

# SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA PLACAS PIEZOELÉCTRICAS

José E. S. Garção<sup>\*1</sup>, J. N. Reddy<sup>2</sup>, Cristóvão M. Mota Soares<sup>3</sup>, Carlos A. Mota Soares<sup>3</sup>, Maria A. R. Loja<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Universidade de Évora, Depart. de Física (IDMEC/LAETA, Centro de Eng<sup>a</sup> Mecatrónica) - Évora, Portugal

<sup>2</sup>Texas A&M University, Depart. of Mechanical Engineering - College Station, Texas, USA

<sup>3</sup>Instituto Superior Técnico, Depart. de Eng<sup>a</sup>. Mecânica, (IDMEC/LAETA) - Lisboa, Portugal

<sup>4</sup>Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Depart. de Eng<sup>a</sup>. Mecânica, (IDMEC/LAETA) - Lisboa, Portugal

\*Email: jesg@uevora.pt

**RESUMO:** Neste trabalho apresenta-se um processo de solução analítica para placas rectangulares contendo lâminas de materiais compósitos, piezoeléctricos e piezomagnéticos. Mostram-se resultados para um laminado espesso actuado mecanicamente e electricamente, comparando uma situação sem a presença de defeitos estruturais com o caso em que existe uma delaminação total ao longo de uma interface.

## 1. INTRODUÇÃO

O projecto de sistemas que integram partes mecânicas, electromagnéticas ou materiais activos (ex. piezoeléctricos, também ditos Mecatrónicos), envolvem a solução de problemas mecânicos e electromagnéticos de forma acoplada. Apresenta-se aqui o desenvolvimento de um modelo analítico para a modelação de componentes estruturais do tipo placa laminada rectangular  $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [-H_L/2, H_L/2]$ , ver Fig 1, fabricados com materiais anisotrópicos [Reddy, 2004], piezoeléctricos (p) e piezomagnéticos (pm).

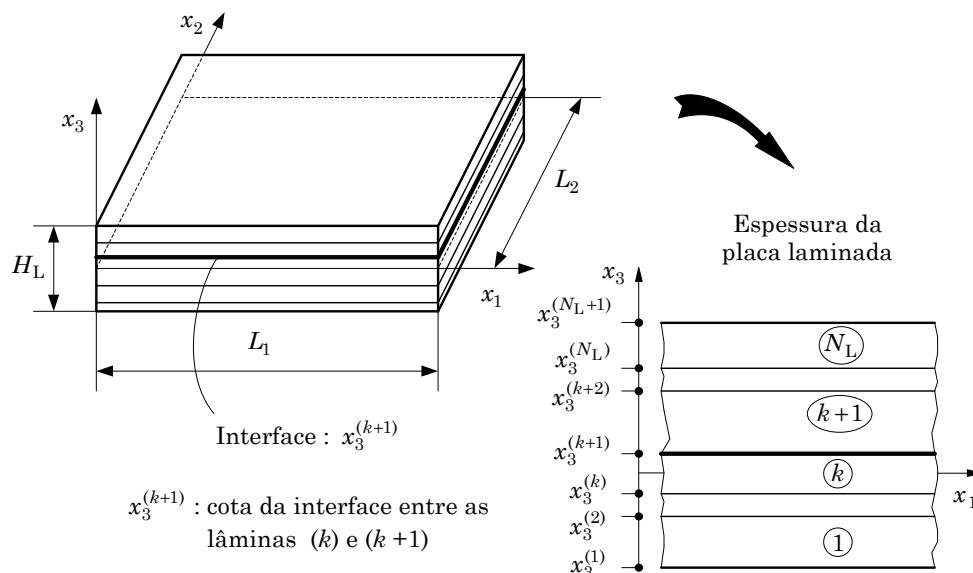


Fig 1. Sistema de referência global, geometria e esquema de empilhamento do laminado.

Segue-se o formalismo original de [Pagano, 1970] onde o processo de solução para placas laminadas de material compósito foi pela primeira vez apresentado. Esse trabalho foi depois

generalizado por [Bisegna & Maceri, 1996] e [Heyliger, 1997] ao caso de laminados contendo lâminas de material piezoeléctrico. O caso piezomagnético é em tudo análogo ao piezoeléctrico e foi considerado por [Pan, 2001]. No presente trabalho procura efectuar-se uma dedução clara de todo este processo de solução, que foi implementado simbolicamente (sempre que possível) através do software Maple [Maplesoft, 2008]. Os resultados obtidos podem ser utilizados na validação de modelos numéricos aproximados.

## 2. EQUAÇÕES DE GOVERNO DO PROBLEMA

Um laminado consiste num empilhamento de várias lâminas, que podem ser de diferentes materiais, ligadas entre si. Assim sendo, do ponto de vista de modelação, cada lâmina é a unidade do sistema para a qual interessa conhecer o comportamento, ficando a resposta do laminado determinada pela combinação da resposta de cada lâmina.

Como se explicará na sequência, o processo de obtenção da solução analítica baseia-se no seguinte conjunto de pressupostos:

- As deformações são pequenas pelo que o problema é geometricamente linear.
- O material de cada lâmina é linear elástico, homogéneo e ortotrópico (ou de maior simetria).
- Cada lâmina possui espessura uniforme.
- Não existem acções volúmicas.
- As acções mecânicas são estáticas e as electromagnéticas são assumidas como aproximações electroquasiestática e magnetoquasiestática [Haus & Melcher, 1989].

Consequentemente as equações que governam o problema em análise, são para cada lâmina ( $k$ ) de domínio  $\Omega^{(k)} = ]0, L_1[ \times ]0, L_2[ \times ]x_3^{(k)}, x_3^{(k+1)}[$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ):

$$\frac{\partial \sigma_{ji}^{(k)}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad ; \quad \frac{\partial D_j^{(k)}}{\partial x_j} = \rho_u \quad ; \quad \frac{\partial B_j^{(k)}}{\partial x_j} = 0 \quad ; \quad E_i^{(k)} = -\frac{\partial \phi_E^{(k)}}{\partial x_i} \quad ; \quad H_i = -\frac{\partial \phi_H^{(k)}}{\partial x_i} \quad (1.1)$$

em que  $\{\sigma_{ij}^{(k)}, D_i^{(k)}, B_i^{(k)}, E_i^{(k)}, H_i^{(k)}\}$  são as componentes do tensor das tensões de Cauchy, vector deslocamento eléctrico, campo magnético, campo eléctrico e intensidade do campo magnético, e  $\{f_i, \rho_u\}$  as componentes da força volúmica e a carga eléctrica livre por unidade de volume. Sob as hipóteses efectuadas e em domínios sem condução eléctrica,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são irrotacionais pelo que podem ser definidos como gradientes de  $\phi_E$  e  $\phi_H$ , os potenciais escalares eléctrico e magnético. Como assumimos que as acções volúmicas  $\{f_i, \rho_u\}$  são nulas, as equações Eq.(1.1) são homogéneas. No entanto, toda a metodologia apresentada pode ser estendida ao caso não homogéneo, acrescentando apenas o custo computacional se  $\{f_i, \rho_u\}$  forem suficientemente regulares. Associadas com as equações de governo existem condições de fronteira, que ao longo do bordo de cada lâmina ( $k$ ) (omite-se o índice ( $k$ ) por simplificação) se assumem ser do tipo (simplesmente apoiado):

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2 = 0, x_3) = u_1(x_1, x_2 = L_2, x_3) = 0 \quad ; \quad \sigma_{11}(x_1 = 0, x_2, x_3) = \sigma_{11}(x_1 = L_1, x_2, x_3) = 0 \\ u_2(x_1 = 0, x_2, x_3) = u_2(x_1 = L_1, x_2, x_3) = 0 \quad ; \quad \sigma_{22}(x_1, x_2 = 0, x_3) = \sigma_{22}(x_1, x_2 = L_2, x_3) = 0 \\ u_3(x_1 = 0, x_2, x_3) = u_3(x_1 = L_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2 = 0, x_3) = u_3(x_1, x_2 = L_2, x_3) = 0 \\ \phi_E(x_1 = 0, x_2, x_3) = \phi_E(x_1 = L_1, x_2, x_3) = \phi_E(x_1, x_2 = 0, x_3) = \phi_E(x_1, x_2 = L_2, x_3) = 0 \\ \phi_H(x_1 = 0, x_2, x_3) = \phi_H(x_1 = L_1, x_2, x_3) = \phi_H(x_1, x_2 = 0, x_3) = \phi_H(x_1, x_2 = L_2, x_3) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

em que  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são as componentes do campo de deslocamentos.

