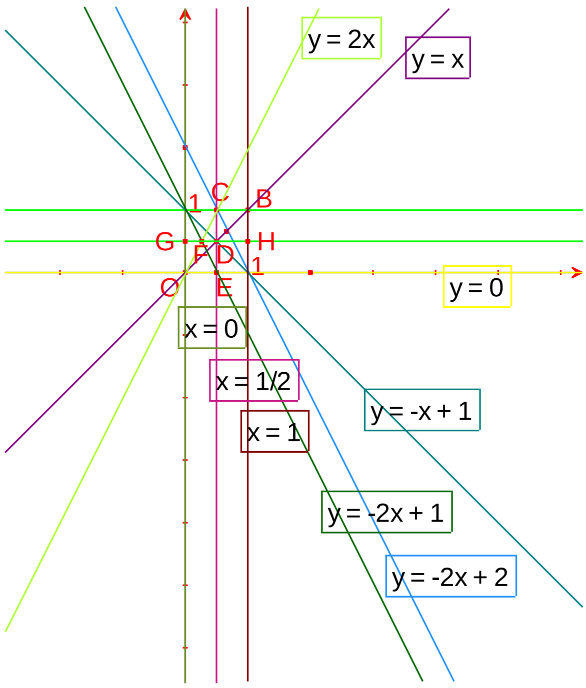

Figura 60: Lema 4.5 (parte 2 de 2)

Consideremos o trio de rectas-régua verticais $x=0$, $x=\frac{1}{2}$ e $x=1$ e o trio de rectas-régua horizontais $y=0$, $y=\frac{1}{2}$ e $y=1$. Qualquer recta-régua que tracemos no plano cartesiano irá intersectar um dos trios mencionados. Portanto, a intersecção dessa recta-régua com um dos trios irá dar origem a pontos-régua e os pontos médios estarão contidos nas rectas $x=\frac{1}{2}$ ou $y=\frac{1}{2}$. Assim, todas as rectas-régua contêm três pontos-régua em que um deles é o ponto médio dos outros dois.

<u>Teorema 4.6:</u>

a) Sejam A e B dois pontos régua. Se existir uma recta-régua paralela a AB, mas não coincidente, então o ponto médio de $\overline{AB}$ é um ponto-régua.
b) Se A, M, B e P forem quatro pontos-régua e M for ponto médio de A e B, então a recta paralela a AB que contém P é uma recta-régua.

Demonstração a):

Seja r a recta-régua que contém os pontos A e B e seja s uma recta-régua paralela a AB, mas não coincidente. A recta s tem pelo menos três pontos (lema 4.5), tomemos dois pontos C e D em s tais que AC e DB não sejam paralelas. Aplicando a construção realizada na demonstração do Teorema 4.1 obtemos o ponto M (ponto médio de A e B) que pelo teorema 4.4 podemos afirmar que se trata de um ponto-régua, pois resulta da intersecção de rectas-régua.

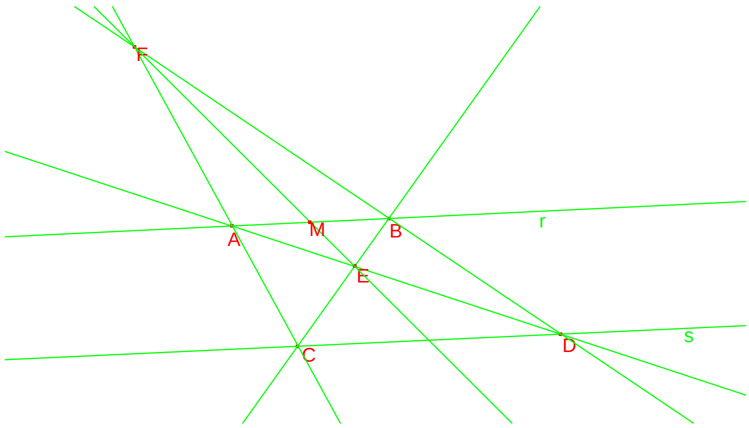

Figura 61: Teorema 4.6 a)

Demonstração b):

Sejam A, M e B pontos-régua e M o ponto médio de A e B. Seja P um ponto-régua não colinear com A e B. Construímos as rectas-régua AB, PM, AP e PB.

Traçamos o ponto médio de A e P e designamos esse ponto-régua por N (lema 4.5). Construímos a recta-régua NB. Da intersecção de PM com NB resulta um ponto ao qual chamamos X. Construímos a recta AX e a recta NM. Estas intersectam-se num ponto ao qual chamamos Y. Da intersecção das rectas-régua AX e PB resulta um novo ponto-régua que designamos por J. Construímos a recta BY. Da intersecção de BY com AP resulta um ponto-régua ao qual chamamos S. Construímos a recta-régua SM e tomamos a recta-régua BN. Da intersecção da recta SM e BN resulta um ponto-régua ao qual chamamos I. Construímos a recta-régua IP.

Vejamos que a recta-régua IP é a paralela a AB que contém P:

$AM=MB$, pois M por construção é ponto médio de A e B.

$AN=NP$, pois por construção N é o ponto médio de A e P.

O Ponto X é o baricentro do triângulo ΔABP, pois resulta da intersecção das medianas PM e NB. Como J resulta da intersecção de AX com PB podemos afirmar que J é o ponto médio de P e B.

Os triângulos ΔNAM e ΔPAB são semelhantes, pois têm um ângulo em comum e dois lados proporcionais (critério LAL). Então, podemos afirmar que as rectas NM e PB são paralelas e Y é o ponto médio de MN, pois resulta da intersecção de AJ com MN sendo J o ponto médio de B e P.

Tomemos I' como o ponto de intersecção da recta BN com a recta paralela a BN que passa por A.

Queremos mostrar que I e I' são o mesmo ponto:

Os triângulos ΔBMN e $\Delta BAI'$ são semelhantes, pelo critério AA. A razão de semelhança é de 1:2 dado que M é ponto médio de A e B, como consequência sabemos que N é o ponto médio de I' e B.

Construímos o ponto R como intersecção das rectas BS e AI'. Como o ponto R pertence à recta BY e Y é o ponto médio de N e M, então R será o ponto médio de A e I'.

