

# Boletim



**SOCIEDADE PORTUGUESA  
DE ESTATÍSTICA**

*Publicação semestral*

*Outono de 2008*



## Processos Estocásticos

<b>Séries temporais e decisão dinâmica</b>	
Nazaré Mendes Lopes .....	26
<b>Processos estocásticos aplicados às finanças</b>	
João Nicolau .....	35
<b>Algumas noções de dependência positiva</b>	
Paulo Eduardo Oliveira .....	43
<b>Processos estocásticos em dinâmica de estrutura de engenharia</b>	
Paula Milheiro Oliveira .....	53
<b>Equações diferenciais estocásticas e aplicações biológicas</b>	
Carlos A. Braumann .....	61

Editorial .....	1
Mensagem do Presidente .....	2
Notícias .....	3
Episódios na História da Estatística .....	11
SPE e a Comunidade .....	13
Ciência Estatística	
• Artigos Científicos Publicados .....	70
• Livros .....	70
• Teses de Doutoramento .....	71
• Prémios Estatístico Júnior 2008 .....	72

### Informação Editorial

**Endereço:** Sociedade Portuguesa de Estatística,  
Campo Grande. Bloco C6. Piso 4.  
1749-016 Lisboa. Portugal.

**Telefone:** +351.217500120

**e-mail:** [spe@fc.ul.pt](mailto:spe@fc.ul.pt)

**URL:** <http://www.spestatistica.pt>

**ISSN:** 1646-5903

**Depósito Legal:** 249102/06

**Tiragem:** 1000 exemplares

**Execução Gráfica e Impressão:** Gráfica Sobreireense

**Editor:** Fernando Rosado, [fernando.rosado@fc.ul.pt](mailto:fernando.rosado@fc.ul.pt)

Este Boletim tem o apoio da **FCT** Fundação para a Ciência e a Tecnologia

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR

# Equações diferenciais estocásticas e aplicações biológicas

Carlos A. Braumann, *braumann@uevora.pt*

Departamento de Matemática e Centro de Investigação em Matemática e Aplicações  
Universidade de Évora

## 1. Introdução

O objectivo deste texto é dar uma panorâmica de algumas das principais aplicações biológicas das equações diferenciais estocásticas.

É bem sabido que as equações diferenciais ordinárias (EDO) têm uma longa tradição e grande sucesso como modelos matemáticos do comportamento de fenómenos dinâmicos nas mais variadas áreas da Ciência e da Tecnologia. De facto, é por vezes mais fácil descrever regras de comportamento da taxa de variação (derivada) de uma variável temporal (regras que podem envolver essa variável e/ou outras variáveis com as quais interage) do que descrever directamente as regras de evolução da própria variável. Obtém-se assim uma EDO que, por integração, permite obter o comportamento da variável de interesse e fazer previsões sobre a sua evolução futura.

No caso de uma só variável  $X(t)$  teremos um modelo da forma

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) \quad \text{ou} \quad dX(t) = f(t, X(t))dt \quad (1)$$

com uma condição inicial  $X(0)=X_0$ . A extensão a várias variáveis é relativamente simples, trabalhando-se com um vector de variáveis e usando também um vector de funções em vez de uma função escalar  $f$ . Para não complicar a notação, consideraremos aqui o caso unidimensional.

Raramente, porém conseguimos introduzir nesses modelos todas as variáveis intervenientes, quer por desconhecimento de factores que podem afectar o fenómeno dinâmico em causa, quer por impossibilidade de os medir ou prever, quer ainda porque o seu efeito é menos relevante (ainda que não despreciando para certos objectivos) para justificar o investimento necessário à sua inclusão detalhada. É, pois, natural, que esses factores sejam agrupados numa única variável temporal cujo comportamento é necessariamente aleatório, isto é, um processo estocástico, processo esse que se deve incluir como um termo adicional que perturba a dinâmica determinística dos factores intervenientes explicitamente considerados no modelo. Tão natural como o tratamento probabilístico que usamos para descrever o resultado do lançamento de uma moeda ao ar em vez de pretendermos introduzir de forma determinística as diversas forças resultantes da gravidade e da forma exacta como posicionamos e movimentamos a mão ao lançar a moeda e ao recolhê-la. Se admitirmos que esses factores agrupados são em número elevado, natural será que, usando e quiçá abusando do teorema do limite central, o seu efeito cumulativo possa ser aproximadamente descrito por um processo estocástico gaussiano. Normalmente, é mais fácil considerar o efeito acumulado dessas perturbações entre o instante 0 e o instante  $t$ . Se admitirmos que as perturbações que actuam num intervalo de tempo são aproximadamente independentes das que actuam noutros intervalos de tempo que se lhe não sobreponham, então é natural que o efeito acumulado das perturbações seja um processo com incrementos independentes. E se admitirmos que as perturbações, aproximadamente independentes entre si, ocorrem com uma frequência relativamente uniforme e têm efeitos que se adicionam, então é razoável supor que o seu número é aproximadamente proporcional ao intervalo de tempo a que nos reportamos e, portanto, a variância do seu efeito acumulado num certo intervalo de tempo é proporcional à duração desse intervalo. Mesmo que a proporcionalidade não seja correcta e a “constante” de proporcionalidade seja afinal variável, podemos incorporar essa variabilidade num factor multiplicativo que represente a variação do desvio-padrão com as variáveis consideradas no