Em cada interface  $x_3^{(k)}$  têm se ser também especificadas condições de fronteira para uma (e uma só) das funções que formam cada par ordenado  $(u_1, \sigma_{31})$ ,  $(u_2, \sigma_{32})$ ,  $(u_3, \sigma_{33})$ ,  $(\phi_E, D_3)$ ,  $(\phi_H, B_3)$ , ou seja, se a  $\sigma_{33}$  for prescrito um valor,  $u_3$  será livre ou contínuo entre duas lâminas, não se podendo impor-lhe um valor. Designaremos por variáveis primárias as funções que constituem o primeiro elemento dos pares ordenados anteriores, ou seja  $\{u_1, u_2, u_3, \phi_E, \phi_H\}$ , e por variáveis secundárias as funções  $\{\sigma_{ij}, D_i, B_i\}, i, j = 1, 2, 3$  obtidas através da lei constitutiva do material.

O comportamento do material (assumido linear elástico e respeitando uma classe de simetria similar à ortotropia, ou de maior simetria) escreve-se no referencial global da placa, como:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = C_{ijrs}^{(k)} \varepsilon_{rs}^{(k)} - e_{rij}^{(k)} E_r^{(k)} - h_{rij}^{(k)} H_r^{(k)} ; D_i^{(k)} = e_{irs}^{(k)} \varepsilon_{rs}^{(k)} + \xi_{ir}^{(k)} E_r^{(k)} + d_{ir}^{(k)} H_r^{(k)} ; B_i^{(k)} \overset{\text{analog}}{\leftrightarrow} D_i^{(k)} \quad (1.3)$$

em que, utilizando notação contraída, as matrizes dos coeficientes de rigidez e piezoeléctricos possuem como estrutura:

$$C_{ijrs}^{(k)} : \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^{(k)} ; e_{irs}^{(k)} : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \quad (1.4)$$

a matriz dos coeficientes piezomagnéticos e a matriz dos coeficientes de eventual interactividade entre os campo eléctricos e magnético, aqui incluída por complemento, são dadas por:

$$h_{irs}^{(k)} : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{24} & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} ; d_{ir}^{(k)} : \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (1.5)$$

e a matriz de permissividade eléctrica e matriz de permeabilidade magnética se admitem ser:

$$\xi_{ir}^{(k)} : \begin{bmatrix} \xi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33} \end{bmatrix}^{(k)} ; \mu_{ir}^{(k)} : \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (1.6)$$

Se o material apresentar características de ortotropia, então as lâminas só podem possuir orientações de  $0^\circ$  e  $90^\circ$  face ao referencial global da placa laminada.

### 3. PROCESSO DE SOLUÇÃO PARA PLACAS LAMINADAS RECTANGULARES

As equações de governo do problema constituem um sistema de equações diferenciais parciais Eq.(1.1). Empregando um método de separações de variáveis podemos reduzi-lo a um sistema de equações diferenciais ordinárias, para o qual existe uma teoria de solução bem estabelecida. Não se apresentam todas as expressões envolvidas no processo de solução por isso aumentar muito a extensão do presente texto, mas apresentam-se as consideradas

suficientes para todo o processo seja correctamente entendido.

Todo este processo de cálculo foi implementado computacionalmente recorrendo ao software Maple.

### 3.1. Expressões das funções incógnita para uma lâmina genérica

Considerem-se as seguintes expressões em série de Fourier para as funções incógnita do problema numa lâmina genérica ( $k$ ):

$$\begin{aligned}
u_1^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1mn}^{(k)}(x_3) \cos(p_m x_1) \sin(p_n x_2) \\
u_2^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{3mn}^{(k)}(x_3) \sin(p_m x_1) \cos(p_n x_2) \\
u_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{5mn}^{(k)}(x_3) \sin(p_m x_1) \sin(p_n x_2) \\
\phi_E^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{7mn}^{(k)}(x_3)}{\phi_{Ef}} \sin(p_m x_1) \sin(p_n x_2) \\
\phi_H^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{9mn}^{(k)}(x_3)}{\phi_{Hf}} \sin(p_m x_1) \sin(p_n x_2) \\
p_m &= \frac{m\pi}{L_1} \quad ; \quad p_n = \frac{n\pi}{L_2}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

em que  $Q_{imn}^{(k)}(x_3) : [x_3^{(k)}, x_3^{(k+1)}] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções a determinar para cada valor de  $m, n \in \mathbb{N}$ , e os factores  $\phi_{Ef}$  e  $\phi_{Hf}$  são factores constantes cuja utilidade se explicará adiante. Definam-se também as funções:

$$\begin{aligned}
Q_{2mn}^{(k)}(x_3) &= \frac{\partial Q_{1mn}^{(k)}(x_3)}{\partial x_3} \quad ; \quad Q_{4mn}^{(k)}(x_3) = \frac{\partial Q_{3mn}^{(k)}(x_3)}{\partial x_3} \quad ; \quad Q_{6mn}^{(k)}(x_3) = \frac{\partial Q_{5mn}^{(k)}(x_3)}{\partial x_3} \\
Q_{8mn}^{(k)}(x_3) &= \frac{\partial Q_{7mn}^{(k)}(x_3)}{\partial x_3} \quad ; \quad Q_{10mn}^{(k)}(x_3) = \frac{\partial Q_{9mn}^{(k)}(x_3)}{\partial x_3}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Substituindo Eq.(1.7) e Eq.(1.8) nas expressões das extensões  $\varepsilon_{ij} = 1/2(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ ,  $E_i$  e  $H_i$  obtêm-se expressões de que são exemplo:

$$\varepsilon_{11}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -Q_{1mn}^{(k)}(x_3) p_m \sin(p_m x_1) \sin(p_n x_2) \tag{1.9}$$

$$2\varepsilon_{32}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (Q_{4mn}^{(k)}(x_3) + Q_{5mn}^{(k)}(x_3) p_n) \sin(p_m x_1) \cos(p_n x_2)$$

$$E_1^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{7mn}^{(k)}(x_3) p_m}{\phi_{Ef}} \cos(p_m x_1) \sin(p_n x_2) \tag{1.10}$$

$$H_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{10mn}^{(k)}(x_3)}{\phi_{Hf}} \sin(p_m x_1) \sin(p_n x_2) \tag{1.11}$$

Introduzindo o resultado na lei constitutiva do material Eq.(1.3) obtêm-se expressões como:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( -C_{11}^{(k)} p_m Q_{1mn}^{(k)}(x_3) - C_{12}^{(k)} p_n Q_{3mn}^{(k)}(x_3) + C_{13}^{(k)} Q_{6mn}^{(k)}(x_3) \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{e_{31}^{(k)}}{\phi_{\text{Ef}}} Q_{8mn}^{(k)}(x_3) \right) + \left( \frac{h_{31}^{(k)}}{\phi_{\text{Hf}}} Q_{10mn}^{(k)}(x_3) \right) \right] \text{sen}(p_m x_1) \text{sen}(p_n x_2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( -C_{13}^{(k)} p_m Q_{1mn}^{(k)}(x_3) - C_{23}^{(k)} p_n Q_{3mn}^{(k)}(x_3) + C_{33}^{(k)} Q_{6mn}^{(k)}(x_3) \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{e_{33}^{(k)}}{\phi_{\text{Ef}}} Q_{8mn}^{(k)}(x_3) \right) + \left( \frac{h_{33}^{(k)}}{\phi_{\text{Hf}}} Q_{10mn}^{(k)}(x_3) \right) \right] \text{sen}(p_m x_1) \text{sen}(p_n x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{31}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( C_{55}^{(k)} Q_{2mn}^{(k)}(x_3) + C_{55}^{(k)} p_m Q_{5mn}^{(k)}(x_3) \right) + \left( \frac{e_{15}^{(k)}}{\phi_{\text{Ef}}} p_m Q_{7mn}^{(k)}(x_3) \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{h_{15}^{(k)}}{\phi_{\text{Hf}}} p_m Q_{9mn}^{(k)}(x_3) \right) \right] \cos(p_m x_1) \text{sen}(p_n x_2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\sigma_{12}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_{66}^{(k)} p_n Q_{1mn}^{(k)}(x_3) + C_{66}^{(k)} p_m Q_{3mn}^{(k)}(x_3) \right) \cos(p_m x_1) \cos(p_n x_2)$$