O ponto S é o baricentro do triângulo $\Delta AI'B$, pois está na intersecção das medianas BR e NA. Como o ponto médio de A e B é M quando traçamos a recta SM esta tem de passar por I, pois S é o baricentro do triângulo $\Delta AI'B$, logo tem de passar em I'.

Assim, podemos concluir que $I'=I$. Como consequência desta igualdade podemos afirmar que N é o ponto médio de I e B e portanto as rectas AI e BP são paralelas.

Sendo N o ponto médio de I e B e também de A e P, então o quadrilátero $IABP$ é um paralelogramo. Então as rectas AB e IP são paralelas.

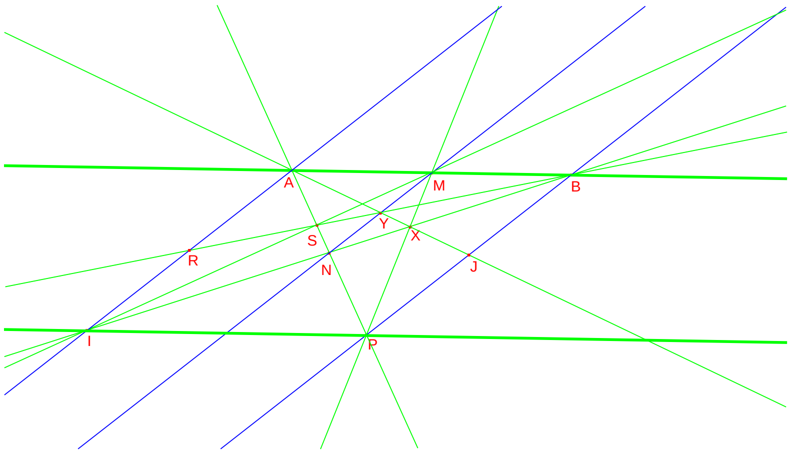

Figura 62: Teorema 4.6 b)

Como resultado dos lema 4.5 e teorema 4.6 surge o seguinte teorema:

<u>Teorema 4.7:</u> A recta que contém um ponto-régua e é paralela a uma recta-régua é recta-régua. O ponto médio de dois pontos-régua é um ponto-régua.

Pelo lema 4.5 podemos concluir que todas as rectas-régua contêm três pontos-régua sendo um deles é o ponto médio dos outros dois.

Pelo teorema 4.6 podemos concluir que a recta paralela a uma recta-régua AB que contém um ponto-régua P é uma recta-régua.

<u>Teorema 4.8:</u> Sejam P e Q dois pontos-régua. Se A e B são dois pontos-régua pertencentes a PQ, então existe um ponto-régua X em PQ de tal forma que $\overline{PX} = \overline{AB}$.

Demonstração:

Sejam P e Q dois pontos-régua e sejam A e B são dois pontos-régua pertencentes à recta-régua PQ (definição 4.3). Seja C um ponto-régua que não pertence a PQ. Construímos a recta-régua t paralela a PQ que contém C. Traçamos a recta-régua AC e a recta-régua r paralela a AC que contém B. A intersecção de r com t dará origem a um novo ponto-régua ao qual chamamos D. Construímos a recta-régua CP e a recta-régua s paralela a CP que contém D. A intersecção de CP com PQ dará origem a um novo ponto-régua ao qual chamamos X.

Como CP e DX são duas rectas-régua paralelas e os segmentos de recta $\overline{CD}$ e $\overline{PX}$ são iguais, e por outro lado AC e BD são duas rectas-régua paralelas e portanto $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ são iguais podemos concluir que $\overline{CD} = \overline{PX} = \overline{AB}$.

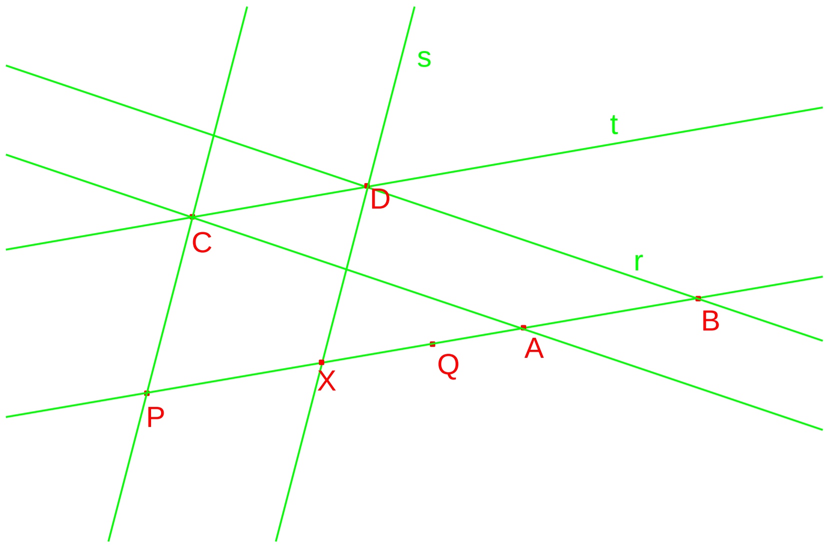

Figura 63: Teorema 4.8

<u>**Corolário 4.9:**</u> Se p e q são dois números-régua, então $p+q$ e p-q são números-régua.

Demonstração: Demonstração análoga à do teorema 4.8.

Construção de $p+q$:

Tomemos C um ponto-régua em $y=1$ e consideremos os pontos-régua de coordenadas $A=(0,0)$, $B=(q,0)$ e $P=(p,0)$. Procedendo à construção realizada na demonstração do teorema 4.8 e obtemos o ponto-régua F de coordenadas $(p+q,0)$.

Construção de p-q:

Tomemos C um ponto-régua em $y=1$ e consideremos os pontos-régua de coordenadas $A=(0,0)$, $B=(q,0)$ e $P=(p,0)$. Construímos a recta-régua AC e a paralela a AC que passa em B. A intersecção da paralela com a recta $y=1$ dará origem a um novo ponto-régua ao qual chamamos D. Construímos a recta-régua PD e a paralela a PD que passa por C. A intersecção da paralela com a recta $x=0$ dará origem a um ponto-régua ao qual chamamos G e que terá de coordenadas $(p\text{-}q,0)$.

