PEDRO GALVÃO
ORGANIZAÇÃO

FILOSOFIA

UMA INTRODUÇÃO POR DISCIPLINAS

1.

Lógica

RICARDO SANTOS

1. Lógica: o que se segue do quê?

A lógica trata da relação de consequência. O que principalmente queremos saber, nesta disciplina, é o que se segue do quê. Por exemplo, se eu disser que alguns acontecimentos são acções, pode concluir-se daí que algumas acções são acontecimentos; e ainda que seja verdade que todas as acções são acontecimentos, isso não pode deduzir-se daquela afirmação. Analogamente, se digo que o sol é uma estrela mortal, segue-se do que digo que alguma estrela é mortal; e ainda que todas as estrelas sejam mortais, isso não se pode concluir dali. Uma noção aparentada com a de consequência lógica é a de argumento válido. Um argumento é uma maneira de estabelecer ou suportar uma conclusão a partir de certas premissas: um encadeado de enunciados que, partindo das premissas, conduz passo a passo até à conclusão desejada; e só é válido, ou logicamente correcto, se a conclusão for uma consequência lógica das premissas. Um argumento válido é uma espécie de prova condicional: uma prova de que a conclusão é verdadeira se as premissas o forem.

Em lógica queremos saber que argumentos são válidos e que argumentos não o são. O estudante de lógica não captará o interesse da disciplina, ou a razão de ser do seu estudo, enquanto não tiver uma noção viva da importância e da dificuldade desta tarefa. Uma maneira de sublinhar a sua importância é através da relação com a noção de saber. Se formei a convicção de que p (por exemplo, de que o universo está a expandir-se) derivando p de um certo conjunto de dados Δ, mas a inferência que fiz não é logicamente correcta, então não se pode dizer que sei que p, ainda que seja verdade que *p*. Alguns dos nossos conhecimentos não são obtidos por via inferencial, mas muitos são. E, em todo o caso, a procura de novos conhecimentos ou de respostas e soluções para os problemas que nos interessam é uma actividade que envolve normalmente a consideração de argumentos, objecções e respostas às objecções – tendo muitas vezes como meta desejada a construção de uma demonstração conclusiva; e aí é essencial que as inferências que fazemos não contenham erros lógicos. Em muitos casos, o uso da nossa inteligência natural, sem treino lógico específico, é suficiente para avaliar se um argumento é correcto ou não. Por exemplo, é relativamente fácil ver que o seguinte argumento não é válido: «Todas as virtudes beneficiam os seus possuidores. A moderação beneficia os seus possuidores. Logo, a moderação é uma virtude.» Pois o que está dito nas premissas não exclui a possibilidade de a moderação ser benéfica sem ser uma virtude. Mas quando a complexidade dos argumentos aumenta, essa inteligência não treinada começa a falhar-nos, deixando-nos indecisos e na dúvida. Será este argumento válido: «Nenhum ser mortal é infinito. Aquiles é divino. Nenhum ser finito é divino. Logo, Aquiles é imortal»? E este: «A maioria das pessoas felizes são corajosas. Todos os sábios são pessoas felizes. Logo, a maioria dos sábios são corajosos»?

Queremos dispor de um modo *sistemático* de avaliar argumentos (quanto à sua validade dedutiva ou correcção lógica). Tal como na aritmética os algoritmos da adição e da multiplicação nos dão uma técnica fiável para encontrarmos a resposta para as questões aritméticas, gostaríamos de ter algum método igualmente eficaz para avaliar inferências e argumentos. E é precisamente isso que a lógica nos proporciona, embora de um modo algo indirecto: os métodos lógicos são métodos formais, o que significa que se aplicam, não directamente aos argumentos dados na linguagem natural, mas à sua tradução para uma linguagem formal. Isto é assim, como veremos, devido ao carácter formal da própria relação de consequência lógica. Como se costuma dizer, os argumentos são válidos ou inválidos por causa da forma – e não do conteúdo particular – que têm.

Além da relação de consequência, a lógica também se ocupa das chamadas verdades lógicas – o que é natural, se pensarmos que também a física se ocupa das verdades físicas, a matemática das verdades matemáticas, etc. É uma verdade física que o sol é uma estrela, mas é uma verdade lógica que se o sol é uma estrela, então há pelo menos uma estrela. Em geral, para que algo seja verdade, costuma ser preciso que o que é dito concorde com a realidade, com o modo como as coisas são. Mas as verdades lógicas são especiais, na medida em que são verdadeiras apenas por causa da sua forma, e independentemente de como é o mundo. É a forma da frase «se o sol é uma estrela, então há pelo menos uma estrela» que determina que ela seja verdadeira. Por isso, qualquer outra frase com a mesma forma será igualmente verdadeira e pela mesma razão (por exemplo: «se a terra é um planeta, então há pelo menos um planeta»). Devido a este carácter formal, as verdades lógicas são caracteristicamente muito triviais ou pouco informativas – com elas não parece que aprendamos muito acerca do mundo. Os métodos lógicos, ao mesmo tempo que permitem testar se um argumento é válido, também servem para testar se uma afirmação é ou não é uma verdade lógica. E é natural que sirvam para as duas coisas, pois as verdades lógicas são uma espécie de caso limite de consequência lógica: elas são consequências do conjunto vazio de premissas; o que significa que podemos demonstrá-las usando lógica apenas, sem nos apoiarmos em nenhuma premissa.

2. Lógica para filósofos

Como disciplina, a lógica conheceu uma revolução na viragem do século dezanove para o vinte, com o trabalho de Frege, de Russell e de alguns outros. Dessa revolução (e por um processo histórico interessante, mas que não podemos aqui abordar) resultou aquilo a que hoje é habitual chamarmos a «lógica clássica». De modo quase universal, é a lógica clássica o que actualmente se ensina nas disciplinas introdutórias de lógica que integram o plano de estudos dos cursos universitários de filosofia. Não lhe chamamos «clássica» por causa de alguma afinidade especial com o que se cultivava no mundo grego e romano antigos, mas apenas para indicar que se trata da lógica padrão, ou seja, aquela que constitui a teoria canónica nos estudos lógicos contemporâneos. Ela inclui a lógica proposicional e a lógica de predicados de primeira ordem (normalmente, enriquecida com o predicado lógico de identidade), consideradas nos seus três componentes: uma linguagem formal, uma semântica (dada em termos de interpretações ou de modelos) e um sistema dedutivo (como a dedução natural ou o método das árvores). Na meta-teoria desta lógica, é possível provar que o sistema dedutivo está em harmonia com a semântica dada, quer dizer, que o sistema dedutivo é correcto e completo relativamente à semântica. (Voltaremos a cada um destes conceitos mais adiante). Seguindo esta tradição, dedicaremos este capítulo à lógica clássica. No final, acrescentaremos uma extensão dessa lógica – a lógica modal –, porque defendemos que o cânone deve ser alargado de modo a incluí-la, pelo menos no ensino da lógica para futuros filósofos.

Significa isto que a lógica clássica é a lógica correcta (ou a lógica com que devemos pensar)? Muitos autores responderão que sim, mas outros discordarão. A resposta para esta pergunta dependerá também da concepção que se tenha a respeito da relação entre os sistemas lógicos, por um lado, e as práticas de argumentação e de raciocínio que lhes servem de referência, por outro. Alguns autores defenderam, por exemplo, que as linguagens formais da lógica, porque não têm as «imperfeições» das línguas naturais – ambiguidade, vagueza, termos sem denotação, inconsistência, etc. –, deveriam tomar o lugar destas no discurso científico. Uma perspectiva mais adequada consiste em considerar que as linguagens formais são modelos matemáticos das línguas naturais – do mesmo modo que as construções de Bohr, por exemplo, são modelos dos atómos. Neste sentido científico de «modelo», a correspondência entre um modelo e aquilo de que ele é um modelo nunca é exacta. Um modelo simplifica sempre a realidade que pretende ajudar a compreender. Mas, para que desempenhe a sua função, os aspectos essenciais do modelo devem mostrar como é que funciona a realidade a ser modelada – ainda que isso envolva idealizações e a desconsideração de aspectos considerados pouco ou nada relevantes para o objectivo principal que se tem em vista. Em geral, para ser mais realista, um modelo tem de se tornar mais complexo. Mas um modelo pode ser bom para certos propósitos e insuficiente ou mesmo inadequado para outros – e a questão da sua correcção está sempre sujeita a avaliação crítica.

É um facto histórico que a lógica clássica foi desenvolvida tomando como referência o raciocínio matemático. Os seus fundadores pretendiam criar um modelo do raciocínio correcto – mas o raciocínio que tinham em vista era aquele que as demonstrações em matemática tipicamente exemplificam. Entre os próprios matemáticos existem controvérsias acerca da aceitabilidade de certas formas comuns de raciocínio. Em particular, os intuicionistas[1] contestam as chamadas «provas não-construtivas», nas quais, fazendo um uso essencial da lei do terceiro excluído (*A ou não A*), se pretende provar a existência de objectos de um certo tipo (na medida em que ela se segue tanto de *A* como de *não-A*) sem que, no entanto, se consiga apresentar qualquer exemplo de um objecto desses. Como é natural, então, os intuicionistas negam que a lógica clássica seja a lógica correcta do raciocínio matemático e propõem como alternativa uma lógica mais fraca, na qual o terceiro excluído não é válido (e em que também não é válida a eliminação da negação dupla, que permitiria concluir *A* a partir de *não-não-A*). A lógica intuicionista constitui um *desvio* à lógica clássica, no qual, para a mesma linguagem formal, é proposta uma semântica diferente e regras de inferência também diferentes, alegadamente mais correctas. Outras lógicas são apenas *extensões* da lógica clássica: tal como a lógica de predicados é uma extensão da lógica proposicional, que preserva as suas verdades lógicas e a sua relação de consequência, mas lhe acrescenta novos casos, que usam os novos símbolos (nomes e predicados, variáveis e quantificadores), existem sistemas que pretendem suplementar a lógica clássica com novas constantes lógicas, de onde resultariam também novas verdades lógicas e novos casos de consequência lógica. A lógica modal é uma dessas extensões, que trata os advérbios «possivelmente» e «necessariamente» como novas constantes lógicas (represen-

[1] O intuicionismo é um movimento em defesa da revisão da matemática clássica que foi fundado pelo matemático holandês Brouwer na primeira década do século vinte. Nos anos setenta, Michael Dummett, professor em Oxford, procurou renová-lo e transformá-lo em movimento filosófico com implicações mais amplas.

tadas na linguagem formal pelos símbolos ◇ e □). Tendo sido iniciada por Aristóteles e muito discutida na Idade Média, a lógica modal foi retomada no século vinte por C. I. Lewis, criticada por W. V. Quine e marcada pela invenção da semântica dos mundos possíveis, nos anos sessenta, por Kripke e alguns outros. O desenvolvimento da lógica modal moderna iniciou um movimento amplo com esforços importantes para captar a lógica de outros discursos, para além do matemático. A lista inclui, além da lógica modal, a lógica temporal, a lógica deôntica, a lógica epistémica e a lógica doxástica. O intenso trabalho desenvolvido nestas áreas nos últimos cinquenta anos testemunha uma tendência geral para ultrapassar o anterior «paradigma matemático», procurando construir modelos mais ricos do raciocínio correcto, sobretudo quando este raciocínio envolve o uso de linguagens com aspectos que estão ausentes na linguagem matemática, tais como predicados vagos, operadores intensionais, termos sem denotação, índices temporais, predicados semânticos auto-aplicáveis, etc. Se o esforço de modelar o raciocínio correcto com estas linguagens é ou não é compatível com a manutenção da lógica clássica, isso é uma questão que se mantém em aberto.

Estamos, portanto, numa época de intensa renovação da lógica. É prematuro tentar dizer que novo consenso virá a resultar daqui. Entretanto, a decisão pedagógica mais sensata parece ser a de continuar a fazer com que a lógica clássica esteja sempre disponível na caixa de ferramentas do filósofo contemporâneo, juntamente com uma abertura para considerar propostas de enriquecimento, ou mesmo de revisão, desse cânone. A lógica modal é um enriquecimento que tem boas razões para ser adoptado desde já. Em primeiro lugar, devido ao papel central que os conceitos de possibilidade e de necessidade (incluindo as suas relações com o conceito de existência) desempenham no pensamento filosófico. E, em segundo lugar, porque a lógica modal e o seu tipo de semântica constituem a base sobre a qual se podem entender muitos dos desenvolvimentos inovadores posteriores. Incluiremos por isso, neste capítulo, uma apresentação preliminar da lógica modal proposicional. Comecemos, então.