$$\begin{aligned} D_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( -e_{31}^{(k)} p_m Q_{1mn}^{(k)}(x_3) - e_{32}^{(k)} p_n Q_{3mn}^{(k)}(x_3) + e_{33}^{(k)} Q_{6mn}^{(k)}(x_3) \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{e_{33}^{(k)}}{\phi_{\text{Ef}}} Q_{8mn}^{(k)}(x_3) \right) - \left( \frac{d_{33}^{(k)}}{\phi_{\text{Hf}}} Q_{10mn}^{(k)}(x_3) \right) \right] \text{sen}(p_m x_1) \text{sen}(p_n x_2) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} B_1^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( h_{15}^{(k)} Q_{2mn}^{(k)}(x_3) + h_{15}^{(k)} p_m Q_{5mn}^{(k)}(x_3) \right) - \left( \frac{d_{11}^{(k)}}{\phi_{\text{Ef}}} p_m Q_{7mn}^{(k)}(x_3) \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\mu_{11}^{(k)}}{\phi_{\text{Hf}}} p_m Q_{9mn}^{(k)}(x_3) \right) \right] \cos(p_m x_1) \text{sen}(p_n x_2) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Verifica-se das expressões anteriores, que para satisfazer as condições de fronteira assumidas na Eq. (1.2), as variáveis primárias têm de possuir a forma considerada em Eq.(1.7), e também que as propriedades dos materiais devem obedecer a Eq.(1.4-1.6).

### 3.2. Sistema de equações diferenciais

Substituindo as expressões das variáveis secundárias nas equações diferenciais de governo Eq.(1.1) obtém-se equações com a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}^{(k)}}{\partial x_3} = & 0 : \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_{55}^{(k)} \frac{\partial Q_{2mn}^{(k)}}{\partial x_3} - \left( C_{11}^{(k)} (p_m)^2 + C_{66}^{(k)} (p_n)^2 \right) Q_{1mn}^{(k)} - \left( C_{12}^{(k)} + C_{66}^{(k)} \right) p_m p_n Q_{3mn}^{(k)} + \right. \\ & \left. + \left( C_{13}^{(k)} + C_{55}^{(k)} \right) p_m Q_{6mn}^{(k)} + \frac{\left( e_{15}^{(k)} + e_{31}^{(k)} \right)}{\phi_{\text{Ef}}} p_m Q_{8mn}^{(k)} + \frac{\left( h_{15}^{(k)} + h_{31}^{(k)} \right)}{\phi_{\text{Hf}}} p_m Q_{10mn}^{(k)} \right] \cos(p_m x_1) \text{sen}(p_n x_2) = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial D_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3^{(k)}}{\partial x_3} = 0 : \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e_{33}^{(k)} \frac{\partial Q_{6mn}^{(k)}}{\partial x_3} - \frac{\xi_{33}^{(k)}}{\phi_{\text{Ef}}} \frac{\partial Q_{8mn}^{(k)}}{\partial x_3} - \frac{d_{33}^{(k)}}{\phi_{\text{Hf}}} \frac{\partial Q_{10mn}^{(k)}}{\partial x_3} - (e_{15}^{(k)} + e_{31}^{(k)}) p_m Q_{2mn}^{(k)} - \right. \\
& \quad - (e_{24}^{(k)} + e_{32}^{(k)}) p_n Q_{4mn}^{(k)} - (e_{15}^{(k)} (p_m)^2 + e_{24}^{(k)} (p_n)^2) Q_{5mn}^{(k)} + \\
& \quad \left. + \frac{(\xi_{11}^{(k)} (p_m)^2 + \xi_{22}^{(k)} (p_n)^2)}{\phi_{\text{Ef}}} Q_{7mn}^{(k)} + \frac{(d_{11}^{(k)} (p_m)^2 + d_{22}^{(k)} (p_n)^2)}{\phi_{\text{Hf}}} Q_{9mn}^{(k)} \right] \text{sen}(p_m x_1) \text{sen}(p_n x_2) = 0
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Multiplicando cada termo da série por funções harmónicas de diferentes frequências, integrando em todo o domínio plano e utilizando relações de ortogonalidade ([Braun (1993)] e [Figueiredo (1987)]):

$$\begin{aligned}
& \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0; \quad n, m \geq 1 \\
& \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L; & n = m \geq 1 \\ 0; & n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

verificamos que nas Eq.(1.16)-Eq.(1.17) os termos entre parêntesis [...] têm se ser nulos para cada harmónica  $(m, n)$ , resultando daí um sistema de equações diferenciais ordinárias (uma só variável independente  $x_3$ ) para as funções  $Q_{imn}^{(k)}(x_3)$  em cada lâmina  $(k)$ , em que por se terem considerado as Eq.(1.8) é um sistema de equações diferenciais ordinárias linear de primeira ordem homogéneo [Costa, 1998]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} & 0 & M_{68} & 0 & M_{610} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{86} & 0 & M_{88} & 0 & M_{810} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{106} & 0 & M_{108} & 0 & M_{1010} \end{bmatrix}^{(k)} \frac{d}{dx_3} \begin{Bmatrix} Q_{1mn} \\ Q_{2mn} \\ Q_{3mn} \\ Q_{4mn} \\ Q_{5mn} \\ Q_{6mn} \\ Q_{7mn} \\ Q_{8mn} \\ Q_{9mn} \\ Q_{10mn} \end{Bmatrix}^{(k)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{21} & 0 & N_{23} & 0 & 0 & N_{26} & 0 & N_{28} & 0 & N_{210} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{41} & 0 & N_{43} & 0 & 0 & N_{46} & 0 & N_{48} & 0 & N_{410} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{62} & 0 & N_{64} & N_{65} & 0 & N_{67} & 0 & N_{69} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & N_{82} & 0 & N_{84} & N_{85} & 0 & N_{87} & 0 & N_{89} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & N_{102} & 0 & N_{104} & N_{105} & 0 & N_{107} & 0 & N_{109} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} Q_{1mn} \\ Q_{2mn} \\ Q_{3mn} \\ Q_{4mn} \\ Q_{5mn} \\ Q_{6mn} \\ Q_{7mn} \\ Q_{8mn} \\ Q_{9mn} \\ Q_{10mn} \end{matrix} \right\}^{(k)} \end{matrix} \quad (1.19)$$

que também podemos escrever compactamente como  $\mathbf{MQ}' = \mathbf{NQ}$ , sendo as matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  de coeficientes constantes, com entradas dependendo das propriedades dos materiais, dimensões da lamina no plano, e harmónica considerada. Para a resolução deste sistema linear existe uma teoria completa ([Costa, 1998], [Braun, 1993]), apresentada para o sistema Eq.(1.19) colocado na forma:

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{AQ} \quad ; \quad \mathbf{Q} = \{Q_{imn}^{(k)}\}; i = 1, \dots, 10 \quad ; \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (1.20)$$

sendo  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ .

O sistema de equações diferenciais parciais Eq.(1.1) envolve funções de  $(x_1, x_2, x_3)$ , mas assumindo as variáveis primárias de acordo com a Eq.(1.7) (o que restringe as condições na fronteira possíveis de considerar) e as propriedades dos materiais como Eq.(1.4-1.6), essas equações diferenciais parciais Eq.(1.1) e respectivas condições na fronteira, são automaticamente satisfeitas no plano  $(x_1, x_2)$ , se as funções  $Q_{imn}^{(k)}(x_3)$  definidas na direcção da espessura do laminado, forem a solução exacta de Eq.(1.20) e verificarem as condições de fronteira especificadas em cada interface da lâmina  $(k)$ . A aplicação do processo descrito é também conhecido por método de separação de variáveis [Braun, 1993].