Como $(p+q,0)$ e $(p\text{-}q,0)$ são pontos-régua, pela definição 4.3 podemos concluir que $p+q$ e $p\text{-}q$ são números-régua.

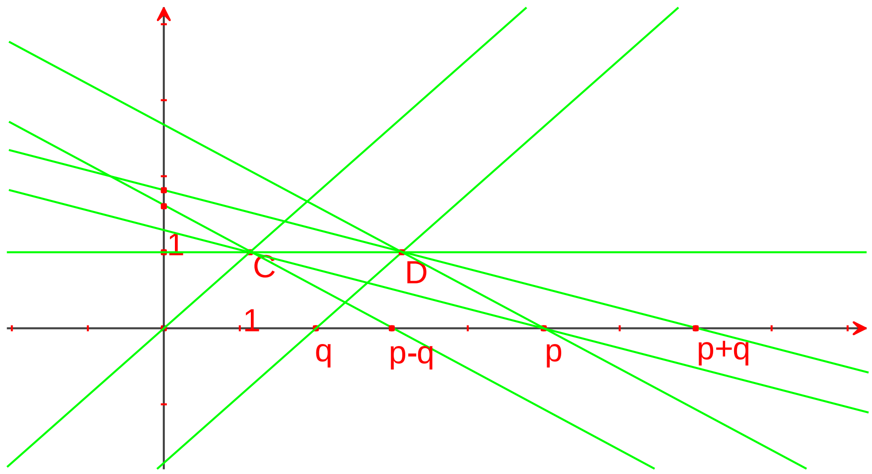

Figura 64: Corolário 4.9

Teorema 4.10: Sejam O e A dois pontos-régua distintos. Se B e C são dois pontos-régua, distintos de O, em $\overrightarrow{OA}$, então o ponto X em $\overrightarrow{OA}$, tal que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OX}}$, é um ponto-régua.

Demonstração:

Sejam O e A dois pontos-régua e consideremos OA a recta-régua que contém esses pontos. Sejam B e C dois pontos-régua, distintos de O, contidos em $\overrightarrow{OA}$. Tomemos um ponto-régua D, não colinear com O e A, e construímos a recta-régua s paralela a OA que o contém. Tomemos E um ponto-régua em s distinto de D em que as rectas AE e OD não são paralelas, pelo teorema 4.7 sabemos que existe um ponto nestas condições. Construímos as rectas-régua AE e OD. Chamemos F ao ponto-régua que resulta da intersecção de AE com OD. Construímos a recta-régua BF que intersectará a recta-régua s num ponto ao qual chamamos G. Construímos as rectas-régua EC e OF. A intersecção das rectas-régua EC e OF dará origem a um novo ponto-régua ao qual chamamos H. Construímos a recta-régua $\overline{HG}$ que se intersectará com $\overrightarrow{OA}$ num ponto e dará origem ao ponto-régua que denominamos por X.

Consideremos os trapézios $DOAE$, $DOCE$, $DOBG$ e $DOXG$. Como s é paralela a OA podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\frac{\overline{OX}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DE}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OX}}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{DG}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DG}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OX}}$$

Assim, podemos concluir que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OX}}$.

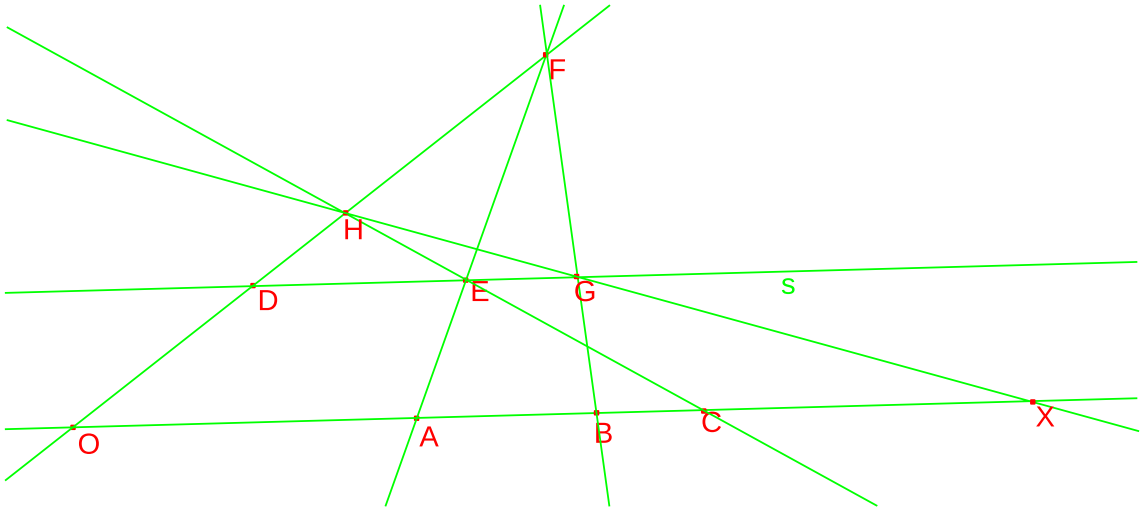

Figura 65: Teorema 4.10

<u>Corolário 4.11:</u> Se p, q e r são números-régua e $r \neq 0$, então $p.q$ e $\frac{p}{r}$ são números-régua.

Demonstração:

Sejam *p, q* e *r* números-régua e $r \neq 0$. Tomemos os pontos-régua *P1=(1,0), P2=(0,1), P=(p,0)* e *Q=(q,0)*. Construímos a recta-régua $P1P2$ e construímos a recta-régua paralela a $P1P2$ que contém Q. A sua intersecção com a recta-régua $x=0$ dará origem ao ponto-régua *D* de coordenadas *(0,q)*. Construímos a recta-régua $P2P$ e a paralela a esta que contém *D*. A intersecção da paralela com a recta-régua $y=0$ dará origem ao ponto-régua *E* de coordenadas *(e,0)*.

Teremos que mostrar que *E* tem de coordenadas *(p.q,0)*:

Consideremos os triângulos rectângulos semelhantes $\Delta P2OP$ e ΔDOX e vejamos a seguinte relação: $\frac{1}{q}=\frac{p}{e} \Leftrightarrow e=p.q$

Assim, podemos concluir que *E* tem de coordenadas *(p.q,0)*. Logo, pela definição 4.3 podemos concluir que *p.q* é número-régua.

