

MATERIA

Análise Económica dos Mercados Financeiros II

TITULACIÓN

Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros

unidade
didáctica
1

Ciencias Sociais e Xurídicas

Equilibrio e valoración de activos

Juan Carlos Reboredo Nogueira

Departamento: Fundamentos da Análise Económica

Facultade ou Escola: Facultade de CC Económicas e Empresariais

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2013



Esta obra atópase baixo unha licenza Creative Commons BY-NC-SA 3.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-SA 3.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/legalcode.gl>

Deseño e maquetación

J. M. Gairí

Edita

Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

ISBN

978-84-15876-37-3

MATERIA: Análise Económica dos mercados financeiros II

TITULACIÓN: Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros

PROGRAMA XERAL DO CURSO

Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Equilibrio e valoración de activos

Unidade II. Valoración intertemporal de activos

Unidade III. Valoración de futuros

Unidade IV. Valoración de opcións

Unidade V. Microestrutura de mercado e revelación de prezos

Unidade VI. Modelo de mercado do mercado de valores en España

ÍNDICE

Introdución

Palabras clave

Metodoloxía

Mercados completos con e sen activos Arrow-Debreu

1. Equilibrio con activos Arrow-Debreu
2. Equilibrio sen activos Arrow-Debreu

Mercados incompletos

1. Equilibrio con activos Arrow-Debreu
2. Equilibrio sen activos Arrow-Debreu

Equilibrio e valoración con consumo: CCAPM

Actividades propostas

Bibliografía

INTRODUCCIÓN

Esta unidade didáctica forma parte do curso de Análise Económica dos Mercados Financeiros II que se imparte no primeiro cuadrimestre do Máster en Economía: Organización Industrial e Mercados Financeiros.

O propósito da unidade é introducir o modelo de valoración de activos de equilibrio no contexto de mercados completos e incompletos con e sen activos Arrow-Debreu. Así, analízase como as decisións financeiras levan aparelladas a elección dunha senda temporal de consumo óptima e como estas decisións permiten ao individuo elixir o perfil de risco acorde coas súas preferencias. Finalmente, analízase a influencia do consumo agregado na determinación do valor dun activo financeiro, obtendo a valoración de equilibrio dada polo modelo CCAPM.

A comprensión desta unidade reviste un grao de dificultade elevado na mediada que require dun elevado nivel de abstracción e do manexo de técnicas de optimización e coñecementos de estatística. É por iso que ao longo da unidade se utilizan numerosos exemplos numéricos que tratan de ilustrar a conexión entre as intuicións financeiras dos modelos e a súas implicacións, así como as limitacións prácticas dos seus supostos básicos.

PALABRAS CLAVE

Equilibrio, valoración, activos Arrow-Debreu, mercados completos, mercados incompletos, CCAPM.

METODOLOXÍA

- A impartición do curso sempre adoptará como punto de partida as intuicións financeiras, que se tomarán como base, e a enmarcación destas intuicións no contexto do problema de valoración.
- Utilizarase preferentemente a linguaxe gráfica, máis intuitivo e máis fácil de assimilar polo estudante, pasando posteriormente á formulación dos problemas considerados en termos formais.
- Ilustraranse todos os conceptos con exemplos prácticos que estean próximos a realidade financeira do alumno coa finalidade de que o alumno aprenda a aplicar os instrumentos de valoración a activos financeiros con características semellantes.
- Propoñerase unha serie de exercicios prácticos que ilustren a aplicabilidade e utilidade dos coñecementos adquiridos.
- Fomentarase a participación do alumno, tanto no desenvolvemento dos contidos teóricos como na resolución dos casos prácticos.

MERCADOS COMPLETOS

1. Equilibrio con activos Arrow-Debreu

Consideramos o problema de elección de carteira onde o investidor ten como obxectivo maximizar a súa utilidade esperada e non ten poder de mercado para determinar os prezos.

