



**UNIVERSIDADE DE ÉVORA**

**ESCOLA DE CIÊNCIAS SOCIAIS**

DEPARTAMENTO DE PEDAGOGIA E EDUCAÇÃO

**Prática de Ensino Supervisionada em Educação  
Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico:  
O desenvolvimento do raciocínio matemático**

**Vera Lúcia Canha Sezões**

Orientação: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

**Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico**

Relatório de Estágio

Évora, 2014





**UNIVERSIDADE DE ÉVORA**

**ESCOLA DE CIÊNCIAS SOCIAIS**

DEPARTAMENTO DE PEDAGOGIA E EDUCAÇÃO

**Prática de Ensino Supervisionada em Educação  
Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico:  
O desenvolvimento do raciocínio matemático**

**Vera Lúcia Canha Sezões**

Orientação: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

**Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico**

Relatório de Estágio

Évora, 2014



## Agradecimentos

O desenvolvimento deste relatório de estágio contou com o apoio e colaboração de diversas pessoas e instituições que contribuíram significativamente para a sua concretização. Neste sentido quero agradecer:

- À minha orientadora, Professora Doutora Ana Paula Canavarro, pelo incentivo a fazer cada vez melhor, pelo seu carinho e dedicação, pelo apoio a nível científico e pessoal, pela sua disponibilidade e partilha de conhecimentos.

- Aos docentes da Licenciatura em Educação Básica e do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, que contribuíram para o meu enriquecimento curricular, profissional e pessoal.

- À Educadora Susana Reis e ao Professor António Pereira por me terem recebido nas suas salas e pela disponibilidade e colaboração durante os estágios.

- Às instituições onde decorreram os meus estágios, mais concretamente, o Centro Infantil Irene Lisboa e a Escola Básica do Bairro do Frei Aleixo.

- Às crianças com quem trabalhei pelo empenho, entusiasmo, dedicação e disponibilidade que demonstraram.

- Aos meus pais e irmão que sempre me apoiaram ao longo deste percurso académico e por tudo o que fizeram para poder completar o meu curso.

- Ao Joaquim, pela compreensão, amor, carinho, pela ajuda e motivação que me transmitiu ao longo destes anos.

- À Lena e à Rosália pela ajuda na revisão da tradução.

- Aos meus amigos e colegas pela amizade, incentivo e apoio demonstrados em todos os momentos.

A todos,

Muito obrigada!



# **Prática de Ensino Supervisionada em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico: O desenvolvimento do raciocínio matemático**

## **Resumo**

Este relatório de estágio traduz a investigação realizada no âmbito das unidades curriculares de Prática de Ensino Supervisionada no Pré-Escolar e no 1.º Ciclo, do mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico da Universidade de Évora, realizadas, respetivamente, no Centro Infantil Irene Lisboa e na Escola Básica do Bairro do Frei Aleixo, com uma turma de 3.º ano. Esta investigação tem como objetivos compreender, analisar e refletir como se desenvolve o raciocínio matemático das crianças, procurando para tal responder às seguintes questões: Que aspetos do raciocínio matemático revelam os alunos? Que dificuldades evidenciam os alunos no que se refere ao raciocínio matemático? Que estratégias e tipos de representações utilizam os alunos para explicitar o seu raciocínio matemático?

A investigação decorreu no segundo semestre do ano letivo 2012/2013 e no primeiro semestre do ano letivo 2013/2014 e teve como intuito recolher e analisar dados relativos ao trabalho realizado ao nível do desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças e dos alunos nos dois contextos. A análise dos dados teve como base os objetivos, as questões da investigação e os referenciais teóricos que sustentaram a referida investigação.

Esta investigação permite confirmar que o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos se deve constituir como fundamental e transversal na aprendizagem da matemática no Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico. A realização de tarefas diversificadas e que permitam explorar uma multiplicidade de estratégias de resolução, de representações e a comunicação de ideias matemáticas são importantes ferramentas no âmbito do desenvolvimento do raciocínio matemático, ao mesmo tempo que possibilitam a compreensão de conceitos, conteúdos e conexões matemáticas.

**Palavras-chave:** Desenvolvimento do raciocínio matemático, Pré-Escolar, 1.º Ciclo do Ensino Básico.





# **Supervised Teaching Practice in Preschool Education and Teaching of the Primary School: The development of mathematical reasoning**

## **Abstract**

This report is focused on the research undertaken with in the context of the Supervised Teaching Practice in preschool and in the primary school, of the Master in Preschool Education and Teaching Primary School at the University of Évora, held, respectively, in the “Centro Infantil Irene Lisboa” and in the primary school “Bairro do Frei Aleixo”, with a third grade class. This research aims to understand, analyze and reflect about how is the development of students’ mathematical reasoning. This study was oriented by the following questions: What aspects of mathematical reasoning do students reveal? What difficulties do students show regarding mathematical reasoning? What strategies and types of representations do students use to explain their mathematical reasoning?

The investigation took place on the second semester of the school year 2012/2013 and on the first semester of the school year 2013/2014. During that time, I planned, conducted and reflected about a teaching experience that allowed data collection and analysis regarding the development of mathematical reasoning of children and students in both contexts. Data analysis was oriented by the research questions and based on the theoretical framework that supported this research.

This investigation reinforces the idea that the development of mathematical reasoning of students should be considered as fundamental and transversal in the learning of mathematics, not only in preschool but also in primary school. The realization of diversity of tasks that allow and explore a multitude of strategies for solution, representations and the communication of mathematical ideas, are important tools in the context of the development of mathematical reasoning, and promote also the understanding of concepts, content and mathematical connections.

**Keywords:** Development of mathematical reasoning, Preschool, Primary school.



## Índice Geral

<b>Agradecimentos.....</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo .....</b>	<b>v</b>
<b>Abstract .....</b>	<b>vii</b>
<b>Índice Geral.....</b>	<b>ix</b>
<b>Índice de Figuras.....</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice de Tabelas .....</b>	<b>xvii</b>
<b>Índice de Apêndices .....</b>	<b>xix</b>
<b>CAPÍTULO 1 – Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>Contextos educativos da investigação .....</b>	<b>1</b>
<b>Motivações para a escolha do tema.....</b>	<b>3</b>
<b>Objetivos e questões da investigação.....</b>	<b>4</b>
<b>Pertinência e relevância da investigação.....</b>	<b>5</b>
<b>Organização do relatório.....</b>	<b>8</b>
<b>CAPÍTULO 2 – Revisão de Literatura .....</b>	<b>11</b>
<b>O raciocínio matemático nos primeiros anos.....</b>	<b>11</b>
Raciocínio matemático como capacidade transversal.....	11
Definições e tipos de raciocínio matemático .....	14
A resolução de problemas.....	17
As representações.....	21
A comunicação matemática .....	23

<b>Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos .....</b>	<b>26</b>
Natureza das tarefas .....	26
A “cultura da aula” .....	27
<b>Orientações curriculares sobre o raciocínio matemático .....</b>	<b>30</b>
Orientações curriculares internacionais.....	31
Orientações curriculares nacionais.....	33
<b>CAPÍTULO 3 – Metodologia.....</b>	<b>37</b>
<b>Opções metodológicas.....</b>	<b>37</b>
<b>Caracterização dos contextos da investigação .....</b>	<b>39</b>
Pré-Escolar – O grupo .....	40
1.º Ciclo do Ensino Básico – A turma.....	41
<b>Fundamentos da intervenção didática .....</b>	<b>44</b>
Pré-Escolar.....	45
1.º Ciclo do Ensino Básico .....	46
<b>Descrição e intencionalidade das tarefas .....</b>	<b>48</b>
Pré-Escolar.....	48
Tarefa: Descoberta de padrões e sequências no mapa de presenças .....	49
Tarefa: Classificação e formação de conjuntos com desenhos de frutas.....	50
Tarefa: Duplicação de receitas culinárias .....	50
Tarefa: Exploração da máquina de números .....	51
Tarefa: Organização e elaboração de um gráfico de barras .....	51
Tarefa: Descobrir as formas geométricas.....	52
Tarefa: Trabalhar a matemática com tampinhas de garrafas.....	52
Tarefa: Vamos descobrir as nossas alturas e compará-las .....	53
Tarefa: Relação entre números cardinais e as respetivas quantidades .....	53

1.º Ciclo do Ensino Básico .....	54
Tarefa: Jogo dos pares e dos ímpares .....	55
Tarefa: Os caminhos mais curtos.....	56
Tarefa: A festa de São Martinho.....	57
Tarefa: Vamos conhecer a turma!.....	57
Tarefa: Cálculo para os meninos .....	58
Tarefa: Exploração da tabuada do 7 .....	58
Tarefa: Organizar mesas .....	59
Tarefa: As construções do João.....	60
<b>Recolha e análise dos dados.....</b>	<b>61</b>
<b>CAPÍTULO 4 – Apresentação e Interpretação da Intervenção .....</b>	<b>65</b>
<b>Pré-Escolar .....</b>	<b>66</b>
Tarefa: Exploração da máquina de números .....	66
Síntese .....	70
Tarefa: Organização e elaboração de um gráfico de barras.....	70
Síntese .....	76
Tarefa: Descobrir as formas geométricas .....	76
Síntese .....	84
Tarefa: Trabalhar a matemática com tampinhas de garrafas .....	85
Síntese .....	90
Tarefa: Relação entre números cardinais e as respetivas quantidades ....	91
Síntese .....	95
<b>1.º Ciclo do Ensino Básico .....</b>	<b>95</b>
Tarefa: Os caminhos mais curtos.....	96
Síntese .....	101
Tarefa: A festa de São Martinho .....	101
Síntese .....	108
Tarefa: Cálculo para os meninos.....	109
Síntese .....	119

Tarefa: Exploração da tabuada do 7.....	120
Síntese .....	124
Tarefa: Organizar mesas.....	125
Síntese .....	137
<b>CAPÍTULO 5 – Conclusão .....</b>	<b>139</b>
<b>Síntese da investigação .....</b>	<b>139</b>
<b>Conclusões da investigação .....</b>	<b>142</b>
Que aspetos do raciocínio matemático revelam os alunos? .....	142
Pré-Escolar .....	142
1.º Ciclo do Ensino Básico .....	144
Que dificuldades evidenciam os alunos no que se refere ao raciocínio matemático?.....	146
Pré-Escolar .....	146
1.º Ciclo do Ensino Básico .....	148
Que estratégias e tipos de representações utilizam os alunos para explicitar o seu raciocínio matemático? .....	150
Pré-Escolar .....	150
1.º Ciclo do Ensino Básico .....	151
<b>Considerações finais .....</b>	<b>153</b>
<b>Referências bibliográficas.....</b>	<b>157</b>
<b>Apêndices .....</b>	<b>163</b>

## Índice de Figuras

Figura 1: Máquina de Números .....	67
Figura 2: Exemplo de um dos cartões do número 2 .....	67
Figura 3: Frente do cartão do número 3 .....	68
Figura 4: Verso do cartão do número 3.....	69
Figura 5: Identificação dos animais com uma cor .....	72
Figura 6: Organização de dados recorrendo a peças de legos .....	74
Figura 7: Gráfico de barras sobre o animal preferido da história “O Cuquedo” .....	75
Figura 8: Reprodução de um círculo, através dos corpos das crianças .....	80
Figura 9: Reprodução de um triângulo, através dos corpos das crianças.....	81
Figura 10: Reprodução de um quadrado, através dos corpos das crianças .....	81
Figura 11: Reprodução de um retângulo, através dos corpos das crianças .....	82
Figura 12: Algumas das figuras geométricas encontradas pelas crianças nos diversos espaços .....	83
Figura 13: Realização de algumas composições plásticas com blocos lógicos e recortes.....	84
Figura 14: O A. (3) a organizar as suas tampas em fila .....	86
Figura 15: Conjuntos apresentados pela B. (5) .....	87
Figura 16: Conjuntos efetuados pela C. (4).....	88
Figura 17: As tampas azuis identificadas pelo G. (3) como sendo diferentes.....	88
Figura 18: Conjunto das tampas verdes, realizado pelo G. (3) .....	89
Figura 19: Resultado final do trabalho da A. (6), com as tampinhas de garrafa .....	89
Figura 20: Cartões com os números de 0 a 10 e as respetivas quantidades .....	92
Figura 21: Cartão inicial do número 4 e respetivas quantidades .....	92

Figura 22: Cartão final do número 4 e respetivas quantidades .....	94
Figura 23: Percurso mais curto entre A e B descoberto pelo R.R. ....	97
Figura 24: Trabalho realizado pela I. e pelo G.M., com recurso à rotação e/ou à reflexão .....	98
Figura 25: Trabalho realizado pelo T. e pelo L. com várias repetições .....	99
Figura 26: Resolução apresentada pelo 1.º grupo, sobre os abraços dados na festa de São Martinho .....	104
Figura 27: Resolução apresentada pelo 2.º grupo, sobre os abraços dados na festa de São Martinho .....	105
Figura 28: Resolução apresentada pelo 3.º grupo, sobre os abraços dados na festa de São Martinho .....	106
Figura 29: Resolução apresentada pelo 4.º grupo, sobre os abraços dados na festa de São Martinho .....	106
Figura 30: Estratégias de resolução do 1.º grupo, na determinação do número de comprimidos tomados pelo Tomás e pela Catarina em cada dia e no total .....	112
Figura 31: Estratégias de resolução do 1.º grupo, para verificarem se o Tomás e a Catarina iriam terminar de tomar os comprimidos ao mesmo tempo.....	113
Figura 32: Utilização de tabelas, pelo 2.º grupo, na determinação do número de comprimidos tomados pelo Tomás e pela Catarina em cada dia e no total .....	114
Figura 33: Estratégia de resolução do 2.º grupo, para verificarem se o Tomás e a Catarina iriam terminar de tomar os comprimidos ao mesmo tempo.....	114
Figura 34: Utilização da reta numérica, pelo 3.º grupo, na determinação do número de comprimidos tomados pelo Tomás e pela Catarina em cada dia.....	115
Figura 35: Estratégia de resolução do 3.º grupo, para verificarem se o Tomás e a Catarina iriam terminar de tomar os comprimidos ao mesmo tempo.....	116
Figura 36: Estratégia das multiplicações sucessivas realizadas pelo 4.º grupo, na determinação do número de comprimidos tomados pelo Tomás em cada dia e durante quantos dias .....	117
Figura 37: Estratégia das multiplicações sucessivas realizadas pelo 4.º grupo, na determinação do número de comprimidos tomados pela Catarina em cada dia e durante quantos dias .....	118



Figura 38: Estratégia de resolução do 4.º grupo, para verificarem se o Tomás e a Catarina iriam terminar de tomar os comprimidos ao mesmo tempo.....	118
Figura 39: Tabela de dupla entrada para exploração da tabuada do 7.....	121
Figura 40: Descoberta de regularidades e de relações entre os produtos da tabuada do 7 e as outras tabuadas e seus produtos .....	124
Figura 41: Resposta dada por um dos grupos à primeira questão, através da utilização de símbolos matemáticos .....	128
Figura 42: Resposta dada por outro grupo à primeira questão, através da utilização de um desenho esquemático e uma expressão matemática.....	129
Figura 43: Resposta dada por outro grupo à primeira questão, através da utilização de um desenho esquemático e símbolos matemáticos.....	130
Figura 44: Resposta dada por um dos grupos à primeira questão, através da utilização de símbolos matemáticos .....	131
Figura 45: Resposta dada por outro grupo à segunda questão, através da utilização de um desenho esquemático e uma expressão matemática.....	132
Figura 46: Resposta dada por outro grupo à segunda questão, através da utilização de um desenho esquemático e símbolos matemáticos.....	132
Figura 47: Resposta dada por outro grupo à segunda questão, através da utilização de uma tabela.....	133
Figura 48: Resposta dada por um dos grupos à terceira questão, através da utilização de uma expressão matemática .....	134
Figura 49: Resposta dada por outro grupo à terceira questão, através da utilização de símbolos matemáticos .....	134
Figura 50: Resposta dada por um dos grupos à quarta questão, através da utilização de uma expressão matemática .....	135
Figura 51: Resposta dada por outro dos grupos à quarta questão, através da utilização de uma tabela.....	135
Figura 52: Generalização encontrada por um dos grupos.....	136



## Índice de Tabelas

Tabela 1: Tarefas da investigação em Pré-Escolar .....	49
Tabela 2: Tarefas da investigação em 1.º Ciclo do Ensino Básico .....	54
Tabela 3: Sistematização do número total de abraços dados entre seis amigos .....	108



## Índice de Apêndices

Apêndice A – Tarefa: <i>Os caminhos mais curtos</i> .....	165
Apêndice B – Tarefa : <i>A festa de São Martinho</i> .....	167
Apêndice C – Tarefa : <i>Cálculo para os meninos</i> .....	169
Apêndice D – Tarefa: <i>Organizar mesas</i> .....	171



## **CAPÍTULO 1**

### **Introdução**

Neste capítulo apresento uma breve caracterização dos contextos educativos da investigação, irei também expor as motivações para a escolha do tema, os objetivos e as questões que se pretendem investigar, a pertinência e relevância da investigação, bem como a organização geral deste relatório. Assim, e tendo como base os pontos supracitados procurei desenvolver um trabalho de investigação-ação de forma a compreender e orientar a minha prática educativa, ao nível do desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças.

### **Contextos educativos da investigação**

O presente relatório de estágio traduz a investigação realizada no âmbito das unidades curriculares de Prática de Ensino Supervisionada no Pré-Escolar e no 1.º Ciclo, do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico da Universidade de Évora. Nele se pretende descrever, compreender e refletir sobre como se desenvolve o raciocínio matemático das crianças nos dois contextos educativos distintos.

Assim, é de referir que realizei a Prática de Ensino Supervisionada no Pré-Escolar, entre fevereiro e maio de 2013, no Centro Infantil Irene Lisboa, mais concretamente na sala 1 do jardim-de-infância. O grupo desta sala era constituído por

crianças com idades compreendidas entre os 3 e os 6 anos de idade e tinha como responsável a educadora Susana Reis (cooperante e coordenadora da instituição).

O Centro Infantil Irene Lisboa (C.I.I.L.) é uma Instituição Particular de Solidariedade Social (I.P.S.S.), sem fins lucrativos, tutelada por dois ministérios em componentes distintas, é definido no Projeto Educativo (C.I.I.L., 2012) que: na componente letiva (tutelada pelo Ministério da Educação) a instituição orienta-se pelas linhas mestras do Ministério da Educação, mais precisamente pelas *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*, não sendo as mesmas de carácter prescritivo mas simplificadoras da organização do ambiente educativo; e, na componente de apoio à família (tutelada pelo Ministério da Segurança Social) a instituição pretende criar um ambiente de apoio à família e de animação socioeducativa. Esta instituição encontra-se inserida na zona urbana mais antiga, centro histórico, da cidade de Évora, na freguesia da Sé e S. Pedro.

Já a Prática de Ensino Supervisionada no 1.º Ciclo foi realizada na Escola Básica do Bairro do Frei Aleixo, entre setembro e dezembro de 2013, mais concretamente na turma do 3.º ano. Esta turma era composta por 25 alunos com idades compreendidas entre os 8 e os 9 anos de idade (até 17 de dezembro) e tinha como responsável o professor António Pereira (titular/cooperante e coordenador da escola).

A Escola Básica do Bairro do Frei Aleixo, é uma instituição tutelada pelo Ministério da Educação e situa-se na periferia da cidade de Évora, no bairro com o mesmo nome, Bairro do Frei Aleixo, pertencente à freguesia do Bacelo. Esta escola pertence ao agrupamento de Escolas n.º4 de Évora, tendo este começado a funcionar com a configuração atual no ano letivo de 2013/2014 e a sua sede situa-se na Escola Secundária André de Gouveia. Este agrupamento apresenta alguma dispersão geográfica, dando respostas a públicos com características diferenciadas, uma vez que existem estabelecimentos de ensino inseridos em meio rural e outros inseridos em meio urbano.

O trabalho desenvolvido nestes contextos educativos foi essencial porque permitiu perceber as ações pedagógicas desenvolvidas, refletir sobre a organização do ambiente educativo e as opções pedagógicas. Estes aspetos foram fundamentais e preciosos para desenvolver a minha investigação no âmbito do desenvolvimento do



raciocínio matemático, mas também no desenvolvimento progressivo de competências implícitas à ação educativa, tais como: a capacidade relacional e de comunicação entre as crianças, entre as crianças e o educador/professor, e entre as crianças e/ou educador/professor com a restante comunidade educativa; o equilíbrio emocional, nas diversas situações profissionais; a dimensão cívica, social, ética e deontológica do educador/professor.

Ao longo das minhas experiências de ensino em contexto real tive em consideração que o processo de aprendizagem deve traduzir as aprendizagens significativas, as dificuldades sentidas e também a identificação e projeção das ações futuras. Porque só desta forma é que foi possível identificar os métodos e estratégias mais adequadas para o desenvolvimento do raciocínio matemático de cada criança/aluno ou grupo/turma, uma vez que cada um apresenta capacidades, características, interesses, necessidades ou especificidades distintas de outro.

### **Motivações para a escolha do tema**

A temática da investigação desenvolvida, como referido anteriormente, encontra-se relacionada com o desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças. Saliento que esta temática não foi escolhida ao acaso – a matemática e todas as suas especificidades sempre despertaram em mim a curiosidade e o interesse em saber mais, o que permitiu que desenvolvesse o meu raciocínio matemático ao mesmo tempo que o conseguia comunicar.

Desta forma, posso dizer que o fascínio pela matemática, a facilidade com que fui desenvolvendo o meu raciocínio matemático ao longo do meu percurso escolar, e o facto de detetar que alguns colegas demonstravam muitas dificuldades nesta disciplina, mais concretamente ao nível do raciocínio, constituíram-se como pontos de partida para a escolha desta temática, de modo a averiguar e compreender o desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças no Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Mas não posso deixar de salientar que a metodologia de trabalho inculcada pela professora Ana Paula Canavarro nas aulas da unidade curricular de Didática de Matemática, do referido mestrado, foi também essencial nessa escolha, uma vez que

permitiu estabelecer um contacto mais real com uma prática metodológica diferente da utilizada habitualmente em contexto educativo, bem como desenvolver o meu raciocínio matemático. Não esquecendo que proporcionou também o conhecimento mais aprofundado do ensino exploratório da matemática, ao nível da fundamentação teórica; da conceção da planificação; da regulação das interações; da relação das ações intencionais com a promoção das aprendizagens matemáticas e a gestão da aula; do desenvolvimento do raciocínio matemático; da importância da utilização de recursos materiais; etc..

Neste sentido, posso dizer que a interatividade promovida nestas aulas em detrimento de uma explicação teórica permitiu a aquisição de competências e conhecimentos essenciais para o meu desenvolvimento pessoal, social e profissional, e contribuiu para uma formação mais sólida no ensino da matemática. No meu ponto de vista foi uma mais-valia na conceção e desenvolvimento da minha investigação nos momentos ou nas aulas destinados à matemática, na prática de ensino supervisionada no Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico.

### **Objetivos e questões da investigação**

Esta investigação tem como objetivos fundamentais compreender, analisar e refletir de que forma as crianças do Pré-Escolar e do 1.º Ciclo do Ensino Básico, em contexto educativo, desenvolvem e expressam o seu raciocínio matemático ao resolverem diversas situações problemáticas. Neste sentido, posso dizer que os objetivos definidos anteriormente têm como intuito o desenvolvimento do raciocínio matemático no âmbito dos quatro grandes temas/domínios da matemática (tais como: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Medida, e, Organização e Tratamento de Dados).

Desta forma, e após a seleção dos objetivos da investigação, formulei as seguintes questões para balizar o estudo:

- Que aspetos do raciocínio matemático revelam os alunos?
- Que dificuldades evidenciam os alunos no que se refere ao raciocínio matemático?

- Que estratégias e tipos de representações utilizam os alunos para explicitar o seu raciocínio matemático?

### **Pertinência e relevância da investigação**

A matemática constitui-se como uma disciplina/área curricular de enorme relevância no desenvolvimento das crianças, porque a mesma se encontra inevitavelmente presente no seu dia-a-dia. Por isso, e segundo as Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (Ministério da Educação, 1997) a aprendizagem da matemática não deve ser descurada na educação pré-escolar, porque as crianças no seu dia-a-dia vão convivendo e construindo noções matemáticas mais ou menos consistentes, através de atividades espontâneas e lúdicas, mesmo antes de entrarem para o pré-escolar. Deste modo, cabe à escola, mais concretamente ao educador, “(...) o papel de sistematizar e consolidar esses conhecimentos e capacidades espontaneamente desenvolvidas” (Barros & Palhares, 1997, p.9), de forma a possibilitar a organização do pensamento das crianças e a evidenciar as múltiplas aprendizagens matemáticas que o quotidiano faculta.

Neste sentido, e tendo em conta que “(...) a educação pré-escolar é a primeira etapa da educação básica no processo de educação ao longo da vida”, e favorece “(...) a formação e o desenvolvimento equilibrado da criança, tendo em vista a sua plena inserção na sociedade como ser autónomo, livre e solidário” (Lei-Quadro da Educação Pré-Escolar citado por Ministério da Educação, 1997, p.15), o educador deve através de situações do quotidiano das crianças proporcionar-lhes tarefas exploratórias e experiências matemáticas diversificadas que permitam o desenvolvimento do seu raciocínio matemático (Ministério da Educação, 1997). Estas tarefas devem permitir estruturar e desenvolver aprendizagens matemáticas ao nível: da descoberta de padrões; da classificação e seriação de objetos; da formação de conjuntos; da exploração do espaço, das alturas, das capacidades; etc., ao mesmo tempo

(...) que as crianças encontrem as suas próprias soluções, que as debatam com outra criança, num pequeno grupo, ou mesmo com todo o grupo, apoiando a

explicitação do porquê da resposta e estando atento a que todas as crianças tenham oportunidade de participar no processo de reflexão. (Ministério da Educação, 1997, p.78)

Assim, os educadores que se esforçam por proporcionar a aprendizagem da matemática às suas crianças devem “(...) estar informados da natureza da matemática, do processo de aprendizagem das crianças e dos métodos de ensino mais adequados ao seu desenvolvimento.” (Baroody, 2002, p. 334). Porque só desta forma é possível perceber que as crianças não precisam “(...) apenas de aprender conteúdos matemáticos (...)”, necessitam também de se envolver “(...) nos processos matemáticos: procurando padrões, raciocinando acerca dos dados, resolvendo problemas e comunicando as suas ideias e resultados.” (Baroody, 2002, p. 334). Neste sentido, posso dizer que os educadores que proporcionam momentos que levam as crianças a adquirir hábitos de exploração, pesquisa, explicação e justificação das suas descobertas, irão permitir que as crianças desenvolvam o seu raciocínio matemático ao mesmo tempo que pensam e compreendem as estratégias utilizadas de forma autónoma ou em cooperação com os colegas.

Relativamente ao 1.º Ciclo do Ensino Básico, é também extremamente importante e essencial promover “ (...) nos alunos o gosto pela matemática, propiciando a articulação entre a matemática e a vida real e incentivando-os a resolver problemas e a explicitar os processos de raciocínio.” (Decreto-Lei n.º 241/2001 de 30 de agosto). Já que é no 1.º Ciclo do Ensino Básico que os alunos vão alicerçando a sua competência matemática, e de acordo com Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), esta encontra-se “... relacionada com as atitudes, as capacidades e os conhecimentos relativos à matemática que, de uma forma integrada, todos devem desenvolver e ser capazes de usar, podendo identificar-se com a noção de literacia matemática.” (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p.11).

Segundo os mesmos autores, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), a competência matemática que todos os alunos devem fortalecer ao longo da educação básica, de forma a desenvolverem o seu raciocínio matemático deve incluir “... a predisposição e a aptidão para raciocinar matematicamente...” (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p.41), através da exploração e da investigação de situações

---

problemáticas, da pesquisa de regularidades, etc., bem como “... o gosto e a confiança pessoal em desenvolver actividades intelectuais que envolvem raciocínio matemático” (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p.41), onde a comunicação e a argumentação têm um papel relevante na aprendizagem de conceitos e conteúdos matemáticos.

Desta forma, as metodologias utilizadas no ensino da matemática devem ser centradas no aluno, uma vez que ele é o principal interveniente nas suas aprendizagens, ou seja, deve dar-se especial atenção às suas experiências anteriores e aos conhecimentos espontâneos e naturais como ponto de partida das aprendizagens. Assim, o professor deve propor actividades estimulantes e diversificadas, e incentivar a participação ativa do aluno, como defendido pela Associação de Professores de Matemática (APM):

O ensino da Matemática (...) deve proporcionar aos alunos experiências diversificadas em contextos de aprendizagem ricos e variados, contribuindo para o desenvolvimento de capacidades e hábitos de natureza cognitiva, afetiva e social, designadamente estimulando a curiosidade, a atitude crítica, o gosto de organizar raciocínios e de comunicar, o gosto de enfrentar e resolver problemas, a independência e a autoconfiança. (APM, 1988, p.39)

Portanto, o professor é o grande responsável por regular, orientar e modificar o currículo existente, se considerar pertinente, tendo em conta a realidade, os interesses e as motivações dos alunos, em detrimento de um ensino centrado no professor, de modo a proporcionar o desenvolvimento do raciocínio matemático. Ao longo dos anos, o desenvolvimento do raciocínio matemático tem ganho mais visibilidade nos programas e documentos orientadores para o ensino da matemática.

A visibilidade tornou-se mais evidente, como referido anteriormente, com a valorização das capacidades transversais – resolução de problemas, raciocínio matemático e a comunicação matemática – nas aulas de matemática, uma vez que estas pretendem realçar os processos matemáticos fundamentais utilizados pelos alunos. Portanto, ao nível do raciocínio matemático, procura-se “(...) que os alunos desenvolvam a sua capacidade de raciocínio, estabelecendo relações entre objectos

matemáticos, justificando as suas respostas e construindo a pouco e pouco cadeias argumentativas.” (Ponte, 2009, pp.99-100).

O desenvolvimento do raciocínio matemático não é uma temática à qual se dê grande importância ou sobre a qual existam muitos estudos ao nível do Pré-escolar e do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Por isso, a minha intenção, que corresponde à finalidade última desta investigação, foi desenvolver uma prática educativa de qualidade que fosse ao encontro das necessidades e interesses das crianças, proporcionando a aquisição dos conhecimentos matemáticos ao mesmo tempo que permitisse o desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças/alunos, de forma integrada.

### **Organização do relatório**

Este relatório encontra-se organizado em cinco capítulos, desenvolvidos em torno da investigação efetuada nas unidades curriculares de Prática de Ensino Supervisionada no Pré-Escolar e no 1.º Ciclo. Deste modo, no capítulo 1 – Introdução, capítulo atual e como já foi referido, são expressas algumas informações referentes aos contextos educativos onde foi desenvolvida a investigação, as motivações pessoais que originaram esta investigação, os objetivos e as questões que nortearam a mesma, a pertinência e relevância da investigação, as estratégias e os procedimentos utilizados, bem como a organização geral deste relatório.

Já o segundo capítulo, Revisão de Literatura, irá contemplar e centrar-se na revisão de literatura que serviu de suporte teórico à investigação e que permitiu um aprofundamento de conhecimentos sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático. Mas também possibilitou a compreensão, análise e reflexão mais rigorosa e teórica sobre o trabalho desenvolvido nas práticas de ensino supervisionada.

O terceiro capítulo é dedicado à metodologia que apoiou a elaboração deste relatório, que se sustentou numa abordagem de investigação-ação. Neste sentido, o capítulo irá contemplar as opções metodológicas efetuadas, a caracterização dos contextos da investigação, os fundamentos da intervenção didática, a descrição e intencionalidade das tarefas, e a recolha e análise dos dados.

No quarto capítulo são apresentados e interpretados os dados recolhidos nos diferentes contextos educativos, ao nível da ação e dos atos pedagógicos, através da descrição, análise e reflexão sobre os mesmos.

No quinto capítulo pode encontrar-se uma síntese da investigação e as conclusões da investigação e um conjunto de considerações finais relativas à experiência da investigação realizada; às aprendizagens efetuadas; às dificuldades sentidas ao longo dos momentos de observações e de intervenção; ao trabalho realizado e a sua pertinência para o desenvolvimento do raciocínio matemáticos das crianças e dos alunos.





## **CAPÍTULO 2**

### **Revisão de Literatura**

Neste capítulo é apresentada uma revisão de literatura que irá centrar-se em aspetos teóricos relacionados com a investigação. Deste modo, na revisão de literatura pretendo apresentar como se desenvolve o raciocínio matemático nos primeiros anos, mais concretamente: perceber e compreender o raciocínio matemático como capacidade transversal; quais as definições e tipos de raciocínio matemático defendidas por alguns autores e/ou investigadores; como a resolução de problemas, as representações e a comunicação se constituem como relevantes no desenvolvimento do raciocínio matemático. Posteriormente, exponho como desenvolver o raciocínio matemático com os alunos, ao nível da natureza das tarefas, das representações e da “cultura da sala”, ou seja, às metodologias utilizadas. No final serão evidenciadas algumas orientações curriculares para o desenvolvimento do raciocínio matemático, tanto a nível internacional, como nacional.

### **O raciocínio matemático nos primeiros anos**

#### **Raciocínio matemático como capacidade transversal**

O ensino da matemática encontra-se presente em todos os currículos internacionais e nacionais e abrange os diversos níveis de escolaridade desde o pré-escolar até ao 12.º ano. Estes currículos têm sofrido algumas alterações ao longo dos

anos, tornando-se perceptível que o raciocínio matemático tem sido valorizado no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Esta valorização do raciocínio matemático constitui-se como essencial, devido às diversas investigações realizadas no âmbito da educação matemática, tanto a nível internacional como nacional e à necessidade de adquirir destaque permanente no ensino da matemática.

Neste sentido, tanto a nível internacional como a nível nacional, existem orientações curriculares que fomentam a necessidade de ressaltar no ensino da matemática, que para além das normas de conteúdo (NCTM, 2007) e dos temas matemáticos (Ponte *et al.*, 2007), as normas de processo (NCTM, 2007) e as três capacidades transversais (Ponte *et al.*, 2007) se devem assumir como transversais a toda a aprendizagem da matemática e que o seu desenvolvimento deve ocorrer paralelamente aos conteúdos e/ou temas matemáticos em estudo. Portanto, a nível internacional as normas de processo realçam e revelam-se fundamentais no desenvolvimento de capacidades, de conhecimentos e procedimentos proveitosos no âmbito da resolução de problemas, do raciocínio matemático e demonstração, da comunicação, das conexões e da representação (NCTM, 2007).

A nível nacional, mais concretamente, no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte *et al.*, 2007) são apresentadas como capacidades transversais ao ensino-aprendizagem da matemática três das cinco normas de processo expressas no documento *Princípios e normas para a matemática escolar* (NCTM, 2007). Assim sendo, para além do raciocínio matemático, a resolução de problemas e a comunicação matemática constituem-se como as três capacidades transversais que devem ser valorizadas e estar presente em qualquer tema e/ou conteúdo matemático abordado na sala de aula, independentemente do ano de escolaridade.

As capacidades transversais supracitadas têm como propósito principal de ensino da matemática o desenvolvimento das capacidades de raciocínio matemático, de resolução de problemas e de comunicação matemática dos alunos, bem como permitir que as usem “(...) na construção, consolidação e mobilização dos conhecimentos matemáticos” (Ponte *et al.*, 2007, p. 29). O desenvolvimento das capacidades transversais no ensino da matemática não foi só salientado em 2007 por Ponte *et al.*, porque, em 1999, Abrantes, Serrazina e Oliveira referiam que o desenvolvimento das

competências transversais, ou seja, “(...) daquelas que atravessam todos os temas (...)” deve “(...) construir os grandes objetivos de um currículo de Matemática.” (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p.14).

Após a evidência da importância das capacidades transversais no ensino da matemática Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) elaboraram a brochura intitulada de *A experiência Matemática no Ensino Básico*, que se centra na abordagem dos “(...) processos matemáticos transversais a vários temas e que são intrínsecos ao trabalho em Matemática: resolução de problemas, conexões matemáticas, comunicação matemática e argumentação em Matemática” (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p.7). Neste sentido, a aprendizagem dos referidos processos irá permitir estabelecer relações com as três capacidades transversais expressas por Ponte *et al.* (2007), de modo a proporcionar o envolvimento dos alunos em experiências significativas e que possibilitem a construção ativa de conhecimento.

Ao analisar-se todas as ideias apresentadas anteriormente, torna-se perceptível que o raciocínio matemático encaixa na perfeição como uma capacidade transversal, porque esta se desenvolve através de experiências que possibilitam a estimulação do pensamento dos alunos, mas também que permitem a explicação, clarificação e justificação do seu raciocínio (Ponte *et al.*, 2007). No entanto, é de salientar que estas experiências devem permitir que os alunos desenvolvam o raciocínio matemático, ao mesmo tempo que possibilitam a construção do conhecimento matemático em detrimento da transmissão de conteúdos, da memorização e da realização de procedimentos rotineiros. Pois, pode dizer-se que o conhecimento matemático constrói-se e que nesse processo “(...) a intuição, a experimentação, a formulação de conjecturas, a generalização e a construção de cadeias argumentativas” (Cabrita & Fonseca, 2012, p.540) se assumem como essenciais no desenvolvimento do raciocínio matemático e que também favorecem e incentivam o pensamento reflexivo dos alunos nas aulas de matemática.

## Definições e tipos de raciocínio matemático

O raciocínio matemático tem sido reconhecido e apresentado por inúmeros autores e/ou investigadores como um aspeto central no ensino da matemática. Por isso, torna-se pertinente perceber e compreender o que se entende por raciocínio e que tipo de raciocínio pode ser desenvolvido na sala de aula, uma vez que parece não existir uma definição evidente.

Assim, Dewey (1910/1997, citado por Semana & Santos, 2008) salienta que o raciocínio permite a “(...) compreensão de situações matemáticas” (Semana & Santos, 2008, p.51). Esta compreensão realiza-se através da análise de um problema de diversos ângulos e perspetivas o que permitirá estabelecer relações e modificar “(...) as ideias iniciais em hipóteses que dão origem à formulação de conjeturas” (Semana & Santos, 2008, p.51).

Já Boavida (2008) e Boavida e Menezes (2012) referem que o ato de raciocinar em matemática não ocorre só quando queremos provar algo, uma vez que a explicação e a apresentação dos processos utilizados também implicam o desenvolvimento do raciocínio matemático. Por isso, salientam que etimologicamente, o ato de raciocinar

(...) remete para calcular, mas também para usar a razão para julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir. Assim, em Matemática, não raciocinamos apenas quando provamos algo. Também raciocinamos ao apresentar razões que justificam ideias ou posicionamentos, ao argumentarmos para nos convencermos, ou para convencer outros, da plausibilidade de conjeturas que enunciamos e da razoabilidade de afirmações que fazemos ou ao procurarmos explicar a coerência entre o que se aceita como válido e as suas consequências. (Boavida, 2008, p.1; Boavida & Menezes, 2012, p.289).