3. Lógica proposicional

A lógica proposicional clássica (LPC) é a lógica do «não», do «e», do «ou», do «se... então» e do «se e somente se», que é consensual dever ser o ponto de partida de qualquer introdução à lógica. Nela estuda-se um conjunto de operações elementares sobre frases declarativas:

- A *negação* – operação que transforma a frase «O universo é finito» na frase «O universo não é finito» (frase esta que também se classifica como uma *negação*).

- A *conjunção* – operação que transforma as frases «O Sol é uma estrela» e «A Terra é um planeta» na frase «O Sol é uma estrela e a Terra é um planeta» (também classificada como uma *conjunção*).
- A *disjunção* – operação que transforma as frases «Há vida em Marte» e «Há vida em Júpiter» na frase «Há vida em Marte ou (há vida) em Júpiter» (também classificada como uma *disjunção*).
- A *condicionação* – operação que transforma as frases «Aprender é recordar» e «A alma é imortal» na frase «Se aprender é recordar, então a alma é imortal» (classificada como uma *condicional*, que tem uma *antecedente* e uma *consequente*).
- A *bicondicionação* – operação que transforma as frases «526 é par» e «526 é divisível por 2 sem resto» na frase «526 é par se e somente se é divisível por 2 sem resto» (classificada como uma *bicondicional*).

Como o objecto de estudo são as operações, e não as frases sobre as quais elas operam, a LPC ignora o conteúdo específico dessas frases (registando apenas que são frases declarativas, que dizem algo acerca de algo) e representa-as por letras esquemáticas como *p*, *q*, *r*, *s*...

Por outro lado, como as línguas naturais costumam ter uma considerável variedade de maneiras de expressar aquelas operações (considerem-se, por exemplo, as seguintes variantes das frases já dadas: «O universo é infinito», «O Sol é uma estrela, mas a Terra é um planeta», «Entre Marte e Júpiter, num deles há vida», «Só se a alma for imortal é que aprender é recordar», «Para que 526 seja par é necessário e suficiente que ele seja divisível por 2 sem resto»), a LPC adopta uma representação uniforme dos operadores através dos símbolos $\neg$ (*não*), $\wedge$ (*e*), $\vee$ (*ou*), $\rightarrow$ (*se... então*) e $\leftrightarrow$ (*se e somente se*).

Com estes poucos elementos, o estudante de LPC tem então de exercitar a prática da *formalização*, que é um modo peculiar de traduzir frases declarativas ou mesmo argumentos completos dados em português para a linguagem da LPC. A peculiaridade advém de esta não ser uma «linguagem» em sentido próprio: as suas «frases» não dizem nada acerca do mundo, não têm um conteúdo completo avaliável quanto à sua verdade e, precisamente por isso, preferimos chamar-lhes *fórmulas*. Enquanto a frase «Se aprender é recordar, então a alma é imortal» expressa um conteúdo com o qual Platão concordava, relativamente à fórmula $(p \rightarrow q)$ não faz sentido perguntar se alguém concordaria com ela. Mas se suplementarmos esta fórmula com o que podemos chamar um *dicionário* (que seria, neste caso, uma estipulação de que *p* significa «Aprender é recordar» e *q* significa «A alma é imortal»), já podemos recuperar o conteúdo expresso pela frase portuguesa inicial. Paralelamente à distinção entre frase e fórmula, é também fácil de entender a distinção entre *argumento* (dado em português) e *forma argumentativa* (escrita na linguagem de LPC).

O uso de linguagens formais é essencial em lógica e constitui um dos aspectos mais característicos da disciplina. É importante não perder de vista a sua razão de ser fundamental. A lógica, como dissemos, trata da relação de consequência, de saber o que se segue do quê. E a relação de consequência lógica está presente num argumento quando a verdade é preservada – das premissas para a conclusão – *em virtude da forma* do argumento. Os argumentos válidos (ou logicamente correctos) são aqueles que têm uma forma tal que, *exclusivamente por causa dela*, se as premissas forem verdadeiras, a conclusão também o será. É, portanto, o carácter formal da relação de consequência lógica que está na origem do uso de linguagens formais em lógica. Estas linguagens servem bem a função para que foram criadas: isolam e exibem aquelas características dos argumentos das quais a sua validade ou correcção lógica depende exclusivamente.

Uma frase como «António comprou um cão e um gato ou um rato» deverá ser considerada uma conjunção ou uma disjunção? Sem mais informação, é impossível saber. Depende de qual for o operador ou a conectiva («e» ou «ou») mais forte, quer dizer, com maior âmbito: a acção do «e» estende-se a toda a frase ou termina em «gato»? Para evitar este tipo de ambiguidade sintáctica, a chamada *notação polaca* adoptava a convenção de escrever sempre cada operador antes das fórmulas sobre as quais opera (assim, $\wedge p \vee qr$ seria diferente de $\vee \wedge pqr$). Mas esta notação torna as fórmulas mais difíceis de ler e, por isso, acabou por ser geralmente substituída pelo uso de parêntesis, à semelhança do que se faz na aritmética: cada operador binário (só a negação é unária, os outros quatro são binários) vem sempre acompanhado por um par de parêntesis que indica onde começa e onde acaba a sua acção. Deste modo, podemos diferenciar a conjunção $(p \wedge (q \vee r))$ da disjunção $((p \wedge q) \vee r)$. (Por vezes, por uma simples questão de economia, podemos permitir-nos omitir os parêntesis externos de uma fórmula: a rigor, eles estão lá, mas digamos que ficam invisíveis[2].)

Eis alguns exemplos de formalizações em LPC:

1a. Tales não nasceu em Atenas.
1b. $\neg p$
2a. Tales é sábio e não gosta de água.
2b. $(p \wedge \neg q)$
3a. Nem Pitágoras nem Platão são materialistas.
3b. $(\neg p \wedge \neg q)$
4a. Aristóteles concorda com Platão ou com a verdade, mas não com ambos.
4b. $((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$

---

[2] O uso desta prática simplificadora envolve alguns riscos pedagógicos. Por exemplo, se permitimos que uma conjunção se escreva $p \wedge q$, é importante recordar que a sua negação é $\neg(p \wedge q)$. Os parêntesis «invisíveis» têm de ser restaurados antes de prefixarmos o símbolo de negação.

5a. Se Querefonte foi a Delfos e não mentiu, então Sócrates é o mais sábio.
5b. $((p \wedge \neg q) \rightarrow r)$
6a. A menos que esteja a fingir-se ignorante, Sócrates não sabe o que é a virtude nem o vício.
6b. $(\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$
7a. Sócrates só não será esquecido se continuarmos a ler Platão ou Xenofonte.
7b. $(\neg p \rightarrow (q \vee r))$
8a. Se continuarmos a ler Platão ou Xenofonte, Sócrates não será esquecido.
8b. $((q \vee r) \rightarrow \neg p)$
9a. Se, e só se, continuarmos a ler Platão ou Xenofonte é que Sócrates não será esquecido.
9b. $(\neg p \leftrightarrow (q \vee r))$
10a. Querefonte foi a Delfos e consultou o oráculo e, se fez isso, então, se não mentiu, Sócrates é o mais sábio.
10b. $((p \wedge q) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow (\neg r \rightarrow s)))$

Uma pressuposição básica da LPC é a de que as frases declarativas atómicas representadas pelas letras esquemáticas *p*, *q*, *r*, *s*, etc., seja qual for o seu conteúdo específico, na medida em que dizem alguma coisa de alguma coisa e assim representam o mundo como sendo de uma certa maneira, *são sempre ou verdadeiras ou falsas* (mas não ambas). LPC é, por isso, uma lógica bivalente, segundo a qual existem *dois* valores de verdade e cada frase, simples ou complexa, tem exactamente um deles. Outra pressuposição igualmente básica é a de que as conectivas lógicas consideradas expressam *funções de verdade*. Isto significa que o valor de verdade de qualquer frase logicamente complexa é completamente determinado pelos valores de verdade das frases atómicas que a constituem. O modo como esse valor é determinado deixa-se captar nos seguintes princípios:

(NEG) **A negação inverte o valor de verdade.** (Se uma frase for verdadeira, a sua negação é falsa; e se for falsa, a sua negação é verdadeira.)

(CONJ) **Uma conjunção só é verdadeira se as frases que a compõem forem ambas verdadeiras.** (Nos outros casos é falsa.)

(DISJ) **Uma disjunção só é falsa se as frases que a compõem forem ambas falsas.** (Nos outros casos é verdadeira.)

(COND) **Uma condicional só é falsa se a antecedente for verdadeira e a consequente for falsa.** (Nos outros casos é verdadeira.)

(BICOND) **Uma bicondicional só é verdadeira se os seus dois lados tiverem o mesmo valor de verdade.** (Nos outros casos é falsa.)

Estes cinco princípios dizem o essencial que há a saber acerca das operações lógicas que são o objecto de estudo da LPC. Eles também podem ser graficamente representados do seguinte modo:

X	$\neg X$
V	F
F	V

X	Y	$(X \wedge Y)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

X	Y	$(X \vee Y)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

X	Y	$(X \rightarrow Y)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

X	Y	$(X \leftrightarrow Y)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Para testar a validade de um argumento, temos de indagar se ele preserva a verdade (das premissas para a conclusão) em virtude da sua forma. Para isso, temos primeiro de tornar patente a forma do argumento – formalizando-o em LPC. Depois, temos de examinar o que acontece caso todas as premissas sejam verdadeiras: obriga isso, dados os princípios semânticos que regulam as conectivas, a que a conclusão seja também verdadeira? Ou há, pelo contrário, alguma possibilidade de as premissas serem verdadeiras e a conclusão falsa? As *tabelas de verdade* são um método de análise semântica exaustiva de tais «possibilidades» (que, de facto, mais não são que combinações possíveis dos valores de verdade das frases atómicas que compõem o argumento), o qual fornece uma resposta à pergunta crucial que acabámos de fazer. Vejamos o seguinte argumento:

«Ou eu não sou o meu corpo ou não sou uma coisa que pensa. Não é verdade que a minha existência seja dubitável e eu não seja o meu corpo. Portanto, se a minha existência é dubitável, eu não sou uma coisa que pensa.»

Este argumento tem a seguinte forma (com as premissas separadas por uma vírgula e a conclusão anunciada pelo símbolo $\therefore$):

$$(\neg p \vee \neg q), \neg(r \wedge \neg p) \therefore (r \rightarrow \neg q)$$

Para determinar se a conclusão se segue realmente daquelas premissas, podemos construir a seguinte tabela de verdade:

p	*q*	*r*	(¬	p	∨	¬	q)	¬	(r	∧	¬	p)	(r	→	¬	q)
V	V	V	F	V	**F**	F	V	**V**	V	F	F	V	V	**F**	F	V
V	V	F	F	V	**F**	F	V	**V**	F	F	F	V	F	**V**	F	V
V	F	V	F	V	**V**	V	F	**V**	V	F	F	V	V	**V**	V	F
V	F	F	F	V	**V**	V	F	**V**	F	F	F	V	F	**V**	V	F
F	V	V	V	F	**V**	F	V	**F**	V	V	V	F	V	**F**	F	V
F	V	F	V	F	**V**	F	V	**V**	F	F	V	F	F	**V**	F	V
F	F	V	V	F	**V**	V	F	**F**	V	V	V	F	V	**V**	V	F
F	F	F	V	F	**V**	V	F	**V**	F	F	V	F	F	**V**	V	F

As oito linhas desta tabela representam a totalidade das possibilidades lógicas (dado o pressuposto da bivalência) relevantes para este argumento. As premissas do argumento são ambas verdadeiras em apenas quatro delas – e, nessas quatro linhas (3ª, 4ª, 6ª e 8ª), a conclusão é também verdadeira. Portanto, o argumento tem uma forma tal que a verdade das premissas é necessariamente transportada para a conclusão, ou seja, é um argumento válido. (Seria inválido se houvesse alguma linha na qual as premissas fossem verdadeiras e conclusão fosse falsa.)

