

Índice

Prefácio	xv
1 Limites e continuidade	1
1.1 Noção de função	1
1.2 Espaço \mathfrak{R}^n	2
1.2.1 Noções de norma e distância	4
1.3 Funções de \mathfrak{R}^n em \mathfrak{R}^m	5
1.3.1 Exemplos do caso $n > 1$ em Economia	5
1.3.2 Exemplos do caso $m > 1$ em Economia	6
1.3.3 Domínio	7
1.3.4 Caso especial de $f : D \subseteq \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$, representação geométrica	8
1.4 Limite de uma função	10
1.4.1 Limite de uma sucessão	10
1.4.2 Algumas noções de topologia	12
1.4.3 Limite de uma função	15
1.4.4 Exemplos	17
1.4.5 Limite da função segundo um «caminho» específico	19
1.4.6 Resultados importantes sobre limites	21
1.5 Continuidade	25
1.5.1 Resultados de funções contínuas	27
1.6 Exercícios	32
2 Diferenciabilidade	35
2.1 Derivada de uma função real de variável real	35
2.1.1 Exemplos económicos — custo marginal e receita marginal	37
2.1.2 Elasticidade	38
2.1.3 Diferenciabilidade	40
2.2 Derivadas parciais	42
2.2.1 Vector gradiente e matriz jacobiana	43
2.3 Derivadas de ordem superior e matriz hessiana	45
2.4 Derivada da função num ponto segundo um vector	46

2.5	Diferenciabilidade	49
2.5.1	Função real de duas variáveis	50
2.5.2	Função real de n variáveis	54
2.5.3	Função vectorial	55
2.5.4	Condição suficiente para diferenciabilidade	56
2.5.5	Diferenciabilidade e derivada segundo um vector	58
2.6	Exercícios	61
3	Teorema da função composta	63
3.1	Derivada da função composta	63
3.2	Funções homogéneas e funções homotéticas	66
3.2.1	Dois exemplos económicos	68
3.2.2	Teorema de Euler	70
3.2.3	$f(x)/x_1^\alpha$ como função das razões $\frac{x_i}{x_1}$	72
3.2.4	Homogeneidade das derivadas parciais	73
3.2.5	Funções homotéticas	75
3.3	Exercícios	76
4	Fórmula de Taylor	79
4.1	Teorema dos acréscimos finitos	79
4.1.1	Máximos e mínimos	79
4.1.2	Teorema de Rolle	80
4.1.3	Teorema dos acréscimos finitos para $f : \Re \rightarrow \Re$	81
4.1.4	Teorema dos acréscimos finitos	83
4.1.5	Teorema de Schwarz-Young	85
4.2	Fórmulas de Taylor e de McLaurin	86
4.2.1	Função real de variável real	86
4.2.2	Função real de várias variáveis reais	89
4.3	Exercícios	96
5	Função inversa e função implícita	99
5.1	Teorema da função inversa	99
5.1.1	Funções reais de uma variável	100
5.1.2	Funções de \Re^n em \Re^n	102
5.2	Teorema da função implícita	109
5.2.1	Matriz jacobiana da função definida implicitamente	115

5.2.2	Modelo keynesiano de determinação do rendimento	119
5.2.3	Equilíbrio no mercado de um bem	120
5.3	Exercícios	122
6	Optimização: introdução	125
6.1	Introdução	125
6.2	Algumas noções importantes	128
6.2.1	Máximos e mínimos e o teorema de Weierstrass	128
6.2.2	Como encontrar máximos e mínimos?	129
6.2.3	Formas quadráticas	130
6.2.4	Condição suficiente para um máximo local ser máximo global	133
6.3	Conjuntos e funções convexas e quase-convexas	134
6.3.1	Conjuntos convexos	134
6.3.2	Funções convexas/côncavas	135
6.3.3	Funções quase-convexas	144
6.4	Exercícios	150
7	Optimização livre	151
7.1	Função real de variável real	151
7.1.1	Condição necessária para o extremo local de uma função	152
7.1.2	Condições suficientes para o extremo local de uma função	153
7.1.3	Demonstração das condições necessárias e suficientes para uma função de classe C^2	154
7.2	Função real de várias variáveis	157
7.2.1	Função real de duas variáveis	158
7.2.2	Função real de n variáveis	166
7.2.3	Condições suficientes para extremos globais	170
7.2.4	Exemplo — maximização do lucro	171
7.3	O teorema do envelope	172
7.3.1	Exemplo — lema de Hotelling	174
7.4	Exercícios	175
8	Optimização com restrições de igualdade	177
8.1	Dois variáveis de decisão, uma restrição	177
8.1.1	Resolução gráfica	177
8.1.2	Método da substituição	179