O raciocínio matemático, de acordo com Yakel e Hanna (2003, citado por Boavida, 2008), “(...) é uma atividade partilhada em que quem aprende participa enquanto interage com os outros para resolver problemas matemáticos” (Boavida, 2008, p.1). Mas nesta definição de raciocínio matemático está implícita a associação da

resolução de problemas e da partilha de ideias ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

No meu ponto de vista e de acordo com Boavida (2008), o desenvolvimento do raciocínio matemático não deve recair essencialmente em “(...) tarefas com determinadas características” (Boavida, 2008, p.1), mas em proporcionar atividades que requeiram o pensamento e a reflexão sobre o “porquê das coisas” (Boavida, 2008, p.1), no sentido de ajudar os alunos a valorizarem a sua forma de pensar, a argumentarem e fundamentarem o seu pensamento, a analisarem o raciocínio dos colegas e a sistematizarem as aprendizagens e os conceitos matemáticos. Deste modo, é evidente que os aspetos supracitados permitem que os alunos desenvolvam o raciocínio matemático em articulação com as outras capacidades transversais, mais concretamente, a resolução de problemas e a comunicação matemática.

Para Oliveira (2008), o raciocínio matemático designa “(...) um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)” (Oliveira, 2008, p.3). Neste sentido, o NCTM (2007) refere que o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos deve apoiar-se nos seus conhecimentos prévios, de forma a encorajá-los e ajudá-los a compreender as implicações do raciocínio matemático.

Ao analisar as diferentes perspetivas e ideias sobre o raciocínio matemático, percebe-se que a “(...) interpretação do que é o raciocínio matemático varia bastante” (Saraiva, 2008, p.29), porque essa interpretação depende do entendimento “(...) que cada um tem sobre o que é a Matemática” (Saraiva, 2008, p.29). Por isso, surgem diversas formas e modos de perceber e compreender realmente o que é o raciocínio matemático, uma vez que para uns o raciocínio matemático “(...) é o raciocínio axiomático: da dedução lógica e da inferência formal” (Saraiva, 2008, p.29), enquanto para outros o raciocínio matemático “(...) assinala uma vasta capacidade geométrica e quantitativa que mistura análise e intuição com raciocínio e inferência, ambos rigorosos e sugestivos” (Saraiva, 2008, p.29).

Das diversas definições de raciocínio matemático apresentadas, pode inferir-se que não existe uma definição específica para compreender o que é raciocínio

matemático. Todavia também não existe consenso relativamente ao tipo de raciocínio matemático desenvolvido nas aulas de matemática, porque alguns autores identificam e descrevem o raciocínio como sendo de dedução, de indução, de abdução ou de transformação.

Estes quatro tipos de raciocínio matemático referenciados anteriormente, são identificados por Oliveira (2002) e caracterizados segundo aspetos que os diferenciam (Mata-Pereira & Ponte, 2013; Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012). Assim, o raciocínio matemático por dedução é caracterizado por ocorrer através da análise de uma generalização que tem como objetivo a aplicação em situações particulares, ou seja, durante a prova e justificação. No entanto, o raciocínio matemático por indução caracteriza-se por se realizar por meio da análise de experiências particulares de modo a obter generalizações e/ou formular conjecturas, que possam ser verificadas posteriormente. O outro tipo de raciocínio matemático é o raciocínio por abdução que tem como objetivo formular “(...) uma generalização relacionando diversos aspetos de certa situação, que se procuram ajustar como diferentes peças de um puzzle.” (Mata-Pereira & Ponte, 2013, p. 18). Por fim, o raciocínio matemático por transformação é caracterizado pelo facto das representações adquirirem um papel central na explicação e validação do raciocínio (Mata-Pereira & Ponte, 2013).

Alguns autores identificam o raciocínio matemático como dedutivo (Aliseda, 2003; Brousseau & Gibel, 2005, citados por Mata-Pereira & Ponte, 2013), enquanto outros como indutivo (Lannin, Ellis & Elliot, 201, citado por Mata-Pereira & Ponte, 2013; Russel, 1999, citado por Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012) e outros como abduativo (Rivera & Becker, 2009, citado por Mata-Pereira & Ponte, 2013). Mas também existem outros autores (Pólya, 1954/1990, citado por Mata-Pereira & Ponte, 2013; Boavida *et al.*, 2008; Ponte & Sousa, 2010) que afirmam e destacam a importância da presença do raciocínio matemático do tipo indutivo, mas também do dedutivo nas aulas de matemática.

Portanto, pode dizer-se “(...) que raciocinar matematicamente é usar a informação existente para chegar a novas conclusões por qualquer destes processos, ou seja, fazer inferências de natureza dedutiva, indutiva ou abduativa.” (Mata-Pereira & Ponte, 2013, p.18) na realização de diferentes tipos de tarefas matemáticas. Nunca

esquecendo que se deve encorajar os alunos a conjecturar, a investigar o porquê, a questionar as ideias dos outros, a elucidar e/ou defender os seus raciocínios e a justificar a sua posição (NCTM, 1991).

### **A resolução de problemas**

A resolução de problemas é outra capacidade transversal e deve constituir-se como parte integrante de todo o processo de ensino-aprendizagem da matemática. Já que diversos autores, investigadores e educadores/professores nacionais e internacionais têm reconhecido a sua importância no desenvolvimento de outras capacidades matemáticas, tais como de raciocínio matemático e de comunicação matemática. Desta forma, a nível internacional, em 1991, o NCTM destaca que a resolução de problemas deve constituir-se como o foco central do currículo de matemática e transversal a todo o programa de matemática (NCTM, 1991). Posteriormente, em 2007, o NCTM evidencia que a resolução de problemas deve constituir-se como parte integrante do ensino-aprendizagem da matemática em detrimento de ser considerada o foco principal do seu currículo. É salientado que a resolução de problemas deve permitir que os alunos explorem os seus conhecimentos prévios, construam novos conhecimentos, comuniquem e representem matematicamente esses conhecimentos, estabeleçam conexões e que analisem e reflitam sobre os seus raciocínios e os apresentados (NCTM, 2007).

No entanto, a nível nacional de acordo com as *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* (1997) a resolução de problemas deve ser transversal a todas as áreas de conteúdos e domínios, de modo a permitir “(...) que as crianças encontrem as suas próprias soluções” (Ministério da Educação, 1997, p.78), que reflitam e explicitem o como e o porquê, que debatam as diversas soluções com outra criança ou crianças ou ainda em grande grupo. No decorrer deste processo de resolução de problemas, o educador deve “(...) estimular as razões da solução, de forma a fomentar o desenvolvimento do raciocínio e do espírito crítico” (Ministério da Educação, 1997, p.78).

Ainda a nível nacional, e segundo o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (2007) a resolução de problemas é essencial na consolidação, na ampliação e no aprofundamento dos conhecimentos matemáticos dos alunos, uma vez que a conceção, a aplicação, a aquisição e a análise de diferentes estratégias e procedimentos matemáticos irá permitir desenvolver esta capacidade transversal e as outras, nomeadamente o raciocínio matemático e a comunicação matemática (Ponte *et al.*, 2007). Assim, pode considerar-se que a resolução de problemas se constitui como uma abordagem de ensino onde se evidencia “(...) a ideia de que a exploração e discussão de tarefas cognitivamente desafiadoras que favoreçam a construção de ideias matemáticas poderosas e incentivem o raciocínio e o pensamento reflexivo, é essencial para que os alunos aprendam Matemática com compreensão” (Boavida & Menezes, 2012, p.288).

Por isso, considero que é necessário que os problemas de diversos tipos procurem despertar nos alunos a curiosidade, uma atitude ativa de aprendizagem, o espírito investigativo, a perseverança, a reflexão e a criatividade. Mas também a incentivá-los a desenvolverem as suas estratégias, os seus conhecimentos, atitudes e capacidades de comunicação e de raciocínio matemático na resolução e formulação de problemas, bem como a sua autonomia e sentido de cooperação (Pinto & Canavarro, 2012; Vale & Pimentel, 2004).

Neste sentido, posso dizer que o reconhecimento da importância da resolução de problemas no ensino da matemática ganhou uma maior notoriedade aquando da publicação, na década de 80, do livro denominado *Como resolver problemas* desenvolvido por Pólya em 1945. E neste definiu problema como: “Ter um problema significa procurar conscienciosamente alguma ação apropriada para atingir um objectivo claramente definido, mas não imediatamente atingível” (Vale & Pimentel, 2004, p.13), referenciando também que “(...) resolver um problema é encontrar uma saída da dificuldade, é encontrar um caminho à volta de um obstáculo, para obter um fim desejável, que não está disponível de imediato através de meios apropriados” (Vale & Pimentel, 2004, p.12).

Todavia, a resolução de problemas tem sido perspectivada de diversas formas por diferentes autores, segundo Vale e Pimentel (2004) pode ser encarada como: um processo, onde se entende que ao se fornecer, aos alunos, diversas estratégias de



resolução de problemas irá torná-los mais competentes; uma finalidade, ao tentar-se considerar os “(...) aspectos matemáticos como explorar, questionar, investigar, descobrir e usar raciocínios plausíveis” (Vale & Pimentel, 2004, p.11); ou, um método de ensino, quando se introduz conceitos que envolvam a “(...) exploração e descoberta, de acordo com as finalidades do ensino da matemática e de factos, conceitos e procedimentos matemáticos” (Vale & Pimentel, 2004, p.11). Ao ter-se em conta estas perspetivas sobre a resolução de problemas, Pinto e Canavarro (2012) salientam que “(...) ao resolver problemas, o aluno, além de aprender matemática, desenvolve modos de pensar e capacidades básicas como verbalizar, ler, interpretar e produzir textos em Matemática” (Pinto & Canavarro, 2012, p.3), através do desenvolvimento de métodos e estratégias que lhe permita resolver os problemas.

No que respeita aos métodos de resolução de problemas pode dizer-se que se constituem como úteis na análise de um problema. No entanto, não posso deixar de referir que não existe só um método ou modelo para resolver problemas ou para ensinar a resolver. Portanto, a resolução de problemas é definida por diversos autores como um processo organizado em diversas fases (Vale & Pimentel, 2004).

O modelo que continua a manter-se como referência na resolução de problemas é o modelo estabelecido por Pólya, apesar de existirem outros inspirados no seu modelo. O modelo de Pólya é constituído por quatro fases que regulam o processo de resolução de problemas, tais como: (i) compressão do problema, onde se procura compreender o problema, mas também se deve identificar qual a incógnita, quais os dados e as condições expostas; (ii) estabelecimento de um plano, onde é essencial encontrar a conexão entre os dados e a incógnita, considerar os problemas auxiliares se não se encontrar uma conexão imediata e chegar a um plano para a resolução; (iii) execução do plano, nesta fase executa-se o plano de resolução e verifica-se cada passo, mas se não se chegar à solução volta-se à fase anterior; (iv) retrospecto/verificação da solução, examina-se e verifica-se a solução obtida tendo em conta a situação inicial e o raciocínio utilizado (Pólya, 1995). Estas quatro fases pretendem auxiliar o aluno na organização do processo de resolução de problemas, na identificação das suas dificuldades e na explicação do seu raciocínio, de modo a melhorar a sua capacidade de resolver problemas e desenvolver o seu raciocínio matemático (Vale & Pimentel, 2004).

Segundo Boavida *et al.* (2008), o modelo de resolução de problemas defendido por Pólya apesar de ser considerado como bastante complexo para o trabalho desenvolvido no pré-escolar e no 1.º ciclo, pode ser adaptado e ajustado a esses níveis de escolaridade. Assim, ao simplificar-se o modelo de resolução de problemas pode considerar-se: (i) ler e compreender o problema; (ii) fazer e executar um plano; e, (iii) verificar a resposta (Boavida *et al.*, 2008).

Relativamente às estratégias de resolução de problemas, e como referido em relação aos modelos de resolução de problemas, não existe só uma que se executa insistentemente e de forma rotineira. Logo, a diversidade de estratégias de resolução de problemas e a possibilidade de serem utilizadas nas mais variadas situações problemáticas permitirá aos alunos dominarem as diferentes técnicas, bem como explorarem o problema recorrendo à estratégia que consideram mais adequada (Vale & Pimentel, 2004).

Desta forma, e mediante as investigações mais recentes, Vale e Pimentel (2004) e Boavida *et al.* (2008) apresentam diversas estratégias de resolução de problemas, tais como: (i) descobrir um padrão/descobrir uma regra ou lei de formação, através da realização de diversos passos até encontrar a generalização de soluções específicas; (ii) fazer tentativas/fazer conjeturas, no sentido de procurar uma solução através de tentativas; (iii) trabalhar do fim para o princípio, começa-se a analisar o fim problema ou o que se quer testar; (iv) usar dedução lógica/fazer eliminação, verificam-se as hipóteses e as que não são exequíveis são eliminadas; (v) reduzir a um problema mais simples/decomposição/simplificação, através da resolução de um caso particular do problema; (vi) fazer uma simulação, uma experimentação ou uma dramatização, através da utilização de objetos, da criação de modelos ou da realização de dramatizações que exemplifiquem o problema; (vii) fazer um desenho, diagrama, gráfico ou esquema; (viii) fazer uma lista organizada ou fazer uma tabela, onde se organizam, representam, e guardam os dados do problema. A explicitação e apresentação das diversas estratégias utilizadas na resolução de problemas permitem que os alunos expressem e justifiquem quais as estratégias e representações que utilizaram, ao mesmo tempo que comunicam o seu raciocínio matemático e o confrontam com o dos colegas (Boavida *et al.*, 2008; Vale & Pimentel, 2004).

## As representações

As representações matemáticas dos alunos têm vindo a ser valorizadas no ensino-aprendizagem da matemática, em todos os níveis de escolaridade. Esta valorização encontra-se associada ao facto de as representações matemáticas permitirem o desenvolvimento do raciocínio matemático e da resolução de problemas, ao mesmo tempo que possibilita a compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos (Canavarro & Pinto, 2012).

Neste sentido, as representações das ideias matemáticas é um elemento essencial no processo de ensino-aprendizagem da matemática e na produção de conhecimento matemático. Porque os alunos, ao conseguirem perceber e compreender o significado das representações matemáticas e as ideias que elas transmitem, adquirem conhecimentos que permitem o desenvolvimento do raciocínio matemático (NCTM, 2007; Ponte *et al.*, 2007).

As formas de representação na matemática ganham grande significado quando os alunos conseguem associar e passar de representações não convencionais para representações convencionais da matemática, à medida que o trabalho vai prosseguindo. Deste modo, estas representações vão adquirindo significado e permitem a aprendizagem da matemática, pelos alunos, através das suas representações, bem como devem ajudar na comunicação dos seus raciocínios matemáticos aos colegas e/ou educador/professor e na perceção do desenvolvimento do raciocínio matemático (NCTM, 2007; Ponte *et al.*, 2007).

Neste sentido, e tendo em conta o papel que as representações matemáticas desempenham na aprendizagem da matemática, é necessário perceber que as mesmas se constituem

(...) como elementos essenciais no apoio à compreensão, por partes dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionais, e na aplicação da matemática a problemas realistas, através da modelação. (NCTM, 2007, p. 75).

Para além disso, à medida que os alunos vão adquirindo mais conhecimentos matemáticos, devem conseguir discernir qual o tipo de representação mais adequada para expressar o seu raciocínio matemático tendo em conta a situação proposta. Todavia a forma como o representam deve permitir o desenvolvimento de capacidades, competências e atitudes, tais como:

- ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar informação em qualquer destas formas de representação;
  - traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
  - elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas;
  - usar representações para modelar, interpretar e reflectir sobre situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais.
- (Ponte *et al.*, 2007, p.5)

Considerando os objetivos definidos anteriormente é fundamental referir que as representações dos alunos vão evoluindo ao longo da sua escolaridade. Por isso, é pertinente salientar que as representações iniciais dos alunos são denominadas de representações idiossincráticas definidas por Santos (1991, citado por Canavarro & Pinto, 2012) como representações “(...) espontâneas e imediatas, mais ou menos diferenciadas social e culturalmente, que têm mais a ver com o conhecimento do quotidiano do que com o conhecimento científico” (Canavarro & Pinto, 2012, p.54).

As representações idiossincráticas vão sendo construídas pelos alunos na sequência da resolução de problemas e da investigação dos seus raciocínios matemáticos (NCTM, 2007). Estas representações têm como objetivo ajudar “(...) os alunos na compreensão e na resolução de problemas” à medida que vão adquirindo “(...) formas significativas para registar um método de resolução e para o descrever a outros” (NCTM, 2007, p.76).

No entanto, as representações idiossincráticas podem constituir-se como essenciais no modo de compreender e interpretar as aprendizagens e raciocínios dos

alunos, mas também de expressar e organizar os seus raciocínios matemáticos. Desta forma, os alunos podem auxiliar-se das suas representações na produção de aprendizagens matemáticas e posteriormente utilizá-las na formulação de raciocínios mais concretos e na reflexão (NCTM, 2007).

As representações das ideias matemáticas podem ser enquadradas pelas propostas de Bruner, relativamente às representações em geral. Bruner (1999) identifica três formas distintas de representações, tais como: (i) representações ativas, expressam-se através de um conjunto de ações apropriadas para adquirir um resultado e do uso de materiais manipuláveis e de outros objetos; (ii) representações icónicas, baseiam-se na organização visual, no uso de imagens, desenhos, gráficos, esquemas, diagramas, etc. que referenciam uma ideia ou procedimento; e, (iii) representações simbólicas, que consistem na explicação das experiências por meio de qualquer tipo de linguagem que envolva um conjunto de regras para trabalhar a matemática ou para a sua compreensão, através de símbolos, vocabulário matemático e linguagens (Boavida *et al.*, 2008; Bruner, 1999; Canavarro & Pinto, 2012). Estas três formas de representação não devem ser compreendidas “(...) como autónomas, independentes ou alternativas umas às outras” (Boavida *et al.*, 2008, p.71).

As diversas representações matemáticas realizadas pelos alunos, como já referido, permitem aos educadores/professores compreender e perceber os seus raciocínios matemáticos. Já que devido à “(...) impossibilidade de aceder diretamente ao raciocínio dos alunos, as representações que estes usam para comunicar esse raciocínio são fundamentais” (Mata-Pereira & Ponte, 2012, p.84).

### **A comunicação matemática**

A comunicação é uma das capacidades transversais a toda a aprendizagem em matemática e está presente em todos os momentos na sala de aula. É uma forma de partilhar as ideias, os processos e os resultados matemáticos entre os alunos e entre o professor e o(s) aluno(s), por meio da realização de tarefas a pares, em pequeno grupo e/ou em grande grupo (Boavida *et al.*, 2008; NCTM, 2007). No entanto, a comunicação matemática na sala de aula só se constitui como proveitosa se existirem interações

comunicativas, onde todos sejam “(...) incentivados a exprimir, partilhar e debater ideias, estratégias e raciocínios matemáticos com os colegas e com o professor” e, ainda, “(...) a expor dúvidas ou dificuldades” (Ponte *et al.*, 2007, p.30).

É de salientar que o educador/professor tem um papel determinante na gestão do ambiente da sala, uma vez que este deve ser favorável à comunicação e onde todos os alunos tenham a oportunidade de participar no processo. Porque em ambientes adequados, os alunos

(...) são capazes de explicar e de justificar os raciocínios usados durante o processo de resolução de uma tarefa matemática, de fazer generalizações a partir da análise de casos particulares, de compreender o que significa um contraexemplo, de refletir sobre o que constitui um argumento aceitável e adequado quando se trabalha em Matemática e de aplicar resultados gerais a exemplos específicos. (Boavida *et al.*, 2008, p.81)

Neste sentido, ao ocorrer a partilha de ideias, estratégias e resultados matemáticos os mesmos podem ser modificados, consolidados e aprofundados por cada aluno. Nesta perspetiva a comunicação permite alargar os conhecimentos matemáticos dos alunos, ao interagir com os raciocínios dos outros, mas também contribui para compreenderem e raciocinarem sobre o próprio pensamento e/ou de outro(s) colega(s), no sentido de desenvolverem a sua compreensão matemática (Boavida *et al.*, 2008; NCTM, 2007; Ponte *et al.*, 2007).

À medida que os alunos se envolvem na partilha dos seus raciocínios matemáticos torna-se perceptível como formularam as suas conjeturas e que argumentos utilizam para convencer os colegas sobre a validade das mesmas. Assim, estes momentos possibilitam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, uma vez que as suas conjeturas se tornam objeto de reflexão, discussão e refinamento. E também fundamentais na organização, clarificação e na consolidação do pensamento matemático, ao mesmo tempo que as aprendizagens adquirem significado (Boavida *et al.*, 2008; NCTM, 2007).

Na comunicação dos raciocínios matemáticos, procedimentos e resultados, os alunos não usam só a linguagem matemática, recorrem também à linguagem natural e à

linguagem corporal, podendo socorrer-se de desenhos, figuras, esquemas, dramatizações e outras formas de representação, explicitadas anteriormente, para comunicar os seus raciocínios.

A utilização de diversos tipos de linguagem nas aulas de matemática constitui-se como essencial na transmissão de ideias e na aprendizagem da matemática, tanto a nível oral ou escrito. Por isso, nas aulas de matemática os alunos e/ou educador/professor comunicam de forma construtiva na discussão oral das ideias, estratégias e resultados, mas também através da elaboração de registos escritos das tarefas.

Neste sentido, o desenvolvimento da capacidade de comunicação dos alunos irá socorrer-se da linguagem oral e da linguagem escrita na organização, clarificação e consolidação dos seus raciocínios matemáticos. O que permitirá ajudar os alunos a desenvolver as ideias matemáticas expressas através da linguagem natural e a integrá-las, progressivamente numa linguagem mais precisa e específica, ou seja, numa linguagem matemática. Porque ao longo de toda a escolaridade as ideias matemáticas dos alunos devem tornar-se cada vez precisas, complexas e abstratas (Boavida *et al.*, 2008; NCTM, 2007).

Na linguagem matemática evidencia-se a linguagem simbólica, mais concretamente, quando se pensa “(...) na dimensão escrita da comunicação matemática” (Boavida *et al.*, 2008, p.77). Esta linguagem simbólica assenta no recurso a um sistema simbólico que “(...) permite uma escrita condensada, facilita a precisão e permite, em muitos casos, usar processos de cálculo bastante expeditos” (Boavida *et al.*, 2008, p.77). No entanto, também se pode dizer que o sistema simbólico auxilia os alunos no desenvolvimento do seu raciocínio matemático e é um meio que permite a reflexão e compreensão sobre a linguagem utilizada nos processos de aprendizagem da matemática (Boavida *et al.*, 2008; Ministério da Educação, 1997; NCTM, 2007; Ponte *et al.*, 2007).

Assim, considero que a capacidade de comunicação matemática não é um fim do ensino da matemática em si mesma, mas sim um meio de expressão das ideias e raciocínios matemáticos que os alunos vão adquirindo progressivamente. A troca de ideias e raciocínios é também extremamente importante no desenvolvimento pessoal, afetivo e social de cada um, uma vez que propicia aprendizagens matemáticas mais significativas e gratificantes para os alunos.

## Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos

### Natureza das tarefas

As capacidades transversais (raciocínio matemático, resolução de problemas e comunicação matemática), discutidas na secção anterior, têm como propósito que os alunos aprendam matemática através do trabalho por eles realizado, à medida que os alunos as desenvolvem desde o pré-escolar (NCTM, 2007; Ponte *et al.*, 2007). Neste sentido, o raciocínio matemático dos alunos é uma capacidade transversal fundamental que deverá ser construído, desenvolvido e consolidado através de diversos processos de ensino-aprendizagem da matemática, com base em diferentes experiências matemáticas, por exemplo: a resolução de problemas; as atividades de exploração ou de investigação; os projetos; os jogos; os exercícios; etc..

As experiências matemáticas supracitadas podem ser diversificadas, considerando-se tarefas que apelam “(...) mais à memória e ao treino, enquanto outras estão direccionadas para processos mais complexos de pensamento.” (Boavida *et al.*, 2008, p.15). Ponte (2005) considera que as tarefas podem ser definidas tendo em conta o seu grau de desafio e de abertura, ou seja, mais desafiantes ou mais acessíveis, bem como mais abertas ou fechadas. E mediante estes pressupostos Ponte (2005) salienta que podemos ter quatro tipos de tarefas, tal como: (i) os problemas, que devem ser desafiantes e gratificantes, considerando-se também como tarefas fechadas; (ii) os exercícios, denominando-se como tarefas de grau de desafio reduzido e fechadas, onde se colocam em prática os conhecimentos adquiridos anteriormente; (iii) as investigações, que adquirem um grau de desafio elevado e são abertas; e, (iv) a exploração, que se caracteriza por ter um grau de desafio reduzido e ser aberta (Boavida *et al.*, 2008; Ponte, 2005).

Ao considerar-se estes diferentes tipos de tarefas pode inferir-se que os problemas, as investigações e as explorações são tidos como tarefas que privilegiam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Porque as tarefas, ao serem concebidas com o intuito de os alunos explorarem, investigarem, representarem, conjecturar, comunicarem, explicarem e justificarem as suas ideias, estratégias e



resultados matemáticos, são criadas condições para o desenvolvimento do seu raciocínio matemático. Mas os exercícios também se podem constituir como pontos de partida promotores do desenvolvimento do raciocínio matemático – todavia o educador/professor tem de desafiar os alunos a confrontar e a discutir os resultados obtidos (NCTM, 2007).

Para além da concretização de tarefas de natureza diversa, deve valorizar-se os momentos para apresentação e confronto de resultados, discussão de estratégias, procedimentos e raciocínio matemáticos, construção de conceitos, domínio das linguagens matemáticas e das representações múltiplas, e o estabelecimento de conexões. Desta forma, o educador/professor irá permitir que os alunos produzam, desenvolvam e/ou modifiquem os seus raciocínios matemáticos tornando-os cada vez mais complexos e diversificados (Ponte *et al.*, 2007).

No entanto, o ensino-aprendizagem da matemática também pressupõe que os trabalhos desenvolvidos na sala de aula devem contemplar diversas formas de organização do grupo/turma, de modo que seja dada a oportunidade dos alunos desenvolverem o seu raciocínio matemático. Assim, as tarefas podem ser realizadas através de trabalho individual, a pares, em pequenos grupos e em grande grupo, no sentido de ir de ao encontro dos objetivos e da natureza das tarefas.

### **A “cultura da aula”**

Ao analisar os diversos processos de ensino-aprendizagem da matemática, apresentados anteriormente, e tendo em conta as orientações metodológicas gerais do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte *et al.*, 2007), é evidente que as tarefas propostas pelo educador/professor que estimulam os alunos a pensar, compreender, explorar e investigar são valorizadas, uma vez que proporcionam o desenvolvimento do seu raciocínio matemático. Neste sentido, o mesmo programa veio desmistificar algumas estratégias e conceções metodológicas do ensino da matemática, onde os alunos têm um papel ativo na construção da sua aprendizagem, desde que as tarefas propostas sejam válidas, desafiantes, estimulantes, aliciantes e intencionais, em

detrimento de um ensino mais tradicional em que os alunos têm um papel passivo na construção do seu conhecimento (Ponte *et al.*, 2007). Desta forma, Ponte (2005), afirma que o ensino da matemática pode ser distinguido por duas estratégias básicas, o ensino direto e o ensino-aprendizagem exploratório.

Assim, no ensino direto da matemática, que se pode comparar com o ensino mais tradicional, o professor tem o papel de destaque na condução da aula, uma vez que assume a posição de transmissor dos conhecimentos e conteúdos a adquirir pelos alunos. Pode dizer-se que os alunos têm um papel passivo na construção do seu conhecimento, uma vez que o objetivo central do ensino direto é garantir que, os alunos, memorizem os conceitos e práticas expostas e exemplificadas pelo professor no sentido de as transpor na concretização de exercícios ou nas respostas às questões formuladas (Ponte, 2005). Neste tipo de ensino, “(...) a aprendizagem é concebida como um processo no qual os alunos absorvem informação e a armazenam em fragmentos facilmente recuperáveis, como resultado da prática repetitiva e do reforço” (NCTM, 1991, p.11).

No lado oposto, encontra-se o ensino exploratório da matemática, que se constituiu como essencial na investigação que deu origem a este relatório. Neste tipo de ensino da matemática, os professores procuram estimular, orientar e participar na construção dos conhecimentos dos alunos. Considera-se que o ensino exploratório da matemática se caracteriza pela prática em que os alunos se envolvem na realização de tarefas de descoberta que lhes permitam desenvolver a autonomia, a cooperação, a imaginação, a memorização e a iniciativa, suscitando também a participação ativa e dinâmica do aluno na sua aprendizagem, no desenvolvimento do seu raciocínio matemático e na aquisição de conhecimentos, com base na realização e discussão coletiva de tarefas de natureza essencialmente problemática ou investigativa (Ponte, 2005).

No ensino exploratório pode também haver a necessidade de existirem situações em que o professor expõe e sistematiza as aprendizagens, uma vez que nem todas estas resultam da exploração dos alunos, o que não impede que a forma de trabalho primordial na sala de aula seja o ensino exploratório. Segundo Ponte (2005), o ensino exploratório “(...) valorizará mais os momentos de reflexão e discussão com toda a

turma, tendo por base o trabalho prático já previamente desenvolvido, como momentos por excelência para a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas” (Ponte, 2005, pp.15-16).

No entanto, é essencial referir que o ensino exploratório da matemática requer que o professor selecione tarefas desafiantes para apresentar aos alunos, explore todas as suas potencialidades de forma a verificar se as mesmas cumprem o propósito matemático da aula e se permitem o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos dos alunos. Deste modo, o professor ao estruturar as suas aulas deve ter em conta as seguintes fases: 1.ª Introdução da tarefa; 2.ª Desenvolvimento da tarefa; 3.ª Discussão da tarefa, e 4.ª Sistematização das aprendizagens matemáticas (Canavarro, 2011).

As fases descritas anteriormente devem encontrar-se articuladas entre si e também contribuir para o propósito da aula. Assim, na Introdução da tarefa é essencial averiguar se todos os alunos perceberam o contexto e os objetivos da tarefa, e também desafiá-los para progredirem na tarefa, de forma a irem ao encontro do propósito matemático da aula. O professor ao desafiar os alunos para a tarefa está a aliciá-los para o desenvolvimento da mesma e a dar-lhes a oportunidade de comunicarem e estruturarem o seu próprio raciocínio matemático. Esta estruturação das ideias matemáticas irá culminar com a discussão da tarefa, onde as resoluções mais pertinentes para a discussão serão apresentadas à turma. Após a discussão da tarefa é necessário sistematizar as aprendizagens matemáticas, de forma a verificar-se as relações com o objetivo matemático da aula expresso na planificação (Canavarro, 2011).

Quando se elabora uma planificação orientada para o ensino exploratório da matemática deve ter-se em conta diversos fatores que podem influenciar a prática, tais como: os conteúdos matemáticos a trabalhar, os objetivos, os recursos materiais e o tempo de concretização de cada uma das fases da aula, sendo também necessário prever as ações do professor e dos alunos e tentar relacioná-las com o propósito matemático da aula. Deste modo, e segundo Canavarro (2011), o professor deve dedicar-se a:

Prever a interpretação e o envolvimento dos alunos na tarefa; Elencar uma diversidade de estratégias, correctas e incorrectas, que os alunos poderão usar,

com diferentes graus de sofisticação; Relacionar essas estratégias com os conceitos, representações, ou procedimentos que quer que os alunos aprendam e/ou com as capacidades que quer que eles desenvolvam. (Canavarro, 2011, p.13)

Assim, o professor ao planificar uma tarefa exploratória deve dominar e conhecer todas as potencialidades da tarefa, de forma que encontre um maior leque de resoluções que conseguir para que no momento da exploração e monitorização, em sala de aula, se sinta mais confiante e apto a responder às dúvidas ou inquietudes dos alunos. Mas, além disto, o professor também deve antecipar os critérios de seleção das resoluções a apresentar pelos alunos/grupos, mediante o propósito matemático da aula; ponderar acerca da organização das apresentações; estabelecer a forma como vai gerir a discussão e as conexões inerentes; e antecipar as possíveis dificuldades com que os alunos se poderiam debater (Canavarro, 2011).

Ao ter-se em conta todos os aspetos demonstrados anteriormente, pode dizer-se que o ensino exploratório da matemática recorre a tarefas que pretendem ser desafiantes, gratificantes e ricas matematicamente. Assim, a realização de tarefas recorrendo à metodologia do ensino exploratório da matemática permite que os alunos se apropriem de diversos conteúdos, saberes e aprendizagens matemáticas, ao mesmo tempo que desenvolvem o seu raciocínio matemático.

### **Orientações curriculares sobre o raciocínio matemático**

As orientações para o ensino da matemática, mais concretamente, relativas à importância do desenvolvimento do raciocínio matemático, têm sofrido evolução ao longo dos anos. Esta situação é perceptível nos diferentes documentos curriculares internacionais e nacionais, onde é cada vez mais evidente que o desenvolvimento do raciocínio matemático é considerado como fulcral no ensino da matemática em qualquer nível de escolaridade.

## Orientações curriculares internacionais

O desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos ganhou uma maior relevância no panorama internacional a quando da publicação das *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (1991, obra original publicada em 1989 pelo NCTM), uma vez que nesta é retratada a pertinência de incentivar o raciocínio, as conexões e a comunicação a par da resolução de problemas, em detrimento da memorização de conceitos e procedimentos. Neste sentido, verifica-se a necessidade de alterar o currículo de matemática do pré-escolar e do 1.º ciclo do ensino básico de modo que os alunos possam prever resultados, estudar e partilhar raciocínios, analisar e explorar diferentes formas de resolução, etc. (NCTM, 1991).

De forma a dar continuidade às orientações curriculares para o ensino da matemática, expressas no documento referido anteriormente, foi publicado os *Princípios e normas para a matemática escolar* (2007, obra original publicada em 2000 pelo NCTM), onde é apresentado um conjunto de princípios e normas que têm como objetivo orientar o educador/professor no desenvolvimento do ensino da matemática (NCTM, 2007). Assim, os princípios para a matemática escolar segundo o NCTM (2007) são seis – Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia – que “(...) descrevem características de uma educação matemática de elevada qualidade” (NCTM, 2007, p.11) que são compatíveis com as normas.

No que se refere às normas para a matemática escolar, o documento manifesta que estas “Especificam os níveis de compreensão, o conhecimento e as capacidades que os alunos deverão adquirir desde o pré-escolar ao 12.º ano.” (NCTM, 2007, p.31). Como referido anteriormente, as normas enquadram-se em normas de conteúdo – Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida, e Análise de Dados e Probabilidades – que “(...) descrevem explicitamente os conteúdos que os alunos deverão aprender.” (NCTM, 2007, p.31) ao longo dos diferentes níveis de ensino, e em normas de processo – Resolução de problemas, Raciocínio e Demonstração, Comunicação, Conexões e Representação – que “(...) dão ênfase às maneiras de adquirir e utilizar os conhecimentos sobre os conteúdos referidos.” (NCTM, 2007,

p.31). Apesar de existirem normas que se focam nos conteúdos e outras nos processos matemáticos, estas devem ser trabalhadas em simultâneo.

Ao se analisar as normas de processo, pode verificar-se que no documento, *Princípios e normas para a matemática escolar* (NCTM, 2007) sobressai a importância dada à representação e o destaque dado à demonstração. Mas também é dada relevância, como referido anteriormente, ao facto de a resolução de problemas não ser encarada como o foco principal da matemática escolar, como acontecia até então, porém “(...) constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática (...)” (NCTM, 2007, p.57).

No âmbito das normas para o Raciocínio e Demonstração, é salientado que “Ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática.” (NCTM, 2007, p.61). Por isso torna-se necessário compreender e perceber os procedimentos efetuados, bem como os resultados alcançados no sentido de “(...) desenvolver a capacidade de raciocínio matemático dos alunos (...)”, uma vez que esta “(...) não se resume a memorizar conceitos e procedimentos rotineiros.” (Mata-Pereira & Ponte, 2012, p.81).

Portanto, o documento *Princípios e normas para a matemática escolar* (2007) destaca que “O raciocínio e a demonstração deverão constituir uma parte consistente das experiências matemáticas dos alunos, desde o pré-escolar ao 12.º ano.” (NCTM, 2007, p.61). Assim, as experiências matemáticas ao serem desenvolvidas pelos alunos devem permitir que: reconheçam o raciocínio e a demonstração como aspetos fundamentais da matemática; formulem e investiguem conjecturas matemáticas; desenvolvam e avaliem argumentos e provas matemáticas; também, selecionem e usem diversos tipos de raciocínio e métodos de demonstração (NCTM, 2007).

As normas para a matemática escolar contemplam diferentes níveis de aprendizagem, relativamente ao raciocínio matemático, entre o pré-escolar e o 2.º ano de escolaridade, é referido que nos primeiros anos o raciocínio matemático deverá incluir a identificação de padrões e o desenvolvimento das capacidades de classificação. Por isso, o educador/professor deve encorajar as crianças/alunos a usar exemplos e contraexemplos, de modo a verificarem se as suas estratégias e generalizações são úteis, eficazes e adequadas à situação em estudo (NCTM, 2007).

Neste sentido, as crianças/alunos irão desenvolvendo a sua capacidade de raciocinar matematicamente, uma vez que vão procurando confirmar as suas conjecturas e explicando os processos utilizados, quando é solicitado (NCTM, 2007). Portanto, pode dizer-se que “A maturidade, as experiências e o crescente conhecimento matemático promovem, em conjunto, o desenvolvimento do raciocínio matemático (...)” (NCTM, 2007, p.143).

No âmbito das normas relativas ao raciocínio matemático, entre o 3.º e 5.º ano de escolaridade, o NCTM (2007, p.220) afirma que, “(...) os alunos deverão passar por uma importante transição no seu raciocínio matemático.”, uma vez que devem formular e avaliar as suas conjecturas tendo em conta as provas encontradas. Portanto, as experiências matemáticas devem ser gratificantes e diversificadas, de forma que permitam que os alunos apliquem as suas competências e capacidades de raciocínio na explicação, justificação e confrontação das suas conjecturas com as dos colegas.

### **Orientações curriculares nacionais**

A nível nacional o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos começou a ganhar expressão nos documentos e orientações curriculares que foram sendo publicadas ao longo dos anos. Estas publicações foram influenciadas pelos documentos publicados internacionalmente, que tinham como objetivo analisar e orientar o ensino e aprendizagem da matemática.

No âmbito do pré-escolar, as *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* (1997) e as *Metas de Aprendizagem desejáveis no início do 1.º ciclo (relativas à Educação Pré-Escolar)* (2010) constituem-se como documentos orientadores do ensino, da aprendizagem e da avaliação a desenvolver. Assim, ao nível do ensino da matemática, mais concretamente, do desenvolvimento do raciocínio matemático, é expresso nas *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* que o educador deve proporcionar momentos que permitam o desenvolvimento e a estruturação do raciocínio matemáticos das crianças, através do recurso a situações do quotidiano. No decurso destes momentos o educador deve apoiar as crianças na consolidação e sistematização das aprendizagens matemáticas (Ministério da Educação, 1997).