A construção de tabelas de verdade é um método relativamente simples de nos assegurarmos que diversas formas argumentativas de uso bastante frequente são logicamente correctas. Eis uma lista com algumas dessas formas de inferência válida e as suas designações mais habituais:

$(p \rightarrow q), p \therefore q$	*modus ponens*
$(p \rightarrow q), \neg q \therefore \neg p$	*modus tollens*
$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \therefore (p \rightarrow r)$	silogismo hipotético

$(p \vee q), \neg p \therefore q$	silogismo disjuntivo
$(p \vee q), (p \rightarrow r), (q \rightarrow r) \therefore r$	dilema construtivo
$\neg\neg p \therefore p$	negação dupla
$\neg(p \wedge q) \therefore (\neg p \vee \neg q)$	leis de De Morgan
$\neg(p \vee q) \therefore (\neg p \wedge \neg q)$	leis de De Morgan
$(p \rightarrow q) \therefore (\neg p \vee q)$	condicional material
$\neg(p \rightarrow q) \therefore (p \wedge \neg q)$	condicional material negada
$(p \leftrightarrow q) \therefore ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$	bicondicional material
$\neg(p \leftrightarrow q) \therefore ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$	bicondicional material negada
$(p \wedge (q \vee r)) \therefore ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	distributividade
$(p \vee (q \wedge r)) \therefore ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	distributividade

Mas as tabelas de verdade não servem apenas para testar a validade de argumentos. Elas podem também ser usadas, entre outras coisas, para determinar se um conjunto de frases declarativas é consistente, ou se duas frases são logicamente equivalentes, ou se uma frase é uma tautologia (ou verdade lógica), uma contradição (ou falsidade lógica) ou uma frase logicamente contingente.

No entanto, como método lógico para uso corrente, as tabelas de verdade são pouco práticas (sobretudo quando o número de letras de frase que ocorrem num argumento se torna maior) e pouco económicas (pois requerem a realização de muitos cálculos que acabam por ser inúteis para o resultado que se pretende obter). As *árvores de verdade* (também conhecidas como «quadros semânticos») proporcionam um método alternativo, de procura mais directa de contramodelos, que é bastante fácil de manejar pelo principiante e lhe permite ganhar com relativa rapidez um «olho» para o que é e o que não é logicamente válido. Contudo, se o que se pretende é dotar o filósofo contemporâneo de um modelo formal de um procedimento rigoroso de prova, ou seja, de um método para raciocinar a partir de premissas, passo a passo (e em que cada passo corresponde à aplicação de uma regra de inferência), até uma conclusão – e que, além disso, permita o recurso a suposições provisórias no raciocínio –, então um sistema de *dedução natural* será o mais recomendável. Na secção seguinte, veremos exemplos de aplicações destes métodos.

4. Lógica de predicados

A lógica de predicados (LPr) – que, por vezes, também é chamada *teoria da quantificação de primeira ordem* – é a lógica do «todos» e do «alguns» (entendido como sinónimo de «pelo menos um»), tal como estas expressões ocorrem em frases como «*Todos* os filósofos têm *algum* ponto fraco». Às cinco operações consideradas na lógica proposicional, a lógica de predicados *acrescenta* duas que lhe são especialmente características (e que foram, no essencial, uma inovação introduzida por Gottlob Frege):

- A *quantificação universal* – operação que transforma a frase «Deus criou Adão» na frase universal «Para todo o *x*, Deus criou *x*» (ou seja, «Deus criou tudo»).
- A *quantificação existencial* – operação que transforma a frase «Teeteto voa» na frase existencial «Para algum *x*, *x* voa» (ou seja, «Alguns seres voam» ou «Há seres que voam»).

A expressão «para todo o *x*» é um quantificador universal e a sua representação formal é composta pelo símbolo $\forall$ seguido de uma variável «*x*». Usamos como variáveis as últimas letras minúsculas do alfabeto, com ou sem numerais subscritos: x, y, z, z_1, z_2... No primeiro exemplo, partimos de uma frase atómica, substituímos o nome próprio «Adão» pela variável «*x*» e, ao resultado, prefixamos o quantificador $\forall x$. No segundo exemplo, o quantificador prefixado é antes o existencial, que se simboliza como $\exists x$. Na realidade, não precisamos de ter os dois géneros de quantificadores, pois podemos definir um deles por meio do outro *e* da negação: aquela frase universal é equivalente a «$\neg \exists x \neg$ Deus criou *x*» (*Não há nada que Deus não tenha criado*) e, quanto à frase existencial, ela é evidentemente equivalente a «$\neg \forall x \neg x$ voa» (*Não é verdade que todos os seres sejam não-voadores*).

O uso de variáveis em lógica foi um procedimento que Frege importou da álgebra, generalizando-o: enquanto em «$2x + 1$» a variável representa de modo não-específico qualquer *número*, em lógica as variáveis podem representar coisas de todos os géneros. Ao conjunto das coisas que uma variável pode representar – ou que ela pode tomar como valores – chama-se o *domínio* dessa variável. Por exemplo, quando simbolizamos «Teeteto ama alguém» como «$\exists x$ Teeteto ama *x*», estamos a supor que o domínio de «*x*» é o conjunto das pessoas – e a considerar que a frase é verdadeira se há pelo menos um elemento desse conjunto que é amado por Teeteto.

Além de se juntarem a $\forall$ ou a $\exists$ para formar um quantificador, as variáveis podem ocupar, como vimos, os lugares de nomes próprios. Há, porém, uma diferença fundamental: enquanto uma variável toma como valores *qualquer* objecto pertencente ao domínio, um nome – como «Teeteto», «Lisboa», «o Tejo», «a lua», «5» ou «a *Crítica da Razão Pura*» – refere especificamente *um* objecto desse domínio, e nunca mais do que um. Usamos as letras minúsculas do início do alfabeto – *a*, *b*, *c*, *d*... – para simbolizar os nomes próprios que ocorrem nas frases e nos argumentos que seleccionamos para consideração lógica.

O facto de a própria quantificação requerer que reconheçamos uma categoria de nomes próprios revela uma diferença importante desta nova teoria: a necessidade de levar a análise lógica das frases ao nível da sua estrutura atómica. Uma vez mais, a justificação para isso provém do carácter formal da relação de consequência. Alguns argumentos são dedutivamente válidos em virtude da estrutura molecular das frases que os compõem e, por isso, a lógica proposicional é suficiente para os analisar (vejam-se as formas de inferência válida que listámos nas páginas 16 e 17). Outros, todavia, exigem uma análise mais fina. Por exemplo, no famoso argumento «Todos os homens são mortais; Sócrates é um homem; logo, Sócrates é mortal», é essencial que as duas últimas frases mencionem o mesmo indivíduo. E é também essencial que aquilo que é atribuído a Sócrates na conclusão – *viz.* o ser mortal – seja o mesmo que, na primeira premissa, é atribuído a todos os homens. Esses elementos comuns às diferentes frases desapareceriam se o argumento fosse formalizado usando apenas a lógica proposicional – e com eles desapareceria a própria validade do argumento.

Nomes e predicados são, para esta lógica, os elementos básicos a partir dos quais se formam as frases atómicas. Um predicado, em sentido lógico, é uma expressão incompleta do género de «_ voa», «_ é mortal», «_ criou _», «_ ama _», «_ prefere _ a _», etc. Os predicados podem ser de-um-lugar, de-dois-lugares, de-três-lugares, etc., consoante o número de lugares vazios que têm. Usamos letras maiúsculas do alfabeto para representá-los e adoptamos a convenção de escrever sempre a letra *antes* dos espaços em branco: assim, escrevemos «*V*_» para «_ voa», «*C*_ _» para «_ criou _» e «*P*_ _ _» para «_ prefere _ a _». Quando os lugares de um predicado são todos ocupados por nomes (diferentes ou não), o resultado é uma frase atómica. Há portanto uma nova operação – a *predicação* –, que funciona a nível sub-atómico e que, a partir de nomes e predicados, gera frases atómicas. As restantes operações – a que correspondem as constantes lógicas $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$ e $\exists$ – já podem ser descritas, como o fizemos, ao nível molecular.

Em suma: nomes e predicados, conectivas proposicionais e parêntesis, variáveis e quantificadores são os elementos que compõem a linguagem formal da lógica de predicados (LPr). Com estes elementos e com as regras de formação implícitas no modo como descrevemos as operações estudadas, o aprendiz de LPr tem uma vez mais de exercitar a prática da formalização. Eis alguns exemplos:

1a. Pirro é céptico, mas não é discípulo de Sócrates.
1b. $(Ca \wedge \neg Dab)$
2a. Se Sócrates não é sábio, então não há sábios.
2b. $(\neg Sa \rightarrow \neg \exists x\, Sx)$

3a. Existem filósofos e sábios.
3b. $(\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Sx)$
4a. Alguns filósofos são sábios e alguns não o são.
4b. $(\exists x\, (Fx \wedge Sx) \wedge \exists x\, (Fx \wedge \neg Sx))$
5a. Alguns gregos são filósofos cépticos.
5b. $\exists x\, (Gx \wedge (Fx \wedge Cx))$
6a. Alguns filósofos cépticos não são gregos nem romanos.
6b. $\exists x\, ((Fx \wedge Cx) \wedge (\neg Gx \wedge \neg Rx))$
7a. Todos os cépticos são filósofos.
7b. $\forall x\, (Cx \rightarrow Fx)$
8a. Nenhum filósofo idealista é céptico.
8b. $\forall x\, ((Fx \wedge Ix) \rightarrow \neg Cx)$
9a. Só os filósofos empiristas é que são cépticos.
9b. $\forall x\, (Cx \rightarrow (Fx \wedge Ex))$
10a. Aristóteles foi tutor de um imperador.
10b. $\exists x\, (Tax \wedge Ix)$
11a. Todos aprendem com alguém.
11b. $\forall x\, \exists y\, Axy$
12a. Alguns aprendem com todos.
12b. $\exists x\, \forall y\, Axy$

Depois de conhecermos a gramática da linguagem da lógica de predicados, precisamos de considerar a sua semântica. Tal como acontecia com as fórmulas da lógica proposicional, também aqui, em si mesmas, isoladas de qualquer tradução de ou para a linguagem natural, fórmulas como $\forall x\, (Fx \rightarrow \exists y\, Ray)$ não dizem nada que possa ser avaliado como verdadeiro ou falso. Só relativamente a uma interpretação é que tais fórmulas podem ser verdadeiras ou falsas. Na lógica proposicional, uma interpretação da linguagem formal não era mais do que uma atribuição de valores de verdade – do valor *verdadeiro* ou do valor *falso* – às letras esquemáticas de frase atómica p, q, r, etc. Depois, as regras semânticas para as conectivas determinavam, para cada fórmula (simples ou complexa) e para cada interpretação, se essa fórmula era verdadeira ou falsa nessa interpretação.

Na lógica de predicados, as interpretações chamam-se *modelos* e são compostas por um conjunto de objectos e uma função valorativa de nomes e predicados. O conjunto de objectos, que não pode ser vazio, é o *domínio* de quantificação: é dele que as variáveis recebem os seus valores. A função valorativa define a *referência* dos nomes e a *extensão* dos predicados da linguagem, a partir dos objectos pertencentes ao domínio. Cada nome recebe um objecto único do domínio como sua referência. Cada predicado de um lugar recebe um subconjunto de objectos do domínio como sua extensão (os objectos a que o predicado se aplica); cada predicado de dois lugares recebe como extensão um conjunto de pares ordenados; cada predicado de três lugares um conjunto de triplos ordenados, e assim por diante. Com base nisto, precisamos de definir o que é, para uma fórmula qualquer da linguagem, ser verdadeira ou falsa num modelo.

Uma predicação monádica junta um predicado de um lugar e um nome para gerar uma fórmula atómica; esta fórmula será verdadeira num modelo se a referência do nome (nesse modelo) pertencer à extensão do predicado (nesse modelo). Se a predicação envolver antes um predicado de dois lugares e duas ocorrências de nomes (não necessariamente distintos), é o *par ordenado* formado pelas referências dos nomes que tem de pertencer à extensão do predicado para que a fórmula atómica seja verdadeira. A generalização desta regra para predicados de n lugares (em que n é qualquer número natural maior ou igual a um) é fácil de entender. Às fórmulas atómicas assim geradas podem aplicar-se as cinco operações estudadas na lógica proposicional e as regras semânticas para avaliação das fórmulas moleculares daí resultantes são as mesmas: uma negação será verdadeira num modelo se a fórmula negada for falsa nesse modelo, uma conjunção só será verdadeira se as duas fórmulas que a compõem forem ambas verdadeiras no modelo, etc.