### 3.3. Solução do sistema de equações diferenciais ordinárias

O sistema Eq.(1.20) possui dimensão 10, pelo que o espaço vectorial de todas as suas soluções possui dimensão 10, e a sua base é constituída por 10 soluções linearmente independentes, que designaremos por  $y_j(x_3)$ . Assim, para cada lâmina  $(k)$  e cada harmónica  $(m, n)$  podem definir-se, uma matriz solução fundamental  $\mathbf{F}(x_3)$ , cujas colunas são cada uma das 10 soluções linearmente independentes:

$$\mathbf{F}_{mn}^{(k)}(x_3) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1mn}^{(k)} & \mathbf{y}_{2mn}^{(k)} & \dots & \mathbf{y}_{10mn}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11mn}^{(k)} & y_{12mn}^{(k)} & \dots & y_{110mn}^{(k)} \\ y_{21mn}^{(k)} & y_{22mn}^{(k)} & \dots & y_{210mn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{101mn}^{(k)} & y_{102mn}^{(k)} & \dots & y_{1010mn}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

e uma matriz principal num ponto  $x_3^*$  designada por  $\mathbf{P}(x_3)$ , que verifica  $\mathbf{P}(x_3^*) = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de dimensão 10), e que pode obter-se da matriz solução fundamental por [Costa, 1998]:

$$\mathbf{P}_{mn}^{(k)}(x_3) = \mathbf{F}_{mn}^{(k)}(x_3) \mathbf{F}_{mn}^{-1(k)}(x_3^*) \quad ; \quad x_3^* \in \mathbb{R}, \forall x_3 \in [x_3^{(k)}, x_3^{(k+1)}] \quad (1.22)$$

Verifica-se que a matriz principal possui a propriedade de ser dada por uma exponencial de matrizes:

$$\mathbf{P}(x_3) = e^{\mathbf{A}x_3} \quad ; \quad e^{\mathbf{A}x_3} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^j \cdot (x_3)^j}{j!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}x_3 + \frac{\mathbf{A}^2 \cdot (x_3)^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^p \cdot (x_3)^p}{p!} + \dots \quad (1.23)$$

Portanto, a solução de Eq.(1.20) é dada por uma exponencial de matrizes:

$$\mathbf{Q}(x_3) = \mathbf{b} e^{\mathbf{A}x_3} \quad (1.24)$$

em que  $\mathbf{b}$  é um vector de constantes obtido das condições de fronteira e compatibilidade interlaminar para cada lâmina ( $k$ ). O cálculo da exponencial de matrizes pode ser efectuado por vários métodos, ver por exemplo [Costa, 1998] e [Braun, 1993], mas aqui é realizado através de uma função do Maple. Este cálculo envolve sempre a solução de um problema de valores e vectores próprios para a matriz  $\mathbf{A}$ . Por este facto, devido à dimensão do sistema de equações, a solução obtida para a exponencial de matrizes é parcialmente numérica, pois a solução do problema de valores e vectores próprios é numérica. Por este motivo o processo de solução não é completamente simbólico, embora se possam extrair as expressões simbólicas da solução com os respectivos valores numéricos associados ao processo de cálculo.

A observação das entradas da matriz  $\mathbf{A}$  do sistema de equações diferenciais, revela grandes diferenças nas suas ordens de grandeza, o que pode causar dificuldades na resolução do problema de valores e vectores próprios. As entradas associadas com o problema mecânico, possuem valores com algumas ordens de grandeza superiores aos valores de entradas associadas com o problema eléctrico e magnético. Com o intuito de diminuir essa diferença, foram introduzidos os factores constantes  $\phi_{Ef}$  e  $\phi_{Hf}$  nas expressões Eq.(1.7). Considerar  $\phi_{Ef}$  igual à permitividade eléctrica do vácuo, e  $\phi_{Hf}$  igual à permeabilidade magnética do vácuo, é uma boa hipótese em muitas situações e foi a seguida neste trabalho.

### 3.4. Aplicação das condições na fronteira

As condições na fronteira correspondentes ao bordo do laminado, são automaticamente satisfeitas pela forma assumida para as funções incógnita dada pela Eq.(1.7). As restantes condições na fronteira que têm de ser impostas são as respeitantes às interfaces  $x_3^{(k)}$  do laminado, e traduzem-se em condições na fronteira impostas sobre as funções  $Q_{imn}^{(k)}(x_3)$ . De acordo com a solução do sistema de equações diferenciais indicada em Eq.(1.24), tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} Q_{1mn}^{(k)}(x_3) \\ Q_{2mn}^{(k)}(x_3) \\ \vdots \\ Q_{10mn}^{(k)}(x_3) \end{Bmatrix} = b_{1mn}^{(k)} \begin{Bmatrix} y_{11mn}^{(k)}(x_3) \\ y_{21mn}^{(k)}(x_3) \\ \vdots \\ y_{101mn}^{(k)}(x_3) \end{Bmatrix} + b_{2mn}^{(k)} \begin{Bmatrix} y_{12mn}^{(k)}(x_3) \\ y_{22mn}^{(k)}(x_3) \\ \vdots \\ y_{102mn}^{(k)}(x_3) \end{Bmatrix} + \dots + b_{10mn}^{(k)} \begin{Bmatrix} y_{110mn}^{(k)}(x_3) \\ y_{210mn}^{(k)}(x_3) \\ \vdots \\ y_{1010mn}^{(k)}(x_3) \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

em que  $b_{jmn}^{(k)}$  são constantes a determinar das condições de fronteira existentes sobre as superfícies inferior e superior de cada lâmina ( $k$ ) para cada harmonica ( $m, n$ ).



Nos parágrafos seguintes toma-se como referência exemplificativa a interface do laminado localizada à cota  $x_3^{(k)}$ .

### Condições de valor imposto na fronteira

Por convenção estas condições são sempre aplicadas sobre a lâmina localizada abaixo da interface, excepto no caso da superfície exterior inferior do laminado em que são impostas sobre a lâmina acima da interface.

No caso de condições na fronteira de valor imposto sobre o deslocamento ou os potenciais eléctricos ou magnéticos, tem-se que:

$$\begin{aligned} u_i^{(k)}(x_1, x_2, x_3^{(k)}) &= \hat{u}_i^{(k)}(x_1, x_2) \quad ; \quad \phi_E^{(k)}(x_1, x_2, x_3^{(k)}) = \hat{\phi}_E^{(k)}(x_1, x_2) \\ \phi_H^{(k)}(x_1, x_2, x_3^{(k)}) &= \hat{\phi}_H^{(k)}(x_1, x_2) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.26)$$

em que as funções  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{u}_2$ ,  $\hat{u}_3$ ,  $\hat{\phi}_E$  e  $\hat{\phi}_H$  são conhecidas (o seu índice superior designa a numeração da interface), escritas em termos de série de Fourier, e determinam a distribuição aplicada sobre a superfície. Como exemplo mostra-se a imposição da condição na fronteira sobre  $\phi_E$  para cada harmónica:

$$\begin{aligned} \phi_E^{(k)}(x_1, x_2, x_3^{(k)}) &= \hat{\phi}_E^{(k)}(x_1, x_2) \Leftrightarrow \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{7mn}^{(k)}(x_3^{(k)})}{\phi_{Ef}} \text{sen}(p_m x_1) \text{sen}(p_n x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\phi}_{Emn}^{(k)} \text{sen}(p_m x_1) \text{sen}(p_n x_2) \Rightarrow \\ \frac{Q_{7mn}^{(k)}(x_3^{(k)})}{\phi_{Ef}} &= \hat{\phi}_{Emn}^{(k)} \quad ; \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \Leftrightarrow \\ \frac{y_{71mn}^{(k)}(x_3^{(k)})}{\phi_{Ef}} b_{1mn}^{(k)} + \frac{y_{72mn}^{(k)}(x_3^{(k)})}{\phi_{Ef}} b_{2mn}^{(k)} + \dots + \frac{y_{710mn}^{(k)}(x_3^{(k)})}{\phi_{Ef}} b_{10mn}^{(k)} &= \hat{\phi}_{Emn}^{(k)} \end{aligned} \quad (1.27)$$

No caso das condições impostas sobre as tensões, tem-se que:

$$\sigma_{3i}^{(k)}(x_1, x_2, x_3^{(k)}) = \pm \hat{T}_i^{(k)}(x_1, x_2) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.28)$$

em que  $\hat{T}_i$  são as componentes do vector tensão actuante sobre a superfície, expressas sob a forma de série de Fourier, e o sinal será + se a interface corresponder à face superior da lâmina, de normal  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ , e será - se a interface corresponder à face inferior da lâmina, cuja normal é  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$ .