No mesmo documento é salientado que o raciocínio matemático no pré-escolar é desenvolvido através da realização de tarefas que possibilitem trabalhar diversos aspectos, que permitam a aquisição de noções de: qualidade (por exemplo: espessura, luminosidade, cor, forma, etc.); quantidade (como: correspondência um a um ou a uma série ou uma hierarquia; classificação, seriação; etc.); medida (por exemplo: altura, tamanho, etc.); tempo (como: duração, velocidade, etc.); espaço (por exemplo: na realização de construções com materiais de dimensões distintas); etc. (Ministério da Educação, 1997). Mas também através da resolução de problemas, mais especificamente, “(...) de estimular as razões da solução, de forma a fomentar o desenvolvimento do raciocínio e do espírito crítico.”, uma vez que a criança é “(...) confrontada com questões que não são de resposta imediata, mas que a levam a reflectir no como e no porquê.” (Ministério da Educação, 1997, p.78).

As *Metas de Aprendizagem desejáveis no início do 1.º ciclo (relativas à Educação Pré-Escolar)* (2010) foram elaboradas com o propósito de elucidar os educadores dos requisitos para proporcionar o sucesso escolar das crianças. No que respeita, às metas da área da matemática posso dizer que implicitamente em muitas das metas finais se pode inferir a referência ao desenvolvimento do raciocínio matemático (Ministério da Educação, 2010).

Ao nível do 1.º ciclo do ensino básico a importância do raciocínio matemático começou a ganhar expressão com a elaboração do *Programa do 1.º Ciclo do Ensino Básico*, em 1990, que posteriormente foi substituído pela *Organização Curricular e Programas Ensino Básico - 1.º Ciclo*, devido à necessidade de introduzir algumas alterações devido à publicação do *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*, em 2001. Essas alterações não se verificaram ao nível da área curricular da matemática, mantendo-se o desenvolvimento da capacidade de raciocínio matemático, de comunicação e de resolver problemas como as grandes finalidades do ensino da matemática para o ensino básico, que devem ser transversais a todo o 1.º ciclo, de forma que o processo de ensino-aprendizagem permita a organização do pensamento e dos processos matemáticos (Ministério da Educação, 2004).

É também evidenciado que as aprendizagens matemáticas, expressas na *Organização Curricular e Programas Ensino Básico - 1.º Ciclo*, devem ser



desenvolvidas fundamentalmente através da resolução de problemas, uma vez que esta promove o desenvolvimento do raciocínio matemático e da comunicação. Ao mesmo tempo que se deverá apoiar “(...) em operações lógicas elementares (...), em materiais e linguagem gráfica que constituam uma ponte entre o real e as abstrações matemáticas.” (Ministério da Educação, 2004, p.164) e proporcionar a participação ativa dos alunos na construção das suas aprendizagens.

No *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais* publicado em 2001, também é realçado que o enfoque da matemática escolar deve centrar-se na “(...) utilização da matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar (...)”, em detrimento da “(...) aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas (...)” (Ministério da Educação, 2001, p.58). Assim, a resolução de problemas, o desenvolvimento do raciocínio matemático e o processo de comunicação irão permitir que os alunos adquiram confiança e motivação na exploração e investigação de situações problemáticas.

No ano de 2007, foi proposto por diversos investigadores um documento, que visa o reajustamento do programa de matemática para o ensino básico, intitulado de *Programa de Matemática do Ensino Básico (2007)* que apresentou algumas alterações “(...) significativas para o ensino desta disciplina (...)” ao mesmo tempo que “(...) procura legitimar muitos dos aspectos mais importantes das práticas profissionais dos professores (...)” (Ponte, 2009, p.97). O referido programa pretende proporcionar aos alunos experiências matemáticas e aprendizagens significativas, bem como desenvolver estruturas matemáticas cada vez mais complexas, abstratas e poderosas, em comparação com as que já possuem, no sentido de torná-los mais autónomos, perseverantes e seguros de si (Ponte *et al.*, 2007).

Neste sentido, é de salientar que no *Programa de Matemática do Ensino Básico (2007)* tal como no documento *Princípios e normas para a matemática escolar (2007)* existiu, como já se referiu, a necessidade de evidenciar os temas matemáticos – Números e Operações, Geometria e Medida, Álgebra, e Organização e Tratamento de Dados – e as capacidades transversais a todo o processo de ensino-aprendizagem da matemática – o raciocínio matemático, a resolução de problemas e a comunicação matemática (NCTM, 2007; Ponte *et al.*, 2007).

Relativamente, ao desenvolvimento do raciocínio matemático o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (2007) destaca a importância da utilização de conceitos, representações e procedimentos matemáticos. E onde os alunos devem desenvolver conhecimentos, capacidades e atitudes ao nível de:

- seleccionar e usar fórmulas e métodos matemáticos para processar informação;
- reconhecer e apresentar generalizações matemáticas e exemplos e contra-exemplos de uma afirmação;
- justificar os raciocínios que elaboram e as conclusões a que chegam;
- compreender o que constitui uma justificação e uma demonstração em Matemática e usar vários tipos de raciocínio e formas de demonstração;
- desenvolver e discutir argumentos matemáticos;
- formular e investigar conjecturas matemáticas. (Ponte *et al.*, 2007, p.5)

No ano de 2013 foi homologado e publicado o *Programa de Matemática para o Ensino Básico*, no sentido de “(...) harmonizar os conteúdos programáticos com as Metas Curriculares.” (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013, p.1). Porque segundo Bivar, Grosso, Oliveira e Timóteo (2013) existiam desfasamentos entre a organização dos conteúdos do programa anterior e as *Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico*, homologadas em 2012.

No entanto, este novo programa no meu ponto de vista só se foca em conteúdos matemáticos e por isso o desenvolvimento das capacidades transversais é feito segundo o programa anterior. Porque o raciocínio matemático é considerado a par da resolução de problemas e da comunicação matemática como uma capacidade fundamental no ensino da matemática e que requer a formulação, o teste e prova de conjeturas e só posteriormente a sua demonstração (Ponte *et al.*, 2007). Estes procedimentos são descritos por diversos autores (Boavida, 2008; Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2003; NCTM, 2007; Oliveira, 2008) como essenciais e importantes no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos que se pretende proporcionar nas aulas de matemática.

## **CAPÍTULO 3**

### **Metodologia**

Este capítulo é dedicado à apresentação e justificação da metodologia que apoiou a presente investigação, que se sustentou numa abordagem de investigação-ação. Neste sentido, o capítulo inicia-se com a exposição das opções metodológicas que se enquadram no âmbito da investigação. Posteriormente, é realizada a caracterização dos contextos da investigação, mais concretamente, a contextualização do grupo e da turma onde decorreu a intervenção. Para além destes aspetos, são também explícitos os fundamentos da intervenção didática, a descrição e intencionalidade das tarefas realizadas nos dois contextos, e como se processou a recolha e análise dos dados para a presente investigação.

### **Opções metodológicas**

A investigação realizada no decorrer da Práticas de Ensino Supervisionada em Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico baseou-se num processo de construção de conhecimento, pesquisa e reflexão sobre a ação educativa desenvolvida, ou seja, fundamentou-se na formação de educadores/professores investigadores da própria prática. Esta noção de educador/professor investigador é normalmente associada a Stenhouse (1975, citado por Serrazina & Oliveira, 2001), uma vez que “(...) os professores que desenvolvem a sua arte como práticos através de uma abordagem

reflexiva e de pesquisa sobre as actividades da sua sala de aula.” (Serrazina & Oliveira, 2001, p. 285) são caracterizados como educadores/professores investigadores.

Neste sentido, e tendo presente que os educadores/professores não devem ser meros cumpridores dos programas curriculares, torna-se necessário que demonstrem uma postura de investigadores da sua própria prática, que sejam inovadores observadores e que contribuam para a compreensão da educação (Alarcão, 2001). O que irá permitir uma análise e reflexão mais consistente sobre a sua prática educativa e as aprendizagens dos seus alunos, de forma mais estruturada e sistemática (Alarcão, 2001; Tuckman, 2012).

Deste modo, e segundo Oliveira e Serrazina (2002, p.34) “O professor investigador tem de ser um professor reflexivo (...)”, mas que esta reflexão por si só não chega, porque é necessário compreender que “(...) a qualidade e a natureza da reflexão são mais importantes do que a sua simples ocorrência.” (Oliveira & Serrazina, 2002, p.34). Porque só assim é que o educador/professor “(...) consegue explicitar diferentes aspectos do seu conhecimento tácito.” (Oliveira & Serrazina, 2002, p.40) e contribuir para aumentar o seu conhecimento sobre a educação.

No entanto, Ponte (2002) salienta que o conceito de investigação-ação se encontra bastante próximo do de investigação sobre a prática. Por isso, é de salientar que esta investigação foi desenvolvida segundo a metodologia de investigação-ação, permitindo a análise, compreensão, reflexão e orientação da minha prática educativa, ao nível do desenvolvimento do raciocínio do matemático dos alunos.

A metodologia da investigação-ação é “(...) um excelente guia para orientar as práticas educativas.”, permitindo aos educadores/professores tornarem-se investigadores, “(...) com o objectivo de contribuírem para a melhoria do ensino e dos ambientes de aprendizagem na sala de aula” (Arends, 1995, p.525). Esta metodologia “(...) implica planear, actuar, observar e reflectir mais cuidadosamente do que aquilo que se faz no dia-a-dia, no sentido de induzir melhorias nas práticas e um melhor conhecimento das práticas acerca das suas práticas.” (Zuber-Skerrit, 1996, citado por Coutinho *et al.*, 2009, p.363), ou seja, implica uma pesquisa auto-refletida e contínua sobre a prática que tem como objetivo melhorar as práticas sociais, educacionais, etc.. (Ponte, 2002; Serrazina & Oliveira, 2001).

Por isso, para melhorar as suas práticas o educador/professor necessita de estabelecer conexões entre a teoria e a prática desenvolvida num determinado contexto. Porque a prática desenvolvida num determinado contexto não é igual à desenvolvida noutra, visto que os diferentes contextos têm especificidades diferentes que requerem que o educador/professor se envolva, reflita e compreenda as necessidades e potencialidades de cada um, de modo a melhorar as práticas educativas.

A presente investigação, como supracitado, desenvolve-se segundo uma metodologia de investigação-ação que se enquadra numa abordagem de natureza qualitativa. De acordo com Bogdan e Biklen (1992, citado por Tuckman, 2012), uma investigação de natureza qualitativa é descrita segundo cinco características principais, tais como: (i) o investigador é o instrumento-chave da recolha dos dados, num ambiente natural; (ii) a investigação primeiramente é do tipo descritiva e só posteriormente requer a análise dos dados; (iii) o investigador envolve-se no processo de investigação; (iv) a análise dos dados é realizada pelo investigador através de métodos indutivos; (v) a importância dada ao que as coisas significam, no motivo dos acontecimentos e no que realmente aconteceu.

É importante salientar que no decorrer da investigação efetuada fui analisando, compreendendo e refletindo de forma sistemática sobre o *porquê* dos acontecimentos, no *que* aconteceu, no que poderia ser modificado, de forma a melhorar as minhas práticas posteriores. Este processo teve como objetivo perceber como se desenvolve o raciocínio matemático dos alunos das faixas etárias do estudo, mais concretamente dos 3 aos 6 anos e dos 8 aos 9 anos, e quais as suas implicações no futuro escolar dos alunos.

### **Caracterização dos contextos da investigação**

Nesta secção do capítulo 3 irei caracterizar os diferentes contextos da investigação, mais concretamente o grupo do Pré-Escolar e a turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Esta caracterização terá como base as minhas observações e algumas conversas informais que fui mantendo com os diversos membros da comunidade

educativa, uma vez que não me foram facultados quaisquer documentos pelas duas entidades onde realizei a minha prática.

### **Pré-Escolar – O grupo**

A investigação, no Pré-Escolar ocorreu entre fevereiro e maio de 2013 e, foi desenvolvida num grupo de jardim-de-infância, constituído inicialmente por 18 crianças, mas devido à mudança de residência dos pais e a dificuldades económicas, três crianças deixaram de frequentar a instituição. Assim, a investigação passou a ser desenvolvida num grupo composto por 15 crianças, 7 do sexo feminino e 8 do sexo masculino, na qual assumi simultaneamente os papéis de educadora e investigadora. As idades das crianças do grupo variavam entre os 3 e os 6 anos, denominando-se como um grupo heterogéneo. Neste grupo havia uma criança que era acompanhada por uma técnica de intervenção precoce, que se deslocava à instituição uma manhã por semana.

No que respeita ao tempo de frequência das crianças na instituição e/ou sala e tendo em conta algumas conversas informais que foi mantendo com os pais, educadora e auxiliar, a grande maioria das crianças já frequentava a instituição no ano letivo anterior. Sendo de salientar que as crianças mais novas integraram o grupo nesse ano letivo, enquanto outras já faziam parte do grupo e eram acompanhados pela mesma educadora e auxiliar.

A maioria das crianças, nove, não tem irmãos enquanto as restantes seis têm um, dois ou três irmãos. E relativamente à empregabilidade dos pais a maioria encontra-se empregada, mas segundo a educadora o nível socioeconómico é médio-baixo.

No que se refere aos conhecimentos matemáticos das crianças, era um grupo heterogéneo, com crianças muito trabalhadoras, responsáveis e interessadas pelas tarefas que foram sendo propostas. Mas também existiam crianças que não demonstravam qualquer interesse nem vontade em realizar qualquer tarefa matemática, enquanto outras apesar de revelarem algumas dificuldades mostravam-se empenhadas e participavam ativamente na concretização das tarefas.

Desta forma, ao longo da investigação fui identificando os interesses, as necessidades, as dificuldades, as competências e os conhecimentos adquiridos pelas

crianças ao nível domínio da matemática. Inicialmente as crianças demonstravam muitas fragilidades; não reconheciam a sequência dos dias da semana, dos meses; não conseguiam identificar, por exemplo o número 5, apesar de algumas terem a sequência numérica até 10 adquirida, enquanto outras omitiam determinados números; ao nível do reconhecimento das figuras geométricas eram poucas as crianças que as conseguiam identificar; algumas não conseguiam orientar-se no espaço com relativa facilidade; e, era evidente que as crianças tinham muitas dificuldades em raciocinar matematicamente. No final da minha prática, foi possível verificar que as crianças já exploravam o mapa das presenças autonomamente, conseguindo identificar a sequência dos dias da semana, bem como a sequência dos números cardinais; conseguiam associar um número cardinal à respetiva quantidade; comparavam quantidades; realizavam conjuntos, padrões e sequências de figuras e/ou objetos; identificavam facilmente qualquer figura geométrica; raciocinavam matematicamente; etc..

### **1.º Ciclo do Ensino Básico – A turma**

A presente investigação também foi desenvolvida no 1.º Ciclo do Ensino Básico, mais concretamente, entre setembro e dezembro de 2013, numa turma do 3.º ano. Esta turma era composta por 25 alunos, dos quais 12 são do sexo feminino e 13 do sexo masculino. Relativamente à idade dos alunos a turma é homogénea, variando entre os 8 e os 9 anos.

Os alunos da turma do 3.º ano já frequentavam a escola e quase todos (exceção de uma aluna, que ingressou na turma no 2.º ano) já pertenciam à turma desde o 1.º ano de escolaridade. A grande maioria dos alunos está integrada em famílias estruturadas e são provenientes de um meio socioeconómico e cultural médio. Uma vez que, alguns pais possuem cursos superiores, enquanto outros têm a escolaridade obrigatória, mas também existe uma pequena minoria que não possui qualquer grau de escolaridade, e relativamente à empregabilidade dos pais a grande maioria encontra-se empregada e numa situação estável.

Considero que o facto de quase todos os alunos estarem inseridos na turma desde o 1.º ano devia contribuir para o sucesso académico da turma, o que por vezes não

acontece, uma vez que as relações afetivas e sociais entre os alunos já deviam estar mais desenvolvidas, bem como o espírito de cooperação e interajuda. Esta minha opinião baseia-se nas observações e no trabalho realizado ao longo dos três meses de estágio, porque alguns dos alunos mostravam-se reticentes na realização de trabalhos de grupo, preferindo a realização de trabalhos individuais, encarando-os como uma competição, à referida metodologia de trabalho. Enquanto outros alunos demonstravam gosto por ajudar e cooperar na aprendizagem dos que têm mais dificuldades a Português, a Matemática, a Estudo do Meio ou na concretização de algumas atividades de Expressão dramática, motora, plástica e/ou musical.

À medida que fui passando mais tempo com a turma apercebi-me e constatei que, de modo geral, o grupo é interessado pelas atividades, trabalhador, responsável, humilde, sociável, mas muito falador e com claras dificuldades no cumprimento de determinadas regras. Estes dois últimos comportamentos demonstrados pelos alunos geraram a constante chamada de atenção para tal facto.

No entanto, os alunos revelavam uma grande disponibilidade e gosto por intervir e participar nas aulas, bem como exprimir ideias e conhecimentos. Mas o entusiasmo era tal que, por vezes, as regras de participação eram descuradas e começavam a falar todos ao mesmo tempo. Esta situação evidencia que os alunos apresentavam carências ao nível dos domínios das atitudes e valores, apesar de reconhecerem a importância dos mesmos quando questionados não os conseguiam colocar em prática.

Todavia, ao nível do domínio cognitivo, a turma é constituída de uma forma geral por alunos interessados, os quais evidenciavam o gosto pela descoberta e pela novidade, mostrando-se recetivos e empenhados na realização das diversas atividades. Apesar destas constatações, também foi possível verificar que existia alguma heterogeneidade ao nível: dos conhecimentos prévios; dos ritmos de aprendizagem; da disponibilidade para aprender e executar as atividades; do comportamento; da concentração e atenção.

Desta forma, e tendo em conta a heterogeneidade ao nível dos conhecimentos prévios, dos ritmos de aprendizagem e da disponibilidade para aprender e executar as atividades apresentadas, posso dizer que na turma existia dois tipos de apoio educativo diferentes. Neste sentido, é de referir que alguns alunos precisavam de um apoio

---



temporário para consolidar as suas aprendizagens e por isso eram integrados no Projeto Fénix, mediante as suas dificuldades a Português e/ou Matemática. Já os três alunos que evidenciavam diferenças significativas de aprendizagem, em relação ao grupo em geral, encontravam-se integrados no Decreto-Lei 3 de 2008, de 7 de janeiro, e são acompanhados pela professora de apoio educativo, pela técnica de intervenção precoce e pelo professor titular de turma, trabalhando todos estes em cooperação e tendo como objetivo ir ao encontro das necessidades dos alunos.

Relativamente, aos alunos que se encontravam integrados no Decreto-Lei 3 de 2008, é de salientar que dois deles começaram o presente ano letivo a trabalhar alguns conteúdos curriculares ao nível do 1.º ano de escolaridade e terminaram o primeiro período a trabalhar no currículo do 2.º ano. Em relação à outra aluna, apesar de continuar a acompanhar o trabalho desenvolvido pelo grupo em geral, começou a evidenciar grandes dificuldades e a distanciar-se significativamente do ritmo de trabalho e de aprendizagem dos outros alunos.

Como supracitado, os alunos da turma apresentavam níveis de desenvolvimento cognitivo diferentes. Por isso, pude aferir que na área curricular da matemática, a turma apresentava na minha opinião uma grande discrepância de conhecimentos, porque apesar da grande maioria dos alunos conhecer e dominar a numeração dada e efetuar cálculos mentalmente e por escrito, demonstrava algumas carências ao nível: do raciocínio matemático; da orientação espacial; da interpretação, representação e utilização de dados expressos em gráficos, tabelas, pictogramas e diagramas; do conhecimento e utilização de valores de grandezas e medidas (por exemplo: horas, minutos e segundos); resolver situações problemáticas no âmbito dos temas matemáticos; e, na explicitação de conceitos e procedimentos matemáticos oralmente e por escrito.

É de salientar que no final do estágio foi notório o desenvolvimento dos alunos ao nível do seu raciocínio matemático, da comunicação e explicitação dos procedimentos efetuados, da resolução de problemas, etc.. O que me faz pensar sobre as potencialidades e conhecimentos que poderiam ser desenvolvidos e adquiridos por esta turma, se tivesse sido possível a continuação desta investigação até ao final do ano letivo.

### Fundamentos da intervenção didática

Nesta outra secção do capítulo 3 apresentam-se os fundamentos da intervenção didática ao nível da organização do trabalho desenvolvido e da conceção das tarefas a realizar. Como a intervenção didática ocorreu em dois contextos diferentes, Pré-Escolar e 1.º Ciclo do Ensino Básico, a investigação foi realizada em duas fases distintas. A primeira fase decorrer numa sala do Pré-Escolar, entre fevereiro e maio de 2013, e a segunda fase desenvolveu-se numa turma do 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, entre setembro e dezembro de 2013.

É de salientar que a investigação realizada nestes dois contextos foi principiada com a observação e análise dos contextos educativos. Esta observação e análise possibilitaram a estruturação da minha prática educativa, uma vez que me permitiu realizar inferências sobre a adequação das práticas utilizadas aos contextos, aos conhecimentos, as competências, aos interesses e às necessidades das crianças e dos alunos. Por isso, na estruturação das minhas intervenções, mais concretamente, na elaboração das planificações, na estruturação e concretização das tarefas matemáticas e avaliação que deveria considerar em cada uma das tarefas planeadas, tive em consideração as observações que fui realizando.

Portanto, considero que a observação inicialmente realizada nos dois contextos educativos foi fundamental no aperfeiçoamento das minhas práticas pedagógicas, dos meus comportamentos e das minhas atitudes face às mudanças na compreensão do processo ensino-aprendizagem das crianças e dos alunos. Porque à medida que fui conhecendo melhor o grupo e a turma as minhas conceções foram sendo alteradas e permitiram que a investigação realizada fosse ganhando mais consistência pedagógica.

A estruturação e a planificação das tarefas concretizadas no âmbito desta investigação, nos diferentes contextos educativos, envolveram um trabalho prévio com a educadora e também com o professor titular da turma. Este trabalho consistiu na explicitação das tarefas, dos objetivos e da forma como as estava a pensar desenvolver e explorar com o grupo e com a turma. O momento de partilha e cooperação permitiu obter um *feedback* sobre as minhas conceções relativamente às tarefas a realizar, bem

como um maior envolvimento dos membros da equipa educativa no desenvolvimento das tarefas propostas.

### **Pré-Escolar**

A intervenção didática ao nível do Pré-Escolar foi projetada e planeada de acordo com as necessidades e interesses das crianças, onde foi favorecido o processo de socialização e autonomia, contemplando de uma forma equilibrada os “ (...) diversos ritmos e tipos de atividade, em diferentes situações – individual, com outra criança, com um pequeno grupo, com todo o grupo – e permite oportunidades de aprendizagem diversificadas, tendo em conta as diferentes áreas de conteúdo.” (Ministério da Educação, 1997, p.40). Ou seja, foi essencial estruturar o tempo educativo, de forma a permitir a existência de momentos individuais e outros onde as interações entre criança-criança, criança-adulto, em pequenos grupos e em grande grupo, sejam benéficas e significativas no desenvolvimento de cada criança.

Neste sentido, as tarefas matemáticas desenvolvidas no Pré-Escolar no âmbito desta investigação não foram desenvolvidas com todas as crianças em simultâneo, mas sim em pequenos grupos, a pares ou individualmente. Porque o método pedagógico em pré-escolar coaduna-se com a realização de tarefas num clima de apoio e colaboração entre os elementos do grupo e onde a concretização da mesma tarefa por todas as crianças ao mesmo tempo não permite que expressem as suas emoções, os seus desejos e explorem o espaço e os materiais na perspetiva de ir ao encontro das suas necessidades e interesses.

Ao longo da investigação também foram contemplados momentos em grande grupo, onde os trabalhos realizados eram partilhados com os restantes colegas. Estes momentos foram considerados de extrema importância, porque através deles as crianças conseguiam expressar as tarefas que tinham desenvolvido individualmente ou em pequenos grupos, bem como os materiais usados, as dificuldades com que se depararam e os raciocínios que utilizaram.

Com esta investigação foi perceptível a interação, a cooperação e a partilha de conhecimentos entre as crianças. O que permitiu a construção e o desenvolvimento das

interações sociais, a criação de estruturas cada vez mais sólidas e poderosas na aquisição de novas e diversificadas aprendizagens, bem como no desenvolvimento da comunicação e raciocínio matemático.

### **1.º Ciclo do Ensino Básico**

A organização do trabalho a desenvolver e a conceção das tarefas a realizar, na turma do 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, decorreu após a análise das observações realizadas inicialmente. Dessas análises realizadas verifiquei que a turma tinha dificuldades em interpretar enunciados e que raramente desenvolvia tarefas que proporcionassem o desenvolvimento do raciocínio matemático, porque muitas das tarefas eram resolvidas em grande grupo e no quadro. O que levava alguns alunos a limitarem-se a passar do quadro as resoluções das tarefas propostas.

Portanto, e tendo em consideração estas situações comecei por explorar os enunciados das tarefas em grande grupo, sublinhando as informações essenciais e pedindo a um dos alunos para explicar a tarefa proposta. Depois dava alguns minutos para os alunos resolverem individualmente, e só posteriormente é que apresentávamos e discutíamos as diversas formas de resolução, em grande grupo.

A estratégia utilizada tinha como intuito permitir aos alunos a identificação das informações fundamentais e o desenvolvimento da comunicação e do raciocínio matemático, porque “O aluno deve procurar ler, interpretar e resolver tarefas matemáticas sozinho, bem como ler, interpretar e redigir textos matemáticos.” (Ponte *et al.*, 2007, p.10). Os alunos passaram a mostrar mais interesse na resolução de tarefas matemáticas, uma vez que a apresentação e discussão das diversas formas de resolução permitia a partilha e comparação dos raciocínios matemáticos e das estratégias encontradas por cada um.

Posteriormente, e devido à turma ser muito faladora, com claras dificuldades no cumprimento de regras e na realização de tarefas em grupo, foi necessário encontrar uma estratégia de modo que os alunos mobilizassem, partilhassem e discutissem os seus conhecimentos matemáticos com os colegas antes dos apresentarem à turma. Assim, passámos a resolver as tarefas matemáticas a pares. Esta forma de resolução das tarefas,

no meu ponto de vista, permitiu que os alunos partilhassem os seus raciocínios matemáticos e as suas dúvidas com o colega, no sentido de promover a cooperação e interajuda. Este modo de organização da turma, a pares, adequasse à “(...) resolução de pequenas tarefas, permitindo que os alunos troquem impressões entre si, esclareçam dúvidas e partilhem informações.” (Ponte *et al.*, 2007, p.10).

A organização da turma, em pequenos grupos, foi o último modo de organização da turma que utilizei. Porque, após as constatações iniciais, considerei que os alunos primeiro tinham de resolver tarefas individuais, de forma a conseguirem estruturar o raciocínio matemático. E só depois é que poderiam trabalhar a pares e posteriormente em pequenos grupos.

O desenvolvimento das tarefas matemáticas, em pequenos grupos, foi ao encontro das premissas do ensino exploratório da matemática, porque as diversas tarefas propostas pretenderam estimular a capacidade de pensar, de forma flexível, dos alunos e o recurso a diversas estratégias de resolução. No decorrer da resolução das tarefas também foi valorizado a forma como os grupos chegaram ao resultado em detrimento do produto, ou seja, o facto de o grupo tentar resolver a tarefa usando um raciocínio lógico e conseguir explicar as suas estratégias foi reconhecido independentemente do resultado obtido. Porque os elementos do grupo ao comunicarem os seus raciocínios matemáticos e as suas estratégias de resolução aos restantes colegas, puderam discutir, modificar, consolidar e aprofundar os seus raciocínios.

Assim, as apresentações e a discussão das tarefas, independentemente do modo de organização da turma, eram realizadas em grande grupo. Porque, esta organização “(...) é muito importante para proporcionar momentos de partilha e discussão bem como para a sistematização e institucionalização de conhecimentos e ideias matemáticas (...)”, mas deve ser planeado e colocado em prática tendo em conta a “(...) participação da generalidade dos alunos nestes momentos de trabalho.” (Ponte *et al.*, 2007, p.10).

Ao longo desta investigação pude constatar que os alunos evidenciaram grandes progressos em relação às estratégias e aos raciocínios matemáticos apresentados, mas também ao nível da comunicação oral e escrita.

### **Descrição e intencionalidade das tarefas**

Esta secção do capítulo 3 irá contemplar a descrição e intencionalidade das tarefas matemáticas apresentadas durante a investigação, tanto no Pré-Escolar como no 1.º Ciclo do Ensino Básico. As tarefas propostas foram elaboradas com o propósito de criar condições para as crianças e os alunos desenvolverem o seu raciocínio matemático no âmbito dos quatro grandes temas/domínios da matemática – Números e Operações, Álgebra, Geometria e Medida, e, Organização e Tratamento de Dados – à medida que desenvolviam as outras capacidades transversais, tal como a resolução de problemas e a comunicação matemática.

Neste sentido, esta opção permitiu que as crianças e os alunos fossem confrontados com tarefas matemáticas que lhe proporcionassem experiências de aprendizagens diversificadas e significativas para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Por outro lado, estas tarefas também possibilitaram criar diversos ambientes de trabalho (individual, a pares, pequenos grupos e grande grupo), ao mesmo tempo que viabilizavam o confronto de diversas estratégias de resolução e ideias matemáticas, a utilização de diferentes tipos de representações e de diversos materiais manipuláveis para suportar os raciocínios matemáticos das crianças e dos alunos.

Seguidamente, são apresentados as tarefas desenvolvidas nos diferentes contextos educativos onde decorreu a investigação, bem como a descrição e a intencionalidades das mesmas. Como as tarefas matemáticas propostas tinham características, intencionalidades e público-alvo distintos existirá uma distinção entre as tarefas desenvolvidas no Pré-Escolar e as concretizadas no 1.º Ciclo do Ensino Básico.

#### **Pré-Escolar**

As tarefas propostas no Pré-Escolar foram apresentadas às crianças no seguimento da aflicção das suas necessidades e interesses. E com o intuito de permitirem o desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças.

A tabela 1 mostra algumas tarefas propostas no Pré-Escolar durante a investigação, os temas/domínios programáticos e a calendarização das mesmas. Assim,

as tarefas apresentadas pretendem evidenciar as que contribuíram de forma mais óbvia para o desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças.

**Tabela 1: Tarefas da investigação em Pré-Escolar**

<b>Tarefa</b>	<b>Tema/domínio matemático</b>	<b>Calendarização</b>
Descoberta de padrões e sequências no mapa de presenças	Geometria e Medida	04-03-2013
Classificação e formação de conjuntos com desenhos de frutas	Organização e Tratamento de Dados	06-03-2013
Duplicação de receitas culinárias	Números e Operações	11-03-2013 e 23-05-2013
Exploração da máquina de números	Números e Operações	15-03-2013
Organização e elaboração de um gráfico de barras	Organização e Tratamento de Dados	02-04-2013 e 03-04-2013
Descobrir as formas geométricas	Geometria e Medida	08-04-2013
Trabalhar a matemática com tampinhas de garrafas	Números e Operações	19-04-2013 e 26-04-2013
Vamos descobrir as nossas alturas e compará-las	Geometria e Medida	08-05-2013
Relação entre números cardinais e as respetivas quantidades	Números e Operações	15-05-2013

De seguida, é apresentada uma breve descrição e os objetivos das tarefas propostas e desenvolvidas durante a investigação no Pré-Escolar em que o desenvolvimento do raciocínio matemático, como referenciado, foi mais evidente e consistente.

#### **Tarefa: Descoberta de padrões e sequências no mapa de presenças**

A descoberta de padrões e sequências no mapa de presenças surgiu no seguimento da marcação das presenças, uma vez que verifiquei que algumas crianças não conseguiam identificar a sequências dos dias da semana, bem como a sequência numérica. Desta forma, pretendia-se que as crianças desenvolvessem o seu raciocínio

lógico e conseguissem compreender e explicar os padrões que iam identificando no mapa das presenças. Assim, o desenvolvimento desta tarefa decorreu no dia 4 de março de 2013 e tinha como objetivos:

- Reconhecer, descrever e continuar a sequências dos números;
- Reconhecer e explicar padrões simples;
- Identificar o padrão e regularidade dos dias da semana;
- Desenvolver o raciocínio matemático e lógico.

#### **Tarefa: Classificação e formação de conjuntos com desenhos de frutas**

No dia 6 de março de 2013 realizou-se a tarefa de classificação e formação de conjuntos com recurso a desenhos de frutas, que expressavam a preferência de cada criança em relação às frutas saboreadas no decorrer do jogo dos sabores. A planificação desta tarefa pretendia que as crianças conseguissem atingir os seguintes objetivos:

- Desenvolver a noção de classificação, através da formação de conjuntos que expressem as frutas preferidas das crianças;
- Desenvolver o raciocínio matemático e lógico.

#### **Tarefa: Duplicação de receitas culinárias**

A tarefa de duplicação de receitas culinárias foi realizada em dois momentos diferentes, mais concretamente, a 11 de março de 2013 confeccionou-se o bolo de chocolate e a 23 de maio de 2013 as bolachas de manteiga. Estas tarefas surgiram do interesse das crianças em preparar um bolo e umas bolachas para o lanche, aproveitando este facto para tornar estas preparações em momentos onde as crianças podiam desenvolver o seu raciocínio matemático de forma lúdica e divertida.

Neste sentido, pretendia-se verificar as quantidades dos ingredientes através da pesagem dos mesmos e também se as crianças conseguiam estabelecer a relação entre as referidas quantidades e o seu dobro, uma vez que era necessário duplicar a receita. Estas tarefas tinham como objetivos:



- Desenvolver a noção de: quantidade; número; peso; e, tempo;
- Usar as expressões de *mais pesado que*, ou *mais leve que* para comparar quantidades e grandezas;
- Sistematizar conhecimentos referentes ao *dobro de*.

### **Tarefa: Exploração da máquina de números**

A proposta da tarefa de exploração da máquina de números ocorreu no dia 15 de março de 2013 e apresentava a possibilidade de incentivar as crianças a pensarem e desenvolverem o seu conceito de número e as relações com outros números. A tarefa tinham o propósito de:

- Alargar o conceito de número e as suas diversas representações;
- Desenvolver o raciocínio matemático e o cálculo mental;
- Fazer cálculos simples e comparações entre quantidades;
- Discutir possíveis resultados e ideias matemáticas.

### **Tarefa: Organização e elaboração de um gráfico de barras**

A organização e elaboração de um gráfico de barras surgiu, após a leitura do livro “O Cuquedo” de Clara Cunha e, da necessidade das crianças expressarem qual era o seu animal preferido da história e de organizarem os dados obtidos. A tarefa decorreu no dia 2 e 3 de abril de 2013 e pretendia-se:

- Adquirir a noção de número, utilizando e representando-o;
- Estabelecer a correspondência entre quantidade e número;
- Desenvolver a capacidade de registo, de organização e tratamento de dados;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticas.

**Tarefa: Descobrir as formas geométricas**

A abordagem às formas geométricas foi desenvolvida com a realização de diversas tarefas, que foram sendo aplicadas segundo uma sequência lógica e que permitissem o envolvimento das crianças. Assim, tendo como base nesses pressupostos a leitura da história “O encontro das formas geométricas” foi o ponto de partida para a descoberta das figuras geométricas, posteriormente “desenhou-se” as diversas formas geométricas com os corpos, de seguida descobriu-se na sala e no exterior alguns objetos com diferentes formas geométricas, e no final efetuou-se uma composição plástica só com figuras geométricas.

As tarefas de descoberta das formas geométricas foram elaboradas no dia 8 de abril de 2013 e pretendia-se que as crianças conseguissem:

- Distinguir e nomear diferentes formas geométricas e as suas características;
- Partilhar oralmente ideias e características de cada figura geométrica;
- Compreender que os nomes de figuras geométricas (quadrado, triângulo, retângulo e círculo) se aplicam independentemente da sua posição ou tamanho;
- Localizar e descrever objetos do seu meio ambiente utilizando os nomes das figuras geométricas;
- Observar e encontrar formas geométricas na nossa sala e no exterior;
- Representar através do desenho ou de colagens, objetos com diferentes formas geométricas.

**Tarefa: Trabalhar a matemática com tampinhas de garrafas**

Na tarefa onde se pretendia trabalhar a matemática com tampinhas de garrafas, desenvolvida nos dias 19 e 26 de abril de 2013, procurou-se classificar, agrupar, ordenar e efetuar padrões com as referidas tampinhas. E também questionar as crianças sobre a seriação, os conjuntos e a ordenação efetuada por cada uma.

Esta tarefa tinha como objetivos:

- Explicar os raciocínios matemáticos utilizados;
- Classificar e agrupar as tampinhas mediante a cor;

- Ordenar os conjuntos das tampinhas atendendo às características quantitativas;
- Encontrar diferentes padrões, recorrendo a 10 tampinhas de cores distintas.

### **Tarefa: Vamos descobrir as nossas alturas e compará-las**

A tarefa em causa ocorreu no dia 8 de maio de 2013 e foi elaborada de forma que as crianças primeiramente comparassem a sua altura com a de dois colegas, mediante a observação, em termos de *mais alto que*, *mais baixo que*, e *da mesma altura*. E só posteriormente pudessem realizar a sua medição, através da utilização da fita métrica, bem como verificar e confirmar as comparações efetuadas através da observação direta.

Com a realização desta tarefa pretendia-se que as crianças conseguissem:

- Comparar alturas e saber identificar se é mais alto que, se é mais baixo que ou se é da mesma altura;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticas;
- Utilizar a fita métrica para fazer medições.

### **Tarefa: Relação entre números cardinais e as respetivas quantidades**

No dia 15 de maio de 2013 foi proposta a tarefa onde se pretendia estabelecer a relação entre números cardinais e as respetivas quantidades. A realização desta tarefa surgiu após a leitura da história “Mais uma ovelha” de Mij Kelly e tinha como intuito consolidar as noções de número e quantidade, e mais concretamente estabelecer a correspondência entre as duas noções. Os objetivos propostos para esta tarefa eram:

- Reconhecer os números do 0 ao 10 e a sua sequência;
- Estabelecer a correspondência entre quantidade e número;
- Desenvolver o raciocínio matemático através da aquisição das noções de número e quantidade;
- Discutir ideias matemáticas.

## 1.º Ciclo do Ensino Básico

As tarefas apresentadas aos alunos do 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, no âmbito da investigação, foram ao encontro dos conteúdos programáticos que estavam a ser trabalhados pela turma nesse momento. No entanto, a sequencialização pela qual foram propostas as tarefas tiveram em conta os raciocínios matemáticos envolvidos nas mesmas e consequentemente o aumento do seu grau de complexidade.

Na tabela 2 são apresentadas algumas das tarefas propostas no 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico durante a investigação, os temas/domínios programáticos e a calendarização das mesmas. As tarefas apresentadas nesta tabela têm o objetivo de mostrar as que ajudaram de modo mais evidente o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

**Tabela 2: Tarefas da investigação em 1.º Ciclo do Ensino Básico**

<b>Tarefa</b>	<b>Tema/domínio matemático</b>	<b>Calendarização</b>
Jogo dos pares e dos ímpares	Números e Operações	19-09-2013
Os caminhos mais curtos	Geometria e Medida	14-10-2013
A festa de São Martinho	Números e Operações / Álgebra	11-11-2013
Vamos conhecer a turma!	Geometria e Medida / Organização e Tratamento de Dados	18-11-2013
Cálculo para os meninos	Números e Operações	11-12-2013
Exploração da tabuada do 7	Números e Operações	12-12-2013
Organizar mesas	Números e Operações / Álgebra	13-12-2013
As construções do João	Números e Operações / Álgebra	16-12-2013

A planificação das tarefas supracitadas na sua maioria foi ao encontro das premissas do ensino exploratório da matemática, que contempla a introdução da tarefa, o desenvolvimento da tarefa em pequenos grupos, a discussão da tarefa em grande grupo e a sistematização das aprendizagens matemáticas. Assim, para o desenvolvimento de cada uma das tarefas foi entregue uma folha com o enunciado da mesma por aluno, mas também uma folha de registo (branca) para cada par ou grupo.