Resta-nos descrever o comportamento semântico da quantificação. Podemos considerar apenas o quantificador universal (e definir $\exists\_$ como sinónimo de $\neg\forall\_\ \neg$). As *instâncias* de uma fórmula universal $\forall v\ \varphi v$ num modelo M são as fórmulas que resultam de (*i*) apagarmos o quantificador $\forall v$ e (*ii*) para cada objecto do domínio de M, substituirmos todas as ocorrências livres da variável v em φv por ocorrências de um nome n desse objecto. Assim, uma fórmula universal terá, em cada modelo, tantas instâncias quantos os objectos existentes no domínio desse modelo. Por exemplo, num modelo com três objectos, nomeados por a, b e c, as instâncias de $\forall x\ Fx$ seriam as fórmulas Fa, Fb e Fc; e as instâncias de $\forall x\ \exists y\ (Ryx \rightarrow Gx)$ seriam $\exists y\ (Rya \rightarrow Ga)$, $\exists y\ (Ryb \rightarrow Gb)$ e $\exists y\ (Ryc \rightarrow Gc)$. Então, uma fórmula universal será verdadeira num modelo M se todas as suas instâncias forem verdadeiras em M; e será falsa se tiver pelo menos uma instância falsa em M.

A semântica da lógica de predicados pode ser estudada com níveis de aprofundamento diferentes. O que acabamos de apresentar nos parágrafos anteriores é a versão simplificada dessa semântica, a qual assenta na suposição de que, em todos os modelos, todos os objectos do domínio têm pelo menos um nome na linguagem. Se pretendemos que os modelos sejam representações matemáticas de maneiras de o mundo ser e de a linguagem se relacionar com ele, esta suposição é pouco realista. Pois quem é que acharia razoável, quando por exemplo passeia na rua ou anda numa praia, supor que cada pedra da calçada e cada grão de areia tem um nome próprio? Mas, pior do que isso, tal suposição é mesmo inviável em geral: ainda que uma linguagem contenha tantos nomes quantos os números naturais, há modelos com domínios maiores do que isso, que nos forçam a reconhecer a existência de objectos sem nome. Uma segunda deficiência da versão simplificada da semântica da lógica de predicados reside no facto de ela violar o princípio da composicionalidade, segundo o qual o valor semântico de qualquer expressão complexa deve ser determinado pelos valores semânticos das expressões mais simples que a compõem. Mas, por exemplo, Fa não é uma parte constituinte de $\forall x\, Fx$. Pela composicionalidade, o valor de $\forall x\, Fx$ e o valor de $\forall x\, \exists y\, (Ryx \rightarrow Gx)$ devem ser determinados pelos valores, respectivamente, de Fx e de $\exists y\, (Ryx \rightarrow Gx)$, as quais são chamadas *fórmulas abertas*, com *variáveis livres*. A versão mais rigorosa, e completamente composicional, da semântica desta linguagem, cujas ideias centrais são devidas ao trabalho de Alfred Tarski, lida com fórmulas abertas e requer uma dupla relativização da verdade das fórmulas, já não apenas a um modelo, mas também a uma atribuição de valores às variáveis em cada modelo. Todavia, para muitos propósitos, a versão simplificada desta semântica revela-se suficiente. Por exemplo, no caso presente, ela é o quanto basta para que se possam apresentar, de um ponto de vista semântico, as definições formais das noções fundamentais de *verdade lógica* e de *consequência lógica*.

O uso de linguagens formais e da formalização pretende, como dissemos, isolar e exibir as características dos argumentos que determinam se eles são válidos ou inválidos, quer dizer, se são logicamente correctos ou incorrectos. Precisamos por isso de definir uma relação de consequência lógica que directamente se aplique, não às frases portuguesas (ou de outra língua natural) que compõem os argumentos, mas às fórmulas que as representam na nossa linguagem formal. As anteriores definições de modelo e de verdade num modelo permitem-nos, precisamente, definir uma relação de consequência entre fórmulas da lógica de predicados: uma fórmula φ é uma *consequência semântica* de um conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\}$ se e somente se, para todos os modelos M, sempre que as fórmulas de Γ são todas verdadeiras em M, φ também é verdadeira em M. Com base nesta definição, podemos então dizer que a representação formalizada de um argumento será semanticamente válida se a sua conclusão for uma consequência semântica das suas premissas. E se uma fórmula φ for verdadeira em todos os modelos sem excepção – o mesmo é dizer, se φ for uma consequência semântica de qualquer que seja o conjunto Γ (mesmo que Γ seja o conjunto vazio) –, dizemos que φ é uma *fórmula válida*. As fórmulas válidas representam na linguagem formal as verdades lógicas da linguagem natural (*i.e.*, frases como por exemplo «Nenhum animal é e não é um mamífero», que são verdadeiras de uma maneira especial, ou especialmente trivial e muito pouco informativa, que muitos consideram envolver um certo tipo de necessidade, a qual parece fundamentar-se mais no significado de algumas expressões do que no modo como as coisas realmente são no mundo).

É importante que o leitor tenha aqui presente que os conceitos definidos de consequência semântica e de fórmula válida são apenas representações formais propostas para os conceitos genuínos de consequência lógica e de verdade lógica que constituem o interesse fundamental e que fornecem a razão de ser da própria lógica. É uma característica que a lógica moderna adquiriu, esta de abordar as questões «O que é uma verdade lógica?» e «O que é isso de uma coisa ser uma consequência lógica de outras coisas?» (enquanto outras áreas disciplinares abordam questões como «O que é o conhecimento?» ou «O que é a justiça?») de uma maneira indirecta, construindo modelos ou representações formais destes conceitos e estudando as suas propriedades. O modo semântico (ou baseado na teoria dos modelos) de o fazer é aquele que predomina, mas não é de modo algum o único. O que acabamos de dizer significa que a adequação de cada uma das representações formais propostas é uma questão em aberto. Os métodos lógicos por si mesmos não resolvem as controvérsias filosóficas a respeito da natureza e do fundamento das verdades lógicas, a respeito de se um certo princípio lógico (como o terceiro excluído ou o princípio da não-contradição) deve mesmo ser aceite sem excepção ou, até, discussões mais circunscritas sobre se uma certa afirmação se segue realmente de tais ou tais outras.

Voltemos então ao sistema formal que estávamos a apresentar. Dadas as definições de fórmula válida e de consequência semântica apresentadas, podemos agora *provar* (ou demonstrar), raciocinando sobre os diversos modelos, que certas fórmulas são válidas e que certas fórmulas são consequências semânticas de outras. Por exemplo, podemos provar que $\forall x\,(Fx \vee \neg Fx)$ é uma fórmula válida, na medida em que podemos mostrar que, para ela ser falsa num modelo, teria de haver um modelo em cujo domínio houvesse um objecto, nomeado por algum nome (por exemplo: a), que pertencesse e não pertencesse à extensão de F (para que Fa e $\neg Fa$ fossem ambas falsas, tornando assim a sua disjunção falsa também, nesse modelo); mas isso é impossível. Analogamente, estipulando que os símbolos $\vDash$ e $\nvDash$ se usam para expressar a relação de consequência semântica e a sua negação, pode-se provar que, na lógica de predicados, entre outras coisas, temos que:

$$\forall x\, Fx \vDash Fa$$

$$Fa \vDash \exists x\, Fx$$

$$\forall x\, \forall y\, Rxy \vDash \forall x\, Rxx$$

$$\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx \nvDash \exists x\,(Fx \wedge Gx)$$

$$\forall x\,(Fx \vee Gx) \nvDash \forall x\, Fx \vee \forall x\, Gx$$

$$\exists x\, \forall y\, Rxy \vDash \forall y\, \exists x\, Rxy$$

$$\forall x\, \exists y\, Rxy \nvDash \exists y\, \forall x\, Rxy$$

Além da linguagem formal e de uma semântica, uma lógica inclui tradicionalmente um sistema dedutivo (por vezes também chamado um *procedimento de prova*): algum método que nos permita, partindo de certas premissas, inferir consequências, passo a passo, seguindo regras muito precisas, até chegar a alguma conclusão. Existem diversos métodos para esse efeito, tais como o método axiomático, o cálculo de sequentes, a dedução natural, o método das árvores invertidas e outros. Todos estes métodos lógicos permitem que façamos demonstrações, que provemos coisas, usando a linguagem formal. Nessa medida, também eles são modelos ou representações formais (cuja adequação tem de ser avaliada) de algo que fazemos nas línguas naturais: o processo de raciocinar correctamente, quer dizer, de inferir correctamente conclusões a partir de premissas. Nos livros mais recentes de introdução à lógica de predicados, os métodos mais usados são a dedução natural ou o método das árvores. Poderemos aqui fornecer apenas exemplos de aplicações desses métodos lógicos.

Suponhamos que queremos estabelecer a conclusão de que «Alguns animais não são mamíferos» a partir das premissas «Nenhum invertebrado é mamífero» e «Alguns animais são invertebrados» (um silogismo no modo *Ferio*, reconhecido por Aristóteles). A tradução destas frases na linguagem da lógica de predicados é, respectivamente, $\forall x\ (Ix \rightarrow \neg Mx)$ e $\exists x\ (Ax \wedge Ix)$, para as premissas, e $\exists x\ (Ax \wedge \neg Mx)$, para a conclusão. Usando o método das árvores, podemos provar esta última fórmula, se tomarmos aquelas duas como premissas. O método das árvores é um método de demonstração por redução ao absurdo, quer dizer, um método que prova X mostrando que se seguem contradições da suposição de $\neg X$ (juntamente com as premissas, se houver algumas). Neste exemplo, começamos então por escrever as duas premissas e a negação da conclusão:

1. $\forall x\ (Ix \rightarrow \neg Mx)$

premissa

2. $\exists x\ (Ax \wedge Ix)$ ✓

premissa

3. $\neg\exists x\ (Ax \wedge \neg Mx)$ ✓

negação da conclusão (para redução ao absurdo)

4. $\forall x \neg (Ax \wedge \neg Mx)$

a partir de 3, dada a equivalência geral entre $\neg\exists$ e $\forall\neg$ [3]

---

[3] A fórmula da linha 4 contém toda a informação que estava na linha 3 e, por isso, esta pode ser ignorada daqui em diante na prova. Em vez de a apagarmos ou de a riscarmos realmente, assinalamos esse facto acrescentando à sua direita o símbolo ✓.

5. $(Aa \wedge Ia)$ ✓

a partir de 2, escolhendo arbitrariamente uma instância verdadeira da existencial

6. Aa

a partir de 5, pela regra da conjunção

7. Ia

a partir de 5, pela regra da conjunção

8. $(Ia \rightarrow \neg Ma)$ ✓

a partir de 1, formando uma instância da universal com o nome 'a'[4]

↙ ↘

9. $\neg Ia$ $\neg Ma$

×

a partir de 8, bifurcando a árvore pela regra da $\rightarrow$ (se uma condicional é verdadeira, ou a sua antecedente é falsa ou a sua consequente é verdadeira); o sinal × indica que o caminho do lado esquerdo se encerrou devido à contradição entre Ia (em 7) e $\neg Ia$ (em 9)

10. $\neg(Aa \wedge \neg Ma)$ ✓

a partir de 4, formando uma instância da universal

↙ ↘

11. $\neg Aa$ $\neg\neg Ma$

× ×

a partir de 10, pela regra da $\wedge$ negada (se negamos uma conjunção, temos de negar algum dos seus membros); os dois caminhos fecharam (e com eles a própria árvore), devido às contradições das linhas 6 e 11 (Aa e $\neg Aa$) e 9 e 11 ($\neg Ma$ e $\neg\neg Ma$)

---

[4] Em contraste com o que dissemos na nota anterior, neste caso específico, ao formarmos uma instância de uma fórmula universal, *não* acrescentamos a esta o símbolo ✓, pois podemos vir a ter a necessidade, mais adiante na prova, de formar outras instâncias da mesma universal – a qual deve por isso ficar disponível para ser reutilizada.

O facto de todos os caminhos da árvore terem revelado contradições mostra que a negação de $\exists x\ (Ax \wedge \neg Mx)$ não é consistente com a afirmação de $\forall x\ (Ix \rightarrow \neg Mx)$ e de $\exists x\ (Ax \wedge Ix)$. Fica assim provado que $\exists x\ (Ax \wedge \neg Mx)$ é uma consequência dedutiva do conjunto formado pelas duas premissas.