8.1.3	Método dos multiplicadores de Lagrange	181
8.1.4	Condições suficientes	183
8.2	n variáveis de decisão, m restrições	185
8.2.1	Método dos multiplicadores de Lagrange	185
8.2.2	Condições suficientes	188
8.3	Interpretação dos multiplicadores de Lagrange	189
8.3.1	Exemplos económicos	191
8.4	Teorema do envelope	192
8.4.1	Exemplo — lema de Shepard	194
8.5	Exercícios	195
9	Optimização com restrições de desigualdade	199
9.1	Introdução	199
9.2	Condições de Kuhn-Tucker	200
9.2.1	Restrições de não-negatividade	200
9.2.2	Restrições de desigualdade	203
9.2.3	Os sinais dos multiplicadores de Lagrange	205
9.2.4	As condições de complementaridade	208
9.3	Discussão das condições de Kuhn-Tucker	208
9.3.1	Exemplo económico — o problema do consumidor	209
9.4	Teorema de Kuhn-Tucker	213
9.4.1	Teorema da suficiência	213
9.4.2	Restrição de qualificação	216
9.5	Programação quase-côncava	219
9.6	Exercícios	220
10	Integração	223
10.1	Primitivação e integração em \mathfrak{R}	223
10.1.1	Primitivação	223
10.1.2	Integral definido	229
10.1.3	Relação entre integração e primitivação	234
10.1.4	Integrais impróprios	238
10.2	Integrais múltiplos	239
10.2.1	Cálculo de integrais duplos e mudança da ordem de integração	241
10.2.2	Outras regiões de integração	242

10.2.3	Método da substituição	245
10.3	Integrais paramétricos	249
10.4	Exemplos económicos	250
10.4.1	Relação entre investimento e <i>stock</i> de capital	250
10.4.2	Excedente do consumidor	252
10.5	Exercícios	253
11	Equações diferenciais	255
11.1	Introdução	255
11.2	Equações diferenciais	256
11.3	Equações diferenciais ordinárias	257
11.3.1	Alguns tipos de equações diferenciais ordinárias	258
11.3.2	Um exemplo simples	259
11.4	Equações não-lineares de primeira ordem	260
11.4.1	Equações diferenciais exactas	261
11.4.2	Equações separáveis	263
11.4.3	Equação diferencial homogénea	264
11.4.4	Diagramas de fases e estabilidade	265
11.4.5	Exemplo económico — modelo neoclássico de crescimento	267
11.5	Equações lineares com coeficientes constantes	268
11.5.1	Equações lineares de primeira ordem	268
11.5.2	Equações lineares de segunda ordem	277
11.5.3	Equações lineares com coeficientes constantes de ordem superior	288
11.6	Exercícios	291
12	Sistemas de equações diferenciais	293
12.1	Transformação de uma equação de ordem superior num sistema	293
12.2	Algumas propriedades da solução geral do sistema	295
12.3	Solução do sistema homogéneo	296
12.3.1	Caso das raízes reais e distintas	297
12.3.2	Caso das raízes complexas	298
12.3.3	Caso das raízes reais repetidas	299
12.3.4	Uma forma alternativa de explicar a solução complementar	301
12.4	Solução particular, equilíbrio e estabilidade	303
12.5	Diagrama de fases com duas variáveis	304

12.5.1	Tipos de equilíbrio	306
12.6	Exemplo económico — inflação e desemprego	307
12.7	Exercícios	309
13	Equações e sistemas de equações às diferenças	311
13.1	Diferenças e <i>lags</i>	312
13.1.1	Operador diferença	312
13.1.2	Operadores avanço e atraso	313
13.2	Equações às diferenças	314
13.2.1	Exemplo simples	316
13.3	Equações lineares com coeficientes constantes	319
13.3.1	Resultados básicos sobre equações lineares	319
13.3.2	Equações de segunda ordem	321
13.3.3	Equações de ordem superior	327
13.3.4	Exemplo económico — modelo da «teia de aranha»	328
13.4	Sistemas de equações às diferenças	330
13.4.1	Solução de sistemas de equações às diferenças	331
13.4.2	Resolução em notação matricial	332
13.4.3	Exemplo — sondagens usando painéis	333
13.5	Exercícios	334
14	Optimização dinâmica	337
14.1	Introdução	337
14.2	O problema de controle	338
14.2.1	Exemplo económico — extracção de um recurso não-renovável	340
14.3	Cálculo de variações	341
14.3.1	A equação de Euler	342
14.3.2	Condição de transversalidade	345
14.4	Programação dinâmica	347
14.4.1	Problema de controle em tempo discreto	349
14.4.2	Exemplo económico — consumo intertemporal	350
14.5	O princípio do óptimo	352
14.5.1	Interpretação do princípio do óptimo	358
14.5.2	Exemplo económico — crescimento económico óptimo	361
14.6	Exercícios	365

<i>Índice</i>	xiii
Solução dos exercícios	367
Bibliografia	406
Índice remissivo	407