A condição na fronteira para o deslocamento eléctrico é uma condição de salto, pois pode existir acumulação de carga numa superfície:

$$(D_i^{(a)} - D_i^{(b)})n_i = \rho_{sE} \Rightarrow D_3^{(b)}(x_1, x_2, x_3^{(k)}) = \hat{\rho}_{sE}^{(k)}(x_1, x_2) \pm \hat{D}_3^{(a)\text{ext}}(x_1, x_2) \quad (1.29)$$

em que (a) corresponde à região exterior à lâmina  $(k)$ , (b) corresponde à lâmina  $(k)$ ,  $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_3$  é um vector que vai de (b) para (a), e a carga eléctrica livre por unidade de área  $\hat{\rho}_{sE}$  pode ser nula ou não. Tendo em consideração as respectivas expansões em série de Fourier, chega-se à seguinte relação para cada harmónica:

$$\begin{aligned}
& -e_{31}^{(k)} P_m Q_{1mn}^{(k)}(x_3^{(k)}) - e_{32}^{(k)} P_n Q_{3mn}^{(k)}(x_3^{(k)}) + e_{33}^{(k)} Q_{6mn}^{(k)}(x_3^{(k)}) - \frac{\xi_{33}^{(k)}}{\phi_{\text{Ef}}} Q_{8mn}^{(k)}(x_3^{(k)}) - \\
& - \frac{d_{33}^{(k)}}{\phi_{\text{Hf}}} Q_{10mn}^{(k)}(x_3^{(k)}) = \hat{\rho}_{\text{sE}mn}^k \pm \hat{D}_{3mn}^{(k)\text{ext}} \quad ; \quad m, n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Para o campo magnético existe alguma semelhança com o deslocamento elétrico, tendo-se que:

$$(B_i^{(a)} - B_i^{(b)})n_i = 0 \quad \Rightarrow \quad B_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3^{(1)}) = \hat{B}_3^{(k)\text{ext}}(x_1, x_2) \tag{1.31}$$

### Condições de compatibilidade nas interfaces

Na interface entre duas lâminas adjacentes de um laminado pode verificar-se a continuidade de componentes do deslocamento, tensão ou das grandezas eléctricas, por outras palavras, a variável apresenta continuidade de classe  $C^0$  através da interface. É o que sucede se duas lâminas estão ligadas de forma rígida entre si, sem que possam escorregar (delaminar). Neste caso tanto o deslocamento como o vector tensão na interface comum são contínuos através da interface, assumindo iguais valores em cada lâmina.

Para o deslocamento ou potencial tem-se:

$$\begin{aligned}
& u_i^{(k)}(x_1, x_2, x_3^{(k+1)}) = u_i^{(k+1)}(x_1, x_2, x_3^{(k+1)}) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \\
& \phi_E^{(k)}(x_1, x_2, x_3^{(k+1)}) = \phi_E^{(k+1)}(x_1, x_2, x_3^{(k+1)}) \quad ; \quad \phi_H^{(k)}(x_1, x_2, x_3^{(k+1)}) = \phi_H^{(k+1)}(x_1, x_2, x_3^{(k+1)})
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Suponha-se que sobre a interface entre lâminas é possível especificar uma tensão exterior  $\hat{T}_i$ , então a condição de compatibilidade de tensão entre lâminas escreve-se como:

$$\begin{aligned}
& (\sigma_{ji}^{(a)} - \sigma_{ji}^{(b)})n_j = -\hat{T}_i \quad \Leftrightarrow \\
& \sigma_{3i}^{(k)}(x_1, x_2, x_3^{(k+1)}) - \sigma_{3i}^{(k+1)}(x_1, x_2, x_3^{(k+1)}) = \hat{T}_i^{(k+1)}(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{1.33}$$

No caso da componente de tensão  $\sigma_{32}$ :

$$\begin{aligned}
& \sigma_{32}^{(k)}(x_1, x_2, x_3^{(k+1)}) - \sigma_{32}^{(k+1)}(x_1, x_2, x_3^{(k+1)}) = \hat{T}_2^{(k+1)}(x_1, x_2) \quad \Leftrightarrow \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( C_{44}^{(k)} Q_{4mn}^{(k)}(x_3^{(k+1)}) + C_{44}^{(k)} P_n Q_{5mn}^{(k)}(x_3^{(k+1)}) + \frac{e_{24}^{(k)}}{\phi_{\text{Ef}}} P_n Q_{7mn}^{(k)}(x_3^{(k+1)}) + \frac{h_{24}^{(k)}}{\phi_{\text{Hf}}} P_n Q_{9mn}^{(k)}(x_3^{(k+1)}) \right) - \right. \\
& \left. - \left( C_{44}^{(k+1)} Q_{4mn}^{(k+1)}(x_3^{(k+1)}) + C_{44}^{(k+1)} P_n Q_{5mn}^{(k+1)}(x_3^{(k+1)}) + \frac{e_{24}^{(k+1)}}{\phi_{\text{Ef}}} P_n Q_{7mn}^{(k+1)}(x_3^{(k+1)}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{h_{24}^{(k+1)}}{\phi_{\text{Hf}}} P_n Q_{9mn}^{(k+1)}(x_3^{(k+1)}) \right) \right] \text{sen}(p_m x_1) \cos(p_n x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{T}_{2mn}^{(k+1)} \text{sen}(p_m x_1) \cos(p_n x_2) \quad \Leftrightarrow \\
& C_{44}^{(k)} Q_{4mn}^{(k)}(x_3^{(k+1)}) + C_{44}^{(k)} P_n Q_{5mn}^{(k)}(x_3^{(k+1)}) + \frac{e_{24}^{(k)}}{\phi_{\text{Ef}}} P_n Q_{7mn}^{(k)}(x_3^{(k+1)}) + \frac{h_{24}^{(k)}}{\phi_{\text{Hf}}} P_n Q_{9mn}^{(k)}(x_3^{(k+1)}) - \\
& - C_{44}^{(k+1)} Q_{4mn}^{(k+1)}(x_3^{(k+1)}) - C_{44}^{(k+1)} P_n Q_{5mn}^{(k+1)}(x_3^{(k+1)}) - \frac{e_{24}^{(k+1)}}{\phi_{\text{Ef}}} P_n Q_{7mn}^{(k+1)}(x_3^{(k+1)}) - \\
& - \frac{h_{24}^{(k+1)}}{\phi_{\text{Hf}}} P_n Q_{9mn}^{(k+1)}(x_3^{(k+1)}) = \hat{T}_{2mn}^{(k+1)}
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Se o valor de uma componente do vector tensão exterior aplicada  $\hat{T}_i$  for nula, a respectiva componente de tensão será contínua através da interface, caso contrário existirá uma descontinuidade de valor igual ao da tensão exterior imposta. Note-se que esta condição envolve as funções solução de ambas as lâminas que partilham a interface, pelo que pode considerar-se como uma condição de fronteira sobre a lâmina ( $k$ ) ou sobre a lâmina ( $k+1$ ).

Para o deslocamento eléctrico e campo magnético, as Eq.(1.29) e Eq.(1.31) representam equações de compatibilidade e aplicam-se agora com as lâminas ( $k$ ) e ( $k+1$ ), por exemplo:

$$(D_i^{(a)} - D_i^{(b)})n_i = \rho_{sE} \Rightarrow D_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3^{(k+1)}) - D_3^{(k+1)}(x_1, x_2, x_3^{(k+1)}) = -\hat{\rho}_{sE}^{(k+1)}(x_1, x_2) \quad (1.35)$$

### 3.5. Sistema de equações para as condições de fronteira

A especificação das condições de fronteira em cada superfície das lâminas, conduz a um sistema de equações lineares, de dimensão igual a  $10 \times N_L$ , para a determinação das constantes  $b_{imn}^{(k)}$ , já que existem 10 constantes a determinar para cada lâmina. Redefinindo as constantes  $b_{imn}^{(k)}$  com outros índices:

$$b_{jmn} = b_{imn}^{(k)} \quad ; \quad j = i + 10 \times (k-1) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, N_L \quad (1.36)$$

o sistema de equações para as condições de fronteira escreve-se:

$$\mathbf{B}_{mn} \mathbf{b}_{mn} = \hat{\mathbf{b}}_{mn} \quad (1.37)$$

em que a matriz  $\mathbf{B}$  é construída com as equações mostradas nos pontos anteriores, e o vector  $\hat{\mathbf{b}}$  contém os respectivos valores do lado direito, cujas entradas são nulas para as equações de compatibilidade ou contêm os respectivos valores prescritos. Para cada harmónica ( $m, n$ ), existe um sistema de equações Eq.(1.37) diferente, e que tem de ser resolvido em separado.