Após a entrega dos enunciados era realizada a leitura do mesmo, primeiro silenciosamente e posteriormente para a turma. Depois da leitura do enunciado da tarefa o mesmo era interpretado em grande grupo, onde um aluno tinha de explicar a tarefa aos restantes por palavras suas ou caso algum aluno apresentasse alguma dúvida era solicitado a outro que tentasse elucidar o colega.

Ao darmos por concluído a leitura e esclarecimento da tarefa, os alunos disponham de algum tempo, entre 40 a 50 minutos (dependendo da complexidade da tarefa), para resolverem as tarefas matemáticas propostas em trabalho de grupo ou de pares. A apresentação e discussão das resoluções de cada par ou grupos decorriam habitualmente depois do intervalo, aproveitando o mesmo para tirar fotografias às diversas resoluções para projetar no quadro. Esta projeção tinha o intuito de servir de suporte às apresentações, à confrontação dos resultados obtidos e dos raciocínios matemáticos utilizados por cada um. Ao terminarmos a confrontação dos raciocínios e dos resultados alcançados por cada grupo era efetuada uma sistematização das aprendizagens matemáticas presentes na tarefa.

No meu ponto de vista, o modo de trabalho desenvolvido na sala de aula permitiu que os alunos tomassem consciência dos raciocínios matemáticos dos colegas e que não existe uma única estratégia, processo e/ou representação para resolver uma tarefa matemática.

Em seguida descreve-se e identifica-se os objetivos das tarefas propostas e desenvolvidas durante a investigação no 1.º Ciclo do Ensino Básico onde, como supracitado, o desenvolvimento do raciocínio matemático é mais evidente e consistente.

### **Tarefa: Jogo dos pares e dos ímpares**

O jogo dos pares e dos ímpares foi apresentado à turma no dia 19 de setembro de 2013 e tinha um carácter transdisciplinar, uma vez que se pretendia trabalhar conteúdos programáticos de matemática na aula de expressão motora. Desta forma, através de diversos tipos de movimentações os alunos agruparam os diversos cartões (que continham determinados números) de modo a obter as somas pretendidas. E de seguida, identificaram os diferentes números como par ou ímpar e realizaram as suas inferências

sobre como poderiam obter um número par ou ímpar ao somarem duas parcelas. Posteriormente, foi-lhes pedido para pensarem se a regra encontrada na soma de duas parcelas se manteria quando realizássemos o produto de dois números.

Os objetivos definidos para esta tarefa foram:

- Distinguir os números pares dos números ímpares utilizando objetos e efetuando emparelhamentos;
- Identificar um número par como uma soma de parcelas iguais a 2 e reconhecer que um número é par quando é a soma de duas parcelas iguais;
- Reconhecer a alternância dos números pares e ímpares na ordem natural e a paridade de um número através do algarismo das unidades;
- Explicar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito;
- Justificar raciocínios matemáticos e resultados obtidos.

### **Tarefa: Os caminhos mais curtos**

Esta tarefa surgiu após a elaboração de alguns exercícios do manual do 3.º ano onde os alunos teriam de compreender e descrever os percursos indicados. Assim, no dia 14 de outubro de 2013 a tarefa proposta permitiu que os alunos descobrissem, reproduzissem e comparassem diferentes caminhos (tendo em conta o ponto inicial e o final), através da mobilização das noções de posição e localização.

Ao realizar-se esta tarefa pretendia-se que os alunos conseguissem:

- Desenvolver a orientação espacial e as noções de posição e localização relativa;
- Realizar, representar e comparar diferentes itinerários ligando dois pontos (inicial e final);
- Expressar ideias e processos matemáticos oralmente, utilizando linguagem e vocabulário próprios, e por escrito, através de representações adequadas e explícitas;
- Justificar raciocínios matemáticos e resultados obtidos.

### **Tarefa: A festa de São Martinho**

A aplicação desta tarefa no dia 11 de novembro de 2013 foi de encontro às comemorações do dia São Martinho na escola. Esta tarefa apresentava diversas questões e situações problemáticas, sendo a que demonstrou maior relevância foi a questão dos abraços entre o João e os amigos. Assim, esta questão pretendia estimular os alunos a estabelecer conexões e desenvolver estratégias de natureza combinatória para expressar as suas ideias matemáticas sobre o número de abraços dados entre os amigos.

Os objetivos propostos para esta tarefa tinham o propósito de o aluno:

- Explicar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito;
- Interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas;
- Identificar as diferentes variáveis: número de amigos e número de abraços;
- Expressar em linguagem natural e simbólica a generalização das relações encontradas;
- Justificar raciocínios matemáticos e resultados obtidos.

### **Tarefa: Vamos conhecer a turma!**

No dia 18 de novembro de 2013 esta tarefa foi apresentada à turma com o intuito dos alunos analisarem, compararem, interpretarem e/ou organizarem dados em tabelas de frequência e/ou gráficos. Neste sentido, os alunos teriam de organizar em tabelas e/ou gráficos os dados representativos das diferentes características da turma. E, posteriormente teriam de analisar, comparar e interpretar os dados recolhidos no sentido de caracterizar o perfil mais frequente do(a) aluno(a), reproduzindo o(a) mesmo(a) através de um desenho numa folha de papel quadriculado, onde cada lado de um quadradinho equivalia a 10 cm na realidade.

Esta tarefa tinha como objetivos:

- Identificar a frequência absoluta, o máximo e mínimo de um conjunto (extremos), e a moda de determinado conjunto de dados;

- Identificar a amplitude de um conjunto de dados numéricos como a diferença entre os extremos;
- Adquirir a noção de proporção e conseguir aplicá-la em contextos matemáticos;
- Organizar dados por categorias/classes e conseguir explicar e justificar os procedimentos utilizados;
- Interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas;
- Expressar em linguagem natural e matemática as representações efetuadas;
- Justificar o raciocínio matemático e os resultados obtidos.

### **Tarefa: Cálculo para os meninos**

A tarefa em causa ocorreu no dia 11 de dezembro de 2013 e representa uma situação da vida real, que incentiva os alunos a descobrirem qual dos meninos irá terminar primeiro de tomar os comprimidos receitados pelo médico ou se irão terminar ao mesmo tempo. Mas também teriam de considerar que um dos meninos começou a tomar os comprimidos mais cedo e que um toma mais comprimidos por dia do que o outro.

Com esta tarefa pretende-se desenvolver os seguintes objetivos:

- Resolver problemas concebendo e colocando em prática estratégias variadas, discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados, oralmente e por escrito;
- Justificar raciocínios matemáticos e resultados obtidos;
- Expressar em linguagem natural e simbólica os resultados alcançados;
- Interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas.

### **Tarefa: Exploração da tabuada do 7**

A tarefa de exploração da tabuada do 7 foi apresentada no dia 12 de dezembro de 2013, no seguimento das orientações programáticas que sugeriam a compreensão e



memorização da referida tabuada. Portanto, pretendia-se que os alunos encontrassem e compreendessem que existem relações entre os produtos das tabuadas anteriormente trabalhadas e os produtos da tabuada do 7, bem como se podem encontrar regularidades na construção desta tabuada a partir de relações numéricas que se consigam estabelecer com os produtos de outras tabuadas.

Assim, esta tarefa tinha como objetivos:

- Descobrir outras formas de obter a tabuada do 7, partindo do que já se sabe;
- Identificar padrões e regularidades na construção da tabuada do 7;
- Utilizar corretamente a expressão «múltiplo de»;
- Explicar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, na construção da tabuada do 7;
- Justificar raciocínios matemáticos na descoberta da tabuada do 7.

### **Tarefa: Organizar mesas**

No dia 13 de dezembro de 2013 foi apresentada à turma outra tarefa que expressava uma situação da vida real. Esta tarefa tinha como intuito estimular a descoberta de um padrão, a exploração de uma sequência de crescimento e a organização de dados em tabelas e/ou esquemas, bem como a descoberta da generalização das relações encontradas. Assim, pretendia-se verificar como os alunos estruturam os seus raciocínios matemáticos, na organização de um conjunto de mesas para sentarem um determinado número de amigos.

Ao realizar-se esta tarefa desejava-se que os alunos conseguissem:

- Identificar as diferentes variáveis: número de mesas (retângulos laranja), número de cadeiras/amigos (retângulos azuis);
- Identificar a relação entre as variáveis: número de cadeiras/amigos (retângulos azuis) é o quádruplo do número de mesas mais dois;
- Reconhecer uma sequência pictórica crescente;
- Investigar e reconhecer regularidades numéricas;

- Expressar em linguagem natural e simbólica a generalização das relações encontradas;
- Resolver problemas que envolvam justificação de raciocínio e resultados alcançados.

### **Tarefa: As construções do João**

A tarefa proposta no dia 16 de dezembro de 2013 tinha como intenção ajudar os alunos a alargar os seus conhecimentos, competências e aprendizagens no âmbito da descoberta de padrões e relações entre as variáveis. Mas também possibilitar a exploração de sequências de crescimento, a organização de dados em tabelas e/ou esquemas e a descoberta de generalizações das relações encontradas. Desta forma, ao apresentar-se esta tarefa aos alunos, os mesmos tinham de conseguir estabelecer relações entre o número de quadrados, o número de triângulos e o número total de peças, à medida que a sequência pictórica ia crescendo.

Esta tarefa tinha como objetivos:

- Identificar as diferentes variáveis: número de quadrados, número de triângulos e número total de peças;
- Identificar a relação entre as variáveis: número de quadrados, número de triângulos e número total de peças;
- Reconhecer uma sequência pictórica crescente;
- Investigar e reconhecer regularidades numéricas;
- Expressar em linguagem natural e simbólica a generalização das relações encontradas;
- Resolver problemas que envolvam justificação de raciocínio e resultados alcançados.

## Recolha e análise dos dados

Ao longo da investigação-ação realizada, no decorrer da Prática de Ensino Supervisionada em Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico, foi essencial certificar-me se a metodologia escolhida e os procedimentos utilizados para regular a minha prática educativa permitiam a obtenção de dados variados e fiáveis que serviriam para compreender, analisar e refletir sobre como as crianças/alunos desenvolvem e expressam o seu raciocínio matemático ao resolverem diversas situações problemáticas. Para isso, a recolha de dados constituiu-se como uma mais-valia em todo este processo de investigação.

A recolha de dados não nos remete simplesmente para a utilização de uma técnica, segundo Ponte (2002) a observação, a entrevista e a análise de documentos caracterizam-se por serem técnicas mais comuns nas investigações de natureza qualitativa. E atualmente o uso de diários de bordo nas investigações têm vindo a generalizar-se, uma vez que permite que o investigador registre “(...) os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo.” (Ponte, 2002, p.18).

Na presente investigação, utilizei como instrumentos de recolha de dados: a observação direta; o diário de bordo, para registo de notas diárias; os registos escritos dos alunos; as fotografias; as gravações áudio; e, o caderno de formação, que englobava as reflexões e as planificações elaboradas. Estes instrumentos de recolha de dados ajudaram-me a perceber como a ação educativa e a investigação estavam a desenvolverem-se, bem como a averiguar e avaliar as aprendizagens das crianças/alunos, mas também a melhorar as minhas práticas educativas.

Apesar de me socorrer destes instrumentos de recolha de dados para analisar e melhorar as minhas práticas, estes também contribuíram para averiguar e avaliar as aprendizagens efetuadas pelas crianças/alunos. Ao mesmo tempo que tive em conta as *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* (1997) e as *Metas de Aprendizagem desejáveis no início do 1.º ciclo (relativas à Educação Pré-Escolar)* (2010), para o Pré-Escolar, e o *Programa de Matemática para o Ensino Básico* (2007; 2013) e as *Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática* (2012), para o 1.º Ciclo

do Ensino Básico, no sentido de determinar se as competências e conhecimentos tinham sido atingidos ou não.

Através da observação direta das crianças/alunos tive a oportunidade de atestar o trabalho desenvolvido, as dificuldades apresentadas e os conhecimentos matemáticos apreendidos. Mas também foi possível obter informações relativamente aos comportamentos, às atitudes, à autonomia, à cooperação e ao interesse das crianças/alunos pelas tarefas apresentadas.

A observação permitiu-me igualmente recolher informações ao nível do empenho, da persistência e das capacidades apresentadas pelas crianças/alunos na resolução e interpretação das diversas tarefas matemáticas. Assim, foi possível adquirir dados relativamente ao domínio das três capacidades transversais pelas crianças/alunos, mais concretamente do desenvolvimento do raciocínio matemático.

Esta observação direta passou em alguns momentos a ser também participante, porque ao verificar que era necessário esclarecer as crianças/alunos intervinha no sentido de contribuir para o desenvolvimento das suas aprendizagens, bem como nos momentos que as crianças/alunos solicitavam a minha ajuda.

Ao longo da prática de ensino supervisionada, como referido anteriormente, também utilizei outros instrumentos de recolha de dados e informações, um bloco denominado de diário de bordo para registo de notas diárias. Este diário de bordo permitiu que fosse registando, quando tivesse oportunidade ou no final do dia, algumas situações pertinentes ao nível dos comportamentos, atitudes, reações, interesses, dificuldades, progressos, etc. das crianças/alunos que me ajudassem a conhecer, analisar e compreender os diferentes grupos, bem como possibilitou registar as minhas ideias, pressupostos, dúvidas e curiosidades mais pertinentes, que foram surgiam no decorrer da resolução das tarefas propostas.

É de salientar que as notas diárias constituíram-se como fundamentais para a elaboração do caderno de formação, mais concretamente, as planificações e as reflexões. Assim, pode dizer-se que o diário pressupõe “(...) uma actividade de escrita (,,)” que “(...) arrasta consigo o facto de a reflexão ser condição inerente e necessária à redacção do diário (...)”, por isso a reflexão é encarada como “(...) uma das componentes fundamentais dos diários dos professores.” (Zabalza, 1994, p.95).

Neste sentido, e após a elaboração das notas diárias, foram efetuadas as reflexões semanais que tiveram o intuito de descrever e refletir sobre as ações desenvolvidas, bem como de projetar as minhas ações futuras tanto ao longo dos estágios como profissionalmente. Relativamente, às reflexões pode dizer-se que as contingências do cumprimento de um programa, ao nível do 1.º ciclo, e o facto de não existir uma grande partilha de descobertas e curiosidades dos alunos que possam suportar e proporcionar novas estratégias de aprendizagens constituíram-se como uma dificuldade na elaboração das mesmas. Desta forma, e após interiorizar as finalidades e as intencionalidades do 1.º ciclo começou a ser mais fácil estruturar as minhas práticas e refletir sobre as mesmas. Assim, fui ajustando as minhas práticas ao contexto educativo e às necessidades de cada aluno, mediante as reflexões que ia realizando ao longo das semanas, como já tinha sucedido ao nível do Pré-Escolar.

As fotografias e as gravações áudio foram também um recurso muito utilizado. No decorrer da resolução das diversas tarefas matemáticas, fui utilizando esses recursos para registar através de imagens os trabalhos elaborados pelos alunos e através de áudio o raciocínio matemático apresentado pelas crianças/alunos. Considero que o registo áudio se constituiu como mais fiáveis, em detrimento das notas diárias, porque este não permitiu a perda de informações essenciais e pertinentes nas análises realizadas posteriores.

O raciocínio matemático das crianças/alunos não foi só registado em áudio. Porque fui solicitando às crianças/alunos para elaborarem registos escritos, ao longo da resolução das tarefas, de forma a perceber como apresentavam por escrito os seus raciocínios e as suas estratégias.

A análise dos dados recolhidos após cada uma das atividades revelou-se como fundamental, uma vez que permitiram a compreensão e orientação das minhas práticas de ensino supervisionada e do trabalho a desenvolver em futuras intervenções. Mas também se constituiu como um processo essencial no desenvolvimento dos objetivos da investigação, na obtenção de respostas às questões da mesma e na elaboração da revisão de literatura.

Neste sentido, e de forma a proporcionar aprendizagens significativas e gratificantes às crianças/alunos, bem como permitir o desenvolvimento do seu

raciocínio matemático comecei por analisar e conhecer as suas necessidades e interesses. Deste modo, estruturei as tarefas de modo que permitissem ir de encontro aos objetivos e questões inicialmente estabelecidos nesta investigação.

## CAPÍTULO 4

### **Apresentação e Interpretação da Intervenção**

No presente capítulo são apresentadas e interpretadas as tarefas e os dados recolhidos durante a investigação no Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico, através da descrição e reflexão sobre as mesmas. Assim, das tarefas matemáticas expostas e selecionadas no capítulo anterior que evidenciavam as que contribuíram de modo mais consistente para o desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças e dos alunos, foram escolhidas cinco em cada um dos contextos para serem analisadas mais aprofundadamente, evitando-se repetição do tipo de dados que a inclusão da descrição de outras tarefas poderia ocasionar e conseguindo-se uma economia de espaço.

Neste sentido, a apresentação e interpretação das diversas tarefas matemáticas, selecionadas, irá contemplar a descrição, a análise e a reflexão sobre o desenrolar das mesmas, dando-se ênfase ao desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças e dos alunos. A forma de apresentação e interpretação das tarefas será apoiada em algumas transcrições dos diálogos gravados no decorrer das intervenções realizadas, nos registos do diário de bordo, nos registos escritos dos alunos, nas fotografias e no caderno de formação (reflexões e planificações).

Nas transcrições dos diálogos gravados no decorrer na investigação, as minhas intervenções estão identificadas com a palavra *Eu* e a das crianças e dos alunos com as iniciais dos nomes, sendo que os algarismos que se encontram dentro de parêntesis exprimem a idade dos mesmos.

Como a investigação ocorreu em contextos distintos, este capítulo da apresentação e interpretação da intervenção encontra-se repartido em duas secções, uma referente ao Pré-Escolar e outra ao 1.º Ciclo do Ensino Básico. E nestas duas secções os dados recolhidos são apresentados por tarefa.

### **Pré-Escolar**

Ao escolher as cinco tarefas matemáticas a serem apresentadas e interpretadas nesta secção tive em conta três temas matemáticos: Números e Operações; Organização e Tratamento de Dados; e, Geometria e Medida. Ao se analisar a seleção efetuada verifica-se que existiu uma predominância sobre o tema dos Números e Operações, porque no decorrer das observações realizadas foi nas tarefas propostas no âmbito da referida temática que as crianças revelaram raciocínios matemáticos mais consistentes e notórios.

#### **Tarefa: Exploração da máquina de números**

A tarefa de *Exploração da máquina de números* recaiu sobre o domínio dos Números e Operações e foi aplicada no dia 15 de março de 2013, num grupo de cinco crianças. Nesta tarefa pretendia-se promover a assimilação e perceção de que uma determinada quantidade (número inteiro) pode ser representada de diferentes formas, bem como a aquisição da noção de número e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

É de salientar que o desenvolvimento desta tarefa matemática na sala foi composto por quatro fases distintas que se complementaram. Na primeira foi apresentada a tarefa, os materiais e os procedimentos necessários para a concretizar, na segunda ocorreu a realização e discussão da tarefa, na terceira decorreu a sistematização das aprendizagens adquiridas e na última ocorreu a exploração individual.

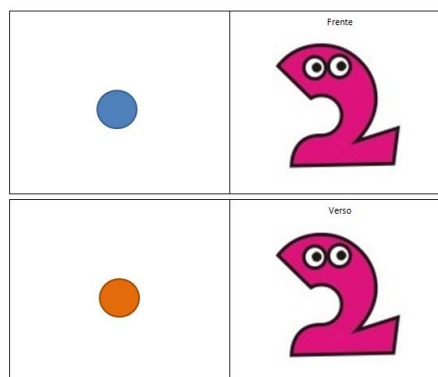
A primeira fase da exploração da referida máquina de números (caixa de cartão com uma abertura em cima e em baixo) e consequentemente dos cartões (com o mesmo número inteiro a explorar de ambos os lados, por exemplo: 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., e de um



dos lados têm um determinado número de bolas e do lado inverso têm a outra parte do número), que se podem observar nas figuras 1 e 2 respetivamente, teve início com a observação por todas as crianças da máquina. No decorrer desta observação as crianças verificaram que a máquina era composta por duas aberturas, dispostas no topo e no fundo da mesma, e que não estava nada no seu interior.



**Figura 1: Máquina de Números**

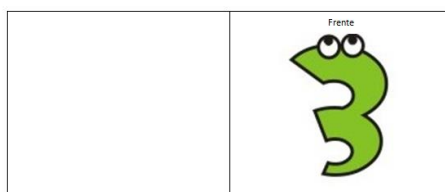


**Figura 2: Exemplo de um dos cartões do número 2**

Após esta observação, considerei pertinente explicar e exemplificar a tarefa com o intuito de estimular e elucidar as crianças do trabalho a realizar. Assim, comecei por explicar que se tivéssemos um cartão com o número dois, por exemplo, e um determinado número de bolas (representado por bolas azuis ou vazio) ao ser introduzido na máquina iria dar-nos a outra parte do número dois (representado por bolas cor de

laranja ou vazio). Este processo de explicação foi acompanhado pela exemplificação na máquina de número do mesmo.

Depois, de todas as crianças terem observado a caixa e percebido o que tinham de fazer, passámos à segunda fase desta tarefa. Iniciando-se esta com a apresentação do cartão com o número três e zero bolas (figura 3) e que se desenrolou com o seguinte diálogo:



**Figura 3: Frente do cartão do número 3**

Eu: Que quantidade de bolas precisamos para obter o número três, uma vez que temos zero bolas?

D (5): Mas não temos bolas.

Eu: Não, por isso precisamos de quantas?

O silêncio imperou. E como não surgiram respostas, fui incentivando as crianças a pensarem sobre o número que queríamos obter e só depois verificarem qual o número representado e conseqüentemente sobre a outra parte do mesmo. Assim:

Eu: Qual o número que temos no cartão?

A (6) e D (6): É o três.

Eu: Quantas bolas temos?

D (5) e M (4): Não temos.

Eu: Se temos zero bolas, quantas precisamos para ter três? (após alguns instantes e ainda sem resposta voltei a realizar a mesma questão e a M respondeu)

M (4): Precisamos de três bolas.

Eu: M porque achas que precisamos de três bolas?

M (4): Porque se temos zero bolas precisamos de três. (exemplificando com os dedos das suas mãos)

B (5): Pois é, se não temos nenhuma bola precisamos de três para ter três. (à medida que ia tentando reproduzir com os dedos das suas mãos).

Eu: Concordam com a M. e a B., ou têm outra ideia?

A(6), D (5) e D (6): Sim. Concordamos.

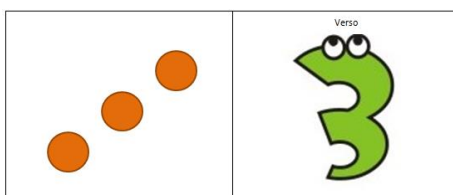
Eu: Então vamos colocar o cartão na máquina e ver se ele nos dá as três bolas.

Após esta situação coloquei o cartão na máquina e, ai virei-o, quando o retirei apareceu o cartão com as três bolas (figura 4). As crianças ficaram um pouco surpreendidas e perguntaram:

As cinco crianças: Dá para fazer com outros números?

Eu: Sim. Mas agora vamos continuar com o número três e depois fazemos com outros. Pode ser?

As cinco crianças: Sim.



**Figura 4: Verso do cartão do número 3**

De seguida, voltei a questionar as crianças sobre a quantidade de bolas de que precisávamos para obter o número três, uma vez que tínhamos uma bola, e assim sucessivamente até termos três bolas. Após terminar todas as situações possíveis para obter o número três, comecei a colocar as mesmas questões, mas relativamente ao número quatro, ao número seis e ao número oito.

Antes da conclusão da tarefa, passámos para a terceira fase da mesmo, onde fizemos a recapitulação dos conhecimentos adquiridos e uma breve sistematização das aprendizagens realizadas, através da verificação de como podemos obter um determinado número através da soma de outro(s). De modo, a concretizarmos esta sistematização recorreremos aos diferentes cartões que introduzimos na máquina de números para que as crianças pudessem observar e constatar as evidências sobre as quais estávamos a falar.

Ao concluirmos a sistematização das aprendizagens passou-se para a quarta e última fase desta tarefa, nesta as cinco crianças puderam explorar a máquina de números

e os seus cartões individualmente. No decorrer desta observação pude constatar que algumas crianças agrupavam os cartões com o mesmo número num conjunto, outras verificavam quais as somas possíveis de um determinado número, enquanto outras introduziam um cartão na máquina de número e perguntavam quantas bolas precisavam para obter o número do cartão. Desta forma, as crianças foram realizando experiências e explorando os conhecimentos apreendidos no decorrer da tarefa e também alguns conhecimentos prévios que já possuíam.

### **Síntese**

Ao analisar e refletir sobre a implementação desta tarefa matemática, posso dizer que as crianças apreciaram e mostraram grande interesse na execução da mesma. Apesar de no início da resolução as crianças demonstrarem algumas dificuldades em conseguirem compreender o que se pretendia com a tarefa, bem como em explicitarem os seus raciocínios matemáticos e perceberem os dos colegas.

Neste sentido, posso dizer que à medida que fomos avançando na exploração da máquina de números foi possível verificar que as crianças foram adquirindo a noção de número e as suas relações com os outros números, bem como um determinado número pode ser representado pela soma de outro(s). Estas noções foram sendo adquiridas no decorrer da realização da tarefa e da discussão dos resultados e estratégias utilizadas por cada criança, uma vez que estas se foram socorrendo inicialmente dos dedos das mãos para tornar as suas ideias mais fiáveis e conseguirem expressar os seus resultados.

Ao mesmo tempo que permitiu o desenvolvimento de capacidades sociais e democráticas, a aprendizagem cooperada de conceitos e conhecimentos matemáticos, mas também o desenvolvimento do raciocínio matemático de cada criança.

### **Tarefa: Organização e elaboração de um gráfico de barras**

A tarefa de *Organização e elaboração de um gráfico de barras* incidiu sobre o domínio da Organização e Tratamento de Dados e ocorreu nos dias 2 e 3 de abril de 2013. Esta tarefa foi planeada de forma a promover a articulação entre conteúdos do

livro “O Cuquedo” de Clara Cunha, mais propriamente os animais, com conteúdos do domínio da matemática, supracitados, e a expressão plástica. Esta articulação pretendia que as crianças escolhessem qual o seu animal preferido da história e depois organizassem os dados recolhidos através de um gráfico de barras.

Como já referido, esta tarefa decorreu em dois dias distintos: no dia 2 de abril de 2013 ocorreu a escolha do animal preferido através da utilização de peças de LEGO e no dia 3 de abril de 2013 concluímos a mesma com a elaboração do gráfico de barras com os dados recolhidos no dia anterior. Este gráfico foi produzido através da utilização de algumas técnicas de pintura, desenho, recorte e colagem.

A tarefa iniciou-se após a leitura e a exploração do conteúdo do livro “O Cuquedo”, em grande grupo. Ao terminarmos essa exploração efetuei algumas questões sobre a história, de forma que surgissem os nomes dos animais para podermos começar a desenvolver a tarefa.

Eu: Quem será o Cuquedo?

G (3) : É um monstro.

A (3): Sim, que assusta os animais.

Eu: Assusta os animais? Que animais?

M (4): Os “hicocerontes”.

Eu: M. não se diz “hinocerontes”, diz-se rinocerontes. E havia mais animais?

Todos: Sim.

Várias crianças: As zebras, as girafas, os elefantes e os hipopótamos.

Eu: Como já sabemos quais são os animais da história, podemos começar a escolher o animal preferido da história. Mas precisamos dos animais e dos legos.

Após verificarmos que precisávamos dos animais de plástico (rinoceronte, zebra, elefante, girafa e hipopótamo) e dos legos para fazermos as nossas escolhas, algumas crianças disponibilizaram-se logo para os ir buscar. Assim, começámos por colocar os animais junto a uma das paredes e para que todos os pudéssemos ver sentámo-nos no lado oposto. Depois identificámos cada um dos animais com uma cor diferente (figura 5), colocando uma peça de LEGO junto ao mesmo para não nos esquecermos da cor definida.



**Figura 5: Identificação dos animais com uma cor**

De seguida, expliquei que a cada animal corresponde uma cor ou duas, no caso do hipopótamo, e que cada uma individualmente iria expressar a sua preferência deixando uma peça de lego junto ao seu animal preferido da história. Quando terminei de explicar o procedimento de escolha do animal preferido perguntei:

Eu: Quem consegue explicar o que é para fazer?

F (4): Temos de escolher o animal que gostamos.

Eu: Só temos de escolher o nosso animal preferido?

B (5): Temos de escolher e deixar lá uma lego.

Eu: Mas deixamos um lego de uma cor qualquer perto de um animal?

A (6): Não. A cor do lego tem de ser da mesma cor.

Posteriormente, a esta conversa exemplifiquei e voltei a lembrar como teríamos de realizar a escolha do animal preferido da história. Depois, cada criança teria de ir individualmente efetuar a sua escolha, mas começaram todas a levantar-se ao mesmo tempo para manifestar a sua escolha. Por isso, perante tal situação estabelecemos que cada uma só se levantava quando o Cuquedo (boneco feito de lã) fosse até si, desta forma o processo de escolha tornou-se mais ordenado e perceptível para todos.

Eu: A. qual o teu animal preferido?

A (6): A girafa.

Eu: Se o teu animal preferido é a girafa, de que precisas agora?

A (6): De um lego vermelha e pôr perto da girafa.

No decorrer deste processo de escolha do animal referido fui colocando estas questões às crianças de modo a verificar se conseguiam identificar e associar a cor ao animal escolhido. Ao darmos por terminado o processo de escolha questionei as crianças sobre o resultado obtido (figura 6):

Eu: Será que conseguimos identificar o animal preferido da história sem contarmos as peças de lego?

D (5): Sim. É a girafa.

Eu: D. porque dizes que é a girafa o animal preferido?

D (5): Tem a torre mais alta.

Eu: Quem concorda com a ideia do D.?

Todos: Eu.

Eu: Todos concordam. Porquê?

G (3): Tem mais peças... (levantou-se para contar melhor e respondeu) ... nove.

Eu: O que quer dizer ter mais peças?

G (3): Que gostámos mais da girafa.

Eu: E se quiséssemos saber qual foi o animal menos escolhido, o que teríamos de fazer?

M (4): Ver qual é a torre mais baixa.

Eu: Tens a certeza? E qual é o animal?

M (4): Tenho, é o “hicoceronte”.

Eu: É o rinoceronte, porquê?

M (4): Só eu é que escolhi.

Eu: E se a M. não tivesse escolhido o rinoceronte, este teria sido o menos escolhido ou não?

G (3): Sim.

Eu: Porquê?

G (3): Porque tirávamos a peça e não ficava nada.

Eu: O que será que o G. quis dizer?

B (5): Ninguém tinha escolhido esse animal.



**Figura 6: Organização de dados recorrendo a peças de legos**

Após termos efetuado o levantamento das preferências das crianças registámos e organizámos os dados numa folha de papel, para que posteriormente pudéssemos efetuar a elaboração do gráfico de barras correspondente. Neste processo algumas crianças foram contando o número de peças de lego referentes a cada animal, de modo a verificarmos efetivamente quantos estavam em cada um.

No dia seguinte, 3 de abril de 2013, decorreu a elaboração do gráfico de barras referente ao animal preferido da história “O Cuquedo”. Mas antes de elaborarmos o gráfico foi preciso observar e analisar os dados recolhidos e registados no dia anterior, efetuando uma recapitulação do que tínhamos realizado.

Depois verificámos que precisaríamos de alguns elementos para completar o nosso gráfico de barras, por isso desenhámos os diversos animais (zebra, elefante, girafa, rinoceronte e hipopótamo), recortámos e pintámos retângulos de papel (tendo em conta o número de preferências). No decorrer deste processo foi muito gratificante observar a interajuda e a cooperação das crianças na realização dos desenhos dos animais da história que iriam ilustrar e identificar cada uma das barras do gráfico, bem como no recorte, pintura e contagem dos retângulos necessários para completar as respetivas barras.

Ao terminarmos todos os elementos essenciais para a elaboração do gráfico de barras, verificámos como iríamos organizar os dados recolhidos. Assim, perguntei:

Eu: Como será que iremos organizar os dados no gráfico de barras?

M (4): Fazemos torres iguais à dos legos.

Eu: E como fazemos essas “torres”?



M (4): Assim. A mesma cor sempre em cima. (à medida que explicava foi colocando um retângulo vermelho por cima de outro, até não ter mais)

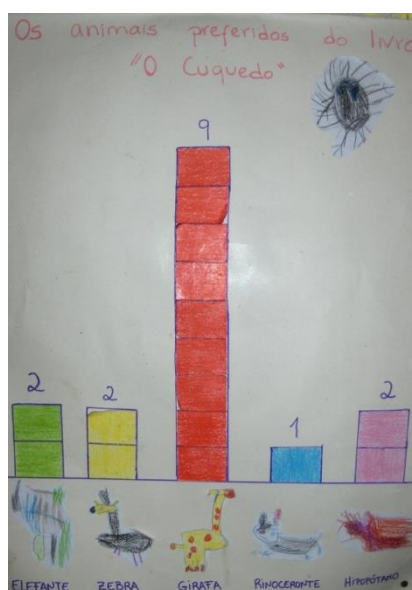
Eu: Concordam com a M.? Porquê?

A (6): Sim. Fizemos assim com os legos.

Eu: Mas será que não existe outra razão?

Como o silêncio se manteve apesar da minha insistência, comecei a explicar que os dados devem ser primeiramente classificados e organizados de acordo com os critérios estabelecidos. E como pretendemos elaborar um gráfico de barras iremos agrupar os dados em barras verticais, uma vez que este era o nosso propósito.

Portanto, depois de agruparmos os dados colámos os diversos elementos numa folha de papel de cenário e obtivemos o gráfico de barras que pode ser observado na figura 7.



**Figura 7: Gráfico de barras sobre o animal preferido da história “O Cuquedo”**

Ao concluirmos a elaboração do gráfico de barras, recorreremos ao mesmo para realizar a sistematização das aprendizagens e verificarmos que podemos classificar, agrupar e organizar dados recorrendo a diversas formas de representação. E que estas formas de representação e organização de dados permite uma melhor compreensão da informação recolhida.

## Síntese

Esta tarefa permitiu que as crianças fossem justificando as suas constatações sobre como teríamos de efetuar a escolha do animal preferido e o resultado encontrado, mas também favoreceu a estruturação do sentido de número, do processo de contagem e do raciocínio matemático. Desta forma, as várias questões efetuadas ao longo da tarefa constituíram-se como fundamentais na perceção das dificuldades, dos raciocínios e das estratégias que as crianças utilizaram para responderem às mesmas.

Neste sentido, considero que algumas das dificuldades evidenciadas pelas crianças na estruturação do seu raciocínio matemático, relativamente à organização e interpretação do gráfico de barras se encontram intimamente relacionadas com o facto de o mesmo não ser muito utilizado na sala, visto que a educadora incutia com relativa frequência simplesmente a utilização de pictogramas e diagramas de Venn. Por isso, foi fundamental incentivá-las a pensar sobre o que se pretendia realizar, mas também a discutir e interpretar os dados recolhidos e o gráfico realizado.

No que respeita às estratégias encontradas pelas crianças, para explicarem os conhecimentos matemáticos inerentes à tarefa, pode dizer-se que recorreram a situações ou expressões que utilizam no seu quotidiano para justificarem e evidenciem os seus raciocínios.

### **Tarefa: Descobrir as formas geométricas**

A abordagem à tarefa *Descobrir as formas geométricas* decorreu no dia 8 de abril de 2013 e recaiu sobre o domínio da Geometria e Medida. Assim, a descoberta das formas geométricas e respetivas características consistiu na realização, ao longo do dia, de diversas tarefas, tais como: narração da história “O encontro das formas geométricas”; “desenho” das formas geométricas com o corpo; observação e descoberta de formas geométricas na sala e no exterior; e, realização de uma composição plástica só com figuras geométricas, que se foram articulando segundo uma sequência lógica e que permitiram o envolvimento das crianças na comunicação dos seus conhecimentos prévios e raciocínios matemáticos.

Apesar de o foco destas tarefas se enquadrar no domínio da matemática, como supracitado, a planificação das mesmas não descurou os outros domínios da área de expressão e comunicação (por exemplo: domínio da linguagem oral e abordagem à escrita; domínio das expressões motora, dramática e plástica), a área da formação pessoal e social, mas também a área de conhecimento do mundo. O que permitiu uma abordagem transdisciplinar do ensino-aprendizagem da matemática, através da realização de experiências significativas que implicaram a descoberta autónoma e cooperada das figuras geométricas e suas características.

A tarefa iniciou-se após a narração e exploração da história improvisada “O encontro das formas geométricas”, em grande grupo. Esta exploração decorreu durante e após a narração da história que retratava o encontro e a discussão das formas geométricas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) sobre a sua importância. À medida que fui referindo as diferentes formas geométricas estas foram aparecendo e interagindo entre elas e com o grupo, questionando-os sobre as suas características particulares e outras situações, tal como:

Eu: Eu sou o círculo e na cidade descobri muitas coisas redondas como eu.  
Onde me podem encontrar? (após breves instantes de silêncio para pensar as crianças começam a responder)

M (4): Nos sinais.

Eu: Quais sinais?

M (4): Os que estão na rua.

Eu: Sim. E esses sinais são ... (interrompendo-me a A.(6) com a resposta)

A (6): Os sinais de trânsito.

Eu: Isso mesmo. E em que outros locais ou objetos podemos encontrar esta forma? (silêncio)

A (4): A pizza. Ontem comi e era assim.

T (4): O queijo.

B (5): A mesa da sala.

(...)

As crianças foram identificando outros locais e/ou objetos onde podíamos encontrar círculos, mas também conseguiram reconhecer sítios e/ou objetos que têm a

forma de quadrado, retângulo ou triângulo. No decorrer deste reconhecimento as crianças também identificaram algumas características das diferentes formas geométricas quando questionadas:

Eu: O quadrado tem ...

D (5): Quatro lados.

B (5): E quatro bicos.

Eu: Os “bicos” são os vértices. E os lados são todos iguais ou não? (silêncio)

B (5): Sim, este é igual, a este, a este e a este. (retirou da caixa dos blocos lógicos, um quadrado e foi apontando para cada um dos lados).

Eu: Tal como o quadrado, o retângulo tem ...

A (6): Quatro lados e quatro vértices.

T (4): É igual ao quadrado.

Eu: O retângulo é igual ao quadrado?

Todos: Não.