modelo e/ou com o tempo, e, nesse caso, nada impede escolher para o processo perturbador de base (a ser depois multiplicado por aquele factor) uma constante de proporcionalidade unitária. Disto tudo resulta que, admitindo no limite a continuidade temporal das perturbações (também é possível considerar perturbações descontínuas mas disso não falaremos aqui), podemos usar como efeito acumulado (entre 0 e  $t$ ) de base o processo de Wiener padrão  $W(t)$  (único que conjuga as propriedades de ser contínuo, gaussiano, ter incrementos independentes e os seus incrementos terem variância proporcional, no caso padrão com constante de proporcionalidade unitária, ao comprimento do intervalo). Claro que, num intervalo infinitesimal  $dt$ , o efeito das perturbações de base referentes a esse intervalo será  $dW(t)$  e, se representarmos por  $g(t, X(t))$  o desvio-padrão das perturbações, obtemos a equação diferencial estocástica (EDE)

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad (2)$$

com a mesma condição inicial  $X(0)=X_0$  (como o valor inicial pode ser desconhecido, nada impede que  $X_0$  seja uma variável aleatória, desde que seja independente de  $W(t)$ ).

Note-se que podemos generalizar, sem dificuldades, ao caso de várias variáveis e vários processos de Wiener. Também podemos generalizar, embora disso não tratemos aqui, ao caso de processos com saltos.

Naturalmente, pressupõe-se um espaço de probabilidade subjacente  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e, representando por  $\omega \in \Omega$  o “acaso”, convém lembrar que  $W(t)$  é um processo estocástico, isto é depende do tempo e do acaso, pelo que rigorosamente deveríamos escrever (mas não o fazemos habitualmente)  $W(t, \omega)$ . Podemos pensar que um  $\omega$  concreto representa um estado concreto da natureza que determina os valores concretos (ao longo de toda a história do processo) dos factores perturbadores do nosso fenómeno; então  $\Omega$  representará o conjunto de todos os possíveis estados da natureza, a qual “escolhe ao acaso” um deles de acordo com a lei de probabilidade  $P$ . Para  $t$  fixo, temos uma variável aleatória (função mensurável- $\mathcal{F}$  do acaso). Para  $\omega$  fixo,  $W(t, \omega)$  representa uma função do tempo (uma trajectória ou realização do processo) que descreve a evolução do efeito acumulado (entre 0 e  $t$ ) das perturbações de base quando o estado da natureza é  $\omega$ . Claro que, a diferentes estados da natureza, podem corresponder trajectórias diferentes. Também  $X_0=X_0(\omega)$  pode depender do estado da natureza e, obviamente a solução da EDE, se existir, também depende do estado da natureza, isto é,  $X(t)=X(t, \omega)$  também é um processo estocástico.

Claro que agora, as previsões futuras dos valores de  $X(t)$  são de natureza probabilística, já que, para  $t$  fixo,  $X(t)$  é uma variável aleatória.

Natural é que as EDE tenham um campo de aplicação muito vasto, correspondente no essencial ao campo de aplicação das EDO, já que haverá quase sempre factores perturbadores não explicitamente considerados na EDO. Mas é óbvio que só valerá a pena usar EDE se esses factores perturbadores provocarem alterações relevantes relativamente aos resultados que se obteria usando EDO, como sucede frequentemente nos fenómenos biológicos. Convém ter em atenção, porém, que, mesmo para  $g$  pequenas, os resultados podem ser quantitativamente e até qualitativamente muito diferentes dos resultados obtidos trabalhando com EDO e valores médios de variáveis ou parâmetros. Mas o campo de aplicação das EDE é, de facto, mais vasto do que o das EDO já que há situações em que os factores aleatórios assumem um papel fundamental. É o caso de muitas aplicações financeiras (bolsas, futuros, opções, etc.), da sismologia ou das telecomunicações, em que modelos baseados em EDO seriam inúteis.

## 2. Breve introdução às equações diferenciais estocásticas

Naturalmente, entende-se por solução da EDE (2), a solução  $X(t)=X(t, \omega)$  da correspondente equação integral