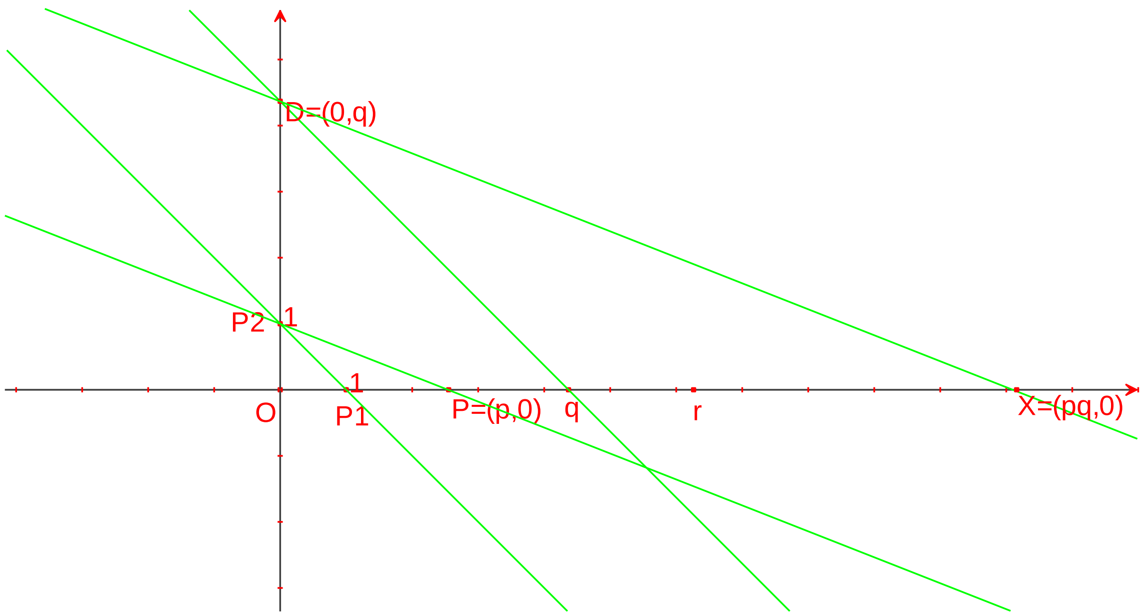

Figura 66: Corolário 4.11

Vejamos que $\frac{p}{r}$ é um número-régua:

Sejam *O=(0,0), R=(r,0), P=(p,0)* e *P1=(1,0)* as coordenadas de quatro pontos-régua. Pelo teorema 4.10, para *O* e *R* pontos-régua distintos e *P* e *P1* pontos-régua em $\overline{OR}$ podemos construir *F* em $\overline{OR}$ tal que $\frac{\overline{OR}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OP1}}{\overline{OF}} \Leftrightarrow \frac{r}{p}=\frac{1}{\overline{OF}} \Leftrightarrow \overline{OF}=\frac{p}{r}$

Como F é um ponto-régua de coordenadas $\left(\frac{p}{r},0\right)$, podemos concluir que $\frac{p}{r}$ é um número-régua.

Do resultado obtido nos Corolários 4.9 e 4.11 surge o seguinte corolário:

Corolário 4.12: Conjunto dos números-régua é um corpo.

Teorema 4.13: Um ponto é ponto-régua se e só se as coordenadas desse ponto forem números racionais.

Demonstração:

Vamos mostrar que um ponto é ponto-régua se as suas coordenadas forem um número racional:

O ponto de coordenadas $(1,0)$ é um ponto-régua. Pelo corolário 4.9 podemos afirmar que $(n,0)$ são as coordenadas de um ponto-régua para qualquer n inteiro. Pelo corolário 4.11, o ponto de coordenadas $\left(\frac{m}{n},0\right)$ é um ponto-régua para m e n inteiros e $n \neq 0$, então podemos afirmar que para qualquer racional r o ponto de coordenadas $(r,0)$ é um ponto-régua.

Tomemos os pontos R e S de coordenadas $R=(r,0)$ e $S=(s,0)$, com r e s racionais, e consideremos a recta-régua de equação $x = 0$. Construímos as rectas-régua $P1P2$ e a paralela a esta que contém R, à qual chamamos t. Da intersecção de t com a recta de equação $x = 0$ resulta o ponto-régua de coordenadas $(0,r)$.

Por outro lado, a recta de equação $x = r$ é a paralela a $x = 0$ que contém $(r,0)$, portanto trata-se de uma recta-régua. Como a recta de equação $y = 0$ também é uma recta-régua aplicando a construção anterior obtemos a recta-régua $y = s$.

A intersecção das rectas-régua de equação $x = r$ e $y = s$ dará origem a um ponto-régua de coordenadas (r,s).

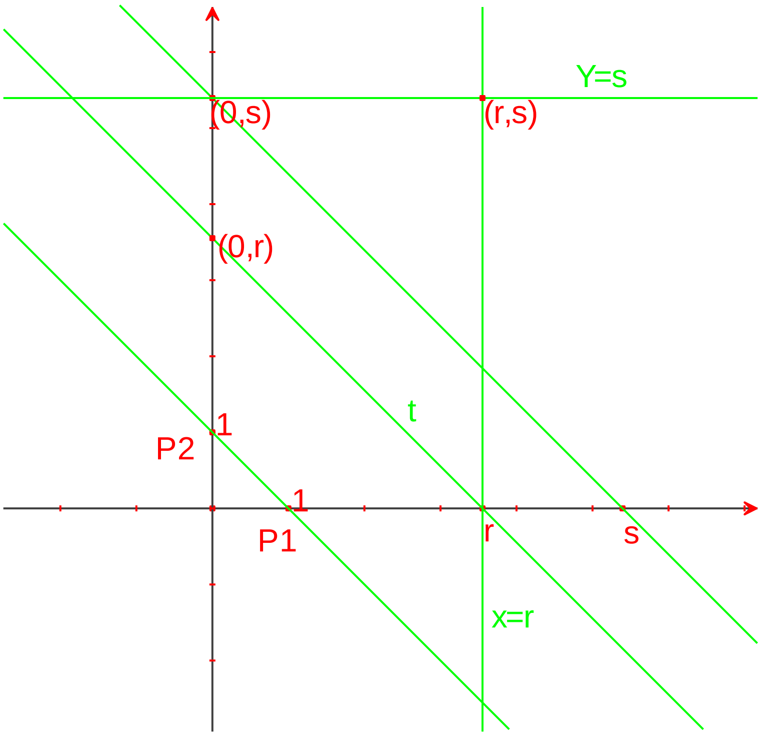

Figura 67: Teorema 4.13

De seguida vamos mostrar o recíproco do teorema: Dado um ponto-régua as suas coordenadas (p,q) são números racionais:

Vamos supor que os pontos-régua A, B, C e D têm coordenadas racionais $A=(a1,a2)$, $B=(b1,b2)$, $C=(c1,c2)$ e $D=(d1,d2)$. Tomemos as rectas-régua AB e CD. As equações das rectas-régua AB e CD podem ser escritas como quocientes racionais. Se nenhuma destas rectas for vertical as equações são as seguintes:

A equação da recta AB: $y=\frac{b2-a2}{b1-a1}x+\frac{a2b1-a1b2}{b1-a1}$

Sendo,

$$m=\frac{b2-a2}{b1-a1}$$

$$b=\frac{a2b1-a1b2}{b1-a1}$$

A equação da recta CD: $y=\frac{c2-d2}{c1-d1}x+\frac{c1d2-c2d1}{c1-d1}$

Com,

$$m' = \frac{c2 - d2}{c1 - d1}$$

$$b' = \frac{c1d2 - c2d1}{c1 - d1}$$

A intersecção das rectas-régua AB e CD é o ponto-régua de coordenadas racionais $\left(\frac{-b + b'}{m - m'}, \frac{b'm - bm'}{m - m'} \right)$, com $m - m' \neq 0$.

Como os pontos iniciais *P1, P2, P3,* ... têm coordenadas racionais e qualquer ponto-régua é construído por uma sequência finita deste tipo, então as coordenadas são racionais.

Observação: Se as rectas-régua AB e CD forem verticais não se intersectam, portanto apenas uma delas poderá ser vertical. Sem perda de generalidade tomamos AB a recta vertical e as coordenadas dos pontos *A=(a1,a2)* e *B=(a1,b2)*, assim a equação da recta AB será $x = a1$ e a demonstração será análoga à anterior.

Do resultado obtido no teorema 4.12 surge o seguinte corolário:

Corolário 4.14: O corpo de números-régua é $\mathbb{Q}$.

Na demonstração do teorema anterior (Teorema 4.12) provamos que as coordenadas de quaisquer pontos-régua são números racionais.

Teorema 4.15: A perpendicular a uma recta-régua que intersecta uma recta-régua e passa por um ponto-régua é uma recta-régua.

Demonstração:

Sejam P e i um ponto-régua e uma recta-régua, respectivamente. Vamos construir a recta-régua perpendicular a i que contém P. Consideremos o quadrado □*P1BP2O* cujos vértices são pontos-régua (lema 4.5). Construímos o ponto-régua Q resultante da intersecção de $P1P2$ com BO. Sem perda de generalidade, vamos supor que a paralela a i que passa por Q intersecta $P1B$, chamemos R a esse ponto de intersecção. Construímos a recta-régua paralela a $P1O$ que contém R. A sua intersecção com $P2O$ vai dar origem ao ponto-régua que denominamos por S. Assim, podemos afirmar que os segmentos de recta $\overline{P1R}$ e $\overline{OS}$ são iguais. Construímos a paralela a OB que contém S. A sua intersecção com $P2B$ vai dar origem a um novo ponto-régua ao qual chamamos T. Assim, podemos afirmar que os segmentos de recta $\overline{BT}$ e $\overline{OS}$ são iguais e assim como os segmentos de recta $\overline{BT}$ e $\overline{P1R}$.

Vejamos que a recta-régua QT é perpendicular à recta-régua i:

Consideremos os triângulos $\Delta QP1R$ e ΔQBT e observemos as seguintes igualdades: $\overline{QP1} = \overline{QB}$, $\overline{BT} = \overline{P1R}$ e os ângulos $QP1R$ e QBT têm de amplitude 45º grau, uma vez que as rectas QB e $QP1$ bissectam dois ângulos internos do quadrado. Assim, pelo critério LAL, podemos afirmar que os triângulos $\Delta QP1R$ e ΔQBT são iguais. O ângulo formado pelo triângulo $\Delta BQP1$ tem amplitude 90º, se considerarmos a rotação de 90º graus de centro em Q que transforma $P1$ em B e R em T, podemos concluir que $QR \perp QT$. Portanto, podemos afirmar que $\overline{QT} \perp i$. Para obtermos a perpendicular a i que contém P basta construir a paralela a $\overline{QT}$ que contém P.

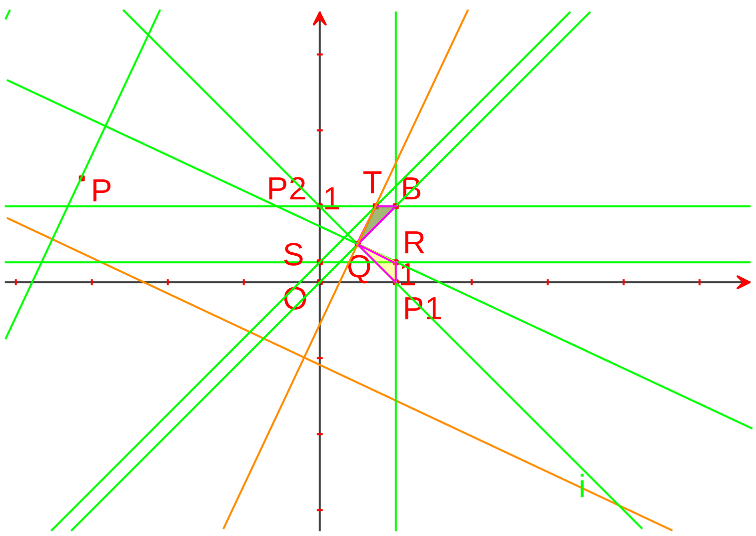

Figura 68: Teorema 4.15

<u>Teorema 4.16:</u> Se P, Q e R são pontos-régua não colineares e se V e A são dois pontos-régua, então existe um ponto-régua X tal que o ângulo AVX é congruente com o ângulo PQR.