Consideramos un mercado coas seguintes características:

- o Individuos: $i = 1, \dots, I$, adversos ao risco
- o 2 períodos de tempo, $t = 0, t = 1$
- o Existe incerteza no momento $t=1$: $s=1, \dots, S$
- o Dotacións iniciais de consumo nos diferentes momentos de tempo e estados da natureza: e_0^i, e_s^i
- o Consumos non duradeiro: $\{c_0^i, c_s^i \text{ para } s \in \Omega; i = 1, \dots, I, s = 1, \dots, S\}$
- o Oferta igual a demanda:

$$\sum_{i=1}^I c_0^i = C_0, \sum_{i=1}^I c_s^i = C_s, \text{ para calquera estado } s \in \Omega$$
- o No mercado intercámbianse tantos activos Arrow-Debreu (A-D) como estados da natureza (mercado completo)
 - ϕ_s prezo hoxe dun activo Arrow-Debreu
 - ϕ_0 prezo das unidades de consumo hoxe, 1 unidade.
- o O mercado de activos baléirase: $\sum_{i=1}^I q_s = 0 \quad \forall s$

Baixo estes supostos, podemos determinar o prezo de equilibrio dos activos que se intercambian no mercado coa condición de baleirado de mercado. As decisións dos individuos serán tales que:

$$\max_{\{c_0^i, c_s^i; i=1, \dots, I\}} U^i(c_0^i) + \sum_{s=1}^S \pi_{is} U^i(c_s^i)$$

$$\text{t.q. } \phi_0 c_0^i + \sum_{s=1}^S \phi_s c_s^i \leq \phi_0 e_0^i + \sum_{s=1}^S \phi_s e_s^i, \quad c_0^i, c_s^i \geq 0$$

Resolvendo este problema de optimización, teremos que:

$$L = U^i(c_0^i) + \sum_{s=1}^S \pi_{is} U^i(c_s^i) + \lambda^i \left[\phi_0 e_0^i + \sum_{s=1}^S \phi_s e_s^i - \phi_0 c_0^i - \sum_{s=1}^S \phi_s c_s^i \right]$$

Das condicións de primeiro orde (C.P.O.), derivamos os prezos dos A-D:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U^i}{\partial c_0^i} &= \lambda^i \phi_0 \\ \pi_{is} \frac{\partial U^i}{\partial c_s^i} &= \lambda^i \phi_s ; s = 1, \dots, S \\ \phi_0 e_0^i + \sum_{s=1}^S \phi_s e_s^i &= \phi_0 c_0^i + \sum_{s=1}^S \phi_s c_s^i \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\pi_{is} \partial U^i / \partial c_s^i}{\partial U^i / \partial c_0^i} &= \frac{\phi_s}{\phi_0} ; s = 1, \dots, S \quad \leftarrow \text{Prezo do activo A-D} \\ \frac{\pi_{ik} \partial U^i / \partial c_k^i}{\pi_{ik} \partial U^i / \partial c_k^i} &= \frac{\phi_s}{\phi_k} ; s \neq k \end{aligned}$$

De acordo coas C.P.O., o prezo relativo dos A-D está determinado pola “RMS” entre o consumo presente e consumo futuro ou entre os consumos futuros en diferentes estados da natureza.

Exemplo 1:

Un individuo con: $t=0, 1; s=1, 2; \phi_1 = 0,60, \phi_2 = 0,50 \quad e_0 = 10 \quad e_1 = 5 \quad e_2 = 2$