Eu: Mas o T. disse que era igual.

T (4): Igual porque tem quatro lados e quatro bicos. Mas não são iguais.

Eu: Porque é que o retângulo e o quadrado não são iguais?

T (4): Porque este lado é igual a este e os outros dois são iguais. (socorrendo-se também dos blocos lógicos para explicar essa diferença).

Eu: Já vimos que o quadrado tem quatro lados iguais e quatro vértices, que o retângulo tem os lados iguais dois a dois e quatro vértices. E o triângulo?

M (4): Tem três lados e três vértices.

Eu: Mas ainda falta o círculo.

G: É redondo.

B (5) e D (5): E não tem lados.

Todos: E não tem vértices.

No final da história e tendo em conta as diferentes figuras geométricas realizei algumas questões sobre o que lhes fazia lembrar a junção de duas ou mais figuras geométricas, como por exemplo:

Eu: Se colocar um triângulo por cima de um quadrado, o que faz lembrar? (utilizei os blocos lógicos para exemplificar, visto que inicialmente as crianças não perceberam como ficavam as figuras)

B (5): Parece uma casa. E com um retângulo fica com uma chaminé.

Eu: Será que a B. tem razão?

I (4): Sim.

Eu: Então com a ajuda das diferentes formas representa a casa com a chaminé.

Após esta representação voltei a pedir para as crianças pensarem sobre a junção de outras figuras geométricas:

Eu: E se por cima de um retângulo colocar um círculo, o que temos?  
(exemplificando também)

T (4): Uma árvore.

Eu: E será que da árvore podemos fazer mais alguma coisa? (enquanto as crianças pensavam sobre esta questão, coloquei um círculo perto do que representava a copa da árvore e voltei a questionar).

Eu: E se continuar a colocar círculos vamos ...

M (4): Ter uma flor.

Depois, fiz uma breve explicação da tarefa que iríamos realizar de seguida, consistindo esta no “desenho” das formas geométricas com o corpo. Assim, inicialmente foram escolhidas quatro crianças para organizar os grupos que tinham como intuito reproduzir uma das formas geométricas. Estas quatro crianças foram dando indicações precisas para que a reprodução ficasse o mais fiel possível, tendo em conta os conhecimentos adquiridos anteriormente.

Neste sentido, o T. foi o primeiro a organizar o grupo que reproduziu um círculo, observar figura 8. A obtenção desta forma geométrica foi um pouco difícil de conseguir, apesar do T. se ter esforçado e dado indicações precisas aos seus colegas, como se pode verificar no diálogo seguinte:

Eu: T. de quantos colegas precisas para fazer um círculo?

T (4): Acho que três.

Eu: Vamos ver se consegues fazer o círculo com três.

T (4): Sim

(...)

T (4): Isto não é um círculo? (questionando-se a si e aos colegas, após algumas tentativas de organização)

Todos: Não.

B (5): Tem uns bicos.

T (4): L. tens de dobrar mais. A. os pés para perto do G.



**Figura 8: Reprodução de um círculo, através dos corpos das crianças**

A elaboração e obtenção do triângulo pela I., do quadrado pelo G. e do retângulo pela A., constituiu-se como uma tarefa mais fácil do que a do T.. Porque os lados destas figuras geométricas eram representados por uma ou duas crianças, como se pode verificar nas figuras 9 (triângulo), 10 (quadrado) e 11 (retângulo). Desta forma, estas crianças conseguiram organizar os seus grupos facilmente, dando apenas algumas indicações relacionadas com a posição de cada colega como se pode observar nos diálogos.

Diálogo mantido durante a execução do triângulo:

Eu: I. de quantos colegas precisas para fazer um triângulo?

I (4): De três.

Eu: Porque precisas de três colegas?

I (4): Porque o triângulo tem três lados.

(...)

I (4): M. não podes dobrar as pernas.

O J.M. tem de juntar mais os pés aos da A..



**Figura 9: Reprodução de um triângulo, através dos corpos das crianças**

Diálogo mantido durante a elaboração do quadrado:

Eu: G. de quantos colegas precisas para fazer um quadrado?

G (4): De quatro.

Eu: Porque precisas de quatro colegas?

G (4): Porque o quadrado tem quatro lados.

(...)

G (4): T. junta a tua cabeça à da I..

B. põe os teus pés perto da cabeça da L.



**Figura 10: Reprodução de um quadrado, através dos corpos das crianças**

Diálogo mantido durante a concretização do retângulo:

Eu: A. de quantos colegas precisas para fazeres o retângulo?

A (6): Preciso de quatro, porque tem quatro lados.

Eu: Então estes colegas que fizeram o quadrado podem ficar onde estão?

A (6): Sim. Mas assim não temos um retângulo.

Todos: É o quadrado que o G. fez.

Eu: O que achas que precisas para fazer um retângulo?

A (6): De mais duas pessoas.

Eu: Porquê?

A (6): Porque dois lados são maiores.

Eu: Concordam com o que a A. disse?

Todos: Sim.

Eu: Então vamos tentar.

(...)

A (6): A. e I. têm de esticar as pernas porque o lado do retângulo não é redondo.

O A. tem de pôr os pés perto da cabeça do T..



**Figura 11: Reprodução de um retângulo, através dos corpos das crianças**

Através destes diálogos e da reprodução das diferentes figuras geométricas pude verificar que o T., a I., o G. e a A. já evidenciaram e conseguiram expressar os conhecimentos e as aprendizagens realizadas sobre as características e particularidades das formas geométricas, num contexto de exploração diferenciado do habitual. O que se constituiu como uma mais-valia para as tarefas que se realizaram posteriormente.

No seguimento da tarefa “desenhar” as figuras geométricas com os corpos fomos descobrir na sala e no espaço exterior objetos com as diferentes formas geométricas (quadrado, círculo, retângulo e triângulo). No decurso desta descoberta as crianças observaram todos espaços com muita atenção e conseguiram identificar algumas formas



geométricas, podendo comprovar-se através das seguintes afirmações e do registo fotográfico observável na figura 12:

G (4): O chão tem quadrados.

I (4): Encontrei um círculo. (apontando para o caixote do lixo)

(...)

Eu: Será que aqui na casa de banho também conseguimos encontrar algumas formas geométricas?

L (4): Sim. Aqui (armário) conseguimos encontrar o retângulo.

A (3): A parede tem quadrados.

A (6) e B (5): A torneira tem um círculo.



**Figura 12: Algumas das figuras geométricas encontradas pelas crianças nos diversos espaços**

No decorrer da tarde, as crianças que não dormiam sesta realizaram uma composição plástica só com figuras geométricas socorrendo-se dos blocos lógicos ou de recortes de papel. Assim, na figura 13 pode observar-se algumas das composições plásticas realizadas pelas crianças. A realização desta composição plástica ficou marcada pela autonomia, pela partilha, mas também pela interajuda e pela cooperação entre as crianças.



**Figura 13: Realização de algumas composições plásticas com blocos lógicos e recortes**

Ao concluirmos a elaboração da composição plástica e já com todas as crianças, reunimo-nos no centro da sala e, em grande grupo, realizámos a sistematização das aprendizagens e dos conhecimentos adquiridos ao longo do dia. Desta forma, verificámos as principais características e particularidades de cada figura geométrica, bem como as diferenças e semelhanças entre cada uma delas.

### **Síntese**

Esta tarefa de *Descobrir as formas geométricas* constituiu-se como uma sequência de tarefas que possibilitaram que as crianças desenvolvessem os seus conhecimentos prévios e o seu raciocínio matemático através de explorações lúdicas e significativas. Porque estas tarefas tinham como propósito proporcionar às crianças diversas situações onde pudessem desenvolver e assimilação conceitos e/ou conteúdos matemáticos relacionados com as características e particularidades das figuras geométricas de forma espontânea e criativa.

Neste sentido, posso dizer que ao longo da realização destas tarefas as crianças expressaram as suas ideias e estratégias matemáticas através da comunicação oral e

escrita. O que permitiu que fossem desenvolvendo o seu raciocínio matemático e também compreendendo o raciocínio apresentado pelos colegas.

Na sequência da realização destas tarefas as crianças demonstraram dificuldades ao nível da perceção das representações que iriam surgir se juntássemos duas figuras geométricas, tornando-se evidente que as crianças necessitaram de observar situações concretas para as conseguirem identificar. Desta forma, a utilização dos blocos lógicos para representar as situações sugeridas por mim e por outras crianças, permitiu que as crianças percebessem o papel e a importância das representações na apresentação das suas ideias. O que de certo modo se constituiu como essencial no desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

### **Tarefa: Trabalhar a matemática com tampinhas de garrafas**

A tarefa *Trabalhar a matemática com tampinhas de garrafas* consistiu na classificação, ordenação, formação de conjuntos e realização de padrões com tampinhas de garrafa, bem como o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e comunicação. Esta tarefa enquadrou-se no domínio dos Números e Operações e foi aplicada nos dias 19 e 26 de abril de 2013, em grupos de quatro crianças. Apesar de a tarefa ser implementada em dias diferentes não se constituiu como uma continuação e/ou conclusão da mesma, mas sim como uma necessidade de trabalhar os mesmos conteúdos com outras crianças.

O desenvolvimento desta tarefa decorreu em diversas fases tal como as propostas executadas anteriormente. Primeiramente foi apresentada a tarefa, os materiais e as diversas etapas que permitiam a sua concretização, após este momento decorreu a execução e discussão dos trabalhos desenvolvidos, e por fim ocorreu a sistematização das aprendizagens alcançadas por cada criança.

Na primeira fase da tarefa foi necessário explicar às crianças qual o trabalho a desenvolver com as tampinhas, como por exemplo: organizar, agrupar, formar conjuntos, identificar quantidades, encontrar e reproduzir padrões, etc., mas também permitir que observassem os recursos que poderiam utilizar na concretização do mesmo. Contudo foi essencial perceber se todas as crianças tinham compreendido qual o

trabalho que teriam de desenvolver, de modo a pudermos passar à fase de execução e discussão da tarefa.

Assim, na segunda fase da tarefa cada criança começou por retirar, aleatoriamente, de um saco com tampas de diversas cores pelo menos quinze. No decorrer deste processo cada criança foi efetuando com relativa facilidade a contagem das mesmas, o que não aconteceu com o A. (no dia 26 de abril de 2013) que inicialmente começou por retirar um determinado número de tampas e só depois efetuou a sua contagem. Esta estratégia do A. não se constituiu como a mais acertada, porque ao retirar as tampas do saco estas ficaram dispersas sobre a mesa o que não facilitou a contagem, ou porque contava algumas tampas duas vezes ou não contavam outras. Ao verificar esta situação questionei o A. sobre a situação, surgindo esta conversa:

Eu: A. já têm as tuas quinze tampas para pudermos continuar?

A (3): Não sei.

G (3): Ele já contou catorze, quinze e dezasseis.

Eu: Então como é que o A. pode organizar as suas tampas, para as contar sem se enganar?

G (3): Pode fazer assim. (apontando para a forma como organizou as suas tampas, em fila)

Eu: A. achas que assim vais conseguir contar as tuas tampas sem te enganares?

A (3): Vou tentar.

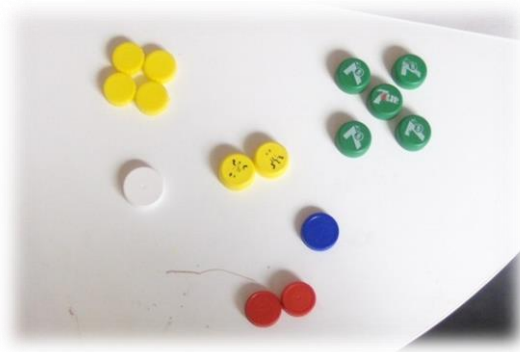
Desta forma, o A. foi organizando as suas tampas em fila, como se pode verificar na figura 14, à medida que as ia contando. Conseguindo, assim, com relativa facilidade efetuar a contagem das suas tampas e verificar que tinha as quinze.



**Figura 14: O A. (3) a organizar as suas tampas em fila**

Depois de todas as crianças terem as quinze tampas pedi que as organizassem e agrupassem mediante a cor, para posteriormente determinarmos a quantidade de cada conjunto e representá-los numa folha de papel. Mas antes dessa representação na folha surgiram algumas constatações das crianças referentes à forma de organizar e agrupar as tampinhas.

Neste sentido, no dia 19 de abril de 2013 verifiquei que a B. apesar de seriar as suas tampas mediante a sua cor ainda as separou tendo em conta os desenhos expressos nas mesmas, podendo esta situação ser observada na figura 15. Esta forma de seriação deixou-me curiosa por isso questionei a B. em relação à mesma.



**Figura 15: Conjuntos apresentados pela B. (5)**

Eu: B. porque agrupaste as tampas amarelas dessa forma?

B (5): São todas amarelas, mas estas têm um desenho e as outras não.

Eu: As verdes também têm desenhos diferentes e não estão separadas?

B (5): A que tem vermelho está no meio.

Eu: Mas é diferente das outras, tal como as amarelas.

B (5): Pois é.

A B. ficou a olhar para os diferentes conjuntos que tinha feito e não disse mais nada. Aproveitei esta situação e coloquei a seguinte questão às restantes crianças:

Eu: Concordam com a ideia da B. de agrupar as tampas amarelas assim?  
Porquê?

A (6): Não. Eu tenho junto, são amarelas.

D (5): Como são amarelas podem ficar juntas.

Eu: Então acham que devem ficar juntas porque a cor é igual (amarelo)?

C (4): Sim, o amarelo é igual.

Quando a C. deu esta resposta e aproveitando os conjuntos efetuados por ela, observáveis na figura 16, questionei-a:



**Figura 16: Conjuntos efetuados pela C. (4)**

Eu: C. nos teus conjuntos tens alguma cor que seja diferente? Se sim, qual?

C (4): Sim. Estas azuis são claras e estas são escuras.

Relativamente à situação das tampas terem desenhos e cores diferentes, no dia 26 de abril de 2013, o G. também efetuou referência a essa situação e não presenciou a conversa que decorreu no dia 19 do mesmo mês.

G (3): Vera, estas tampas não fazem conjunto.

Eu: Porquê?

G (3): Estas tampas não têm a mesma cor. (colocando-as lado a lado, ver figura 17).

Eu: Mas as duas são azuis.

G (3): Sim. Mas uma é mais escura e outra é mais clara.



**Figura 17: As tampas azuis identificadas pelo G. (3) como sendo diferentes**

Como as tampas verdes tinham desenhos com cores diferentes, questionei o G. sobre o conjunto que tinha realizado, observável na figura 18.



**Figura 18: Conjunto das tampas verdes, realizado pelo G. (3)**

Eu: E as verdes são todas iguais?

G (3): Sim. São todas verdes. (observa as tampas e reformula a sua resposta).

G (3): Estas duas têm vermelho.

Eu: Então também não fazem parte do conjunto das verdes?

G (3): Fazem, porque são da mesma cor.

Posteriormente, à verificação e discussão das diferentes estratégias apresentada pelas crianças de formar conjuntos com quinze tampinhas de garrafa, era para se iniciar a representação dos conjuntos e das respetivas quantidades através do desenho. Mas o grupo decidiu realizar essa representação colando as tampinhas de garrafa numa folha de papel, podendo verificar-se o resultado final do trabalho da A. na figura 19.



**Figura 19: Resultado final do trabalho da A. (6), com as tampinhas de garrafa**

A tarefa ficaria concluída com a descoberta de padrões diferentes, recorrendo a pelo menos dez tampinhas de cores diferentes. E à medida que as crianças iam encontrando os diversos padrões era necessário que os registassem numa folha de papel, de modo que conseguissem explicar aos colegas as suas estratégias de organização das tampinhas na descoberta dos padrões.

Ao verificar que as crianças revelavam algumas dificuldades na descoberta de padrões, o registo e a explicitação das estratégias utilizadas não foram concretizadas. Assim, aproveitei este momento para explicar em que consistia um padrão e como poderíamos realizá-lo ou continuá-lo, dando alguns exemplos de padrões. Esta opção foi tomada porque considerei que era preferível focalizar e sistematizar as aprendizagens adquiridas anteriormente, em vez de dispersar e alargar os conhecimentos nesse momento.

Neste sentido, passámos à síntese das aprendizagens realizadas e foi possível verificar que se pode classificar, agrupar e organizar diversos elementos tendo em conta as suas características. No decorrer desta sistematização aproveitámos para constatar que na sala também temos alguns objetos agrupados e organizados segundo alguns critérios, como por exemplos: a caixa dos legos, dos animais, dos carros, dos lápis de cera, das canetas de feltros, etc..

### **Síntese**

Ao analisar a tarefa desenvolvida e as aprendizagens adquiridas pelas crianças pode dizer-se que a maioria já consegue classificar e agrupar mediante as características dos objetos apresentados, mas também efetuar a relação entre o número de objetos e a quantidade que representam. E que ao longo do desenvolvimento desta tarefa a explicitação dos raciocínios matemáticos e das estratégias utilizadas pelas crianças se tornaram mais ricos e complexos, bem como permitiu a compreensão e a perceção dos raciocínios e das estratégias apresentados pelos colegas.

Na sequência da realização desta tarefa as crianças demonstraram dificuldades ao nível da descoberta e da reprodução de padrões. Sendo notório que as crianças apesar



de não conseguirem realizar padrões sozinhas, também não conseguem raciocinar sobre os padrões já concretizados ou mesmo explicar como os poderiam prolongar.

### **Tarefa: Relação entre números cardinais e as respetivas quantidades**

A realização da tarefa que se intitula de *Relação entre números cardinais e as respetivas quantidades* recaiu sobre o domínio dos Números e Operações e ocorreu no dia 15 de maio de 2013. Esta tarefa foi planeada de forma a promover a articulação entre os conteúdos do livro “Mais uma ovelha” de Mij Kelly, números cardinais, e o desenvolvimento de conceitos e conhecimentos matemáticos ao nível da relação entre números cardinais e as respetivas quantidades. Mas também com a expressão plástica na elaboração dos cartões com os números de 0 a 10 e as respetivas quantidades, sendo os mesmos produzidos através da utilização de algumas técnicas de pintura, desenho, recorte e colagem.

A tarefa iniciou-se após a leitura e a exploração do conteúdo do livro “Mais uma ovelha”, em grande grupo. Nesta exploração trabalhou-se a contagem oral, as relações de “mais um que”, “mais dois que”, “menos um que”, “menos dois que”, etc.. Assim, este foi o ponto de partida para a elaboração dos cartões supracitados.

A realização dos cartões, ao contrário da leitura e exploração do livro “Mais uma ovelha”, ocorreu em pequenos grupos. Portanto, de forma a iniciarmos esta tarefa foi necessário definir os materiais essenciais para produzir os cartões, tais como: tampas de garrafas, cartolina, papel crepe, papel eva, papel de lustro, botões, lá, lápis de cor, lápis de cera, etc., sendo de referir que as crianças se organizaram na recolha de todos os materiais.

Na fase de realização e discussão da tarefa as crianças estabeleceram a correspondência entre o número e a respetiva quantidade e vice-versa, utilizando um dos materiais descritos para as expressar nos cartões. Este processo de produção dos cartões pretendia também o desenvolvimento da perceção visual das crianças, ou seja, reconhecer quantidades sem efetuar a contagem dos objetos.

Neste sentido, e tendo em conta as considerações supracitadas posso dizer que ao longo do processo de produção dos cartões, com os números de 0 a 10 e as respetivas

quantidades, as crianças sugeriram e dialogaram sobre as imagens, as cores, os materiais a utilizar em cada um, assim como a forma com que os iríamos dispor na cartolina. O resultado final desta tarefa pode verificar-se na figura 20.



**Figura 20: Cartões com os números de 0 a 10 e as respetivas quantidades**

Mas esta tarefa também permitiu o desenvolvimento de outros conceitos e conhecimentos matemáticos, que se encontram patentes na conversa com e entre as crianças, sobre o número de maçãs que teríamos de colocar em cada uma das árvores, bem como o número total de maçãs. Esta conversa iniciou-se após o F. observar as quatro árvores que estavam representadas na cartolina com o número quatro (figura 21).



**Figura 21: Cartão inicial do número 4 e respetivas quantidades**

F (4): As árvores também podiam ter frutos.

Eu: Sim. As árvores podiam ter frutos, mas será que os restantes colegas concordam?

F (4): Podemos perguntar.

Eu: O F. tem uma ideia, para complementar um dos cartões, que quer partilhar com todos. Vamos ouvi-lo? (dirigindo-me às restantes crianças do grupo).

I (4) e B (5): Sim.

F (4): Acho que podíamos colocar algumas maçãs nas árvores.

I (4): Boa.

Eu: A ideia do F. é boa. Mas quantas maçãs vamos colocar nas árvores? (Após a minha questão o F (4), a I (4) e a B (5) responderam muito prontamente)

F (4), I (4) e B (5): Quatro maçãs.

Eu: Mas porquê quatro maçãs?

B (5): Então se é o número quatro, devemos ter quatro maçãs em cada árvore.

Eu: Boa ideia. Então precisamos de fazer quantas maçãs?

B (5): Precisamos de quatro para esta árvore, mais quatro, mais quatro e mais quatro. (apontando para cada uma das árvores)

Eu: Sim. Precisamos de quatro maçãs para cada árvore, mas de quantas maçãs precisamos no total?

Visto que não obtive resposta, pedi que desenhassem numa folha as árvores e as respetivas maçãs, de forma a conseguirem contá-las posteriormente. Assim, após a elaboração do desenho as crianças começaram a contar e posteriormente voltei a perguntar:

Eu: Já me conseguem dizer de quantas maçãs precisamos no total?

F (4), I (4) e B (5): Sim. Precisamos de 16 maçãs. (resposta dada após as crianças terem estado a contar).

Eu: Precisamos de 16 maçãs?

B (5): Sim. Porque temos nesta 4, mais 4, mais 4 e mais 4.

Eu: Muito bem. Como já sabemos de quantas maçãs vamos precisar, só falta saber como as vamos fazer.

I (4): Com papel vermelho, porque gosto das maçãs vermelhas.

Eu: Se todos concordarem podemos começar a fazer as maçãs?

F (4), I (4) e B (5): Sim, podemos começar.

Na figura 22, pode observar-se o resultado final do cartão que originou a conversa descrita anteriormente.



**Figura 22: Cartão final do número 4 e respetivas quantidades**

Apesar desta exploração do número de maçãs a colocar em cada árvore, bem como do número total de maçãs não se encontrarem planificadas considerei que os conhecimentos e conceitos matemáticos envolvidos iriam permitir que as crianças desenvolvessem o seu raciocínio matemático e procurassem estratégias para a resolução de um problema que foi lançado no momento. Desta forma, foi necessário adequar a minha intervenção no decorrer da exploração efetuada pelas crianças, uma vez que estas não conseguiam expressar quantas maçãs precisávamos no total.

Por isso, foi necessário clarificar e despertar as crianças para as ações que poderiam desenvolver, tal como: pedir para desenharem numa folha as árvores e as respetivas maçãs, de modo a encontrarem o número total de maçãs. Optei por este procedimento porque considerei que ao solicitar a representação as ajudaria a expressarem graficamente o que estavam a proferir oralmente, o que se tornou uma mais-valia porque desta forma as crianças conseguiram chegar facilmente ao resultado pretendido e verificaram também que podem organizar o seu discurso oral através da representação icónica.

Antes de darmos por concluída a tarefa, efetuámos a sistematização das aprendizagens adquiridas ao longo do processo de elaboração dos cartões com os números de 0 a 10 e as respetivas quantidades. No decorrer desta sistematização recorremos aos diversos cartões para estabelecer as correspondências entre a quantidade e o número, mas também para identificar as respetivas quantidades sem necessitarmos de as contar.

## **Síntese**

Esta tarefa permitiu a consolidação e desenvolvimento de conteúdos e conhecimentos matemáticos ao nível do sentido do número. Já que o estabelecimento de conexões entre o número e a quantidade, e vice-versa, permitiu que as crianças construíssem relações mentais entre os números e quantidades sem recorrerem à contagem.

O trabalho desenvolvido ao longo da tarefa permitiu que as crianças interagissem socialmente, discutissem e pensassem sobre os seus raciocínios matemáticos e os apresentados pelos colegas, ao mesmo tempo que compreendiam os números e as respetivas quantidades. Deste modo a observação efetuada por uma criança, sobre a possibilidade das árvores que estavam representadas na cartolina com o número quatro puderem ter frutos, permitiu que as crianças comunicassem as suas ideias com os colegas, mas gerou algumas dificuldades na determinação do número total de maçãs.

No entanto, ao verificar as dificuldades apresentadas pelas crianças na determinação do número total de maçãs incentivei-as a utilizarem a representação icónica para comunicarem as suas ideias, estratégias e raciocínios matemáticos. Este estímulo permitiu que as crianças expressassem os seus raciocínios de uma forma à qual não recorrem habitualmente e não a realizam muitas vezes autonomamente.

## **1.º Ciclo do Ensino Básico**

No que respeita às tarefas matemáticas propostas, no 1.º Ciclo do Ensino Básico, e selecionadas anteriormente, foram também escolhidas cinco para serem apresentadas e interpretadas nesta secção. Ao escolher estas cinco tarefas tive em conta os seguintes critérios: a) diversos tipos de raciocínios matemáticos apresentados; b) dificuldades apresentadas pelos alunos; c) múltiplas estratégias e variedade de representações.

A planificação e o desenvolvimento das tarefas apresentadas, como já se referiu, enquadraram-se no ensino exploratório da matemática que se organiza em quatro fases. Portanto, a primeira fase contempla a introdução da tarefa, na segunda fase decorre o

desenvolvimento da tarefa em pequenos grupos, na terceira fase ocorre a apresentação e discussão dos resultados obtidos, e na quarta e última fase surge a sistematização das aprendizagens matemáticas.

### **Tarefa: Os caminhos mais curtos**

A tarefa *Os caminhos mais curtos* (apêndice A) surgiu após a elaboração de alguns exercícios do manual do 3.º ano relacionados com percursos e orientação espacial. Esta tarefa matemática engloba-se no domínio da Geometria e Medida, foi proposta no dia 14 de outubro de 2013 e organizou-se em quatro fases. Com esta tarefa pretendia-se que os alunos descobrissem os diversos percursos que poderiam percorrer do ponto A ao ponto B pelo caminho mais curto, que apresentassem e discutissem as estratégias e os raciocínios matemáticos utilizados.

A resolução desta tarefa iniciou-se após a conclusão de um exercício do manual, da distribuição da folha com a tarefa e do livro de treino, mas também da formação dos pares de trabalho. Estes pares foram definidos por mim tendo em conta as dificuldades dos alunos e especificidades da turma.

Na primeira fase da aula a tarefa foi apresentada à turma no quadro, através da projeção do enunciado da mesma. Após a leitura do enunciado pela S.V. e a tentativa de interpretação do T., questionei-o e desenrolou-se a seguinte conversa:

Eu: T. o que temos de fazer?

T (8): Encontrar os caminhos entre A e B.

Eu: Só?

C.B. (8): Não. Temos de encontrar os mais curtos.

Eu: E como descobrimos quantos quadradinhos tem o caminho mais curto?

Ao colocar esta questão verifiquei que alguns alunos baixaram as suas cabeças, demonstrando nitidamente que não tinham percebido o que era para fazer. Desta forma, pedi que pensassem no exercício que tínhamos acabado de realizar, tornando-se assim

mais fácil perceber o que se pretendia dizer com o caminho mais curto. Após alguns instantes voltei a colocar a mesma questão e o R. muito perspicazmente respondeu:

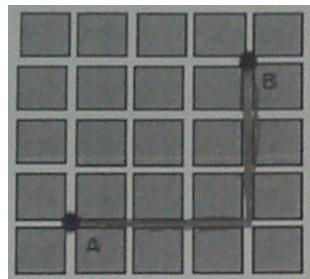
R.R. (8): O mais curto é assim à volta. (exemplificando fazendo o desenho com o dedo)

Eu: O que é assim à volta? Consegues explicar melhor R.R.?

R.R. (8): Consigo. É andar três quadrinhos para o lado e depois subir três. E ficamos com seis.

Eu: Podes ir fazer o caminho que disseste ao quadro R.R.? (ver caminho desenhado na folha na figura 23 e reproduzido no quadro)

R.R. (8): Sim.



**Figura 23: Percurso mais curto entre A e B descoberto pelo R.R.**

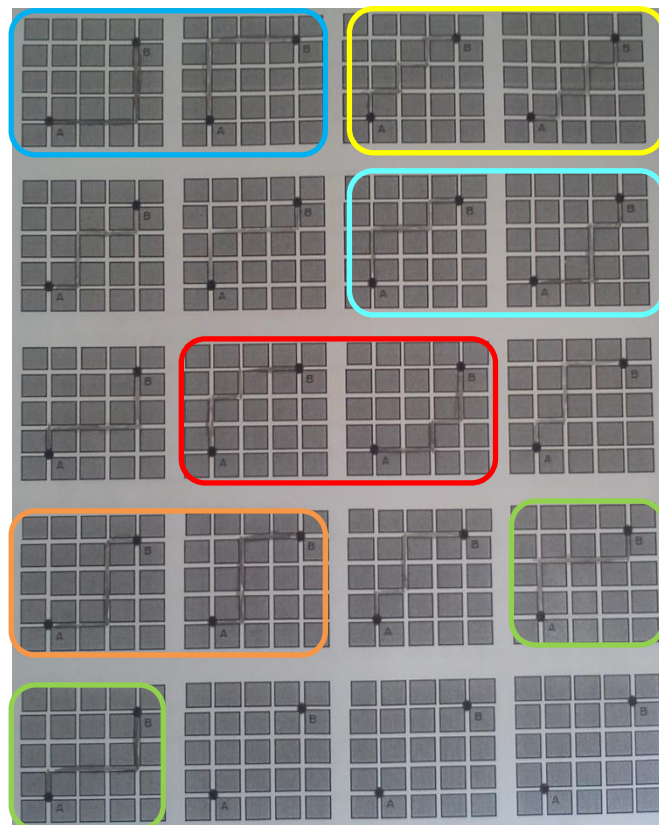
Eu: Todos concordam com o R.R. que o caminho mais curto tem seis quadrinhos ou não?

Todos: Sim. O caminho mais curto tem seis quadrinhos.

Eu: Como já sabemos que o caminho mais curto tem seis quadrinhos, vamos tentar encontrar os outros. Podem utilizar o livro de treino para registarem os vários percursos e depois é só copiar para a folha do enunciado.

Posteriormente, à descoberta de um dos caminhos mais curtos entre o ponto A e o ponto B, em grande grupo, os alunos passaram à fase de realização da tarefa que tinha como intuito descobrir os outros caminhos. Durante a execução da tarefa fui circulando pela sala e pelos diversos pares, de forma a verificar os progressos e as estratégias encontradas por cada par na descoberta dos diversos caminhos. Podendo, portanto, constatar que alguns pares tinham definido as suas próprias estratégias para encontrar os diversos caminhos, como foi o caso por exemplo da I. e do G.M.. Mas este par não conseguiu conservar a sua estratégia e aplicar o seu raciocínio no decorrer da resolução,

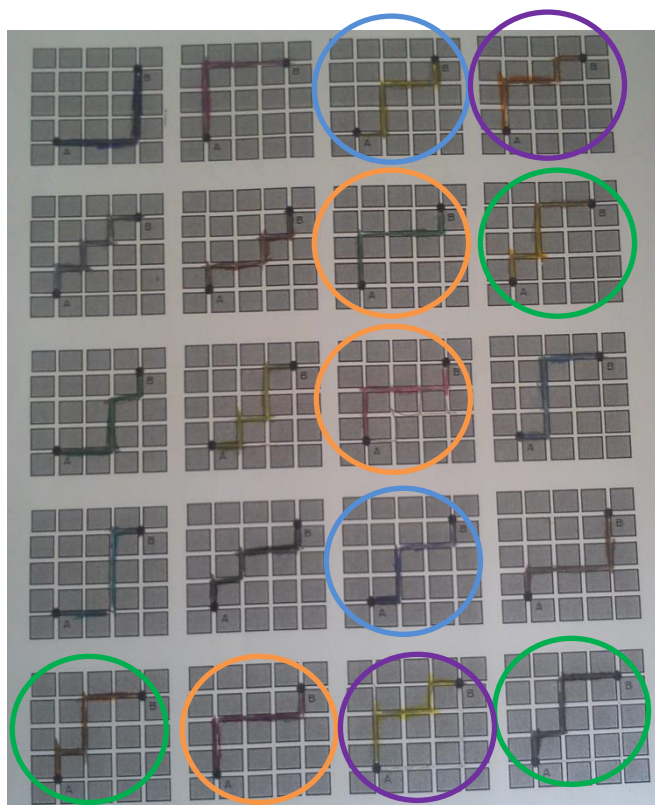
consistindo este na elaboração de um caminho e na sua posterior rotação ou na elaboração da sua reflexão, conseguindo-se constatar essas situações na figura 24. É de salientar que também existem algumas repetições não assinaladas na figura.



**Figura 24:** Trabalho realizado pela I. e pelo G.M., com recurso à rotação e/ou à reflexão

Enquanto uns demonstravam algumas estratégias para encontrar os diversos caminhos, outros desenhavam-nos aleatoriamente e à medida que iam verificando e comparando com os desenhos já realizados é que os apagavam, do livro de treino, e tentavam novamente. Mas se ainda não tinham o caminho desenhado copiavam-no para a folha com as quadrículas, o que não sucedeu com o trabalho desenvolvido pelo T. e pelo L. que repetiram vários caminhos como se pode ver na figura 25.





**Figura 25: Trabalho realizado pelo T. e pelo L. com várias repetições**

Ainda no decorrer da resolução da tarefa o R.R. chamou-me, porque ao olhar para os diversos caminhos que tinha desenhado constatou que:

R.R. (8): Professora, estes caminhos são iguais mas ao contrário.

Eu: Não estou a perceber. Consegues explicar melhor?

R.R. (8): Temos este (apontando para um desenho) e se o rodarmos fica igual a este (apontando para outro).

Eu: Então quer dizer que através da rotação de um caminho podemos encontrar outro(s)?

R.R. (8): Sim.

Eu: Assim, vocês acham que conseguem encontrar os caminhos todos?

A (8) e R.R. (8): Não sabemos.

Eu: Então o que poderão fazer para verificar?

A (8): Podemos marcar os que são iguais e depois vemos.

R.R. (8): Sim. Com cores.

Eu: Será uma hipótese. E assim conseguem ver se têm algum caminho repetido.

A (8) e R.R. (8): Vamos tentar.

Este não foi caso único, porque quase todos os pares não conseguiram dizer-me se já tinham encontrado todos os caminhos ou se faltava algum. Desta forma, na terceira fase da tarefa, quando começámos a apresentar e a analisar as soluções encontradas, e as estratégias utilizadas, os alunos foram desenhando os seus caminhos no quadro e começaram a verificar que tinham na sua folha um percurso parecido, mas estava ao “contrário”. Deixei que desenhassem três caminhos distintos (com um número de esquinas diferentes) e questionei a turma sobre a melhor forma de descobrir todos os caminhos sem nos esquecermos de nenhum.

Eu: No quadro, temos três caminhos. Conseguem identificar alguma diferença?

M.R. (8): São todos diferentes. Têm “bicos” diferentes.

Eu: A esses “bicos” podemos dar o nome de esquinas. Será que poderíamos encontrá-los todos sem nos esquecermos de nenhum, tendo em conta o número de esquinas?

Na opinião da maioria dos alunos seria mais fácil identificar os caminhos todos se os organizássemos tendo em conta o número de esquinas. E alguns alunos acrescentaram, com base no raciocínio matemático apresentado durante o processo de resolução, que também podíamos organizar os caminhos se os rodássemos. Assim, um dos alunos desenhou no quadro um caminho e depois efetuou a sua rotação para que todos pudessem constatar essa situação.

Neste sentido, e considerando que seria mais fácil organizar os diferentes caminhos por esquinas, começámos a confirmar no quadro as soluções encontradas pelos diferentes pares. Mas apesar de estarmos a organizar o trabalho pelo número de esquinas, as constatações dos alunos sobre as simetrias de reflexão e/ou rotação encontradas não foram deixadas de lado.

Posteriormente, ao registo de todas as soluções organizadas por esquinas efetuámos a sistematização das aprendizagens realizadas, última fase da aula. No decorrer deste momento de sistematização constatámos que inicialmente teríamos de encontrar o caminho mais curto entre o ponto A e B tendo como referência o lado do quadrado (unidade) e só depois é que poderíamos encontrar os restantes. E que a utilização de uma estratégia fiável em detrimento de uma resolução aleatória irá permitir

encontrar todos os caminhos mais curtos e consolidar aprendizagens, apoiamo-nos para isso nas resoluções registadas no quadro durante a fase de apresentação e discussão da tarefa.

### **Síntese**

Ao efetuar-se uma retrospectiva sobre a concretização da tarefa matemática, posso dizer que a realização desta permitiu que os alunos investigassem as diversas hipóteses de encontrar todos os caminhos mais curtos, ao mesmo tempo que conseguissem encontrar uma estratégia que lhes desse essa confirmação. Apesar de no início da resolução da tarefa alguns alunos terem demonstrado algumas dificuldades ao nível da compreensão da tarefa e da visualização e orientação espacial, no final verifiquei que esses alunos conseguiram superar as suas dificuldades e estruturar o seu raciocínio matemático à medida que foram organizando e enunciando as diversas estratégias utilizadas.

Relativamente a essas estratégias foi possível confirmar que a comunicação, a cooperação e a aprendizagem colaborativa entre pares permitiu que os alunos fossem apresentando estratégias mais elaboradas, mas também que recorressem aos seus conhecimentos prévios para expressar os seus raciocínios matemáticos. Desta forma, foi possível verificar que os alunos compreenderam que a explicitação dos seus raciocínios matemáticos é importante no processo de aprendizagem da matemática.

### **Tarefa: A festa de São Martinho**

A tarefa *A festa de São Martinho* (apêndice B) foi proposta no dia 11 de novembro de 2013 e tinha o propósito de interligar alguns conteúdos matemáticos com as comemorações do dia São Martinho. Esta tarefa matemática enquadra-se no domínio dos Números e Operações e da Álgebra, e é constituída por diversas questões e situações problemáticas que foram resolvidas em pequenos grupos (3 elementos)

definidos por mim, como referido na tarefa anterior, tendo em conta as dificuldades dos alunos e especificidades da turma.

Assim sendo, a questão que irá ser apresentada organizou-se em quatro fases e tinha o intuito dos alunos descobrirem e investigarem quantos abraços dariam o João e os amigos. Neste sentido, esta questão/tarefa também pretendia fomentar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos através do estabelecimento de conexões, do desenvolvimento de estratégias de natureza combinatória e do uso de representações variadas e explícitas na comunicação, oral e escrita, das suas ideias matemáticas sobre o número de abraços dados entre os amigos.

A primeira fase desta questão/tarefa iniciou-se após a conclusão das outras questões da ficha. Portanto, começámos com a apresentação da tarefa através da projeção do enunciado no quadro e a leitura do mesmo pela M.S..

**Tarefa:**

O João decidiu celebrar o São Martinho em sua casa, convidando cinco amigos para a sua festa.

(...)