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s). \quad (3)$$

Sob condições de regularidade adequadas, para cada trajetória  $\omega$  fixa, o primeiro integral pode ser interpretado como um vulgar integral de Riemann. Porém, o segundo integral não pode ser interpretado como integral de Riemann-Stieltjes porque o processo integrador  $W(t)$  tem variação ilimitada para quase todas as trajetórias, pelo que o limite das somas de Riemann-Stieltjes para uma sucessão de decomposições (com diâmetro convergente para zero) do intervalo de integração depende da escolha dos pontos intermédios onde é calculada a função integranda  $g(s, X(s))$ . Se fizermos a escolha (não-antecipativa) dos pontos iniciais de cada subintervalo (a escolha em que a dinâmica presente não é afectada pelas perturbações aleatórias futuras), temos o integral de Itô, que tem excelentes propriedades probabilísticas mas não segue as regras usuais de cálculo. Tal obriga a um novo cálculo, o cálculo estocástico de Itô. Aqui usa-se a convergência em média quadrática (convergência  $L^2$  com respeito a  $\omega$ ) para a obtenção do limite das somas de Riemann-Stieltjes, embora, ao generalizar a uma classe mais vasta de funções integrandas, se possa substituir essa convergência por uma convergência em probabilidade. Há outros integrais correspondentes a outras escolhas ou combinações de escolhas dos pontos intermédios, sendo o mais popular deles o integral de Stratonovich que, não tendo tão boas propriedades probabilísticas, segue as regras usuais de cálculo. Como é natural, as EDE de Itô e de Stratonovich com idênticas funções  $f$  e  $g$ , têm em geral soluções diferentes. Aliás, a EDE de Itô  $dX = f dt + g dW$  é equivalente à (tem a mesma solução da) EDE de Stratonovich (S)  $dX = f^* dt + g dW$  (o “(S)” é para assinalar que se usa o cálculo de Stratonovich) em que  $f^* = f - (1/4) \partial g^2 / \partial x$ . Em qualquer dos cálculos, as funções  $f$  e  $g$  devem satisfazer certas condições de regularidade para se poder garantir a existência e unicidade de solução da EDE; felizmente, com condições de regularidade adequadas, a solução é um processo de difusão que satisfaz as equações de Kolmogorov e, portanto, é um processo de Markov. Se a EDE for autónoma ( $f(t, x) = f(x)$  e  $g(t, x) = g(x)$ ), a solução é mesmo um processo de difusão homogêneo. Mais pormenores podem ver-se nos livros, como Braumann (2005) ou Øksendal (2003) ou ainda, para uma versão resumida, em Braumann (1998).

Devo referir que tem havido uma certa controvérsia na literatura sobre qual dos cálculos, Itô ou Stratonovich, é mais adequado em cada tipo de aplicações, uma vez que eles dão resultados que, até do ponto de vista qualitativo, são aparentemente diferentes. Por exemplo, em certos modelos de crescimento populacional e em certas condições, um cálculo prevê que a população se extingue com probabilidade um e o outro que a probabilidade de extinção é nula. Braumann (2007a,b,c), ilustrando com modelos de crescimento populacional e de pesca, resolve a controvérsia mostrando que a razão da aparente discrepância de resultados resulta da suposição implícita feita na literatura de que  $f(t, x)$  (taxa “média” de crescimento) tem o mesmo significado para os dois cálculos. Isso é falso pois  $f(t, x)$  representa médias diferentes da taxa de crescimento. Para uma classe muito ampla de modelos usados em crescimento populacional, representa a taxa média aritmética para o cálculo de Itô e a taxa média geométrica para o cálculo de Stratonovich. Se atendermos às diferenças entre as médias, os resultados coincidem. A moral da história é que temos de ter cuidado ao escolher a função  $f(t, x)$ . Por exemplo, no caso referido, se usarmos o cálculo de Itô, devemos naturalmente escolher para  $f(t, x)$  a expressão correcta para a taxa média aritmética de crescimento. Se, porém, usarmos o cálculo de Stratonovich, devemos escolher a expressão correcta para a taxa média geométrica de crescimento. Se tivermos esse cuidado elementar, os dois cálculos dão resultados totalmente coincidentes.

Daremos agora alguns exemplos ilustrativos da variedade de aplicações biológicas, na esperança de atrair alguns futuros investigadores numa área que está em intensa actividade. Escusado será dizer que muitos progressos teóricos que têm sido feitos no estudo das EDE têm sido suscitados por questões que surgem nas aplicações.

### 3. Aplicações em dinâmica de populações

Esta é área em que mais tenho trabalhado. Agora  $X(t)$  representa o tamanho (número de indivíduos, biomassa ou densidade) da população (de animais, plantas ou bactérias) no instante  $t$ .

No caso determinístico, a taxa de crescimento *per capita*  $r = \frac{dX(t)/dt}{X(t)}$  pode depender do tamanho da população  $x$  e do instante  $t$  [ $r = r(t, x)$ ]. Admitindo um ambiente estável, podemos supor um

modelo autónomo em que  $r=r(x)$ , podendo, se os recursos forem ilimitados, a função ser constante; mas, geralmente, os recursos são limitados pelo que os recursos disponíveis *per capita* tendem a diminuir quando a população aumenta, o que provoca que  $r(x)$  seja estritamente decrescente. Vários modelos com esta propriedade têm sido propostos, tais como o modelo logístico  $r(x)=r(1-x/K)$  ou o modelo de Gompertz  $r(x)=r \ln(K/x)$ , onde  $K$  (capacidade de sustento do meio) é, caso  $r>0$  and  $K>0$ , a população de equilíbrio estável para a qual o tamanho da população converge quando  $t\rightarrow+\infty$ .