O número de harmónicas a utilizar na obtenção da solução analítica, depende do número de harmónicas contido nas expressões de Fourier, das funções que representam as distribuições com que são prescritas as variáveis do problema na fronteira do domínio, e será igual ao maior desses valores. Ter-se-á uma solução exacta apenas no caso em que as condições na fronteira se possam escrever de forma exacta como uma soma finita de termos da aproximação de Fourier.

Obtida a solução de Eq.(1.37) e substituindo o resultado em Eq.(1.25) fica-se com a solução do problema.

## 4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Apresentam-se de seguida alguns resultados ilustrativos.

### 4.1. Placa adaptável

Considere-se uma placa laminada de dimensões  $80 \times 80 \times 10 \text{mm}$  ( $L_1 \times L_2 \times H_L$ ), com empilhamento  $[\{0^\circ, \text{pm}\}, \{0^\circ, \text{p}\}, \{0^\circ, \text{c}\}, \{90^\circ, \text{p}\}, \{90^\circ, \text{c}\}]$  (c: compósito, p: piezoeléctrico, pm: piezomagnético), em que todas as lâminas são de 2mm de espessura, e os materiais possuem as seguintes propriedades: c- $\{C_{11} = 320.0 \text{ [GPa]}, C_{12} = 1.5, C_{13} = 0.95, C_{22} = 10.06, C_{23} = 1.2, C_{33} = 5.6, C_{44} = 1.15, C_{55} = 2.4, C_{66} = 16.3; e_{ij} = 0 = h_{ij} = d_{ab}; \xi_{11} = 30.65 \text{ [pF/m]}$ ,

$\xi_{22} = 30.65 = \xi_{33}$ ;  $\mu_{11} = \mu_{22} = 5.0$  [ $\mu\text{H/m}$ ],  $\mu_{33} = 10.0$  }, p- $\{ C_{11} = C_{22} = 138.499$  [GPa],  $C_{12} = 77.371$ ,  
 $C_{13} = C_{23} = 73.643$ ,  $C_{33} = 114.745$ ,  $C_{44} = C_{55} = 25.6$ ,  $C_{66} = 30.6$ ;  $e_{15} = e_{24} = 12.72$  [ $\text{C/m}^2$ ],  
 $e_{31} = e_{32} = -5.2$ ,  $e_{33} = 15.08$ ;  $h_{ij} = d_{ab} = 0$ ;  $\xi_{11} = \xi_{22} = 13.06$  [nF/m],  $\xi_{33} = 11.15$ ;  
 $\mu_{11} = \mu_{22} = 5.0$  [ $\mu\text{H/m}$ ],  $\mu_{33} = 10.0$  }, pm- $\{ C_{11} = C_{22} = 286.0$  [GPa],  $C_{12} = 173.0$ ,  $C_{13} = C_{23} = 170.5$ ,  
 $C_{33} = 269.5$ ,  $C_{44} = C_{55} = 45.3$ ,  $C_{66} = 56.5$ ;  $e_{ij} = 0 = d_{ab}$ ,  $\xi_{11} = \xi_{22} = 0.8$  [nF/m],  
 $h_{15} = h_{24} = 550.0$  [T],  $h_{31} = h_{32} = 580.3$ ,  $h_{33} = 699.7$ ;  $\mu_{11} = \mu_{22} = -590.0$  [mH/m],  $\mu_{33} = 157.0$  }.

Nas interfaces entre lâminas têm-se as seguintes condições:

$$x_3^{(1)} = -5 \text{ [mm]} : \hat{T}_1 = \hat{T}_2 = \hat{T}_3 = 0 \text{ [Pa]} ; D_3^{(1)}(x_3^{(1)}) = 0 \text{ [C/m}^2\text{]} ; \hat{\phi}_H = 5 \text{ [A/m}^2\text{]}$$

$$x_3^{(2)} = -3, x_3^{(4)} = 1 : \hat{\phi}_E = 50 \text{ sen}\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \text{ sen}\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right) \text{ [V]} ; x_3^{(3)} = -1, x_3^{(5)} = 3 : \hat{\phi}_E = 0 \text{ [V]}$$

$$x_3^{(6)} = 5 : \hat{T}_1 = \hat{T}_2 = 0 ; \hat{T}_3(x_1, x_2) = -1000 \text{ sen}\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \text{ sen}\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right) ; D_3^{(5)}(x_3^{(6)}) = 0 ; \hat{\phi}_H = 1$$

e condições de continuidade nas restantes funções a prescrever.

Na Tabela 1 e nas Fig 2 a Fig 5 apresentam-se alguns dos resultados obtidos. Como as condições de fronteira são exactamente representadas por uma expansão de Fourier (só existe um termo), esta solução é exacta.

Tabela 1. Valores de diversas variáveis nos pontos P1:(20,10,  $x_3$ ) e P2:(50,60,  $x_3$ ) [mm] do laminado.

Ponto	$u_1$ [nm]	$u_3$ [nm]	$\sigma_{22}$ [kPa]	$\sigma_{31}$ [kPa]	$\phi_E$ [V]	$D_2$ [ $\mu\text{C/m}^2$ ]	$B_3$ [mT]
P1: 5	8.952	-20.732	-65.532	0.0	0.0	0.0	1.330
P1: 4	8.349	-20.793	-62.663	-0.484	0.0	0.0	1.335
P1:-2	3.788	-24.651	79.041	0.140	6.712	-11.620	1.410
P1: -3	2.934	-25.745	84.846 -36.334	3.088	13.530	-20.727 -1.026	1.430
P1: -5	2.137	-26.015	-24.555	0.0	13.458	-1.021	-3.483
P2 : 2	-7.379	-53.348	176.054	-0.982	16.218	16.723	3.263
P2: 1	-6.605	-56.244	187.318 -5.099	-3.184	32.664	26.375 0.0341	3.291
P2: 0	-5.033	-56.512	-5.220	-0.092	16.305	0.170	3.323
P2: -4	-2.523	-62.554	-73.253	-1.394	32.535	1.022	-2.493
P2: -5	-2.137	-62.806	-59.280	0.0	32.492	1.021	-8.408

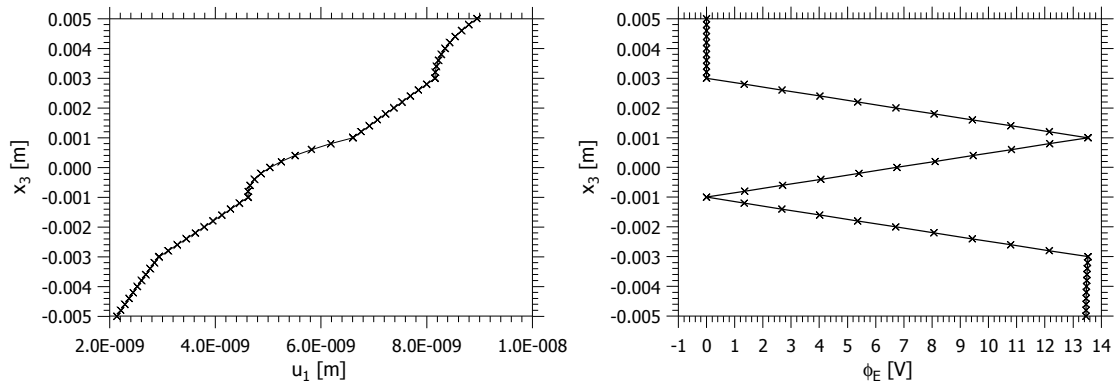


Fig 2. Distribuições ao longo da espessura do deslocamento e potencial eléctrico na posição P1:(20,10,.).