Preferencias: $u(c_0, c_s) = \ln(c_0) + \left[\frac{1}{2} \ln(c_1) + \frac{1}{2} \ln(c_2) \right]$

$$\max_{c_0, c_1, c_2} \ln(c_0) + \left[\frac{1}{2} \ln(c_1) + \frac{1}{2} \ln(c_2) \right] \quad \text{t.q.} \quad c_0 + \phi_1 c_1 + \phi_2 c_2 \leq 10 + \phi_1 5 + \phi_2 2$$

$$L = \ln(c_0) + \left[\frac{1}{2} \ln(c_1) + \frac{1}{2} \ln(c_2) \right] + \lambda [14 - c_0 - 0,6 c_1 - 0,5 c_2]$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_0} &= \frac{1}{c_0} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c_1} &= \frac{1}{2} \frac{1}{c_1} - 0,6\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c_2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{c_2} - 0,5\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 14 - c_0 - \phi_1 c_1 - \phi_2 c_2 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{c_0} \\ c_0 &= 1,2c_1 \\ c_0 &= c_2 \\ 1,2c_1 + 0,6c_1 + 0,5 \cdot 1,2c_1 &= 14 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Optimo:} \\ &c_0 = 7 \\ &c_1 = 5,83 \\ &c_2 = 7 \\ &u(c_0, c_s) = 3,45 \\ &u(c_0^*, c_s^*) = 3,80 \end{aligned}$$

Exemplo 2:

2 individuos; $t = 0, 1; s = 1, 2; e_0^1 = 5 \quad e_1^1 = 5 \quad e_2^1 = 2, \quad e_0^2 = 15 \quad e_1^2 = 3 \quad e_2^2 = 8$

Preferencias:

$$\left[\begin{aligned} u(c_0^1, c_s^1) &= c_0^1 + \left[\frac{1}{2} \ln(c_1^1) + \frac{1}{2} \ln(c_2^1) \right] \\ u(c_0^2, c_s^2) &= c_0^2 + \left[\frac{1}{2} \ln(c_1^2) + \frac{1}{2} \ln(c_2^2) \right] \end{aligned} \right]$$

Individuo 1:

$$\max_{c_0, c_1, c_2} c_0^1 + \left[\frac{1}{2} \ln(c_1^1) + \frac{1}{2} \ln(c_2^1) \right] \quad \text{t.q.} \quad c_0^1 + \phi_1 c_1^1 + \phi_2 c_2^1 \leq 5 + \phi_1 5 + \phi_2 2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_0} &= 1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c_1} &= \frac{1}{2} \frac{1}{c_1^1} - \phi_1 \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c_2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{c_2^1} - \phi_2 \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 5 + \phi_1 5 + \phi_2 2 - c_0^1 - \phi_1 c_1^1 - \phi_2 c_2^1 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda &= 1 \\ c_1^1 &= \frac{1}{2\phi_1} \\ c_2^1 &= \frac{1}{2\phi_2} \\ 5 + \phi_1 5 + \phi_2 2 &= c_0^1 + \phi_1 c_1^1 + \phi_2 c_2^1 \end{aligned}$$

Individuo 2:

$$\max_{c_0, c_1, c_2} c_0^2 + \left[\frac{1}{2} \ln(c_1^2) + \frac{1}{2} \ln(c_2^2) \right] \quad \text{t.q.} \quad c_0^2 + \phi_1 c_1^2 + \phi_2 c_2^2 \leq 15 + \phi_1 3 + \phi_2 8$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_0} &= 1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c_1} &= \frac{1}{2} \frac{1}{c_1^2} - \phi_1 \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c_2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{c_2^2} - \phi_2 \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 15 + \phi_1 3 + \phi_2 8 - c_0^2 - \phi_1 c_1^2 - \phi_2 c_2^2 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda &= 1 \\ c_1^2 &= \frac{1}{2\phi_1} \\ c_2^2 &= \frac{1}{2\phi_2} \\ 15 + \phi_1 3 + \phi_2 8 &= c_0^2 + \phi_1 c_1^2 + \phi_2 c_2^2 \end{aligned} \right\}$$

Equilibrio: baleirado de mercado

$$\left. \begin{aligned} c_0^1 + c_0^2 &= 20 \\ c_1^1 + c_1^2 &= 8 \\ c_2^1 + c_2^2 &= 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{1}{2\phi_1} + \frac{1}{2\phi_1} &= 8 \\ \frac{1}{2\phi_2} + \frac{1}{2\phi_2} &= 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \phi_1 &= 0,125 \\ \phi_2 &= 0,10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} c_1^1 = c_1^2 &= 4 \\ c_2^1 = c_2^2 &= 5 \end{aligned}$$