À medida que cada amigo foi chegando à casa do João, cumprimentou todos os outros com um abraço. Quantos abraços deram no total?

Podes resolver com números, esquemas, tabelas ou desenhos.

Depois da leitura da tarefa solicitei ao R.R. para a interpretar, mas devido ao facto de estar a efetuar novamente a leitura do enunciado questioneei-o sobre o conteúdo do mesmo:

Eu: R.R. o que queremos saber?

R.R. (8): Quantos abraços deram no total o João e os amigos.

Eu: E o que sabemos?

R.R. (8): Que o João convidou cinco amigos para a festa e que se cumprimentaram com um abraço.

Eu: E sabemos mais alguma coisa?

C.B. (8): Sim. Que o amigo que chegava cumprimentava quem já estava na casa do João com um abraço.

Eu: Se já sabemos que o João convidou 5 amigos, que ao chegarem à festa cumprimentavam os outros com um abraço. Vamos descobrir quantos abraços deram no total. E não se esqueçam que podem resolver a tarefa recorrendo a tabelas, esquemas, desenhos ou a outra forma que considerem mais adequada. Bom trabalho.

Os diferentes grupos ao começarem a resolver a tarefa evidenciaram que não tinham compreendido o que era para fazer, perguntando constantemente o que tinham de fazer e como. Esta situação não se constituiu como uma surpresa para mim, porque a turma não estava habituada a este modo de trabalho mais autónomo e cooperativo, mas também que envolvesse um raciocínio matemático mais efetivo e consistente por parte de cada aluno. Por isso, comecei por exemplificar com três alunos a situação descrita na tarefa.

Eu: Hoje cheguei à sala e ainda não estava cá ninguém. Depois chegou o R.R. e cumprimentou-me com um abraço. (o R.R. aproxima-se e dá-me um abraço). Quantos abraços demos?

Todos: Um.

Eu: Logo a seguir chegou o G.M. e deu-me um abraço e outro ao R.R.. (o G.M. aproxima-se e dá-me um abraço e outro ao R.R.). Quantos abraços demos?

Todos: Dois.

C.B. (8): Dois agora e o outro antes, foram três.

Eu: Concordam com a C.B.?

Todos: Sim.

Eu: Porquê?

M.R. (8): Porque se quisermos saber o número total de abraços temos de somar.

Eu: Quando o G.M. acabou de dar o abraço ao R.R., chegou a M.M. que me deu um abraço, outro ao R.R. e ainda outro ao G.M. (a M.M. aproxima-se e dá-me um abraço, outro ao RR. e outro ao G.M.). Quantos abraços demos?

M.B. (8): Agora três, mas no total seis.

Eu: Já perceberam como os amigos se cumprimentaram ao chegarem à festa?

Todos: Sim.

Eu: Então vamos pensar e representar quantos abraços deram no total o João e os cinco amigos.

Após a exemplificação da tarefa, os alunos passaram à fase de concretização da mesma onde começaram por expor e analisar as estratégias e ideias de todos os elementos do grupo. Durante esta fase da tarefa fui circulando pelos grupos com o intuito de averiguar os seus raciocínios matemáticos e que estratégias tinham utilizado para os expressar, bem como perceber como estavam a trabalhar.

Os diferentes grupos recorreram a diversas estratégias, tais como: desenhos, tabelas, esquemas e/ou linguagem e símbolos matemáticos, para representar as suas ideias, sendo de referir que alguns grupos utilizaram a mesma forma de representação. Assim, as representações mais utilizadas pelos grupos para comunicar os seus raciocínios à turma foram as representações icónicas (desenhos, tabelas, esquemas) e as simbólicas (linguagem e símbolos matemáticos).

Um dos grupos recorreu à representação em esquema (representação icónica), onde os nomes dos amigos do João eram expressos através de letras do alfabeto, tal como: amigo A, amigo B, amigo C, amigo D e amigo E. Sendo que esses amigos à medida que iam chegando à festa cumprimentavam os presentes com um abraço, utilizando este grupo setas para representar essa mesma situação e algarismos para expressar o número de abraços que cada amigo tinha dado. E no final efetuaram a contagem do número total de abraços, recorrendo à adição do número de abraços dados por cada um dos amigos, observar figura 26.

esquema	amigo E - João	total
amigo A → João	1 ↓ amigo A	$1+2+3+4+5 = 15$
amigo B → João amigo A → amigo A	2 ↓ amigo B ↓ amigo C ↓ amigo D	$3+3+9 = 15$
amigo C → João amigo A → amigo A amigo B → amigo B	3 5	$6+9 = 15$
amigo D → João amigo A → amigo A amigo B → amigo B amigo C → amigo C	4	
		Por isso total deram 15 abraços.

Figura 26: Resolução apresentada pelo 1.º grupo, sobre os abraços dados na festa de São Martinho

Ao ser mostrada a sua resolução à turma, os elementos do primeiro grupo referiram que:

- 1.º Grupo: Para descobrirmos quantos abraços deram no total, (pausa) identificámos os amigos como A, B, C, D e E. Depois fomos ligando o amigo que chegava com o João e os outros que já lá estavam. E no fim somámos tudo.

Eu: Alguma dúvida ou sugestão?

Todos: Não.

O segundo grupo para apresentar a sua resolução elegeu o desenho (representação icónica) para representar a situação enunciada na tarefa. Assim, desenharam o João e os seus amigos (identificados igualmente com letras) alinhados, bem como ligados entre si com arcos de cores diferentes para identificar os abraços dados por cada um, verificar figura 27. O maior número de arcos partiu do João, identificados com cor vermelha, representando todos os abraços que ele deu aos seus amigos; depois passaram para o amigo A e desenharam a verde os arcos que revelavam os abraços dados por este aos outros amigos, mais concretamente B, C, D e E; seguindo a mesma estratégia desenharam os outros arcos. No final realizaram também a contagem do número total de abraços, recorrendo à adição do número de arcos representados (correspondendo estes ao número de abraços dados por cada um dos amigos).



Figura 27: Resolução apresentada pelo 2.º grupo, sobre os abraços dados na festa de São Martinho

Ao ser exibida a sua resolução à turma, os elementos do segundo grupo relataram que:

- 2.º Grupo: Primeiro desenhamos o João e os cinco amigos. Depois ligámos o João a todos os amigos com uma cor. Ao terminarmos começámos a ligar o amigo A com os outros amigos, utilizando outra cor e depois fizemos a mesma coisa para os outros. No fim somámos tudo.

O terceiro grupo e o quarto apresentaram resoluções muito idênticas, uma vez que recorreram a uma tabela para representarem o número de abraços dados por cada amigo, existindo apenas uma diferença na conceção da tabela. Enquanto o terceiro grupo apresentou o João na tabela com zero abraços, observar figura 28, o quarto grupo apenas considerou os amigos, verificar figura 29. Sendo visível nas duas tabelas que os dois grupos não consideram o número total de abraços dados, mas sim o número de abraços dados por cada amigo individualmente.

amigo João	1.º amigo	2.º amigo	3.º amigo	4.º amigo	5.º amigo
0 abraços	1 abraço	2 abraços	3 abraços	4 abraços	5 abraços

R: No total deram 15 abraços.

Figura 28: Resolução apresentada pelo 3.º grupo, sobre os abraços dados na festa de São Martinho

amigos	1	2	3	4	5
abraços	1	2	3	4	5

$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

R: No total de abraços é 15

Figura 29: Resolução apresentada pelo 4.º grupo, sobre os abraços dados na festa de São Martinho



Ao ser apresentada a resolução do terceiro grupo (figura 28) à turma, os elementos do mesmo referiram que:

3.º Grupo: Colocámos o João e os cinco amigos na tabela e depois fomos pensando quantos abraços cada um tinha dado e somámos tudo.

Eu: Será que podiam explicar melhor para todos percebermos?

3.º Grupo: O João não deu um abraço a ele próprio, por isso está zero. O primeiro amigo a chegar deu um abraço ao João. O segundo amigo deu um abraço ao João e outro ao primeiro amigo, por isso são dois abraços (...). E depois somámos tudo.

No decorrer da apresentação da resolução do quarto grupo (figura 29) à turma, os membros do mesmo explicaram que:

P.F. (8): É igual à outra.

Eu: Esta tabela é igual à que o grupo anterior apresentou?

4.º Grupo: Não é.

Eu: Não é, porquê?

4.º Grupo: Nós não colocámos o nome do João.

Eu: Mas o João também estava na festa?

4.º Grupo: Sim. Mas o João não deu abraços, foi recebendo dos amigos. Por isso, não colocámos.

Posteriormente, à apresentação e discussão das resoluções efetuadas pelos diferentes grupos iniciámos a sistematização das aprendizagens realizadas. Assim, aproveitei a estratégia de resolução apresentada pelo terceiro grupo e pelo quarto e propôs aos alunos a construção de uma tabela que exprimisse o número de amigo e o número total de abraços que estes dariam, uma vez que as tabelas só apresentavam o número de abraços dados por cada amigo.

Neste sentido, começamos por identificar as variáveis da tabela, o número de amigos e o número total de abraços, registando as mesmas no quadro. De seguida, começamos por colocar o número de amigos (ficando definido que o João contaria como um amigo, passando a constar na tabela seis amigos). Desta forma, questionei os alunos sobre se já tínhamos alguma informação que poderíamos colocar na tabela:

Eu: Já temos alguns dados que podemos colocar na tabela? Quais?

R.T. (8): Que um amigo não dá abraços, por isso é zero.

Eu: Todos concordam com a R.T.?

Todos: Sim.

R.R. (8): Sabemos que seis amigos deram quinze abraços.

Eu: E dois amigos quantos abraços deram no total? E três amigos? E quatro? E cinco?

No final, obtivemos no quadro a tabela que se encontra reproduzida posteriormente, verificar tabela 3. A continuação da exploração das situações seguintes não foi possível, visto que estava na hora do intervalo e após o mesmo tínhamos de iniciar o trabalho de expressão plástica. Mas os alunos ainda conseguiram descobrir que o número total de abraços de um determinado número de amigos, por exemplo: seis, é igual à soma do número de amigos menos um, três, com o número total de abraços também anterior, três.

**Tabela 3: Sistematização do número total de abraços dados entre seis amigos**

<b>N.º de amigos</b>	1	2	3	4	5	6	...
<b>N.º total de abraços</b>	0	1	3	6	10	15	...

### Síntese

Ao realizar a análise do desenvolvimento desta questão/tarefa, posso afirmar que as dificuldades sentidas inicialmente pelos alunos na compreensão da tarefa, como referenciado anteriormente, poderiam ter comprometido as aprendizagens e o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Pois, se os alunos não perceberem o que lhes é pedido muito dificilmente conseguem organizar, expressar e desenvolver o seu raciocínio matemático.

Neste sentido, considero que a exemplificação efetuada com o auxílio de alguns alunos da turma se constituiu como fundamental na compreensão da tarefa e uma mais-valia na resolução da mesma. Porque os alunos aproveitaram e apoiaram-se na

exemplificação realizada para estruturarem, desenvolverem e justificarem, oralmente e por escrito, as suas estratégias e raciocínios matemáticos.

As resoluções apresentadas pelos diversos grupos permitiram perceber que através de representações icónicas os alunos conseguiram estabelecer ligações com o concreto. Mas também serviram como suporte na explicitação dos seus raciocínios matemáticos, ao mesmo tempo que se confirmaram como essenciais na comunicação e compreensão dos mesmos.

### **Tarefa: Cálculo para os meninos**

A tarefa *Cálculo para os meninos* (apêndice C) recaiu sobre o domínio dos Números e Operações, foi proposta no dia 11 de dezembro de 2013 e organizou-se segundo as premissas do ensino exploratório da matemática. Deste modo, esta tarefa consistiu na exploração de uma situação com que os alunos se podem deparar no seu quotidiano, ou seja tinham de descobrir se os meninos iriam terminar de tomar os comprimidos, receitados pelo médico, ao mesmo tempo ou não. E não podiam deixar de considerar que os meninos não tomavam o mesmo número de comprimidos por dia e que um tinha começado mais cedo do que o outro.

Assim sendo, com esta tarefa pretendia-se que os alunos desenvolvessem o seu raciocínio matemático através da conceção de estratégias, que lhes permitissem estabelecer conexões entre as diversas situações descritas. Mas também requeria que as representações das ideias matemáticas se constituíssem como suporte para interpretar, expressar e justificar o raciocínio matemático utilizado, através da oralidade e/ou escrita.

Relativamente, à concretização desta tarefa, a mesma iniciou-se com a apresentação do seu enunciado à turma, que já se encontrava em pequenos grupos. Sendo de salientar que esta apresentação se efetuou através da projeção do enunciado no quadro e a leitura do mesmo pelo F.F.. Depois da leitura do enunciado pedi à S.P. para o interpretar, respondendo-me que não tinha percebido o problema nem o que era para fazer. Assim, perguntei se alguém conseguia explicar o que tínhamos de fazer e o

silêncio imperou. Tendo em conta esta situação começámos a analisar o enunciado do problema e a sublinhar a informação importante.

Posteriormente, à análise e ao destaque da informação importante, decidi realizar algumas questões aos alunos sobre o que tínhamos de fazer. A opção por esta estratégia deveu-se ao facto de verificar que a grande maioria dos alunos não tinham percebido o que era para fazer. E como já referido na apresentação de outras tarefas esta situação também não me surpreendeu, porque através das minhas observações pude constatar que as tarefas apresentadas à turma eram pouco desafiantes e a resolução conjunta não permitia o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Por isso, esta seria mais uma tarefa que tinha como intuito propiciar a mudança de metodologia de ensino-aprendizagem da matemática nesta sala de aula.

Assim, antes de passarmos à fase de realização da tarefa, comecei por questionar os alunos relativamente às informações que constavam no enunciado da tarefa e procedimentos que tínhamos de efetuar:

Eu: S.V. o que queremos saber? (após alguma hesitação respondeu à questão)

S.V. (8): Se o Tomás e a Catarina vão terminar os comprimidos ao mesmo tempo.

Eu: E as indicações dadas pelo médico foram iguais para os dois?

Todos: Não.

Eu: C.R. que diferenças encontras?

C.R. (8): O Tomás toma os comprimidos (pausa) de seis em seis horas e a Catarina de (pausa) oito em oito horas.

Eu: Isso quer dizer que tomam os dois o mesmo número de comprimidos por dia C.R. ou não? Porquê?

C.R. (8): Não. Porque (pausa mais longa que a M.R. aproveitou, para completar o raciocínio da C.R.)

M.R. (8): Um dia tem 24 horas e se um toma de seis em seis horas e outro de oito em oito horas, não tomam o mesmo.

Eu: Se não tomam o mesmo, uma das coisas que temos de saber é quantos comprimidos tomam cada um deles por dia. Alguma dúvida?

Todos: Não.

Eu: Voltando um pouco atrás. Quando perguntei se o médico tinha dado as mesmas indicações aos dois meninos, responderam-me que não. Mas será mesmo assim? Podem tornar a ler o enunciado para verificar, por favor. (após a leitura o T. respondeu)

T (8): Nós sublinhamos há pouco que “o médico receitou a cada um deles duas caixas de 24 comprimidos cada”. (lendo o que estava no enunciado)

Eu: Já descobrimos mais uma coisa que temos de saber quantos comprimidos cada um deles tomou no total. Dúvidas?

Todos: Não.

M.B.: Isso é fácil, só temos de fazer duas vezes 24. (ao mesmo tempo que os colegas respondem que não tinham dúvidas).

Eu: O M.B. já deu uma ajuda. E agora podem começar a resolver o problema recorrendo a esquemas, desenhos, tabelas ou a outra estratégia que considerarem mais fácil para conseguirem responder à questão. Bom trabalho.

Ao começaram a resolver a tarefa os diferentes grupos questionavam-me sobre a data em que cada um dos meninos tinha começado a tomar os comprimidos. Tendo respondido que não era preciso sabermos o dia em que tinham começado a tomar os comprimidos. Mas como vários grupos insistiram que sem uma data não conseguiriam resolver o problema, pedi que a turma toda tomasse atenção ao que ia dizer:

Eu: Apesar de achar que não precisam de saber uma data para resolver o problema vou sugerir uma, apenas para quem considerar necessário. Podemos pensar que o Tomás vai começar a tomar os comprimidos amanhã.

T (8): Amanhã é dia ...

S.P. (8): Doze.

L: Mas a Catarina começou antes.

Eu: Sim. Quanto tempo antes?

L. (8): Uma semana.

M.B. (8): Então quando foi?

Eu: Não sei. Têm de pensar. (após alguns momentos de silêncio)

C.B. (8): Já sei. Se amanhã é quinta-feira, começou na quinta da semana passada.

M.B. (8): Mas quando?

R.R. (8): Professora, posso ver no calendário da sala.

Eu: Podes.

R.R. (8): Foi dia cinco.

Eu: Agora, vamos continuar a trabalhar.

No decorrer da fase de realização da tarefa os alunos tiveram em conta as informações sublinhadas e debatidas anteriormente, em grande grupo. E quando tinham de explicitar as suas ideias de resolução, ao seu grupo, socorriam-se de informações do enunciado para se fundamentarem. Nesta fase fui circulando pela sala, mais concretamente pelos diferentes grupos, de forma a esclarecer algumas dúvidas de interpretação sem influenciar o trabalho desenvolvido ou a desenvolver, a verificar o trabalho realizado e a compreender os raciocínios matemáticos utilizados e as estratégias que os suportavam.

Os diversos grupos recorreram a diferentes estratégias, por exemplo: esquemas (reta numérica), tabelas e/ou linguagem e símbolos matemáticos, para representar as suas ideias, mas de um modo geral os grupos recorreram às mesmas formas de representação. Sendo que as representações mais usadas pelos grupos para comunicar os seus raciocínios à turma foram as representações icónicas (tabelas e esquemas) e as simbólicas (linguagem e símbolos matemáticos, mais concretamente as operações matemáticas).

O primeiro grupo recorreu à linguagem natural e à linguagem matemática para expressar o raciocínio matemático utilizado na determinação do número de comprimidos tomados pelo Tomás e pela Catarina em cada dia. E utilizaram os símbolos matemáticos, através da operação matemática da multiplicação, para determinar quantos comprimidos tinham de tomar no total, observar figura 30.

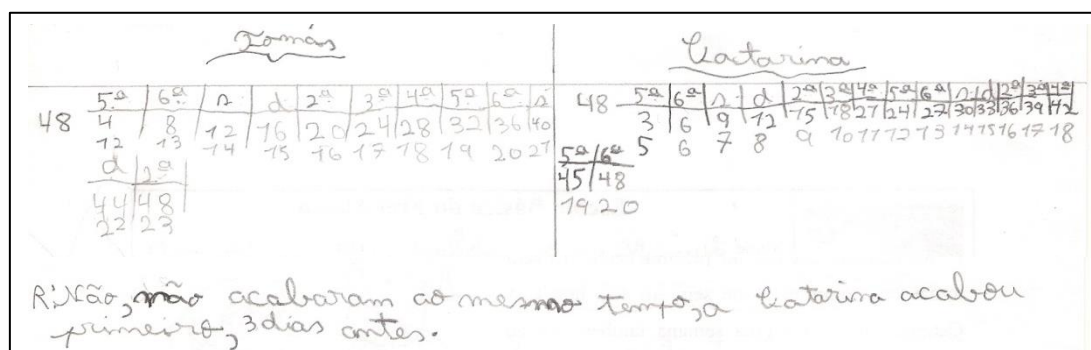
Tomás	Catarina
1 comprimido = 6h = 1 comprimido	1 comprimido = 8h
2 comprimidos = 12h	2 comprimidos = 16h
3 comprimidos = 18h	3 comprimidos = 24h
4 comprimidos = 24h	
24 comprimidos = 1 caixa	24 comprimidos = 1 caixa
24 comprimidos $\times$ 2 = 48 comprimidos	24 comprimidos $\times$ 2 = 48 comprimidos
↓ 1 caixa	↓ 1 caixa
	↓ 2 caixas

**Figura 30: Estratégias de resolução do 1.º grupo, na determinação do número de comprimidos tomados pelo Tomás e pela Catarina em cada dia e no total**

Posteriormente, o primeiro grupo, socorreu-se de representações icónicas, mais concretamente de duas tabelas, para representar o número de comprimidos que iriam ser tomados ou já tomados pelo Tomás e pela Catarina, mas também estão patentes nestas

tabelas os dias em que começavam e iriam terminar, nomeadamente o dia da semana e do mês. Assim, através da verificação dos dados das duas tabelas, representadas na figura 31, pode concluir-se que o Tomás e a Catarina não iriam terminar de tomar os comprimidos ao mesmo tempo, porque a Catarina iria terminar três dias antes do Tomás.

A utilização das duas tabelas exigiu por parte deste grupo uma análise mais cuidada e minuciosa dos dados contidos nas mesmas. Porque a solução não é encontrada de forma direta.



**Figura 31: Estratégias de resolução do 1.º grupo, para verificarem se o Tomás e a Catarina iriam terminar de tomar os comprimidos ao mesmo tempo**

Ao ser exibida a sua resolução (figura 30 e 31) à turma, os elementos do primeiro grupo explicaram como produziram o seu raciocínio e como o expressaram:

1.º Grupo: Primeiro fizemos para o Tomás, que tomava um comprimido de seis em seis horas, por isso fizemos um comprimido igual a 6 horas, dois igual a doze, (...) e assim ficámos a saber que em cada dia tomava quatro comprimidos. Depois fizemos para a Catarina, que tomava um comprimido de oito em oito horas, o que dava três em cada dia. E no fim, multiplicámos o número de comprimidos por dois, que eram as caixas que tinham de tomar e deu 48 comprimidos.

M.R. (8): Porque é que vocês fizeram a mesma conta para o Tomás e para a Catarina?

1.º Grupo: Como fizemos as coisas do Tomás de um lado e as da Catarina de outro, achámos que era melhor fazer. Só depois é que vimos que não era preciso.

Eu: Podem continuar a vossa apresentação.

1.º Grupo: Depois de termos feito as contas todas, começamos a fazer uma tabela para o Tomás, com os dias da semana em cima, depois o número de comprimidos que já tinha tomado e em baixo os dias do mês. Fizemos a





Ao ser mostrada a sua resolução (figura 32 e 33) à turma, os elementos do segundo grupo referiram que:

2.º Grupo: Começámos por fazer uma tabela para o Tomás com as horas e os comprimidos, depois (pausa) no primeiro quadrado metemos seis e por baixo um, no segundo doze e por baixo dois, no terceiro dezoito e por baixo três e no último 24 e por baixo quatro. (pausa) O Tomás tomava quatro comprimidos por dia. E fizemos o mesmo para a Catarina.

Eu: Se fizeram o mesmo para a Catarina, quer dizer que ela também tomava quatro comprimidos por dia?

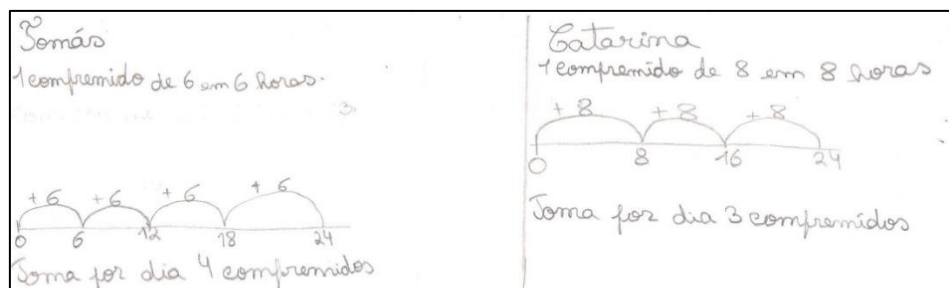
2.º Grupo: Não. (pausa) Ela só tomava três, às oito, às dezasseis e às 24 horas.

Eu: Assim já consegui perceber. E o que fizeram depois?

2.º Grupo: Depois fizemos uma tabela com os dias do mês e fomos metendo o número de comprimidos da Catarina, começando aqui (apontaram para o número cinco) até chegar ao 48. E o do Tomás começámos aqui (apontaram para o número doze) uma semana depois, até chegar ao 48. E a Catarina termina três dias antes do Tomás.

Eu: O grupo quer acrescentar mais alguma coisa à sua apresentação? Os outros grupos têm alguma pergunta? (após obter uma resposta negativa às duas questões, avançámos para a apresentação do trabalho realizado pelo terceiro grupo)

O terceiro grupo recorreu a esquemas (representação icónica), mais concretamente à reta numérica, para representar o número de comprimidos tomados pelo Tomás e pela Catarina em cada dia, verificar figura 34. Esta estruturação e organização do pensamento dos alunos permitiram que os alunos comparassem o número de comprimidos tomados por cada menino contando o número de arcos e adições realizadas.



**Figura 34: Utilização da reta numérica, pelo 3.º grupo, na determinação do número de comprimidos tomados pelo Tomás e pela Catarina em cada dia**

Depois de utilizarem a reta numérica, o terceiro grupo, recorreu à representação simbólica para identificar o número total de comprimidos, utilizando a operação matemática da multiplicação, observável no canto superior esquerdo da figura 35. E posteriormente utilizou uma tabela muito idêntica à apresentada pelo grupo anterior, mas com um senão não consideraram que o Tomás tinha começado a tomar os comprimidos uma semana depois da Catarina, verificar figura 35.

$24 \times 2 = 48$	5 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>																	
Dias	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20			
Catarina	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48			
Tomás					4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48			

**Figura 35: Estratégia de resolução do 3.º grupo, para verificarem se o Tomás e a Catarina iriam terminar de tomar os comprimidos ao mesmo tempo**

Ao ser apresentada a resolução do terceiro grupo (figura 34 e 35) à turma, os elementos do mesmo referiram que:

3.º Grupo: Utilizámos a reta para saber quantos comprimidos tomavam por dia. Para o Tomás fizemos sempre mais seis até chegar a 24, que é as horas do dia, e ficámos a saber que ele toma por dia 4 comprimidos. Para a Catarina fizemos sempre mais oito até chegar 24 e toma por dia 3 comprimidos.

Eu: E depois como organizaram essa informação?

3.º Grupo: Fizemos uma tabela parecida à deles. (aparecendo ao mesmo tempo a tabela projetada no quadro)

Eu: Se é parecida. Quais são as semelhanças ou as diferenças?

3.º Grupo: Temos os dias do mês em cima, depois temos os comprimidos da Catarina e em baixo os do Tomás.

R.R. (8): Isso está mal. O Tomás não começou no mesmo dia da Catarina.

Eu: Então este grupo esqueceu-se dessa informação. Mas será que vai influenciar o resultado final? Porquê? (silêncio)

M.B. (8): Sim. Porque para eles o Tomás acaba primeiro, mas quem acabou primeiro foi a Catarina.

Eu: Concordam ou não com o M.B.? E o que o poderia fazer o grupo para alterar essa situação?

Todos: Sim.

M.M. (8): Alterar a data do Tomás e (pausa) pôr o número de comprimidos até 48.

Eu: Já encontrámos uma solução. O grupo ou os outros grupos querem acrescentar mais alguma coisa? (após obter uma resposta negativa à questão, avançámos para a apresentação do trabalho realizado pelo quarto e último grupo)

O quarto e último grupo apresentou uma estratégia completamente diferente das restantes, recorrendo simplesmente à representação simbólica através de multiplicações sucessivas e por fim a uma subtração. Este grupo começou por efetuar a tabuada do seis com o intuito de verificar qual o número que multiplicado por seis dava 24, averiguando que esse número era o quatro. Assim, ficaram a saber que o Tomás tomava quatro comprimidos em cada dia. Depois realizaram a tabuada do quatro até descobrirem o número que multiplicado por quatro dava 48, verificando que esse número era o doze. O que lhes dava a indicação que o Tomás tinha de tomar os comprimidos durante doze dias. Observar estratégia na figura 36.

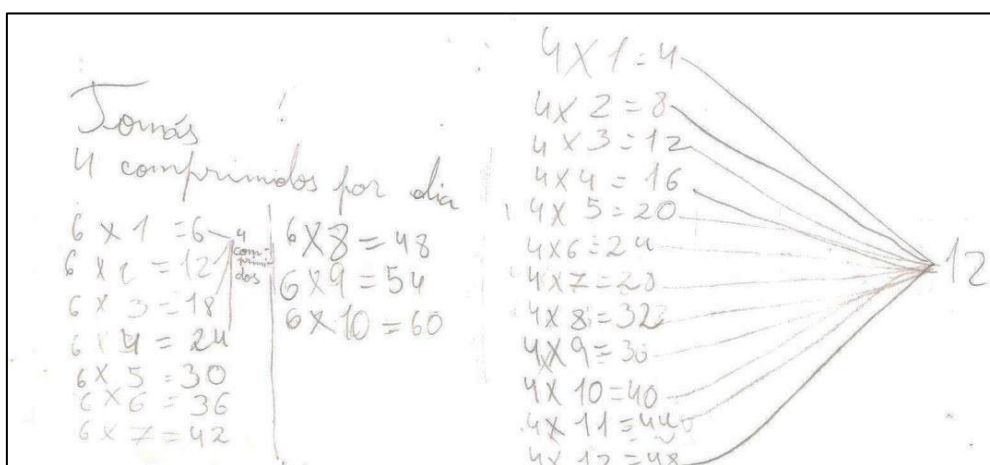
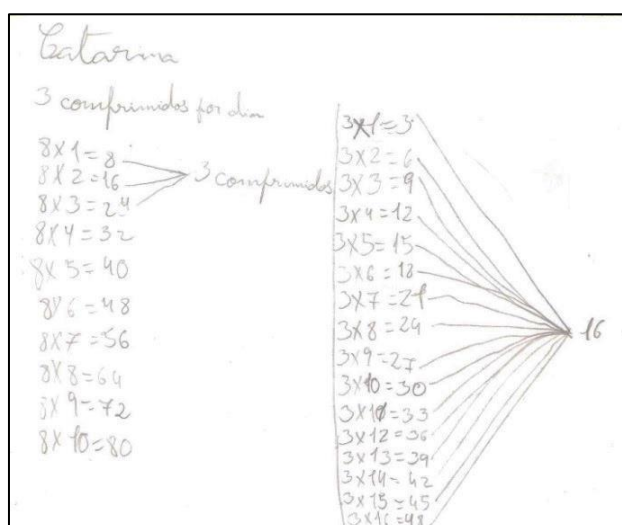


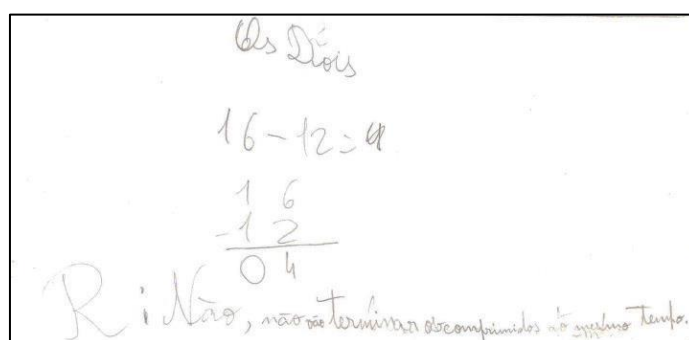
Figura 36: Estratégia das multiplicações sucessivas realizadas pelo 4.º grupo, na determinação do número de comprimidos tomados pelo Tomás em cada dia e durante quantos dias

Posteriormente utilizaram a mesma estratégia, efetuando a tabuada do oito, para descobrir quando comprimidos a Catarina tomava em cada dia, mais precisamente três comprimidos. Depois realizaram a tabuada do três para verificarem durante quanto dias a Catarina tinha de tomar os comprimidos, nomeadamente dezasseis dias. Esta estratégia pode ser observável na figura 37.



**Figura 37: Estratégia das multiplicações sucessivas realizadas pelo 4.º grupo, na determinação do número de comprimidos tomados pela Catarina em cada dia e durante quantos dias**

O quarto grupo utilizou a operação matemática da subtração para determinar se o Tomás e a Catarina iriam terminar de tomar os comprimidos ao mesmo tempo. Assim, recorrem à subtração entre os números totais de dias que a Catarina e o Tomás tinham de tomar comprimidos, ou seja, dezasseis e doze respetivamente, verificar figura 38. Esquecendo-se que o Tomás só começou a tomar os comprimidos sete dias depois da Catarina, por isso teriam de adicionar sete dias aos doze dias.



**Figura 38: Estratégia de resolução do 4.º grupo, para verificarem se o Tomás e a Catarina iriam terminar de tomar os comprimidos ao mesmo tempo**

No decorrer da apresentação da estratégia de resolução do quarto grupo (figura 36, 37 e 38) à turma, os membros do mesmo explicaram que:

4.º Grupo: Nós não pensamos como vocês. Primeiro fizemos a tabuada do seis e (pausa) como seis vezes quatro é 24, o Tomás tomava (pausa) quatro comprimidos por dia. Depois fizemos a tabuada do quatro e como quatro vezes doze é 48, então tem de tomar os comprimidos doze dias. Para a Catarina pensámos igual, mas com a tabuada do oito, que deu três, e depois com a do três que deu 16 dias.

Eu: Alguém quer fazer alguma pergunta a este grupo?

M.R. (8): Eu quero. Porque fizeram a tabuada do seis e a do oito até dez? Já tinham o resultado antes.

4.º Grupo: Fizemos estes números primeiro (apontando para o multiplicando e multiplicador) e o resultado foi depois.

Eu: E conseguiram saber se terminaram ao mesmo tempo?

4.º Grupo: Fizemos dezasseis menos doze.

R.R. (8): Não percebi.

4.º Grupo: Fizemos os dezasseis dias da Catarina menos os doze dias do Tomás.

Eu: Como o grupo anterior vocês esqueceram-se que o Tomás e a Catarina não começaram a tomar os comprimidos ao mesmo tempo. Por isso, tinham de adicionar aos doze dias do Tomás os sete dias da diferença e ficavam com dezanove. E só depois é que poderia retirar aos dezanove os dezasseis dias da Catarina e iriam obter uma diferença de três. (como já não tínhamos muito tempo para discutir esta questão, acabei por explicar a situação)

Como a fase de introdução demorou mais tempo do que o previsto, não foi possível realizar a sistematização das aprendizagens realizadas. Sendo que a sistematização desta tarefa e dos conhecimentos inerentes à mesma ter-se-ia constituído como uma mais-valia para os alunos.

### **Síntese**

De todos os problemas apresentados até então, este foi o que suscitou mais dificuldades ao nível da interpretação e compreensão da tarefa, levando-me a crer que as fragilidades apresentadas a este nível foram um obstáculo ao desenvolvimento e formulação do raciocínio matemático dos alunos. Por isso, considerei pertinente uma análise conjunta do enunciado da tarefa apresentada, tentando ao mesmo tempo não dar pistas sobre uma possível estratégia de resolução.

No entanto, ao esmiuçar-se o enunciado do problema pode estar-se a condicionar o processo de formulação do raciocínio matemático dos alunos, porque por exemplo a determinação do dia em que cada um dos meninos começou a tomar os comprimidos regulou o trabalho de quase todos os grupos. Apesar de considerar que a indicação do dia era indispensável para a resolução do problema, como ficou provado pela estratégia apresentada pelo quarto grupo, foi necessário expressá-lo porque os diversos grupos não conseguiam desenvolver o seu raciocínio através de estratégias que não se socorressem de um dia e da organização em forma de calendário.

No âmbito das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema, as mesmas recaíram sobre as representações icónicas e simbólicas. Sendo que através destas representações os alunos conseguiram expressar os seus raciocínios, mas também serviram de suporte para a justificação das suas conjeturas.

### **Tarefa: Exploração da tabuada do 7**

A tarefa de *Exploração da tabuada do 7* surgiu na sequência do cumprimento do programa em vigor e foi apresentada no dia 12 de dezembro de 2013. Esta tarefa enquadra-se no domínio dos Números e Operações e constituiu-se como uma oportunidade para os alunos compreenderem, descobrirem, justificarem e explicitarem regularidades e conjeturas na elaboração da tabuada do 7. Ao mesmo tempo que estabelecem relações numéricas entre os produtos das tabuadas já trabalhadas e os produtos da tabuada do 7, mas também a partir de outras situações. Por isso, com esta tarefa pretendia-se que os alunos apresentassem e discutissem os processos e os raciocínios matemáticos utilizados na descoberta da tabuada do 7.

A resolução desta tarefa iniciou-se com a distribuição de uma folha que continha uma tabela de dupla entrada, observar figura 39, e com a formação de pares de trabalho.

x	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

**Figura 39: Tabela de dupla entrada para exploração da tabuada do 7**

Após a distribuição e a formação dos pares, foi projetada no quadro a referida tabela ao mesmo tempo que fui explicando oralmente aos alunos a tarefa que teriam de desenvolver.

Eu: Hoje vamos construir a tabuada do 7, ... (interrompendo-me a M.R.)

M.R. (8): Mas eu já sei a tabuada do 7.

Eu: Sim. M.R. mas há colegas que não sabem. E não vamos só fazer a tabuada do 7 como fazem habitualmente as outras. Vamos explorar como se pode construir ... (novamente interrompida, mas pelo R.R.)

R.R. (8): Explorá-la, como?

Eu: Se me deixarem acabar de explicar vão ficar a perceber. Pode ser?

Todos: Sim.

Eu: Vamos explorar como se pode construir a tabuada do 7, através da descoberta de regularidades e de relações entre as outras tabuadas e os seus produtos. (algum silêncio)

C.B. (8): E como vamos fazer isso?

Eu: A primeira coisa que têm de fazer é descobrir e registar os produtos das tabuadas do 1, do 2, do 3, do 4, do 5 e do 6. E só depois é que vão verificar como podem construir a tabuada do 7 utilizando as anteriores. Bom trabalho.

Posteriormente, à explicação do trabalho a efetuar os alunos passaram à fase de realização da tarefa que tinha como intuito descobrir regularidades e relações entre números. Durante a execução da tarefa fui circulando pela sala e pelos diversos pares, de forma a averiguar os progressos e as estratégias encontradas por cada par na

descoberta das regularidades e das relações entre os produtos da tabuada do 7 e as outras tabuadas e os seus produtos.

No decorrer desta fase, pude constatar que os pares definiram as suas próprias estratégias, através da análise da regularidades existentes entre as linhas e/ou entre as colunas. Enquanto alguns pares conseguiram estabelecer relações entre a soma dos números das colunas e o produto da tabuada do 7, outros descobriram que os resultados obtidos na linha do 7 eram iguais aos da coluna do 7, etc.. Desta forma, e visto que os diferentes pares já tinham encontrado diversas estratégias para construir a tabuada do 7 e conseguiam comunicar e expressar o raciocínio matemático que utilizaram, passámos à fase de apresentação e discussão da tarefa.

Assim, nesta fase começámos por registar no quadro os produtos das tabuadas do 1, do 2, do 3, do 4, do 5 e do 6 na tabela, sendo que o preenchimento da tabela contou com o contributo de todos os alunos. Posteriormente, os diversos pares foram contribuindo e explicitando as suas descobertas aos colegas, ao mesmo que as fui registando no quadro. Deste modo, todos os alunos podiam visualizar e comparar as descobertas dos colegas com as suas, mas também pensar e conjeturar sobre as mesmas.