Na dedução natural, é igualmente possível fazer demonstrações por redução ao absurdo, mas também há provas directas. É um método em que as provas se apresentam linearmente, com as premissas nas primeiras linhas, cada passo intermédio ocupando uma linha subsequente e a conclusão na última linha. Cada linha é numerada e, além da fórmula que nela é inferida, inclui a indicação das linhas anteriores a partir das quais a inferência foi feita, bem como da regra dedutiva que autoriza essa inferência. A dedução natural tem a vantagem de permitir introduzir suposições temporárias na cadeia de raciocínio: são fórmulas que não podemos realmente afirmar (pois não temos garantias para elas), mas que escrevemos com o intuito de examinar que consequências seria possível extrair daí; quando esse exame termina, pomos fim à suposição (descartamo-la) e prosseguimos com o raciocínio principal, baseado apenas nas premissas. De facto, a experiência no uso de sistemas dedutivos formais mostra que, muitas vezes, é difícil provar coisas se não pudermos recorrer a suposições no raciocínio. Além disso, nos argumentos do dia-a-dia nós usamos efectivamente suposições e este método tem precisamente a pretensão de, apesar da sua formalidade, ser o mais próximo possível do raciocínio em linguagem natural. O uso de suposições numa prova requer que disponhamos de algum método para indicar quando é que uma suposição está ainda a ser usada e quando é que já foi descartada. Há diversas maneiras de o fazer, mas a que se tem revelado mais prática é um sistema de numeração no lado esquerdo de cada linha em que, seguindo instruções incluídas na própria regra usada nessa linha, se indicam as linhas que são os «fundamentos últimos» em que se apoia a afirmação que está a ser feita; torna-se assim fácil verificar se há alguma suposição entre esses fundamentos e se a conclusão da prova se apoia unicamente em premissas.

Para exemplificar o uso da dedução natural, vamos considerar um argumento simples e famoso que costumava ser apontado como caso paradigmático de uma inferência correcta com que a lógica tradicional (anterior a Frege) não conseguia lidar: «Todos os cavalos são animais; logo, todas as cabeças de cavalo são cabeças de animal». De que modo é que, no predicado complexo «_ é uma cabeça de cavalo», estão relacionados os predicados mais simples «_ é uma cabeça de _» e «_ é um cavalo» (que podemos representar pelas letras $B\_\ \_$ e $C\_$, respectivamente)? Dizer, de uma coisa x, que é uma cabeça de cavalo é dizer que existe um y tal que y é um cavalo e x é uma cabeça de y. Usando $A\_$ para representar «_ é um animal», a conclusão do argumento deixa-se então formalizar como $\forall x\ (\exists y\ (Cy \wedge Bxy) \rightarrow \exists y\ (Ay \wedge Bxy))$. A formalização da premissa é fácil e escrevemo-la na primeira linha da prova:

1	(1)	$\forall x\,(Cx \rightarrow Ax)$	premissa
2	(2)	$\exists y\,(Cy \wedge Bay)$	suposição
3	(3)	$(Cb \wedge Bab)$	suposição
3	(4)	Cb	3, Eliminação da $\wedge$
3	(5)	Bab	3, Eliminação da $\wedge$
1	(6)	$(Cb \rightarrow Ab)$	1, Eliminação do $\forall$
1,3	(7)	Ab	4,6, Eliminação da $\rightarrow$
1,3	(8)	$(Ab \wedge Bab)$	5,7, Introdução da $\wedge$
1,3	(9)	$\exists y\,(Ay \wedge Bay)$	8, Introdução do $\exists$
1,2	(10)	$\exists y\,(Ay \wedge Bay)$	2,3,9, Eliminação do $\exists$
1	(11)	$(\exists y\,(Cy \wedge Bay) \rightarrow \exists y\,(Ay \wedge Bay))$	2,10, Introdução da $\rightarrow$
1	(12)	$\forall x\,(\exists y\,(Cy \wedge Bxy) \rightarrow \exists y\,(Ay \wedge Bxy))$	11, Introdução do $\forall$

Como se vê neste exemplo, cada uma das regras diz respeito ao modo como se pode introduzir ou eliminar uma constante lógica da linguagem (*i.e.*, o modo como se raciocina *em direcção a*, ou *a partir de*, uma conjunção, uma condicional, etc.). O caminho seguido nesta prova faz um uso crucial de suposições: na linha 2, supusemos que um certo objecto, arbitrariamente chamado '*a*', é uma cabeça de cavalo; e isso (aliado à informação da linha 1, de que todos os cavalos são animais) permitiu-nos tirar a consequência, na linha 10, de que *a* é uma cabeça de animal. Fica assim provado que, *se a* é uma cabeça de cavalo, *então a* é uma cabeça de animal (e esta afirmação já não depende daquela suposição). Uma vez que *a* foi de facto arbitrariamente escolhido (não usámos nenhuma informação específica acerca dele), o que provámos para *a* vale também para qualquer outro objecto, e então conclui-se, na linha 12, que *todas* as cabeças de cavalo são cabeças de animal. *Quod erat demonstrandum.*

5. Teoria da identidade

A lógica de predicados, tal como a descrevemos na secção anterior, possui uma capacidade expressiva muito grande e capta um conjunto muito abrangente de verdades lógicas e de formas de inferência válida. No entanto, ela possui limitações e, por isso, diversas extensões dessa lógica têm sido estudadas e propostas, de modo a superá-las. Consideraremos aqui a primeira e mais importante dessas extensões, que é a lógica de predicados com identidade (LPr=).

Como poderemos formalizar a frase «Narciso só gosta de si próprio»? Se adoptarmos a letra «*a*» para representar o nome «Narciso» e a letra «*G*_ _» para representar o predicado «_ gosta de _», podemos escrever *Gaa* para dizer que Narciso gosta dele próprio. Mas como é que podemos representar o «só», ou seja, a ideia de que não há mais ninguém de quem ele goste? Para isso, precisamos do conceito de identidade (também chamada *identidade numérica*), quer dizer, daquele conceito que está envolvido na afirmação de que Manuel Tiago (o autor de *Até Amanhã, Camaradas* e de outros livros) *é* Álvaro Cunhal. Quando dizemos isto, queremos dizer que eles são *a mesma pessoa*. Alegadamente, terá sido também este conceito que Heraclito tinha em vista quando disse que não podemos entrar duas vezes nas águas do mesmo rio: impressionado com o fenómeno da mudança, considerava que o rio em que entramos na primeira vez e o rio em que entramos na segunda vez *não são o mesmo*. Voltemos a Narciso: ele não gosta de nenhuma *outra* pessoa, quer dizer, de nenhuma pessoa que não seja (numericamente) *idêntica* a Narciso. Ou, dito de outro modo: todas as pessoas de quem Narciso gosta têm a particularidade de serem idênticas a (i.e., de serem a mesma pessoa que) Narciso. Em símbolos:

$$(Gaa \land \forall x\,(Gax \rightarrow x = a))$$

A identidade é um predicado de dois lugares. Se seguíssemos a convenção anterior, formalizaríamos «Tiago é Cunhal» como *Iab*, em que «*I*_ _» seria o predicado de identidade. Em vez disso, usamos o símbolo matemático =, que escrevemos no meio (e não antes) dos dois nomes, assim: $a = b$. Analogamente, em vez de formalizarmos «Tiago não é Camões» como $\neg Iac$, preferimos fazê-lo com o símbolo mais habitual, assim: $a \neq c$. Porém, mais importante do que estas convenções gramaticais, o que torna a teoria da identidade uma extensão da lógica de predicados é a decisão de adoptar = como *um predicado lógico* (que irá receber um tratamento análogo ao dos quantificadores e das conectivas proposicionais). O que justifica esta decisão é a convicção de que «Todas as coisas são idênticas a si mesmas» é uma verdade *lógica* e de que «Tiago é comunista» é uma consequência *lógica* de «Tiago é Cunhal e Cunhal é comunista»[5].

O enriquecimento da linguagem da lógica de predicados com o novo predicado = obriga a que, na definição de verdade num modelo, seja também acrescentada

[5] Podemos comparar estes exemplos com os seguintes: «Nenhuma mulher solteira é casada» é uma verdade, de um certo tipo especial (alegadamente, uma verdade conceptual ou analítica), mas que não é reconhecida como verdade lógica; e «Beatriz é uma mulher» tem como consequência «Beatriz não é um peixe», mas a consequência, neste caso, não é reconhecida como consequência lógica, que deva resultar das regras de inferência ou dos princípios semânticos de um sistema lógico.

uma cláusula específica para as fórmulas com a mesma forma que $a = b$. Isso é fácil: tais fórmulas serão verdadeiras num modelo M se os dois nomes que nelas ocorrem tiverem em M a mesma referência, isto é, se a função valorativa lhes atribuir como referência o mesmo objecto do domínio; de outro modo, serão falsas. Isto é suficiente para que se possa provar, por exemplo, que $\forall x \exists y\, x = y$ é uma fórmula válida de LPr=. Pois, se esta fórmula não fosse válida, haveria pelo menos um modelo no qual ela seria falsa. Nesse modelo, haveria algum objecto, arbitrariamente nomeado por «a», tal que $\exists y\, a = y$ seria falsa. Mas, para esta última fórmula ser falsa, todas as suas instâncias no modelo teriam de ser falsas, incluindo a instância $a = a$, o que não é possível, dada a cláusula que acabámos de descrever para este género de fórmulas.

As regras de inferência relativas ao predicado de identidade dependem, como é natural, do género de método lógico que adoptarmos. No método das árvores, por exemplo, precisamos de incluir duas novas regras. A primeira diz que devemos fechar qualquer caminho no qual ocorra uma fórmula com a mesma forma que $a \neq a$ (já que corresponderá sempre a uma falsidade lógica). E a segunda diz que se, num caminho aberto, ocorrer uma afirmação de identidade, por exemplo $a = b$, e também uma qualquer outra fórmula em que ocorra um desses nomes, por exemplo Gaa, podemos acrescentar ao caminho uma nova fórmula semelhante a esta última, mas com o outro nome nos lugares (um ou mais) ocupados por este – por exemplo, neste caso, podemos acrescentar Gbb ao caminho (mas também poderíamos escolher antes Gab ou Gba). Esta segunda regra pode ser vista como uma aplicação de um princípio fundamental, geralmente conhecido como Lei de Leibniz ou Lei da Indiscernibilidade dos Idênticos, que diz que, se uma coisa x e uma coisa y forem a mesma coisa, então tudo o que for verdadeiro de x será também verdadeiro de y.

Usando o novo predicado de identidade, há diversos géneros de frases da linguagem natural que passamos a poder formalizar. Um exemplo um pouco mais complexo do que aquele que analisámos antes é o da frase «As pessoas que só gostam de si próprias são tristes». Ao dizer isto, estamos a atribuir tristeza a todas as pessoas que têm uma certa propriedade complexa C, ou seja, estamos a dizer algo com a forma geral $\forall x\, (Cx \rightarrow Tx)$. A propriedade complexa C é a propriedade que antes atribuímos a Narciso (a saber: gostar de si mesmo e de mais ninguém); por isso, podemos substituir Cx por $(Gxx \wedge \forall y\, (Gxy \rightarrow y = x))$, obtendo a seguinte formalização:

$$\forall x\, ((Gxx \wedge \forall y\, (Gxy \rightarrow y = x)) \rightarrow Tx)$$

Interessante também é a capacidade que LPr= tem de representar afirmações numéricas, como por exemplo «Há pelo menos duas sereias». É o predicado de identidade que permite fazê-lo, pois as sereias serão pelo menos *duas* se forem *diferentes* uma da outra:

$$\exists x \, \exists y \, ((Sx \land Sy) \land x \neq y)$$

Se quisermos dizer que há *pelo menos três* sereias, podemos fazê-lo assim (omitindo alguns parêntesis, que só dificultariam a leitura):

$$\exists x \, \exists y \, \exists z \, (Sx \land Sy \land Sz \land x \neq y \land y \neq z \land x \neq z)$$

Agora, se negássemos esta última fórmula, estaríamos a dizer que não é verdade que as sereias sejam três ou mais, ou seja, que elas são *no máximo duas.* Uma maneira equivalente de o fazer é:

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, ((Sx \land Sy \land Sz) \rightarrow (z = x \lor z = y))$$

Por fim, se gerarmos a conjunção da afirmação de que *há pelo menos duas* com a afirmação de que *não há mais do que duas,* obteremos uma fórmula que será verdadeira se e somente se existirem (exactamente) duas sereias. Este procedimento é obviamente generalizável, o que significa que, para todo o número natural n e para toda a propriedade (simples ou complexa) P, podemos sempre representar na linguagem de LPr= a afirmação de que há n Ps. Deste modo, as afirmações da aritmética podem ser representadas nesta linguagem, sem que precisemos de introduzir nomes para os números.