Da restrición orzamentaria de cada axente podemos determinar os consumos óptimos no momento presente:

$$c_0^1 = 5 + 0,125 \cdot 5 + 0,10 \cdot 2 - 0,125 \cdot 4 - 0,10 \cdot 5 = 4,825$$

$$c_0^2 = 15 + 0,125 \cdot 3 + 0,10 \cdot 8 - 0,125 \cdot 4 - 0,10 \cdot 5 = 15,175$$

En resumo:

	ANTES			u(·)	EQUILIBRIO			u(·)
	t = 0	t = 1			t = 0	t = 1		
		s = 1	s = 2			s = 1	s = 2	
individuo 1	5	5	2	6.15	4.825	4	5	6.32
individuo 2	15	3	8	16.59	15.175	4	5	16.67
Total	20	8	10		20	8	10	

Ademais, teremos que:

- O mercado de activos está en equilibrio: oferta e demanda de activos A-D iguálanse
- O resultado de equilibrio depende das probabilidades que cada individuo teña sobre os distintos estados da natureza, pero a existencia do equilibrio é independente da discrepancia ou non entre os individuos sobre as probabilidades (ver condicións de optimalidade).

O equilibrio competitivo que acabamos de derivar ten dúas características fundamentais:

A. A asignación de equilibrio competitivo é óptima no sentido de Pareto: non existe unha reasignación alternativa que mellore o benestar dun individuo sen empeorar o benestar do outro individuo. Podemos demostralo da seguinte maneira:

$$\max_{\{c_{i0}, c_{is}; i=1, \dots, I\}} L = \sum_{i=1}^I \lambda_i \left[\sum_{s=1}^S \pi_{is} U^i(c_0^i, c_s^i) \right] + \phi_0 \left(C_0 - \sum_{i=1}^I c_0^i \right) + \sum_{s=1}^S \phi_s \left(C_s - \sum_{i=1}^I c_s^i \right)$$

C.P.O.

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i \sum_{s=1}^S \pi_{is} \frac{\partial U^i}{\partial c_0^i} &= \phi_0 ; i=1, \dots, I \\ \lambda_i \pi_{is} \frac{\partial U^i}{\partial c_s^i} &= \phi_s ; s=1, \dots, S ; i=1, \dots, I \end{aligned} \right\} \frac{\pi_{is} \partial U^i / \partial c_s^i}{\sum_{s=1}^S \pi_{is} \partial U^i / \partial c_0^i} = \frac{\phi_s}{\phi_0} ; s=1, \dots, S ; i=1, \dots, I$$

$$\sum_{i=1}^I c_s^i = C_s ; s=1, \dots, S$$

$$\sum_{i=1}^I c_0^i = C_0$$

A RMS entre consumo presente e consumo futuro contingente é igual ao cociente dos prezos sombra dos consumos (idénticos para todos os individuos). No óptimo todos os individuos teñen a mesma RMS.

B. Distribución do risco en equilibrio: a asignación óptima que se produce co intercambio de activos A-D dá lugar a unha redistribución do risco entre os individuos. Esta distribución depende das seguintes circunstancias:

- Sen risco agregado e con aversión ao risco:

Exemplo 1: $u(c_1, c_2) = \frac{1}{2}(-e^{-Ac_1}) + \frac{1}{2}(-e^{-Ac_2})$

	ANTES		$A_1 = A_2 = 1$		$A_1 = 1, A_2 = 2$	
	t=1		t=1		t=1	
	s=1	s=2	s=1	s=2	s=1	s=2
individuo 1	1	4	2,5	2,5	3,10	3,10
individuo 2	4	1	2,5	2,5	1,90	1,90
Total	5	5	5	5	5	5

Teremos que:

- Se os individuos teñen a mesma aversión ao risco, hai un aseguramento mutuo: fondo de mutualidade.
- Se os individuos teñen distinta aversión ao risco, o individuo menos averso ao risco prové seguro ao máis averso.
- RMS(1)=RMS(2)=1. Os individuos teñen o mesmo consumo en ambos os estados, aínda que (posiblemente) diferente cantidade entre individuos.