Eu: Depois de preenchermos uma parte da tabela. Vamos ver se as vossas descobertas nos permitem descobrir a tabuada do 7. Quem quer começar?

G.M. (8): Na linha do um é sempre mais um. (respondendo ao mesmo tempo que coloca o dedo no ar).

Eu: Como será que o G.M. e a M.M. pensaram?

M.R. (8): Na linha está um, dois, três, quatro, cinco e seis. E é sempre mais um.

Alguns: Também temos essa.

M.B. (8): Na linha do dois é mais dois, na do três mais três (...) e na do doze é mais doze.

Após a explicação do M.B. houve um momento de silêncio, como se todos estivessem a comprovar o que ele tinha afirmado. Até que o R.R. afirmou:

R.R. (8): Nas colunas também é assim.

Eu: Também é assim?

R.R. (8): Sim. É somar mais um na coluna do um, (pausa) mais dois na coluna do dois (...) e na do seis é somar mais seis.



Eu: Então, o que vocês querem dizer é que a linha e a coluna do mesmo número têm o mesmo resultado?

Todos: Sim.

S.P. (8): Pois, e a linha do sete é igual à coluna do sete.

Eu: Concordam com a S.P. disse?

Todos: Sim.

L (8): E podemos preencher já a coluna do 7. (preenchemos até ao sete vezes seis).

Eu: Muito bem. E encontraram mais regularidades ou relações entre as outras tabuadas e os seus produtos?

C.B. (8): Somámos o um com o seis e deu sete, o dois com o doze e deu catorze (...) e o doze com o 72 e deu 84.

Alguns alunos: Pois é, não tínhamos pensado nisso.

Eu: Então, somaram os resultados da coluna do um com o resultado da coluna do seis e obtiveram o resultado da coluna do sete?

C.B. (8): Sim.

Eu: Será que conseguimos encontrar mais alguma coisa, tendo em conta a ideia da C.B e do D.H.? (silêncio, até que o G.C. responde)

G.C. (8): O cinco mais o dois dá sete, (pausa) e o três mais o quatro também.

Eu: E será que ao somarmos os resultados da coluna do cinco com os da coluna do dois, e os resultados da coluna do três com os da coluna do quatro, vamos encontrar o resultado da coluna do sete? (os alunos começaram a realizar as suas contas até o T. responder)

T (8): Sim, dá a mesma coisa.

Eu: Então vamos lá terminar o preenchimento da tabela.

Ao longo da apresentação e discussão das descobertas realizadas pelos alunos das regularidades e das relações entre os produtos da tabuada do 7 e as outras tabuadas e os seus produtos, efetuámos o preenchimento de uma tabela de dupla entrada no quadro, observar figura 40. Apesar de ser possível a descoberta de outras regularidades e relações numéricas apenas registámos e analisámos as descritas anteriormente.

1	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
2	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	
3	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84		
4	28	35	42	49	56	63	70	77	84			
5	35	42	49	56	63	70	77	84				
6	42	49	56	63	70	77	84					
7	49	56	63	70	77	84						
8	56	63	70	77	84							
9	63	70	77	84								
10	70	77	84									
11	77	84										
12	84											

**Figura 40: Descoberta de regularidades e de relações entre os produtos da tabuada do 7 e as outras tabuadas e seus produtos**

Depois da apresentação das descobertas e explicitação dos raciocínios matemáticos que os diferentes pares utilizaram e do registo das descobertas, efetuámos a sistematização das aprendizagens realizadas. No decorrer deste momento revimos as regularidades encontradas e as relações numéricas entre os produtos das outras tabuadas e os produtos da tabuada do 7.

### Síntese

Ao analisar a concretização desta tarefa de exploração da tabuada do 7, posso dizer que a mesma permitiu promover o desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos, através da investigação, da descoberta, da justificação e da explicitação de regularidades e conjeturas na construção da referida tabuada. Desta forma, os alunos tiveram a oportunidade de estabelecer estratégias na procura de regularidades e relações numéricas, mas também a possibilidade de as testarem e explicarem aos colegas, ao mesmo tempo que desenvolviam o seu raciocínio matemático e a capacidade de comunicação matemática.

No decorrer desta tarefa foi evidente que os alunos já vão conseguindo desenvolver as suas aprendizagens matemáticas de forma mais autónoma e cooperativa, à medida que vão organizando, formulando e explicitando os seus raciocínios

matemáticos. Mas também foi notório que as dificuldades apresentadas habitualmente foram quase irrisórias, talvez devido ao aumento da convicção e da confiança dos alunos em relação às suas ideias e conjecturas matemáticas.

### **Tarefa: Organizar mesas**

A tarefa *Organizar mesas* (apêndice D) incidiu sobre os domínios dos Números e Operações e da Álgebra, foi aplicada no dia 13 de dezembro de 2013 e estruturada segundo os princípios inerentes ao ensino exploratório da matemática. Esta tarefa retrata uma situação com que qualquer aluno se pode deparar no seu dia-a-dia, ou seja era necessário explorar regularidades, sequências e generalizações para descobrir como se pode organizar um conjunto de mesas e sentar um determinado ou um indeterminado número de amigos.

Ao aplicar-se esta tarefa pretendia-se desenvolver o raciocínio matemático dos alunos, a comunicação matemática, a resolução de problemas, o cálculo mental e o pensamento algébrico, através da utilização de diferentes formas de representação. Porque estas representações devem servir de apoio à análise, à comunicação e à justificação do raciocínio matemático utilizado.

A aplicação desta tarefa iniciou-se com a apresentação do seu enunciado à turma, previamente organizada em pequenos grupos. Assim, a apresentação do enunciado da tarefa efetuou-se através da sua projeção no quadro e da sua leitura em voz alta pela M.S.. Depois da leitura do enunciado solicitei a um aluno para explicar por palavras suas o que a M.S. tinha acabado de ler.

Eu: Será que alguém é capaz de explicar, sem ler o enunciado, o que a M.S. acabou de ler? L. és capaz de explicar por palavras tuas?

L (8): Acho que sim. O Manel e o pai estão a arranjar umas mesas para uma festa e (pausa) em cada lado podem ficar dois amigos e neste lado (apontado para a sua mesa) só pode ficar um ...

S.P. (8): Qual lado não vi?

Eu: L. podes vir explicar na imagem que está no quadro para que todos vejam?

L (8): Sim. (responde ao mesmo tempo que se levanta).

Eu: O L. estava a dizer que o Manuel e o pai estavam a organizar umas mesas para uma festa de aniversário e que ... (o L. continua a explicação socorrendo-se da imagem projetada no quadro)

L (8): Neste lado e neste das mesas podem ficar dois amigos e nestes só podem ficar um amigo. E ao juntar duas mesas, com está aqui, podiam ficar dez amigos e se tivesse três mesas catorze amigos.

Eu: Podes sentar-te. Alguma dúvida em relação ao que o L. disse?

Todos: Não.

Eu: Mas eu tenho. Quantos amigos poderiam ficar numa mesa? I. ...

I (8): Numa mesa, podiam ficar (pausa) um, dois, três, quatro, cinco e seis. Seis amigos.

Eu: Então, se podem ficar seis amigos numa mesa. Porque é que o Manuel só conseguiu sentar dez amigos em duas mesas, deviam dar para doze? M.B. ...

M.B. (8): Não. Porque as mesas estavam juntas e ninguém se pode sentar ali no meio.

Eu: Assim já percebi. E vocês perceberam?

Todos: Sim.

Eu: Se todos perceberam, vamos verificar se em três mesas podemos sentar catorze amigos. S.V., podes vir ao quadro confirmar se podemos mesmo sentar os catorze amigos.

S.V. (8): Sim.

No quadro, a S.V. mostrou-se indecisa em relação à continuação da imagem das duas mesas ou se tinha de fazer outra nova. Como é uma aluna que tem algumas dificuldades em expressar as suas dúvidas disse-lhe:

Eu: S.V. podes acrescentar a mesa nessa imagem.

S.V. (8): Sim. Mas (pausa) não consigo tirar esta daqui (apontando para a cadeira que iria ficar entre uma das mesas da imagem e a mesa que tinha acabado de desenhar).

T (8): Eu na minha folha fiz uma cruz.

Alguns alunos: Eu também.

Eu: S.V. podes seguir o exemplo dos teus colegas. Achas que ao colocares uma cruz por cima dessa cadeira, já nos consegues dizer se podemos sentar os catorze amigos?

S.V. (8): Um, dois, (...), catorze. Sim, dá para catorze.

Eu: Será que não existirá uma forma mais rápida de contar as cadeiras? Se sim, como?

M.R. (8): As duas mesas têm dez, mas como juntamos outra mesa temos de tirar uma e juntar só cinco da outra mesa.

Eu: Esta era uma hipótese, mas há mais. Vamos ver se as conseguem descobrir ao resolverem as questões da tarefa. Como sempre podem utilizar tabelas, desenhos, esquemas ou qualquer outra forma de representação. Bom trabalho.

Após a apresentação da tarefa, os alunos começaram a resolver a mesma. Nesta fase de concretização da tarefa fui circulando pelos diversos grupos, de forma a perceber como estavam a trabalhar e a compreender a tarefa, a verificar que estratégias utilizaram e tentar perceber os raciocínios matemáticos seguidos por cada um.

Sendo de salientar que na fase de concretização da tarefa a maior dificuldade que surgiu foi a escrita da regra geral, apesar de os diferentes grupos a aplicarem muito facilmente em quase todas as questões anteriores. Esta situação gerou-se porque alguns grupos mostravam-se reticentes em colocar palavras entre os símbolos matemáticos, como pode ser visível no diálogo seguinte:

L (8): Professora, temos dúvidas na última questão.

Eu: Qual é a vossa dúvida?

L (8): Não sabemos como fazer?

Eu: O que é que vocês já sabem?

L (8): Sabemos que temos de fazer 4 vezes um determinado número de mesas mais dois.

Eu: Então qual é a dúvida?

S.P. (8): Precisamos de fazer contas?

Eu: Não é preciso fazer contas. Mas têm de explicar como proceder para calcular o número de amigos que se podem sentar num determinado número de mesas.

S.P. (8): Eu bem disse que não era preciso fazer contas. (olhando para os colegas de grupo)

L (8): Então é só escrever o que eu disse.

De realçar que como nesta turma ainda não tinha sido explorada a escrita da generalização com recurso a uma expressão algébrica, preferi não abordar esta questão.

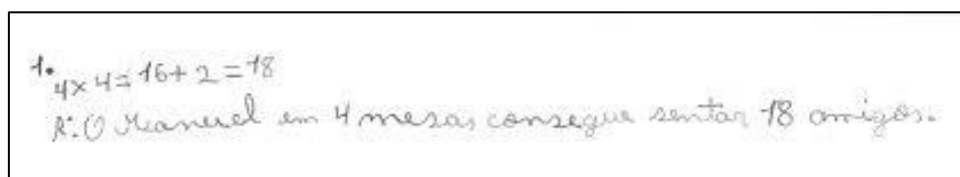
Porque o facto de conseguirem expressar a generalização através de linguagem natural já foi muito importante e gratificante.

Ainda no decorrer da fase de realização da tarefa pude constatar que os diferentes grupos recorreram a estratégias e modos de representação muito idênticos para responderem às diferentes questões da tarefa e expressarem a regra geral. Apenas um dos grupos encontrou uma estratégia diferente, mas não teve tempo para escrever a regra geral.

As representações utilizadas pelos diferentes grupos não divergiram das apresentadas nas tarefas realizadas anteriormente. Logo, o tipo de representações utilizadas nesta tarefa para sustentar o raciocínio de cada grupo foram as representações icónicas (desenhos e tabelas) e as representações simbólicas (linguagem e símbolos matemáticos).

No entanto, como as estratégias e as representações utilizadas pelos diversos grupos foram muito parecidas, a fase de apresentação também foi um pouco diferente do habitual. Assim, comecei por explicar que não iríamos apresentar todos os trabalhos como tínhamos feito nas outras tarefas, porque as representações eram muito parecidas e iria tornar-se muito repetitivo estarmos a ver sempre a mesma coisa.

Neste sentido, começamos com a apresentação e discussão das resoluções efetuadas pelos grupos. No que se refere à primeira pergunta onde os alunos tinham de determinar quantos amigos se podiam sentar em quatro mesas, dois grupos recorreram a uma representação simbólica, através da utilização de símbolos matemáticos. Sendo que estes símbolos matemáticos pretendiam expressar as quatro mesas, os quatro lugares em cada lado da mesa, os dois lugares do topo das mesas e o resultado final, observar figura 41.



The image shows a handwritten mathematical solution. It starts with a small '4.' followed by the equation  $4 \times 4 = 16 + 2 = 18$ . Below this, it says 'R: O Manuel em 4 mesas consegue sentar 18 amigos.' The handwriting is in blue ink on a white background.

**Figura 41: Resposta dada por um dos grupos à primeira questão, através da utilização de símbolos matemáticos**

Ao ser mostrada a primeira resolução à turma (figura 41), os elementos do grupo referiram que:

Grupo: Vimos a imagem da ficha e fizemos.

Eu: Sim. Mas podem explicar como pensaram e fizeram?

Grupo: Fizemos quatro vezes quatro igual a dezasseis.

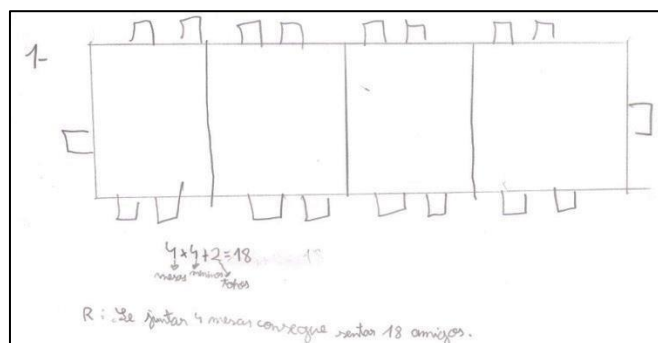
Eu: E o que representa cada um dos quatros e o dezasseis?

Grupo: Um quatro é o número de mesas e o outro é o número de amigos (pausa) que se podem sentar em cada mesa.

Eu: Podem continuar.

Grupo: E depois juntamos dois ao dezasseis, (pausa) o dois é os amigos que ficam na ponta das mesas e deu dezoito amigos.

No que respeita ainda à primeira pergunta, três grupos optaram pelo desenho esquemático das quatro mesas e das respetivas cadeiras, que indicavam o número de amigos que se poderiam sentar, mas também a uma expressão matemática para fundamentarem a sua resposta, onde é perceptível a explicitação do que cada número representava, mais concretamente, as quatro mesas, os quatro amigos que se podiam sentar de lado e os dois nos topos, verificar figura 42.



**Figura 42: Resposta dada por outro grupo à primeira questão, através da utilização de um desenho esquemático e uma expressão matemática**

Ao exibir outra forma de resolução (figura 42) da primeira questão, pedi ao grupo que explicasse à turma como tinha pensado:

Eu: Temos aqui outra estratégia de resolução, vamos ver se é mais clara. Podem explicar como fizeram?

Grupo: Nós primeiro desenhámos as quatro mesas com as cadeiras. Depois fizemos as contas e escrevemos o que cada número era.

M.R. (8): Não consigo ver o que está escrito.

Grupo: É quatro mesas vezes quatro amigos mais os dois topos, igual a dezoito.

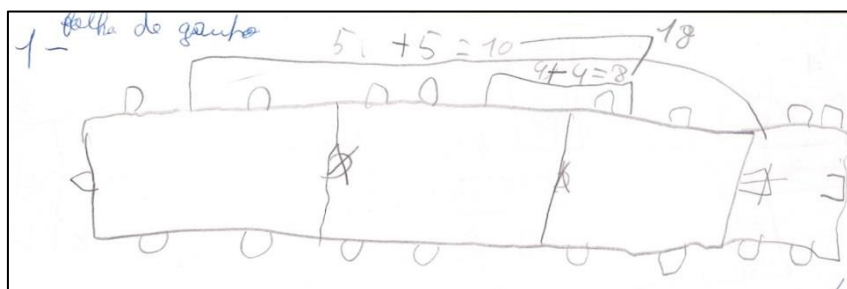
Eu: Conseguiram perceber ou há alguma dúvida?

M.B. (8): Assim já percebi, porque o meu grupo não fez assim.

Eu: Eu sei M.B.. Vamos já ver a tua resolução.

(...)

Ainda relativamente à primeira questão, um dos grupos apresentou uma estratégia diferente dos restantes, onde expressava as suas ideias através de um desenho esquemático e de símbolos matemáticos que completariam o seu raciocínio. Assim sendo, no desenho esquemático estavam representadas as quatro mesas e as cadeiras, que indicavam o número de amigos que se poderiam sentar, mas também as cadeiras entre as mesas que se encontravam sinalizadas com uma cruz. E depois associaram as mesas que se encontravam nas pontas como tendo cinco cadeiras cada uma, bem como as mesas do centro que apenas tinham quatro cadeiras cada uma, averiguar figura 43.



**Figura 43: Resposta dada por outro grupo à primeira questão, através da utilização de um desenho esquemático e símbolos matemáticos**

Ao ser projetada a resolução que expressava uma estratégia diferente (figura 43) das restantes, pedi ao grupo que explicasse à turma como realizaram o seu raciocínio:

Grupo: Nós primeiro fizemos as quatro mesas com as cadeiras, depois riscámos as que estavam no meio. Juntámos as duas mesas com cinco cadeiras e



duas mesas com quatro, (pausa) depois somámos e deu dez e oito, que somámos e deu dezoito.

Eu: Uma estratégia diferente das apresentadas anteriormente. Conseguiram perceber como este grupo pensou?

Todos: Sim.

R.R. (8): Eles juntaram as cadeiras que estavam nas mesas da ponta e depois as das mesas do meio. E depois somaram outra vez.

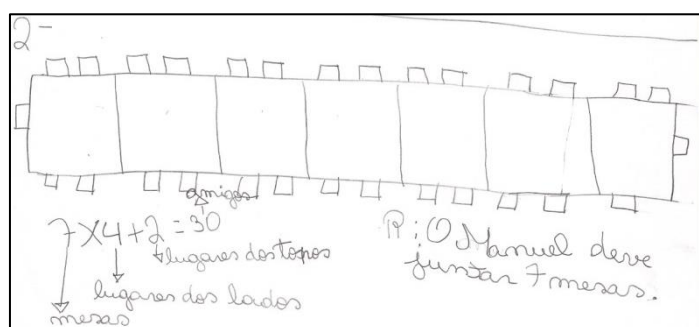
No que se refere à segunda pergunta onde os alunos tinham de determinar quantas mesas seriam precisas para sentar 30 amigos, os grupos que tinham recorrido na questão anterior à representação simbólica, através da utilização de símbolos matemáticos, voltaram a fazê-lo. Sendo que estes símbolos matemáticos pretendiam expressar as sete mesas, os quatro lugares em cada lado da mesa, os dois lugares do topo das mesas e o resultado final, observar figura 44.



The image shows a handwritten mathematical solution. The first line is the equation  $2 \cdot 7 \times 4 = 28 + 2 = 30$ . The second line is a Portuguese sentence: "R: São precisas 7 mesas para sentar 30 amigos."

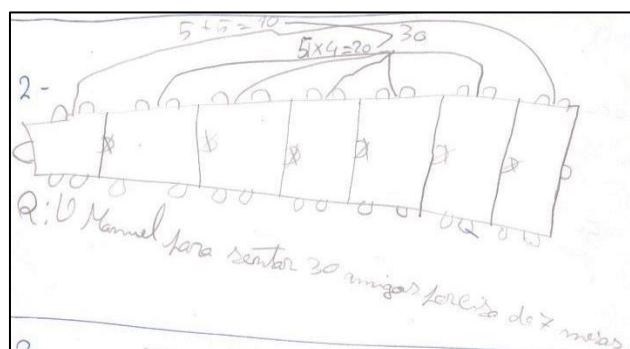
**Figura 44: Resposta dada por um dos grupos à primeira questão, através da utilização de símbolos matemáticos**

Os grupos que tinham recorrido ao desenho esquemático e à expressão matemática na primeira pergunta voltaram a utilizar esta estratégia, à exceção de um. Assim, esses dois grupos optaram pelo desenho esquemático das sete mesas e das respetivas cadeiras, que indicavam o número de amigos que se poderiam sentar, bem como o recurso a uma expressão matemática para complementar o seu raciocínio e onde é explicitado o que cada número representava, mais concretamente, as sete mesas, os quatro lugares dos lados, os lugares dos topos e os amigos que se podiam sentar, verificar figura 45.



**Figura 45: Resposta dada por outro grupo à segunda questão, através da utilização de um desenho esquemático e uma expressão matemática**

Já o grupo que apresentou uma estratégia diferente dos restantes na concretização da primeira questão voltou a expor as suas ideias através de um desenho esquemático e de símbolos matemáticos. No desenho esquemático, estavam representadas as sete mesas e as respetivas cadeiras, e voltou a estar patente as cadeiras entre as mesas. Já a associação entre as mesas que se encontravam nas pontas, bem com a união das mesas do centro mantiveram a mesma organização, observar figura 46.



**Figura 46: Resposta dada por outro grupo à segunda questão, através da utilização de um desenho esquemático e símbolos matemáticos**

Relativamente, ao grupo que utilizou uma estratégia diferente na concretização da primeira e da segunda questão elegeu a construção de uma tabela para apresentar os seus dados. Sendo que os dados desta tabela não permitem relacionar o número de mesas com o total de pessoas sentadas à volta das mesmas, uma vez que numa mesa podem sentar-se seis pessoas, em duas dez pessoas, em três catorze, etc. (continuação tendo em conta a regularidade de mais quatro em relação ao número anterior). Porque nesta tabela verifica-se a estratégia apresentada pelo grupo que utilizou o desenho

esquemático e os símbolos matemáticos, onde na primeira mesa podem estar cinco pessoas, depois nas outras estão mais quatro pessoas e na última voltam a estar mais cinco pessoas, observar figura 47.

mesas	1	2	3	4	5	6	7
amigos	5	19	13	17	21	25	30

**Figura 47: Resposta dada por outro grupo à segunda questão, através da utilização de uma tabela**

Ao ser mostrada a tabela (figura 47) apresentada por um grupo para responder à segunda questão, solicitei que explicasse à turma como tinham pensado:

Grupo: Vimos no desenho da pergunta anterior que na primeira mesa estava cinco pessoas, nas outras só estavam quatro e na última estavam mais cinco. E fizemos cinco, mais quatro, mais quatro, (...) e mais cinco.

Eu: Será que já vimos alguma coisa parecida com esta? (silêncio)

M.B. (8): É parecida com a nossa, (pausa) mas nós temos o desenho. (após esta resposta voltei a projetar a resolução do grupo do M.B., para os alunos verificarem)

Alguns alunos: Pois é.

Eu: Conseguiram perceber como este grupo pensou?

Todos: Sim.

T. (8): Mas numa mesa podem ficar seis pessoas e não cinco.

Eu: Consegues explicar o que estás a dizer T.?

T. (8): Sim. Uma mesa dá para seis pessoas, duas para dez (...) e sete para 30. Fizemos assim para a do 100.

Eu: Alguém não percebeu o que o T. explicou?

C.B. (8): É como está escrito na folha.

Na terceira questão pretendia-se saber quantos amigos se podiam sentar em 50 mesas, quatro dos cinco grupos recorreram à expressão matemática que utilizaram na primeira e/ou na segunda questão, como se pode ver na figura 48. Enquanto, o outro optou por seguir também a estratégia utilizada nas questões anteriores pensando que nas

duas mesas da ponta podiam ficar cinco pessoas e nas outras quatro, por isso efetuou a multiplicação de 48 por cinco e de dez por cinco, adicionando depois os produtos dessas multiplicações, verificar figura 49.

3 -  $50 \times 4 + 2 = 202$

↓ lugares dos lados  
↓ lugares dos topos  
↓ mesas

R: Com 50 mesas juntas podem sentar-se 202 amigos.

**Figura 48: Resposta dada por um dos grupos à terceira questão, através da utilização de uma expressão matemática**

3 -

$48 \times 4$        $5 \times 2 = 10$

$\begin{array}{r} 48 \\ \times 4 \\ \hline 192 \end{array}$        $\begin{array}{r} 5 \\ \times 2 \\ \hline 10 \end{array}$

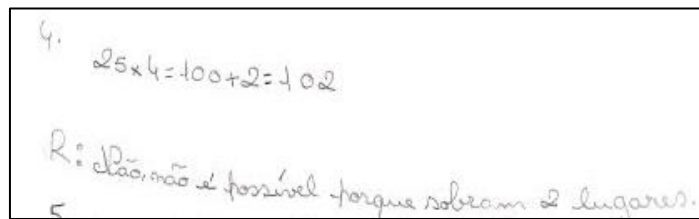
$192 + 10 = 202$

**Figura 49: Resposta dada por outro grupo à terceira questão, através da utilização de símbolos matemáticos**

Ao ser exposta no quadro a estratégia de resolução apresentada na figura 49, o grupo explicou que:

Grupo: Se tínhamos 50 mesas, duas davam para cinco pessoas e as outras 48 para quatro. Depois fizemos as contas de vezes e somámos e deu-nos 202.

No que se refere à quarta questão pretendia-se saber se seria possível sentar 100 amigos sem deixar nenhum lugar vazio, três grupos recorreram à expressão matemática que utilizaram nas questões anteriores, como se pode ver na figura 50.



4.  $25 \times 4 = 100 + 2 = 102$   
R: Não, não é possível porque sobram 2 lugares.  
5

**Figura 50: Resposta dada por um dos grupos à quarta questão, através da utilização de uma expressão matemática**

Ao ser apresentada no quadro uma das respostas à questão quatro, observar figura 50, pedi aos alunos para elucidarem os colegas sobre a forma como tinham pensado:

Eu: Um dos grupos que apresentou esta estratégia de resolução pode explicar como pensou?

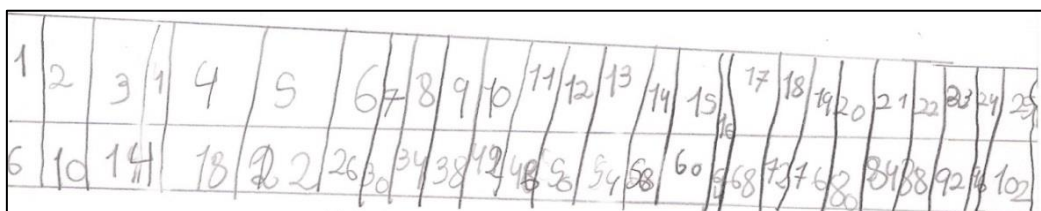
Grupo 1: Como na outra pergunta 50 vezes quatro dava 200, metade de 50 é (pausa) 25 e metade de 200 é 100.

Grupo 2: Nós também pensámos assim e depois fizemos 25 vezes quatro que dá 100, (pausa) mais dois e deu 102.

Eu: Então é ou não possível sentar os 100 amigos sem deixar nenhum lugar vazio? E porquê?

Grupo 1: Não é possível, sobram dois lugares.

Relativamente, ainda à quarta questão, dois grupos preferiram construir uma tabela para representar as suas ideias e a relação que existe entre o número de mesas (primeira linha da tabela) e o total de pessoas que se podem sentar à volta das mesmas (segunda linha da tabela), observar figura 51.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100

**Figura 51: Resposta dada por outro dos grupos à quarta questão, através da utilização de uma tabela**

Ao ser mostrada a tabela apresentada na figura 51, um dos grupos que recorreu à mesma estratégia referiu:

Grupo: Nós fizemos para a pergunta quatro, para a do cem, esta tabela. Custou muito mas conseguimos.

Eu: E como pensaram e fizeram?

Grupo: Fomos pondo as mesas e os amigos que se podiam sentar.

Eu: E porque pararam na vigésima quinta mesa?

Grupo: Porque já tínhamos 102 amigos e pedia 100. E ficava com dois lugares vazios.

A quinta e última questão da tarefa tinha como propósito a apresentação da regra geral, para calcular o número de amigos que se podem sentar num determinado número de mesas. Como já referido esta questão gerou algumas dificuldades nos grupos, devido ao facto de terem de se expressar através de palavras e símbolos matemáticos. Sendo observável na figura 52, uma das respostas dadas. É de salientar que apenas um dos grupos não conseguiu chegar à generalização.

$$4 \times \text{número de mesas} + 2 = \text{Total de amigos.}$$

↓  
amigos

↓  
2 por de mesas

**Figura 52: Generalização encontrada por um dos grupos**

Depois da apresentação e discussão das várias questões da tarefa realizámos a sistematização das aprendizagens realizadas. Apesar de termos pouco tempo para a sistematização, ainda conseguimos verificar que à medida que vamos acrescentando mesas o número de amigos que se podem sentar é sempre mais quatro do que o número anterior, identificando-se aí uma regularidade.

Mas também verificámos que a regra que encontramos no final da tarefa serve para encontrar o número total de amigos que se podem sentar num determinado número de mesas.

## **Síntese**

Ao analisar o desenrolar desta tarefa posso afirmar que o trabalho desenvolvido, até ao momento, permitiu que os alunos conseguissem compreender mais facilmente o enunciado e revelarem mais facilidade na concretização da tarefa. Mas também conseguiram organizar, expressar e justificar os seus raciocínios matemáticos, bem como pensar e compreender os raciocínios e estratégias apresentadas pelos colegas.

Relativamente às estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das diversas questões da tarefa, as mesmas recaíram sobre as representações icónicas e simbólicas. Sendo que apesar de não existir uma grande variedade de estratégias, as mesmas permitiram que os alunos conseguissem exprimir os seus raciocínios e ideias matemáticas, mas também ajudaram na fase de apresentação das suas resoluções e conjeturas.

No que respeita às dificuldades apresentadas pelos alunos na concretização desta tarefa, as mesmas revelaram-se quando foi necessário expressarem o seu raciocínio matemático através do registo escrito da regra geral. Porque ainda não têm interiorizado o conceito de generalização e muito menos que uma generalização pode ser escrita com recurso a uma expressão algébrica. Mas estas dificuldades foram superadas através da escrita da regra geral em linguagem natural.





## **CAPÍTULO 5**

### **Conclusão**

Neste último capítulo pretende-se sistematizar as ideias fundamentais da investigação desenvolvida nos dois contextos educativos, no Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico, mas também apresentar as principais conclusões decorrentes da investigação de modo a dar resposta às questões formuladas inicialmente, no âmbito da investigação ao nível do desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças e dos alunos.

Na última secção deste capítulo, a sistematização das ideias e as conclusões da investigação surgem como auxílio à elaboração das considerações finais onde se pretende efetuar uma leitura transversal dos objetivos da investigação para o Pré-Escolar e para o 1.º Ciclo de Ensino Básico, bem como estabelecer uma comparação entre os dois contextos educativos no que se refere à investigação realizada, às aprendizagens efetuadas, às dificuldades sentidas ao longo dos momentos de observações e de intervenção, e à importância do desenvolvimento do raciocínio matemáticos nos primeiros anos de escolaridade.

### **Síntese da investigação**

Nesta secção do capítulo 5 apresenta-se uma síntese à investigação realizada, onde são focados os objetivos, as questões iniciais, o tipo de metodologia utilizada, as datas em que se realizaram a recolha dos dados e a forma como se processou a análise dos mesmos. Assim, através desta síntese procura-se compreender como decorreu a

investigação, mais aprofundadamente o desenvolvimento do raciocínio matemáticos das crianças e dos alunos na resolução das tarefas propostas.

Neste sentido, e como referido anteriormente, a presente investigação foi desenvolvida tendo em conta os objetivos de compreender, analisar e refletir como as crianças do Pré-Escolar e do 1.º Ciclo do Ensino Básico desenvolvem e expressam o seu raciocínio matemático ao resolverem diversas situações problemáticas, em contexto educativo. Esta capacidade transversal, o raciocínio matemático, deve ser encarada pelos educadores/professores como uma capacidade que todas as crianças/alunos devem ter a oportunidade de desenvolver ao longo do seu processo de ensino-aprendizagem da matemática (Duarte, 2008). Desta forma, procuro dar resposta às três questões seguintes, formuladas para orientar a investigação:

- Que aspetos do raciocínio matemático revelam os alunos?
- Que dificuldades evidenciam os alunos no que se refere ao raciocínio matemático?
- Que estratégias e tipos de representações utilizam os alunos para explicitar o seu raciocínio matemático?

Ao desenvolver-se esta investigação teve-se em consideração os objetivos e as questões definidas inicialmente, ao mesmo tempo que se procurou sustentar a referida investigação tendo como base a análise de referenciais teóricos que abordam as temáticas a investigar. Assim, a revisão de literatura contempla uma abordagem ao raciocínio matemático nos primeiros anos, no que se refere à compreensão do raciocínio matemático como capacidade transversal, às definições e tipos de raciocínio matemático defendidas por diversos autores e/ou investigadores, bem como a importância da resolução de problemas, das representações e da comunicação no desenvolvimento do raciocínio matemático. Mas também é feita uma abordagem ao desenvolvimento do raciocínio matemático com os alunos, no que respeita à natureza das tarefas e às metodologias utilizadas na sala de aula, ou seja à “cultura da sala”. E ainda são abordados aspetos relacionados com as orientações curriculares sobre o raciocínio matemático, nomeadamente sobre a sua relevância no ensino-aprendizagem da matemática, tanto a nível internacional, como a nível nacional.

Esta investigação foi desenvolvida através da utilização da metodologia de investigação-ação que permitiu a análise, compreensão, reflexão e orientação da minha prática educativa, conhecer e compreender os dois contextos educativos ao nível do raciocínio do matemático das crianças e dos alunos, bem como dar resposta às questões que orientaram esta investigação. Tendo em conta as características apresentadas por esta investigação, a mesma pode ser enquadrada numa metodologia de natureza qualitativa.

A investigação supracitada decorreu em dois contextos educativos distintos e em períodos diferentes onde foram implementadas inúmeras tarefas, que tinham o intuito de desenvolver o raciocínio matemático das crianças e dos alunos ao mesmo tempo que se pretendia inculcar a metodologia do ensino exploratório da matemática. Portanto, o desenvolvimento da investigação decorreu, em contexto de sala de aula, no segundo semestre do ano letivo 2012/2013 e no primeiro semestre do ano letivo 2013/2014, mais concretamente numa sala do Pré-Escolar do Centro Infantil Irene Lisboa e numa turma do 3.º ano de escolaridade da Escola Básica do Bairro do Frei Aleixo.

Nestes dois períodos em que decorreu a investigação foi necessário efetuar uma recolha de dados que se baseou na observação direta, no registo de notas diárias, no registo escrito dos alunos, nas fotografias, nas gravações áudio e no caderno de formação (reflexões e planificações). Após esta recolha de dados efetuou-se a análise dos mesmos, este procedimento tinha como intuito averiguar e perceber o trabalho executado pelas crianças e pelos alunos no âmbito do desenvolvimento do seu raciocínio matemático, avaliar as aprendizagens das crianças e dos alunos, e melhorar as minhas práticas educativas. Mas também se pretendia que esta análise se apoiasse nos objetivos e nas questões da investigação, e na revisão de literatura que suportaram a investigação.

A recolha e análise dos dados permitiram uma primeira seleção das tarefas realizadas ao longo da investigação que ajudaram e contribuíram de forma mais evidente para o desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças e dos alunos. E quando se realizou uma análise mais profunda dos dados, foi possível definir critérios e realizar a seleção de cinco tarefas de cada um dos contextos, com o intuito de serem apresentadas e interpretadas neste relatório.

## Conclusões da investigação

Nesta outra secção do capítulo 5 apresenta-se e procura-se dar resposta a cada uma das questões formuladas no início da investigação.

### Que aspetos do raciocínio matemático revelam os alunos?

#### Pré-Escolar

No que diz respeito aos aspetos do raciocínio matemático que as crianças revelam no pré-escolar pode dizer-se que as experiências diárias contribuíram para o desenvolvimento das suas ideias prévias. Assim, ao proporcionar o envolvimento das crianças em tarefas que permitiam o estabelecimento de conexões com os seus conhecimentos, foi possível verificar que elas foram adquirindo novas ideias e alargando o seu raciocínio matemático. Desta forma, as crianças foram organizando, explicitando e desenvolvendo o seu raciocínio matemático através da manipulação de materiais e/ou objetos, bem como da tentativa de registar o mesmo por escrito, ou seja através de representações ativas, de representações icónicas e de representações simbólicas.

Seguidamente, passo a analisar as diversas tarefas apresentadas às crianças durante a investigação de modo a verificar como estas foram evoluindo ao nível do desenvolvimento do seu raciocínio matemático, revelando diversos aspetos.

Na tarefa da *Máquina de números* o desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças foi sendo desenvolvido através da exploração da referida máquina e consequentemente dos cartões que lhes estavam associados. Desta forma, as crianças adquiriram a noção de número, perceberam as relações existentes entre os outros números e conseguiram conjeturar que um número pode ser apresentado como a soma de outro(s). Porque a exploração e discussão dos resultados possibilitou a estruturação, a explicitação e o desenvolvimento do raciocínio matemático de cada criança, num clima de apoio, cooperação e partilha de ideias e conhecimentos matemáticos.

A tarefa de *Organização e elaboração de um gráfico de barras* permitiu às crianças perceberem como se processava a recolha e organização de dados através de um gráfico. Ao mesmo tempo que possibilitou o desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças, uma vez que por meio de exemplos das diversas etapas as crianças conseguiram perceber os procedimentos a efetuar e explicar as suas constatações e ideias matemáticas aos colegas.

A sequência de tarefas que permitiram *Descobrir as formas geométricas*, constituíram-se como fundamentais na organização, formulação e desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças. Pois, o recurso a diferentes tipos de tarefas estimulou as crianças a partilhar conhecimentos prévios, aprendizagens, raciocínios e experiências no sentido de clarificarem o que perceberam aos colegas, à medida que desenvolveram e compreenderam conteúdos matemáticos relacionados com a temática das figuras geométricas.

Na tarefa *Trabalhar a matemática com tampinhas de garrafas* as crianças tiveram de classificar e agrupar tendo em conta as características dos objetos apresentados, tampas de garrafas de várias cores. No decorrer deste processo as crianças foram confrontadas com diferentes situações (por exemplo: de tampas amarelas terem desenhos e outras não, e de as cores dos desenhos das tampas verdes serem diferentes) de modo a estimulá-las a pensar sobre o raciocínio apresentado por si ou pelos colegas, mas também a explicitar e debater sobre os mesmos, no sentido do desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

A concretização da tarefa onde se pretendia estabelecer a *Relação entre números cardinais e as respetivas quantidades* permitiu o desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças através da consolidação de conhecimentos matemáticos relacionados com o sentido do número e de relações de “mais um que”, “mais dois que”, “menos um que”, “menos dois que”, etc., à medida que decorria a exploração da uma história “Mais uma ovelha”. Mas a concretização dos cartões também auxiliou as crianças no desenvolvimento do seu raciocínio matemático, porque foi possível o estabelecimento de conexões entre o número e a quantidade, e vice-versa, através da construção de relações mentais entre os números e quantidades sem recurso à contagem. Ao mesmo tempo que as crianças interagem, debatem processos e soluções, e

pensavam sobre os raciocínios e ideias matemáticas apresentadas por si e pelos colegas, como foi o caso na determinação do número total de maçãs necessário para colocar nas quatro árvores do cartão do quatro.