Também as frases que, em vez de nomes como «Platão», usam *descrições definidas* como «o fundador da Academia» são formalizáveis com os recursos da LPr=. O método para formalizar estas frases foi proposto por Bertrand Russell, na sua famosa Teoria das Descrições. Segundo este método, a frase «O fundador da Academia era aristocrata» pode ser parafraseada como «Existe pelo menos um x tal que: (i) x fundou a Academia e (ii) mais ninguém fundou a Academia e (iii) x era aristocrata». Como sabemos agora, dizer que ninguém mais além de x fundou a Academia é o mesmo que dizer que, para todo o y, se y fundou a Academia, então y é idêntico a x. Portanto, aceitando a paráfrase, a frase pode ser formalizada como:

$$\exists x \, (Fxa \land \forall y \, (Fya \rightarrow y = x) \land Ax)$$

Uma vantagem deste método de formalização é, segundo Russell, que ele permite distinguir três maneiras que uma frase com a forma «o *F* é *G*» tem de poder ser falsa. Efectivamente, ela pode ser falsa: (i) porque não há *F*s, ou (ii) porque há mais do que um *F*, ou (iii) porque, apesar de haver um único *F*, ele não é *G*. Russell defendeu que a frase «O actual rei de França é calvo» é falsa da maneira (i) e não pela razão de não se encontrar nenhum rei de França no conjunto das pessoas calvas – o que seria problemático, visto que também não se encontra nenhum no conjunto das pessoas não-calvas[6].

6. Correcção e completude

A lógica de predicados com identidade possui uma semântica bem definida, dada em termos de modelos. Essa semântica diz-nos, para cada fórmula da linguagem formal, quais são exactamente as condições a que um modelo tem de obedecer para que a fórmula seja verdadeira nesse modelo. Além disso, ela determina como fórmulas válidas (correspondentes a verdades lógicas) aquelas que são verdadeiras em todos os modelos; e, por fim, diz-nos que uma fórmula φ é uma consequência semântica de um conjunto de fórmulas Γ se e somente se φ for verdadeira em todos os modelos nos quais as fórmulas do conjunto Γ sejam todas verdadeiras.

Existem, para esta lógica, diversos sistemas dedutivos. Exemplificámos os dois que são actualmente mais usados: o método das árvores e a dedução natural. Estes métodos dão-nos um conjunto de regras de inferência muito bem definidas, por cuja aplicação podemos derivar certas fórmulas a partir de fórmulas dadas. Esta derivação de fórmulas obedecendo a regras é entendida como um processo de demonstração: cada fórmula que conseguimos derivar é vista como uma fórmula que demonstramos. Mas estará correcta esta perspectiva? Desejavelmente, a noção de demonstração deverá estar ligada à noção de verdade, pois demonstrar alguma coisa é provar que o que ela diz é verdade. Mas esta maneira de falar só terá justificação se as regras de inferência que seguimos forem realmente fiáveis, isto é, se pudermos estar seguros de que, seguindo tais regras, tudo o que demonstrarmos será verdade e todas as verdades poderão ser demonstradas. Colocar esta questão a respeito de um sistema dedutivo equivale a perguntar se o sistema é correcto[7] e completo.

As regras de inferência que compõem um sistema dedutivo podem ser vistas como fornecendo, no seu conjunto, uma definição de demonstrabilidade: uma fórmula φ será *demonstrável* a partir de um conjunto de fórmulas Γ se e somente se φ puder ser derivada pelas regras do sistema a partir das fórmulas do conjunto Γ. Tal como adoptámos antes o símbolo $\vDash$ (e a sua negação $\nvDash$) para representar a

[6] Esta opinião de Russell é controversa. Outros autores consideram que, uma vez que não existe actualmente nenhum rei de França, aquela frase não fala acerca de nada e, por isso, quem a proferir nem dirá algo que seja verdadeiro nem dirá algo que seja falso.

[7] «Correcto» e «correcção» têm sido adoptados como traduções portuguesas habituais dos termos ingleses «*sound*» e «*soundness*».

relação de consequência semântica, podemos agora adoptar o símbolo $\vdash$ (e a sua negação $\nvdash$) para representar a noção de demonstrabilidade. Como forma de responder à questão levantada no parágrafo anterior, o melhor que os lógicos podem fazer, usando os métodos formais ao seu dispor, é comparar as duas noções – a noção de consequência semântica e a noção de demonstrabilidade. Apesar de terem definições bem distintas (a primeira em termos de modelos e a segunda em termos de regras de inferência), será que estas duas noções coincidem quanto à sua extensão? Esta comparação faz-se usando os dois conceitos seguintes:

> *Correcção*: Um sistema dedutivo S é correcto (relativamente a uma semântica dada) se e somente se, para toda a fórmula φ e todo o conjunto de fórmulas Γ, se $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma \vDash \varphi$. (O sistema não permite provar fórmulas «erradas», i.e. fórmulas que não sejam consequências semânticas de Γ.)

> *Completude*: Um sistema dedutivo S é completo (relativamente a uma semântica dada) se e somente se, para toda a fórmula φ e todo o conjunto de fórmulas Γ, se $\Gamma \vDash \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$. (O sistema permite provar todas as fórmulas «certas», i.e. que sejam consequências semânticas de Γ.)

O método das árvores e o método da dedução natural (assim como outros métodos, hoje menos usados, como o cálculo axiomático ou o cálculo de sequentes) que costumam ser apresentados para a lógica de predicados (com ou sem identidade) constituem sistemas dedutivos correctos e completos. A noção de demonstrabilidade que eles implicitamente definem coincide exactamente com a relação de consequência semântica. Este facto, além de nos assegurar que estamos a trabalhar com um método lógico fiável, pode ser usado de modo útil, por exemplo, permitindo-nos provar que uma fórmula φ *não é demonstrável* a partir de um conjunto Γ através da construção de um contra-exemplo, quer dizer, de um modelo no qual todas as fórmulas de Γ são verdadeiras mas φ é falsa. Pois, se existe um tal contra-exemplo e se o sistema dedutivo é correcto, então não haverá nenhuma demonstração de φ a partir de Γ. Por outro lado, também podemos mostrar que uma fórmula ψ não é falsa em nenhum modelo e, depois, mencionar a completude como prova de que ψ é demonstrável a partir de *qualquer* conjunto de premissas.

Este último exemplo torna saliente que, nas anteriores definições de correcção e de completude, nada foi dito a respeito do tamanho do conjunto Γ de premissas. Esse conjunto pode ser finito, infinito ou mesmo vazio. Quando Γ é vazio, escrevemos simplesmente $\vDash \varphi$ para dizer que φ é uma fórmula válida, ou seja, que é verdadeira em todos os modelos. Analogamente, então, escrevemos $\vdash \varphi$ para dizer que φ é um *teorema*, quer dizer, uma fórmula para a qual existe uma demonstração que não requer nenhuma premissa (o que é equivalente a dizer que φ é demonstrável a partir de qualquer conjunto de premissas). Neste caso particular em que Γ é o conjunto vazio, a correcção diz-nos que todos os teoremas são fórmulas válidas e a completude diz-nos que todas as fórmulas válidas são teoremas.

7. Lógica modal proposicional

A lógica modal é a lógica do possível e do necessário. Aqui iremos considerar apenas a parte proposicional dessa lógica (LMP), o que significa que regressaremos à linguagem da lógica proposicional clássica – com as suas letras esquemáticas de frase, cinco conectivas e parêntesis – e a enriqueceremos com dois operadores modais: a caixa, isto é, o símbolo $\Box$, para representar o advérbio «necessariamente» ou a expressão «é necessário que»; e o diamante, isto é, o símbolo $\Diamond$, para representar «possivelmente» ou «é possível que». Do ponto de vista gramatical, estes operadores funcionam do mesmo modo que a negação: prefixam-se a uma frase para gerar uma nova frase. Quanto ao seu significado, podemos começar por contrastá-lo da seguinte maneira: dada uma afirmação X, (i) $\neg X$ será verdadeira se e somente se X não for verdadeira, (ii) $\Diamond X$ será verdadeira se e somente se houver alguma possibilidade de X ser verdadeira e (iii) $\Box X$ será verdadeira se e somente se X for uma verdade necessária.

Na realidade, tal como antes no caso dos quantificadores, também aqui poderíamos adoptar apenas um operador modal e definir o outro com o auxílio da negação. Pois dizer que uma coisa é necessariamente de um certo modo é o mesmo que dizer que não é possível que ela não seja desse modo (ou seja, $\Box X$ tem a mesma força que $\neg\Diamond\neg X$); e, em sentido inverso, dizer que uma coisa poderia ser de um certo modo equivale a dizer que não é necessário que ela não seja desse modo (ou seja, $\Diamond X$ diz o mesmo que $\neg\Box\neg X$). Por comodidade, e para facilitar a leitura das fórmulas, usaremos os dois operadores modais.

Dispondo destes novos símbolos, há diversas frases que passamos a poder formalizar, tendo em conta que a linguagem natural, com a sua criatividade característica, tem muitas maneiras de expressar as noções modais. Eis alguns exemplos: «Platão poderia ser um político famoso», «As contradições não podem ser verdadeiras», «Necessariamente, se eu penso, então existo», «O mundo tem de ter um começo no tempo», «O céu é azul, mas poderia ser verde ou laranja», «Necessariamente, amanhã haverá ou não haverá uma batalha naval». De especial interesse, para a lógica modal, são as frases nas quais os operadores modais são múltiplos e interagem uns com os outros, como por exemplo nestes casos:

1a. Se é necessário que Deus exista, então é possível que seja necessário que Deus exista.

1b. $(\Box p \rightarrow \Diamond\Box p)$

2a. Necessariamente, se Deus existe, então é possível que seja necessário que Deus exista.
2b. $\Box(p \rightarrow \Diamond\Box p)$

3a. É possível que o universo tenha de ter um fim, mas não é possível que isso seja impossível.
3b. $(\Diamond\Box p \wedge \neg\Diamond\neg\Diamond p)$

4a. Necessariamente, se posso ser poeta, então posso necessariamente ser poeta.
4b. $\Box(\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p)$

Os operadores modais não são verofuncionais e isso dificulta a tarefa de construir uma semântica para a lógica modal. Enquanto na lógica proposicional clássica pudemos usar tabelas de verdade para explicar o modo como funcionam semanticamente as conectivas, já não podemos fazer o mesmo quando acrescentamos caixas e diamantes à linguagem formal. Ao contrário do que acontece com a negação e com as outras conectivas, aqui, o valor de verdade de uma frase X não determina de modo único o valor de verdade dos compostos $\Box X$ e $\Diamond X$. Duas frases X e Y podem ser ambas verdadeiras e, no entanto, $\Box X$ e $\Box Y$ podem ter valores diferentes: por exemplo, isso passa-se com X = «O céu é azul» e Y = «Se o céu é azul, então o céu é azul». E também existe a possibilidade de duas frases X e Y serem ambas falsas, ao mesmo tempo que $\Diamond X$ e $\Diamond Y$ têm valores diferentes: é o que acontece, por exemplo, com X = «Cunhal não é comunista» e Y = «Cunhal não é Cunhal». De facto, há verdades que são necessárias e outras que não o são, e o mesmo se aplica às falsidades.

Para ultrapassar este obstáculo, os lógicos contemporâneos (merecendo aqui especial destaque o trabalho de Saul Kripke no início dos anos 1960s) recuperaram a noção leibniziana de uma pluralidade de mundos possíveis e procuraram entender as verdades necessárias como verdades que o são, não apenas neste mundo em que efectivamente vivemos, mas *em todos os mundos possíveis*. A noção intuitiva de mundo possível parece simples de compreender: quando imaginamos que uma certa coisa poderia ser diferente do que é, o que estamos a imaginar é um mundo possível no qual essa coisa é diferente (e tudo o resto permanece igual). Quando digo que eu poderia ter nascido na Índia, isso pode ser interpretado como querendo dizer que há um mundo possível no qual eu, em vez de nascer em Portugal, nasci na Índia. Analogamente, quando digo que eu não poderia ser um peixe, isso deixa-se interpretar como significando que não há nenhum mundo possível no qual eu seja um peixe. Os mundos possíveis são assim uma espécie de cenários alternativos e completos (uma vez que tudo neles se encontraria especificado).

Obviamente, o mundo em que efectivamente estamos – que os lógicos se habituaram a chamar «o mundo actual» – é um dos mundos possíveis.