Se o ambiente estiver sujeito a flutuações aleatórias, em vez de o crescimento *per capita* no intervalo infinitesimal  $dt$  ser descrito pelo modelo determinístico  $\frac{dX(t)}{X(t)} = r(X(t))dt$ , teremos, supondo que, em termos cumulativos, as flutuações aleatórias são impulsionadas por um processo de Wiener  $W(t)$  que afecta directamente o crescimento *per capita*, a EDE

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = r(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad (4)$$

onde  $\sigma(x)$  mede a intensidade do efeito dessas flutuações no crescimento *per capita* (os modelos propostos na literatura consideram habitualmente  $\sigma(x)$  constante ou proporcional a  $r(x)$ ).

Na literatura, os artigos consideram modelos específicos correspondendo a casos particulares das funções  $r(x)$  e  $\sigma(x)$ . Entre os artigos pioneiros mais relevantes contam-se Levins (1969), May (1973), Capocelli e Ricciardi (1974), Goel e Richter-Dyn (1974), Kiester e Barakat (1974), Tuckwell (1974), Roughgarden (1975), mas muitos outros se seguiram.

Dado que as propriedades deduzidas poderiam ser específicas dos modelos considerados, havia interesse em obter propriedades que fossem robustas relativamente ao modelo. Tinham particular interesse nas propriedades relativas a haver ou não extinção da população e, em caso negativo, existir uma densidade estacionária, isto é, uma distribuição de equilíbrio com densidade para a qual convergisse a distribuição de probabilidade do tamanho da população quando  $t\rightarrow+\infty$ . Em Braumann (1999b) considera-se, para  $\sigma(x)$  constante, o caso geral de  $r(x): (0,+\infty)\rightarrow(-\infty,+\infty)$  ser uma função arbitrária de classe  $C^1$ , satisfazendo, contudo, algumas hipóteses biologicamente realistas como ser estritamente decrescente, verificar  $r(+\infty)<0$  (o que significa que os recursos não permitem sustentar uma população demasiado grande) e  $R(0^+)=0$  com  $R(x)=r(x)x$  (população sem imigração). Foi possível mostrar que, se  $r(0^+)<0$ , a extinção ocorre com probabilidade um e que, se  $r(0^+)>0$ , a extinção tem probabilidade nula de ocorrer e existe uma densidade estacionária. Em Braumann (2001c) generaliza-se para o caso de  $\sigma(x)$  arbitrária, desde que sempre positiva e satisfazendo algumas condições técnicas pouco restritivas.

Na realidade, quando falamos de extinção, referíamos-nos a termos população nula ou a convergir para zero. Mas, se pensarmos o que significa uma população de, por exemplo, 0,4 indivíduos (não esquecer que a variável de estado  $X$  é contínua no modelo mas não na realidade), talvez seja preferível adoptar como critério mais realista de extinção, a população alguma vez atingir um tamanho  $a>0$  com  $a<X_0$ , embora pequeno, isto é, fixarmos um limiar absorvente de extinção  $a$ . Interessa, então determinar a probabilidade de ocorrer esta extinção realista e a distribuição do tempo de extinção, aspectos que tem interessantes aplicações na gestão de espécies em perigo. Estas matérias podem ser vistas em, por exemplo, Braumann (1995), Lange, Engen e Sæther (2003) e Carlos e Braumann (2005, 2006). Claro que também se pode estudar a probabilidade de atingir um limite elevado  $b>X_0$  e a distribuição do tempo para o atingir, o que, além de ser relevante em termos de preservação de espécies, também é importante para a prevenção de surtos de pragas agrícolas.

Uma outra aplicação é em espécies sujeitas a capturas (pesca, caça, florestação), em que, aos modelos anteriormente considerados, se acrescenta a mortalidade provocada pelas capturas:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = r(X(t))dt - h(t)dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad (5)$$

onde  $h(t)$  é a esforço de captura (esforço de pesca, etc.) e  $h(t)X(t)$  é a taxa de capturas (por unidade de tempo). Claro que  $h(t)$  pode, em geral ser controlado pelos operadores da exploração (definindo assim

uma política de capturas) e têm aparecido vários artigos, usando técnicas de controlo óptimo estocástico, para, relativamente a modelos específicos de  $r(x)$  e  $\sigma(x)$ , determinar a política de capturas que otimiza uma função objectivo, usualmente o valor esperado do lucro (a preços constantes, isto é afectando o lucro com uma taxa de depreciação) acumulado num certo horizonte temporal. Veja-se, por exemplo, Lungu e Øksendal (1997), Alvarez e Shepp (1997) e Alvarez (2000). Estas políticas, ao contrário do que sucede nos modelos determinísticos, são inaplicáveis porque implicam uma rápida alternância entre parar as capturas e capturar ao maior ritmo possível. Os trabalhos pioneiros de Beddington e May (1977), Gleit (1978) e May *et al.* (1978) optaram antes por considerar modelos em que o esforço de pesca é determinado exclusivamente pelo tamanho da população explorada  $h(t)=H(X(t))$  (um exemplo especial é o de esforço constante, situação em que as capturas são proporcionais à população existente), caso em que é possível, em certas condições, obter densidades estacionárias, isto é, um equilíbrio estocástico sustentável. Estudaram o comportamento dos modelos para  $r(x)$ ,  $h(x)$  e  $\sigma(x)$  específicos, tal como também fez Braumann (1985, 1993), onde se procuraram, dentro de certa classe de políticas, as que optimizassem as capturas esperadas num regime sustentável e sem extinção. O estudo para modelos gerais (com algumas restrições biologicamente razoáveis), em termos de extinção e de existência de densidade estacionária, foi feito em Braumann (1999, 2001a, 2002). Em Braumann (2001b) estudam-se modelos que combinam dois tipos de políticas (as de quota constante e as de esforço constante).