- Con risco agregado e con aversión ao risco:

Exemplo 2: $u(c_1, c_2) = \frac{1}{2}(-e^{-Ac_1}) + \frac{1}{2}(-e^{-Ac_2})$

ANTES				$A_1 = A_2 = 1$				$A_1 = 1, A_2 = 2$			
	t=1		u(.)	t=1		u(.)	t=1		u(.)		
	s=1	s=2		s=1	s=2		s=1	s=2			
individuo 1	1	2	-0,252	3	5	-0,028	4.23	6.9	-0,008		
individuo 2	5	8	-0,004	3	5	-0,028	1.77	3.1	-0,016		
Total	6	10		6	10		6	10			

Se un individuo é máis rico (independentemente de s): non é posible o intercambio.

ANTES				$A_1 = A_2 = 1$				$A_1 = 1, A_2 = 2$			
	t=1		u(.)	t=1		u(.)	t=1		u(.)		
	s=1	s=2		s=1	s=2		s=1	s=2			
individuo 1	4	8	-0,009	7	5.5	-0,002	9.56	7.56	0,000		
individuo 2	10	3	-0,025	7	5.5	-0,002	4.44	3.44	-0,001		
Total	14	11		14	11		14	11			

Cunha distribución desigual entre individuos e estados: é posible o intercambio. O individuo menos adverso prevé seguro ao máis adverso.

2. Equilibrio sen activos Arrow-Debreu

Consideremos que non se intercambian activos A-D no mercado e en cambio se intercambian $j = 1, \dots, N$ activos financeiros (bonos e accións) con pagos X_{js} unidades de consumo en $t = 1$ e s , para $s = 1, \dots, S$. Ademais, os individuos teñen unas dotacións iniciais de e_j^i de activos e e_0^i unidades de consumo en $t = 0$.

Podemos replicar o patrón de consumo desexado por medio dunha combinación de activos complexos e construír os activos A-D.

Exemplo:

$S = 2$ e temos 2 activos con prezos 2€ e 5€ e uns pagos dados por:

$$\begin{matrix}
 s = 1 & s = 2 \\
 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

Replicamos os fluxos dos activos A-D da seguinte maneira:

$$\begin{matrix}
 \text{Activo A-D para o estado 1:} \\
 \text{Activo A-D para o estado 2:}
 \end{matrix}
 \left. \begin{matrix}
 \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 2 = 1 \\
 \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 6 = 0 \\
 \delta \cdot 3 + \eta \cdot 2 = 0 \\
 \delta \cdot 1 + \eta \cdot 6 = 1
 \end{matrix} \right\}
 \begin{matrix}
 \text{Invertible} \\
 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 & -0,125 \\ -0,0625 & 0,1875 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

E obtemos o prezo dos activos A-D como:

$$\phi_1 = 0,375 \cdot 2 - 0,0625 \cdot 5 = 0,438 \quad \phi_2 = -0,125 \cdot 2 + 0,1875 \cdot 5 = 0,6875$$

O problema dos individuos consiste en determinar o patrón intertemporal de consumo óptimo resolvendo o seguinte problema:

$$\max_{\{c_0^i, z_j^i; i=1, \dots, I\}} U^i(c_0^i) + \sum_{s=1}^S \pi_{is} U^i \left(\sum_{j=1}^N z_j^i X_{js} \right)$$

$$\text{t.q. } c_0^i + \sum_{j=1}^N P_j z_j^i \leq e_0^i + \sum_{j=1}^N P_j e_j^i$$