É claro, no entanto, que estas explicações da noção de mundo possível são insuficientes. Se quisermos levar os mundos possíveis a sério (como muitos filósofos contemporâneos fazem), teremos de perguntar o que é que eles realmente são. Têm sido propostas diferentes concepções a esse respeito. Alguns consideram que os mundos possíveis são exactamente como o mundo actual: compostos de objectos físicos, situados no espaço e no tempo (ou com objectos fora do tempo, se tal for possível), mas um espaço e um tempo que não é o deste mundo. Outros consideram antes que os mundos possíveis são entidades abstractas, como conjuntos de proposições ou, então, modos diferentes de dispor e combinar as coisas deste mundo. Outros ainda defendem, mais simplesmente, que, tal como as fadas, os mundos possíveis são coisas que não existem, mas a respeito das quais podemos fazer afirmações verdadeiras. A controvérsia acerca deste assunto é bastante acesa, mas o desenvolvimento da lógica modal não é afectado por ela, na medida em que, qualquer que venha a ser a resposta que pareça mais adequada, ela serve para a lógica. Quer dizer, para o trabalho que a lógica modal faz com eles, os mundos possíveis podem ser objectos de qualquer tipo: é preciso apenas que nunca haja falta deles e que, a respeito de cada mundo μ, possamos dizer coisas como «a fórmula φ é verdadeira (ou falsa) em μ».

Tal como acontecia na lógica de predicados, a semântica da lógica modal proposicional (LMP) é dada em termos de modelos. Para os diferenciar, podemos chamar-lhes modelos$_{LPM}$, sempre que o contexto não torne isso suficientemente claro. Um modelo$_{LPM}$ é composto por: (i) um conjunto M de mundos possíveis; (ii) uma relação binária – chamada relação de acessibilidade – definida sobre esse conjunto M; e (iii) uma função que atribui um dos dois valores de verdade a cada letra esquemática de frase em cada mundo pertencente a M. A relação de acessibilidade é um instrumento necessário para dar representação formal à noção de possibilidade relativa. De facto, quando pensamos e falamos acerca do possível e do necessário, muitas vezes relativizamos as nossas afirmações modais a certas situações de referência. Por exemplo, a respeito de uma mulher que está casada, podemos dizer que ela pode divorciar-se; mas, se tomarmos como referência uma outra situação em que ela é solteira, o que na situação anterior era possível agora já não é. Outro exemplo: relativamente ao mundo actual, não é possível que eu vá amanhã assistir a um espectáculo na Ópera do Tejo; mas, relativamente a um mundo possível no qual o terramoto de Lisboa de 1755 não aconteceu e aquele edifício foi preservado, tal seria possível. Neste caso, estamos a considerar três mundos possíveis – o mundo actual (μ_0), o mundo em que a Ópera do Tejo foi preservada (μ_1) e o mundo em que vou amanhã assistir a um espectáculo na Ópera do Tejo (μ_2) –, e podemos apreciar que o que se passa em μ_2 é possível relativamente à situação existente em μ_1 (dizemos então que μ_2 é acessível a partir de μ_1, ou que μ_1 *vê* μ_2), mas não é possível relativamente à situação actual (i.e., μ_0 não vê μ_2).

Dado um modelo *d*, com o seu conjunto de mundos, a sua relação de acessibilidade entre mundos e a sua valoração das letras esquemáticas da linguagem em cada mundo, podemos definir, para todas as fórmulas de LMP, em que condições é que elas são verdadeiras em cada um dos mundos de *d*. As fórmulas simples, constituídas apenas por uma letra, recebem em cada mundo o valor de verdade que a função do modelo lhes atribui. As negações, conjunções, disjunções, condicionais e bicondicionais – ou seja, os compostos verofuncionais – recebem em cada mundo o valor que as respectivas tabelas de verdade determinam. Por exemplo, a conjunção $(p \wedge q)$ será verdadeira num mundo μ se e somente se p for verdadeira em μ e q for verdadeira em μ. Isto significa que o valor destes compostos verofuncionais em cada mundo não depende em nada do valor que os seus componentes imediatos tenham noutros mundos. O mesmo já não acontece com as fórmulas modalizadas, pois uma fórmula $\Box\varphi$ será verdadeira num mundo μ se e somente se φ for verdadeira em todos os mundos vistos por μ; e $\Diamond\varphi$ será verdadeira num mundo μ se e somente se φ for verdadeira pelo menos num mundo visto por μ.

Com base nestas definições de modelo$_{\text{LPM}}$ e de verdade num mundo, podemos finalmente definir as noções de fórmula válida e de consequência semântica. Uma fórmula φ será válida (em símbolos: $\models \varphi$) se e somente se φ for verdadeira em todos os mundos de todos os modelos. E uma fórmula φ será uma consequência semântica de um conjunto de fórmulas Γ (em símbolos: $\Gamma \models \varphi$) se e somente se φ for verdadeira em todos os mundos de cada modelo nos quais as fórmulas pertencentes a Γ sejam todas verdadeiras.

A lógica modal proposicional é uma extensão da lógica proposicional clássica e, por isso, todas as fórmulas válidas desta são também válidas naquela. A questão de saber quais são as novas validades trazidas pela lógica modal levanta um problema filosófico importante, pois não existe consenso suficiente a respeito de quais são, no domínio das modalidades, as verdades lógicas que deveríamos reconhecer como tais. Por exemplo, será $(\Box p \rightarrow \Box\Box p)$ uma verdade lógica? Será $\Box\Diamond p$ uma consequência lógica de $\Diamond\Box p$? Talvez sejam. Depende. O modo como os lógicos contemporâneos (desde os tempos de C. I. Lewis) têm lidado com este problema é desenvolvendo, não um, mas vários sistemas de lógica modal – estudando bem as propriedades de cada um deles e procurando relacionar depois, de algum modo, esta multiplicidade de lógicas modais com a reconhecida multiplicidade de conceitos diferentes de necessidade e possibilidade que usamos em áreas de estudo distintas.

Pela definição dada, uma fórmula de LMP será válida se for verdadeira em todos os mundos de todos os modelos. É então óbvio que a extensão do conceito de fórmula válida dependerá do conjunto dos modelos disponíveis. Uma fórmula que é válida relativamente a um certo conjunto de modelos poderá não o ser relativamente a um conjunto maior, onde podem surgir mundos, antes não incluídos, nos quais a fórmula seja falsa. A maneira apropriada de fazer variar o conjunto de modelos é impondo condições diferentes à relação de acessibilidade entre mundos que faz parte de cada modelo. Explicámos o significado que atribuímos a esta relação binária, mas não dissemos mais nada a seu respeito. Será uma relação simétrica, segundo a qual sempre que um mundo μ_2 é possível relativamente a um mundo μ_1, μ_1 também é possível relativamente a μ_2 (μ_1 e μ_2 vêem-se um ao outro)? Será uma relação transitiva? Que outras propriedades terá? Convém revermos aqui algumas das propriedades mais frequentes das relações binárias. Uma relação binária R definida sobre um conjunto A pode ser:

- *serial* (em A) se e somente se para todo o $x \in A$, existe algum $y \in A$ tal que Rxy
- *reflexiva* (em A) se e somente se para todo o $x \in A$, Rxx
- *simétrica* se e somente se para todo o x e todo o y, se Rxy então Ryx
- *transitiva* se e somente se para todo o x, y e z, se Rxy e Ryz então Rxz
- *total* (em A) se e somente se para todo o x e $y \in A$, Rxy

Os diversos sistemas de lógica modal diferem entre si precisamente pelas condições diferentes que impõem à relação de acessibilidade entre mundos. Os sistemas mais conhecidos e mais usados são os seguintes:

Sistema	*A relação de acessibilidade tem de ser*
K	nenhuma condição
D	serial (em M)
T	reflexiva (em M)
B	reflexiva (em M) e simétrica
S4	reflexiva (em M) e transitiva
S5	reflexiva (em M), simétrica e transitiva

A lógica K é uma lógica muito fraca, com poucas fórmulas válidas (porque é aquela cujo conjunto de modelos é maior, já que não impõe nenhuma condição à relação R). Apesar disso, todas as fórmulas que resultem da necessitação de (ou prefixação do operador $\Box$ a) validades da lógica proposicional clássica são válidas em K. Por exemplo: $\Box(p \vee \neg p)$, $\Box(p \rightarrow p)$, $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow p))$, $\Box((p \wedge q) \rightarrow p)$, etc., são fórmulas válidas nesta lógica. Além disso, segundo K, se uma condicional e o seu antecedente são ambos necessários, então o seu consequente também será necessário; quer dizer, a lógica K autoriza a distribuição do operador de necessidade sobre a condicional, como ocorre na seguinte validade: $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$. Outras validades em K são, por exemplo, $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ e

$(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$. Mas, em K, de uma fórmula ser necessariamente verdadeira, não se segue que ela seja verdadeira, nem sequer que isso seja possível. Apesar da sua fraqueza, K é a base sobre a qual se constroem as outras lógicas (listadas acima). Como todos os modelos de qualquer das outras lógicas são modelos de K, as fórmulas válidas em K são também válidas em todas as outras lógicas. As outras lógicas são extensões de K, que lhe acrescentam novas validades.

Na lógica D, a acessibilidade é serial, o que significa que todos os mundos vêem algum mundo. A serialidade de R juntamente com as condições de verdade de $\Box\varphi$ garantem que, sempre que uma fórmula $\Box\varphi$ é verdadeira num mundo μ, há algum mundo que μ vê e φ é verdadeira nesse mundo. Ora, se φ é verdadeira nalgum mundo visto por μ, então $\Diamond\varphi$ é verdadeira em μ. Portanto, ao contrário do que acontecia em K, em D a necessidade implica possibilidade (a fórmula $\Box p \rightarrow \Diamond p$ é válida em D).

Na lógica T, a acessibilidade é reflexiva, o que significa que todos os mundos se vêem a si próprios. Repare-se que a reflexividade implica serialidade e, por isso, $\Box p \rightarrow \Diamond p$ também é válida em T. Mas T é ainda mais forte do que D e, em T, temos pela primeira vez um conceito de necessidade «alética», quer dizer, um conceito que obedece ao princípio de que a necessidade implica verdade: se $\Box\varphi$ é verdadeira num mundo μ, então φ também é verdadeira em μ (uma vez que μ se vê a si próprio).

Há alguma necessidade que não seja alética? Sim, a chamada necessidade moral, que se expressa em afirmações do género de «As promessas têm de ser cumpridas». Pois é sabido que as pessoas nem sempre fazem o que devem. O sistema D, com o seu princípio característico $\Box p \rightarrow \Diamond p$ (o qual pode ser interpretado como expressão do princípio kantiano de que «o dever implica poder»), tem sido visto por muitos autores como podendo ser adoptado como sistema de «lógica deôntica». Nesta lógica, o possível é aquilo que é moralmente aceitável ou permissível, enquanto o necessário é o obrigatório, aquilo que é exigido pelos princípios morais.

Já a necessidade epistémica é claramente alética, ou seja, verifica o princípio $\Box p \rightarrow p$ da lógica T. Na chamada «lógica epistémica», o operador de necessidade é interpretado como sinónimo de «É sabido que» e considera-se que o possível é aquilo que é consistente com o que se sabe. Será a lógica do conhecimento uma lógica mais forte do que T? Os epistemólogos discutem a correcção do chamado «princípio da introspecção», que afirma que se sabemos que p, então sabemos que sabemos que p. Se a lógica epistémica tiver de validar este princípio, talvez seja melhor procurá-la em S4, onde $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ é uma fórmula válida.

Os sistemas B e S4 são ambos extensões de T, mas nenhum é mais forte do que o outro. Todas as fórmulas válidas em T são válidas em B e em S4, mas há fórmulas que são válidas em B e não em S4 e há fórmulas que são válidas em S4 mas não em B. Com estes dois sistemas, começamos finalmente a dizer coisas interessantes a respeito das modalidades iteradas. Em S4, onde a acessibilidade é reflexiva e transitiva, as verdades necessárias são necessariamente necessárias, o que por sua vez também implica que, se um estado de coisas é possivelmente possível, então ele é possível ($\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ é válida em S4). Em B, por seu lado, onde a acessibilidade é reflexiva e simétrica, aceita-se que aquilo que é verdadeiro é necessariamente possível: $p \rightarrow \Box\Diamond p$ e $\Diamond\Box p \rightarrow p$ são ambas válidas em B.