<u>Demonstração:</u>

Sejam V, A, P, Q e R cinco pontos-régua e P, Q e R não colineares.

Construímos as rectas-régua PQ, QR e VA. Construímos a recta-régua t como a paralela a PQ que contém V. Como se trata de uma recta-régua tem pelo menos dois pontos-régua, tomemos um ponto-régua em t e chamemos-lhe B. Construímos a recta-régua s como a paralela a QR que contém V. Construímos a recta-régua perpendicular a s que contém B. Construímos o ponto de intersecção desta perpendicular que passa por B e chamemos-lhe C. Sem perda de generalidade, suponhamos que A está de tal forma que $VA \perp AB$. Assim, podemos concluir que as amplitudes dos ângulos PQR e CVB são congruentes, pois tratam-se de ângulos de lados paralelos.

Construímos a recta-régua CA e a perpendicular a esta que passa por V. A intersecção desta perpendicular com CA dará origem ao ponto-régua que denominamos por X.

Queremos mostrar que a amplitude do ângulo AVX é congruente com a amplitude do ângulo PQR, vejamos:

Consideremos a circunferência de diâmetro $\overline{VB}$, os pontos C e A pertencem a esta circunferência e os ângulos VAX e VBE são ângulos inscritos na circunferência. A estes corresponde o mesmo arco de circunferência VC, logo os ângulos inscritos têm a mesma amplitude. Como são ambos triângulos rectângulos e já mostramos que os ângulos VAX e VBE são iguais, podemos afirmar que amplitude do ângulo AVX é congruente com a amplitude do ângulo CVB que é igual à amplitude do ângulo PQR.

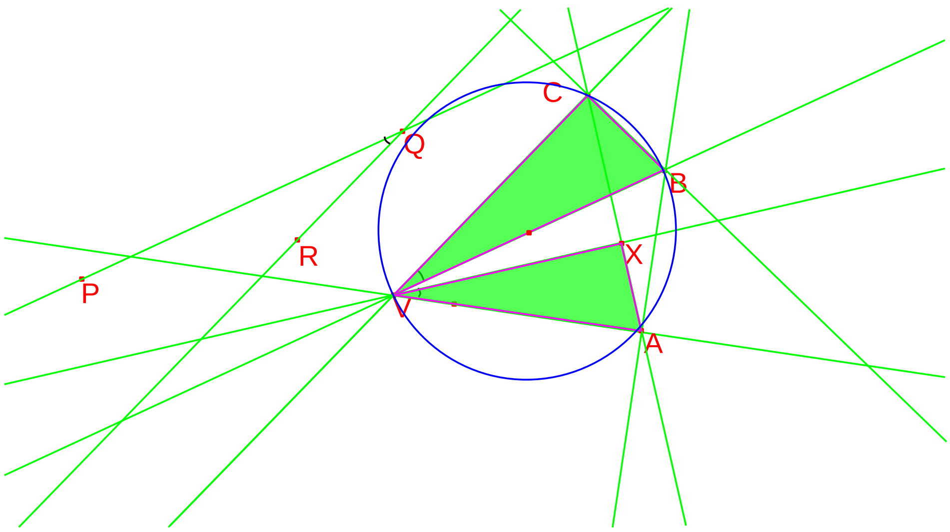

Figura 69: Teorema 4.16

Lista de Construções, Definições e Resultados

Construção 1.1 (pág.9): Dado três pontos A, B e C construir um ponto F tal que $\overline{AF} = \overline{BC}$.

Construção 1.2 (pág.10): Construção de um pentágono regular.

Construção 1.3 (pág.13): Dado o segmento de recta $\overline{AB}$, construir os pontos E e F tal que $\square ABEF$ seja um quadrado.

Construção 1.4 (pág.15): Num triângulo dado circunscreva um círculo **(**Euclides IV.5.).

Construção 1.5 (pág.16): Num triângulo dado inscreva um círculo **(**Euclides IV.4.).

Definição 2.1 (pág.22): Sejam $P1=(0,0)$ e $P2=(1,0)$ dois pontos-régua-e-compasso do plano cartesiano. Um ponto do plano é um ***ponto-régua-e-compasso (ponto-rc)*** se for o último de uma sequência finita $P1\ P2\ P3\ P4$ ... Pn em que cada ponto da sequência é obtido de uma das três formas seguintes:

(i) Como intersecção de uma recta que passa por dois pontos anteriores da sequência com uma circunferência passando por um ponto anterior da sequência e com centro num ponto anterior da sequência.
(ii) Como intersecção de duas circunferências, cada uma das quais passando por um ponto anterior da sequência e com centro num ponto anterior da sequência.
(iii) Como intersecção de duas rectas, cada uma das quais passando por dois pontos anteriores da sequência.

Uma recta do plano é uma ***recta-régua-e-compasso (recta-rc)*** se passa por dois pontos-rc. Uma circunferência do plano é uma ***circunferência-régua-e-compasso (circunferência-rc)*** se passa por um ponto-rc e tem como centro um ponto-rc. Um número x é um ***número-régua-e-compasso (número-rc)*** se $(x,0)$ é um ponto-rc.

Teorema 2.2 (pág.24):

a) O ponto de intersecção de duas rectas-rc é um ponto-rc;
b) O ponto de intersecção de uma recta-rc e uma circunferência-rc é um ponto-rc;
c) O ponto de intersecção de duas circunferências-rc é um ponto-rc.

Teorema 2.3 (pág.26): Se A, B, C são três pontos-rc então A_{BC} é uma circunferência-rc.

Teorema 2.4 (pág.27):

a) Os eixos coordenados são rectas-rc.
b) Todos os pontos $(p,0)$, $(-p,0)$, $(0,p)$ e $(0,-p)$ são pontos-rc se um deles for ponto-rc.
c) O número x é número-rc se e só se $-x$ for número-rc.
d) O ponto de coordenadas (p,q) é ponto-rc se e só se p e q forem ambos números-rc.

Lema 2.5 (pág.30): Dado um ponto-rc P e uma recta-rc r a recta perpendicular a r que contém P é recta-rc.

Lema 2.6 (pág.31): Dado um ponto P ponto-rc e uma recta r recta-rc a recta paralela a r que passa por P é recta-rc.

Definição 2.7 (pág.32): A mediatriz de um segmento de recta $\overline{AB}$ é a recta perpendicular a $\overline{AB}$ que contém o seu ponto médio.

Lema 2.8 (pág.32): Dados dois pontos-rc A e B, a mediatriz do segmento de recta $\overline{AB}$ e o ponto médio deste são recta-rc e ponto-rc, respectivamente.

Definição 2.9 (pág.33): Seja c uma circunferência de raio r e centro O e P um ponto qualquer, tal que P não coincide com O. O inverso P' de P em relação a C é o único ponto P' pertencente à semi-recta $\overrightarrow{OP}$ tal que $\left(\overline{OP}\right)\left(\overline{OP'}\right) = r^2$.

Lema 2.10 (pág.33): Dados dois pontos-rc A e C, o inverso de qualquer ponto em relação à circunferência-rc A_C também é um ponto compasso.

Definição 2.11 (pág.35):

(i) Um subconjunto de números reais F chama-se um corpo se contém 0 e 1, e satisfaz as seguintes condições: para quaisquer números a, b, c pertencentes a F, com $c \neq 0$, $a+b$, $a-b$, ab e $\frac{a}{c}$ estão em F.

(ii) Seja $\mathbb{Q}$ o corpo de números racionais e $\mathbb{R}$ o corpo de números reais. O corpo F é euclideano se para cada x pertencente a F, se $x>0$ então $\sqrt{x}$ pertence a F.

Lema 2.12 (pág.35): Um subconjunto de números reais F é um corpo se e só se os números 0 e 1 pertencem a F e para quaisquer a, b e c pertencentes a F, com c diferente de zero, a-b e $\frac{a}{c}$ também pertencem a F.

Teorema 2.13 (pág.36): Os números-rc formam um corpo.

Corolário 2.14 (pág.39): Todos os números racionais são números-rc.

Teorema 2.15 (pág.39): Os números-rc formam um corpo euclideano.

Definição 3.1 (pág.41): consideremos os pontos do plano cartesiano $P1=(0,0)$ e $P2=(1,0)$. Um ponto do plano é um ***ponto-compasso*** se for o último de uma sequência finita $P1, P2, P3, P4, ..., Pn$ ou for obtido pela intersecção de duas circunferências que contenham um ponto e o centro num ponto anterior da sequência.

Uma recta do plano é uma ***recta-compasso*** se passa por dois pontos compasso.

Uma circunferência do plano é uma ***circunferência-compasso*** se passa por um ponto-compasso e tem como centro um ponto-compasso.

Um número x é um ***número-compasso*** se $(x,0)$ é um ponto-compasso.

Teorema 3.2 (pág.41): Os pontos de intersecção de duas circunferências-compasso são pontos-compasso.

Teorema 3.3 (pág.42): Se P e Q são dois pontos-compasso, a mediatriz de $\overline{PQ}$ é uma recta-compasso.

Definição 3.4 (pág.43): Dado uma recta r, a reflexão de eixo r é a transformação do plano que a cada ponto P faz corresponder o único ponto, da recta perpendicular a r, que passa por P, que está a igual distância de r e é distinto de P.

Teorema 3.5 (pág.43): O transformado de um ponto-compasso por uma reflexão cujo eixo é uma recta-compasso, é também um ponto-compasso.

Teorema 3.6 (pág.43): Se A, B e C são três pontos-compasso, então A_{BC} é uma circunferência-compasso.

Teorema 3.7 (pág.44): Sejam A, B e C são três pontos-compasso, e sejam D e E os pontos de intersecção de A_B e B_A. Seja F tal que os pontos C e F são pontos de intersecção de D_C e E_C. Então A_{BC} é a circunferência-compasso A_F.

Teorema 3.8 (Teorema do ponto-médio-compasso) (pág.45):

a) Se A e B são pontos-compasso e N é um ponto tal que B é o ponto médio do segmento de recta $\overline{AN}$, então N é ponto-compasso.
b) Se A e B são pontos-compasso e M é o ponto médio do segmento de recta $\overline{AB}$, então M é ponto-compasso.

Teorema 3.9 (pág.47):

a) Se A e B são dois pontos-compasso e n um número inteiro positivo, então o ponto F em $\overrightarrow{AB}$, de tal forma que $AF=nAB$ é ponto-compasso.
b) Se A e B são dois pontos-compasso e n um número inteiro positivo, então o ponto Q em $\overrightarrow{AB}$, de tal forma que $AQ=AB/n$, é ponto-compasso.

Lema 3.10 (pág.48): Se A, B e C são pontos-compasso tal que C é exterior à circunferência A_B, então o ponto C', inverso a C em relação à circunferência A_B, é ponto-compasso.

Lema 3.11 (pág.49): Se A, B e C são pontos-compasso tal que C é interior à circunferência A_B e cuja distância ao centro A é maior que metade do raio, então o ponto C', inverso a C em relação à circunferência A_B, é ponto-compasso.

Lema 3.12 (pág.50): Se A, B e C são pontos-compasso tal que C é interior à circunferência A_B e cuja distância ao centro A é menor que metade do raio, então o ponto C', inverso a C em relação à circunferência A_B, é ponto-compasso.

Lema 3.13 (pág.52): Sejam A, B e C três pontos-compasso não colineares, com A equidistante de B e C. Então a circunferência C', que passa por A, B e C é uma circunferência-compasso.

Teorema 3.14 (pág.54): A imagem de uma recta s, por uma inversão numa circunferência de centro O e raio r, está contida numa circunferência que contém o ponto O. A saber o único ponto que não é imagem da recta s é o ponto O.

Teorema 3.15 (pág.55): Se A, B, C e D são pontos-compasso de tal forma que AB intersecta C_D e se C não incide na recta AB, então se a recta AB intersecta a circunferência C_D, os pontos de intersecção de AB e C_D são pontos-compasso.

Teorema 3.16 (pág.56): Se A, B e C são três pontos compasso, então os pontos de intersecção entre AB e A_C são pontos compasso.