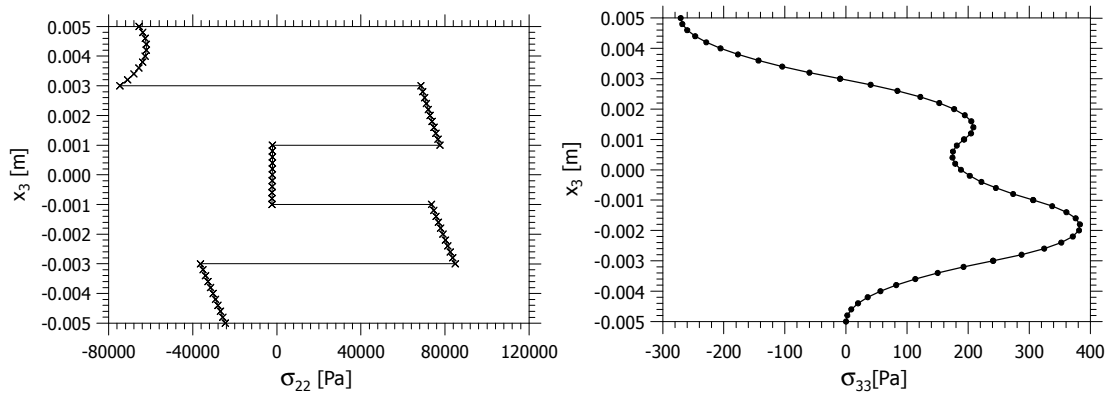


Fig 3. Distribuições ao longo da espessura de componentes de tensão normal na posição P1:(20,10,.).

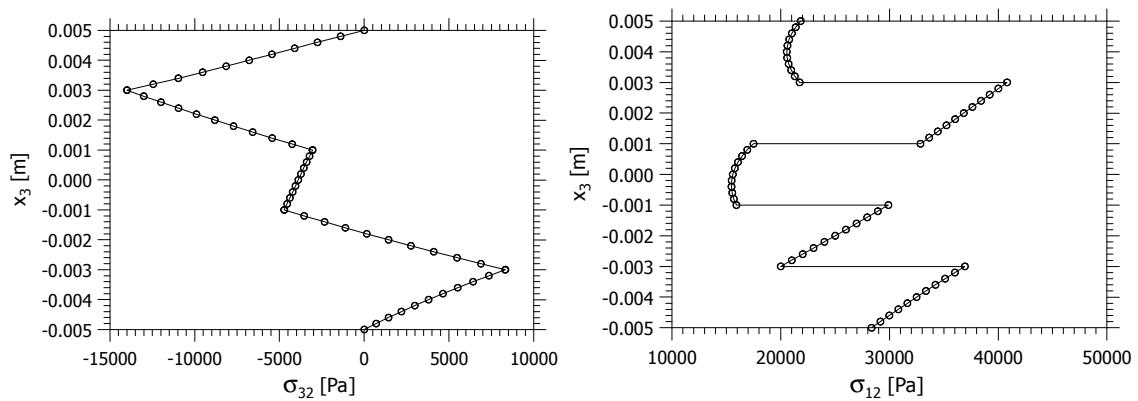


Fig 4. Distribuições ao longo da espessura de componentes de tensão de corte na posição P1:(20,10,.).

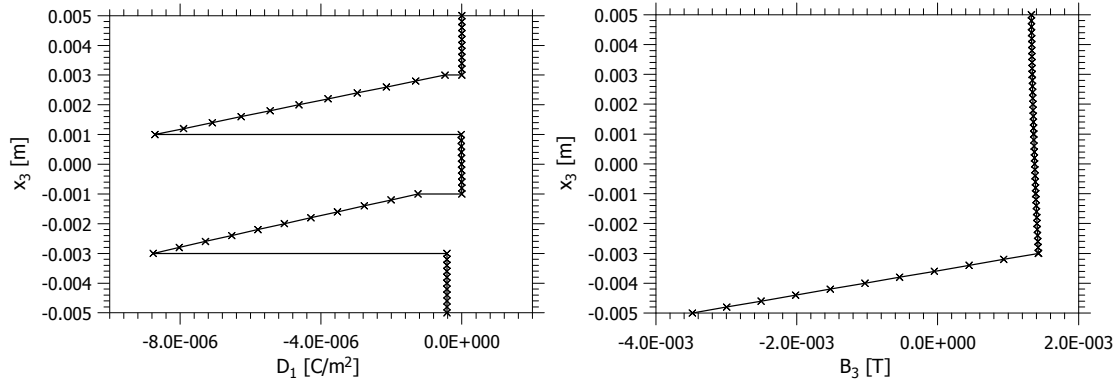


Fig 5. Distribuições ao longo da espessura de componentes do deslocamento eléctrico e campo magnético em P1:(20,10,.).

## 4.2. Placa adaptável delaminada

Este exemplo é baseado no anterior, mas nas interfaces entre lâminas foi adicionada a aplicação das seguintes condições de valor imposto na interface (4):

$$x_3^{(4)} = 1 : \hat{T}_1 = \hat{T}_2 = 0 \text{ [Pa]}$$

com condições de continuidade nas restantes funções a prescrever. A solução obtida corresponde à de uma placa delaminada ao longo da interface entre a lâmina (3) e a lâmina (4), ou seja, a tensão de corte foi assumida nula nessa interface. Os resultados encontram-se na Tabela 2 e nas Fig 6 a Fig 8.

Tabela 2. Valores de diversas variáveis nos pontos P1:(20,10,  $x_3$ ) e P2:(50,60,  $x_3$ ) [mm] do laminado delaminado.

Ponto	$u_1$ [nm]	$u_3$ [nm]	$\sigma_{22}$ [kPa]	$\sigma_{32}$ [kPa]	$\phi_E$ [V]	$D_2$ [ $\mu\text{C}/\text{m}^2$ ]	$B_3$ [mT]
P1: 5	16.790	-20.163	-41.176	0.0	0.0	0.0	1.330
P1: 4	16.323	-20.276	-36.440	-4.779	0.0	0.0	1.335
P1:-2	2.019	-24.499	74.117	3.726	6.712	-10.482	1.410
P1: -3	1.194	-25.599	79.974	10.122	13.530	-19.830	1.430
			-45.409			-1.026	
P1: -5	0.419	-25.879	-33.655	0.0	13.458	-1.021	-3.483
P2 : 2	-15.778	-52.562	175.302	5.084	16.220	14.870	3.263
P2: 1	-15.112	-55.805	186.656	0.0	32.664	24.859	3.291
	-3.221		-8.480			0.034	
P2: 0	-2.680	-56.103	-7.716	1.002	16.305	0.017	3.323
P2: -4	-0.797	-62.212	-95.147	-4.699	32.535	1.022	-2.493
P2: -5	-0.419	-62.477	-81.251	0.0	32.492	1.021	-8.408

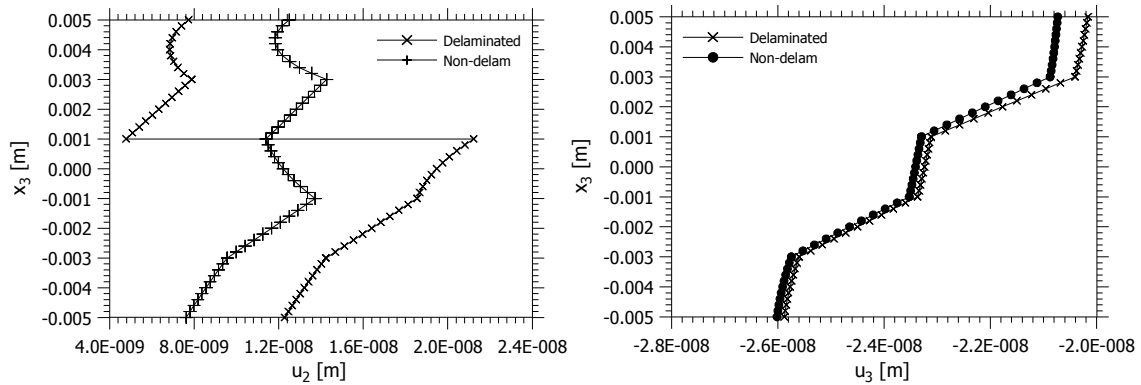


Fig 6. Distribuições ao longo da espessura de componentes do deslocamento na posição P1:(20,10,,).