S5 é o sistema mais forte, com o conjunto maior de fórmulas válidas (e que inclui todas as validades dos outros sistemas). Nos modelos de S5, os mundos vêem-se todos uns aos outros (o efeito é o mesmo que obteríamos se exigíssemos que a acessibilidade fosse uma relação total). Por isso, nas condições de verdade de $\Box\varphi$, a referência à acessibilidade entre mundos é inútil; poderíamos dizer apenas: $\Box\varphi$ é verdadeira num mundo μ se e somente se φ é verdadeira em todos os mundos (pois os mundos vistos por μ são *todos* os mundos). Em S5 aceita-se como válido que, se uma verdade pode ser necessária, então ela *é* necessária ($\Diamond\Box p \rightarrow \Box p$); e também que, se algo é possível, então é necessariamente possível ($\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$).

Além da necessidade moral e da necessidade epistémica, que já mencionámos, é habitual distinguirem-se ainda os conceitos de necessidade (e possibilidade) física, metafísica e lógica. Fisicamente necessário é aquilo que é determinado pelas leis da natureza. É nesse sentido que podemos afirmar, por exemplo, que não é possível viajar mais rápido do que a luz. Mas o raciocínio metafísico considera muitas vezes possibilidades que implicam que as leis da natureza fossem diferentes do que são. Neste sentido, já poderíamos então afirmar que seria possível viajar mais rápido do que a luz. E isto é também algo que é logicamente possível. É discutível qual seja a melhor caracterização da necessidade metafísica e da necessidade lógica, mas muitos autores propõem as seguintes: metafisicamente necessário é aquilo que é exigido ou determinado pela essência das coisas, e logicamente necessário é aquilo que é verdadeiro unicamente em virtude do significado das expressões usadas. Igualmente controversa é a questão de saber qual seria o sistema de lógica mais adequado para representar estes diferentes conceitos de necessidade. Muitos filósofos têm defendido que o sistema S5 é especialmente adequado para lidar quer com a necessidade lógica quer com a necessidade metafísica. Mas também há quem discorde disso, argumentando por exemplo que a acessibilidade metafísica não é transitiva.

O método lógico mais fácil de usar para estes sistemas modais é o método das árvores. As árvores para o sistema S5 são as mais simples de todas (porque, como apontámos antes, nas condições de verdade de $\Box\varphi$ e $\Diamond\varphi$, a referência à relação de acessibilidade pode ser eliminada). Quando se escreve uma fórmula num nó de uma árvore, fazemo-la agora acompanhar por um número natural – como, por exemplo: $\Box(p \rightarrow q)$, 3 – querendo com isto dizer que $\Box(p \rightarrow q)$ é verdadeira no mundo μ_3. Se queremos testar a validade dedutiva (em S5) de um argumento, começamos a árvore com a suposição de que cada uma das premissas e a negação da conclusão são verdadeiras em μ_0. (Se o que queremos é testar se uma fórmula é válida em S5, começamos por supor que a sua negação é verdadeira em μ_0.) As regras para as conectivas verofuncionais são as mesmas que em LPC, acrescentando-se agora apenas o número do mundo possível considerado. Para os operadores modais, existem quatro novas regras:

- *regra da possibilidade negada*: se $\neg\Diamond\varphi, i$ ocorre num nó de um caminho, acrescenta-se ao caminho um nó com $\Box\neg\varphi, i$ (e marca-se o nó inicial com ✓).
- *regra da necessidade negada*: se $\neg\Box\varphi, i$ ocorre num nó de um caminho, acrescenta-se ao caminho um nó com $\Diamond\neg\varphi, i$ (e marca-se o nó inicial com ✓);
- *regra da possibilidade afirmada*: se $\Diamond\varphi, i$ ocorre num nó de um caminho, acrescenta-se ao caminho um nó com φ, j, sendo j um número novo, que ainda não ocorra no caminho (e marca-se o nó inicial com ✓);
- *regra da necessidade afirmada*: se $\Box\varphi, i$ ocorre num nó de um caminho, acrescenta-se ao caminho nós com φ, j, para cada número j que já ocorra ou que surja entretanto no caminho (não se marca o nó inicial com ✓, porque podem surgir ainda novos números e termos de continuar a aplicar a regra).

Os caminhos da árvore fecham quando neles se obtêm contradições, isto é, quando, para alguma fórmula φ e algum número i, φ, i e $\neg\varphi, i$ ocorrem ambos no mesmo caminho. Se todos os caminhos de uma árvore fecharem, a inferência é dedutivamente válida (a conclusão é demonstrável em S5 a partir das premissas) ou, se a lista inicial tiver apenas uma fórmula negada $\neg\varphi$, a fórmula φ é um teorema de S5. Se houver pelo menos um caminho da árvore que não fecha, a inferência não é válida em S5 ou φ não é um teorema de S5 (e, por isso, também não será uma inferência válida ou um teorema de nenhuma das outras lógicas modais mais fracas).

Exemplificaremos agora o uso deste método construindo uma árvore para provar que, em S5, $(\Diamond p \wedge \Box q) \vdash \Diamond(p \wedge \Box q)$:

(1)	$(\Diamond p \wedge \Box q), 0$ ✓	premissa
(2)	$\neg\Diamond(p \wedge \Box q), 0$ ✓	negação da conclusão
(3)	$\Diamond p, 0$ ✓	regra da $\wedge$ aplicada a (1)
(4)	$\Box q, 0$	regra da $\wedge$ aplicada a (1)
(5)	$\Box\neg(p \wedge \Box q), 0$	regra da $\neg\Diamond$ aplicada a (2)

(6)	$p, 1$		regra da $\Diamond$ aplicada a (3)
(7)	$q, 0$		regra da $\Box$ aplicada a (4)
(8)	$q, 1$		regra da $\Box$ aplicada a (4)
(9)	$\neg(p \wedge \Box q), 0$ ✓		regra da $\Box$ aplicada a (5)
(10)	$\neg(p \wedge \Box q), 1$ ✓		regra da $\Box$ aplicada a (5)
	↙ ↘		
(11)	$\neg p, 0$ $\neg \Box q, 0$ ✓		regra da $\neg \wedge$ aplicada a (9)
	↙ ↘ $\Diamond \neg q, 0$ ✓		regra da $\neg \Box$ aplicada a (11-2)
(12)	$\neg p, 1$ $\neg \Box q, 1$ ×	regra da $\neg \wedge$ aplicada a (10). Contradição entre (6) e (12-1)	
(13)	$\Diamond \neg q, 1$ ✓ $\neg q, 2$	regra da $\neg \Box$ aplicada a (12-2)	regra da $\Diamond$ aplicada a (12-3)
(14)	$\neg q, 2$ $q, 2$ ×	regra da $\Diamond$ aplicada a (13-2)	regra da $\Box$ aplicada a (4) Contradição com (13-3)
(15)	$q, 2$ ×	regra da $\Box$ aplicada a (4). Contradição com (14-2)	

Observe-se que as fórmulas em (4) e (5), quando lhes é aplicada a regra da necessidade afirmada, não são marcadas com o sinal ✓ e ficam disponíveis para novas aplicações da regra, motivadas pelo aparecimento de novos números no caminho. Em (11), quando é aplicada a regra da conjunção negada a (9), a árvore bifurca. Desenvolvemos primeiro o caminho da direita. Em (13-3) aparece um novo número (por obra da regra da $\Diamond$) e isso conduz a uma nova aplicação da regra da $\Box$ a (4), gerando assim a contradição e o encerramento do caminho da direita. Voltamos a (11), ao lado esquerdo. De novo, aplicando a regra da conjunção negada a (10), o caminho divide-se em dois (12-1 e 12-2). Mas o caminho da esquerda fecha logo, por contradição com (6). Resta desenvolver o caminho do centro. Também aqui, novamente, aparece um número novo em (14-2) por obra da regra da $\Diamond$ e isso conduz a uma nova aplicação da regra da $\Box$ a (4), gerando a contradição. Todos os caminhos fecham e, por isso, a inferência é válida em S5. Significa isso que $\Diamond(p \wedge \Box q)$ é uma consequência semântica (em S5) de $(\Diamond p \wedge \Box q)$? Sim, porque este conjunto de regras é correcto e completo relativamente à semântica de S5.

BIBLIOGRAFIA

Beall, J.C. e Van Fraassen, Bas C. 2003. *Possibilities and Paradox: An Introduction to Modal and Many-Valued Logic.* Oxford: Oxford University Press.

Beall, Jc. 2010. *Logic: The Basics.* London: Routledge.

Bergman, Merrie, James Moor e Jack Nelson. 1998. *The Logic Book*, 3ª edição. New York: McGraw-Hill.

Boolos, George, John Burgess e Richard Jeffrey. 2007. *Computability and Logic*, 5ª edição. Cambridge: Cambridge University Press.

Bostock, David. 1997. *Intermediate Logic.* Oxford: Oxford University Press.

Branquinho, João, Desidério Murcho, Nelson G. Gomes (eds.). 2006. *Enciclopédia de Termos Lógico-Filosóficos.* São Paulo: Martins Fontes.

Chellas, Brian. 1980. *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press.

Fitting, Melvin e Richard L. Mendelsohn. 1998. *First-Order Modal Logic.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Forbes, Graeme. 1994. *Modern Logic: A Text in Elementary Symbolic Logic.* New York: Oxford University Press.

Franco de Oliveira, Augusto J. 2010. *Lógica e Aritmética: Uma Introdução à Lógica, Matemática e Computacional*, 3ª edição revista e aumentada. Lisboa: Gradiva.

Garson, James W. 2006. *Modal Logic for Philosophers.* Cambridge: Cambridge University Press.

Girle, Rod. 2000. *Modal Logics and Philosophy.* London: Acumen.

Hodges, Wilfrid. 2001. Elementary Predicate Logic, in *Handbook of Philosophical Logic*, 2ª edição, volume 1, editado por D. M. Gabbay e F. Guenthner, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 1-129.

Hodges, Wilfrid. 2001. *Logic: An Introduction to Elementary Logic*, 2ª edição. London: Penguin Books.

Hughes, G. E. e M. J.Cresswell. 1996. *A New Introduction to Modal Logic.* London: Routledge.

Hughes, R.I.G. (ed.). 1993. *A Philosophical Companion to First-Order Logic.* Indianapolis: Hackett.

Hunter, Geoffrey. 1996. *Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic*, 6ª impressão com correcções. Berkeley: University of California Press.

Jeffrey, Richard, 2006. *Formal Logic: Its Scope and Limits.* 4ª edição, editado com um novo suplemento por John P. Burgess. Indianapolis: Hackett Publishing Company.

Kneale, William e Martha Kneale. 1980. *O Desenvolvimento da Lógica*, 2ª edição, tradução de M. S. Lourenço. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Lemmon, E. J. 1978. *Beginning Logic.* Indianapolis: Hackett Publishing Company.

Lepore, Ernest. 2000. *Meaning and Argument: An Introduction to Logic through Language.* Oxford: Blackwell.

Lourenço, M. S. 1991. *Teoria Clássica da Dedução.* Lisboa: Assírio & Alvim.

Mendelson, Elliott. 2001. *Introduction to Mathematical Logic*, 4ª edição. Boca Raton, Florida: CRC Press.

Murcho, Desidério. 2003. *O Lugar da Lógica na Filosofia.* Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

Newton-Smith, W. H. 1998. *Lógica: Um Curso Introdutório*, tradução de Desidério Murcho. Lisboa: Gradiva.

Priest, Graham. 2002. *Lógica*, tradução de Célia Teixeira. Lisboa: Temas e Debates.

Priest, Graham. 2008. *An Introduction to Non-Classical Logic*, 2ª edição. Cambridge: Cambridge University Press.

Read, Stephen. 1995. *Thinking About Logic: An Introduction to the Philosophy of Logic.* Oxford: Oxford University Press.

Sàágua, João. 2001. *Lógica para as Humanidades.* Lisboa: Edições Colibri.

Sainsbury, Mark. 2001. *Logical Forms: An Introduction to Philosophical Logic*, 2ª edição. Oxford: Blackwell.

Sider, Theodore. 2010. *Logic for Philosophy.* Oxford: Oxford University Press.

Smith, Peter. 2003. *An Introduction to Formal Logic.* Cambridge: Cambridge University Press.

Smullyan, Raymond. 1995. *First-Order Logic.* New York: Dover Publications.

Tarski, Alfred. 2006. *A Concepção Semântica da Verdade: textos clássicos de Tarski*, tradução de C.R. Braida, C.A. Mortari, J.P. Assis e L.H.A. Dutra. São Paulo: Editora UNESP.

Teller, Paul. 1989. *A Modern Formal Logic Primer.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.

Tennant, Neil. 1990. *Natural Logic*, 2ª edição. Edinburgh: Edinburgh University Press.

Zilhão, António. 2001. *40 Lições de Lógica Elementar.* Lisboa: Edições Colibri.