As C.P.O. para resolver este problema son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U^i}{\partial c_0^i} &= \lambda \\ \sum_{s=1}^S \pi_{is} \frac{\partial U^i}{\partial z_j^i} X_{js} &= \lambda P_j \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} \sum_{s=1}^S \pi_{is} \frac{\partial U^i}{\partial z_j^i} X_{js} \\ \frac{\partial U^i}{\partial c_0^i} \end{matrix} = P_j; j=1, \dots, N \Rightarrow P_j = E(MX_j); j=1, \dots, N$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{s=1}^S \pi_{is} \frac{\partial U^i}{\partial z_j^i} X_{js}}{\sum_{s=1}^S \pi_{is} \frac{\partial U^i}{\partial z_h^i} X_{hs}} = \frac{P_j}{P_h}; j \neq h$$

Cada individuo *i* axusta o seu consumo en *t* = 0 e a súa carteira de activos financeiros de forma que esta relación se cumpre.

Para un activo de renda fixa: $\frac{\partial U^i}{\partial c_0^i} P_f = \frac{\partial U^i}{\partial z_j^i} X_f$

A condición de equilibrio podemos reescribila como:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1S} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2S} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{N1} & X_{N2} & \dots & X_{NS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{i1} \frac{\partial U^i / \partial z_1^i}{\partial U^i / \partial c_0^i} \\ \pi_{i2} \frac{\partial U^i / \partial z_2^i}{\partial U^i / \partial c_0^i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_{is} \frac{\partial U^i / \partial z_N^i}{\partial U^i / \partial c_0^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_N \end{pmatrix}$$

invertible

Deste sistema obtemos o número óptimo, *z*, de activos de cada tipo.

Exemplo: consideremos 2 activos:

	Pagos		Prezo
	s=1	s=2	
Activo 1	4	20	8
Activo 2	5	15	9
Probabilidades	0,5	0,5	

e un individuo con $c_0 = 20$, $e_1 = 2$, $e_2 = 1$ (activos 1 y 2). O problema do individuo será:

$$\begin{cases} u(c_0, c_s) = c_0 + \left[\frac{1}{2} \ln(z_1 4 + z_2 5) + \frac{1}{2} \ln(z_1 20 + z_2 15) \right] \\ c_0 + z_1 8 + z_2 9 \leq 45 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda = 1 \\ \frac{1}{2} \frac{1}{z_1 4 + z_2 5} 4 + \frac{1}{2} \frac{1}{z_1 20 + z_2 15} 20 = \lambda 8 \\ \frac{1}{2} \frac{1}{z_1 4 + z_2 5} 5 + \frac{1}{2} \frac{1}{z_1 20 + z_2 15} 15 = \lambda 9 \\ c_0 + z_1 8 + z_2 9 = 45 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} \frac{1}{z_1 4 + z_2 5} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{z_1 20 + z_2 15} \end{array} \right) &= \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,33 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Resultado da asignación:

	ANTES				EQUILIBRIO			
	t=0	t=1		u(-)	t=0	t=1		u(-)
		s=1	s=2			s=1	s=2	
individuo 1	20	13	55	23,29	44	0,3333	5	44,25

MERCADOS INCOMPLETOS

1. Equilibrio con activos Arrow-Debreu

Se non temos tantos activos A-D como estados da natureza, a asignación óptima reporta menos utilidade aos individuos.

Exemplo:

1 individuo; t = 0, 1; s = 1, 2; $\phi_1 = 0,60$, $e_0 = 10$ $e_1 = 5$ $e_2 = 2$

$$\max_{c_0, c_1} \ln(c_0) + \left[\frac{1}{2} \ln(c_1) + \frac{1}{2} \ln(2) \right] \quad \text{t.q.} \quad c_0 + 0,6 \cdot c_1 + 2 \leq 10 + 0,6 \cdot 5 + 2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_0} = \frac{1}{c_0} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{1}{2} \frac{1}{c_1} - 0,6\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 + 0,6 \cdot 5 + 2 - c_0 - 0,6 \cdot c_1 - 2 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda = \frac{1}{c_0} \\ c_0 = 1,2 \cdot c_1 \\ c_0 + 0,6 \cdot c_1 = 13 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Optimo:} \\ c_0 = 7,22 \\ c_1 = 8,66 \\ c_2 = 2 \end{array} \right\}$$