Sobre os problemas estatísticos de estimação (quer dos parâmetros de  $r(x)$  e  $\sigma(x)$  e, se houver capturas, de  $h(x)$ , quer da estimação não-paramétrica destas funções), de escolha de modelos e de previsão de tamanhos futuros da população, muito haveria a dizer, mas optamos por não o fazer aqui por limitações de espaço, apesar de serem fundamentais para a aplicação dos modelos. Só queremos referir que normalmente dispomos apenas de observações de uma única trajectória do processo (não é geralmente viável ter repetições, em condições idênticas, de populações em crescimento) e que, mesmo nessa trajectória, as observações são feitas (por vezes com erro) num número finito de instantes  $0=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n$ . Naturalmente que só alguma forma de ergodicidade (da solução ou de um processo relacionado com a solução) permite de alguma maneira usar certas “médias” temporais (ao longo da única trajectória) em substituição das médias de conjunto (médias ao longo do conjunto das trajectórias) de que não podemos dispor. Obviamente que as observações não são variáveis aleatórias independentes mas, como a solução da EDE é (sob condições de regularidade adequadas) um processo de Markov, a verosimilhança pode obter-se multiplicando as densidades de transição entre instantes de observação consecutivos. Sucede, porém, que é frequente não se conseguir obter uma expressão explícita para as densidades de transição, tendo que se usar aproximações adequadas ou técnicas alternativas. A consistência dos estimadores é muitas vezes difícil de comprovar e exige normalmente que o número de observações tenda para infinito e o espaçamento entre elas tenda para zero, além de uma ligação entre as velocidades de convergência destas duas grandezas. Estas dificuldades têm vindo a ser engenhosa e gradualmente ultrapassadas.

#### 4. Aplicações ao crescimento individual

Uma área recente de trabalho é a da utilização de EDE para modelar o crescimento de um indivíduo (animal ou planta) desde o nascimento até à maturidade (em termos de peso, volume, comprimento ou outra medida de tamanho), quando esse crescimento é influenciado por variações aleatórias no ambiente em que o indivíduo cresce. Seja  $X(t)$  o tamanho do indivíduo no instante  $t$ . Os modelos determinísticos mais utilizados podem geralmente escrever-se na forma  $dY(t) = \beta(\alpha - Y(t))dt$ , onde  $Y(t)=h(X(t))$ , com  $h(x)$  função de classe  $C^1$  estritamente crescente. Por exemplo, o modelo de Mitscherlich corresponde a  $h(x)=x$ , o de Bertalanffy-Richards a  $h(x)=x^c$  (com  $c>0$ ) e o de Gompertz a  $h(x)=\ln x$ . Note-se que  $A=h^{-1}(\alpha)$  é o tamanho assintótico que o animal atinge na maturidade. No caso estocástico podemos adoptar a classe de modelos baseada no modelo de Ornstein-Uhlenbeck (que nasceu na Física para descrever o movimento browniano de uma partícula)

$$dY(t) = \beta(\alpha - Y(t))dt + \sigma dW(t), \quad (6)$$

passando  $A=h^{-1}(\alpha)$  a ser o tamanho assintótico médio. O caso particular do modelo de Bertalanffy-Richards foi aplicado crescimento de árvores em Garcia (1983). Estranhamente este tipo de modelos não tem sido muito pouco utilizado, preferindo os que trabalham com estes dados usar modelos de regressão, que são adequados para erros de observação, mas que são totalmente inadequados para alterações provocadas por flutuações ambientais. De facto, os modelos de regressão tomam, como base de previsão do tamanho futuro, o tamanho da curva determinística, mesmo que muito diferente do tamanho actual do indivíduo, enquanto os modelos baseados em EDE partem do tamanho actual. Isso impede a situação pouco realista dos modelos de regressão, que, por não terem memória, prevêm, por exemplo, elevada probabilidade de recuperações milagrosas e quase instantâneas do peso de animais muito magros.

A classe geral de modelos foi estudada em Filipe, Braumann e Roquete (2007a,b) e Filipe e Braumann (2007, 2008), com aplicação a dados de bovinos mertolengos. Foi também tratado, no caso de termos vários animais (várias trajectórias) o caso mais complexo em que se admite que  $\alpha$  pode variar de animal para animal (pois não são geneticamente idênticos), pelo que se pode considerar também uma variável aleatória. Os problemas de estimação e de previsão (para uma ou várias trajectórias e, neste último caso, para  $\alpha$  comum a todos os animais ou para  $\alpha$  aleatório) foram também tratados.

Uma quantidade de particular interesse é o tempo necessário para que o animal atinja um determinado tamanho  $L$  adequado para a sua venda no mercado.

Claro que estes resultados têm implicações interessantes na optimização financeira de explorações pecuárias ou silvícolas, por exemplo.

## 5. Aplicações demográficas

Um correcto conhecimento das taxas de mortalidade é essencial para o planeamento dos sistemas de segurança social (pensões e fundos de reforma) e para a gestão de carteiras de seguros de vida ou de planos de poupança reforma. Em Portugal, recentes alterações legislativas incorporam já no cálculo das pensões um factor de sustentabilidade que tem em conta precisamente as alterações da esperança de vida da população. De facto, a redução das taxas de mortalidade que se tem vindo a observar graças aos progressos sociais e à evolução da Medicina, tem provocado o aumento da esperança de vida. Consequentemente, a utilização de taxas de mortalidade correntes, sem prever a sua actualização futura, pode dar origem a subavaliações dos encargos futuros da segurança social ou de instituições financeiras com o pagamento de pensões e de responsabilidades assumidas com planos de poupança reforma. Já no que se refere a seguros de vida, a consequência será a sobreavaliação dos encargos.

Há várias maneiras de modelar a evolução das taxas de mortalidade, sendo correntes os modelos determinísticos. Na verdade, porém, a evolução temporal das taxas de mortalidade, está sujeita a perturbações aleatórias decorrentes de problemas de saúde pública imprevistos (como, por exemplo, epidemias ou alterações climáticas), evolução não determinística dos progressos médicos, alterações económicas e sociais que afectam os riscos de morte, etc. Faz, pois, todo o sentido que as taxas de mortalidade evoluam de acordo com uma certa tendência essencialmente determinística, a que se sobrepõem alterações aleatórias, pelo que podem ser descritas por equações diferenciais estocásticas apropriadas, normalmente mais gerais do que as aqui descritas, incluindo a possibilidade de saltos (para descrever possíveis evoluções abruptas das condições de vida). Mas é de notar que há que combinar esta fonte de aleatoriedade ambiental que afecta as taxas de mortalidade com a aleatoriedade demográfica em que, mesmo para taxas fixas, que devem interpretar-se como probabilidades de morte para cada grupo etário, a mortalidade efectivamente observada num ano resulta da amostragem realizada sobre o grupo (de pensionistas ou de segurados) em estudo (cada indivíduo do grupo tem certa probabilidade de morrer nesse ano, contando para a mortalidade observada se morrer e não contando em caso contrário). Os riscos financeiros decorrentes do efeito demográfico, que tem a natureza de erro amostral, podem ser reduzidos aumentando a amostra, isto é, o tamanho do grupo. Já os riscos decorrentes da variabilidade ambiental, pelo contrário, ficam ampliados pelo aumento do tamanho do grupo. Um problema ainda em aberto é como fazer a cobertura do risco, já que, apesar de se usarem modelos de EDE relativamente semelhantes aos usados para os produtos financeiros

transaccionados no mercado, não se dispõe de instrumentos semelhantes de cobertura e avaliação do risco. Por outro lado, não se prevê que seja fácil a criação e aceitação pública de produtos financeiros derivados baseados na evolução das taxas de mortalidade.

Em Bravo e Braumann (2007) pode ver-se o enquadramento e resultados gerais deste estudo, mas, para uma análise detalhada de vários modelos e uma aplicação à realidade portuguesa, deve consultar-se Bravo (2007).

Uma outra alternativa é supor que as taxas de mortalidade evoluem de acordo com modelos essencialmente determinísticos mas em que os parâmetros sofrem perturbações aleatórias, isto é, são processos estocásticos cuja evolução é descrita por equações diferenciais estocásticas.

## 6. Outras aplicações biológicas

Naturalmente, os modelos de crescimento populacional podem aplicar-se, usando EDE em dimensão superior a um, a conjuntos de populações interactuantes. Um exemplo interessante é a do estudo de um sistema presa-predador feito por Rudnicki (2003).

Uma outra aplicação interessante refere-se à epidemiologia, onde o clássico modelo determinístico SIR que estuda a evolução do número de susceptíveis ( $S(t)$ ), infectados ( $I(t)$ ) e recuperados ( $R(t)$ ) tem uma versão estocástica em forma de EDE tridimensionais (mas na verdade vivendo num espaço a duas dimensões porque  $S(t)+I(t)+R(t)$  é o tamanho, considerado fixo neste modelo, da população). Veja-se Tornatore e Buccellato (2007).

Uma aplicação que tem já uma tradição antiga e um corpo de literatura extenso é o do estudo do comportamento eléctrico dos neurónios. Os chamados modelos neuronais que descrevem a evolução do potencial  $X(t)$  da membrana do neurónio são intrinsecamente estocásticos, já que são bastante imprevisíveis os impulsos eléctricos recebidos pelas ligações a múltiplos outros neurónios. Normalmente considera-se que, quando  $X(t)$  atinge um determinado limiar  $S > X_0$ , o neurónio dispara transmitindo sinais a outros neurónios e reduzindo o seu potencial a  $X_0$ . Até disparar, a dinâmica de  $X(t)$  é descrita por uma equação diferencial estocástica, sendo o modelo de Ornstein-Uhlenbeck talvez o mais popular. Uma variável com particular interesse é o tempo até disparar, cuja distribuição e momentos têm sido muito estudados para este e outros modelos alternativos. Pode encontrar uma boa abordagem no livro de Ricciardi (1977). Como o comportamento dos disparos é um pouco mais complexo do que aqui se descreveu, a literatura está cheia de refinamentos que colocam problemas teóricos muito interessantes.

As aplicações em genética de populações são também importantes, usando processos de difusão como boas aproximações à evolução das frequências génicas quando se incorporam os efeitos da deriva genética (variação amostral das frequências). Estes estudos têm importantes implicações no estudo das teorias de evolução das espécies e na datação da origem de espécies e de colonizações de populações. A apresentação em forma de processo de difusão, que é mais tradicional na literatura especializada desta área, é equivalente à utilização de EDE, pois, em condições de regularidade adequadas, as soluções de EDE são processos de difusão e vice-versa. Um clássico é o livro de Crow e Kimura (1970).

Mas a lista de aplicações é bastante mais vasta e inclui a análise de modelos imunológicos e fisiológicos, como, por exemplo, os modelos de evolução da concentração de insulina e glucose (e de outros químicos que com eles interagem), que têm muita importância para determinar o melhor doseamento da administração da insulina em diabéticos e para o desenvolvimento em curso de sistemas automáticos de administração de insulina. Veja-se, por exemplo, Picchini *et al.* (2006).

E é melhor parar por aqui, deixando de fora várias outras aplicações também interessantes, para além daquelas de que ninguém ainda se lembrou e que o leitor poderá vir a descobrir.

## Agradecimentos

O autor é membro do CIMA-U.E., centro de investigação financiado pelo Programa de Financiamento Plurianual da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT). Os resultados reportados sobre modelos de crescimento individual foram desenvolvidos no âmbito do projecto PTDC/MAT/64297/2006, financiado pela FCT.



## Referências

- Alvarez, L. H. R. (2000). On the option interpretation of rational harvesting planning. *J. Math. Biol.* **40**: 383-405.
- Alvarez, L. H. R., Shepp, L. A. (1997). Optimal harvesting of stochastically fluctuating populations. *J. Math. Biol.* **37**: 155-177.
- Beddington, J. R., May, R. M. (1977). Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment. *Science* **197**: 463-465.
- Braumann, C. A. (1985). Stochastic differential equation models of fisheries in an uncertain world: extinction probabilities, optimal fishing effort, and parameter estimation. Em *Mathematics in Biology and Medicine*, Capasso, V., Grosso, E., Paveri-Fontana, S. L. (eds.), Springer, Berlin.
- Braumann, C. A. (1993). General models of fishing with random growth parameters. Em *Mathematics Applied to Biology and Medicine*, Demongeot, J., Capasso, V. (eds.), Wuerz Publ. Ltd., Winnipeg.
- Braumann, C. A. (1995). Threshold crossing probabilities for population growth models in random environments. *J. Biological Systems* **3**: 505-517.
- Braumann, C. A. (1998). O Acaso, a bolsa e a vida. Em *Estatística: A Diversidade na Unidade. Actas do V Congresso Anual da SPE*, Souto de Miranda, M., Pereira, I. (eds.), p. 29-55, Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, Lisboa.
- Braumann, C. A. (1999). Variable effort fishing models in random environments. *Math. Biosci.* **156**: 1-19.
- Braumann, C. A. (1999b). Applications of stochastic differential equations to population growth. Em *Proc. 9th International Colloquium on Differential Equations*, Bainov, D. (ed.), VSP, Utrecht, p. 47-52 (invited paper).
- Braumann, C. A. (2001a). General stochastic differential equation model of population growth and fishing in a random environment. *Bull. Internat. Statistical Inst.* **LIX CP3**: 111-112.
- Braumann, C. A. (2001b). Constant effort and constant quota fishing policies with cut-offs in random environments. *Natural Resource Modelling* **14** (2): 199-232.
- Braumann, C. A. (2001c). Crescimento de populações em ambiente aleatório: generalização a intensidades de ruído dependentes da densidade da população. Em *A Estatística em Movimento*, Neves, M. M., Cadima, J., Martins, M. J., Rosado, F. (eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística, Lisboa, p. 119-128.
- Braumann, C. A. (2002). Variable effort harvesting models in random environments: generalization to density-dependent noise intensities. *Math. Biosci.* **177 & 178**: 229-245.
- Braumann, C. A. (2005). *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações*. Edições SPE, Lisboa.
- Braumann, C. A. (2007a). Itô versus Stratonovich calculus in random population growth. *Math. Biosci.* **206**: 81-107.
- Braumann, C. A. (2007b) Harvesting in a random environment: Itô or Stratonovich calculus. *J. Theoret. Biol.* **244**: 424-432.
- Braumann, C. A. (2007c). Population growth in random environments: which stochastic calculus? *Bull. Internat. Statistical Inst.* **LXII** (Proc. 56th Session of the ISI, electronic publication, printed version of the journal in press).
- Bravo, J. M. (2007). *Tábuas de Mortalidade Contemporâneas e Prospectivas: Modelos Estocásticos, Aplicações Actuarias e Cobertura do Risco de Longevidade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Évora, p. xxvi+565.
- Bravo, J. M., Braumann, C. A. (2007). The value of a random life: modelling survival probabilities in a stochastic environment. *Bull. Internat. Statistical Inst.* **LXII** (Proc. 56th Session of the ISI, electronic publication, printed version of the journal in press).
- Capocelli, R. M., Ricciardi, L. M. (1974). A diffusion model for population growth in random environments. *Theoret. Popul. Biol.* **5**: 28-41.
- Carlos, C., Braumann, C. A. (2005). Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório. Em *Estatística Jubilar*, Braumann, C. A., Infante, P., Oliveira, M. M., Alpizar-Jara, R., Rosado, F. (eds). Edições SPE, Lisboa p. 133-142.

- Carlos, C., Braumann, C. A. (2006). Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório e cálculos de Itô e Stratonovich. Em *Ciência Estatística*, Canto e Castro, L., Martins, R. G., Rocha, C., Oliveira, M. F., Leal, M. M., Rosado, F. (eds), Edições SPE, Lisboa, p. 229-238.
- Crow, J. F., Kimura, M. (1970). *An Introduction to Population Genetics Theory*. Harper and Row, New York.
- Filipe, P.A., Braumann, C.A. (2008). Modelling individual animal growth in random environments. In *Proc. 23d International Workshop on Statistical Modelling*, Eilers, P. H. C. (ed.), p. 232-237.
- Filipe, P.A., Braumann, C. A. (2007). Animal growth in random environments: estimation with several paths. *Bull. Internat. Statistical Inst.* LXII (Proc. 56th Session of the ISI, electronic publication, printed version of the journal in press).
- Filipe, P.A., Braumann, C.A., Roquete, C.J. (2007a). Modelos de crescimento de animais em ambiente aleatório. Em *Estatística Ciência Interdisciplinar*, Ferrão, M.E., Nunes, C., Braumann, C.A. (eds.), Edições SPE, Lisboa, p. 401-440.
- Filipe, P.A., Braumann, C.A., Roquete, C.J. (2007b). Crescimento individual em ambiente aleatório: várias trajetórias. Em *Actas do XV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*, Edições SPE, Lisboa (aceite para publicação).
- Garcia, O., (1983). A stochastic differential equation model for the height of forest stands. *Biometrics* 39: 1059-1072.
- Gleit, A. (1978). Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth. *Math. Biosci.* 41: 112-123.
- Goel, N. S., Richter-Dyn, N. (1974). *Stochastic Models in Biology*. Academic Press, N. Y.
- Kiester, A. R., Barakat, R. (1974). Exact solutions to certain stochastic differential equation models of population growth. *Theoret. Popul. Biol.* 6: 199-216.
- Lange, R., Engen, S. e Sæther, B.-E. (2003). *Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation*. Oxford University Press, Oxford.
- Levins, R. (1969). The effect of random variations of different types on population growth. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 62: 1061-1065.
- Lungu, E. M., Øksendal, B. (1997). Optimal harvesting from a population in a stochastic crowded environment. *Math. Biosci.* 145: 47-75.
- May, R. M. (1973). Stability in randomly fluctuating versus deterministic environments. *Amer. Natur.* 107: 621-650.
- May, R. M., Beddington, J. R., Horwood, J. H. Shepherd, J. G. (1978). Exploiting natural populations in an uncertain world. *Math. Biosci.* 42: 219-252.
- Øksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. (6<sup>th</sup> edition). Springer, Berlin.
- Picchini, U., Ditlevsen, S., De Gaetano, A. (2006). Modeling the euglycemic hiperinsulinemic clamp by stochastic differential equations. *J. Math. Biol.* 53: 771-796.
- Ricciardi, L. M. (1977). *Diffusion Problems and Related Topics in Biology*. Lecture Notes in Biomathematics 14, Springer, Berlin.
- Roughgarden, J. (1975). A simple model for population dynamics in stochastic environments. *Amer. Natur.* 109: 713-736.
- Rudnicki, R. (2003). Long-rime behaviour of a predator-prey model. *Stochastic Processes Appl.* 108: 93-107.
- Tornatore, E., Buccellato, S. M. (2007). On a stochastic SIR model. *Applicationes Mathematicae* 34: 389-400.
- Tuckwell, H. C. (1974). A study of some diffusion models of population growth. *Theoret. Popul. Biol.* 5: 345-357.