### **1.º Ciclo do Ensino Básico**

Pela análise dos dados recolhidos, mais concretamente no que respeita aos aspetos do raciocínio matemático que os alunos revelam no 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, posso dizer que a diversidade de tarefas matemáticas e a metodologia de trabalho utilizada contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio matemático de cada aluno. No entanto, o mesmo não foi fácil porque os métodos de trabalho da turma não se coadunava com o que estava a tentar implementar e a obrigatoriedade de ir ao encontro dos conteúdos programáticos que estavam definidos, restringiram em parte a minha perceção de como os alunos desenvolviam o seu raciocínio matemático.

Neste sentido, e de forma a contornar esta situação planeei e desenvolvi tarefas que fossem de encontro aos conteúdos programáticos a serem trabalhados na altura e às premissas do ensino exploratório da matemática. Deste modo, os alunos da turma foram organizando, explicitando e desenvolvendo o seu raciocínio matemático através da investigação e exploração das tarefas, da utilização de diversas estratégias, das representações icónicas e simbólicas, da comunicação e reflexão sobre as resoluções apresentadas por si ou pelos colegas.

De seguida efetuei uma análise das diversas tarefas apresentadas, aos alunos da turma do 3.º ano, durante a investigação de modo a verificar como estas foram evoluindo ao nível da elaboração, da formulação e do desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

Na tarefa *Os caminhos mais curtos* os alunos começaram por encontrar os caminhos recorrendo a tentativa-erro e, após investigarem e analisarem os caminhos já encontrados conseguiram organizar as suas ideias. Ao mesmo tempo que formulavam conjecturas e desenvolviam o seu raciocínio matemático, através da aplicação das estratégias que tinham encontrado e da confrontação com as estratégias encontradas pelos colegas.

A questão analisada na tarefa d' *A festa de São Martinho* e que tinha o intuito dos alunos descobrirem e investigarem quantos abraços dariam o João e os amigos, só se tornou mais perceptível pelos alunos após a exemplificação da mesma. Desta forma, esta exemplificação constituiu-se como fundamental para os alunos, porque permitiu a compreensão da tarefa e serviu de apoio na estruturação, na justificação e no desenvolvimento do raciocínio matemático, tanto a nível oral como escrito, mas também ao nível da aquisição e explicitação de conceitos e/ou conteúdos matemáticos.

A tarefa *Cálculo para os meninos* necessitou de uma análise conjunta do enunciado, o que poderá ter condicionado o processo de formulação e desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Já que quase todos os grupos de trabalho socorreram-se de um dia específico para organizarem, enunciarem e desenvolverem o seu raciocínio matemático. O que no meu entende se deveu à não compreensão dos aspetos essenciais do enunciado e à acomodação ao que já se sabe.

Na tarefa de *Exploração da tabuada do 7* foi notório que os alunos conseguiram desenvolver o seu raciocínio matemático através da investigação, da descoberta, da comunicação e da justificação das regularidades e das conjeturas que permitiram a construção da tabuada. Tornando-se evidente que os alunos de forma mais independente e colaborativa adquiriram capacidades fundamentais para desenvolver os seus raciocínios matemáticos.

O desenvolvimento da tarefa *Organizar mesas* constituiu-se como quase perfeita, uma vez que não se pode dizer que existem tarefas perfeitas. Porque o trabalho desenvolvido até então no âmbito da investigação e do ensino exploratório da matemática permitiu que os alunos conseguissem compreender o problema e as suas especificidades. Mas também possibilitou que organizassem, expressassem, justificassem os seus raciocínios matemáticos, ao mesmo tempo que pensavam e compreendiam os raciocínios e estratégias apresentadas pelos outros grupos.

Relativamente às tarefas apresentadas durante a investigação posso dizer que os alunos à medida que iam desenvolvendo as referidas tarefas foram questionando, conjeturando, testando e validando as suas resoluções, o que permitiu a aquisição de bases e estruturas cada vez mais ricas, sólidas e complexas ao nível do desenvolvimento do seu raciocínio matemático. Porque inicialmente os alunos desenvolviam as tarefas

através do método de tentativa-erro; depois começaram a realizar as tarefas após a exemplificação da situação descrita; a seleção das informações essenciais do enunciado foi o passo seguinte, o que permitiu uma melhor compreensão do mesmo; até que chegámos ao momento em que os alunos já conseguiam de forma autónoma e/ou cooperativa organizar, expressar e desenvolver o seu raciocínio matemático, através da confrontação com as ideias dos colegas.

### **Que dificuldades evidenciam os alunos no que se refere ao raciocínio matemático?**

#### **Pré-Escolar**

No decorrer do desenvolvimento das diversas tarefas no pré-escolar as crianças demonstraram dificuldades na organização, na comunicação e na confirmação do seu raciocínio matemático. Porque as crianças não estavam familiarizadas com esta forma de trabalho, conseguindo apesar de com alguma dificuldade exprimir as suas ideias matemáticas através da linguagem oral. De forma, a superar as suas dificuldades ao nível do desenvolvimento do raciocínio matemático, tal como referido anteriormente, as crianças recorreram à manipulação de materiais e/ou objetos para verificar, comprovar e/ou confirmar as suas ideias matemáticas.

Neste sentido, passo a fazer referência às dificuldades evidenciadas pelas crianças no que se refere ao raciocínio matemático na realização das tarefas apresentadas durante a investigação.

Na tarefa da *Máquina de números* as crianças demonstraram algumas dificuldades ao nível da compreensão da mesma, da formulação de conjeturas, na explicitação do seu raciocínio matemático e na perceção do raciocínio dos colegas. Assim, a exploração e discussão de possíveis resultados constituiu-se como uma mais-valia, uma vez que as crianças puderam questionar, averiguar e confirmar as suas conjeturas, ao mesmo tempo que desenvolviam a sua capacidade de raciocinar matematicamente.

A tarefa de *Organização e elaboração de um gráfico de barras* também suscitou algumas dificuldades nas crianças mais concretamente na organização e interpretação



do gráfico de barras, mas também na explicitação das suas ideias matemáticas. Considerando que esta dificuldade se encontra estritamente relacionada com o facto de este modo de organização de dados não ser privilegiado na conceção de outras tarefas matemáticas, em parceria com a utilização de pictogramas e/ou diagramas de Venn. Por isso, foi fundamental incentivar as crianças a pensar sobre o que se desejava saber e concretizar, recorrendo a questões que as levassem a discutir e interpretar os dados recolhidos e o gráfico elaborado, de modo a definirem as suas próprias estratégias e conseguirem elucidar os colegas dos raciocínios matemáticos que tinham utilizado para responder às mesmas.

Na concretização das diversas tarefas intituladas de *Descobrir as formas geométricas* as crianças demonstraram dificuldades ao nível da perceção e previsão das representações que podiam resultar da junção de duas figuras geométricas. O que torna perceptível que as crianças não conseguem pensar e conjeturar sobre situações abstratas, ainda precisam de verificar e comprovar as diversas situações para conseguirem comunicar e justificar o seu raciocínio. Desta forma, utilizaram-se os blocos lógicos de modo que as crianças compreendessem o papel e importância das representações na apresentação e identificação das diferentes situações, bem como no desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

A tarefa *Trabalhar a matemática com tampinhas de garrafas* também suscitou algumas dificuldades ao nível do raciocínio matemático das crianças, uma vez que não conseguiram conjeturar, testar ou validar a descoberta e a reprodução de padrões. Podendo estas dificuldades estar associadas à capacidade de visualização de cada criança e com o facto de não perceberem o que podem fazer para descobrir e reproduzir padrões já concretizados ou mesmo explicar como se poderiam prolongar.

Na tarefa denominada de *Relação entre números cardinais e as respetivas quantidades* as crianças não demonstraram grandes dificuldades no que se refere a sua capacidade de raciocínio matemático, uma vez que esta tinha como propósito a consolidação e verificação dos conhecimentos adquiridos. Surgindo apenas algumas dificuldades na determinação do número total de maçãs necessárias para completar o cartão com quatro árvores. Esta situação permitiu que as crianças fossem interrogando,

prevendo, experimentando e por fim confirmando através de representações as suas ideias iniciais, o que possibilitou o desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

### **1.º Ciclo do Ensino Básico**

No decurso da investigação no 1.º Ciclo do Ensino Básico, nomeadamente na concretização das diversas tarefas os alunos, deste nível de ensino, também evidenciaram dificuldades na forma de formular, comunicar e comprovar o seu raciocínio matemático. Porque, como já referi, a resolução de tarefas que requeriam a participação ativa e autónoma dos alunos, bem como a investigação, a exploração, a comunicação e a justificação dos seus raciocínios não eram realizadas com muita frequência. Sendo esta situação comprovada através das dificuldades exibidas pelos alunos ao nível da interpretação e compreensão dos enunciados das tarefas, da elaboração de estratégias de resolução, da formulação de conjeturas, da comunicação e da justificação do seu raciocínio matemático e na compreensão dos raciocínios apresentados pelos colegas.

Desta forma, foi preciso incutir nos alunos uma forma diferente de aprender matemática que requer a reflexão sobre o “como” ou o “porquê” de qualquer situação ou procedimento efetuado, a partilha e discussão de estratégias e ideias matemáticas, o trabalho cooperativo e autónomo, e o desenvolvimento do raciocínio matemático. Portanto, irei apresentar as dificuldades demonstradas pelos alunos, da turma do 3.º ano, no que se refere ao raciocínio matemático na concretização das tarefas durante a investigação.

Na tarefa *Os caminhos mais curtos* os alunos demonstraram algumas dificuldades ao nível da interpretação e compreensão da mesma, uma vez que não percebiam que trabalho lhes era solicitado, bem como ao nível da visualização e orientação espacial. Sendo que após a exploração de exemplos concretos e da questão do caminho mais curto os alunos conseguiram superar algumas das suas dificuldades e começaram a estruturar o seu raciocínio matemático. Esta estruturação do raciocínio foi surgindo à medida que os alunos foram testando, comprovando e comunicando as diversas conjeturas e estratégias utilizadas.

Ao nível da questão analisada na tarefa *A festa de São Martinho* posso dizer que as dificuldades na interpretação e compreensão da mesma se mantiveram, mas que a exemplificação foi essencial no entendimento da mesma. Porque se os alunos não perceberem o que lhes é requerido, as suas aprendizagens podem ficar comprometidas, bem como o desenvolvimento do seu raciocínio matemático, uma vez que não vão conseguir organizar, exprimir e justificar os seus pressupostos aos colegas.

A tarefa *Cálculo para os meninos* foi a que gerou mais dificuldades ao nível da interpretação e compreensão da mesma, por isso efetuámos a exploração conjunta do enunciado. O que no meu ponto de vista pode ter limitado o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e as suas estratégias de resolução, mas considero que se não o tivesse feito os alunos não teriam conseguido apresentar nenhuma resolução ou tentativa de resolução.

Na tarefa de *Exploração da tabuada do 7* os alunos não apresentaram dificuldades ao nível da interpretação, compreensão e resolução da mesma. O que se constituiu como um progresso no âmbito do método de ensino que estava a implementar na sala de aula, bem como no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, uma vez que foi notória a convicção, a confiança e o empenho dos mesmos na comunicação e justificação das suas ideias e conjeturas matemáticas.

Já na tarefa *Organizar mesas*, tal como na tarefa anterior, o resultado do trabalho desenvolvido durante a investigação foi evidente, pois os alunos conseguiram interpretar e compreender o enunciado, e demonstraram competência na concretização da tarefa. Mas no decorrer dessa concretização da tarefa os alunos apresentaram apenas dificuldades ao nível do registo escrito da regra geral, porque ainda não tinham trabalhado com o conceito de generalização e que a mesma pode ser escrita com recurso a uma expressão algébrica. Sendo esta dificuldade ultrapassada com a escrita da regra geral em linguagem natural, a qual os alunos conseguiram expressar com clareza ao mesmo tempo que justificavam os seus raciocínios e estratégias na elaboração da generalização.

Ao analisar, globalmente, as tarefas apresentadas no decurso da investigação posso afirmar que as maiores dificuldades apresentadas pelos alunos se centraram na interpretação e compreensão do enunciado. Sendo, necessário recorrer à exploração e

exemplificação do enunciado de modo a que as fragilidades apresentadas ao nível da interpretação e compreensão não se constituíssem como uma dificuldade ao desenvolvimento, à comunicação e à justificação do raciocínio matemático dos alunos.

### **Que estratégias e tipos de representações utilizam os alunos para explicitar o seu raciocínio matemático?**

#### **Pré-Escolar**

No âmbito da investigação realizada do pré-escolar ao analisar os dados recolhidos referentes às estratégias e tipos de representações utilizadas pelas crianças na explicitação do seu raciocínio matemático, pode afirmar-se que foram utilizadas algumas estratégias que associadas às representações ativas e às representações icónicas, na sua maioria, bem como às representações simbólicas, permitiram uma melhor perceção dos seus raciocínios matemáticos e ajudaram na comunicação dos mesmos. Neste sentido, passo a evidenciar as estratégias e o tipo de representações mais utilizadas pelas crianças para expressarem o seu raciocínio matemático na realização das tarefas apresentadas durante a investigação.

Assim, a estratégia mais utilizada pelas crianças na concretização das diversas tarefas foi a estratégia *Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização, através da utilização de objetos, da criação de modelos ou da realização de dramatizações que exemplifiquem o problema*, a qual foi usada em parceria com as representações ativas para expressar os raciocínios matemáticos das crianças, em quatro das cinco tarefas apresentadas neste relatório. E em três dessas tarefas as crianças também utilizaram a estratégia *Fazer tentativas/fazer conjeturas, no sentido de procurar uma solução através de tentativas* e/ou a estratégia *Fazer um desenho, diagrama, gráfico ou esquema* encontrando-se estas estratégias associadas tanto às representações ativas, às representações icónicas como às representações simbólicas.

Outra estratégia mais utilizada pelas crianças na concretização das tarefas foi, como supracitado, a estratégia *Fazer um desenho, diagrama, gráfico ou esquema* que também se encontra associada à estratégia *Fazer uma lista organizada ou fazer uma*

*tabela, onde se organizam, representam, e guardam os dados do problema* as quais foram utilizadas em conjunto com as representações ativas, as representações icónicas e as representações simbólicas na apresentação e explicitação dos seus raciocínios matemáticos.

Após a realização da análise do tipo de representações que as crianças utilizaram para explicitar o seu raciocínio matemático foi perceptível que as representações ativas estiveram associadas às diversas estratégias utilizadas na concretização de todas as tarefas apresentadas neste relatório. Talvez devido ao nível de ensino, nomeadamente o pré-escolar, e à necessidade que as crianças sentem em experimentar e usar materiais/objetos para exprimir o seu raciocínio matemático, uma vez que ainda não o conseguem expressar de forma compreensível em papel.

Todavia, na concretização da última tarefa apresentada neste relatório, *Relação entre números cardinais e as respetivas quantidades*, as crianças não recorreram à representação ativa para determinar o número total de maçãs que necessitariam para colocar nas quatro árvores. Já que as incentivei a utilizarem outro tipo de representação para comunicarem as suas ideias e os seus raciocínios matemáticos, mais concretamente a representação icónica.

### **1.º Ciclo do Ensino Básico**

Ao analisar-se os dados recolhidos na turma do 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, relativamente às estratégias e aos tipos de representações que os alunos utilizaram para explicitar o seu raciocínio matemático, posso concluir que as representações preferenciais dos alunos recaíram sobre a elaboração de representações icónicas e de representações simbólicas que se associaram à utilização de diferentes estratégias na apresentação dos seus raciocínios matemáticos. Desta forma, passo a salientar as estratégias e o tipo de representações utilizadas pelos alunos, na realização das diversas tarefas durante a investigação, para expressarem o seu raciocínio.

Portanto, a estratégia mais utilizada pelos alunos no âmbito da realização das cinco tarefas apresentadas neste relatório foi a estratégia *Fazer uma lista organizada ou fazer uma tabela, onde se organizam, representam, e guardam os dados do problema*,

que se encontra associada tanto às representações icónicas como às simbólicas. Esta estratégia foi utilizada, para expressar o raciocínio matemático dos alunos, em todas as tarefas desenvolvidas e por todos os grupos.

Outra estratégia muito utilizada pelos alunos na concretização das tarefas foi a estratégia de *Descobrir um padrão/descobrir uma regra ou lei de formação, através da realização de diversos passos até encontrar a generalização de soluções específicas*, e tal como a estratégia mais utilizada também foi associada às representações icónicas e às representações simbólicas. Tendo verificado que alguns grupos se apoiaram noutras estratégias, para consolidar a mesma e o seu raciocínio matemático, sendo essas *Fazer tentativas/fazer conjecturas, no sentido de procurar uma solução através de tentativas, Usar dedução lógica/fazer eliminação, verificam-se as hipóteses e as que não são exequíveis são eliminadas, e Fazer um desenho, diagrama, gráfico ou esquema*.

Apesar dos alunos utilizarem a estratégia de *Fazer um desenho, diagrama, gráfico ou esquema* para consolidarem outra estratégia e o seu raciocínio matemático, como supracitado, é de referir que a estratégia também foi utilizada unicamente para expressar o raciocínio matemático dos alunos, através da utilização das representações icónicas e simbólicas.

Depois da realização da análise do tipo de representações utilizadas pelos alunos na explicitação dos seus raciocínios matemáticos, é de salientar que todas as tarefas tinham como intuito proporcionar aos alunos a descoberta, a exploração e a investigação. Já que todas tinham diversos modos de resolução o que possibilitava a utilização de diferentes estratégias e representações, mas apesar desta situação apenas numa das tarefas foi utilizado um só tipo de representação, mais concretamente a representação icónica. Sendo que esta situação se encontra intimamente relacionada com o tipo de tarefa apresentada e os raciocínios matemáticos envolvidos.

Apesar de todas as tarefas terem como intuito proporcionar aos alunos a descoberta, a exploração e a investigação, uma vez que as tarefas tinham diversos modos de resolução o que possibilitava a utilização de diferentes estratégias e representações. Constatando-se que alguns grupos utilizaram várias estratégias na resolução das tarefas, podendo também verificar-se que os grupos aplicaram as

representações icónicas e simbólicas associadas a uma única estratégia de explicitação do seu raciocínio matemático.

### **Considerações finais**

Ao refletir sobre o trabalho realizado, posso dizer que este se constituiu como uma experiência enriquecedora para mim tanto a nível académico, como profissional, pessoal, social, moral, ético, etc. pois, permitiu a compreensão e aquisição de diversas competências relacionadas com a prática educativa, bem como com as questões da investigação.

Desta forma, pude consciencializar-me da importância de compreender, analisar e refletir sobre a forma como as crianças do Pré-Escolar e do 1.º Ciclo do Ensino Básico, em contexto educativo, desenvolvem, expressam e justificam o seu raciocínio matemático ao resolverem diversas situações problemáticas. E de como estas situações podem ajudar as crianças/alunos a desenvolverem o seu raciocínio matemático através da utilização de diversas estratégias de resolução de problemas e de diferentes tipos de representações, mas também de momentos de comunicação e de discussão de resultados.

Neste sentido, e tendo em conta que alguns educadores/professores julgam que as crianças/alunos não possuem capacidades suficientes para desenvolverem tarefas que solicitem o raciocínio matemático (Canavarro, 2008; Duarte, 2008), esta investigação surgiu com o intuito de desmistificar e contrariar essas suposições. Porque de acordo com Serrazina (2007), as capacidades matemáticas das crianças devem ser desenvolvidas desde os primeiros anos, de modo que as suas aprendizagens futuras se apoiem nas competências adquiridas inicialmente.

Assim, pode dizer-se que o trabalho desenvolvido durante a investigação contribuiu para motivar, incentivar e estimular as crianças/alunos a explorarem, investigarem e descobrirem de forma ativa e cooperada conceitos, conteúdos e conhecimentos no âmbito da matemática, ao mesmo tempo que desenvolviam a capacidade de raciocinar matematicamente.

No entanto no decurso da investigação no Pré-Escolar verificou-se que inicialmente as crianças evidenciavam dificuldades ao nível da compreensão, da interpretação, da organização, da comunicação e da justificação do seu raciocínio matemático, uma vez que não existia uma metodologia de trabalho que incutisse nas crianças a importância do desenvolvimento do mesmo. Este facto era notório quando solicitava às crianças para exporem as suas ideias e/ou as estratégias que tinham utilizado para resolver as tarefas através da linguagem oral, com algumas dificuldades, ou da linguagem escrita, muito raramente, sendo que a simulação, a experimentação ou a dramatização eram as estratégias às quais as crianças recorriam preferencialmente, que se associavam às representações ativas. Mas também se socorriam das representações icónicas e muito raramente de representações simbólicas para expressarem os seus raciocínios.

Na investigação desenvolvida na turma do 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico foi possível verificar que o método de trabalho não era o mais adequado para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, por isso foi necessário modificar a forma de trabalhar a matemática e passou-se a utilizar os princípios do ensino exploratório da matemática. E à medida que foram desenvolvendo as diversas tarefas foi possível verificar que os alunos começaram a utilizar diferentes estratégias associadas às representações icónicas e simbólicas, de modo a conseguirem formular, testar, justificar as suas conjecturas, tendo como intuito o desenvolvimento do seu raciocínio matemático. Mas também foi necessário superar algumas dificuldades ao nível da interpretação e compreensão da tarefa, e da comunicação e justificação dos seus raciocínios, para que estas dificuldades não condicionassem a resolução das tarefas, a comunicação e a discussão dos raciocínios matemáticos de cada aluno.

Ao comparar-se as investigações efetuadas nos dois contextos educativos, Pré-Escolar e 1.º Ciclo do Ensino Básico, mais concretamente os dados recolhidos, e tendo em conta a revisão de literatura realizada, posso concluir que as estratégias e as representações utilizadas dependem das idades e dos conhecimentos prévios das crianças/alunos. Porque ao nível do Pré-Escolar o tipo de representações mais utilizadas pelas crianças foram a representação ativa, seguida da representação icónica e menos frequente a representação simbólica. Já ao nível do 1.º Ciclo do Ensino Básico os alunos



socorreram-se preferencialmente de representações icónicas e/ou simbólicas e por vezes dos dois tipos de representações em simultâneo.

Por outro lado, e devido às metodologias de trabalho utilizadas nos dois contextos educativos, foi evidente que algumas das dificuldades demonstradas pelas crianças/alunos foram similares no Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico, ao nível da interpretação e compreensão da tarefa, da comunicação e justificação das suas ideias e raciocínios, sendo de salientar que as dificuldades apresentadas no Pré-Escolar foram mais visíveis devido à heterogeneidade das crianças em termos de idade, entre os três e os seis anos, o que provocou uma clara diferenciação a nível cognitivo, intelectual, comunicativo, etc..

Além dessas dificuldades, o facto de no 1.º Ciclo do Ensino Básico a prática educativa privilegiar o trabalho individual e em grande grupo constituiu-se inicialmente como um obstáculo à concretização desta investigação. Esta situação foi alterada com adoção de uma metodologia de trabalho que fomentasse o desenvolvimento do raciocínio matemático, nomeadamente o ensino exploratório da matemática. Mas esta modificação causou alguns constrangimentos pois o trabalho a pares ou em pequenos grupos, defendido pelo ensino exploratório da matemática, não era uma prática comum na sala de aula. Por isso, os alunos tiveram inicialmente algumas dificuldades porque não sabiam trabalhar em pequenos grupos, visto que não conseguiam trocar e partilhar os seus conhecimentos e ideias matemáticas sobre a tarefa com os colegas. Esta situação foi sendo modificada ao longo da investigação e o trabalho produzido pelos alunos começou a ser mais produtivo em termos do desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

Em suma, e tendo em conta o trabalho realizado e as análises efetuadas aos dados recolhidos durante a investigação, permite-me dizer que a maioria das crianças/alunos conseguiu superar as suas dificuldades ao nível no processo de desenvolvimento e explicitação do seu raciocínio matemático. Sendo possível verificar um progresso em relação às estratégias e às representações utilizadas, à formulação de conjecturas, ao teste e validação das resoluções, bem como à comunicação e justificação dos raciocínios matemáticos.

Esta investigação desenvolvida no âmbito das unidades curriculares de Prática de Ensino Supervisionada no Pré-Escolar e no 1.º Ciclo, mais concretamente durante o segundo semestre do ano letivo 2012/2013 e o primeiro semestre do ano letivo 2013/2014, constituiu-se como uma mais-valia para a perceção e compreensão de como se desenvolve o raciocínio matemático no Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico. Mas, no meu entender, se a investigação fosse desenvolvida durante um período de tempo mais longo, poderia ser mais rica e consistente.

Apesar de existirem algumas investigações em Portugal na área do desenvolvimento do raciocínio matemático desde os primeiros anos de escolaridade, considero que existem algumas lacunas ao nível do Pré-Escolar. Uma futura investigação neste nível de ensino poderia estabelecer-se como fundamental na compreensão de como as crianças formulam, comunicam, justificam e desenvolvem o seu raciocínio matemático, mas também que estratégias e tipos de representação utilizam para o expressarem.

## Referências bibliográficas

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- Alarcão, I. (2001). Professor-Investigador: Que sentido? Que formação? In B. P. Campos (Org.). *Formação Profissional de Professores do Ensino Superior*, vol. I (pp. 21-31). Porto: Porto Editora.
- APM (1988). Renovação do Currículo da Matemática. *Os grandes objectivos para o ensino da Matemática* (pp.37-47). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Arends, R. (1995). *Aprender a Ensinar*. Lisboa: McGraw-Hill de Portugal.
- Baroody, A. (2002). Incentivar a aprendizagem matemática das crianças. In Bernard Spodek, *Manual de investigação em educação de infância* (pp. 333-390). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Barros, M. G., & Palhares, P. (1997). *Emergência da Matemática no Jardim-de-Infância*. Porto: Porto Editora.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M.C. (2012). *Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Boavida, A. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática*, 100, 1.

- Boavida, A., & Menezes, L. (2012). Ensinar matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e racionar: contornos e desafios. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 287-295). Portalegre: SPIEM.
- Boavida, A. Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.
- Bruner, J. (1999). *Para uma teoria de educação*. Lisboa: Relógio D'Água.
- Cabrita, I., & Fonseca, I. (2012). Capacidades transversais em educação em matemática. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre & C. Nunes (Orgs.). *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.
- Canavarro, A. P. (2008). Raciocínio matemático: Uma questão de confiança? *Educação e Matemática, 100*, 32-34.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.
- Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante, XXI (2)*, 51-79.
- C.I.I.L. (2012). Projeto Educativo 2012/2015. Évora: C.I.I.L.
- Coutinho, C. *et al.* (2009). Investigação-Ação: Metodologia Preferencial nas Práticas Educativas. *Psicologia, Educação e Cultura, XIII (2)*, 355-380.
- Decreto-Lei n.º 241/2001 de 30 de agosto. Perfis específicos de desempenho profissional do educador de infância e do professor do 1.º ciclo do ensino básico.
- Duarte, T. (2008). Discutindo tarefas tendo por horizonte o raciocínio matemático. *Educação e Matemática, 100*, 18-20.

- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante*, XXI (2), 81-110.
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2013). Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. *Boletim GEPEN*, 62, 17-31.
- Ministério da Educação (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.
- Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.
- Ministério da Educação (2004). *Organização Curricular e Programas Ensino Básico - 1.º Ciclo*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.
- Ministério da Educação (2010). *Metas de Aprendizagem para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a Avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, 100, 11-15.
- Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 29-42). Lisboa: APM.
- Pinto, E., & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães & A. Folque (Org), *Práticas de investigação em Educação*. Évora: Departamento de Pedagogia e Educação. Retirado de:

<https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/8001/1/PINTO%20%26%20CANAVARRO%20DPE2012.pdf>.

- Pólya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência.
- Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2009). O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *Interações*, 12, 96-114.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Ponte, J. P. et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. *Práxis Educativa (Brasil)*, 7 (2), 355-377.
- Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática no Ensino Básico. In GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*, 11-41. Lisboa: APM.
- Saraiva, M. (2008). Raciocinar em Matemática com imagens vagas e com intuição. *Educação e Matemática*, 100, 29-32.
- Semana, S. & Santos, L. (2008). A avaliação e o raciocínio matemático. *Educação e Matemática*, 100, 51-58.

Serrazina, M. L. (2007). Aprender e ensinar Matemática nos primeiros anos. In *Ensinar e Aprender Matemática*. Lisboa: Texto Editores.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2001). *O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática*. Conferência apresentada no XII Seminário de Investigação em Educação Matemática em Vila Real. Retirado de: [http://www.researchgate.net/publication/228460160\\_O\\_professor\\_como\\_investigador\\_Leitura\\_critica\\_de\\_investigacoes\\_em\\_educacao\\_matematica](http://www.researchgate.net/publication/228460160_O_professor_como_investigador_Leitura_critica_de_investigacoes_em_educacao_matematica).

Tuckman, B. W. (2012). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. In Pedro Palhares (Coord.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp.7-51). Lisboa: Lidel.

Zabalza, M. (1994). *Diários de Aulas. Contributo para o estudo dos dilemas práticos dos professores*. Porto: Porto Editora.



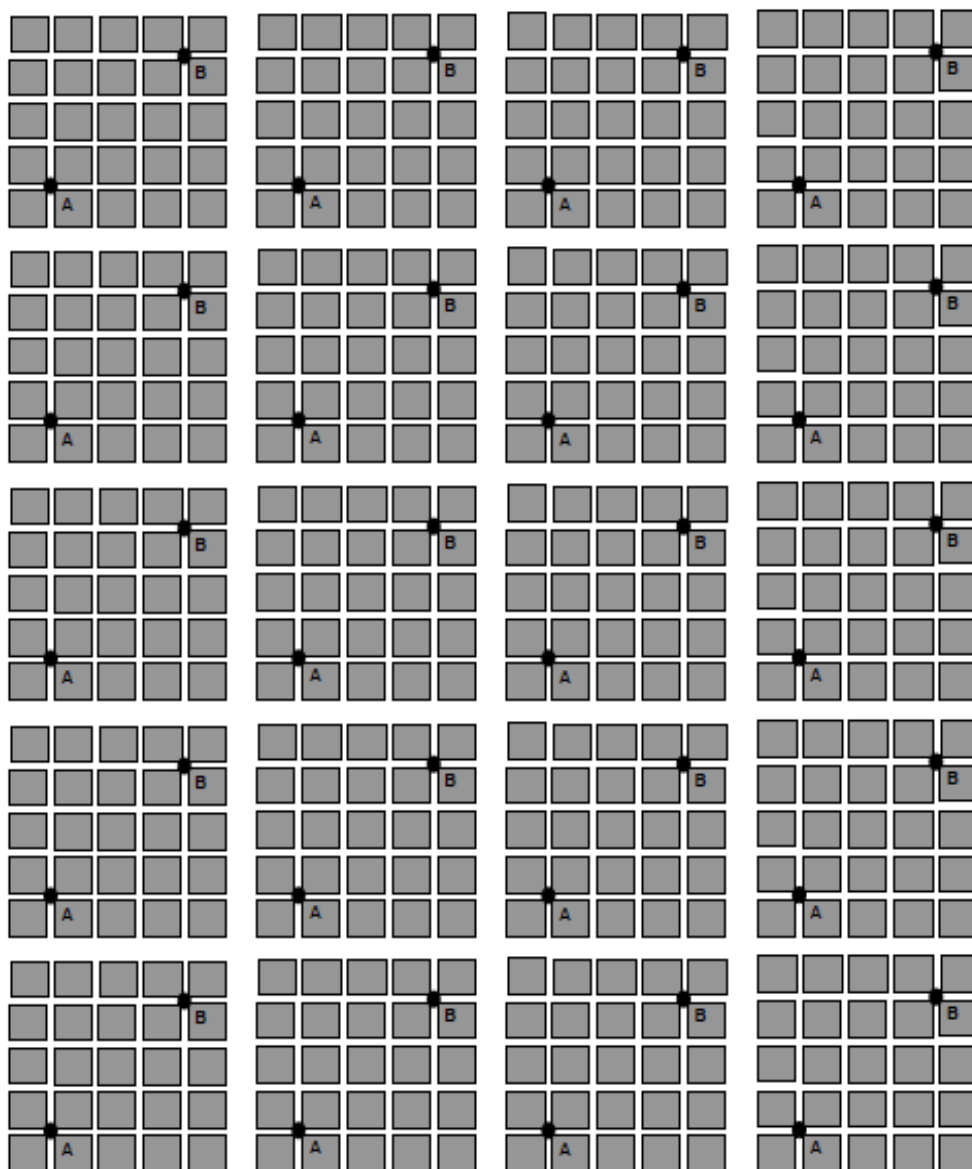


## **Apêndices**



### Apêndice A – Tarefa: *Os caminhos mais curtos*

A Ana e a Sara pretendem deslocar-se do ponto A para o ponto B, pelo caminho mais curto sobre a linha do quadriculado. Encontra todos os caminhos possíveis e regista-os. (Utiliza o livro de treino para encontrares os diferentes caminhos e vai registando-os nos quadriculados seguintes).



Adaptado da tarefa *Caminhos* de Figueira, C.; Loureiro, C.; Lobo, E.; Rodrigues, M. & Almeida, P. (2007). *Visualização e Geometria nos primeiros anos*. Documento elaborado no âmbito do Programa de Formação Contínua de Matemática (PFCM) para professores dos 1.º e 2.º Ciclos. Lisboa: ESE de Lisboa.



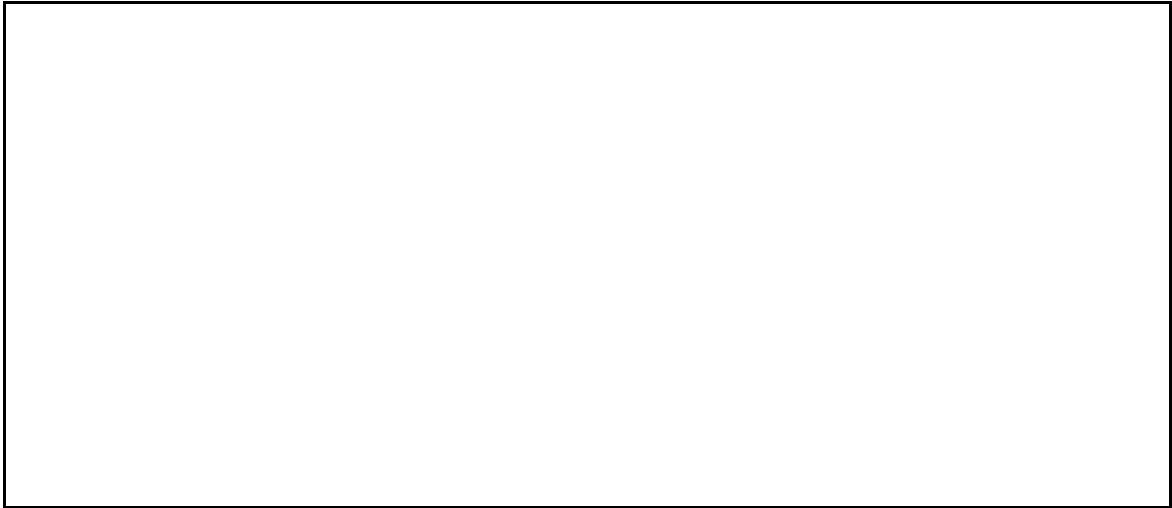
### **Apêndice B – Tarefa: *A festa de São Martinho***

O João decidiu celebrar o São Martinho em sua casa, convidando cinco amigos para a sua festa.

- a) A festa era para começar às 15 horas, mas como alguns dos amigos se atrasaram só começou 25 minutos depois. A que horas começou a festa?

- b) A mãe de um dos amigos foi buscá-lo a casa do João às 20 horas. Quanto tempo esteve este amigo na festa, se chegou a horas? E se tivesse chegado atrasado uma hora, quanto tempo teria ficado na festa? Apresenta os teus cálculos. Podes, usar a reta numérica.

- c) Cada amigo do João trouxe um saco com castanhas e cada saco tinha entre 20 e 22 castanhas. Qual o número mínimo e máximo de castanhas que poderiam ter no total?



- d) À medida que cada amigo foi chegando à casa do João, cumprimentou todos os outros com um abraço. Quantos abraços deram no total? Podes resolver com números, esquemas, tabelas ou desenhos.



### Apêndice C – Tarefa: *Cálcio para os meninos*

O Tomás contou à Catarina que no dia anterior foi ao médico e que este lhe receitou cálcio. Deverá tomar um comprimido de seis em seis horas. A Catarina riu-se. Há uma semana também foi ao médico e começou a tomar um comprimido de cálcio de oito em oito horas.

O médico receitou a cada um deles duas caixas com 24 comprimidos cada.

– Tomo mais do que tu! – disse o Tomás.

A Catarina pensou e respondeu hesitante:

– Sim... mas... como comecei antes de ti, se calhar... parece-me que vamos terminar os comprimidos ao mesmo tempo...

Será que vão terminar de tomar os comprimidos ao mesmo tempo?



Explica a forma como pensaste.

Adaptado da tarefa *Cálcio para os meninos* de Canavarro, A. P. (2008). Raciocínio matemático na aula: Uma questão de confiança?. *Educação e Matemática*, 100, 34-36.





## Apêndice D – Tarefa: *Organizar mesas*

O Manuel e o seu pai estão a organizar as mesas, para a sua festa de aniversário. Começaram por juntar as mesas, colocando-as lado a lado. As mesas são retangulares e em cada um dos lados podem ficar duas pessoas sentadas, à exceção de cada um dos topos, onde apenas pode ficar uma pessoa.

Ao juntar duas mesas, o Manuel verificou que podia sentar 10 dos seus amigos, como se pode ver na figura 1. Se juntasse três mesas conseguiria sentar 14 amigos.

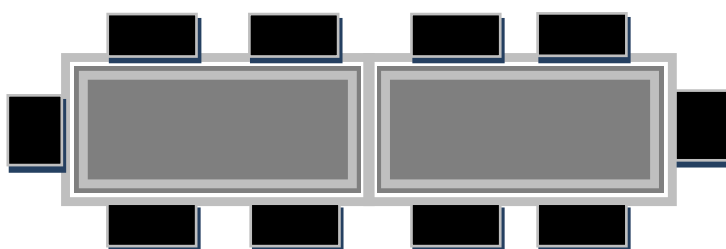


Figura 1

1. Quantos amigos consegue o Manuel sentar se juntar 4 mesas?
2. Quantas mesas deve juntar o Manuel para conseguir sentar 30 amigos?
3. Quantos amigos se podem sentar em 50 mesas juntas?
4. Tendo presente esta organização das mesas, achas que será possível sentar 100 amigos sem deixar nenhum lugar vazio? Porquê?
5. Como farias para calcular o número de amigos que se podem sentar num determinado número de mesas?

Adaptado da tarefa *Mesas* de Vale, I., Pimentel, T., Alvarenga, D. & Fão, A. (2011). (Disponível em: [http://area.dgidec.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/071\\_Tarefas\\_Padroes.pdf](http://area.dgidec.min-edu.pt/materiais_NPMEB/071_Tarefas_Padroes.pdf))