$$u(c_0, c_s) = 3,45 \rightarrow u(c_0^*, c_s^*) = 3,80$$

$$\rightarrow u(c_0^*, c_s^*) = 3,40 \leftarrow \text{Non habería intercambio}$$

2. Equilibrio sen activos Arrow-Debreu

Cando non se intercambian activos A-D e só activos que xeran diferentes fluxos pero o mercado non é completo, as asignacións de consumo resultantes da condición de optimalidade non serán óptimo paretianas: só é posible elixir unha distribución de consumo que é unha función lineal dos pagos dos activos existentes.

Exemplo:

Consideremos S=2 e un único activo:

	Pagos		Prezo
	s=1	s=2	
Activo 1	4	20	8
Probabilidades	0,5	0,5	

con $c_0 = 29$, $e_1 = 3,125$ (activo 1). Teremos que:

$$u(c_0, c_s) = c_0 + \left[\frac{1}{2} \ln(z_1 4) + \frac{1}{2} \ln(z_1 20) \right]$$

$$c_0 + z_1 8 \leq 45$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{z_1} 4 + \frac{1}{2} \frac{1}{z_1} 20 = 8 \Rightarrow \left. \begin{matrix} z_1 = 0,125 \\ z_1 = 0 \end{matrix} \right\}$$

Resultado da asignación:

	ANTES			u(-)	EQUILIBRIO			u(-)
	t=0	t=1			t=0	t=1		
		s=1	s=2			s=1	s=2	
individuo 1	29	12,5	62,5	32,33	44	0,5	2,5	44,11

Con mercados completos:

	ANTES			u(-)	EQUILIBRIO			u(-)
	t=0	t=1			t=0	t=1		
		s=1	s=2			s=1	s=2	
individuo 1	20	13	55	23,29	44	0,3333	5	44,25

EQUILIBRIO E VALORACIÓN CON CONSUMO: CCAPM

Consideramos un axente representativo con preferencias homoxéneas, funcións de utilidade aditivas temporalmente e independentes entre estados que son estritamente crecentes, cóncavas e diferenciables.

Dispónse dun activo incerto j con prezo igual a P_j e pagos futuros X_{js} , z_j é a cantidade a investir neste activo.

O problema do axente representativo podemos expresalo como:

$$\max_{\{z_j\}} U(C_0 - z_j P_j) + \sum_{s=1}^S \pi_s U(C_{1s} + z_j X_{js}) \Rightarrow \max_{\{z_j\}} U(C_0 - z_j P_j) + E[U(C_1 + z_j X_j)]$$

C.P.O.

$$P_j U'(C_0 - z_j P_j) = E[U'(C_1 + z_j X_j) X_j] \xrightarrow{z_j=0} P_j = \frac{E[U'(C_1) X_j]}{U'(C_0)}$$

Ademais:

$$P_j = \frac{E[U'(C_1) X_j]}{U'(C_0)} = \sum_{s=1}^S \pi_s \frac{U'(C_{1s}) X_{js}}{U'(C_0)} = \sum_{s=1}^S \pi_s M X_{js} = \sum_{s=1}^S \phi_s X_{js} \quad j = 1, \dots, N$$

M é o cociente de utilidades marxinais de consumo agregado ou a relación marxinal de substitución entre consumo agregado presente e consumo agregado futuro.