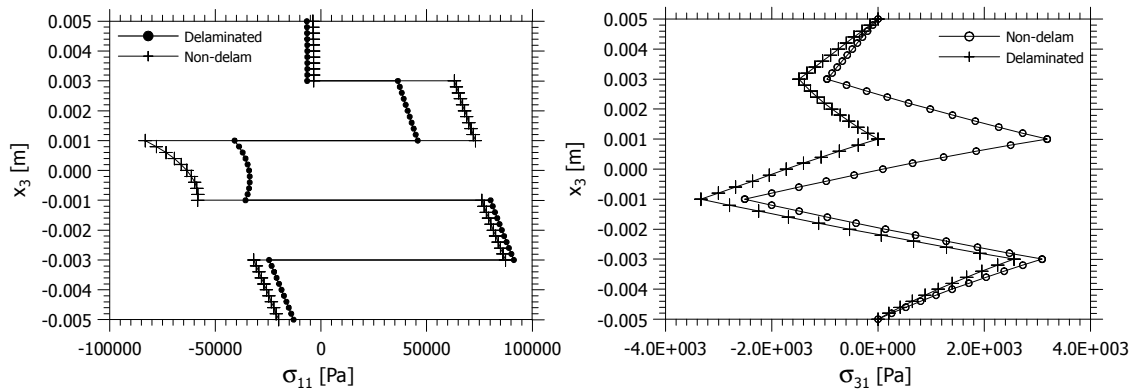


Fig 7. Distribuições ao longo da espessura de componentes de tensão normal e de corte na posição P1:(20,10,,).

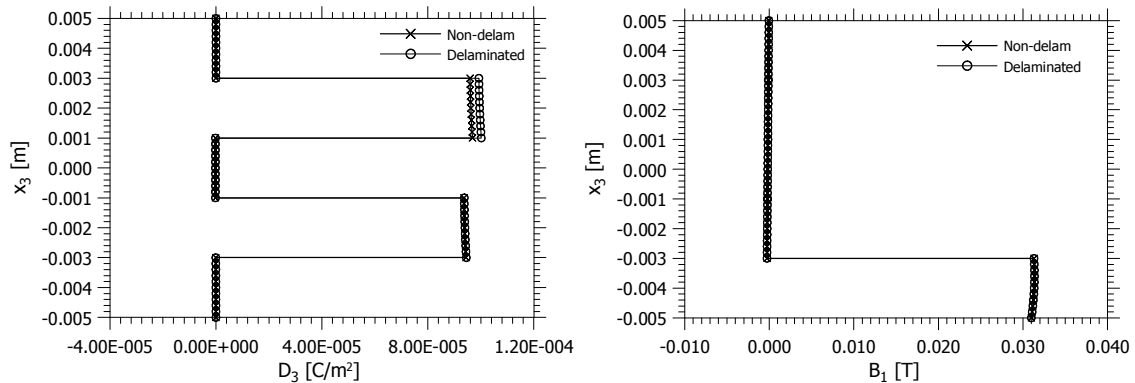


Fig 8. Distribuições ao longo da espessura de componentes do deslocamento eléctrico e campo magnético em P1:(20,10,,).

Da observação dos resultados para ambos os laminados verifica-se que as formas das várias curvas são análogas, embora o laminado delaminado seja mais flexível e possua um campo de deslocamentos com as componentes alinhadas com a interface (4) descontínuas.

Dado tratarem-se de laminados espessos, verifica-se que os perfis de deslocamento e tensão segundo a espessura possuem formas bastante irregulares.

## 5. CONCLUSÕES

Os vários resultados podem ser utilizados para testar modelos numéricos. Outros exemplos envolvendo várias harmónicas poderiam ser apresentados, mas nessa situação a solução não será exacta.

Podem também analisar-se problemas não homogéneos. Se existir força aplicada por unidade de volume  $f_i$  ou carga eléctrica por unidade de volume  $\rho_u$ , cujas distribuições têm de ser dadas na forma adequada de série de Fourier segundo  $(x_1, x_2)$  com a variação segundo  $(x_3)$  podendo ser arbitrária, à semelhança das equações Eq.(1.7), chegar-se-á a um sistema de equações diferenciais similar ao da Eq.(1.20), mas não homogéneo, que pode escrever-se como:

$$\mathbf{Q}'_{mn}(x_3) = \mathbf{A}_{mn}^{(k)} \mathbf{Q}_{mn}^{(k)}(x_3) + \mathbf{a}_{mn}^{(k)}(x_3) \quad (1.38)$$

A solução de ser obtida directamente da fórmula de variação das constantes [Costa (1998)], dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{mn}^{(k)}(x_3) &= \mathbf{F}_{mn}^{(k)}(x_3) \left( \mathbf{F}_{mn}^{(k)}(x_3^*) \right)^{-1} \mathbf{Q}_{mn}^{(k)}(x_3^*) + \mathbf{F}_{mn}^{(k)}(x_3) \int_{x_3^{(k)}}^{x_3^{(k+1)}} \left( \mathbf{F}_{mn}^{(k)}(s) \right)^{-1} \mathbf{a}_{mn}^{(k)}(s) ds \quad \Leftrightarrow \\ \mathbf{Q}_{mn}^{(k)}(x_3) &= \mathbf{P}_{mn}^{(k)}(x_3) \mathbf{Q}_{mn}^{(k)}(x_3^*) + \mathbf{P}_{mn}^{(k)}(x_3) \int_{x_3^{(k)}}^{x_3^{(k+1)}} \left( \mathbf{P}_{mn}^{(k)}(s) \right)^{-1} \mathbf{a}_{mn}^{(k)}(s) ds \end{aligned} \quad (1.39)$$

em que  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{P}$  são as matrizes solução fundamental e principal obtidas para o problema homogéneo. A solução para todo o laminado é obtida aplicando as respectivas condições de fronteira. Outro modo é obter uma dada solução particular do problema não homogéneo e adicioná-la à solução geral do problema homogéneo.

Encontram-se na literatura outras referências que incidem sobre o caso dinâmico [Srinivas & Rao, 1970 e Heyliger & Saravanos, 1995] e sobre placas com condições de fronteira arbitrárias ([Vel & Batra 1999, 2000; Vel et al., 2004]), embora os resultados numéricos apresentados sejam poucos devido à complexidade e número de cálculos necessários. Este trabalho será estendido também ao caso dinâmico.

## REFERÊNCIAS

- Bisegna, P. & Maceri, F., An exact three-dimensional solution for simply supported rectangular piezoelectric plates, *Journal of Applied Mechanics*, 63 (1996) 628-638.
- Braun, M., *Differential equations and their applications – An introduction to applied mathematics*, 4th edition, Springer-Verlag, New York, USA, (1993).
- Costa, F. P., *Equações diferenciais ordinárias*, IST Press – Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal (1998).
- Figueiredo D. G., *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, Brasil (1987).
- Haus, H. A. & Melcher, J. R., *Electromagnetic Fields and Energy*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1989).



- Heyliger, P., Exact solutions for simply supported laminated piezoelectric plates, *Journal of Applied Mechanics*, 64 (1997) 299-306.
- Heyliger, P. & Saravanos, D. A., Exact free-vibration analysis of laminated plates with embedded piezoelectric layers, *Journal of the Acoustical Society of America*, 98(3) (1995) 1547-1557.
- Maple 12.0, Maplesoft, Waterloo Maple Inc., [www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com), (2008).
- Pagano, N. J., Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *Journal of Composite Materials*, 4 (1970) 20-34.
- Pan, E., Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, 68 (2001) 608-618.
- Reddy, J. N., *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*, 2nd edition, Boca Raton: CRC Press (2004).
- Srinivas, S. & Rao A. K., Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, *International Journal of Solids and Structures*, 6 (1970) 1463-1481.
- Vel, S. S. & Batra, R. C., Analytical solution for rectangular thick laminated plates subjected to arbitrary boundary conditions, *AIAA Journal*, 37(11) (1999) 1464-1473.
- Vel, S. S. & Batra, R. C., Three-dimensional analytical solution for hybrid multilayered piezoelectric plates, *Journal of Applied Mechanics*, 67 (2000) 558-567.
- Vel, S. S. & Mewer, R. C., Batra, R. C., Analytical solution for the cylindrical bending vibration of piezoelectric composite plates, *International Journal of Solids and Structures*, 41 (2004) 1625-1643.