Teorema 3.17 (pág.59): Os pontos de intersecção de uma recta-compasso e de uma circunferência-compasso são pontos compasso.

Lema 3.18 (pág.59): Seja c uma circunferência-compasso de centro O e raio r e s uma recta-compasso exterior à circunferência. Então o inverso de s em relação a c é uma circunferência-compasso que contém O, sendo este o único ponto da circunferência de inversão que não é imagem da recta s.

Teorema 3.19 (pág.60): A intersecção de duas rectas-compasso é um ponto-compasso.

Teorema 3.20 (pág.60): Se P e O são dois pontos-compasso, então existem pontos-compasso Q, R e S em O_P, de tal forma que $\square PQRS$ é um quadrado. **(Resolução por compasso do Problema de Napoleão)**

Teorema 3.21 (pág.61):

a) Se A, B, C e D são pontos-compasso e se $A \neq B$, então existe um ponto-compasso em AB, ao qual chamamos E, de tal forma que $\overline{AE} = \overline{CD}$.
b) Se P e Q são pontos-compasso então PQ é um número-compasso.

Lema 3.22 (pág.62): Se p e q são pontos-compasso então $p.q$ é um número-compasso.

Teorema 3.23 (O Teorema de Mohr-Mascheroni) (pág.63): Um ponto é ponto-compasso se e só se o ponto for ponto-rc.

Teorema 4.1 (pág.65): Se AB e CD são rectas paralelas distintas e E o ponto de intersecção de AD com BC e F o ponto de intersecção de AC com BD, então EF bissecta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Corolário 4.2 (pág.67): Sejam P, Q e R três pontos quaisquer não colineares. Seja M o ponto médio de $\overline{QR}$ e S um ponto tal que $S - P - Q$. Seja T o ponto de intersecção dos segmentos de recta $\overline{PR}$ e $\overline{SM}$, e seja U a intersecção da semi-recta $\overrightarrow{QT}$ com o segmento de recta $\overline{RS}$, então $PU \parallel QR$.

Definição 4.3 (pág.67): consideremos os pontos do plano cartesiano $P1=(1,0)$, $P2=(0,1)$ $P3=(2,0)$ e $P4=(0,2)$. Um ponto do plano é um ***ponto-régua*** se for o último de uma sequência finita $P1, P2, P3, P4, ..., Pn$ em que cada ponto da sequência é obtido pela intersecção de duas rectas que contenham dois pontos anteriores da sequência.

Uma recta do plano é uma ***recta-régua*** se passa por dois pontos régua.

Uma circunferência do plano é uma ***circunferência-régua*** se passa por um ponto-régua e tem como centro um ponto-régua.

Um número x é um ***número-régua*** se $(x,0)$ é um ponto-régua.

Teorema 4.4 (pág.68): A intersecção de duas rectas-régua é um ponto-régua.

Lema 4.5 (pág.68): Os pontos de coordenadas $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$ são pontos-régua e vértices de um quadrado. Os pontos médios dos lados deste quadrado são pontos-régua. Todas as rectas-régua contêm três pontos-régua tais que um deles é o ponto médio dos outros dois.

Teorema 4.6 (pág.71):

a) Sejam A e B dois pontos régua. Se existir uma recta-régua paralela a AB, mas não coincidente, então o ponto médio de $\overline{AB}$ é um ponto-régua.
b) Se A, M, B e P forem quatro pontos-régua e M for ponto médio de A e B, então a recta paralela a AB que contém P é uma recta-régua.

Teorema 4.7 (pág.73): A recta que contém um ponto-régua e é paralela a uma recta-régua é recta-régua. O ponto médio de dois pontos-régua é um ponto-régua.

Teorema 4.8 (pág.73): Sejam P e Q dois pontos-régua. Se A e B são dois pontos-régua pertencentes a PQ, então existe um ponto-régua X em PQ de tal forma que $\overline{PX} = \overline{AB}$.

Corolário 4.9 (pág.74): Se p e q são dois números-régua, então $p+q$ e p-q são números-régua.

Teorema 4.10 (pág.75): Sejam O e A dois pontos-régua distintos. Se B e C são dois pontos-régua, distintos de O, em $\overrightarrow{OA}$, então o ponto X em $\overrightarrow{OA}$, tal que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OX}}$, é um ponto-régua.

Corolário 4.11 (pág.76): Se p, q e r são números-régua e $r \neq 0$, então $p.q$ e $\frac{p}{r}$ são números-régua.

Corolário 4.12 (pág.78): Conjunto dos números-régua é um corpo.

Teorema 4.13 (pág.78): Um ponto é ponto-régua se e só se as coordenadas desse ponto forem números racionais.

Corolário 4.14 (pág.80): O corpo de números-régua é $\mathbb{Q}$.

Teorema 4.15 (pág.80): A perpendicular a uma recta-régua que intersecta uma recta-régua e passa por um ponto-régua é uma recta-régua.

Teorema 4.16 (pág.81): Se P, Q e R são pontos-régua não colineares e se V e A são dois pontos-régua, então existe um ponto-régua X tal que a amplitude do ângulo AVX é congruente com a amplitude do ângulo PQR.

Referências Bibliográficas

Amorim, José Bayolo Pacheco de, *Geometria*, *Enciclopédia Verbo Luso-Brasileira de Cultura*, Volume XIII-1, Edição Século XXI, Ed. Verbo, Lisboa/São Paulo, 2000, p.287-295.

Euclides de Alexandria, *Elementos*, edição de Dana Densmore a partir da tradução de Thomas L. Heath (*Euclid's Elements: all thirteen books complete in one volume, the Thomas L. Heath translation*), Green Lion Press, Santa Fe, N.M., 2003.

Martin, George E., *Geometric Construtions*, Undergraduate Texts in Mathematics, II Series, Springer, New York, 1998.

Martins, Ana Sofia da Silva, *Geometria do Compasso e sua Implementação em Programas de Geometria Dinâmica*, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005.

Pereira, M.ª H. Rocha, *Euclides de Alexandria*, *Enciclopédia Verbo Luso-Brasileira de Cultura*, Volume XI-2, Edição Século XXI, Ed. Verbo, Lisboa/São Paulo, 1999, p.291.