Se consideramos un bono (básico):

$$\frac{1}{1+r_f} = E\left[\frac{U'(C_1)}{U'(C_0)}\right] \Rightarrow 1 = E\left[\frac{U'(C_1)(1+r_f)}{U'(C_0)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{E[U'(C_1)(r_j - r)]}{U'(C_0)} = 0 \Rightarrow E[U'(C_1)(r_j - r_f)] = 0 \quad j = 1, \dots, N$$

Utilizando a definición de covarianza:

$$E(r_j - r_f) = -\left\{\frac{1}{E[U'(C_1)]}\right\} \text{cov}[U'(C_1), r_j],$$

podemos reescribir a expresión multiplicando e dividindo por $U'(C_0)$:

$$\bar{r}_j - r_f = -(1+r_f) \text{cov}\left[\frac{U'(C_1)}{U'(C_0)}, r_j\right]$$

A esta expresión que nos da o valor do activo en equilibrio denomínaselle modelo de valoración con consumo agregado, CCAPM

Calquera activo j cun rendemento positivamente correlacionado coa utilidade marxinal do consumo agregado terá unha prima de risco reducida: o activo será máis atractivo para o investidor, polo que o seu prezo será máis baixo.

Consideramos a carteira de mercado, m, con pagos futuros idénticos á riqueza agregada, W_{1m} , entón:

$$\bar{r}_m - r_f = -\left\{\frac{1}{E[U'(W_{1m})]}\right\} \text{cov}[U'(W_{1m}), (r_m - r_f)]$$

Substituíndo $E[U'(W_{1m})]$ na prima de risco do activo j:

$$\bar{r}_j - r_f = \frac{\text{cov}[U'(W_{1m}), r_j]}{\text{cov}[U'(W_{1m}), r_m]} (\bar{r}_m - r_f),$$

onde $\frac{\text{cov}[U'(W_{1m}), r_j]}{\text{cov}[U'(W_{1m}), r_m]}$ é unha medida de risco sistemático que xeneraliza a beta. No caso particular que as preferencias dos individuos son cuadráticas, a medida de risco sistemático é a beta.

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. Nunha economía de dous períodos, con dous estados da natureza e dous individuos dispónse de 10 unidades de consumo hoxe e de 30 e 50 unidades de consumo mañá se estamos no estado 1 ou 2, respectivamente. As preferencias dos dous individuos sobre o consumo están representadas polas seguintes funcións de utilidade: $u(c) = \ln(c)$ e $u(c) = -e^{-c}$. Se a probabilidade de estar en cada un dos estados é de 0,6 e 0,4, e existen a posibilidade de comprar activos A-D, determinar:

- O consumo óptimo de cada individuo en cada período de tempo e estado da natureza.
- A demanda de activos A-D e o seu prezo.
- Analizar como é a distribución de risco entre os individuos.
- Cal é o prezo dun bono cupón cero que ten un valor nominal de 100€?

2. Consideremos unha economía con 3 individuos que teñen unhas preferencias sobre o consumo representables por medio dunha función de utilidade logarítmica. Nesta economía só hai dous períodos e unicamente consómese no segundo período. A única empresa produtora de bens de consumo é propiedade dos tres individuos cunha participación do 40%, 50% e 10% para os individuos 1, 2 e 3, respectivamente. A produción de bens de consumo varía segundo o estado da natureza, podendo ser de 100, 80, 40 ou 15 unidades de bens de consumo, e cada un dos estados teñen a mesma probabilidade de ocorrencia. O mercado financeiro é completo.

Determinar:

- A distribución óptima de consumo para cada individuo.
- O equilibrio no mercado financeiro.

BIBLIOGRAFÍA

DANTHINE, JEAN-PIERRE Y DONALDSON, JOHN B. (2005): INTERMEDIATE FINANCIAL THEORY. ACADEMIC PRESS ADVANCED FINANCE SERIES. CAPÍTULOS 9 E 10.

HENS, THORSTEN Y RIEGER, MARC O. (2010): FINANCIAL ECONOMICS. A CONCISE INTRODUCTION TO CLASSICAL AND BEHAVIORAL FINANCE. SPRINGER. CAPITULO 4.

MARÍN, JOSÉ MARÍA Y RUBIO, GONZALO (2001): ECONOMÍA FINANCIERA. ANTONI BOSCH. CAPÍTULO 19.



Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA